

УДК 531.01

Построение алгоритма синтеза управления с насыщением в задаче слежения для колесного мобильного робота

© Д. Ю. Моторина¹

Аннотация. В работе рассматривается задача слежения для мобильного роликонесущего робота с неизвестной матрицей инерции и с запаздыванием в структуре обратной связи. С применением метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова в виде векторной нормы обосновывается непрерывный закон управления. Для нахождения параметров управления предлагается алгоритм, основанный на вычислении операторных и логарифмических матричных норм. Представлены результаты реализации алгоритма и численного моделирования движения робота.

Ключевые слова: мобильный колесный робот, управление с насыщением, метод сравнения, запаздывание в структуре обратной связи.

1. Введение

В последнее время задача управления мобильными колесными роботами приобрела важное значение. В представленной работе рассматривается задача слежения для мобильного робота с тремя роликонесущими колесами типа «omni-directional» [1]. При этом предполагается, что матрица инерции системы неизвестна, а в структуре управления присутствует переменное запаздывание.

Вопросам исследования динамики и построения управления колесными системами посвящены известные работы [1]–[5]. В работе [2] предлагается использовать релейное адаптивное управление движением робота. В работе [3] рассматривается задача слежения для мобильного роликонесущего робота, дается обоснование релейного закона управления.

Синтез релейных управлений является перспективным подходом в решении задач управления колесными роботами. Преимущества такого подхода обусловлены универсальностью релейных управлений и возможностью использования для целого класса систем и траекторий. Недостатком релейных управлений является возникновение значительных автоколебаний в системе.

В данной работе для уменьшения колебаний предлагается использовать управление с насыщением следующего вида

$$u = \begin{cases} \operatorname{sign}(x), & |x| \geq \gamma, \\ \frac{x}{\gamma}, & |x| < \gamma. \end{cases}$$

Это позволит снизить нагрузку на устройства и повысить эффективность управления.

Применяемый подход основан на использовании метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова в виде векторной нормы и оценке операторных и логарифмических норм матриц, входящих в уравнение движения системы [6]. Данный метод позволяет оценить

¹Аспирант кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; motorina.dyu@gmail.com.

максимальную величину запаздывания, погрешность слежения и определить область начальных отклонений.

На основе предлагаемого подхода разработан алгоритм нахождения параметров управления. Данный алгоритм реализован с применением численных методов и математического пакета Mathcad. Результаты численного моделирования движения робота подтверждают эффективность предлагаемого метода и демонстрируют преимущества использования управления с насыщением.

2. Задача слежения для мобильного робота с роликонесущими колесами

Рассмотрим задачу слежения для мобильного робота с роликонесущими колесами. Робот состоит из платформы, перемещающейся по горизонтальной поверхности, и трех колес, на которых закреплены ролики. Ось вращения каждого ролика лежит в плоскости соответствующего колеса и направлена по касательной к его ободу. При наличии подобных колес платформа может двигаться в любом направлении с любой ориентацией. Движение робота происходит без проскальзывания под действием моментов, развиваемых тремя независимыми электродвигателями постоянного тока.

Движение робота описывается следующими уравнениями [7]

$$(\hat{H} + \Delta H) \ddot{q} + F(\dot{q}) = P(\psi)u(t - h(t)), \tag{2.1}$$

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & I_s \end{pmatrix}, \quad \Delta H = \begin{pmatrix} \Delta m & 0 & 0 \\ 0 & \Delta m & 0 \\ 0 & 0 & \Delta I_s \end{pmatrix}, \quad F(q) = \begin{pmatrix} n\dot{\xi} + m_d \dot{\eta} \dot{\psi} \\ n\dot{\eta} - m_d \dot{\xi} \dot{\psi} \\ 2a^2 n \dot{\psi} \end{pmatrix},$$

$$P(\psi) = \begin{pmatrix} \sin(\psi) & \sin\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) & \sin\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -\cos(\psi) & -\cos\left(\psi + \frac{2\pi}{3}\right) & -\cos\left(\psi + \frac{4\pi}{3}\right) \\ -a & -a & -a \end{pmatrix},$$

