УДК 517.938

Краевая задача управляемой системы дифференциальных уравнений с интегральным критерием качества

© **Е. С. Дюба**[1]

Аннотация. В работе определены условия существования векторов α_0, β_0 и u_0, таких, что решение $x(t, \alpha_0, u_0)$, удовлетворяющее краевому условию $x(T, \alpha_0, u_0) = \beta_0$ доставляет экстреммум функционалу.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений, управляемость, функционал, экстреммум, краевые условия.

1. Введение

Проблема управляемости с критерием качества исследовалась в работах [1-3].

В настоящей статье решается задача нахождения решения системы дифференциальных уравнений, доставляющего локальный экстреммум нелинейному функционалу.

Введем следующие обозначения: $|y| = \max_i\{|y_i|\}$, $y \in E_s$, E_s - s- мерное векторное пространство, $T > 0$ – некоторое число.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \tag{1.1}$$

в которой $x \in \mathbb{E}^n$, $u \in \mathbb{E}^m$ вектор-управление, $A(t), B(t)$-матрицы.

Предположим, что матрицы $A(t), B(t)$ определены и непрерывны на сегменте $[0, T]$.

На множестве решений системы (1.1) определим функционал $I = \int\limits_0^T \Phi(t, x, u)dt$, функция $\Phi(t, x, u)$ определена и непрерывна на множестве $(\mathcal{T} \times \mathbb{E}^n \times \mathbb{E}^m)$.

2. Постановка задачи

Пусть $\alpha \in En, \beta \in En$. Решение $x(t)$ системы ((1.1)) при управлении u, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = \alpha$, далее будем обозначать символом $x(t, \alpha, u), x(0, \alpha, u) = \alpha$.

Пусть $I(\alpha, u) = \int_0^T \Phi(t, x(t, \alpha, u), u)dt$.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Будем говорить, что решение $x(t, \alpha_0, u_0)$ системы (1.1), определенное на сегменте $[0, T]$, доставляет экстремум (максимум, минимум) функционалу I, если существует число $\delta > 0$ такое, что при любых α и u, удовлетворяющих неравенствам $0 < |\alpha - \alpha_0| < \delta, 0 < |u - u_0| < \delta$ выполняется*

[1]Аспирант кафедры математики и МПМД, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, г. Рязань; m.terehin@rsu.edu.ru.

неравенство $|I(\alpha,u)-I(\alpha_0,u_0)|>0$ *(максимум, если* $I(\alpha,u)-I(\alpha_0,u_0)<0$*, минимум, если* $I(\alpha,u)-I(\alpha_0,u_0)>0$*).*

Ставится задача найти такие векторы α_0, β_0 и u_0, чтобы решение $x(t,\alpha_0,u_0)$, удовлетворяющее краевому условию $x(T,\alpha_0,u_0) = \beta_0$, доставляло экстремум функционалу I.

Решение системы дифференциальных уравнений (1.1) определяется равенством

$$x(t,\alpha,u)=X(t)\alpha+D(t)u, \tag{2.1}$$

где $X(t)$ - фундаментальная матрица системы $\dot{x}=A(t)x, X(0)=E$, E - единичная матрица, $D(t)=X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$.

Пусть β – произвольный, но фиксированный вектор.

3. Условия существования векторов α_0, β_0 и u_0

Определим условия существования управления u, удовлетворяющего равенству

$$\beta=X(T)\alpha+D(T)u. \tag{3.1}$$

Рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $n=m$ и $\det D(T)\neq 0$. Тогда для любых векторов α_0,β_0 вектор u_0 определится равенством $u_0=D^{-1}(T)(\beta_0-X(T)\alpha_0)$.

Выясним, какими должны быть векторы α_0,β_0 и u_0, удовлетворяющие равенству (3.1), при котором решение $x(t,\alpha_0,u_0)=X(t)\alpha_0+D(t)u_0$ доставляло бы экстремум функционалу I.

