УДК 517.9

Об оптимальной стабилизации программного движения

© **Д. К. Егорова**[1]

Аннотация. В работе рассматривается возможность оптимальной стабилизации программного движения при наличии мажоранты и абсолютно равномерно ограниченных решений.

Ключевые слова: программное движение, абсолютно равномерно ограниченные решения, мажоранта.

Пусть задача оптимальной стабилизации программного движения $x = 0$ имеет вид:

$a)$ уравнение движения

$$\frac{dx}{dt} = G(t, x, u), \tag{1.1}$$

где функция

$$G : [T, +\infty) \times R^n \times R^m \to R^n$$

при любом допустимом управлении $u \in K$ удовлетворяет требованиям теоремы существования и единственности решения Каратеодори при любых начальных данных $(t_0, x_0), T \leq t_0 < +\infty, x_0 \in R^n$; K – класс допустимых управлений, $u : [T, +\infty) \times R^n \to R^m$ – функции типа Каратеодори и $u(t, 0) \equiv 0$,

$b)$ функционал качества I рассматривается на решениях уравнения (1.1) и

$$I = \int\limits_T^{+\infty} G_0(t, x(t), u(t, x))dt, \tag{1.2}$$

$$G_0 : [T, +\infty) \times R^n \times R^m \to [0, +\infty)$$

– типа Каратеодори, $x(t) = x(t : t_0, x_0, u)$ – решение уравнения (1.1) с начальными данными (t_0, x_0) при любом управлении $u \in K, \|x_0\| \leq \delta$; решение $x = 0$ абсолютно равномерно устойчиво относительно t_0, то есть для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что

$$\|x(t : t_0, x_0, u)\| < \varepsilon$$

при всех $x_0, \|x_0\| \leq \delta$ и всех $T \leq t, t_0 < +\infty$. Требуется найти такое допустимое управление $u_0 \in K$, которое доставляет минимум функционалу (1.2) в классе K при фиксированном δ.

К такой постановке задачи при подходящей замене переменных сводится задача об оптимальной стабилизации произвольного программного движения $x = \varphi(t)$ [1]. Поэтому именно в сформулированной постановке, когда программное движение есть $x = 0$, будем рассматривать задачу. Однако, сформулированная задача требует более точной математической формулировки, которая придаст четкий смысл понятию минимума функционала (1.2). Для этого мы потребуем глобальную выпрямляемость поля направлений, определяемого уравнением (1.1), в классе допустимых управлений.

В этом случае абсолютно равномерная устойчивость $x = 0$ означает: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что как только $\|x_0\| < \delta,$ то

$$\|x(t : +\infty, x_0, u)\| < \varepsilon$$

[1]Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; dar-ego@rambler.ru

при всех $T \leq t \leq +\infty$.

Тогда в формулировке задачи функционал качества (1.2) можно записать в виде

$$I = \int\limits_{T}^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u(t, x(t) - x_0))dt,$$

где $x(t) = x(t : +\infty, x_0, u)$, $\|x_0\| \leq \delta$.

В этом случае минимум функционала I определяется так: существует управление $u_0(t, x)$ такое, что

$$\int\limits_{T}^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u_0(t, x(t) - x_0))dt \leq \int\limits_{T}^{+\infty} G_0(t, x(t) - x_0, u(t, x(t) - x_0))dt,$$

при всех $u \in K, x(t) = x(t : +\infty, x_0, u), \|x_0\| \leq \delta$.

Тогда $u_0 = u_0(t, x)$ оптимально стабилизирует решение $x = 0$ в классе допустимых управлений K .

Теперь постановка основной задачи имеет четкую математическую формулировку. В общем случае это определение каждый раз в конкретной задаче требует уточнения. Заметим, что здесь асимптотической устойчивости решения $x = 0$ нет, и поэтому, потребовалось новое определение оптимальной стабилизации программного движения.

Для того, чтобы выполнялись все требования постановки задачи, в частности, можно потребовать существование мажоранты и наличие уравнения сравнения вида

$$\frac{dz}{dt} = \lambda(t, z, v), \ z \geq 0, v = \|u\|. \tag{1.3}$$

для уравнения движения

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, u), \tag{1.4}$$

где $u \in K$, $x \in \mathbb{R}^n$, K — класс допустимых управлений, $u(t) \in V$, $f \in C^{p,q}([T, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)(p, q \geq 0)$, $f(t, 0, u) \equiv 0$.

При некоторых ограничениях [2] можно обеспечить выполнимость всех условий, при которых рассматривается основная задача. Дополнительно потребуем существования мажоранты и для функции $G_0(t, x, u)$, $\|G_0(t, x, u)\| \leq \lambda_0(t, \|x\|, \|u\|)$, $\lambda_0 \in C([T, +\infty) \times \mathbb{R}^1_+ \times \mathbb{R}^1_+, \mathbb{R}^1_+)$, $\lambda_0(t, \alpha_1, \|u\|) \leq \lambda_0(t, \alpha_2, \|u\|)$, $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Наличие мажоранты обусловлено скорее, практическими задачами, чем теоретической потребностью математики. Мажоранта является носительницей функциональных свойств, которыми обладают функции из формулировки задачи. Действительно, именно в практических задачах точные аналитические задания неизвестны, а их мажоранты задаются как результаты измерений.

