УДК 533.6.013.42

Математическое моделирование одной динамической системы типа «тандем»

© А. В. Анкилов[1], П. А. Вельмисов[2], Ю. А. Решетников[3]

Аннотация. Предложена математическая модель динамической системы двух упругих пластин типа «тандем», обтекаемых дозвуковым потоком газа (жидкости). Дано решение аэрогидродинамической части задачи, основанное на методах теории функций комплексного переменного. Получена связанная система уравнений, позволяющая исследовать динамику пластин.

Ключевые слова: аэрогидроупругость; динамика; упругая пластина; система типа «тандем»; деформация; обтекание; дозвуковой поток.

1. Постановка задачи

Рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях системы двух упругих пластин типа "тандем" (расположенных последовательно друг за другом вдоль одной линии) при дозвуковом обтекании их потоком идеальной несжимаемой среды (жидкости или газа). В состоянии покоя пластинам в физической плоскости xOy соответствуют на оси Ox отрезки $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$, $a_2 > b_1$. В бесконечно удаленной точке скорость газа равна V и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox. Предполагается, что прогибы пластин и возмущение однородного потока малы, то есть $\bar{w}_k(x,t) = \varepsilon w_k(x,t)$, $\bar{\varphi}(x,y,t) = Vx + \varepsilon\varphi(x,y,t)$, $\varepsilon \ll 1$, $k = 1,2$. Здесь $\bar{w}_1$, $\bar{w}_2$ и $\bar{\varphi}$ – соответственно прогибы и потенциал скорости возмущенного потока газа; x, y – декартовы координаты, t – время.

Потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x,y) \in G = R^2 \setminus ([a_1, b_1] \cup [a_2, b_2]), \tag{1.1}$$

условию отсутствия возмущений в бесконечно удаленной точке

$$\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2\right)_\infty = 0 \tag{1.2}$$

и линеаризованным граничным условиям

$$\varphi_y^{\pm} = \dot{w}_1 + V w_1', \quad x \in (a_1, b_1), \tag{1.3}$$

$$\varphi_y^{\pm} = \dot{w}_2 + V w_2', \quad x \in (a_2, b_2), \tag{1.4}$$

где $\varphi_y^{\pm} = \lim\limits_{y \to 0 \pm 0} \varphi_y(x,y,t)$. В формулах (1.3), (1.4) и далее точка обозначает производную по t, а штрих - производную по x.

[1]Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

[2]Профессор, зав. кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

[3]Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

Линеаризуя интеграл Лагранжа-Коши, получим следующее выражение для реакции газа на пластины (ρ - плотность газа)

$$Q = \rho\left(\varphi_t^+ - \varphi_t^-\right) + \rho V\left(\varphi_x^+ - \varphi_x^-\right).$$

Тогда уравнения малых колебаний пластин можно записать в виде

$$L_1\left(w_1\right) = \rho\left(\varphi_t^+ - \varphi_t^-\right) + \rho V\left(\varphi_x^+ - \varphi_x^-\right), \quad x \in \left(a_1, b_1\right), \ y = 0; \tag{1.5}$$

$$L_2\left(w_2\right) = \rho\left(\varphi_t^+ - \varphi_t^-\right) + \rho V\left(\varphi_x^+ - \varphi_x^-\right), \quad x \in \left(a_2, b_2\right), \ y = 0; \tag{1.6}$$

$$L_k\left(w_k\right) \equiv M_k \ddot{w}_k + D_k w_k'''' + N_k w_k'' + \delta_k \dot{w}_k'''' + \beta_k \dot{w}_k + \gamma_k w_k,$$

где M_k , D_k , N_k , δ_k , β_k , γ_k – некоторые постоянные ($k = 1, 2$).

2. Решение аэрогидродинамической части задачи

Выражая потенциал $\varphi(x, y, t)$ через функции прогиба $w_k\left(x, t\right)$, запишем уравнения колебаний пластин (1.5), (1.6) относительно этих функций. С этой целью в области G введем комплексный потенциал $W = f\left(z, t\right) = \varphi + i\psi$, где $\psi = \psi\left(x, y, t\right)$ – функция тока, $z = x + iy$. Для функции скоростей $f_z\left(z, t\right) = \varphi_x - i\varphi_y$ согласно условиям (1.1), (1.3), (1.4) имеем следующее интегральное представление [1, с. 52-54]

$$f_z\left(z, t\right) = \frac{1}{\pi\sqrt{h\left(z\right)}}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{v_2\left(\tau, t\right)}{\tau - z}\sqrt{h\left(\tau\right)}d\tau - \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{v_1\left(\tau, t\right)}{\tau - z}\sqrt{h\left(\tau\right)}d\tau + \Gamma\left(t\right)\right), \tag{2.1}$$

