УДК 531.929

Об устойчивости движений систем с бесконечным запаздыванием

© **С. В. Павликов**[1]

Аннотация. Исследуется устойчивость функционально-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием на основе метода предельных уравнений с использованием знакопостоянного функционала Ляпунова. Построение предельных уравнений проводится в специальном фазовом пространстве. Получены достаточные условия устойчивости стационарных движений эредитарной механической системы.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения с бесконечным запаздыванием, знакопостоянный функционал Ляпунова, предельные уравнения.

1. Основные определения. Предельные уравнения

Фазовое пространство функционально-дифференциального уравнения с бесконечным запаздыванием определим на основе аксиоматического подхода, разработанного в [1].

Пусть B есть действительное векторное пространство либо:

1) непрерывных функций, отображающих $(-\infty,0]$ в $\mathbb{R}^n$, и для $\varphi,\psi\in B$ считаем $\varphi=\psi$, если $\varphi(s)=\psi(s)$ для всех $s\in(-\infty,0]$, либо

2) измеримых функций, отображающих $(-\infty,0]$ в $\mathbb{R}^n$, и для $\varphi,\psi\in B$ считаем $\varphi=\psi$, если $\varphi(s)=\psi(s)$ для почти всех $s\in(-\infty,0]$ и $\varphi(0)=\psi(0)$.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ обозначим норму через $|.|$. Предположим, что в пространстве B определена норма $\|.\|_B$, такая, что пространство $(B,\|.\|_B)$ является банаховым.

Для функции $x:(-\infty,A)\to\mathbb{R}^n$, $0<A\le+\infty$, определим функцию $x_t:(-\infty,0]\to\mathbb{R}^n$ формулой $x_t(s)=x(t+s)$, $s\le 0$, для каждого $t\in[0,A)$.

Определение 1.1. [2]. *Пространство B называется допустимым, если существуют постоянные $K>0$, $J>0$ и непрерывная функция $M:[0,\infty)\to[0,\infty)$, такие, что выполняются следующие условия. Пусть $0\le a<A\le\infty$. Если $x:(-\infty,A)\to\mathbb{R}^n$ непрерывна на $[a,A)$ и $x_a\in B$, то для всех $t\in[a,A)$ справедливо:*

B1) $x_t\in B$ и x_t непрерывно по t относительно $\|.\|_B$;

B2) $\|x_t\|_B\le K\max_{a\le s\le t}|x(s)|+M(t-a)\|x_a\|_B$;

B3) $|\varphi(0)|\le J\|\varphi\|_B$ для всех $\varphi\in B$;

B4) $M(t)\to 0$ при $t\to\infty$.

Предположим, что если φ ограничена и непрерывна на $(-\infty,0]$, то $\varphi\in B$ и все функции φ_{-t}, $t\ge 0$, ограничены по норме пространства B: $\|\varphi_{-t}\|_B\le L$, для некоторого $L>0$ (здесь $\varphi_{-t}(s)=\varphi(-t+s)$, $s\in(-\infty,0]$).

Пример 1.1. *Простейшим случаем допустимого пространства является пространство $\mathbb{C}_{[-h,0]}$ непрерывных на $[-h,0]$ ($h=const>0$) функций с нормой $\|\varphi\|=\sup(|\varphi(s)|,-h\le s\le 0)$.*

[1]Профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; spavlikov@mail.ru.

П р и м е р 1.2. [2]. *Пусть* $g : (-\infty, 0] \to [1, \infty)$ *есть непрерывная невозрастающая функция, такая, что:*

$$g(0) = 1, \qquad \frac{g(s+u)}{g(s)} \to 1$$

равномерно на $(-\infty, 0]$ *при* $u \to 0^-$ *;*

$$\lim_{T\to+\infty} \sup_{s\le 0} \frac{g(s)}{g(s-T)} = 0.$$

Обозначим через $\mathbb{C}_g$ *пространство непрерывных функций* φ *, отображающих* $(-\infty, 0]$ *в* R^n *, таких, что:*

$$\sup_{s\le 0} \frac{|\varphi(s)|}{g(s)} < \infty.$$

Тогда пространство $\mathbb{C}_g$ *с нормой:*

$$\|\varphi\|_g = \|\varphi\|_{\mathbb{C}_g} = \sup_{s\le 0} \frac{|\varphi(s)|}{g(s)}$$

есть банахово пространство.

