УДК 513.83

О структуре 3-многообразия, допускающего A-диффеоморфизм с двумерным поверхностным неблуждающим множеством

© В. З. Гринес[1], Ю. А. Левченко[2], В. С. Медведев[3]

Аннотация. В работе рассматривается класс диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A С. Смейла трехмерного многообразия M^3 в предположении, что неблуждающее множество диффеоморфизмов состоит из объединения связных поверхностных двумерных аттракторов и репеллеров. Устанавливается, что M^3 является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным двумерному тору.

Ключевые слова: A-диффеоморфизм, неблуждающее множество, аттрактор, репеллер, расслоение

1. Введение и формулировка результата

Одним из важных разделов теории динамических систем является исследование взаимосвязи между рассматриваемым классом диффеоморфизмов и топологией многообразия, на котором они заданы. Например, Дж. Франкс [4] и Ш. Ньюхаус [5] показали, что любой аносовский диффеоморфизм коразмерности 1 сопряжен с гиперболическим автоморфизмом тора[4]. Откуда следует, что многообразия допускающее такие диффеоморфизмы, гомеоморфно тору $\mathbb{T}^n$. В.З. Гринес и Е.В. Жужома показали в [3] (результат анонсирован в [6]), что если замкнутое n-многообразие M^n, $n > 2$, допускает структурно устойчивый диффеоморфизм f с ориентируемым растягивающим аттрактором коразмерности 1, тогда многообразие M^n гомотопно эквивалентно тору $\mathbb{T}^n$ и гомеоморфно $\mathbb{T}^n$ для $n \neq 4$.

Напомним, что под A-диффеоморфизмом трехмерного многообразия $f : M^3 \to M^3$ понимается диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A, введенной С. Смейлом [7]:

1. множество неблуждающих точек $\Omega(f)$ является гиперболическим;
2. периодические точки плотны в $\Omega(f)$.

Согласно спектральной теореме С. Смейла [7] неблуждающее множество $\Omega(f)$ A-диффеоморфизма f представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств, называемых базисными множествами, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию.

Базисное множество Λ называется аттрактором, если существует замкнутая окрестность U множества Λ такая, что

$$f(U) \subset intU, \qquad \Lambda = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U).$$

---

[1]Профессор, НГСХА, Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

[2]Аспирант, НГСХА, Нижний Новгород; ULev4enko@gmail.com.

[3]Старший научный сотрудник, НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru.

[4]Пусть линейное отображение $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ задается некоторой целочисленной матрицей с определителем $+1$ или -1 и не имеющей собственных значений, по модулю равных единице. Тогда L задает обратимое отображение F_L тора $\mathbb{T}^n$, которое называется гиперболическим автоморфизмом.

Базисное множество называется репеллером, если оно является аттрактором для диффеоморфизма f^{-1}.

Следуя [1] базисное множество $\Lambda \subset \Omega(f)$ диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ называется поверхностным, если оно принадлежит ориентируемой замкнутой инвариантной поверхности M^2_Λ рода $g \geq 0$ топологически вложенной в многообразие M^3, называемое *носителем* для Λ.

В настоящей работе рассматривается класс A-диффеоморфизмов $f : M^3 \to M^3$, неблуждающее множество которого состоит из объединения связных поверхностных двумерных аттракторов и репеллеров.

Следующая теорема описывает структуру многообразия, допускающего диффеоморфизмы из рассматриваемого класса.

Теорема 1.1. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ A-диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из объединения связных поверхностных двумерных аттракторов и репеллеров. Тогда M^3 является локально тривиальным расслоением над окружностью со слоем гомеоморфным двумерному тору.*

2. Вспомогательные сведения

Пусть $\mathbb{S}_g$ стандартная ориентируемая двумерная поверхность рода $g \geq 0$ (возможно с краем) и W – гладкое трехмерное многообразие (возможно с краем). Напомним, что двумерная поверхность $S_g \subset W$ называется цилиндрически вложенной в W, если существует топологическое вложение (гомеоморфизм на образ) $h : \mathbb{S}_g \times [-1, 1] \to W$ такое, что $h(\mathbb{S}_g \times \{0\}) = S_g$. При этом цилиндрически вложенная поверхность S_g называется собственно вложенной, если $h(\partial \mathbb{S}_g \times [-1, 1]) \subset \partial W$.