где $h\left(z\right) = \left(z - a_1\right)\left(z - b_1\right)\left(z - a_2\right)\left(b_2 - z\right)$, $v_k\left(\tau, t\right) = \dot{w}_k\left(\tau, t\right) + V w_k'\left(\tau, t\right)$, $k = 1, 2$; $\Gamma\left(t\right)$ – функция, определяющая циркуляцию скорости газа вокруг каждой пластины. Ветвь корня в формуле (2.1) фиксирована условием

$$\sqrt{h\left(z\right)} = i\sqrt{\left(x - a_1\right)\left(x - b_1\right)\left(x - a_2\right)\left(x - b_2\right)}, \quad z = x > b_2. \tag{2.2}$$

Разложение функции $f_z\left(z, t\right)$ в окрестности $z = \infty$ начинается с члена порядка $1/z^2$, поэтому общая циркуляция равна нулю. Циркуляция вокруг каждой пластины может отличаться от нуля. Заметим также, что $\left(\varphi_x^2 + \varphi_y^2\right)_\infty = 0$.

Перейдем в (2.1) к пределу при $z \to x \pm i0$, $x \in \left(a_1, b_1\right)$. Согласно условию (2.2) имеем

$$\sqrt{h(z)} = \begin{cases} \pm\sqrt{h(x)}, \ z = x \pm i0, \ x \in (a_1, b_1), \\ \mp\sqrt{h(x)}, \ z = x \pm i0, \ x \in (a_2, b_2). \end{cases} \tag{2.3}$$

Применяя формулы Сохоцкого [2] и учитывая (2.3), получим

$$\varphi_x^\pm - i\varphi_y^\pm = \pm\frac{1}{\pi\sqrt{h\left(x\right)}}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2} \frac{v_2\left(\tau, t\right)}{\tau - x}\sqrt{h\left(\tau\right)}d\tau \mp \pi i v_1\left(x, t\right)\sqrt{h\left(x\right)} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{v_1\left(\tau, t\right)}{\tau - x}\sqrt{h\left(\tau\right)}d\tau + \Gamma\left(t\right)\right),$$

следовательно,

$$\varphi_x^+ - \varphi_x^- = \frac{2}{\pi\sqrt{h(x)}}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{v_2(\tau,t)}{\tau-x}\sqrt{h(\tau)}d\tau - \int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{v_1(\tau,t)}{\tau-x}\sqrt{h(\tau)}d\tau + \Gamma(t)\right),\ x\in(a_1,b_1). \quad (2.4)$$

Аналогично, при $z\to x\pm i0$, $x\in(a_2,b_2)$, находим

$$\varphi_x^+ - \varphi_x^- = -\frac{2}{\pi\sqrt{h(x)}}\left(\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{v_2(\tau,t)}{\tau-x}\sqrt{h(\tau)}d\tau - \int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{v_1(\tau,t)}{\tau-x}\sqrt{h(\tau)}d\tau + \Gamma(t)\right),\ x\in(a_2,b_2). \quad (2.5)$$

Для комплексного потенциала имеем следующее выражение

$$W = f(z,t) = \int\limits_{a_1}^{z} f_z(z,t)\,dz + C(t), \quad (2.6)$$

где $C(t)$ – произвольная функция времени, $z\in G$. Так как G - двусвязная область, то интеграл, вообще говоря, зависит от линии интегрирования. Следовательно, потенциал φ, а значит и правые части уравнений (1.5), (1.6) однозначно не определяются. Подберем функцию $\Gamma(t)$ так, чтобы циркуляция вокруг каждой пластины равнялась нулю.

