УДК 519.6..517.977.58

Аппроксимация и регуляризация задачи оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения в произвольной выпуклой области с управлениями в коэффициенте нелинейного члена и правой части

© **Ф. В. Лубышев**[1], **А. Р. Манапова**[2]

Аннотация. Излагается метод разностной аппроксимации и регуляризации нелинейной задачи оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с граничными условиями Дирихле в произвольной выпуклой области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Ключевые слова: оптимальное управление, эллиптическое уравнение, несамосопряженный оператор, разностная аппроксимация, регуляризация, выпуклая область, функционал, минимизирующая последовательность.

1. Введение

В данной работе рассматривается нелинейная задача оптимального управления. Управляемые процессы описываются первой краевой задачей для несамосопряженного уравнения эллиптического типа в произвольной выпуклой области. Управления содержатся в коэффициенте нелинейного члена и правой части уравнения состояния. Построены и исследованы разностные аппроксимации исходных экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций.

2. Постановка задач и их корректность

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – выпуклая область произвольной формы с границей Γ, принадлежащей классу C^2. Пусть управляемый процесс описывается краевой задачей для несамосопряженного эллиптического уравнения в области Ω:

$$Lu = -\sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha}\left(k_\alpha(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}\right) + \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(\xi)\frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} + d(\xi)q(u) = f(\xi), \quad \xi \in \Omega, \qquad u(\xi) = 0, \quad \xi \in \Gamma. \tag{2.1}$$

Будем предполагать, что k_α, b_α, q, $\alpha = 1,2$ – заданные функции; $g = (g_1, g_2) = (f, d) \in B = L_2(\Omega) \times L_\infty(\Omega)$ - управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha \in W^1_\infty(\Omega)$ и $k_\alpha(\xi) \geq \nu > 0$, $\alpha = 1,2$, $\xi \in \Omega$, $b_\alpha \in L_\infty(\Omega) : \zeta_\alpha \leq b_\alpha(\xi) \leq \overline{\zeta}_\alpha$ п.в. на Ω, $\alpha = 1,2$; q определена на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$, $q(0) = 0$, $0 \leq q_0 \leq \big[q(s_1) - q(s_2)\big]/(s_1 - s_2) \leq L_q < \infty$, для всех $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$, $s_1 \neq s_2$.

[1]Профессор кафедры вычислительной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; v.lubyshev@mail.ru.

[2]Доцент кафедры вычислительной математики, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.

Поставим следующую задачу: на решениях задачи (2.1), отвечающих всевозможным допустимым управлениям

$$g \in \prod_{k=1}^{2} U_k = U \subset B = L_2(\Omega) \times L_\infty(\Omega), \quad U_1 = \{f \in L_2(\Omega) : \zeta_3 \le f(\xi) \le \overline{\zeta}_3 \text{ п.в. на } \Omega\} \tag{2.2}$$

или

$$U_1 = \{f \in L_2(\Omega) : \|f\| \le R\}, \tag{2.3}$$

$$U_2 = \{d \in L_\infty(\Omega) : \zeta_4 \le d(\xi) \le \overline{\zeta}_4 \text{ п.в. на } \Omega\},$$

минимизировать функционал

$$J(g) = \int\limits_{\Omega} |u(\xi, g) - u_0(\xi)|^2 \, d\Omega. \tag{2.4}$$

Здесь $u_0 \in W_2^1(\Omega)$ - заданная функция, а R, ν, $\zeta_k, \overline{\zeta}_k$, $k = \overline{1,4}$ - заданные числа, $R > 0$; п.в. - почти всюду.

Предполагается выполнение следующих условий:

$$-m \le \zeta_1 \le \overline{\zeta}_1 \le m, \quad -q \le \zeta_2 \le \overline{\zeta}_2 \le q, \quad m, q = \mathtt{const} > 0;$$

$$\zeta_k \le \overline{\zeta}_k, \quad \zeta_k, \overline{\zeta}_k = \mathtt{const}, k = 3, 4;$$

$$\delta_0 = \max_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \le \nu}} \left\{ \frac{\nu - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{D^2} + \zeta_3 - \frac{m^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p^2}{4\varepsilon_2} \right\} > 0; \quad D = diam\, \Omega. \tag{2.5}$$

Под решением задачи (2.1) при фиксированном управлении $g \in U$ понимается функция $u \equiv u(g) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \equiv V$, удовлетворяющая для $\forall \eta \in V$ тождеству

$$A(u, \eta) = \int\limits_{\Omega} \left\{ \sum_{\alpha=1}^{2} k_\alpha(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial \xi_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^{2} b_\alpha(\xi) \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha} \eta + d(\xi) q(u) \eta \right\} d\Omega = \int\limits_{\Omega} f(\xi) \eta d\Omega = l(\eta). \tag{2.6}$$