где $q = (\xi, \eta, \psi)^T$, ξ и η – координаты центра масс платформы в неподвижной декартовой системе координат $O\xi\eta\zeta$, ψ – угол поворота платформы вокруг вертикали, отсчитываемой от оси $O\xi$, \hat{H} – известная матрица инерции системы, ΔH – неизвестная матрица инерции системы, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ – управляющие напряжения, подаваемые на электродвигатели постоянного тока, $h(t)$ – ограниченная непрерывная функция запаздывания в управлении, $0 \leq h(t) \leq h_0 = const$, a – расстояние от центра масс платформы до центра каждого колеса, m , m_d , I_s – массово-инерционные характеристики робота, n – коэффициент, зависящий от параметров двигателей и характеризующий момент противоэлектродвижущей силы.

Поставим задачу отслеживания заданной траектории $q^*(t)$. Пусть $q(t)$ – некоторое решение системы (2.1) с начальной функцией $\varphi(s)$, удовлетворяющей условию

$$\max \left\{ \max_{-h_0 \leq s \leq 0} |\varphi(s) - q^*(s)|, \max_{-h_0 \leq s \leq 0} |\varphi(s) - q^*(s) + C^{-1}(\dot{\varphi}(s) - \dot{q}^*(s))| \right\} < \delta. \tag{2.2}$$

Необходимо построить управление $u(t - h(t))$, принадлежащее некоторому классу, при котором все решения $q(t)$ системы (2.1) с начальным условием (2.2) будут удовлетворять неравенству

$$|q(t) - q^*(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.3)$$

Величина ε зависит от значения δ и называется ошибкой слежения.

Управление в системе (2.1) будем искать в виде

$$u(t-h(t)) = -kP^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}Csat [q(t-h(t)) - q^*(t-h(t)) + C^{-1}(\dot{q}(t-h(t)) - \dot{q}^*(t-h(t)))], \quad (2.4)$$

где $C \in R^{3 \times 3}$ - постоянная невырожденная матрица, k - константа, которую необходимо определить. Вектор-функция $sat(z) = (sat(z_1), sat(z_2), sat(z_3))^T$ имеет следующие компоненты:

$$sat(z_i) = \begin{cases} sign(z_i), & |z_i| \geq \gamma, \\ \frac{z_i}{\gamma}, & |z_i| < \gamma, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $0 < \gamma = const$.

Запишем уравнение (2.1) в следующем виде:

$$\hat{H}\ddot{q} + F(\dot{q}) = R(\dot{q}) + P(\psi)u(t-h(t)) - \Delta H H^{-1} P(\psi)u(t-h(t)), \quad (2.6)$$

где $H = \hat{H} + \Delta H$, $R(\dot{q}) = \Delta H H^{-1} F(\dot{q})$.

Введем отклонения $x = q - q^*(t)$, $\dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^*(t)$ и линеаризуем систему в окрестности точки $(x = 0, \dot{x} = 0)$. Тогда система уравнений в отклонениях примет следующий вид:

$$\ddot{x} + A(t)\dot{x} = \hat{H}^{-1}P_1(t, x_3)u(t-h(t)) + S(t) + G(\dot{x}) + R_1(t, \dot{x}) - \hat{H}^{-1}\Delta H H^{-1}P_1(t, x_3)u(t-h(t)), \quad (2.7)$$

где $S(t) = -\hat{H}^{-1}F(\dot{q}^*(t)) - \ddot{q}^*(t)$, $P_1(t, x_3) = P(x_3 + \psi^*(t))$, $R_1(t, \dot{x}) = \hat{H}^{-1}R(\dot{x} + \dot{q}^*(t))$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{n}{m} & \frac{m_d\psi^*(t)}{m} & \frac{m_d\eta^*(t)}{m} \\ -\frac{m_d\psi^*(t)}{m} & \frac{n}{m} & -\frac{m_d\xi^*(t)}{m} \\ 0 & 0 & \frac{m}{2a^2n} \\ & & I_s \end{pmatrix}, \quad G(\dot{x}) = \begin{pmatrix} -\frac{m_d\dot{x}_2\dot{x}_3}{m} \\ \frac{m_d\dot{x}_1\dot{x}_3}{m} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем в системе (2.7) замену переменных $y = x$, $z = x + C^{-1}\dot{x}$, где C - матрица, входящая в структуру управления (2.4). Получим следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{y} = -Cy + Cz, \\ \dot{z} = (-C + C^{-1}A(t)C)y + (C - C^{-1}A(t)C)z + C^{-1}S(t) + C^{-1}G_1(y, z) + \\ + C^{-1}R_2(t, y, z) + kC^{-1}\hat{H}^{-1}\Delta H H^{-1}P_1(t, y_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}Csat(z(t-h(t))) - \\ - kC^{-1}\hat{H}^{-1}P_1(t, y_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}Csat(z(t-h(t))), \end{cases} \quad (2.8)$$

