УДК 517.9

Устойчивость решений задачи Коши по линейному приближению, уравнение разветвления в корневом подпространстве, симметрия

© В.А. Треногин[1], Б.В. Логинов[2], Л.Р. Ким-Тян[3]

Аннотация. Результаты В.А. Треногина [7, 8] об устойчивости решений задачи Коши для дифференциальных уравнений в банаховом пространстве по линейному приближению в случае вырожденной линеаризации изложены с точки зрения уравнения разветвления в корневом подпростарнстве. Сделаны выводы для условий групповой и негрупповой симметрии уравнения.

Ключевые слова: ДУ в банаховом пространстве, устойчивость, уравнение разветвления в корневом подпростарнстве, симметрия.

1. Введение

В работе [1] исследована устойчивость решений задачи Коши для дифференциального уравнения (ДУ) в банаховом пространстве E

$$\dot{x} = Bx - R(x,t), \quad x(0) = 0 \tag{1.1}$$

в следующих предположениях I B - замкнутый плотно определенный оператор, $R(B) \subset E$, – производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $U(t)$ класса C_0 с экспоненциальным убыванием $\|U(t)\| \leq Mexp(-\alpha t)$, $\alpha > 0$ II. Нелинейный оператор $R(x,t)$ определен и непрерывен $\forall t \in \mathbb{R}^+$ и $x \in S_\rho(0)$ и удовлетворяет локальному условию Липшица $\|R(x_1,t) - R(x_2,t)\| \leq C\max^\beta(\|x_1\|, \|x_2\|)\|x_1 - x_2\|$, $x_1, x_2 \in S_\rho(0)$. Доказано существование определенного при $\|x_0\| \leq \rho_\star$, единственного в предположении $\|x(t,x_0)\| \leq r_\star exp(-\alpha t)$ обобщенного решения (1.1), непрерывного по x_0 в пространстве C_α абстрактных функций на полуоси с нормой $|||x|||_\alpha = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|x(t)\|exp(\alpha t)$ и, тем самым асимптотическая устойчивость обобщенного тривиального решения задачи (1.1). При гёльдеровости по t с показателем $\delta \in (0,1]$ III : существует постоянная $C_1 > 0$, такая, что $\forall t, h \in \mathbb{R}$ и $\forall x \in S$, $\|R(x,t+h) - R(x,t)\| \leq C_1\|x\|^{1+\beta}h^\delta$, доказано, что обобщенное решение $x(t,x_0)$ является классическим.

Здесь уравнение (1.1) рассматривается в условиях групповой симметрии, т.е. существования представления L_g группы G, сплетающего операторы B и R

$$BL_gx = L_gBx, \quad x \in D(B), \quad R(L_gx,t) = L_gR(x,t)$$

Использованы терминология и обозначения [2,3]. Всюду далее предполагается, что если $G = G_r = G_r(a)$, $a = (a_1,\ldots,a_r)$ непрерывная группа, то она является r-мерным дифференцируемым многообразием, удовлетворяющим условию

[1]Профессор кафедры «Математика», Национальный исследовательский технологический Университет «МИСиС», Москва; vtrenogin@mail.ru

[2]Профессор кафедры«Высшая математика», Ульяновский Технический Университет, Ульяновск; loginov@ulstu.ru

[3]Доцент кафедры«Математика», Национальный исследовательский технологический Университет «МИСиС», Москва; kim-tyan@mail.ru

A_1: отображение $a \mapsto L_{g(a)}x_0$, действующее из окрестности единичного элемента в пространство E принадлежит классу C^1. Поэтому в силу доказанной в [1] единственности решений $U(t)x_0$ и $U(t)L_gx_0$ однородного уравнения (1.1) в классе C_α, т.к. обе функции $L_gU(t)x_0$ и $U(t)L_gx_0$ удовлетворяют однородному уравнению (1.1) с начальным значением L_gx_0, представление L_g сплетает полугруппу: $L_gU(t)x_0 = U(t)L_gx_0$. В конкретной ситуации начальные значения x_0 принадлежат одному из неприводимых инвариантных подпространств пространства E при действии L_g, тогда решение линеаризованной задачи Коши принадлежит этому же инвариантному подпространству.

Для неоднородного уравнения обобщенное решение задачи Коши, т.е. решение интегрального уравнения

$$x(t) = U(t)x_0 - \int_0^t U(t-s)R(x(s),s) \tag{1.2}$$

в предположении III является классическим. В силу сплетаемости оператора $R(x,t)$ и полугруппы $U(t)$ представлением L_g для нелинейной задачи Коши (1.1) возникает восходящая к Л.В. Овсянникову в его "Программе Подмодели"[4] задача об асимптотической устойчивости решений (1.1), инвариантных относительно подгрупп, когда начальное значение x_0 сохраняется при действии операторов представления подгруппы $H \subset G$ и решение $x(t)$ ищется в подпространстве $E(H) = \{x \in E \mid Hx = x\}$. Для компактных групп G эта задача решается также с помощью техники неприводимых инвариантных подпространств [3]. В общем случае непрерывных групп и их непрерывных подгрупп задача об асимптотически устойчивых по первому приближению решений (1.1), инвариантных относительно подгрупп $H \subset G$ сводится согласно [5,6] к перечислению классов подобных подгрупп.