Определение 2.1. *Пусть S_g двумерная поверхность рода $g \geq 1$ цилиндрически и собственно вложенная в 3-многообразие W. Говорят, что S_g является несжимаемой в W если выполняются следующие условия: любая простая кривая γ в S_g, которая ограничивает вложенный диск $D \subset W$, чья внутренность имеет пустое пересечение с S_g, является гомотопной нулю кривой на S_g и, следовательно, ограничивает некоторый диск на S_g.*

Предложение 2.1. ([8], следствие 3.2) *Пусть F — несжимаемая ориентируемая поверхность цилиндрически и собственно вложенная в $\mathbb{S}_g \times [0, 1]$, $g \geq 1$, так что $\partial F \subset \mathbb{S}_g \times \{1\}$. Тогда существует поверхность $F_1 \subset \mathbb{S}_g \times \{1\}$, которая гомеоморфна F и такая, что $\partial F = \partial F_1$ и $F \cup F_1$ ограничивают область Δ в $\mathbb{S}_g \times [0, 1]$, замыкание которой гомеоморфно $F \times [0, 1]$.*

Пусть $\mathbb{S}_g$ поверхность без края рода $g \geq 1$. Положим $P_g = \mathbb{S}_g \times [0; 1]$, тогда граница ∂P_g состоит из двух компонент связности $S_g^{(0)}$ and $S_g^{(1)}$, каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{S}_g$. Пусть $F \subset int\ P_g$ цилиндрически вложена в $int\ P_g$. Говорят, что поверхность F разделяет $S_g^{(0)}$ и $S_g^{(1)}$ если $S_g^{(0)}$ и $S_g^{(1)}$ принадлежат различным компонентам связности $P_g \setminus F$.

Следующее предложение доказывается аналогично лемме 3.1 из [2].

Предложение 2.2. *Цилиндрически вложенная замкнутая ориентируемая поверхность $F \subset int\ P_g$ не разделяет $S_g^{(0)}$ и $S_g^{(1)}$ тогда и только тогда, когда F является границей некоторой области $D \subset int\ P_g$.*

Лемма 2.1. *Пусть F замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 1$ не ограничивающая область и цилиндрически вложенная в $intP_g$. Тогда F является несжимаемой поверхностью в $intP_g$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует простая замкнутая кривая $C \subset F$, негомотопная нулю на F и ограничивающая цилиндрически вложенный двумерный замкнутый диск D такой, что $intD \cap (F \cup \partial P_g) = \emptyset$. Выберем замкнутую окрестность $U(D) \subset intP_g$ диска D, принадлежащую открытой окрестности $V(D) \subset intP_g$ таким образом, что что существует гомеоморфизм $h : V(D) \to \mathbb{D} \times (-1, 1)$ такой, что $h(C) = \mathbb{D} \times \{0\}$, $h^{-1}(\partial\mathbb{D} \times (-1, 1) \subset F$ и $h^{-1}(\mathbb{D} \times [-0,5, 0,5]) = U(D)$.

Положим $Q = (F \setminus h^{-1}(\partial\mathbb{D} \times (-1, 1)) \cup h^{-1}(\mathbb{D} \times \{-1\}) \cup h^{-1}(\mathbb{D} \times \{1\})$.

Могут быть два случая:

1) поверхность Q состоит из одной компоненты;

2) поверхность Q состоит из двух компонент Q_1, Q_2.

Покажем, что в обоих случаях по крайней мере одна из полученных поверхностей не ограничивает области в $intP_g$.

Предположим противное. В первом случае обозначим через W_0 область, ограниченную поверхностью Q.

Во втором случае для поверхности Q_i обозначим через W_i область, ограниченную Q_i, $i \in \{1, 2\}$.

