УДК 517.9

О построении конуса возможных решений для базы данных

© О. Е. Каледин[1], Л. А. Сухарев[2]

Аннотация. В работе определяется конус возможных решений для базы данных; показано как его построить на неуправляемом участке методом ломаных.
Ключевые слова: конус возможных решений, дифференциальное включение, базы данных.

1. Основные определения

В работе [1] Е. В. Воскресенского рассматриваются базы данных, которые порождаются абсолютно-непрерывными вектор-функциями $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$, $x \in Q$, $Q \subset AC(I_0)$ — класс абсолютно-непрерывных вектор-функций, определенных на $I_0 = [T_0, T_1]$. Пара (I_0, Q) порождает дифференциальное включение

$$\frac{dx}{dt} \in F(t,x),\ T_0 \leqslant t \leqslant T_1,\ \|x\| < R_0. \tag{1.1}$$

для которого справедлива теорема существования решения $x(t : t_0, x_0)$ Зарембы [2].

Определение 1.1. *Компакт* $I_0 = [T_0, T_1]$ *называется неуправляемым промежутком для* (1.1).

Для построения конуса возможных решений на неуправляемом промежутке рассмотрим сетку

$$S_t = \{t_i : T_0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_i < \ldots < t_m = T_1\},$$

где t_i — узлы. Пусть $x : I_0 \to \mathbb{R}^n$ — абсолютно-непрерывная вектор-функция, такая что $x(t_i) \overset{def}{=} x_i$. $X_{T_0,T_1} = \{x_i : i = \overline{0,m}\}$ — база данных.

Таким образом вектор-функция $x^{(k)} \in Q$, $k = \overline{0,l}$ порождает соответствующие базы данных на сетке S_t.

В области $P\{(t,x) : T_0 \leqslant t \leqslant T_1,\ x \in \mathbb{R}^n,\ \|x\| < R_0\}$ почти всюду имеют место неравенства

$$\mu(t,x) \leqslant \frac{dx}{dt} \leqslant \lambda(t,x), \tag{1.2}$$

где λ и μ непрерывные вектор-функции, квазимонотонно неубывающие по переменной x. Здесь $\dfrac{dx}{dt}$ — производная вектор-функции $x \in Q$, реализующей базу данных X_{T_0,T_1}.

Будем считать, что $\mu, \lambda \in C(P)$ и уравнения

$$\frac{dy}{dt} = \lambda(t,y)\ , \tag{1.3}$$

$$\frac{dz}{dt} = \mu(t,z) \tag{1.4}$$

[1]Программист кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kaledinoe@gmail.com.

[2]Заведующий кафедрой алгебры и геометрии, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; suharev_la@mail.ru.

однозначно определяют свои решения по начальным данным (t_0, y_0), (t_0, z_0): $y(t : t_0, y_0)$, $z(t : t_0, z_0)$, где $t_0 \leqslant t \leqslant T_1$. Пусть $\mathbb{R}^n$ частично упорядочено: $x \geqslant y$, если $x_i \geqslant y_i$, $x = colon(x_1, \ldots, x_n)$, $y = colon(y_1, \ldots, y_n)$.

Определение 1.2. *Уравнения* (1.3) *и* (1.4) *будем называть уравнениями сравнения для базы данных* X_{T_0,T_1}.

Определение 1.3. *Пусть* $Comp\ \mathbb{R}^n$ *— подпространство всех непустых компактов из* $\mathbb{R}^n$*, наделенное метрикой Хаусдорфа,* $T_0 \leqslant t \leqslant T_1$*,* $F : P \to Comp\ \mathbb{R}^n$ *и если* $y \in F(t, x)$*, то* $\mu(t, x) \leqslant y \leqslant \lambda(t, x)$*. Тогда* F *— многозначная функция и включение*

$$\frac{dx}{dt} \in F(t, x) \tag{1.5}$$

будем называть дифференциальным включением базы X_{T_0,T_1}*,* $x \in AC(I_0)$.

Для любых начальных данных $(t_0, x_0) \in P$ существует решение дифференциального включения (1.5) $x(t) = x(t; t_0, x_0)$, $x \in AC(I_0)$. Если область P замкнута и ограничена и (t_0, x_0) — внутренняя точка, то решение $x(t)$ можно продолжить влево и вправо до выхода на границу P [2].