При обходе разреза $[a_k,b_k]$ против часовой стрелки циркуляция $\Gamma_k(t) = \int\limits_{a_k}^{b_k}\varphi_x^- dx + \int\limits_{b_k}^{a_k}\varphi_x^+ dx = \int\limits_{a_k}^{b_k}(\varphi_x^- - \varphi_x^+)dx$, $k=1,2$. Воспользовавшись формулами (2.4), (2.5), получим

$$\begin{gathered}\Gamma_1(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}}\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{v_2(\tau,t)}{x-\tau}\sqrt{h(\tau)}d\tau - \\ -\frac{2}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{v_1(\tau,t)}{x-\tau}\sqrt{h(\tau)}d\tau - \frac{2\Gamma(t)}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}},\end{gathered} \quad (2.7)$$

$$\begin{gathered}\Gamma_2(t) = -\frac{2}{\pi}\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}}\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{v_2(\tau,t)}{x-\tau}\sqrt{h(\tau)}d\tau + \\ +\frac{2}{\pi}\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{v_1(\tau,t)}{x-\tau}\sqrt{h(\tau)}d\tau + \frac{2\Gamma(t)}{\pi}\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}}.\end{gathered} \quad (2.8)$$

Покажем, что сумма циркуляций равна нулю. Согласно (2.7), (2.8)

$$\Gamma_1(t)+\Gamma_2(t)=\frac{2}{\pi}\int\limits_{a_2}^{b_2}v_2(\tau,t)\sqrt{h(\tau)}d\tau\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)}-\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)}\right)-$$
$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}v_1(\tau,t)\sqrt{h(\tau)}d\tau\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)}-\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)}\right)- \tag{2.9}$$
$$-\frac{2\Gamma(t)}{\pi}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}}-\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}}\right).$$

В полуплоскости $Imz>0$ рассмотрим аналитическую функцию $g(z)=1\Big/\sqrt{h(z)}$. В силу выбора ветви корня (2.2) на границе полуплоскости ($Imz=y=0$) имеем

$$Re\{g(z)\}=\begin{cases}0, x\in(-\infty,a_1)\cup(b_1,a_2)\cup(b_2,+\infty),\\ 1\Big/\sqrt{h(x)}, x\in(a_1,b_1),\\ -1\Big/\sqrt{h(x)}, x\in(a_2,b_2).\end{cases}$$

Представим $g(z)$ с помощью интеграла Шварца [2]

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{h(z)}}=\frac{1}{\pi i}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-z)}-\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-z)}\right). \tag{2.10}$$

При $z\to x\in(a_1,b_1)$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{h(x)}}=\frac{1}{\pi i}\left(\frac{\pi i}{\sqrt{h(x)}}+\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)}-\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)}\right).$$

Отсюда

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)}=\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)},\quad x\in(a_1,b_1),$$

или

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)}=\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)},\quad \tau\in(a_1,b_1), \tag{2.11}$$

Если $z\to x\in(a_2,b_2)$, то

$$-\frac{1}{\sqrt{h(x)}}=\frac{1}{\pi i}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)}-\frac{\pi i}{\sqrt{h(x)}}-\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)}\right),$$

следовательно,

$$\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)}=\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau-x)},\quad x\in(a_2,b_2),$$

или

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)} = \int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}(x-\tau)}, \quad \tau \in (a_2, b_2). \tag{2.12}$$

Полагая в (2.10) $z = x > b_2$, будем иметь

$$\frac{\pi}{\sqrt{-h(x)}} = \int_{a_1}^{b_1} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)} - \int_{a_2}^{b_2} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}(\tau - x)}.$$

Умножим на x обе части этого равенства и перейдем к пределу при $x \to +\infty$. В результате получим

$$\int_{a_1}^{b_1} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}} = \int_{a_2}^{b_2} \frac{d\tau}{\sqrt{h(\tau)}}. \tag{2.13}$$

Из равенств (2.9), (2.11) - (2.13) следует, что $\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) = 0$.

Положим

$$\begin{gathered}\Gamma(t) = \frac{1}{M}\left(\int_{a_2}^{b_2} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_2}^{b_2} \frac{v_2(\tau,t)}{x-\tau}\sqrt{h(\tau)}d\tau - \right. \\ \left. - \int_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}} \int_{a_1}^{b_1} \frac{v_1(\tau,t)}{x-\tau}\sqrt{h(\tau)}d\tau \right),\end{gathered} \tag{2.14}$$

где $M = \int\limits_{a_1}^{b_1} \frac{dx}{\sqrt{h(x)}}$. Тогда $\Gamma_1(t) = -\Gamma_2(t) = 0$. В этом случае интеграл от функции $f_z(z,t)$ по любому замкнутому контуру, принадлежащему области G, равен нулю. Отсюда следует, что значение потенциала W, определяемое формулой (2.6), не зависит от линии интегрирования, соединяющей точки a_1 и z. Поскольку

$$W = \varphi + i\psi = a_0(t) + \frac{a_1(t)}{z} + ...$$

в окрестности $z = \infty$, то функцию $C(t)$ в (2.6) можно подобрать так, чтобы выполнялось условие $(\varphi_t)_\infty = 0$.