В автономном случае уравнения (1.1) эти результаты сохраняются в предположениях I и II.

В работе [7]([8]) рассмотрен принципиально другой случай, когда фредгольмов оператор B не является непрерывно обратимым и $E = N(B) \dotplus R(B)$, т.е. жордановы цепочки (ЖЦ) нулей операторов B и $B^\star$ имеют единичные длины (существует полный жорданов набор (ЖН) к нулям B и $B^\star$) и в предположении экспоненциального убывания полугруппы на $R(B)$ и $PR(x) = 0$, P - проектор на $N(B)$ (экспоненциального убывания на $E^{\infty - k_B}$, $\boldsymbol{P}R(x) = 0$, $\boldsymbol{P}$ - проектор на корневое подпространство) доказано, что $\exists$ $\rho > 0$, $r > 0$, такие что при всех x_0, $\|x_0\| \leq \rho$ задача Коши

$$\dot{x} = Bx - R(x), \quad x(0) = x_0 \tag{1.3}$$

имеет в шаре $\|x\| < r$ единственное ограниченное на $\mathbb{R}^+$ обобщенное решение $x = x(t)$, являющееся классическим при $x_0 \in D(B)$, т.е. имеет место только устойчивость по Ляпунову; если, кроме того $Px_0 = 0$, то (1.1) имеет в шаре $|||x|||_\alpha < r$ единственное обобщенное решение $x = x(t) \in C_\alpha(E)$, являющееся классическим при $(I-P)x_0 \in D(B)$, т.е. имеет место условная асимптотическая устойчивость (при $x_0 \in E^{\infty - k_B}$, $\|x_0\| < \rho$ задача Коши(1.3) имеет в шаре $|||x|||_\alpha < r$ единственное обобщенное решение $x = x(t) \in C_\alpha(E)$ являющееся классическим при $x_0 \in E^{\infty - k_B} \cap D(B)$ и тем самым условно асимптотически устойчивым). Основной целью данной работы является изложение результатов [8] с помощью техники уравнений разветвления в корневых подпространствах и исследование устойчивости решений задачи Коши (1.3) на основе статей [7,8] в условиях групповой (или негрупповой) симметрии (сплетения) в случае, когда фредгольмов оператор B не является непрерывно обратимым. В дальнейшем авторы намереваются в развитие этих результатов применить их к исследованию устойчивости разветвляющихся решений уравнений (1.1) и (1.2) в том числе в условиях симметрии.

Полученные результаты поддержаны проектом No. 2.1.1/6194 программы Развитие научного потенциала высшей школы Минобразования РФ и частично грантами РФФИ-АН Румынии №07-01-91680-а и РЦП Научные и научно-педагогические кадры инновационной России ГК № П1112.

2. Линейное приближение и устойчивость по Ляпунову

Изложим результаты [7,8] в удобной нам интерпретации, рассматривая автономное уравнение (1.3) в следующих предположениях

I. B – замкнутый линейный фредгольмов оператор с плотной в E областью определения $D(B)$ и областью значений $R(B) \subset E$ – производящий оператор сильно непрерывной полугруппы $U(t)$ класса C_0;

II. $R(x)$ – достаточно гладкий нелинейный оператор, $R(0)=0$, определенный в $\Omega(0)$, удовлетворяющий в $\Omega(0)$ локальному условию Липшица

$$\|R(x_1)-R(x_2)\| \leq C\max{}^{\beta}(\|x_1\|,\|x_2\|)\|x_1-x_2\| \tag{2.1}$$

III. Базисным элементам $\{\varphi_i\}_1^n$ в $N(B)$ и дефектным функционалам $\{\psi_i\}_1^n$ в $N^\star(B)$ оператора B отвечают полные жордановы наборы (ЖН) $\{\varphi_i^{(j)}\}_{i=1,j=1}^{n,p_i}$ и $\{\psi_i^{(j)}\}_{i=1,j=1}^{n,p_i}$.