где $G_1(y, z) = G(-Cy + Cz)$, $R_2(t, y, z) = R_1(t, -Cy + Cz)$.

Выберем в качестве нормы в пространстве R^3 кубическую вектрную норму $|x| = \max_{1 \leq i \leq 3} |x_i|$. Тогда для любой матрицы M размерности 3×3 можно определить операторную норму $\|M\|$ и логарифмическую норму $lgn \|M\|$. Эти матричные нормы

подчинены выбранной векторной норме и в случае кубической нормы вычисляются следующим образом:

$$\|M\| = \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{j=1}^3 |M_{ij}|, \quad \lg n \|M\| = \max_{1 \leq i \leq 3} \left(M_{ii} + \sum_{j \neq i} |M_{ij}| \right).$$

Пусть имеется вектор-функция Ляпунова $V = (V_1, V_2)^T$ с компонентами в виде кубической векторной нормы: $V_1 = |y|$, $V_2 = c|z|$, где $c = -\frac{\|C\|}{\lg n \| -C \|} = \text{const} > 0$.

Правосторонние производные \dot{V}_1 и \dot{V}_2 в силу системы (2.8) удовлетворяют следующим дифференциальным неравенствам:

$$\begin{cases} \dot{V}_1 = \lg n \| -C \| V_1 - \lg n \| -C \| V_2, \\ \dot{V}_2 = c \| C - C^{-1}A(t)C \| V_1 + \lg n \| C - C^{-1}A(t)C \| V_2 + c |C^{-1}S(t)| + c |C^{-1}G_1(y, z)| + \\ + c |C^{-1}R_2(t, y, z)| + c \left\| kC^{-1}\hat{H}^{-1}\Delta HH^{-1}P_1(t, y_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}C \right\| + \\ + c \lg n \left\| -kC^{-1}\hat{H}^{-1}P_1(t, y_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}C \right\|. \end{cases} \quad (2.9)$$

Введем функцию $\bar{V}(t) = \max \{V_1(y(t), z(t)), V_2(y(t), z(t))\}$, где $(y(t), z(t))$ — решение системы (2.8). Управление (2.4) будет обеспечивать отслеживание заданной траектории $q^*(t)$ с погрешностью ε , если на всех решениях системы (2.8) с начальным условием $\max_{-h_0 \leq s \leq 0} \{|y(s)|, |z(s)|\} < \delta$ функция $\bar{V}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\bar{V}(t) < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0. \quad (2.10)$$

Условия, при которых выполняется неравенство (2.10), сформулированы в следующей теореме.

Т е о р е м а 2.1. Пусть управление в системе (2.1) имеет вид (2.4), и найдутся такие положительные постоянные ε , a , b и N , что:

1. Число γ удовлетворяет неравенству $\gamma < \varepsilon$.
2. Матрица C такова, что выполняется неравенство $\lg n \| -C \| < 0$.
3. Матрицы $A(t)$, $B(t)$, $P(x_3)$, векторы $S(t)$, $G(y)$, $R(y)$ и число k удовлетворяют условию: для всех $t \geq 0$ и $x, y \in R^3$, таких, что $|x| < \varepsilon$, $|y| < (\|C\| - \lg n \| -C \|)\varepsilon$, справедливы неравенства