Чтобы найти предельные значения $\varphi(x,y,t)$ на границе области G, преобразуем каждый из интегралов в правой части формулы (2.1). Интегрируя по частям, получим

$$f_z(z,t) = \frac{1}{\pi\sqrt{h(z)}}\left[\int_{a_1}^{b_1} \bar{v}_1(\tau,t)\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z}\right)'_\tau d\tau - \int_{a_2}^{b_2} \bar{v}_2(\tau,t)\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z}\right)'_\tau d\tau + \Gamma(t)\right],$$

где $\bar{v}_k(\tau,t) = \int\limits_{a_k}^{\tau} v_k(x,t)\,dx$, $k = 1,2$.

Так как

$$\left(\frac{\sqrt{h(\tau)}}{\tau - z}\right)'_\tau = \frac{(\tau - z)h'(\tau) - 2h(\tau)}{2(\tau - z)^2\sqrt{h(\tau)}}, \quad \left(\frac{\sqrt{h(z)}}{\tau - z}\right)'_z = \frac{(\tau - z)h'(z) + 2h(z)}{2(\tau - z)^2\sqrt{h(z)}},$$

то
$$\frac{\sqrt{h\left(z\right)}}{\sqrt{h\left(\tau\right)}}\left(\frac{\sqrt{h\left(z\right)}}{\tau-z}\right)_z^{/}+\left(\frac{\sqrt{h\left(\tau\right)}}{\tau-z}\right)_\tau^{/}=\frac{\left(\tau-z\right)\left(h'\left(\tau\right)+h'\left(z\right)\right)-2\left(h\left(z\right)-h\left(\tau\right)\right)}{2\left(\tau-z\right)^2\sqrt{h\left(\tau\right)}}.$$

Учитывая, что
$$h(z)=(z-a_1)(z-b_1)(z-a_2)(b_2-z)=-z^4+az^3+bz^2+cz+d,$$
находим
$$\begin{gathered}h\left(z\right)-h\left(\tau\right)=-\left(z^4-\tau^4\right)+a\left(z^3-\tau^3\right)+b\left(z^2-\tau^2\right)+c\left(z-\tau\right)=\\=\left(z-\tau\right)\left[-\left(z^2+\tau^2\right)\left(z+\tau\right)+a\left(z^2+z\tau+\tau^2\right)+b\left(z+\tau\right)+c\right],\\\left(h'\left(\tau\right)+h'\left(z\right)\right)=-4\left(z^3+\tau^3\right)+3a\left(z^2+\tau^2\right)+2b\left(z+\tau\right)+2c,\end{gathered}$$
следовательно,
$$\begin{gathered}\left(\tau-z\right)\left(h'\left(\tau\right)+h'\left(z\right)\right)+2\left(h\left(z\right)-h\left(\tau\right)\right)=\left(\tau-z\right)\left[-4\left(z^3+\tau^3\right)+3a\left(z^2+\tau^2\right)+\right.\\\left.+2b\left(z+\tau\right)+2c\right]-2\left(z-\tau\right)\left[-\left(z^2+\tau^2\right)\left(z+\tau\right)+a\left(z^2+z\tau+\tau^2\right)+b\left(z+\tau\right)+c\right]=\\=\left(\tau-z\right)\left[-4\left(z^3+\tau^3\right)+3a\left(z^2+\tau^2\right)+2\left(z^2+\tau^2\right)\left(z+\tau\right)-2a\left(z^2+z\tau+\tau^2\right)\right]=\\=\left(\tau-z\right)\left[\left(z+\tau\right)\left(-4z^2+4z\tau-4\tau^2+2z^2+2\tau^2\right)+a\left(3z^2+3\tau^2-2z^2-\right.\right.\\\left.\left.-2z\tau-2\tau^2\right)\right]=\left(\tau-z\right)\left[\left(z+\tau\right)\left(-2z^2+4z\tau-2\tau^2\right)+a\left(z^2-2z\tau+\tau^2\right)\right]=\\=\left(\tau-z\right)^3\left[a-2\left(z+\tau\right)\right].\end{gathered}$$

Таким образом,
$$\frac{\sqrt{h\left(z\right)}}{\sqrt{h\left(\tau\right)}}\left(\frac{\sqrt{h\left(z\right)}}{\tau-z}\right)_z^{/}+\left(\frac{\sqrt{h\left(\tau\right)}}{\tau-z}\right)_\tau^{/}=\frac{\left(\tau-z\right)^3\left[a-2\left(z+\tau\right)\right]}{2\left(\tau-z\right)^2\sqrt{h\left(\tau\right)}}=\frac{\left(\tau-z\right)\left(a_0-z-\tau\right)}{\sqrt{h\left(\tau\right)}},$$
где $a_0=-\dfrac{1}{2}\left(a_1+b_1+a_2+b_2\right).$

