УДК 517.927

Построение функции Грина для модельных граничных задач со смещением

© Т. Е. Бадокина[1], О. В. Макеева[2], Д. Э. Рахматуллова[3]

Аннотация. Для простейших задач Штурма-Лиувилля с одним и двумя смещениями стандартными методами [1] выполнено построение функции Грина. Тем самым доказана фредгольмовость этих задач.

Ключевые слова: задачи Штурма-Лиувилля, смещение в граничных условиях, функция Грина.

1. Введение

В известных работах А.В. Бицадзе, А.А. Самарского [2] и В.А. Ильина, Е.И. Моисеева [3], [4] исследованы математические модели, которые возникают при изучении ряда прикладных проблем, приводящих к рассмотрению нелокальных граничных задач для дифференциальных уравнений. Рассмотренные ниже модельные задачи с одним и двумя смещениями послужили [5], [6] примером иллюстрации метода ложных возмущений для уточнения приближенно заданных спектральных характеристик обыкновенных дифференциальных операторов. При этом существенно использовалась, но не доказывалась фредгольмовость задач. Применением результатов монографии [1] это выполнено в настоящей работе.

Полученные результаты поддержаны программой развития научного потенциала высшей школы, проект 2.1.1/6194 Министерства образования и науки РФ.

2. Одномерная задача Бицадзе-Самарского

В банаховом пространстве $C^2[(0,x_0)\cup(x_0,1)]\cap C^1[0,1]$ рассматривается задача Штурма-Лиувилля

$$u''+\lambda u=0,\quad u(0)=0,\, u(x_0)=u(1). \tag{2.1}$$

Функцией Грина задачи (2.1) называется функция $G(x,\xi)$, удовлетворяющая условиям:

1. $G(x,\xi)$ непрерывна для всех значений x и ξ из интервала [0,1].

2. При любом фиксированном $\xi\in[0,1]$ $G(x,\xi)$ имеет по x непрерывные производные 1-го и 2-го порядка при $x\in[0,\xi)\cup(\xi,1]$ и $G'_x(\xi+0,\xi)-G'_x(\xi-0,\xi)=1$, и, как функция от x, удовлетворяет уравнению и граничным условиям (2.1).

Указанные условия используются ниже при построении функции Грина.

[1]Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; bad_zip@mail.ru

[2]Доцент кафедры математического анализа, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, г. Ульяновск; omakeeva@hotbox.ru

[3]Студент физико-математического факультета, Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова, г. Ульяновск.

Пусть $\nu^2 = \lambda$ и $y_1 = \cos(\nu x)$, $y_2 = \sin(\nu x)$ линейно независимые решения уравнения (2.1). Тогда для $\xi \in [0, x_0)$

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), & 0 \le x < \xi, \\ d_1 y_1(x) + d_2 y_2(x), & \xi < x < x_0, \\ c_3 y_1(x) + c_4 y_2(x), & x_0 < x \le 1 \end{cases}$$

и система для определения коэффициентов $c_1(\xi)$, $c_2(\xi)$, $d_1(\xi)$, $d_2(\xi)$, $c_3(\xi)$, $c_4(\xi)$ принимает вид

$$\begin{cases} c_1 = 0, \\ d_1 \cdot \cos(\nu x_0) + d_2 \cdot \sin(\nu x_0) - c_3 \cdot \cos(\nu x_0) - c_4 \cdot \sin(\nu x_0) = 0, \\ -d_1 \cdot \nu \sin(\nu x_0) + d_2 \cdot \nu \cos(\nu x_0) + c_3 \cdot \nu \sin(\nu x_0) - c_4 \cdot \nu \cos(\nu x_0) = 0, \\ c_3 \cdot (\cos(\nu x_0) - \cos \nu) + c_4 \cdot (\sin(\nu x_0) - \sin \nu) = 0, \\ c_1 \cdot \cos(\nu \xi) + c_2 \cdot \sin(\nu \xi) - c_3 \cdot \cos(\nu \xi) + c_4 \cdot \sin(\nu \xi) = 0, \\ c_1 \cdot \nu \sin(\nu \xi) - c_2 \cdot \nu \cos(\nu \xi) - d_1 \cdot \nu \sin(\nu \xi) + d_2 \cdot \nu \cos(\nu \xi) = 1. \end{cases}$$