Отметим здесь, что, согласно [2] и [9-11] указанные ЖН всегда можно выбрать удовлетворяющими условиям биортогональности

$$\begin{array}{l} B\varphi_i^{(s)}=\varphi_i^{(s-1)}, \langle\varphi_i^{(s)},\psi_j^{(1)}\rangle=0, s=\overline{2,p_i} \\ B^\star\psi_k^{(s)}=\psi_k^{(s-1)}, \langle\varphi_i^{(1)},\psi_k^{(s)}\rangle=0, s=\overline{2,p_i}, \\ \langle\varphi_i^{(p_i+1-s)},\psi_j^{(l)}\rangle=\delta_{ij}\delta_{sl}, z_i^{(s)}=\varphi_i^{(p_i+1-s)}; \langle\varphi_i^{(s)},\psi_j^{(p_j+1-l)}\rangle=\delta_{ij}\delta_{sl}, \gamma_j^{(k)}=\psi_j^{(p_j+1-k)} \end{array} \tag{2.2}$$

позволяющими определить проекторы

$$\boldsymbol{P}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\gamma_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(j)}: E\to K(B,I)=E^{k_B}=span\{\varphi_1^{(1)},\ldots,\varphi_1^{(p_1)},\ldots,\varphi_n^{(p_1)},\ldots,\varphi_n^{(p_n)}\}$$

$$\boldsymbol{Q}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^{p_i}\langle\cdot,\psi_i^{(j)}\rangle z_i^{(j)}: E\to E_{k_B}=span\{\varphi_1^{(p_1)},\ldots,\varphi_1^{(1)},\ldots,\varphi_n^{(p_n)},\ldots,\varphi_n^{(1)}\},$$

порождающие разложения $E=E^{k_B}\dotplus E^{\infty-k_B}=E_{k_B}\dotplus E^{\infty-k_B}$ (подпространства $E^{k_B}=E_{k_B}$ отличаются лишь нумерацией базисных элементов). При этом выполнены соотношения сплетения $\boldsymbol{Q}B=B\boldsymbol{P}$ и $B\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}B$ и равенства $B\varphi=\mathcal{A}_Bz$, $\varphi=\mathcal{A}_Iz$, $\psi=\mathcal{A}_I\gamma$, где $\varphi=(\varphi_1^{(1)},\ldots,\varphi_1^{(p_1)},\ldots,\varphi_n^{(1)},\ldots,\varphi_n^{(p_n)})$, векторные элементы z, ψ и γ вводятся аналогично, $\mathcal{A}_B=diag(B^1,\ldots,B^n)$, $\mathcal{A}_I=diag(A^1,\ldots,A^n)$,

$$B^i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A^i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 1 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{- } p_i\times p_i \text{- матрицы}$$

IV. Предполагается экспоненциальное убывание полугруппы на $E^{\infty-k_B}$, т.е. $\|U(t)x\| \leq Mexp(-\alpha t)\|x\|$, $\forall x \in E^{\infty-k_B}$, $t \in [0,+\infty)$; $M,\alpha > 0$. В следующих двух утверждениях о гладкости полугруппы рассматривается линейная задача Коши

$$\dot{x} = Bx, \quad x(0) = x_0 \tag{2.3}$$

Л е м м а 2.1. 1° *Если $D(B)$ плотна в E и оператор B имеет регулярные точки, то область определения $D(B^p)$ плотна в E при любых $p = 2,3,\ldots$.*
2° *Если $x_0 \in D(B^p)$, то решение $U(t)x_0$ уравнения (2.3) при $t \geq 0$ имеет $p-1$ непрерывную производную и производную порядка p, непрерывную при $t > 0$*
1° Ограниченный оператор $R_\lambda(B) = (B-\lambda I)$, $\lambda \in \rho(B)$ отображает E на $D(B)$, а $D(B)$ на $D(B^2)$, и т.д.
2° На $D(B)$ оператор B коммутирует с полугруппой, откуда следует непрерывность $U'(t)x_0$ при $t > 0$ и если $x_0 \in D(B^2)$, то $U'(t)x_0 = BU(t)x_0 = U(t)Bx_0$ есть решение задачи Коши (2.3) с начальным условием $Bx_0 \in D(B)$, т.е. $U(t)x_0$ непрерывна при $t \geqslant 0$, а $U'(t)$ непрерывна при $t > 0$. Далее по индукции.

Т е о р е м а 2.1. *Пусть B - абстрактный эллиптический оператор с экспоненциально убывающей полугруппой и в условиях Леммы 2.1 $p = \max\limits_{1\leq i\leq n} p_i$.* Тогда при $t > 0$ полугруппа $U(t)$ p раз непрерывно дифференцируема и для любого $x_0 \in D(B^p)$

$$U^{(p)}(t)x_0 = B^pU(t)x_0 = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^p e^{\lambda t} R_\lambda(B)x_0 d\lambda \tag{2.4}$$

$R_\lambda = (B-\lambda I)^{-1}$ – резольвента B, и при $t > 0$ справедлива оценка $\|U^{(p)}(t)\| \leq Me^{-\alpha t}t^{-p}$, причем $x^{(p)}(0) = B^px(0)$. Здесь Γ – контур, образованный двумя лучами в верхней и нижней полуплоскости, исходящими из точки $(\omega, 0)$, $\omega \geq a$, параллельными границе области $\Omega(a,\varphi)$, ограниченной двумя лучами, исходящими из точки $(a,0)$, под углами φ и $-\varphi$ с отрицательными направлениями оси Ox. В [12] дано доказательство теоремы при $p = 1$, далее по индукции.