Следовательно,
$$\left(\frac{\sqrt{h\left(\tau\right)}}{\tau-z}\right)_\tau^{/}=-\frac{\sqrt{h\left(z\right)}}{\sqrt{h\left(\tau\right)}}\left(\frac{\sqrt{h\left(z\right)}}{\tau-z}\right)_z^{/}-\frac{\left(\tau-z\right)\left(\tau+z-a_0\right)}{\sqrt{h\left(\tau\right)}}. \tag{2.15}$$

С учетом (2.15) имеем
$$f_z\left(z,t\right)=-\frac{1}{\pi}\left[\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\bar{v}_1\left(\tau,t\right)}{\sqrt{h\left(\tau\right)}}\left(\frac{\sqrt{h\left(z\right)}}{\tau-z}\right)_z^{/}d\tau-\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{\bar{v}_2\left(\tau,t\right)}{\sqrt{h\left(\tau\right)}}\left(\frac{\sqrt{h\left(z\right)}}{\tau-z}\right)_z^{/}d\tau\right]+$$
$$+\frac{1}{\pi\sqrt{h\left(z\right)}}\left[\Gamma\left(t\right)-\int\limits_{a_1}^{b_1}\bar{v}_1\left(\tau,t\right)\frac{\left(\tau-z\right)\left(\tau+z-a_0\right)}{\sqrt{h\left(\tau\right)}}d\tau+\right. \tag{2.16}$$

$$+\int_{a_2}^{b_2} \bar{v}_2(\tau,t)\,\frac{(\tau-z)(\tau+z-a_0)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\Bigg].$$

Подставляя (2.16) в (2.6), получим

$$\begin{gathered}W=\varphi+i\psi=-\frac{\sqrt{h(z)}}{\pi}\left(\int_{a_1}^{b_1}\frac{\bar{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-z}-\int_{a_2}^{b_2}\frac{\bar{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-z}\right)+\\ +\frac{\Gamma(t)}{\pi}\int_{a_1}^{z}\frac{dz}{\sqrt{h(z)}}-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\bar{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int_{a_1}^{z}\frac{(\tau-z)(\tau+z-a_0)}{\sqrt{h(z)}}dz+\\ +\frac{1}{\pi}\int_{a_2}^{b_2}\frac{\bar{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int_{a_1}^{z}\frac{(\tau-z)(\tau+z-a_0)}{\sqrt{h(z)}}dz+C(t).\end{gathered}\tag{2.17}$$

Отсюда при $z\to x\pm i0$, $x\in(a_1,b_1)$, находим

$$\begin{gathered}\varphi^{\pm}+i\psi^{\pm}=\frac{\mp\sqrt{h(x)}}{\pi}\left(\pm\pi i\frac{\bar{v}_1(x,t)}{\sqrt{h(x)}}+\int_{a_1}^{b_1}\frac{\bar{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-x}-\int_{a_2}^{b_2}\frac{\bar{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-x}\right)+\\ +\frac{\Gamma(t)}{\pi}\int_{a_1}^{x}\frac{dx}{\pm\sqrt{h(x)}}-\frac{1}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\bar{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int_{a_1}^{x}\frac{(\tau-x)(\tau+x-a_0)}{\pm\sqrt{h(x)}}dx+\\ +\frac{1}{\pi}\int_{a_2}^{b_2}\frac{\bar{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int_{a_1}^{x}\frac{(\tau-x)(\tau+x-a_0)}{\pm\sqrt{h(x)}}dx+C(t),\end{gathered}$$

следовательно,

$$\begin{gathered}\varphi^{+}-\varphi^{-}=-\frac{2\sqrt{h(x)}}{\pi}\left(\int_{a_1}^{b_1}\frac{\bar{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-x}-\int_{a_2}^{b_2}\frac{\bar{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-x}\right)+\\ +\frac{2\Gamma(t)}{\pi}\int_{a_1}^{x}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}}-\frac{2}{\pi}\int_{a_1}^{b_1}\frac{\bar{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int_{a_1}^{x}\frac{(\tau-x)(\tau+x-a_0)}{\sqrt{h(x)}}dx+\\ +\frac{2}{\pi}\int_{a_2}^{b_2}\frac{\bar{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int_{a_1}^{x}\frac{(\tau-x)(\tau+x-a_0)}{\sqrt{h(x)}}dx,\quad x\in(a_1,b_1).\end{gathered}\tag{2.18}$$