Рассмотрим следующее подпространство в $\mathbb{C}_g$ *:*

$UC_g = \{\varphi \in \mathbb{C}_g : \frac{\varphi}{g}$ *равномерно непрерывна на* $(-\infty, 0]\}$.

Тогда UC_g *есть допустимое пространство.*

Частным случаем пространства $\mathbb{C}_g$ *является пространство* $\mathbb{C}_\gamma$ *с* $g(s) = e^{-\gamma s}$ *для* $\gamma > 0$ *. Пространство* $\mathbb{C}_\gamma$ *является допустимым.*

Для произвольного $h > 0$ определим множество $B_h = \{\varphi \in B : \|\varphi\|_B < h\}$, $\bar{B}_h = \{\varphi \in B : \|\varphi\|_B \le h\}$.

Рассмотрим систему функционально-дифференциальных уравнений:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t). \tag{1.1}$$

Здесь f есть непрерывное отображение, определенное на множестве $\mathbb{R}^+ \times B_H \to \mathbb{R}^n$ для некоторого $0 < H \le +\infty$, $f(t, 0) \equiv 0$.

Для заданных $\alpha \in \mathbb{R}^+, \varphi \in B_H$ назовем $x(t, \alpha, \varphi)$ решением (1.1), начинающееся в точке (α, φ) , если существует $\beta > \alpha$, такое, что $x(t, \alpha, \varphi)$ удовлетворяет (1.1) на $[\alpha, \beta)$ и $x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$.

Если $f(t, \varphi)$ ограниченно на каждом множестве $\mathbb{R}^+ \times \bar{B}_h$, $|f(t, \varphi)| \le m(h)$ для всех $(t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{B}_h, 0 < h < H$, тогда для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H$ существует непродолжаемое решение $x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (1.1), определенное для $[-\infty, \beta)$ для некоторого $\beta > \alpha$ [2].

Будем также считать, что функция f удовлетворяет условию Липшица по φ на каждом компактном множестве $K \subset B_H$, т. е. существует $l = l(K)$, такое, что для любых $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ выполняется неравенство:

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \le l\|\varphi_2 - \varphi_1\|_B.$$

Тогда решение уравнения (1.1) будет единственным для каждой точки $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H$.

О п р е д е л е н и е 1.2. [3]. *Функция* $f(t, \varphi)$ *, определенная на* $\mathbb{R} \times B$ *, имеет компактную оболочку, если для любого компактного множества* $K \subset \mathbb{R}\times B$ *существует* *последовательность* $\{t_n\}$, $t_n \geq 0$, *содержащая подпоследовательность* $\{t_m\}$, *такую, что последовательность* $\{f(t+t_m,\varphi)\}$ *равномерно сходится при* $(t,\varphi)\in K$.

Оболочкой $H^+(f)$ *является множество пар* (f^*,Ω) , $\Omega\subset\mathbb{R}^+\times B_H$, *таких, что существует последовательность* $\{t_n\}, t_n\to+\infty, n\to\infty$, *для которой* $\{f(t+t_n,\varphi)\}$ *сходится к* $f^*(t,\varphi)$, $(t,\varphi)\in\Omega$, *при этом функция* $f^*:\mathbb{R}^+\times B_H\to\mathbb{R}^n$ *называется предельной к* f .

Предположим, что для каждого компактного множества $K\subset B_H$ функция $f=f(t,\varphi)$ равномерно непрерывна по $(t,\varphi)\in\mathbb{R}^+\times K$, т. е. для любого $K\subset B_H$ для произвольного малого $\varepsilon>0$ найдется $\delta=\delta(\varepsilon,K)>0$, такое, что для любых (t_1,φ_1) , $(t_2,\varphi_2)\in\mathbb{R}^+\times K$: $|t_2-t_1|<\delta$, φ_1 , $\varphi_2\in K:\|\varphi_2-\varphi_1\|_B<\delta$, выполняется неравенство:

$$|f(t_2,\varphi_2)-f(t_1,\varphi_1)|<\varepsilon.$$

При условии ограниченности функции f и выполнения вышеуказанной равномерной непрерывности оболочка $H^+(f)$ будет компактной [3].

Для каждой пары $(f^*,\Omega)\in H^+(f)$ определим предельное уравнение

$$\dot{x}(t)=f^*(t,x_t). \tag{1.2}$$

В силу того, что f удовлетворяет условию Липшица, решение уравнения (1.2) будет единственным для каждой точки $(\alpha,\varphi)\in\Omega$.