Уточним класс допустимых управлений K . В формулировке задачи рассматриваются лишь только управления с обратной связью, более общие классы требуют уточнения формулировки. Еще потребуем, чтобы выполнялось неравенство

$$\|u(t, x)\| \leq \mu\|x\|,$$

где μ – минимальное неотрицательное число, обеспечивающее это неравенство для данного управления при любом $T \leq t < +\infty$.

При каких условиях основная задача имеет решение?

Пусть $\lambda_0(t,z,\mu) \le \lambda_0(t,z,\mu_0)$, $0 \le \mu, \mu \ne \mu_0$. Тогда для любого x_0, $||x_0|| \le \delta_0$, $||x(t: +\infty, x_0, u) - x_0|| \le M(\delta_0, \mu_0)$ и при $\mu = \mu_0$ справедлива оценка

$$I \le \int\limits_T^{+\infty} \lambda_0(t, M(\delta_0,\mu),\mu)dt,$$

существование функции M вытекает из абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения (1.1).

Будем считать, что управление $u \in K$ удовлетворяет условию Липшица: $||u(t_1,x_1) - u(t_2,x_2)|| \le L_1|t_1 - t_2| + L_2||x_1 - x_2||$; L_1, $L_2 - const$. В этом случае множество

$$S(t) = \{(x(t:+\infty, x_0, u), u) : ||x_0|| \le \delta_0,\ u \in K,\ T \le t < +\infty\}$$

равномерно ограничено и равностепенно непрерывно [3]. Поэтому непрерывный функционал I_r на $S_r(t) = S(t)$, $T \le t \le r$

$$I_r = \int\limits_T^{r} G_0(s, x(s:+\infty,x_0,u) - x_0, u(s, x(s:+\infty, x_0, u) - x_0))ds$$

по теореме Вейерштрасса достигает минимума при любом $r \ge T$. Пусть он достигается в точке $(x_0(t:+\infty,x_0,u_0), u_0(t, x_0(t:+\infty,x_0,u_0)))$, $T \le t \le r$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует пара
$(x(t:+\infty,x_0,u), u(t, x(t:+\infty,x_0,u)))$, $T \le t \le r$ такая, что

$$G_0(t, x(t:+\infty,x_0,u) - x_0, u(t, x(t:+\infty,x_0,u) - x_0)) <$$

$$< G_0(t, x_0(t:+\infty,x_0,u_0) - x_0, u(t, x(t:+\infty,x_0,u_0) - x_0)) + \varepsilon,\ T \le t \le r.$$

Поэтому существует последовательность

$$(x_n(t:+\infty,x_0,u_n), u_n(t, x_n(t:+\infty,x_0,u_n))), \tag{1.5}$$

равномерно сходящаяся при $n \to +\infty$ на сегменте $T \le t \le r$ к паре

$$(x_0(t:+\infty,x_0,u_0), u_0(t, x_0(t:+\infty,x_0,u_0))),\ T \le t \le r. \tag{1.6}$$

Рассматривая вложенную систему сегментов $[T,r] \subset [T,r_1] \subset ... \subset [T,r_n] \subset ...$, $r_n > r_{n-1}, r_0 = r$, получим: последовательность (1.5) при $n \to +\infty$ на полуоси $T \le t < +\infty$ сходится к паре (1.6) равномерно на любом сегменте из $[T,+\infty)$. Поэтому существует минимум функционала I:

$$\int\limits_T^{+\infty} G_0(s, x_0(s:+\infty,x_0,u_0) - x_0, u_0(s, x_0(s:+\infty,x_0,u_0) - x_0))ds \le$$

$$\le \int\limits_T^{+\infty} G_0(s, x(s:+\infty,x_0,u) - x_0, u(s, x(s:+\infty,x_0,u) - x_0))ds$$

при всех $u \in K$. Тогда (1.6) можно найти применением принципа максимума [4].

Список литературы

1. Воскресенский Е.В. Асимптотические методы: теория и приложения. – Саранск: Из–во СВМО, 2001.– 300 с.

2. Егорова Д.К., Сухарев Л.А. Оптимальная стабилизация программных движений и математическое моделирование динамики статистических результатов управляемых процессов // Труды Средневолжского математического общества. – 2005.— Т. 7, № 1. — С. 263–273.

3. Воскресенский Е.В. О полиномиальных аттракторах обыкновенных дифференциальных уравнений. Препринт № 11. Саранск: Из–во СВМО, 1998. – 22 с.

4. Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В. Оптимальное управление. – М.: Наука, 1979. – 384 с.

About optimal stabilization of programming motion.

© D. K. Egorova[2]

Abstract. The optimal stabilization of programming motion with majorant and absolutely uniformly bounded of solutions is considered in this work.

Key Words: the programming motion, absolutely uniformly bounded of solutions, majorant.

References

1. Voskresensky E.V. Asymptotic methods: the theory and appendices. – Saransk: SVMO, 2001.– 300 p.
2. Egorova D.K., Suharev L.A. Optimum stabilization of motions programs and mathematical modelling dynamics statistical results operated processes // SVMO. – 2005.— T. 7, № 1. — P. 263–273.
3. Voskresensky E.V. About polynomials attractor ordinary differential equations. Preprint № 11. Saransk: SVMO, 1998. – 22 p.
4. Alekseev V.M., Tihomirov V.M., Fomin S.V. Optimal control. – M.: Science, 1979. – 384 p.

[2]Associate professor of applied mathematics char, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; dar-ego@rambler.ru.