Далее, могут быть две возможности.

a) $U(D) \cap W_i = \emptyset$ для любого $i = 0, 1, 2$.

b) существует $i \in \{0, 1, 2\}$, для которого $U(D) \cap W_i \neq \emptyset$

В случае a) поверхность F ограничивает область $W_0 \cup (U(D) \setminus h^{-1}(\partial\mathbb{D} \times [-1, 1]))$ в случае 1) и $W_1 \cup W_2 \cup (U(D) \setminus h^{-1}(\partial\mathbb{D} \times [-1, 1]))$ в случае 2). Получаем противоречие.

Рассмотрим случай b).

Если $U(D) \cap W_0 \neq \emptyset$, то область $W_0 \setminus cl\ U(D)$ ограничена поверхностью F.

Если $U(D) \cap W_1 \neq \emptyset$, то $W^2 \subset W_1$ и следовательно, область $W_1 \setminus cl\ (W_2 \cup U(D))$ ограничена поверхностью F.

Аналогично, если $U(D) \cap W_2 \neq \emptyset$, то область $W_2 \setminus cl\ (W_1 \cup U(D))$ ограничена поверхностью F.

Во всех случаях получаем противоречие с предположением о поверхности F.

Обозначим через F_1 поверхность, не ограничивающую область в $intP_g$. По построению ее род g_1 меньше g и в силу предложения 2.1., она не является сжимаемой. Повторяя каждый раз вышеприведенные рассуждения для вновь полученной поверхности, мы получим на последнем шаге двумерную сферу, не ограничивающую область в $intP_g$, что противоречит неприводимости многообразия P_g.

Доказательство закончено.

Частным случаем предложения 2.1. и леммы 2.1. является следующий факт, установленный также в [2], (теорема 3.3) для гладко вложенных поверхностей.

Следствие 2.1. *Пусть F замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 1$ не ограничивающая область и цилиндрически вложенная в $intP_g$. Тогда замыкание каждой компоненты $P_g \setminus F$ гомеоморфно P_g.*

Следующее предложение является следствием Теоремы 1, доказаной в [1].

Предложение 2.3. *Пусть $f\colon M^3 \to M^3$ — A-диффеоморфизм, неблуждающее множество которого содержит поверхностный двумерный связный аттрактор*

Λ с носителем M^2_Λ. Тогда $M^2_\Lambda = \Lambda$, M^2_Λ является цилиндрически вложенной поверхностью, гомеоморфной двумерному тору, и ограничение f на M^2_Λ сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора.

3. Доказательство теоремы 1.1.

Докажем сначала две вспомогательные леммы.

Лемма 3.1. *Пусть на замкнутом n-мерном многообразии M заданы две области B и A, причем граница A состоит из двух не пересекающихся множеств a_i, $i = 1, 2$, и пусть $a_1 \subset B$, $a_2 \cap (B \cup \partial B) = \varnothing$. Тогда если a_1 ограничивает область $B_1 \subset B$, то $\partial B \subset A$.*

Доказательство. Обозначим область $A_1 = A \cup B_1 \cup a_1$. Так как $A_1 \cap B \neq \varnothing$ и граница a_2 области A_1 не имеет общих точек с замыканием $\overline{B}$, то $B \cup \partial B \subset A_1$. Из равенства $\partial B \cap (B_1 \cup a_1) = 0$ следует, что $\partial B \subset A$. Лемма доказана.
Доказательство закончено.

Лемма 3.2. *Пусть A_1 и A_2, $A_1 \cap A_2 \neq \varnothing$ такие множества, что существует гомеоморфизм $h_1 : A_1 \to B \times [-1, 0]$ и $h_2 : A_2 \to B \times [0, 1]$ и $A_1 \cap A_2 = h_1^{-1}(B \times \{0\}) = h_2^{-1}(B \times \{0\})$, тогда существует гомеоморфизм $H : A_1 \cup A_2 \to B \times [-1, 1]$.*

Доказательство. Пусть $A_1 \cap A_2 = A$. Обозначим гомеоморфизм $\hat{H} : A \to A$, заданный следующим образом. Для любой точки $x \in A$ $\hat{H}(x) = h_2^{-1}(h_1(x))$. Так как A_2 гомеоморфно прямому произведению, то существует гомеоморфизм $g : A_2 \to A_2$ такой, что $g\,|_A = \hat{H}$.