При сделанных предположениях задача (2.1) однозначно разрешима в $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ при каждом фиксированном управлении $g \in U$ (см. [1]). Из результатов в [1] следует, что обобщенное (из $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$) решение задачи (2.1) принадлежит также пространству $W_{2,0}^2(\Omega)$ и для любого $g \in U$ справедлива априорная оценка

$$\|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)} \le C \|f\|_{L_2(\Omega)}. \tag{2.7}$$

Через C здесь и в дальнейшем будем обозначать положительные константы, не зависящие от управления g, шагов вводимых далее сеток и от сеточного управления $\Phi_h \in U_h$; $W_{2,0}^2(\Omega) = W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$.

Отметим, что выполнение условия (2.5) гарантирует коэрцитивность билинейной формы $A(u, \eta)$ на $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$ (см. также [1], [2]).

Теорема 2.1. *Пусть выполнены все условия при постановке задачи оптимального управления* (2.1) - (2.4)*. Тогда существует, по крайней мере, одно оптимальное управление* $g_* \in U$ *задачи* (2.1) - (2.4)*, т.е.* $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$*,* $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$*, множество точек минимума* U_* *функционала цели* $J(g)$ *слабо компактно в* $H = L_2(\Omega)$*. Любая минимизирующая последовательность* $\{g^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset U$ *слабо в* H *сходится ко множеству* U_* *точек минимума функционала* $J(g)$*.*

Отметим, что из теоремы 2.1. следует существование решения задачи (2.1) - (2.4), но решение этой задачи, вообще говоря, может быть не единственным.

3. Разностная аппроксимация задач управления. Корректность аппроксимаций

В связи с численным решением задач оптимального управления рассмотрим вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач (2.1) - (2.4) последовательностями конечномерных задач оптимального управления. В области $\overline{\Omega}$ построим сетку $\overline{\omega}$. Для этого проведем построения, аналогичные построениям в [3]–[6]. Введем новое скалярное произведение на множестве сеточных функций H'_{*h}, определенных в потоковых узлах $x' = x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in \omega'_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ (см. там же)

$$(v, \eta)' = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{x \in \omega'_\alpha} v(x') z(x') h_\alpha^{(+0.5)} h_{3-\alpha}$$

и определим на множестве $\overset{\circ}{H}_{*h}$ гильбертовы пространства $L_2(\omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$ сеточных функций с нормами

$$\|y\|_{L_2(\omega)} = \sqrt{(y, y)_0} = \left(\sum_{x \in \omega} y^2(x) mes\ e(x)\right)^{1/2}, \quad \|y\|_{*,\omega} = \sqrt{(y, y)_*},$$

$$\|y\|^2_{W_2^1(\omega)} = \|\nabla_h y\|^2_{L_2(\omega')} + \|y\|^2_{L_2(\omega)},$$

где сеточная функция $v = \nabla_h y \in H'_{*h}$ такая, что $v(x') = \nabla_h y(x') = y_{x_\alpha}^{(+0.5_\alpha)}$ при $x' = x^{(\pm 0.5_\alpha)} \in \omega'_\alpha$, $\alpha = 1, 2$ и $\|\nabla_h y\|^2_{L(\omega')} = (\nabla_h y, \nabla_h y)'$; так что

$$\|y\|^2_{W_2^1(\omega)} = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{x' \in \omega'_\alpha} \left[y_{x_\alpha}^{(+0.5_\alpha)}\right]^2 h_\alpha^{(+0.5)} h_{3-\alpha} + \sum_{x \in \omega} y^2(x) mes\ e(x).$$

Через $C(\omega)$ обозначим линейное пространство сеточных функций $y(x)$, заданных на сетке ω с нормой

$$\|y\|_{C(\omega)} = \max_{\omega} |y(x)|.$$

Задаче оптимального управления (2.1) - (2.4) поставим в соответствие следующую разностную аппроксимацию: минимизировать функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \omega} \left|y(x; \Phi_h) - u_0^h(x)\right|^2 mes\ e(x), \tag{3.1}$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) = y(x;\Phi_h) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$, называемая решением разностной краевой задачи, удовлетворяет для любой сеточной функции $v(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$ сумматорному тождеству

$$A_h(y,v) = \sum_{\alpha=1}^{2} \sum_{x'\in\omega'_\alpha} a_\alpha^{(+0.5_\alpha)}(x)\; y_{\overline{x}_\alpha}^{(+0.5_\alpha)}\; v_{\overline{x}_\alpha}^{(+0.5_\alpha)} h_\alpha^{(+0.5)} h_{3-\alpha} +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{\omega} b_\alpha^h(x) y_{\overset{\circ}{x}_\alpha}\, v\; mes\; e(x) + \sum_{\omega} d^h(x)\; q(y)\, v\, mes\; e(x) = \sum_{\omega} \Phi_h(x)\, v\; mes\; e(x) = l_h(v), \tag{3.2}$$

