УДК 517.977

Метод операторов преобразования для определения опримального граничного управления для уравнения Лапласа в шаре

© **Ю. А. Парфёнова** [1]

Аннотация. Рассматривается вариационная постановка проблемы граничного управления в третьей краевой задаче для уравнения Лапласа в N- мерном шаре. Методом операторов преобразования найдено аналитическое выражение для граничного управления.

Ключевые слова: Граничное управление, оператор преобразования, третья краевая задача.

1. Операторы преобразования для вектор-функций, гармонических в шаре.

Рассмотрим векторную краевую задачу в единичном шаре Ω из $\mathbb{R}^n$:

$$\Delta \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = 0, \quad x \in \Omega \tag{1.1}$$

$$\Gamma \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial v_a} \begin{pmatrix} y \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g \\ -z_g \end{pmatrix}, \quad x \in \Gamma. \tag{1.2}$$

где Γ - матрица размера 2×2, все собственные значения которой положительные, z_g - известная вектор-функция, содержательный смысл которой будет указан ниже.

Введем оператор [1] $L_\Gamma = \Gamma + r\frac{d}{dr}$, тогда граничное условие (1.2) перепишется в виде

$$L_\Gamma \begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad x \in \Omega$$

при этом вектор-функция $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ - гармоническая в Ω.

В работе [1] найдено явное выражение для оператора, обратного к L_Γ:

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \int\limits_0^1 \varepsilon^{\Gamma - E} \begin{pmatrix} v_1(\varepsilon x) \\ v_2(\varepsilon x) \end{pmatrix} d\varepsilon.$$

Непосредственная проверка показывает, что

$$\varepsilon^{\Gamma - E} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{h-1}\cos(\beta \ln \varepsilon) & \beta\varepsilon^{h-1}\sin(\beta \ln \varepsilon) \\ \frac{1}{\beta}\varepsilon^{h-1}\sin(\beta \ln \varepsilon) & \varepsilon^{h-1}\cos(\beta \ln \varepsilon) \end{pmatrix}.$$

Обозначим $\frac{1}{a_0} = \beta$, в результате приходим к решению третьей векторной краевой задачи (1.1)-(1.2):

$$\begin{pmatrix} u \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_0^1 \varepsilon^{h-1}\cos(\beta \ln \varepsilon)\, v_1(\varepsilon x)\, d\varepsilon + \int\limits_0^1 \beta\varepsilon^{h-1}\sin(\beta \ln \varepsilon)\, v_2(\varepsilon x)\, d\varepsilon \\ \int\limits_0^1 \frac{1}{\beta}\varepsilon^{h-1}\sin(\beta \ln \varepsilon)\, v_1(\varepsilon x)\, d\varepsilon + \int\limits_0^1 \varepsilon^{h-1}\cos(\beta \ln \varepsilon)\, v_2(\varepsilon x)\, d\varepsilon \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

[1] Ассистент кафедры математического анализа, Пензенский государственный педагогический университет им. В. Г. Белинского, г. Пенза;julia5507@mail.ru.

2. Задача об оптимальном граничном управлении.

Пусть в единичном шаре $\Omega \in \mathbb{R}^n$ определено уравнение Лапласа:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2} = 0, \tag{2.1}$$

На границе $\Gamma = \partial\Omega$ задано третье краевое условие:

$$hy + \frac{\partial y}{\partial v_A} \equiv hy + r\frac{\partial y}{\partial r} = g,$$

где n - орт внешней нормали к Γ, $g \in L_2(\Gamma)$, $h > 0$.

Определим для каждого управления $u \in \quad L_2(\Gamma)$ состояние $y = y(u)$ как обобщенное решение краевой задачи, заданной уравнением (2.1) и краевым условием

$$hy + \frac{\partial y}{\partial v_A} = g + u, \tag{2.2}$$

Поскольку обобщенное решение $y(u) \in V = \left\{ v|_{\Omega_i} \in W_2^1(\Omega_i) : i = 1, 2 \right\}$ краевой задачи (2.1)-(2.2) существует, то оно на границе Γ области $\bar{\Omega}$ имеет смысл и $\|y(u)\|_{L_2(\Gamma)} < \infty$.