Л е м м а 2.2. [7, 8] *Пусть выполнены условия I,III, а число α соответствует предположению IV. Тогда оператор $\tilde{B} = B - \alpha \boldsymbol{P}$ непрерывно обратим и является производящим оператором сильно непрерывной полугруппы класса C_0 с экспоненциальным убыванием. Т.к. проекторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ сплетают полугруппу $U(t)$, то $U(t)$ действует в инвариантных парах подпространств E_B^k, $E^{\infty-k_B}$ и $U(t)\varphi_i^{(k)} = \varphi_i^{(k)} + \frac{\varphi_i^{(k-1)}}{1!} + \ldots + \frac{\varphi_i^{(1)}}{(k-1)!}$, $k = \overline{1,p_i}$.*

Первое утверждение леммы является вариантом леммы Шмидта [2,13], доказанным в частности в [13]. Введем полугруппу $\tilde{U}(t) = U(t)\exp(-\alpha \boldsymbol{P}t)$, тогда $\exp(-\alpha\boldsymbol{P}t)\boldsymbol{P} = \exp(-\alpha t)\boldsymbol{P} \Rightarrow \forall x \in E$, $x = u + v$, $u = (I - \boldsymbol{P})x \in E^{\infty-k_B}$, $v = \boldsymbol{P}x \in E^{k_B}$, $\tilde{U}(t)x = U(t)\exp(-\alpha\boldsymbol{P}t)(u+v) = U(t)u + \exp(-\alpha t)U(t)\boldsymbol{P}v = U(t)u + \exp(-\alpha t)\boldsymbol{Q}U(t)v \Rightarrow \|\tilde{U}(t)x\| \leq \tilde{M}\exp(-\alpha t)\|x\|$, откуда следует неравенство IV с новым $\tilde{M}$ для любого $x \in E$. Второе утверждение следует из конечномерности E^{k_B} и сплетения полугруппы.

Действуя по схеме [7,8] запишем линейную задачу (2.3) в виде

$$\dot{x} = \tilde{B}x + \alpha v, \quad x(0) = x_0, \quad \tilde{B} = B - \alpha\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{P}x(t) = v(t) \tag{2.5}$$

и применим к (2.3) оператор $\boldsymbol{Q}$: $\boldsymbol{Q}\dot{x} = B\boldsymbol{P}x$. Возникает задача Коши для $v(t) = \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{p_i}\xi_{ij}(t)\varphi_i^{(j)} = \xi_i \cdot \varphi_i$,

$\dot\xi_{ip_i} = 0, \dot\xi_{ip_i-1} = \xi_{ip_i}, \ldots, \dot\xi_{i2} = \xi_{i3}, \dot\xi_{i1} = \xi_{i2}$, $\xi_{ij}(0) = \langle x_0, \gamma_i^{(j)}\rangle = \langle x_0, \psi_i^{(p_i+1-j)}\rangle, i = \overline{1,n}$, единственное решение которой имеет вид

$$v(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{l=0}^{p_i-k}\langle x_0, \psi_i^{(p_i+1-k-l)}\rangle \frac{t^l}{l!}\varphi_i^{(k)}.$$

Применяя лемму 2.2, $\tilde U(t-s)\varphi_i^{(k)} = e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\varphi_i^{(k)}$, найдем обобщенное решение задачи Коши (2.5)

$$\begin{aligned}
x &= \tilde U(t)x_0 + \alpha\int_0^t \tilde U(t-s)v(s)ds = \tilde U(t)x_0 + \alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{l=1}^{p_i-k}\frac{\langle x_0, \psi_i^{(p_i+1-k-l)}\rangle}{l!}\int_0^t s^l\tilde U(t-s)\varphi_i^{(k)}ds = \\
&= \tilde U(t)x_0 + \alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{l=0}^{p_i-k}\frac{\langle x_0, \psi_i^{(p_i+1-k-l)}\rangle}{l!}\int_0^t s^l e^{-\alpha(t-s)}U(t-s)\varphi_i^{(k)}ds = \\
&= U(t)u_0 + U(t)v_0 + \alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\sum_{l=0}^{p_i-k}\frac{\langle x_0, \psi_i^{(p_i+1-k-l)}\rangle}{l!}\int_0^t (t-\sigma)^l e^{-\alpha\sigma}\sum_{r=0}^{k-1}\frac{\sigma^r}{r!}\varphi_i^{(k-r)}d\sigma = \\
&= U(t)u_0 + U(t)v_0 + \alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\varphi_i^{(k)}\sum_{r+l=0}^{p_i-k}\frac{\langle x_0, \psi_i^{(p_i+1-k-(r+l))}\rangle}{l!r!}\int_0^t (t-\sigma)^l\sigma^r e^{-\alpha\sigma}d\sigma = \\
&= U(t)u_0 + U(t)v_0 + \alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\varphi_i^{(k)}\sum_{j=r+l=0}^{p_i-k}\frac{\langle x_0, \psi_i^{(p_i+1-j)}\rangle}{j!}\int_0^t [(t-\sigma)+\sigma])^j e^{-\alpha\sigma}d\sigma \\
&= U(t)u_0 + U(t)v_0 + \alpha\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{p_i}\varphi_i^{(k)}(1-e^{-\alpha t})\sum_{j=0}^{p_i-k}\frac{\langle x_0, \psi_i^{(p_i+1-k-j)}\rangle}{j!}t^j
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Т е о р е м а 2.2. *В предположениях I и III справедливы утверждения:*
1°. *Обобщенные решения задачи Коши (2.3) при $t\to\infty$ растут с порядком $t^{\max p_i - 1}$. Множество полиномов не выше указанной степени с векторными коэффициентами, выражающимися через жордановы элементы, является аттрактором динамической системы $\dot x = Bx$.*
2°. *Положение равновесия $x = 0$ является асимптотически устойчивым в классе начальных значений $x_0 \in E^{\infty - k_B}\cap D(B)$*