Определение 1.4. *Множество* $K = \{x(t) : \ z(t : T_0, z_0) \leqslant x(t) \leqslant y(t : T_0, y_0), T_0 \leq t \leq T_1\}$*, где* $z_0 = \min x(T_0), y_0 = \max x(T_0)$*. называется конусом возможных траекторий на неуправляемом участке.*

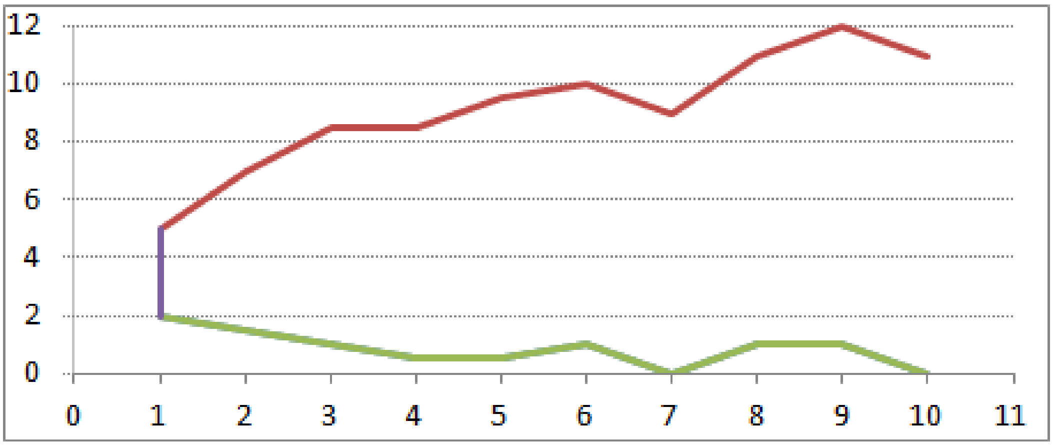

Рисунок **1.1**

Конус возможных решений

Верхней границей конуса будет решение уравнения $\dfrac{dy}{dt} = \lambda(t, y)$ с начальными данными $(T_0, y_0 = \max x(t), t = T_0$, а нижней — $\dfrac{dz}{dt} = \mu(t, z)$ с начальными данными $(T_0, z_0 = \min x(t), t = T_0$.

Заметим, что определение конуса возможных траекторий (конуса возможных решений) на неуправляемом участке содержит начальные условия z_0 и y_0 при $t = T_0$, которые в общем случае могут быть различными. При этом предполагается, что точка x_0 удовлетворяет условию $z_0 \leq x_0 \leq y_0$, тем самым образуя сечение интегральной воронки при $t = T_0$ [2].

2. Примеры

Для базы данных существует решение дифференциального включения, которое совпадает с верхней или нижней границей.

Пример 2.1. *Пусть база данных X_{T_0,T_1} задана на сегменте $[T_0, T_1]$.*

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	5	6	6	7	6	6.1	5.3	5	6
2	2	5	5	4.5	4	3	3	2	1	2
3	2	1.9	2	2	3	2	2	1	0	1
4	2	5	4	3.8	3	2	2	1	0.7	0
5	2	5	5.1	5	5	4	4	3	2	3

Таблица разделенных разностей:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	3	1	0	1	-1	0.1	-0.8	-0.3	1	0.6
2	3	0	-0.5	-0.5	-1	0	-1	-1	1	0.2
3	-0.1	0.1	0	1	-1	0	-1	-1	-1	0.1
4	3	-1	-0.2	-0.8	-1	0	-1	-0.3	-0.7	0
5	3	0.1	-0.1	0	-1	0	-1	-1	1	0.3

Максимумы и минимумы разделенных разностей для каждого участка разбиения сетки записаны в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
max	3	1	0	1	-1	0.1	-0.8	-0.3	1	
min	-0.1	-1	-0.5	-0.8	-1	0	-1	-1	-1	

Значения конуса возможных решений в узлах сетки записаны в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
max	2	5	6	6	7	6	6.1	5.3	5	6
min	2	1.9	0.9	0.4	-0.4	-1.4	-1.4	-2.4	-3.4	-4.1

На рисунке 2.1 изображен конус возможных решений, причем первая строка из базы данных в узлах разбиения совпадает с верхней границей конуса. Кроме того, в данном случае $z_0 = y_0$ и вехрняя и нижняя границы выходят из одной точки.

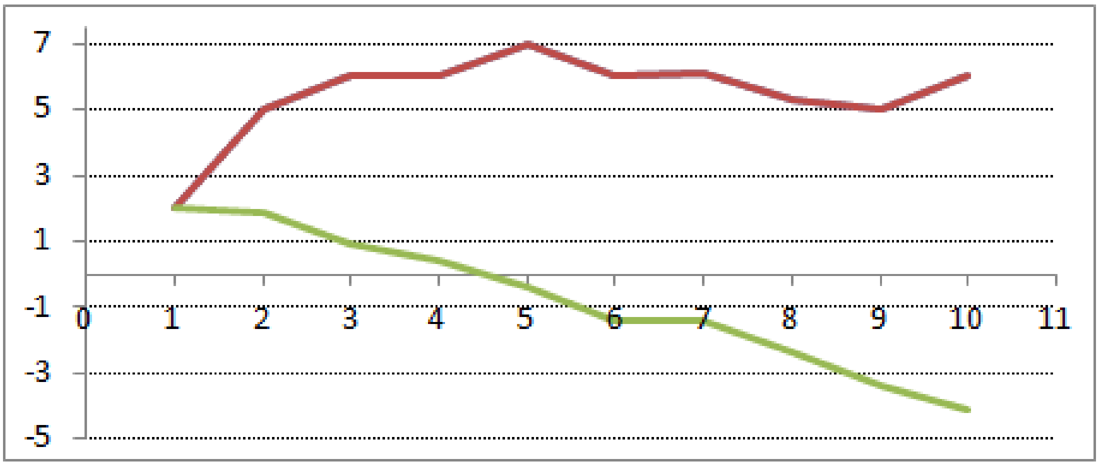

Рисунок **2.1**

Пример 2.2. *База данных X_{T_0,T_1} задана на сегменте $[T_0, T_1]$ следующей таблицей:*