$$\begin{aligned} & \lg n \| C - C^{-1}A(t)C \| \leq b, \quad |C^{-1}G(y)| \leq N |y|^2, \\ & \| C - C^{-1}A(t)C \| \varepsilon + |C^{-1}S(t)| + N (\|C\| - \lg n \| -C \|^2 \varepsilon^2 + |C^{-1}R_1(t, y)| + \\ & + \left\| kC^{-1}\hat{H}^{-1}\Delta HH^{-1}P_1(t, x_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}C \right\| + \left\| kC^{-1}\hat{H}^{-1}P_1(t, x_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}C \right\| \leq a, \\ & \left[\| C - C^{-1}A(t)C \| + \frac{1}{c} \lg n \| C - C^{-1}A(t)C \| \right] \varepsilon + |C^{-1}S(t)| + N (\|C\| - \lg n \| -C \|^2 \varepsilon^2 + \\ & + |C^{-1}R_1(t, y)| + \left\| kC^{-1}\hat{H}^{-1}\Delta HH^{-1}P_1(t, x_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}C \right\| + \\ & + \lg n \left\| -kC^{-1}\hat{H}^{-1}P_1(t, x_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}C \right\| \leq 0. \end{aligned}$$

4. Начальная функция $\varphi : [-h_0, 0] \rightarrow R^3$ удовлетворяет неравенству (2.2), где число δ таково, что $0 < c\delta < \varepsilon$.
5. Максимальная величина запаздывания h_0 удовлетворяет неравенству

$$h_0 < \frac{1}{b} \ln \frac{b\varepsilon + ac}{c(a + b\gamma)}.$$

Тогда решение системы 2.1 отслеживает траекторию $q^*(t)$ посредством управления (2.4) с погрешностью слежения, не превышающей ε .

3. Алгоритм построения управления

Рассмотрим, как применяется теорема 2.1. для нахождения параметров управления. Пусть известны параметры системы, а также величина δ , задающая область начальных отклонений, и величина γ в управлении (2.4). Для отслеживаемой траектории $q^*(t)$ необходимо найти следующие параметры управления: матрицу C и коэффициент k , а также оценить максимальную величину запаздывания h_0 и погрешность слежения ε .

В качестве матрицы C удобно взять диагональную матрицу $C = \{c_{ij}\}_{i,j=1}^3$, где $c_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $c_{ii} = c_i = \text{const} > 0$.

Параметры управления можно найти по следующему алгоритму:

1. Найти положительные постоянные s_i^0 , $1 \leq i \leq 3$, для которых при всех $t \geq 0$ выполняются неравенства:

$$|S_i(t)| < s_i^0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Параметры c_i подобрать так, чтобы выполнялось соотношение

$$\frac{s_1^0}{c_1} = \frac{s_2^0}{c_2} = \frac{s_3^0}{c_3}.$$

2. Зафиксировать число $\varepsilon > \max\{c\delta, \gamma\}$, характеризующее допустимую ошибку слежения для заданной траектории.
3. Найти оценки для следующих норм:

$$\begin{aligned} \lg n \|C - C^{-1}A(t)C\| &\leq b, \quad \|C - C^{-1}A(t)C\| \leq b_1 \\ |C^{-1}S(t)| &\leq s_0, \quad |C^{-1}R_1(t, y)| \leq r_0, \quad |C^{-1}G(y)| \leq N|y|^2, \\ \left\| C^{-1}\hat{H}^{-1}P_1(t, x_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}C \right\| &\leq a_1, \quad \lg n \left\| -C^{-1}\hat{H}^{-1}P_1(t, x_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}C \right\| \leq -a_2, \\ \left\| C^{-1}\hat{H}^{-1}\Delta HH^{-1}P_1(t, x_3)P^{-1}(\psi^*(t))\hat{H}C \right\| &\leq a_3. \end{aligned}$$

4. Найти коэффициент k по формуле

$$k = \frac{(b + cb_1)\varepsilon + c(s_0 + r_0 + N(\|C\| - \lg n \| -C\|)^2 \varepsilon^2)}{c(a_2 - a_3)}.$$

5. Найти максимальную величину запаздывания h_0 , используя следующее соотношение:

$$a = k(a_1 + a_3) + s_0 + r_0 + b_1\varepsilon + N(\|C\| - \lg n \| -C\|)^2 \varepsilon^2.$$