С л е д с т в и е 2.1. *В предположениях I - IV существуют $\rho > 0$, $r > 0$, такие что задача Коши (2.3) при всех $x_0 \in E^{\infty-k_B}$, $\|x_0\| < \rho$ имеет в шаре $\|x\| < r$ единственное ограниченное на $\mathbb{R}^+$ обобщенное решение, являющееся классическим при $x_0 \in D(B)$ и условно асимптотически устойчивым, т.е. асимптотически устойчивым при $x_0 \in E^{\infty-k_B}\cap D(B)$*

С л е д с т в и е 2.2. *В условиях групповой инвариантности уравнения (2.3) при выполнении требования (*) - подпространство $(I-P)E = E^{\infty-n}$ инвариантно относительно операторов L_g, проекторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ коммутируют с L_g [3, 13], и начальным значениям x_0, $L_g x_0$ принадлежащим неприводимым инвариантным подпространствам действия L_g в $E^{\infty-k_B}\cap D(B)$ отвечают условно асимптотические по Ляпунову решения $x(t,x_0)$ и $L_g x(t,x_0) = x(t, L_g x_0)$*

3. Нелинейное уравнение и устойчивость по Ляпунову

Нелинейная задача Коши (1.3) в предположениях $I - IV$ записывается в виде

$$\dot x = \tilde Bx - R(x) + \alpha v, \quad x(0) = 0; \quad v(t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle x(t), \psi_i^{(p_i+1-j)}\rangle\varphi_i^{(j)} = \boldsymbol{P}x(t) \tag{3.1}$$

Вычисляем $x(t)$, применяя $\boldsymbol{Q}$ к уравнению (1.3) : $\boldsymbol{Q}\dot{x} = B\boldsymbol{P}x - \boldsymbol{Q}R(x)$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle \dot{x}, \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=2}^{p_i}\langle x, \psi_i^{(p_i+1-j)}\rangle\varphi_i^{(j-1)} - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p_i}\langle R(u(s)+v(s)), \psi_i^{(j)}\rangle\varphi_i^{(p_i+1-j)}$$

из эквивалентной системы (уравнения разветвления в корневом подпространстве (УРК)) с постоянной матрицей

$$\begin{array}{l}
\dot{\xi}_{i1}(s)\varphi_i^{(1)} = \langle \dot{x}, \psi_i^{(p_i)}\rangle\varphi_i^{(1)} = \langle x, \psi_i^{(p_i-1)}\rangle\varphi_i^{(1)} - \langle R(u(\xi(s)) + \sum\xi_{jk}(s)\varphi_j^{(k)}), \psi_i^{(p_i)}\rangle\varphi_i^{(1)} = \\
= \xi_{i2}(s)\varphi_i^{(1)} - \langle R(u(\xi(s)) + \sum\xi_{jk}(s)\varphi_j^{(k)}), \psi_i^{(p_i)}\rangle\varphi_i^{(1)}, \\
\dot{\xi}_{i2}(s)\varphi_i^{(2)} = \langle \dot{x}, \psi_i^{(p_i-1)}\rangle\varphi_i^{(2)} = \langle x, \psi_i^{(p_i-2)}\rangle\varphi_i^{(2)} - \langle R(u(\xi(s)) + \sum\xi_{jk}(s)\varphi_j^{(k)}), \psi_i^{(p_i-1)}\rangle\varphi_i^{(2)} = \\
= \xi_{i3}(s)\varphi_i^{(2)} - \langle R(u(\xi(s)) + \sum\xi_{jk}(s)\varphi_j^{(k)}), \psi_i^{(p_i)}\rangle\varphi_i^{(2)}, \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\
\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots \\
\dot{\xi}_{i,p_i-1}(s)\varphi_i^{(p_i-1)} = \langle \dot{x}, \psi_i^{(2)}\rangle\varphi_i^{(p_i-1)} = \langle x, \psi_i^{(1)}\rangle\varphi_i^{(p_i-1)} - \langle R(u(\xi(s)) + \sum\xi_{jk}(s)\varphi_j^{(k)}), \psi_i^{(2)}\rangle\varphi_i^{(p_i-1)} = \\
= \xi_{i,p_i}(s)\varphi_i^{(p_i-1)} - \langle R(u(\xi(s)) + \sum\xi_{jk}(s)\varphi_j^{(k)}), \psi_i^{(2)}\rangle\varphi_i^{(p_i-1)}, \\
\dot{\xi}_{i,p_i}(s)\varphi_i^{(p_i)} = \langle \dot{x}, \psi_i^{(1)}\rangle\varphi_i^{(p_i)} = -\langle R(u(\xi(s)) + \sum\xi_{jk}(s)\varphi_j^{(k)}), \psi_i^{(1)}\rangle\varphi_i^{(p_i)}
\end{array}$$