Проведем замену переменных $y=x-X(t)\alpha_0-D(t)u_0$, $v=u-u_0$, где $\alpha_0\in En$ и $u_0\in En$ – некоторые векторы. Система (1.1) сведется к системе

$$\dot{y}=A(t)y+B(t)v. \tag{3.2}$$

Решением дифференциального уравнения (3.2) является вектор-функция

$$y(t,A,v)=X(t)c+D(t)v. \tag{3.3}$$

Функционал I примет вид $I=\int\limits_0^T\Phi(t,y+X(t)\alpha_0+D(t)u_0,v+u_0)dt$.

Предположим, что в окрестности точки $(y,v)=(0,0)$ справедливо представление

$$\Phi(t,y+X(t)\alpha_0+D(t)u_0,v+u_0)=\Phi(t,X(t)\alpha_0+D(t)u_0,u_0)+$$
$$+R_1(t,X(t)\alpha_0+D(t)u_0,u_0)y+R_2(t,X(t)\alpha_0+D(t)u_0,u_0)v+$$
$$+\sum_{i=1}^{k}P_i(t,X(t)\alpha_0+D(t)u_0,z)+o(|z|^k),$$

где $R_j(t,X(t)\alpha_0+D(t)u_0,u_0)$ – известная матрица, $j\in\{1,2\}$, при любом $i\in\{2,...,k\}$ $P_i(t,X(t)\alpha_0+D(t)u_0,z)$ – форма порядка i относительно координат вектора $z=(y,v)$, $\lim\limits_{z\to 0}\frac{o(|z|^k)}{|z|^k}=0$, равномерно относительно $t\in[0,T]$.

Тогда, учитывая, что решение системы (3.2) определяется равенством (3.3), получим, что функционал I примет вид $I=f(\alpha_0,u_0)+f_1(\alpha_0,u_0)c+f_2(\alpha_0,u_0)v+\sum\limits_{i=2}^{k}\bar{P}_i(\alpha_0,u_0,\gamma)+o(|\gamma|^k)$, в котором $f(\alpha_0,\ u_0), f_1(\alpha_0,\ u_0), f_2(\alpha_0,\ u_0)$ – известные величины, при любом $i \in \{2,...,k\} \bar{P}_i(\alpha_0, u_0, \gamma)$ – форма порядка i относительно координат вектора $\gamma = (c, v)$.

Пусть существует число $\mu \in \{2,...,k\}$ такое, что $\bar{P}_\mu(\alpha_0, u_0, \gamma)$ не тождественно равно нулю, при любом $i < \mu \bar{P}_\mu(\alpha_0, u_0, \gamma) \equiv 0$.

Тогда функционал I можно записать так:

$I = f(\alpha_0, u_0) + f_1(\alpha_0, u_0)c + f_2(\alpha_0, u_0)v + \bar{P}_\mu(\alpha_0, u_0, \gamma) + o(|\gamma|^\mu)$.

Теорема 3.1. *Необходимым условием существования экстремума функционала I является существование векторов α_0, u_0, удовлетворяющих равенству*

$$f_1(\alpha_0, u_0) = f_2(\alpha_0, u_0) = 0.$$

Доказательство. проведем от обратного. Для определённости допустим, $f_1(\alpha_0, u_0) \neq 0$.

Убедимся, что в окрестности точки (α_0, u_0) имеются как точки, в которых $I - f(\alpha_0, u_0) > 0$, так и точки, в которых $I - f(\alpha_0, u_0) < 0$.

Действительно, положим $v = 0$. Тогда $I - f(\alpha_0, u_0) = f_1(\alpha_0, u_0)c + \bar{P}_\mu(\alpha_0, u_0, c) + o(|c|^\mu)$.

Так как $f_1(\alpha_0, u_0) \neq 0$, то вектор c_0 можно выбрать так, чтобы $f_1(\alpha_0, u_0)c_0 \neq 0$. Очевидно, $|c_0| \neq 0$.

Следовательно, при $c = \tau c_0$, $\tau \neq 0$, τ – число, получим $I - f(\alpha_0, u_0) = \tau[f_1(\alpha_0, u_0)c_0 + \tau^{\mu-1}\bar{P}_\mu(\alpha_0, u_0, c_0) + \tau^{\mu-1}O(|\tau|)|c_0|^\mu]$.