Положим

$$H = \begin{cases} h_1(x), x \in A_1 \\ h_2(g(x)), x \in A_2 \end{cases}$$

Тогда отображение H является гомеоморфизмом множества $A_1 \cup A_2$ на прямое произведение $B \times [-1, 1]$.
Доказательство закончено.

Докажем теорему 1.1..

Обозначим T_A носитель для аттрактора A и T_R носитель репеллера R. Согласно предложению 2.3. для любого аттрактора (репеллера) поверхность T_A (T_R) является цилиндрически вложенной. Поэтому существует замкнутая окрестность $U(T_A)$ ($U(T_R)$) и гомеоморфизм $h_A(h_R)$, такие что: $h_A : U(T_A) \to \mathbb{T} \times [-1, 1]$ ($h_R : U(T_R) \to \mathbb{T} \times [-1, 1]$), причем $h_A(T_A) = \mathbb{T} \times \{0\}$ ($h_R(T_R) = \mathbb{T} \times \{0\}$).

Поверхность T_A (T_R) делит окрестность $U(T_A)$ ($U(T_R)$) на две компоненты связности $U^1_A = h_A^{-1}(\mathbb{T} \times [-1, 0])$ и $U^2_A = h_A^{-1}(\mathbb{T} \times [0, 1])$, (аналогично U^1_R и U^2_R).

Граница $\partial U(T_A)$ ($\partial U(T_R)$) состоит из двух компонент связности $T^1_A = h_A^{-1}(\mathbb{T} \times \{-1\})$ и $T^2_A = h_A^{-1}(\mathbb{T} \times \{1\})$, ($T^1_R = h_R^{-1}(\mathbb{T} \times \{-1\})$ и $T^2_R = h_R^{-1}(\mathbb{T} \times \{1\})$).

Пусть A произвольный аттрактор, который принадлежит поверхности T_A. Так как неблуждающее множество диффеоморфизма f состоит только из двумерных поверхностных базисных множеств, существует натуральное число n и репеллеры R_1, R_2 такие что $f^{-n}(T^1_A)$ принадлежит окрестности репеллера T_{R_1} и $f^{-n}(T^2_A)$ принадлежит окрестности репеллера T_{R_2} . Заметим, что если $R_1 = R_2 = R$, то $f^{-n}(T^1_A)$, $f^{-n}(T^2_A)$ принадлежат разным компонентам $U^1_{T_R}$, $U^2_{T_R}$ соответственно. Не уменьшая общности можем считать, что $f^{-n}(T^1_A)$ принадлежит компоненте $U^1_{R_1}$, а $f^{-n}(T^2_A)$ принадлежит компоненте $U^2_{R_2}$.

Покажем, что $f^{-n}(T_A^1)$ разделяет T_{R_1} и $T_{R_1}^1$ в $U_{R_1}^1$. Предположим противное. Тогда в силу предложения 2.2., $f^{-n}(T_A^1)$ является границей некоторой области $D_A^1 \subset int\ U_{R_1}^1$. Тогда по лемме 3.1. имеем $U(T_{R_1}) \subset f^{-n}(U_A^1)$ и следовательно, $T_{R_1} \subset f^{-n}(U_A^1)$. Тогда $f^n(T_{R_1}) \subset U_A^1$. Так как поверхность T_{R_1} является инвариантной, мы получили противоречие.

Таким образом, $U(T_{R_1}) \setminus f^{-n}(T_A^1)$ состоит из двух компонент связности таких, что замыкание каждой компоненты гомеоморфно $U(T_{R_1})$. Отсюда по следствию 2.1. следует, что поверхности T_{R_1} и $f^{-n}(T_A^1)$ ограничивают в M^3 область гомеоморфную $\mathbb{T} \times (0,1)$. Рассуждая аналогично, получаем, что $f^{-n}(T_A^2)$ разделяет поверхности T_{R_2} и $T_{R_2}^2$ в $U_{R_2}^2$ и поверхности T_{R_2} и $f^{-n}(T_A^2)$ ограничивают в M^3 область гомеоморфную $\mathbb{T} \times (0,1)$.