т.е. из системы $p_1 + p_2 + \ldots + p_n$ уравнений с блочно-диагональной матрицей, каждый блок $\mathfrak{A}_i$ которой является первым единичным наддиагональным косым рядом ([14] гл.I). Согласно [14]

$$\xi_i(s) = e^{\mathfrak{A}_i s}\xi_{i0} - \int_0^s e^{\mathfrak{A}_i(s-\sigma)}[\langle R(u(\xi(\sigma)) + \sum\xi_{jk}(\sigma)\varphi_j^{(k)}), \psi_i^{(p_i+1-j)}\rangle]_{j=\overline{1,p_i}}d\sigma \tag{3.2}$$

$$e^{\mathfrak{A}_i s} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{s}{1!} & \frac{s^2}{2!} & \cdots & \frac{s^{p_i-2}}{(p_i-2)!} & \frac{s^{p_i-1}}{(p_i-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{s}{1!} & \cdots & \frac{s^{p_i-3}}{(p_i-3)!} & \frac{s^{p_i-2}}{(p_i-2)!} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{s}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} \xi_i(s) = \begin{bmatrix}\xi_{i1}(s) & \ldots & \xi_{ip_i}(s)\end{bmatrix}, \\ \xi_{i0}(s) = \begin{bmatrix}\xi_{i1}(0) & \ldots & \xi_{ip_i}(0)\end{bmatrix}, \\ i = \overline{1,n} \end{array} \tag{3.3}$$

Для нелинейной задачи Коши [10], подставляя найденное $v(t)$, получаем интегральное уравнение

$$\begin{gathered} x(t) = \widetilde{U}(t)x_0 + \\ + \int_0^t \widetilde{U}(t-s)\{-R(x(s)) + \alpha\sum_{i=1}^{n}[e^{\mathfrak{A}_i s}\xi_{i0} - \int_0^s e^{\mathfrak{A}_i(s-\sigma)}[\langle R(u(\xi(\sigma)) + \sum\xi_{jk}(\sigma)\varphi_j^{(k)}), \psi_i\rangle]d\sigma]\varphi_i\}ds \end{gathered} \tag{3.4}$$

Т е о р е м а 3.1. [7, 8]*Пусть выполнены условия I-IV и* $\boldsymbol{P}R(x) = 0$. *Тогда существуют* $\rho > 0$, $r > 0$, *такие что* $\forall x_0 \in E^{\infty - k_B}$, $||x_0|| < \rho$ *задача Коши* (1.3) *имеет в шаре* $|||x|||_\alpha < r$ *единственное обобщенное решение* $x = x(t) \in C_\alpha(E)$, *являющееся классическим если* $x_0 \in E^{\infty-k_B} \bigcap D(B)$ *и асимптотически устойчивым.*

Доказательство основывается на статье [1] при рассмотрении уравнения (3.4) в пространстве $C_\alpha(E)$ и следующих положениях : 1° $\tilde{U}(t)x_0 = \tilde{U}(t)u_0 + e^{-\alpha t}U(t)\boldsymbol{P}v_0$ согласно IV, $\boldsymbol{P}v_0 = 0$, 2° Оператор $\int_0^t \tilde{U}(t-s)R(x(s))ds$ ограничен на полуоси, если на ней ограничено $x(s)$ и определяет экспоненциально стремящуюся к нулю функцию, если таково $x(s)$. 3° Интеграл

$$\alpha \int_0^t \tilde{U}(t-s) \sum_{i=1}^n [(e^{\mathfrak{A}_i s}\xi_{i0}\varphi_i - \int_0^s e^{\mathfrak{A}_i(s-\sigma)}(\langle R(u(\xi(\sigma)) + \Sigma\xi_j(\sigma)\varphi_j), \psi_i\rangle\varphi_i))]ds =$$