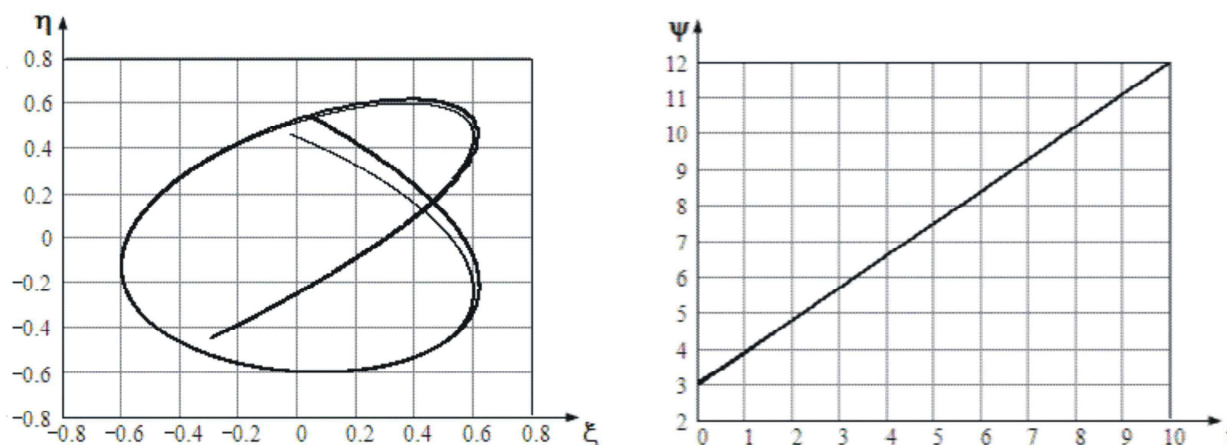
4. Реализация алгоритма и численное моделирование

Пусть параметры системы имеют следующие значения: $m = 23, 101$ кг, $m_d = 6, 601$ кг, $I_s = 9, 486$ кг · м², $n = 1, 78$ Н · с/м, $|\Delta m| \leq 5$ кг, $|\Delta I_s| \leq 2$ кг · м².

Отслеживаемая траектория имеет вид: $\xi^*(t) = 0, 6 \cos t$, $\eta^*(t) = 0, 6 \sin(0, 8t + 2.3)$, $\psi^*(t) = 0, 9t + 3$.

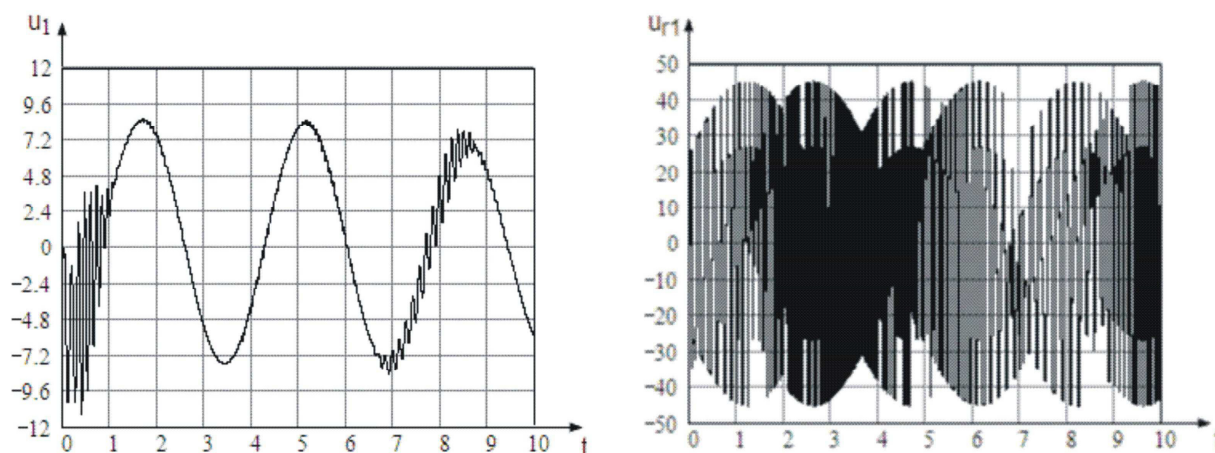
Численное моделирование дает следующие значения параметров управления: $c_1 = 1, 3$, $c_2 = 0, 97$, $c_3 = 1$, $\gamma = 0, 04$, $k = -1, 423$. Максимальная величина запаздывания $h_0 = 0, 033$. Погрешность слежения $\varepsilon = 0, 08$.