Значит, число $\delta > 0$ можно выбрать так, что при $c_1 = \tau c_0$ и при $c_2 = -\tau c_0$ разность $I - f(\alpha_0, u_0)$ будет иметь значение разных знаков для любого τ $(0 < |\tau| \leq \delta)$, то есть значение $f(\alpha_0, u_0)$ функционала I на решении $x(t, \alpha_0, u_0)$ не является локальным экстремумом. Полученное противоречие доказывает теорему.

Доказательство закончено.

Теорема 3.2. *Пусть векторы α_0, u_0 таковы, что $f_1(\alpha_0, u_0) = f_2(\alpha_0, u_0) = 0$. Тогда:*

1) если форма $\bar{P}_\mu(\alpha_0, u_0, \gamma)$ знакоопределенная, то на решении $x(t, \alpha_0, u_0) = X(t)\alpha_0 + D(t)u_0$ системы (1.1) функционал I имеет экстремум, минимум при $\bar{P}_\mu(\alpha_0, u_0, \gamma) > 0$, максимум при $\bar{P}_\mu(\alpha_0, u_0, \gamma) < 0$.

2) если форма $\bar{P}_\mu(\alpha_0, u_0, \gamma)$ – знакопеременная, то функционал I на решении $x(t, \alpha_0, u_0) = X(t)\alpha_0 + D(t)u_0$ экстремума не имеет.

Доказательство. Доказательство проводится непосредственным определением знака разности $I - f(\alpha_0, u_0)$ в достаточно малой окрестности точки (α_0, u_0).

Таким образом, из равенств $f_1(\alpha_0, u_0) = f_2(\alpha_0, u_0) = 0$ и (3.1) находятся значения векторов α_0, β_0 и u_0 такие, что при выполнении условия 1) теоремы 2 решение $x(t, \alpha_0, u_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее краевому условию $x(T, \alpha_0, u_0) = \beta_0$, доставляет экстремум функционалу I.

2. Пусть $m < n$, $rang D(T) = k$, $0 < k \leq m$.

Предположим, что минор порядка k, отличный от нуля, расположен в левом верхнем углу матрицы $D(T)$. Пусть $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, β_1 – k-мерный вектор, β_2 – $(n-k)$-мерный вектор. Элементарными преобразованиями можно убедиться, что существуют матрицы P и Q такие, что при $\beta_2 = P\beta_1 + Q\alpha$ система (3.1) разрешима, а матрица $D(T) = (D_{ij}(T))_1^2$ преобразуется в матрицу $(\bar{D}_{ij}(T))_1^2$, в которой $\bar{D}_{11}(T) = D_{11}(T)$, $\bar{D}_{12}(T) = D_{12}(T)$, $D_{11}(T)$ – $k \times k$-матрица, $\det D_{11}(T) \neq 0$, $\bar{D}_{21}(T) = \bar{D}_{22}(T) = 0$, при этом $u = (u_1, u_2)$, u_1 – k-мерный вектор, u_2 - $(m-k)$-мерный вектор. Тогда система (3.1) имеет решение

$u_1 = D_{11}^{-1}(T)(\beta_1 - X_1(T)\alpha - D_{12}(T)u_2)$, $X_1(T)$ - $k \times n$ - матрица, расположенная на первых k строках матрицы $X(T)$.

В этом случае проводим следующую замену переменных: $y = x - X(t)\alpha_0 - D(t)u_0 = x - X(t)\alpha_0 - D(t)colon(D_{11}^{-1}(T)(\beta_1^0 - X_1(T)\alpha_0 - D_{12}(T)u_2^0), u_2^0) = x - X(t)\alpha_0 - D(t)\varphi(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)$, $v = u - u_0$, где

$u_0 = colon(D_{11}^{-1}(T)(\beta_1^0 - X_1(T)\alpha_0 - D_{12}(T)u_2^0), u_2^0)$. Система (1.1) сведется также к системе (3.2).

Функционал I примет вид $I = \int\limits_0^T \Phi(t, y + X(t)\alpha_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)), v + u_0)dt$.