При определении взаимосвязи решений уравнений (1.1) и (1.2) будем пользоваться следующей леммой.

Лемма 1.1. [4]. *Пусть* $t_n\to+\infty$, *последовательность* $\{\varphi_n\}\in B_H$, $\varphi_n\to\varphi\in B_H$ *при* $n\to\infty$ *и* $x(t,t_n+\alpha,\varphi_n)$ *есть решения системы* (1.1). *Тогда последовательность* $\{x_t^n=x_{t+t_n}(t_n+\alpha,\varphi_n)\}$ *содержится в некотором компакте* $K\subset B_H$, *и если функционал* $f^*(t,\varphi)$ *является предельным к* $f(t,\varphi)$ *относительно последовательности* $t_n\to+\infty$, $x^*(t,\alpha,\varphi)$ *— решение системы* (1.1), *определенное на* $(-\infty,\beta)$, *то последовательность* $\{x^n(t)\}=x(t+t_n,t_n+\alpha,\varphi_n)$ *сходится к* $x^*(t,\alpha,\varphi)$, *а* $x_t^n\to x_t^*$ *равномерно по* $t\in[\alpha,\gamma]$ *для каждого* $\gamma\in(\alpha,\beta)$.

Определение 1.3. *Пусть* $x=x(t,\alpha,\varphi)$ *есть решение уравнения* (1.1), *определенное для всех* $t\geq\alpha$. *Положительное предельное множество* $\Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ *в пространстве* B_H *есть множество* $\Omega^+=\{\varphi^*\in B_H:\ \exists t_n\to+\infty,\ n\to\infty,\ x_{t_n}(\alpha,\varphi)\to\varphi^*$ *в допустимом пространстве* B *при* $n\to\infty\}$.

2. Теоремы об устойчивости

Исследуем задачу об устойчивости нулевого решения $x=0$ системы (1.1) на основе знакопостоянного функционала Ляпунова.

Определение 2.1. *Решение* $x=0$ *уравнения* (1.1) *называется устойчивым в* $\mathbb{R}^n$ *(в* B *), если для произвольного* $\alpha\in\mathbb{R}^+,\varepsilon>0$ *имеется* $\delta=\delta(\varepsilon,\alpha)>0$, *такое, что из неравенства* $\|\varphi\|_B\leq\delta$ *следует, что* $|x(t,\alpha,\varphi)|<\varepsilon$ *(* $\|x_t(\alpha,\varphi)\|_B<\varepsilon$ *) для всех* $t\geq\alpha$.

Определение 2.2. *Точка* $x=0$ *является точкой притяжения решений уравнения* (1.1) *в* $\mathbb{R}^n$ *(в* B *), если для произвольного* $\alpha\in\mathbb{R}^+$ *найдется* $\eta=\eta(\alpha)>0$, *такое, что из неравенства* $\|\varphi\|_B\leq\eta$ *следует, что* $x(t,\alpha,\varphi)\to 0$ *(* $\|x_t(\alpha,\varphi)\|_B\to 0$ *) при* $t\to+\infty$.

Определение 2.3. *Решение уравнения* (1.1) $x = 0$ *асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и является точкой притяжения (в* $\mathbb{R}^n$ *или в* B *).*

Очевидно, что при ограниченном запаздывании определения устойчивости по отношениям к нормам в $\mathbb{R}^n$ и в фазовом пространстве эквивалентны.

Лемма 2.1. [5]. *Для допустимого пространства* B *определения 2.1—2.3 устойчивости в* $\mathbb{R}^n$ *и в* B *эквивалентны.*

Функционалом Ляпунова назовем скалярную непрерывную функцию $V : \mathbb{R}^+ \times B_H \to \mathbb{R}$. Обозначим через $\omega(u)$ непрерывную, строго монотонно возрастающую функцию $\omega : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+, \omega(0) = 0$.

Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ – некоторое решение (1.1), определенное для всех $t \geq \alpha$. Вдоль этого решения функционал V представляет собой непрерывную функцию времени $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$. Для этой функции определим верхнюю правостороннюю производную:

$$\frac{dV}{dt} = \overline{\lim}_{\triangle t \to 0^+} \frac{V(t + \triangle t) - V(t)}{\triangle t}.$$

Если $V(t, \varphi) \geq 0, \quad \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times \bar{B}_{H_0}, V(t, 0) \equiv 0$, то функционал V называется постоянно-положительным.