$$= \alpha \int\limits_0^t U(t-s)\cdot$$

$$\cdot\sum_{i=1}^n[\begin{pmatrix} [\langle x_0, \psi_i^{(p_i)}\rangle + & \frac{s}{1!}\langle x_0, \psi_i^{(p_i-1)}\rangle + & \ldots + & \frac{s^{p_i-2}}{(p_i-2)!}\langle x_0, \psi_i^{(2)}\rangle + & \frac{s^{p_i-1}}{(p_i-1)!}\langle x_0, \psi_i^{(1)}\rangle]\varphi_i^{(1)} + \\ & [\langle x_0, \psi_i^{(p_i-1)}\rangle + & \ldots + & \frac{s^{p_i-3}}{(p_i-3)!}\langle x_0, \psi_i^{(2)}\rangle + & \frac{s^{p_i-2}}{(p_i-2)!}\langle x_0, \psi_i^{(1)}\rangle]\varphi_i^{(2)} + \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & & + & [\langle x_0, \psi_i^{(2)}\rangle + & \frac{s}{1!}\langle x_0, \psi_i^{(1)}\rangle]\varphi_i^{(p_i-1)} + \\ & & & + & \langle x_0, \psi_i^{(1)}\rangle\varphi_i^{(p_i)} \end{pmatrix} -$$

$$-\int_0^s \begin{pmatrix} 1 & \frac{s-\sigma}{1!} & \frac{(s-\sigma)^2}{2!} & \ldots & \frac{(s-\sigma)^{p_i-2}}{(p_i-2)!} & \frac{(s-\sigma)^{p_i-1}}{(p_i-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{s-\sigma}{1!} & \ldots & \frac{(s-\sigma)^{p_i-3}}{(p_i-3)!} & \frac{(s-\sigma)^{p_i-2}}{(p_i-2)!} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \frac{s-\sigma}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \langle R(\sigma), \psi_i^{(p_i)}\rangle\varphi_i^{(1)} \\ \langle R(\sigma), \psi_i^{(p_i-1)}\rangle\varphi_i^{(2)} \\ \ldots \\ \langle R(\sigma), \psi_i^{(2)}\rangle\varphi_i^{(p_i-1)} \\ \langle R(\sigma), \psi_i^{(1)}\rangle\varphi_i^{(p_i)} \end{pmatrix} d\sigma]ds \qquad (3.5)$$

исчезает при $\boldsymbol{P}R(x) = 0$ и $x_0 \in E^{\infty-k_B}$. В условиях групповой симметрии (1.1) возникает восходящая к Л.В.Овсянникову в его "Программе Подмодели"[4] задача об асимптотической устойчивости решений уравнения (3.4), инвариантных относительно подгрупп, когда начальное значение x_0 сохраняется при действии операторов представления подгрупп $H \subset G$ и решение $x(t)$ ищется в подпространстве $E(H) = \{x \in E | Hx = x\}$. Проекторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ сплетают оператор B и полугруппу $U(t)$. Теорема 3 существования единственного классического решения $x(t)$ при $x_0 \in E^{\infty-k_B} \bigcap D_B$ сохраняется в условиях групповой симметрии при выполнении условия (*) - подпространство $(I-P)E$ инвариантно относительно операторов L_g (P - проектор на $N(B)$). В этом случае проекторы $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$ коммутируют с L_g [3, 13]. В случае компактных групп G используется техника неприводимых инвариантных подпространств [3]. В общем случае непрерывных групп и их непрерывных подгрупп задача об устойчивости решений инвариантных относительно подгрупп $H \subset G$ сводится к перечислению классов подобных подгрупп [7],[8].

4. Негрупповая симметрия - сплетение

В работах [15, 16] рассмотрены задачи теории ветвления в условиях сплетения операторами K и L, а также семействами операторов $K(a)$ и $L(a)$ не образующими группу и, вообще говоря, не являющиеся обратимыми. Предполагается выполненным условие (*): подпространство $E_1^{\infty-n}$ инвариантно относительно оператора L, а подпространство $E_{2,n} = span\{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$ - относительно оператора K. Доказано, что инвариантность $E_1^{\infty-n}$ относительно L (инвариантность $E_{2,n}$ относительно K) эквивалентна инвариантности линейной оболочки $E_1^* = span\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ относительно оператора L^* (инвариантности дефектного подпространства $E_{2,n}^* = N(B^*)$ относительно K^*). В условиях фредгольмовости оператора B при выполнении условия (*) показано, что действия операторов L и K^* на инвариантных подпространствах $E_1^n = N(B)$ и $E_{2,n}^* = N(B^*)$ определяются одной и той же матрицей $\mathcal{A} = [a_{ij}]_{i,j=1,n}$, т.е. $L\varphi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ji}\varphi_j$, $K^*\psi_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}\psi_j$ и уравнение разветвления наследует свойство сплетения, а УРК свойство сплетения матрицами $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$, определяющими действие операторов L и K^* на корневых подпростарнствах $E_1^{k_B}$ и E_{2,k_B}^* , которые являются блочно-диагональными и равны. При этом в нашем случае I-жордановых цепочек оператора B , матрица $\mathbb{A}$ сплетает проектор $\boldsymbol{P}$, соответственно оператор L сплетает полугруппу $U(t)$ и в случае параметрического сплетения семейством операторов $L(a)$ возникают поставленные выше задачи, решаемые методами [15](в [16] параметрическое сплетение не рассматривалось).