Предположим, что в окрестности точки $(y, v) = (0, 0)$ справедливо следующее представление функционала:

$I = f(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) + f_1(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)c + f_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)v + \sum\limits_{i=2}^{k} \bar{P}_i(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma) + o(|\gamma|^k)$, в котором $f(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)$, $f_1(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)$, $f_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)$ - известные величины, при любом $i \in \{2, ..., k\} \bar{P}_i(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma)$ - форма порядка i относительно координат вектора $\gamma = (c, v)$.

Пусть существует число $\mu \in \{2, ..., k\}$ такое, что $\bar{P}_\mu(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma)$ не тождественно равно нулю, при любом $i < \mu$ $\bar{P}_\mu(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma) \equiv 0$.

Тогда функционал I можно записать так:

$I = f(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) + f_1(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)c + f_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)v + \bar{P}_\mu(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma) + o(|\gamma|^\mu)$.

Теорема 3.3. *Необходимым условием существования экстремума функционала I является существование векторов $\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0$, удовлетворяющих равенству*

$$f_1(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) = f_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) = 0.$$

Теорема 3.4. *Пусть векторы $\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0$ таковы, что $f_1(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) = f_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) = 0$. Тогда:*

1) если форма $\bar{P}_\mu(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma)$ знакоопределенная, то на решении $x(t, \alpha_0, u_0) = X(t)\alpha_0 + D(t)u_0$ системы (1.1) функционал I имеет экстремум, минимум при $\bar{P}_\mu(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma) > 0$, максимум при $\bar{P}_\mu(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma) < 0$.

2) если форма $\bar{P}_\mu(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma)$ - знакопеременная, то функционал I на решении $x(t, \alpha_0, u_0) = X(t)\alpha_0 + D(t)u_0$ экстремума не имеет.

Таким образом, из равенств $f_1(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) = f_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) = 0$, $\beta_2^0 = P\beta_1^0 + Q\alpha_0$ и $u_1^0 = D_{11}^{-1}(T)(\beta_1^0 - X_1(T)\alpha_0 - D_{12}(T)u_2^0)$ находятся значения векторов α_0 , β_0 и u_0 таких, что при выполнении условия 1) теоремы 4 решение $x(t, \alpha_0, u_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее краевому условию $x(T, \alpha_0, u_0) = \beta_0$, доставляет экстремум функционалу I .

3. Пусть $rangD(T) = 0$. Равенство (3.1) запишется в виде $\beta = X(T)\alpha$.

Проводя рассуждения, аналогичные тем, что были приведены для первых двух теорем, получим значения векторов α_0 , β_0 и u_0 , определяемые равенствами $f_1(\alpha_0, u_0) = f_2(\alpha_0, u_0) = 0$ и $\beta_0 = X(T)\alpha_0$, таких, что решение $x(t, \alpha_0, u_0)$ системы (1.1), удовлетворяющее краевому условию $x(T, \alpha_0, u_0) = \beta_0$, доставляет экстремум функционалу I .

Пример 3.1. *Пусть в системе (1.1): $A(t) = (colon(\frac{1}{t+1}, 0, 0), colon(0, \frac{-t}{1-t^2}, \frac{1}{1-t^2}), colon(0, \frac{1}{1-t^2}, \frac{-t}{1-t^2}))$, $B(t) = (colon(t + 1, 2t^2 - 1, t), colon(0, -t, 1 - 2t^2))$, $t \in [0, 1]$ функционал $I = \int_0^1 (x^2(t, \alpha, u) + bu)dt$, где $b = (2, 2)$, определен на множестве решений системы (1.1).*

Фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$ *имеет вид* $X(t) = (colon(t+1,0,0), colon(0,1,t), colon(0,t,1))$.

Непосредственным вычислением устанавливаем, что матрица $D(t) = X(t)\int_0^t X^{-1}(\tau)B(\tau)d\tau$ *определяется равенством* $D(t) = (colon(t^2+1, t^3-t, 0), colon(0,0,t-t^3))$.

Тогда $D(1) = (colon(2,0,0), colon(0,0,0))$, $rang D(1) = 1$, *значит, имеет место второй случай. Здесь* $D_{11}(T) = 2$, $D_{12}(T) = 0$. *Следовательно,* $u_1^0 = \frac{1}{2}(\beta_1^0 - (t+1)\alpha_1^0)$.