а сеточное управление $\Phi_h(x)$ таково, что

$$\Phi_h(x) \in \prod_{k=1}^{2} U_{kh} = U_h \subset B_h = L_2(\omega)\times L_\infty(\omega), \quad U_{1h} = \big\{\Phi_{1h}(x)\in L_2(\omega) : \zeta_3 \le \Phi_h(x) \le \overline{\zeta}_3\big\}, \tag{3.3}$$

или

$$U_{1h} = \big\{\Phi_{1h}(x)\in L_2(\omega) : \big\|\Phi_h\big\|_{L_2(\omega)} \le R\big\}. \tag{3.4}$$

$$U_{2h} = \big\{\Phi_{2h}(x)\in L_\infty(\omega) : \zeta_4 \le \Phi_h(x) \le \overline{\zeta}_4\big\}$$

Здесь $\alpha^{(\pm0.5_\alpha)}(x)$, $\alpha = 1,2$ - сеточные аппроксимации функций $k_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1,2$, $\xi\in\Omega$ в потоковых точках $x' = x^{(\pm0.5_\alpha)} \in \omega'_\alpha$, $\alpha = 1,2$, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} a_\alpha^{(\pm0.5_\alpha)}(x) &= \frac{1}{l_\alpha^{(\pm0.5_\alpha)}} \int\limits_{l_\alpha^{(\pm0.5_\alpha)}} k_\alpha(\xi)\, dl \quad \text{для } l_\alpha^{(\pm.5_\alpha)} \ne 0,\\ a_\alpha^{(\pm0.5_\alpha)}(x) &= \frac{1}{\Delta l} \int\limits_{\Delta l} k_\alpha(\xi)\, dl \quad \text{для } l_\alpha^{(\pm0.5_\alpha)} = 0, \end{aligned} \tag{3.5}$$

а $u_0^h(x)$ - сеточная аппроксимация для $u_0(\xi)$, вычисляемая по формуле

$$u_0^h(x) = \frac{1}{mes\; e(x)} \int\limits_{mes\; e(x)} u_0(\xi)\, d\xi, \qquad x\in\omega. \tag{3.6}$$

Функции $\alpha^{(\pm0.5_\alpha)}(x)$ вычисляются с помощью криволинейных интегралов первого рода вдоль $l_\alpha^{(\pm0.5_\alpha)}$ и Δl, целиком лежащих в $\overline{\Omega}$.

Ниже всюду будем предполагать, что выполняется условие

$$\delta_0 = \max_{\substack{\varepsilon_1,\varepsilon_2>0\\ \varepsilon_1+\varepsilon_2\le\sigma}} \left\{\frac{\nu-\beta(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{D^2} + \zeta_3 - \frac{m^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p^2}{4\varepsilon_2}\right\} > 0, \tag{3.7}$$

$\sigma = v/\beta$, $\beta = h_1/h_1^* + h_2/h_2^*$, $h_\alpha^* = \min\limits_{x\in\overline{\omega}} h_\alpha^{(\pm0.5_\alpha)}$, $\alpha = 1,2$, из которого следует справедливость условия (2.5).

Т е о р е м а 3.1. *Задача о нахождения решения разностной схемы* (3.2) *при фиксированном управлении* $\Phi_h\in U_h$ *эквивалентна решению операторного уравнения* $A_h y = F_h$, *где оператор* A_h *и сеточная функция* F_h *определяются равенствами*

$$\big(A_h y, v\big)_{W_2^1(\omega)} = A_h(y,v), \qquad \big(F_h, v\big)_{W_2^1(\omega)} = l_h(v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega); \tag{3.8}$$

Задача (3.2) *однозначно разрешима в* $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$ *при каждом* $\Phi_h \in U_h$ *и имеет место априорная оценка*

$$\|y(\Phi_h)\|_{W_2^1(\omega)} \le C\|\Phi_h\|_{L_2(\omega)}. \qquad (3.9)$$

4. Оценки погрешности метода по состоянию, погрешности сеточного функционала, скорости сходимости аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Получим представление для погрешности аппроксимации ψ_h схемы (3.2) при фиксированном управлении $\Phi_h \in U_h$, а также установим априорную оценку погрешности $z = y - u$ для любых управлений $\Phi_h \in U_h$ и $g \in U$ на решениях $u(\xi) \in W_{2,0}^2(\Omega)$.