Результаты численного моделирования движения робота при построенном управлении представлены на рисунке 4.1.



Р и с у н о к 4.1

Если вместо функции с насыщением $sat(\cdot)$ в управлении (2.4) взять релейную функцию $sign(\cdot)$, то полученное релейное управление $u_r = (u_{r1}, u_{r2}, u_{r3})^T$ также будет решать задачу отслеживания траектории $q^*(t)$. Причем для релейного управления значения параметров c_i , k , ε , h_0 будут такие же, как и для управления с насыщением. На рисунке 4.2 представлены графики управления с насыщением u и релейного управления u_r .

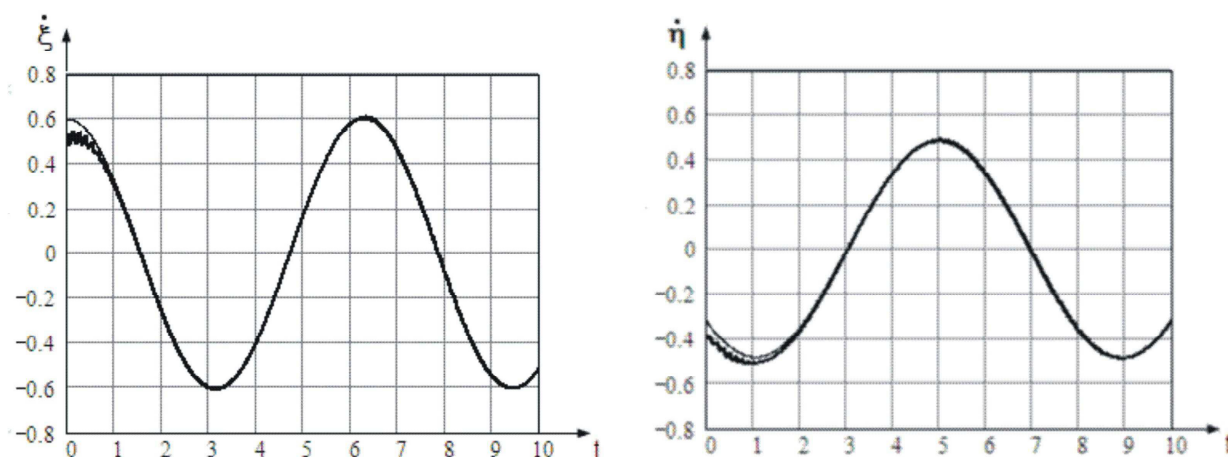


Р и с у н о к 4.2

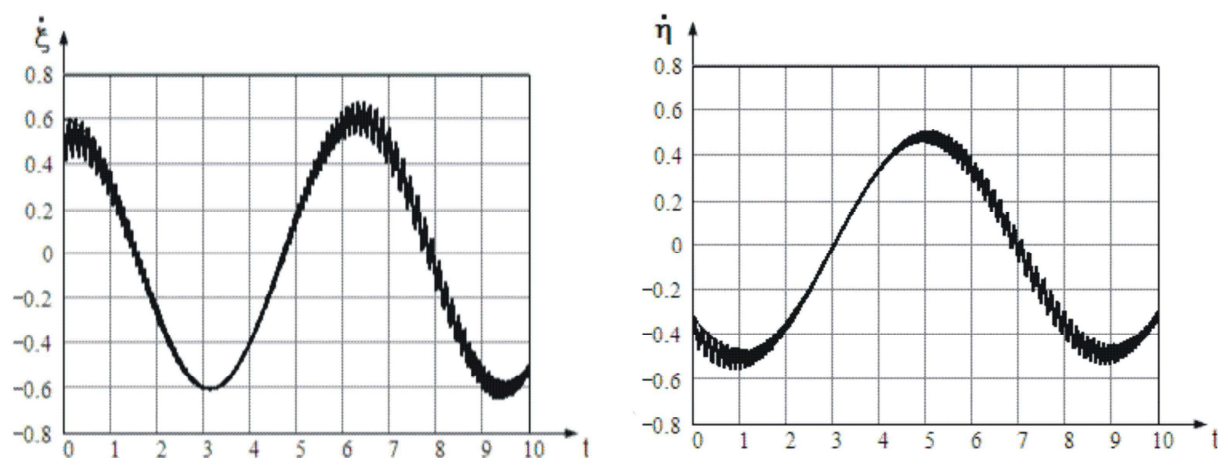
Как показывают графики, управление с насыщением действительно позволяет