Однако описанные здесь задачи будут нетривиальны и интересны в случае исследования устойчивости семейств разветвляющихся решений(см. по этому поводу работы [10] и [18]).

Список литературы

1. Треногин В.А. Теорема Ляпунова об устойчивости по линейному приближению как следствие теоремы о неявных операторах. Доклады РАН. Математика 407, №6, 742-746(2006).

2. Вайнберг М.М.,Треногин В.А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М.Наука – 1969.–524 с.

3. Логинов Б.В. Теория ветвления решений нелинейных уравнений в условиях групповой инвариантности. Ташкент. Изд-во Фан АНУзССР – 1985. – 186 с.

4. Овсянников Л.В. Программа подмодели. Газовая динамика. ПММ. – 1994. - 58(3) . – 30-55.

5. Овсянников Л.В.Групповые свойства дифференциальных уравнений,Новосибирск, Изд-во СО РАН СССР 1962 – 238 с.

6. Овсянников Л.В.Групповой анализ дифференциальных уравнений.М. Наука, 1979 – 400 с.

7. Треногин В.А. Линейное приближение для дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и устойчивость по Ляпунову. Доклады РАН. Математика, т.428,№4, 458-461 (2009)

8. Треногин В.А. Об устойчивости тривиального положения равновесия для ДУ с вырожденной линейной частью. Тезисы докладов межд.конференции «Математическое моделирование и дифференциальные уравнения», Минск, БелгосУниверситет, 24 - 29.08.2009, часть II, с.170-171.

9. Loginov B.V., Rousak Yu.B. Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions. Nonlinear Analysis, TMA, v.17, № 3, 219-232 (1991)

10. Loginov B.V., Kim-Tyan L.R.,Rousak Yu.B. Modification of the Lyapounov-Schmidt method and the stability of solutions of differential equations with a singular operator of finite index multiplying the derivative. Russ.Acad.Sci.Dok.Math. 47, No.3, 599-603 (1993)

11. Логинов Б.В., Русак Ю.Б. Обобщенная жорданова структура в теории ветвления. В кн.«Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными».Изд-во Фан АНУзССР, Ташкент (ред.М.М.Салахитдинов), 133-148 (1978)

12. Треногин В.А. Функциональный анализ, М.,Наука– 1980. – 495 с.

13. Karasözen B., Konopleva I., Loginov B.V.Hereditary symmetry of resolving systems for nonlinear equations with Fredholm operators Nonlinear Analysis and Applications. To V. Lakshmikantham on his 80th Birthday (R.P. Agarwal, D.O'Regan - eds).v.2,617-644 (2003). Dordreht: Kluwer Acad.Publ.

14. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука. – 1967. – 472 с.

15. Сидоров Н.А.,Абдуллин В.Р. Сплетаемые уравнения разветвления в теории нелинейных уравнений. Математический сборник, т.192, №7,–107–124(2001)

16. Loginov B.V., Konopleva I. Symmetry of resolving systems in degenerated functional equations. Proc. Int. Conf.«Symmetry and Differential Equations(Andreev V.K., Vasiliev V.V- eds)», Krasnoyarsk, Inst. Comput. Simulation, Siberian Branch Russ.Acad.Sci.,–42–46(2000)

17. Loginov B.V., Konopleva I. Symmetry of resolving systems for differential equations with Fredholm operator at the derivative. Proc. Int. Conf. MOGRAN 2000(Baikov V.A., Gazizov R.K. Ibragimov N.H.,Mahomed F.M.-eds),USATU, Ufa,–116-119(2000)

18. Kim-Tyan L.R., Loginov B.V., Rousak Yu.B. Stability of bifurcating periodical solutions at Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation for singular differential equations in Banach spaces. ROMAI Journal, v.5 (2009)

Solutions stability on linear approximation to Cauchy problem , branching equation in the root subspace, symmetry.

© V.A. Trenogin[4], B.V. Loginov[5], L.R. Kim-Tyan [6]

Abstract. V.A.Trenogin results [7, 8] about solutions stability to Cauchy problem for differential equations in Banach space on linear approximation in the case of degenerate linearization are presented from the point of view of bifurcation equation in the root subspace. Conclusions are made for the presence of group and non-group symmetries.

Key Words: Differential equation in Banach space, stability, branching equation in the root subspace, symmetry.

[4]Professor of Higher Mathematics Chair, National Research Technological University «MISIS», Moscow; vtrenogin@mail.ru

[5]Professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru

[6]Associate professor of Higher Mathematics Chair, National Research Technological University «MISIS», Moscow; kim-tyan@mail.ru