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	1.5	1	0.5	0.5	1	0	1	1	0
2	2	4	4.5	4.5	4.5	5	4	5	6	5
3	5	5	4.5	4	5	5.5	4,5	5,5	6	5
4	2	4	4.5	4.5	4.5	5	4	5	6	5
5	2	3	4.5	4.5	4.5	5	4	6	6	5

Таблица разделенных разностей:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	-0,5	-0.5	-0.5	0	0.5	-1	1	0	-1	0
2	2	0.5	0	0	0.5	-1	1	1	-1	0.5
3	0	-0.5	-0.5	1	0.5	-1	1	0.5	-1	0.5
4	2	0.5	0	0	0.5	-1	1	1	-1	0.5
5	1	1.5	0	0	0.5	-1	2	0	-1	0.5

Максимумы и минимумы разделенных разностей для каждого участка разбиения сетки записаны в таблице:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
max	2	1.5	0	1	0.5	-1	2	1	-1	
min	-0.5	-0.5	-0.5	0	0.5	-1	1	0	-1	

База данных содержащая значения конуса возможных решений в узлах сетки выглядит следующим образом:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
max	5	7	8.5	8.5	9.5	10	9	11	12	11
min	2	1.5	1	0.5	0.5	1	0	1	1	0

На рисунке 2.2 изображен конус возможных решений для этой базы данных. В данном примере вектор-функция $x(t)$ заданная первой строкой базы данных совпадает с нижней границе конуса.

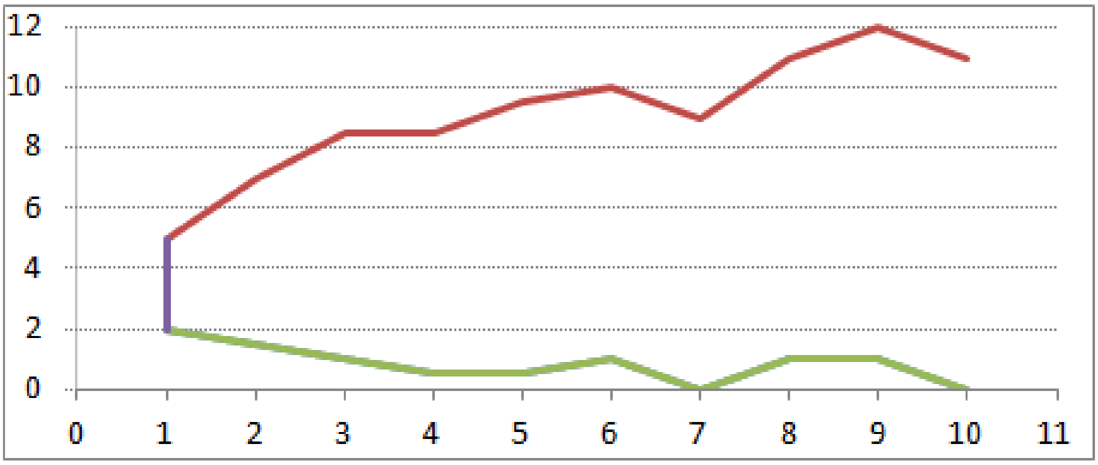

Рисунок *2.2*

Список литературы

1. *Воскресенский Е. В.* Оптимальные программные движения управляемых дифференциальных включений// Труды СВМО, 2007. — Т. 9, № 1. — С. 11–17.

2. *Филлипов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывными правыми частями и дифференциальные включения // Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения. — М. : Физматлит, 2003. — С. 265–288.

© **O. E. Kaledin**[3], **L. A. Sukharev**[4]

Abstract. We determined the cone of possible solutions for the database and shows how to build on the unmanaged area by broken.
Key Words: the cone of possible solutions, differential inclusions, database.

References

1. *Voskresensky E. V.* Optimal software movement controlled differential inclusions// Trudy MVMS, 2007. — V. 9, № 1. — P. 11–17.

2. *Phillipov A. P.* Differential equation with discontinuous right side and differential inclusions // Nonlinear analysis and nonlinear differential equations. — M. : Phizmatlit, 2003. — P. 265–288.

[3]Programmer of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; kaledinoe@gmail.com.
[4]Head of Algebra and Geometry Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; suharev_la@mail.ru.