уменьшить колебания в системе. Помимо этого, использование управления с насыщением дает возможность уменьшить значение напряжений, вырабатываемых электродвигателями.

Благодаря уменьшению колебаний в устройствах управления можно уменьшить колебания обобщенных скоростей системы. На рисунке 4.3 представлены графики скоростей $\dot{\xi}$ и $\dot{\eta}$ центра масс платформы при использовании управления с насыщением. На рисунке 4.4 представлены графики этих же скоростей, но при использовании релейного управления.



Р и с у н о к 4.3



Р и с у н о к 4.4

Таким образом, использование управления с насыщением позволяет снизить нагрузку на устройства и сэкономить на ресурсах управления.

5. Заключение

В работе рассмотрена задача слежения для мобильного колесного робота с учетом запаздывания в цепи обратной связи и в предположении, что матрица системы неизвестна. Разработан алгоритм нахождения параметров управления, максимальной величины запаздывания и ошибки слежения. Предлагаемый алгоритм обладает такими преимуществами, как простота производимых операций и возможность использования

для широкого класса траекторий. Матрицу C можно подобрать так, что бы получить наиболее подходящие параметры управления.

Программная реализация алгоритма подтвердила эффективность предложенного подхода и возможность уменьшения колебаний в системе по сравнению с использованием релейного управления.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (НК-408П, госконтракт П/2230) и в рамках программы «Развитие научного потенциала высшей школы», проект № 2.1.1/6194.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Tamas Kalmar-Nagy, Raffaello D'Andrea, Pritam Ganguly. Near-optimal dynamic trajectory generation and control of an omnidirectional vehicle // Robotics and Autonomous Systems – 2004. – № 46. – P. 47-64.
2. Hsu-Chih Huang, Ching-Chih Tsai. Adaptive Trajectory Tracking and Stabilization for Omnidirectional Stabilization Mobile Robot with Dynamic Effect and Uncertainties // Proceedings of the 17th World Congress The International Federation of Automatic Control. Seoul, Korea. – July 6–11, 2008. – P. 5383-5388.
3. Перегудова О. А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. – Ульяновск: УлГУ, 2009. – 253 с.
4. Yong Liu, J. Jim Zhu, Robert L. Williams II, Jianhua Wu. Omni-directional mobile robot controller based on trajectory linearization // Robotics and Autonomous Systems – 2008. – № 56. – P. 461-479.
5. Ching-Chih Tsai, Hsu-Chih Huang, Tai-Yu Wang. Simultaneous tracking and stabilization of an omnidirectional mobile robot in polar coordinates // Journal of the Chinese Institute of Engineers. – 2009. – Vol. 32. – № 4. – P. 569-575.
6. Перегудова О. А. К задаче слежения для механических систем с запаздыванием в управлении // АИТ. – 2009. – № 5. – С. 95-105.
7. Мартыненко Ю. Г., Формальский А. М. О движении мобильного робота с роликонесущими колесами // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2007. – № 6. – С. 142-149.

Design saturation control synthesis algorithm in the tracking problem for wheeled mobile robot.

© D. Y. Motorina²

Abstract. In the work tracking problem is considered for mobile roller-bearing robot with unknown inertia matrix and delay in the feedback structure. Uninterrupted control law is justified with applying Lyapounov vector-function in the form of vector norm. An algorithm based on estimation operator and logarithmic matrix norm is proposed to find the control parameters. Results of algorithm implementation and numerical simulation of robot motion are presented.

Key Words: Mobile wheeled robot, saturation control, comparison method, delay in the feedback structure.

²Graduate of Information Security and Control Theory Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; motorina.dyu@gmail.com.