Наблюдение зададим в виде

$$Z(u) = y(u), \quad x \in \Gamma.$$

Поставим в соответствие каждому управлению $u \in \quad L_2(\Gamma)$ значение функции стоимости:

$$J(u) = \int_{\Gamma} (y(u) - z_g)^2 d\Gamma + a_0(u, u), \tag{2.3}$$

где z_g - известный элемент из $L_2(\Gamma)$, $0 < a_0$,

$$(\varphi, \psi) = \int_{\Gamma} \varphi\psi d\Gamma.$$

Следуя [2], можно показать, что каждому управлению $u \in \quad L_2(\Gamma)$ соответствует единственное состояние $y(u) \in V$. Функция y определена на области $\overline{\Omega}$, минимизирует на V функционал энергии

$$\Phi(v) = limint_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx - 2\int_{\Gamma} gvd\Gamma - 2\int_{\Gamma} uvd\Gamma \tag{2.4}$$

и является единственным в V решением задачи в слабой постановке: найти элемент $y \in V$, удовлетворяющий $\forall v \in V$ уравнению

$$\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} gvd\Gamma + \int_{\Gamma} uvd\Gamma. \tag{2.5}$$

Легко увидеть, что $y(u_1) \neq y(u_2)$ при $u_1 = u_2$.

Из (2.3) получаем

$$J(u) = \|(y(u) - y(0) + (y(0) - z_g))\|^2 + a_0(u, u) =$$

$$= \pi\left(u,u\right) - 2L\left(u\right) + \left\|z_g - y\left(0\right)\right\|^2,$$

где билинейная форма $\pi\left(\cdot,\cdot\right)$ и линейный функционал $L\left(\cdot\right)$ имеют следующий вид:

$$\pi\left(u,v\right) = \left(y\left(u\right) - y\left(0\right), y\left(v\right) - y\left(0\right)\right) + \left(\bar{a}u,u\right),$$
$$L\left(v\right) = \left(z_g - y\left(0\right), y\left(v\right) - y\left(0\right)\right), \qquad (2.6)$$
$$\left(\varphi,\psi\right) = \int\limits_{\Gamma} \varphi\psi d\Gamma.$$

Линейность функционала $L\left(v\right)$ легко видеть, поскольку разность $y\left(v\right) - y\left(0\right)$ есть единственное решение $\tilde{y}\left(v\right)$ одной из эквивалентных задач (2.4), (2.5), у которых необходимо положить $f \equiv 0$, $g \equiv 0$, а в задаче (2.5) дополнительно заменить произвольную функцию v произвольным элементом $z \in V$. Тогда имеет место равенство вида

$$\tilde{y}\left(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2\right) = \alpha_1 \tilde{y}\left(u_1\right) + \alpha_2 \tilde{y}\left(u_2\right) \quad \forall \alpha_1, \alpha_2 \in R^1, \quad \forall u_1, u_2 \in L_2.$$

На основании последнего устанавливаем линейность функционала $L\left(v\right)$ и билинейность формы $\pi\left(u,v\right)$. Форма $\pi\left(\cdot,\cdot\right)$ коэрцитивна на $L_2\left(\Gamma\right)$, т.е.

$$\pi\left(u,u\right) \geq a_0\left(u,u\right).$$

Пусть $\tilde{y}' = \tilde{y}\left(u'\right)$, $\tilde{y}'' = \tilde{y}\left(u''\right)$ - решения множества V задачи (2.5) при $f = 0$, $g = 0$ и функции $u = u\left(x\right)$, равной соответственно u', u''. Тогда

$$\left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|_V^2 \leq \mu a\left(\tilde{y}' - \tilde{y}'', \tilde{y}' - \tilde{y}''\right) \leq \mu \left\|u' - u''\right\|_{L_2(\Gamma)} \left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|_{L_2(\Gamma)}, \qquad (2.7)$$

где $\left\|v\right\|_V = \left\{\sum\limits_{i=1}^{2} \left\|v\right\|_{W_2^1(\Omega_i)}^2\right\}^{1/2}$, а билинейная форма $a\left(\cdot,\cdot\right)$ определена выражением

$$a\left(\varphi,\psi\right) = \int\limits_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial\psi}{\partial x_i} dx.$$