Пусть $u(\xi) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ - решение задачи (2.1), отвечающее управлению $g \in U$, а $y(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$ - решение сеточной задачи (3.2), отвечающее сеточному управлению $\Phi_h \in U_h$.Обозначим через $z(x) = y(x) - u(x)$ - погрешность метода по состоянию. Для функции $z(x)$ получим задачу: $A_h z = \psi_h$, $x \in \omega$, где оператор A_h определяется равенством (3.8), а $\psi_h = F_h - A_h u$ - погрешность аппроксимации разностной схемы (3.2) по состоянию определяется равенством

$$\left(\psi_h, v\right)_{W_2^1(\omega)} = l_h(v) - A_h(u,v), \qquad \forall v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega). \qquad (4.1)$$

Л е м м а 4.1. *Пусть* $u(\xi) \in W_{2,0}^2(\Omega)$ *и* $y(x) \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\omega)$ *- соответственно решения задач* (2.1) *и* (3.2) *при фиксированных управлениях* $g \in U$ *и* $\Phi_h \in U_h$. *Тогда погрешность аппроксимации схемы* (3.2) *по состоянию представима в виде*

$$(\psi_h, v)_{W_2^1(\omega)} = -(\eta, \nabla v)' - \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(B_\alpha^{(+0.5_\alpha)}, v\right)_0 + \left(B_\alpha^{(-0.5_\alpha)}, v\right)_0\right] + \left(Q_h, v\right)_0 + \left(D_h, v\right)_0, \qquad (4.2)$$

где

$$\eta^{(\pm 0.5_\alpha)} = \eta^{(\pm 0.5_\alpha)}(x) = \left(a_\alpha u_{x_\alpha}\right)^{(\pm 0.5_\alpha)} - W_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}, \text{ если } l_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)} = h_{3-\alpha};$$

$$\eta^{(\pm 0.5_\alpha)} = \left(a_\alpha u_{x_\alpha}\right)^{(\pm 0.5_\alpha)} - W_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)} + \left(1 - \frac{l_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}}{h_{3-\alpha}}\right)\left(W_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)} - \widetilde{W}_\alpha\right), \text{ если } 0 < l_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)} < h_{3-\alpha};$$

$$\eta^{(\pm 0.5_\alpha)} = \left(a_\alpha u_{x_\alpha}\right)^{(\pm 0.5_\alpha)} - \widetilde{W}_\alpha, \text{ если } l_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)} = 0;$$

$$\widetilde{W}_\alpha = \frac{1}{\Delta l}\int_{\Delta l} k_\alpha(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_\alpha}dl; \qquad W_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)} = \frac{1}{l_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}}\int_{l_\alpha^{(\pm 0.5_\alpha)}} k_\alpha(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_\alpha}dl; \qquad (4.3)$$

$$B_h^{(\pm 0.5_\alpha)}(x) = b_\alpha^h(x)\, u_{x_\alpha}^{(\pm 0.5_\alpha)} - \frac{1}{mes\ e(x)}\int_{e(x)} b_\alpha(\xi)\frac{\partial u(\xi)}{\partial \xi_\alpha}d\xi, \quad \alpha = 1, 2;$$

$$Q_h(x) = \Phi_{2h}(x)q(u) - \frac{1}{mes\ e(x)}\int_{e(x)} g_2(\xi)q(u)d\xi;$$

$$D_h(\Phi_h, g, x) = \Phi_{1h}(x) - \frac{1}{mes\ e(x)}\int_{e(x)} g_1(\xi)d\xi.$$

Лемма 4.2. *Пусть* $u(\xi) \in W_2^2(\Omega)$ *. Тогда имеют место оценки*

$$\|u_{x_\alpha}^{(\pm 0.5_\alpha)}\|_{L_2(\omega)} \leq C\left[|h|\,|u(\xi)|_{W_2^2(\Omega)} + |u(\xi)|_{W_2^1(\Omega)}\right], \quad \alpha = 1,2,$$
$$\|u\|_{L_2(\omega)} \leq C\left[|h|^2\,|u(\xi)|_{W_2^2(\Omega)} + |h|\,|u(\xi)|_{W_2^1(\Omega)} + \|u(\xi)\|_{L_2(\Omega)}\right], \tag{4.4}$$

где через $|\cdot|_{W_2^k(\Omega)}$ *обозначены полунормы в пространствах* W_2^k *,* $k = 1,2$ *.*

Пусть $R_\omega^h\, g_k$, $k = 1,2$ - дискретизации на сетке ω управлений g_k , $k = 1,2$ по формулам

$$R_\omega^h\, g_k(x) = \frac{1}{mes\ e(x)} \int_{e(x)} g_k(t) dt_1\, dt_2, \quad k = 1,2. \tag{4.5}$$

Ясно, что если $g_k \in U_k$, где множества U_k имеют вид (2.2), то $R_\omega^h\, g_k \in U_{kh}$, где множества U_{kh} имеют вид (3.3).