Обозначим через B^1 (B^2) область, ограниченную поверхностями T_A и T_{R^1} (T_A и T_{R^2}). Тогда согласно лемме 3.2. область B^1 (B^2) гомеоморфна прямому произведению $\mathbb{T} \times [0,1]$.

Рассуждая аналогично для всех аттракторов получаем, что M^3 может быть получено, как объединение конечного числа компактных многообразий с краем гомеоморфных $\mathbb{T} \times [0,1]$ и пересекающихся по конечному множеству поверхностей, гомеоморфных двумерному тору. То есть многообразие M^3 допускает слоение на двумерные слои, которые гомеоморфны двумерным торам. Обозначим M_1 фактор-пространство, точками которого являются торы. Тогда по построению существует непрерывное отображение $p : M^3 \to M^1$, где M^1 одномерное многообразие, такое, что для каждой точки $m \in M^1$ существует окрестность $U(m)$ такая что $p^{-1}(U(m))$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{T}\times(-1,1)$. Так как непрерывный образ компакта есть компакт, то многообразие M^1 гомеоморфно окружности. Таким образом, теорема 1.1. полностью доказана.

Авторы благодарят грант РФФИ РАН № 08-01-00547а за частичную финансовую поддержку.

Список литературы

1. Гринес В.З, Медведев В.С., Жужома Е.В. О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях. – Мат. заметки. 2005. Т. 78, № 6. – С. 813–826.

2. Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С. Новые соотношения для систем Морса-Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами.– Матем. сб. 2003. Т. 194, № 7. – С. 25–56.

3. Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors. – Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357, n. 2. – P. 617–667.

4. Franks J. Anosov diffeomorphisms. – Global Analysis. Proc. of Symposia in Pure Math. AMS, Providence. 1970. 14. – P. 61–94.

5. Newhouse S. On codimension one Anosov diffeomorphisms. – Amer. J. Math. 1970. V. 92, n. 3. – P. 761–770.

6. Гринес В.З., Жужома Е.В. О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один. – Доклады РАН. 2000. Т. 374, № 6. – С. 735–737.

7. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, n. 1. – P. 741–817.

8. F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. – Annals of Math. 1968. V. 87. – P. 56–88.

On structure of 3-manifold which allow A-diffeomorphism with two-dimensional surface nonwandering set

© V. Z. Grines[5], U. A. Levchenko[6], V. S. Medvedev[7]

Abstract. We consider a class of diffeomorphism satisfying to S.Smale Axiom A given on 3-manifold M^3 on suggestion that nonwandering set of diffeomorphisms consists of connected two-dimensional surface attractor and repellors. We establish that M^3 is a locally-trivial foliation under the circle with leaves homeomorphic to the torus.

Key Words: A-diffeomorphism, attractor, repeller, nonwandering set

References

1. Grines V., Zhuzhoma E., Medvedev V. On surface attractors and repellers on 3-manifolds. – Matem. zam. 2005. V. 78, n. 6. – P. 813–826.

2. Grines V., Zhuzhoma E., Medvedev V. New relations for Morse-Smale systems with trivial embedding one-dimensional separatrix. – Matem. sbб. 2003. V. 194, n. 7. – P. 25–56.

3. Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors. – Trans. Amer. Math. Soc. 2005. V. 357, n. 2. – P. 617–667.

4. Franks J. Anosov diffeomorphisms. – Global Analysis. Proc. of Symposia in Pure Math. AMS, Providence. 1970. 14. – P. 61–94.

5. Newhouse S. On codimension one Anosov diffeomorphisms. – Amer. J. Math. 1970. V. 92, n. 3. – P. 761–770.

6. Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with expanding attractors and contructing repellers codimension one. – Doklady RAN. 2000. V. 374, n. 6. – C. 735–737.

7. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. V. 73, n. 1. – P. 741–817.

8. F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large. – Annals of Math. 1968. V. 87. – P. 56–88.

9. Williams R.F. One-dimensional non-wandering sets. – Topology. 1967. V. 6. – P. 473–487.

[5]Professor, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru.
[6]Post-graduate student, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; ULev4enko@gmail.com.
[7]Senior staff scientist, Institute of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.