Поскольку $\forall v \in V$ справедливы равенства [2]

$$\left\|v\right\|_{L_2(\partial\Omega_i)} \leq c_i \left\|v\right\|_{W_2^1(\partial\Omega_i)}, \quad c_i > 0, \quad i = 1,2,$$

то

$$\left\|v\right\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_3 \left\|v\right\|_V, \quad c_3 = \max c_i \int\limits_{i=1,2}. \qquad (2.8)$$

С учетом (2.8) из (2.7) следует

$$\left\|\tilde{y}' - \tilde{y}''\right\|_{L_2(\Gamma)} \leq c_4 \left\|u' - u''\right\|_{L_2(\Gamma)}, \qquad (2.9)$$

т.е. функция $\tilde{y}\left(u\right)$ непрерывно зависит от u.

Неравенство (2.9) обеспечивает непрерывность линейного функционала $L\left(\cdot\right)$ и билинейной формы $\pi\left(\cdot,\cdot\right)$ на $\Im$. Таким образом справедлива

Теорема 2.1. *Если состояние системы определяется как решение эквивалентных задач (2.4), (2.5), то существует единственный элемент $u \in L_2\left(\Gamma\right)$, для которого имеет место соотношение вида $J\left(u\right) = \inf\limits_{v \in L_2(\Gamma)} J\left(v\right)$.*

Если $u \in L_2(\Gamma)$ - оптимальное управление, то

$$\pi(u, v-u) \geq L(v-u) \quad \forall v \in L_2(\Gamma). \tag{2.10}$$

На основании (2.6) легко увидеть справедливость равенства

$$\pi(u, v-u) - L(v-u) =$$
$$= (y(u) - z_g, y(v-u) - y(0)) + a_0(u, v-u). \tag{2.11}$$

С учетом линейности задачи (2.5) из (2.11) следует

$$\pi(u, v-u) - L(v-u) = (y(u) - z_g, y(v) - y(u)) + a_0(u, v-u).$$

Тогда неравенство (2.10) преобразуется к виду

$$(y(u) - z_g, y(v) - y(u)) + a_0(u, v-u) \geq 0 \quad \forall v \in \Im_\partial. \tag{2.12}$$

Соглашение (2.12) является необходимым и достаточным условием того, чтобы $u \in L_2(\Gamma)$ было оптимальным решением рассматриваемой задачи.

В силу существования и единственности решения $y \in V$ эквивалентных задач (2.4), (2.5) (при произвольных фиксированных $f \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(\Omega)$) существует оператор $A: V \to L_2(\Gamma)$, который на решениях y ($y|_{\Omega_i} \in C^1(\bar{\Omega}_l) \cap C^2(\bar{\Omega}_l)$, $l = 1, 2$) определяется соотношением (2.1), (2.2). Следовательно, для решений y можно единственным образом определить $\partial y / \partial v_A$ на $\partial \Omega_l$ и $\partial y / \partial v_A \in W^{-1/2}(\partial \Omega_l)$.

Для управления $v \in L_2(\Gamma)$ сопряженное состояние $p(v) \in V^*$ определим следующими соотношениями:

$$A^* p(v) = 0, \quad x \in \Omega,$$
$$hp + \frac{\partial p}{\partial v_{A^*}} = y(v) - z_g, \quad x \in \Gamma,$$

где V^* - сопряженное пространство к V, $V^* = V$,

$$A^* p = -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial v_{A^*}} = r \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Аналогично [2] используем далее формулу Грина. Имеем

$$0 = (A^* p(u), y(v) - y(u)) = -\int_{\partial \Omega_l} \frac{\partial p}{\partial v_{A^*}} (y(v) - y(u)) d\partial\Omega +$$

$$+ \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial p}{\partial x_j} \frac{\partial (y(v) - y(u))}{\partial x_i} dx =$$

$$= a(p, y(v) - y(u)) - \int_{\Gamma} (y(u) - z_g, y(v) - y(u)) \, d\Gamma =$$

$$= -\int_{\Gamma} (y(u) - z_g, y(v) - y(u)) \, d\Gamma + \int_{\Gamma} p \frac{\partial (y(v) - y(u))}{\partial v_A} d\Gamma -$$

$$-\left(p, A\left(y\left(v\right)-y\left(u\right)\right)\right)=$$
$$=-\int\limits_{\Gamma}\left(y\left(u\right)-z_g, y\left(v\right)-y\left(u\right)\right)d\Gamma+\int\limits_{\Gamma}p\left(v-u\right)d\Gamma.$$