Лемма 4.3. *Пусть* $k_\alpha(\xi), b_\alpha(\xi), g_\alpha(\xi) \in L_\infty(\Omega)$ *,* $\alpha = 1,2$ *, решение задачи* (3.2) *принадлежит классу* $W_{2,0}^2(\Omega)$ *. Тогда справедливы оценки*

$$\|\eta(x')\|_{L_2(\omega')} \leq |h|\|k_\alpha(\xi)\|_{L_\infty(\Omega)}\|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \alpha = 1,2,$$
$$\|B_h^{\pm 0.5_\alpha(x)}\|_{L_2(\omega)} \leq C|h|\|b_\alpha(\xi)\|_{L_\infty(\Omega)}\|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \alpha = 1,2, \tag{4.6}$$
$$\|Q_h(x)\|_{L_2(\omega)} \leq C\left[\,|h|\,\|g_2\|_{L_\infty(\Omega)} + \left\|\Phi_{2h} - R_\omega^h\, g_2\right\|_{C(\omega)}\right]\|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)}.$$

Априорную оценку погрешности метода по состоянию устанавливает

Теорема 4.1. *Пусть* $u(\xi) = u(\xi, g)$ *и* $y(x) = y(x, \Phi_h)$ *- решения задач* (2.1) - (2.4) *и* (3.2) *соответственно. Тогда для любых управлений* $g \in U$ *и* $\Phi_h \in U_h$ *справедлива оценка погрешности метода по состоянию*

$$\|y(\Phi_h) - u(g)\|_{W_2^1(\omega)} \leq C\Bigg\{\Bigg[|h|\Bigg(\sum_{\alpha=1}^{2}\|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega)} + \|g_2\|_{L_\infty(\Omega)} +$$
$$+\sum_{\alpha=1}^{2}\|b_\alpha\|_{L_\infty(\Omega)}\Bigg) + \left\|\Phi_{2h} - R_\omega^h\, g_2\right\|_{C(\omega)}\Bigg]\|u(g)\|_{W_2^2(\Omega)} + \|\Phi_{1h} - R_\omega^h\, g_1\|_{L_2(\omega)}\Bigg\}. \tag{4.7}$$

Используя доказанные выше утверждения рассмотрим вопрос о сходимости аппроксимаций по функционалу и аргументу (управлению). В дальнейшем нам понадобятся некоторые оценки. Пусть $v(x)$ сеточная функция, заданная на сетке $\overline{\omega}$. Введем в рассмотрение область $\Omega_0 = \bigcup\limits_{x\in\omega} e(x) \subset \Omega$, образованную объединением площадок $e(x) \subset \Omega$ и построим кусочно-постоянное восполнение $\overline{v}(x)$ функции $v(x)$, $x \in \omega$ на Ω_0 , полагая $\overline{v}(t) = v(x), \quad t \in e(x), \quad x \in \omega$.

Лемма 4.4. *Пусть* $u_0(t) \in L_2(\Omega)$ *,* $u(t) \in W_2^2(\Omega)$ *. Тогда справедливы оценки*

$$\left\|u_0^h\right\|_{L_2(\omega)} \leq \|u_0\|_{L_2(\Omega)}, \qquad \left\|\overline{u_0^h}\right\|_{L_2(\Omega)} \leq \|u_0\|_{L_2(\Omega)},$$
$$\left\|\overline{u}\right\|_{L_2(\Omega_0)} = \left\|u\right\|_{L_2(\omega)} \leq C\|u)\|_{W_2^2(\Omega)}, \qquad \left\|u(t) - \overline{u}(t)\right\|_{L_2(\Omega_0)} \leq C|h|\|u\|_{W_2^2(\Omega)}. \tag{4.8}$$

Если $u_0(t) \in W_2^1(\Omega)$ *, то справедлива оценка*

$$\left\|u_0(t) - \overline{u_0^h}(t)\right\|_{L_2(\Omega_0)} \leq C|h|\|u_0(t)\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Оценку погрешности сеточного функционала устанавливает

Теорема 4.2. *Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ для погрешности сеточного функционала справедлива оценка*

$$|J(g) - J_h(\Phi_h)| \leq C\Big\{|h| + \big\|R^h_\omega\, g_1(x) - \Phi_{1h}(x)\big\|_{L_2(\omega)} + \big\|\Phi_{2h} - R^h_\omega\, g_2\big\|_{C(\omega)}\Big\}, \tag{4.9}$$

где $C = const > 0$, не зависящая от h, y, u, Φ_h, g.