Введем следующие определения.

Определение 2.4. *Для непрерывного функционала* $V(t, \varphi)$ *и некоторого числа* $c \in \mathbb{R}$ *определим* $V^{-1}(\infty, c) = \{\varphi \in B_H : \exists \varphi_n \in B_H, t_n \to +\infty : \quad \varphi_n \to \varphi, \quad V(t_n, \varphi_n) \to c\}$.

Определение 2.5. *Решение* $x = 0$ *устойчиво относительно множества* $\Lambda \subset B_H$ *равномерно по* $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$*, если для любой* $(f^*, \Omega) \in H^+(f)$*, для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$*, такое, что из* $\varphi \in \Lambda \bigcap \{\|\varphi\|_B < \delta\}$ *следует* $\|x_t^*(0, \varphi)\|_B < \varepsilon$ *для каждого решения* $x^*(t, 0, \varphi)$ *любого уравнения* $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ *при всех* $t \geq 0$.

Определение 2.6. *Решение* $x = 0$ *называется асимптотически устойчивым относительно множества* $\Lambda \subset B_H$ *равномерно по* $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$*, если оно устойчиво относительно* Λ *равномерно по* $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$ *и существует* $\triangle$*, такое, что из* $\varphi \in \Lambda \bigcap \{\|\varphi\|_B < \triangle\}$ *следует, что решение* $x^*(t, 0, \varphi)$ *каждого уравнения* (1.2) *стремится к 0 при* $t \to \infty$.

Введенные определения позволяют вывести достаточные условия устойчивости на основе знакопостоянного функционала Ляпунова.

Теорема 2.1. *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал $V : \mathbb{R}^+ \times B_H \to \mathbb{R}^+$*, такой, что:*

$$V(t, \varphi) \geq 0, V(t, 0) \equiv 0, \dot{V}(t, \varphi) \leq 0, (t, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H;$$

2) решение $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества* $\Lambda_0 = V^{-1}(\infty, 0)$ *равномерно по* $\{\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)\}$.

Тогда решение $x = 0$ *уравнения* (1.1) *устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Предположим, что положение равновесия $x = 0$ уравнения (1.1) неустойчиво. Тогда при некотором $\varepsilon_0 : 0 < \varepsilon_0 < H$ найдется момент $\alpha > 0$ последовательность $\{\varphi_n : \|\varphi_n\|_B \to 0, n \to \infty\}$, такие, что для решений (1.1) $x^n(t) = x(t, \alpha, \varphi_n)$ верно:

$$\|x^n_{t_n}(\alpha, \varphi_n)\|_B = \varepsilon_0 \tag{2.1}$$

при некоторых $t = t_n$.

Из единственности $x = 0$ следует, что $t_n \to +\infty$. Можно считать, что $\|x^n_t\|_B < \varepsilon_0$ для $t \in [\alpha, t_n)$.

Из условия $V(t, 0) \equiv 0$ следует, что существуют числа $\triangle_n \to 0$, такие, что $V(\alpha, \varphi_n) \leq \triangle_n$. В силу $\dot{V}(t, \varphi) \leq 0$ получаем:

$$V(t, x^n_t(\alpha, \varphi_n)) \leq \triangle_n, \quad t > \alpha. \tag{2.2}$$

Определим $\delta_0 = \delta(\frac{\varepsilon_0}{2})$ из условия 2) теоремы. Положим $\delta_1 = \frac{\delta_0}{2}$. В силу (2.1), существует последовательность $t^{\delta_1}_n \to +\infty, n \to \infty$, такая, что $\|x^n_{t^{\delta_1}_n}\|_B = \delta_1$ и при $t^{\delta_1}_n \leq t \leq t_n$ выполняется:

$$\delta_1 \leq \|x^n_t\|_B \leq \varepsilon_0. \tag{2.3}$$

Из условий, наложенных на функцию $f(t, \varphi)$, следует, что последовательность $\{x^n(t, \alpha, \varphi_n) : t \in [\alpha, \gamma]\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна для любого $\gamma > \alpha$. Следовательно, с учетом того, что $\|\varphi_n\|_B \to 0$, мы можем утверждать, что семейство функций $\{x^n_{t^{\delta_1}_n}(\alpha, \varphi_n)\}$ предкомпактно в B_{δ_0}, т. е. семейство функций $\{x^n_{t^{\delta_1}_n}(\alpha, \varphi_n)\}$ принадлежит некоторому компакту $K \subset B_{\delta_0}$.