Следовательно,

$$\left(y\left(u\right)-z_g, y\left(v\right)-y\left(u\right)\right)_{L_2(\Gamma)}=\left(p, v-u\right)_{L_2(\Gamma)}. \tag{2.13}$$

Учитывая (2.11), (2.13), из (2.10) получаем

$$\left(p\left(u\right)+\bar{a}u, v-u\right)_{L_2(\Gamma)}\geq 0. \tag{2.14}$$

Таким образом, из (2.14) следует

$$p\left(u\right)+\bar{a}u=0, \quad x\in\Gamma.$$

Для нахождения оптимального управления $u\left(x\right)$ имеем третью краевую задачу для системы уравнений Лапласа:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}=0,\ x\in\Omega,$$
$$\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2}=0,\ x\in\Omega,$$
$$hy+\frac{\partial y}{\partial v_A}=g-\frac{p}{\bar{a}},\ x\in\Gamma,$$
$$hy+\frac{\partial p}{\partial v_A}=y-z_g,\ x\in\Gamma.$$

Ее решение определяет оптимальное управление по формуле

$$u=-p/\bar{a},\ x\in\Gamma. \tag{2.15}$$

Используя формулу (1.3), находим оптимальное управление p:

$$p=\frac{1}{\beta}\int\limits_0^1\varepsilon^{h-1}\sin\left(\beta\ln\varepsilon\right)v_1\left(\varepsilon x\right)d\varepsilon+\int\limits_0^1\varepsilon^{h-1}\cos\left(\beta\ln\varepsilon\right)v_2\left(\varepsilon x\right)d\varepsilon,$$

где приняты обозначения:

$$v_1\left(x\right)=\int\limits_{\Gamma}\frac{1-|x|^2}{\left(1-2x\cos\psi+x^2\right)^{\frac{n}{2}}}g\left(\xi\right)d\Gamma_{\xi},$$
$$v_2\left(x\right)=\int\limits_{\Gamma}\frac{1-|x|^2}{\left(1-2x\cos\psi+x^2\right)^{\frac{n}{2}}}z_g\left(\xi\right)d\Gamma_{\xi},\quad \cos\psi=\frac{\left(x,\xi\right)}{\|x\|}.$$

Из формулы (2.15) находим итоговую формулу для неизвестного управления:

$$u=\beta\int\limits_0^1\varepsilon^{h-1}\sin\left(\beta\ln\varepsilon\right)v_1\left(\varepsilon x\right)d\varepsilon+\beta^2\int\limits_0^1\varepsilon^{h-1}\cos\left(\beta\ln\varepsilon\right)v_2\left(\varepsilon x\right)d\varepsilon.$$

Список литературы

1. Ю.А. Парфёнова Векторные операторы для функций, гармонических в шаре // Известия ПГПУ им. В.Г. Белинского. Физико-математические и технические науки. Изд-во ПГПУ. №13(17). 2009. С. 28-34

2. И.В. Сергиенко, В.С. Дейнека. Вычислительные схемы МКЭ для задач оптимального управления эллиптической системой с условиями сопряжения // Кибернетика и системный анализ. 2002. №1. С. 72-88.

Method of transform operators for definition optimal boundary control for Laplase equation in the ball.

© Y. A. Parfenova[2]

Abstract. Variation statement of the third boundary value problem for Laplase equation in N - measured sphere is considered. The method of transform operators are used of finds analytical expression for boundary optimal control.

Key Words: Optimal control, transform operator, third boundary value problem.

References

1. Y.A. Parfenova Vector operators for harmonic function in ball // Izv. Penz.gos. pedagog.univ. im. V.G. Belinskogo. 2009. №13(17). P. 28-34

2. I.V.Sergienko, V.S.Dejneka. Computing schemes МКЭ for problems optimum control of elliptic system with interface conditions// Cybernetics and the system analysis. 2002. №1. P. 72-88.

[2]Assistant of Mathematical analysis Chair, Penza State University after V.G. Belinsky, Penza; julia5507@mail.ru.