Определим кусочно-постоянные восполнения $P_h\Phi_{\alpha h}(t)$ сеточных управлений $\Phi_{\alpha h}$, $x \in \omega$, $\alpha = 1,2$ на Ω (см. [4], [5]). Для этого рассмотрим расширенную область $\overline{\Omega}_h$ - объединение ячеек $e_0(x) = \big\{\xi = (\xi_1, \xi_2) :\ x_\alpha - 0.5h_\alpha < \xi_\alpha < x_\alpha + 0.5h_\alpha,\ \alpha = 1,2\big\}$, $x \in R^2_h$, имеющих непустое пересечение с $\overline{\Omega}$; очевидно $\overline{\Omega} \subset \overline{\Omega}_h$. Узлы основной решетки R^2_h, принадлежащие области $\Omega_{h*} = \overline{\Omega} \setminus \Omega_h$ будем обозначать через x^*, а множество всех таких узлов через ω^*. Пусть $x^* \in \omega^*$. Доопределим сеточную функцию $\Phi_{\alpha h}(x)$, заданную на ω в узлах $x^* \in \omega^*$, полагая $\Phi_{\alpha h}(x^*) = \Phi_{\alpha h}(x)$, где x, например, ближайший к x^* узел сетки ω. Затем построим кусочно-постоянное продолжение $P_h\Phi_{\alpha h}(t)$ сеточной функции $\Phi_h(x)$ на Ω_h, полагая

$$P_h\Phi_{\alpha h}(t) = \Phi_{\alpha h}(x), \qquad t \in e_0(x), \qquad e_0(x) \in \overline{\Omega}_h. \tag{4.10}$$

Сужение на Ω построенного продолжения будем называть кусочно-постоянным продолжением сеточного управления $\Phi_{\alpha h}$, $x \in \omega$ на Ω, за которым сохраним то же обозначение. Ясно, что если $U_{\alpha h}$ имеют вид (3.3), (3.4), то $P_h\Phi_{\alpha h}(x) \in U_\alpha$, где U_α имеют вид (2.2), (2.3).

Лемма 4.5. *Пусть $P_h\Phi_{\alpha h}(t)$ - кусочно-постоянные восполнения на Ω сеточных управлений $\Phi_{\alpha h}(x) \in U_{\alpha h}$, определяемые по формуле* (4.10), *где $U_{\alpha h}$ имеют вид* (3.3), (3.4). *Тогда справедливы оценки*

$$\big\|P_h\Phi_{\alpha h}(t)\big\|^2_{L_2(\Omega)} \leq \big\|\Phi_{\alpha h}(x)\big\|^2_{L_2(\omega)} + \gamma_h, \quad \alpha = 1,2, \tag{4.11}$$

где $\gamma_h = O(|h|)$ при $|h| \to 0$.

Лемма 4.6. *Пусть $P_{1h}\Phi_{1h}(t)$ - кусочно-постоянное восполнение на Ω сеточного управления $\Phi_{1h}(x) \in U_{1h}$, определяемое по формуле*

$$P_{1h}\Phi_{1h}(t) = \begin{cases} \Phi_{1h}(x), & \text{если } t \in e(x), \quad x \in \omega \subset \Omega, \\ 0, & \text{если } t \in \Omega\backslash\Omega_0, \quad \Omega_0 = \bigcup\limits_{x\in\omega} e(x). \end{cases} \tag{4.12}$$

а $R^h_\omega g_\alpha(x)$, $\alpha = 1,2$ - дискретизации на сетке ω управлений $g_\alpha(t)$ по формуле (4.5). *Тогда справедливы оценки*

$$\big\|P_{1h}\Phi_{1h}(t)\big\|_{L_2(\Omega)} = \big\|\Phi_{1h}(x)\big\|_{L_2(\omega)}, \qquad \big\|R^h_\omega g_\alpha(x)\big\|_{L_2(\omega)} \leq \big\|g_\alpha(t)\big\|_{L_2(\Omega)}, \quad \alpha = 1,2. \tag{4.13}$$

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задачи (2.1) - (2.4) по функционалу и управлению рассмотрим при $|h| \to 0$ последовательность разностных задач минимизации (3.1) – (3.6). Будем допускать, что вычисления функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно и приближенный функционал $J_{h\,\delta_h}(\Phi_h)$ связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$\begin{aligned} &J_{h\,\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \Theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad \big|\Theta_{\delta_h}(\Phi_h)\big| \leq \delta_h, \quad \forall \Phi_h \in U_h; \\ &\delta \to +0 \text{ при } |h| \to 0. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Предположим теперь, что при каждом h и соответствующей сетки $\overline{\omega}=\overline{\omega}_h$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h\delta_h *}+\varepsilon_h$ нижней грани $J_{h\delta_h *}$ функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h при условиях (3.2) – (3.6) и найдено сеточное управление $\hat{\Phi}_h(x)=\Phi_{h\,\delta_h\,\varepsilon_h}$, такое что

$$J_{h\delta_h *}\leq J_{h\delta_h}(\hat{\Phi}_h)\leq J_{h\delta_h *}+\varepsilon_h,\quad \hat{\Phi}_h\in U_h, \tag{4.15}$$

где $\varepsilon_h\geq 0$ и $\varepsilon_h\to 0$ при $|h|\to 0$.