Таким образом, существует подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t^{\delta_1}_n$) и функция φ_{δ_1}, такие, что $x^n_{t^{\delta_1}_n} \to \varphi_{\delta_1}$, где $\|\varphi_{\delta_1}\|_B = \delta_1$. При этом, в силу (2.2) и условия для производной V имеем: $V(t^{\delta_1}_n, x^n_{t^{\delta_1}_n}(\alpha, \varphi_n)) \to 0$ при $n \to \infty$ и значит $\varphi_{\delta_1} \in V^{-1}(\infty, 0)$.

Существует $(f^*, K) \in H^+(f)$, т. е. подпоследовательность (без ограничения общности примем, что она совпадает с $t^{\delta_1}_n$), такая, что $f(t + t^{\delta_1}_n, \varphi) \to f^*_{\delta_1}(t, \varphi)$, $\varphi \in K$. По лемме 1.1 получаем, что $x^n(t + t^{\delta_1}_n, \alpha, \varphi_n) \to x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1})$, где $x^*(t, 0, \varphi_{\delta_1})$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*_{\delta_1}(t, x_t)$.

Но тогда по определению числа δ_1 имеем, что $\|x^*_t(0, \varphi_{\delta_1})\|_B \leq \frac{\varepsilon_0}{2}, t \geq 0$ и $\|x^*_t(0, \varphi_{\delta_1})\|_B \to 0, t \to +\infty$. Обозначим: $T_n = t_n - t^{\delta_1}_n$. Рассмотрим $x^* = x^*(T_n, 0, \varphi_{\delta_1})$. Если $T_n \leq T < +\infty$ для любого $n = 1, 2...$, тогда получаем, что существует T_0, такое, что $x^*_{T_0} = \varphi_{\varepsilon_0}$. Если $T_n \to +\infty$, тогда в силу (2.3) для каждого $T = const > 0$ $\|x^*_T(0, \varphi_{\delta_1})\|_B \geq \delta_1 > 0$. И то и другое свойство противоречит выбору δ_1. Таким образом получаем устойчивость нулевого решения (1.1).
Доказательство закончено.

Введем следующее определение.

Определение 2.7. *Пусть $t_n \to +\infty$ есть некоторая последовательность. Для каждого $t \in \mathbb{R}$ и $c \in \mathbb{R}$ определим множество $V^{-1}_\infty(t, c) \subset B_H$ следующим образом: точка $\varphi \in V^{-1}_\infty(t, c)$, если существует последовательность $\{\varphi_n \in B_H, \varphi_n \to \varphi\}$, такая, что:*

$$\lim_{n \to +\infty} V(t + t_n, \varphi_n) = c.$$

Допустим, что для производной $\dot{V}$ имеет место следующая оценка:

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0, \forall (t, \varphi) \in \mathbb{R} \times B_H.$$

Допустим, что непрерывная функция $W = W(t,\varphi)$ ограничена на каждом множестве $R^+ \times \bar{B}_h$ и для каждого компактного множества $K \subset B_H$ равномерно непрерывна по $(t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times K$. Как и в случае $f(t,\varphi)$, при таком условии можно определить компактную оболочку для $W = W(t,\varphi)$ и предельную функцию W^*, при этом множество $V_\infty^{-1}(t,c)$, определяемое той же последовательностью $t_n \to +\infty$, определим как соответствующее W^*.

Оболочкой $H^+(f,W)$ является множество (f^*, W^*, Ω), $\Omega \subset \mathbb{R}^+ \times B_H$, таких, что существует последовательность $\{t_n\}, t_n \to +\infty, n \to \infty$, для которой $\{f(t+t_n,\varphi)\}$ сходится к $f^*(t,\varphi)$, $\{W(t+t_n,\varphi)\}$ сходится к $W^*(t,\varphi)$ при $(t,\varphi) \in \Omega$.

Доказаны следующие теоремы о локализации положительного предельного множества решений (1.1) [6] и об асимптотической устойчивости нулевого решения (1.1) с использованием функционала Ляпунова со знакопостоянной производной [7].