Аналогичным образом, сначала интегрируя (2.16) от a_2 до z, затем переходя к пределу при $z\to x\pm i0$, $x\in(a_2,b_2)$, будем иметь

$$\varphi^{+}-\varphi^{-}=\frac{2\sqrt{h(x)}}{\pi}\left(\int_{a_1}^{b_1}\frac{\bar{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-x}-\int_{a_2}^{b_2}\frac{\bar{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-x}\right)-$$

$$-\frac{2\Gamma(t)}{\pi}\int\limits_{a_2}^{x}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}}+\frac{2}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\bar{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int\limits_{a_2}^{x}\frac{(\tau-x)(\tau+x-a_0)}{\sqrt{h(x)}}dx- \tag{2.19}$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{\bar{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int\limits_{a_2}^{x}\frac{(\tau-x)(\tau+x-a_0)}{\sqrt{h(x)}}dx,\quad x\in(a_2,b_2).$$

Согласно формулам (2.4), (2.5), (2.18), (2.19) уравнения колебаний пластин (1.5), (1.6) принимают вид

$$(-1)^k L_k(w_k)=\frac{2\rho\sqrt{h(x)}}{\pi}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\tilde{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-x}-\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{\tilde{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}\frac{d\tau}{\tau-x}\right)-$$

$$-\frac{2\rho\Gamma'(t)}{\pi}\int\limits_{a_k}^{x}\frac{dx}{\sqrt{h(x)}}+\frac{2\rho}{\pi}\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{\tilde{v}_1(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int\limits_{a_k}^{x}\frac{(\tau-x)(\tau+x-a_0)}{\sqrt{h(x)}}dx-$$

$$-\frac{2\rho}{\pi}\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{\tilde{v}_2(\tau,t)}{\sqrt{h(\tau)}}d\tau\int\limits_{a_k}^{x}\frac{(\tau-x)(\tau+x-a_0)}{\sqrt{h(x)}}dx+ \tag{2.20}$$

$$+\frac{2\rho V}{\pi\sqrt{h(x)}}\left(\int\limits_{a_1}^{b_1}\frac{v_1(\tau,t)}{\tau-x}\sqrt{h(\tau)}d\tau-\int\limits_{a_2}^{b_2}\frac{v_2(\tau,t)}{\tau-x}\sqrt{h(\tau)}d\tau-\Gamma(t)\right),\quad x\in(a_k,b_k)\ \ k=1,2.$$

В (2.20) $\tilde{v}_k(\tau,t)=\dfrac{\partial\bar{v}_k}{\partial t}=\int\limits_{a_k}^{\tau}\left(\ddot{w}_k(x,t)+V\dot{w}_k'(x,t)\right)dx$, $\Gamma(t)$ определяется формулой (2.14).

Таким образом, получили связанную систему уравнений (2.20) относительно функций прогиба $w_1(x,t)$ и $w_2(x,t)$, описывающую динамику двух упругих пластин в дозвуковом потоке газа.

3. Заключение

Предложена математическая модель динамической системы типа "тандем", состоящей из двух упругих пластин, последовательно расположенных друг за другом вдоль одной линии и обтекаемых дозвуковым потоком газа (жидкости). Дано решение аэрогидродинамической части задачи, основанное на методах теории функций комплексного переменного. Получена связанная система уравнений, позволяющая исследовать динамику пластин.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК №П1122, а также поддержана грантом РФФИ № 09-01-97005.

Работа выполнена в рамках реализации ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (2009-2013г.г.), ГК N1122

Список литературы

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М.: Наука, 1980. – 448 с.

2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

Oscillations equations of system of two elastic plates

© A. V. Ankilov[4], P. A. Velmisov[5], Yu. A. Reshetnikov[6]

Abstract. A mathematical model of the dynamical system of the two elastic plates of "tandem" species flowing along of the subsonic flow of gas (fluid) is proposed. The solution of aerohydrodynamical part of problem based on the methods of complex variable functions theory is given. The bound system of the equations allowing to investigate the plates dynamic is obtained.

Key Words: aerohydroelastisity; dynamic; elastic plate; system of "tandem" species; deformation; flow along the plate; subsonic flow.

[4]Associate professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru.

[5]Professor, Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

[6]Associate professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.