Определим отображения $\widetilde{R}^h_\omega:\ B\to B_h$ и $\widetilde{P}^h:\ B_h\to B$ по правилу: $\widetilde{R}^h_\omega\, g=\Phi_h$, где $g=(g_1,g_2)$, $\Phi_h=\big(R^h_\omega\, g_1, R^h_\omega\, g_1\big)$; $\widetilde{P}^h\Phi_h=g$, где $\Phi_h=(\Phi_{1h},\Phi_{2h})$, $g=(P_{*h}\Phi_{1h}(t),P_{*h}\Phi_{2h}(t))$, причем $P_{*h}=P_{1h}$, если берутся ограничения (2.3) и (3.4) и $P_{*h}=P_h$, если берутся ограничения (2.2) и (3.3). Отображения P_h, P_{1h}, R^h_ω определены формулами (4.10), (4.12), (4.5). Нетрудно видеть, что если $g\in U$, $\Phi_h\in U_h$ - произвольные управления, то $\widetilde{R}^h_\omega g\in U_h$, $\widetilde{P}_h\Phi_h\in U$.

Л е м м а 4.7. *Пусть $g\in U$, $\Phi_h\in U_h$ - произвольные управления. Тогда справедливы оценки*

$$\big|J(g)-J_h(\widetilde{R}^h_\omega g)\big|\leq C|h|,\qquad \big|J(\widetilde{P}_h\Phi_h)-J_h(\Phi_h)\big|\leq C|h|.$$

Т е о р е м а 4.3. *Семейство разностных задач минимизации* (4.14), (3.1) – (3.6) *при $|h|\to 0$ аппроксимирует экстремальную задачу* (2.1) - (2.4) *по функционалу, т.е.* $\lim J_{h\,\delta_h *}=J_*$ *при $|h|\to 0$, причем справедливы оценки скорости сходимости*

$$\big|J_{h\,\delta_h *}-J_*\big|\leq\big|J_{h*}-J_*\big|+\delta_h\leq C|h|+\delta_h;$$

если последовательность сеточных управлений $\big\{\hat{\Phi}_h\big\}\in U_h$ определена из условий (4.15), *то последовательность сеточных управлений $\big\{\widetilde{P}_h\hat{\Phi}_h\big\}$ является минимизирующей для задачи* (2.1) - (2.4) *и справедлива оценка скорости сходимости*

$$0\leq J(\widetilde{P}_h\hat{\Phi}_h)-J_*\leq C\big(|h|+\varepsilon_h+\delta_h\big);$$

последовательность $\big\{\widetilde{P}_h\hat{\Phi}_h\big\}$ слабо в $H=L_2(\Omega)$ сходится к множеству $U_*\neq\emptyset$ оптимальных управлений задачи (2.1) - (2.4).

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в H по аргументу (управлению). Из теоремы 4.3. следует, что для построения минимизирующих последовательностей в исходной экстремальной задаче (2.1) - (2.4) можно использовать конечномерную задачу минимизации (3.1) – (3.6). В силу же теоремы 2.1. экстремальная задача (2.1) - (2.4) корректно поставлена в слабой топологии пространства H. Однако, вообще говоря, она является некорректно поставленной задачей минимизации по А.Н. Тихонову в сильной топологии пространства H. Следовательно, нет основания ожидать, что любая минимизирующая последовательность (в том числе и последовательность из теоремы 4.3.) для $J(g)$ на U будет сходящейся по норме H ко множеству U_*. Для построения сильно сходящейся минимизирующей последовательности проведем регуляризацию конечномерных задач (3.1) – (3.6) по методу регуляризации А.Н. Тихонова (см. [7], [8]).