Теорема 2.2. *Предположим, что:*

1) $V(t,\varphi) : \mathbb{R}^+ \times B_H \to \mathbb{R}$ *есть непрерывный функционал, ограниченный снизу на каждом компакте* $K \subset B_H$*:*

$$V(t,\varphi) \geq m(K) \quad \forall (t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times K,$$

его производная

$$\frac{dV}{dt} \leq -W(t,\varphi) \leq 0 \quad \forall (t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H;$$

2) $x = x(t,\alpha,\varphi)$ *– решение* (1.1)*, такое, что* $|x(t,\alpha,\varphi)| \leq \tau < H$*, для всех* $t \geq \alpha$.

Тогда имеется $c = c_0 \geq m$*, при котором для каждой предельной точки* $\varphi^* \in \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ *существуют предельная совокупность* $(f^*, W^*) \in H^+(f,W)$ *с* $V_\infty^{-1}(t,c)$ *и решение* $x^*(t,0,\varphi^*)$ *уравнения* $\dot{x} = f^*(t,x_t)$ *такие, что множество* $\{x_t^*(0,\varphi^*) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \Omega^+(x_t(\alpha,\varphi))$ *и* $\{x_t^*(0,\varphi^*) : t \in \mathbb{R}^+\} \subset \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = const\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$.

Теорема 2.3. *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал $V : \mathbb{R}^+ \times B_H \to \mathbb{R}^+$*, такой, что:*

$$\omega(|\varphi(0)|) \leq V(t,\varphi), V(t,0) \equiv 0,$$

$$\dot{V}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0, (t,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times B_H;$$

2) для каждой предельной совокупности $(f^*, W^*) \in H^+(f,W)$ *и каждого* $c_0 \geq 0$ *множество* $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \bigcap \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ *не содержит решений предельного уравнения* $\dot{x} = f^*(t,x_t)$*, кроме нулевого* $x = 0$.

Тогда решение $x = 0$ *уравнения* (1.1) *асимптотически устойчиво.*

3. Устойчивость стационарных движений

Рассмотрим механическую систему с голономными стационарными связями, определяемую обобщенными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, причем первые m координат системы, $(q_1, \ldots, q_m)' = q^1$ $(m < n)$ позиционные, остальные $(n-m)$ координат $(q_{m+1}, \ldots, q_n)' = q^2$ — циклические и описываемую уравнениями

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + \int_0^t \Phi(t-s)q(s)ds + Q, \tag{3.1}$$

где T — кинетическая энергия, $\Pi = \Pi(q)$ — потенциальная энергия системы, $\partial T/\partial q^2 = \partial \Pi/\partial q^2 = 0$, при этом $\Phi \in R^{m\times m}$ — симметричная матрица, $m < n$, $\Phi' = \Phi \geq 0$, ($\int_0^\infty \Phi(s)ds$ сходится) выражающая свойство эредитарности или влияния предыстории системы [8] (например, ее вязкоупругие свойства), $Q = Q(q, \dot q)$ — обобщенные гироскопические и диссипативные силы, $Q(q,0) \equiv 0$, $Q = (Q^1, 0)'$, $(\dot q^1)'Q^1 \leq 0$, ($(\cdot)'$ — операция транспонирования). Полагаем $q(t) = 0, t < 0$. Система будет иметь циклические интегралы $\partial T/\partial \dot q^2 = c$, и для нее можно определить приведенную потенциальную энергию системы $W = W(q^1, c)$.

Пусть $\partial W/\partial q^1 = 0$ при $q^1 = 0$ и $c = c_0$, так что система имеет стационарное движение

$$\dot q^1 = 0, \quad q^1 = 0, \quad \dot q^2 = \dot q_0^2 = const, \quad q^2(t) = q_0^2 + \dot q_0^2(t - t_0) \tag{3.2}$$

отвечающее значению $c = c_0$ циклических постоянных.

Теорема 3.1. *Предположим, что:*

1) измененная с учетом свойства эредитарности приведенная потенциальная энергия системы

$$S(q^1, c) = W(q^1, c) - \frac{1}{2}(q^1)'\left(\int\limits_0^\infty \Phi(s)ds\right) q^1$$

имеет изолированный минимум в точке $q^1 = 0$ при $c = c_0$ и $S(q^1, c) \geq \omega(|q^1|)$;

2) матричная функция Φ такова, что $\dot\Phi(s) \leq 0$.

Тогда стационарное движение (3.2) устойчиво по $(\dot q^1, q^1, \dot q^2)$ и является притягивающим для возмущенных движений с циклическими постоянными $c = c_0$, а также каждое возмущенное движение из области устойчивости (3.2) неограниченно приближается при $t_n \to +\infty$ к одному из предельных стационарных движений, отвечающему значению $c = c_1 = c_0 + \delta_c$.