Проведя замену переменных $y = x - X(t)\alpha_0 - \varphi(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)$, $v = u - u_0$, *получим следующее представление функционала:* $I = \int\limits_0^1([y + X(t)\alpha_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)]^2 + b(v+u_0))dt$,

где $u_0 = colon(\frac{1}{2}(\beta_1^0 - (t+1)\alpha_0, u_2^0)$, $\varphi(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) = colon(\frac{1}{2}(t^2+1)(\beta_1^0-(t+1)\alpha_0, u_2^0), \frac{1}{2}(t^3-t)(\beta_1^0-(t+1)\alpha_0, u_2^0), (t-t^3)u_2^0)$.

В окрестности точки $(y,v) = (0,0)$ *справедливо следующее представление функционала* $I = f(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) + f_1(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)c + f_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0)v + \bar{P}_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma)$ *где* $f(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) = \int\limits_0^1[(X(t)\alpha_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0))^2 + bu_0]dt = -4,39$, $f_1(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) = 2\int\limits_0^1[X(t)\alpha_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_1^0, \mathrm{u}_2^0))X(t)]dt = 0$, $f_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0) = \int\limits_0^1[2(X(t)\alpha_0 + \varphi(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0))D(t) + b]dt = 0$, $\bar{P}_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma) = \int\limits_0^1[X(t)c + D(t)v]^2dt$, $\alpha_0 = (0,51; 1,51; -1,82)$, $u_0 = (-1,4; -4,31)$, $\beta_0 = (-1,79; -0,29; -0,29)$.

Так как выполнены условия теоремы 1, то имеет смысл проводить дальнейшее исследование.

Форма $\bar{P}_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma)$ *имеет вид:* $\bar{P}_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma) = 2,33c_1^2 + 1,42c_1v_1 + 1,33c_2^2 + c_2c_3 - 0,25c_2v_1 + 0,13c_2v_2 + c_3c_2 + 1,33c_3^2 - 0,13c_3v_1 + 0,25c_3v_2 + 1,42v_1c_1 - 0,25v_1c_2 - 0,13v_1c_3 + 1,11v_1^2 + 0,13v_2c_2 + 0,25v_2c_3 + 0,41v_2^2$. *Матрица формы* $\bar{P}_2(\alpha_0, \beta_1^0, u_2^0, \gamma)$ *определяется равенством:*

$M = (colon(2,33; 0; 0; 1,42; 0), colon(0; 1,33; 1; -0,25; 0,13), colon(0; 1; 1,33; -0,13; 0,25)$, $colon(1,4; -0,25; -0,13; 1,11; 0), colon(20; 0,13; 0,25; 0; 0,41))$

Непосредственным вычислением убеждаемся, что согласно условиям Сильвестра ([3]) форма является определенно положительной. Это значит, что найдено представление векторов α_0, β_0, u_0 *таких, что на решении* $x(t, \alpha_0, u_0)$ *функционал* I *имеет минимум* $I = -4,39$, *и выполняется краевое условие* $x(T, \alpha_0, u_0) = \beta_0$.

Список литературы

1. Альбрехт, Э.Г. Об управлении движением нелинейных систем// Дифференциальные уравнения. – 1966. – Т. 2. – №3 – С. 324-334.

2. Ли, Э.Б., Маркус Д. Основы теории оптимального управления. – М. : Наука, 1972. –574 с.

3. Ильин, В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 320 с.

Boundary value problems controlled system of differential equations integral performance criterion for.

© E. S. Dyuba[2]

Abstract. It is determined the condition of existence of vectors α_0, β_0 and u_0 such that a solution $x(t, \alpha_0, u_0)$ satisfying the boundary condition $x(T, \alpha_0, u_0) = \beta_0$, gives the extremum of a functional.

Key Words: system of the differential equations, controllability, functional, extremum, the boundary conditions.

[2]Post graduate student Char of Mathematics and MTMD, Ryazan State University after A.S. Esenin, Ryazan; m.terehin@rsu.edu.ru.