Введем на U стабилизатор $\Omega(g)=\|g\|^2_H$, $g\in U$ и его сеточный аналог $\Omega_h(\Phi_h)=\|\Phi_h\|^2_{H_h}$, $\Phi_h\in U_h$. При каждом h рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (4.14), (3.1) – (3.6):

$$T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)=J_{h\delta_h}(\Phi_h)+\alpha_h\Omega(\Phi_h),\qquad \Phi_h\in U_h, \tag{4.16}$$

где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \to 0$. При каждом h определим сеточное управление $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf\ T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) \le T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \quad \hat{\Phi}_h \in U_h, \tag{4.17}$$

где $\nu_h \ge 0$ и $\nu_h \to 0$ при $|h| \to 0$. Пусть $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \ \Omega(g_{**}) = \inf \Omega(g_*) : \ g_* \in U_*\}$ – множество Ω-нормальных решений задачи (2.1)- (2.4). Так как функционал $\Omega(g)$ является слабым стабилизатором в H задачи (2.1)- (2.4) и функционалы $J(g)$, $\Omega(g)$ - слабо полунепрерывны снизу на U в слабой топологии пространства H, то $U_{**} \neq$ (см. [7]).

Теорема 4.4. *Пусть последовательность сеточных управлений* $\{\hat{\Phi}_h\}$ *определена из условий* (4.16), (4.17). *Тогда последовательность* $\{\widetilde{P}_h\hat{\Phi}_h\}$ *является минимизирующей для задачи* (2.1) - (2.4) *и справедлива оценка скорости сходимости:*

$$0 \le J(\widetilde{P}_h\hat{\Phi}_h) - J_* \le C\big(|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h\big);$$

если последовательности $\{\alpha_h\}$, $\{\delta_h\}$, $\{\nu_h\}$ *удовлетворяют условиям* α_h, $\delta_h, \nu_h > 0$, $\alpha_h, \delta_h, \nu_h \to 0$ *при* $|h| \to 0$, *причем* $\{\alpha_h\}$ *стремится к нулю согласовано с величинами* $|h|$, δ_h, ν_h *так, что* $\big(|h| + \nu_h + \delta_h\big)/\alpha_h \to 0$ *при* $|h| \to 0$, *то последовательность* $\{\widetilde{P}_h\hat{\Phi}_h\}$ *сильно в* H *сходятся к множеству* U_{**} *и* $\lim \Omega\big(\widetilde{P}_h\hat{\Phi}_h\big) = \Omega_*$ *при* $|h| \to 0$.

Полученные результаты не зависят от конкретного метода решения разностных задач минимизации.

Список литературы

1. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики, М.: Наука,1973.

2. Оганесян Л.А., Руховец Л.А. Вариационно-разностные методы решения эллиптических уравнений. Ереван: Изд-во Арм. ССР, 1979.

3. Самарский А.А., Лазаров Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями, М.: Высшая школа, 1987.

4. Лубышев Ф.В. Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1991. Т. 31. №1. С. 17-30.

5. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных.Уфа: БГУ, 1999.

6. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области // Т. СВМО, 2009, Т.11, №1. С. 133-144.

7. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002.

8. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986.

Approximation and regularization of optimal controlling problem for not self-adjoint elliptic equation in arbitrary convex domain with controls involved in the coefficient of non-linear component and the second member of equation

© **F. V. Lubyshev**[3], **A. R. Manapova**[4]

Abstract. Method of difference approximation and regularization of nonlinear optimal controlling problem for non self-adjoint elliptic equation with Dirichlet boundary conditions in arbitrary convex domain $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ is stated.
Key Words: optimal control, elliptic equation, non self-adjoint operator, difference approximation, regularization, convex domain, functional, minimizing sequence.

References

1. Ladyzhenskaya O.A. Boundary value problems of mathematical physics. Moscow: Nauka,1973.
2. Oganesyan L.A., Ruhovez L.A. Variation and difference methods of elliptic equations solving. Erevan: Isd-vo ASSR, 1979.
3. Samarskii A.A., Lazarov R.D. and Makarov V.L. Difference schemes for differential equations with generalized solutions. Moscow: Vysshaya Shkola, 1987.
4. Lubyshev F.V. Approximation and regularization of optimal controlling problems for not self-adjoint elliptic equation with variable coefficients //Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz., 1991. Vol.31. №1. PP.17-30.
5. Lubyshev F.V. Difference approximations of optimal control problems for systems governed by partial differential equations, Ufa: Bashkir State University, 1999.
6. Lubyshev F.V., Manapova A.R. On difference approximation of optimal control problem for elliptic equation in arbitrary domain // Proceedings of Middle Volga Mathematical Society, 2009. Vol. 11. №. 1. PP. 133-144.
7. Vasiliev F.V. Methods of optimization. Moscow: Factorial Press, 2002.
8. Tihonov A.N., Arsenin V.Y. Ill-posed problems-solving procedures. M.: Наука, 1986.

[3]Professor of Computational Mathematics Chair, Bashkir State University, Ufa; v.lubyshev@mail.ru.
[4]Associate professor of Computational Mathematics Chair, Bashkir State University, Ufa; aygulrm@mail.ru.