Доказательство.

Положим $U = |c - c_0|$. Возьмем функционал Ляпунова в виде:

$V(q^1, \dot q^1) = S(q^1, c_0) + T + \frac{1}{2}\int_0^\infty (q^1(t-s) - q^1(t))'\Phi(s)(q^1(t-s) - q^1(t))ds.$

Тогда производная функционала в силу системы (3.1) будет иметь оценку:

$$\frac{dV}{dt} \leq \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} (q^1(t-s) - q^1(t))'\dot\Phi(s)(q^1(t-s) - q^1(t))ds \leq 0.$$

Предельная к (3.1) система имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + \int\limits_0^\infty \Phi(s)q(t-s)ds + Q, \tag{3.3}$$

Полагаем $W(q^1) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(q^1(t-s) - q^1(t))'\dot\Phi(s)(q^1(t-s) - q^1(t))ds$.

Множество $\{W^*(q^1) = 0\} = \{q^1(t) \equiv const, \forall t \in \mathbb{R}\}$.

Очевидно, что для каждой $const \geq 0$ множество $\{V = const)\}\bigcap\{W^*(q^1) = 0\}$ не содержит решений (3.3), кроме $\{q^1 = 0\}$.

По теореме 2.3 получаем, что движение, отвечающее $c = c_0$ асимптотически устойчиво.

Функционал $U \geq 0$, $U = 0$ тогда и только тогда, когда $c = c_0$. По теореме 2.1 получаем доказательство первой части теоремы.

Рассмотрим теперь функционал V с S зависящей от c_1. Тогда из теоремы 2.2 получаем справедливость последней части утверждения теоремы.

Доказательство закончено.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта президента РФ (МД-7549.2010.1).

Список литературы

1. Hale J.K., Kato J. Phase pavlikovce for retarded equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 11-41.

2. Haddock J., Terjeki J. On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // J. Differential Equations. – 1990. – V. 86. – P. 1-32.

3. Kato J. Uniform asymptotic stability and total stability // Tohoku Math. J. – 1970. – 22. – P. 254-269.

4. Седова Н.О. К методу Ляпунова-Разумихина для уравнений с бесконечным запаздыванием // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38. – №10. – С. 1338-1347.

5. Kato J. Stability problem in functional differential equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 63-80.

6. Павликов С.В. К задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием // Известия вузов. Математика. – 2008. – №7. – С. 29-38.

7. Павликов С.В. К задаче о стабилизации управляемых механических систем // Автоматика и телемеханика. – 2007. – №9. – С. 16-27.

8. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1982. – 302 с.

About stability of the motions of system with infinite delay.

© S. V. Pavlikov[2]

Abstract. We study the stability of functional differential equations with infinite delay, using the Lyapunov functional of constant sign. Limit equations are constructed in a special phase space. Sufficient stability conditions of stationary movements mechanical systems of eredital are received.
Key Words: The is functional-differential equations with infinite delay, Lyapunov functional with a constant-sign derivative, the limiting equations.

References

1. Hale J.K., Kato J. Phase pavlikovce for retarded equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 11-41.

2. Haddock J., Terjeki J. On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // J. Differential Equations. – 1990. – V. 86. – P. 1-32.

3. Kato J. Uniform asymptotic stability and total stability // Tohoku Math. J. – 1970. – 22. – P. 254-269.

4. Sedova N.O. To Lyapunov-Razumihina method for the equations with infinite delay // Differents Uravneniya. – 2002. – 38. – № 10. – P. 1338-1347.

5. Kato J. Stability problem in functional differential equations with infinite delay // Funk. Ekv. – 1978. – V. 21. – P. 63-80.

6. Pavlikov S. V. On the Stability Problem for Functional Differential Equations with Infinite Delay // Izv. vuzov. Mathemetic. – 2008. – № 7. – P. 29-38.

7. Pavlikov S. V. To a problem about stabilisation of controlled mechanical systems // Avtomatika i Telemekhanika. – 2007. – № 9. – P. 16-27.

8. Volterra V. The theory of the functional, integrated and the integral-differential equations. – M.: Nauka, 1982. – 302 p.

[2]Professor of chair of information safety and the controlle theory, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; spavlikov@mail.ru.