Откуда вместе с коэффициентами $c_1 = 0$, $d_1 = c_3 = -\dfrac{\sin(\nu\xi)}{\nu}$, $c_2 = -\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\cos(\nu\frac{x_0 - 2\xi + 1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_0+1}{2})}$, $d_2 = c_4 = -\dfrac{1}{\nu}\dfrac{\sin(\nu\xi)\sin(\nu\frac{x_0+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_0+1}{2})}$ определяется функция Грина.

Если $\xi \in (x_0, 1]$, то

$$G(x,\xi) = \begin{cases} c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), & 0 \le x < x_0, \\ c_3 y_1(x) + c_4 y_2(x), & x_0 < x < \xi, \\ d_3 y_1(x) + d_4 y_2(x), & \xi < x \le 1 \end{cases}$$

и $c_1 = c_3 = 0$, $d_3 = -\dfrac{\sin(\nu\xi)}{\nu}$, $c_2 = c_4 = -\dfrac{1}{2\nu}\dfrac{\sin(\nu(\xi - 1))}{\sin(\nu\frac{x_0-1}{2})\cos(\nu\frac{x_0+1}{2})}$, $d_4 = -\dfrac{1}{2\nu}\dfrac{\sin(\nu\xi)\cos\nu - \sin(\nu x_0)\cos\nu\xi}{\sin(\nu\frac{x_0-1}{2})\cos(\nu\frac{x_0+1}{2})}$.

3. Модельные задачи с двумя смещениями

В работах [3], [4] для уравнения Штурма-Лиувилля 2-го порядка рассмотрены спектральные задачи с условиями смещения первого рода $u(0) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j u(x_{1j})$, $u(1) = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j u(x_{2j})$ или второго рода $u'(0) = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j u'(x_{1j})$, $u'(1) = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_j u'(x_{2j})$. Числа α_j, β_j либо неположительные, либо неотрицательные и $-\infty < \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \le 1$. Множества точек $\{x_{1j}\}$, $\{x_{2j}\}$, где $0 < x_{11} < x_{12} < \ldots < x_{1n} < 1$ и $0 < x_{21} < x_{22} < \ldots < x_{2n} < 1$ могут находиться между собой в любых соотношениях.

В пространстве $C^2[(0, x_1) \cup (x_1, x_2) \cup (x_2, 1)] \cap C^1[0,1]$, $0 < x_1 < x_2 < 1$ здесь рассматриваются частные случаи этих задач: $\mathbf{A_{11}}\, u(0) = u(x_1), u(x_2) = u(1)$; $\mathbf{A_{12}}\, u(0) = u(x_1), u'(x_2) = u'(1)$; $\mathbf{A_{21}}\, u'(0) = u'(x_1), u(x_2) = u(1)$; $\mathbf{A_{22}}\, u'(0) = u'(x_1), u'(x_2) = u'(1)$.

Используя приведенное выше определение функции Грина и предложенную в [1] схему ее построения в виде

$$G(x,\xi)=\begin{cases} c_1y_1(x)+c_2y_2(x), & 0\le x<\xi,\\ d_1y_1(x)+d_2y_2(x), & \xi<x<x_1,\\ c_3y_1(x)+c_4y_2(x), & x_1<x<x_2,\\ c_5y_1(x)+c_6y_2(x), & x_2<x\le 1\end{cases}$$

получаем следующие результаты.

Задача $\mathbf{A_{11}}$.

Для $\xi\in[0,x_1)$

$$c_1=\frac{1}{2\nu}\frac{\sin(\nu\xi)\cos(\nu\frac{x_2-2x_1+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})},\qquad d_1=c_3=c_5=\frac{1}{2\nu}\frac{\sin(\nu\xi)\cos(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})},$$

$$c_2=\frac{-1}{2\nu}\frac{\cos(\nu\xi)\cos(\nu\frac{x_2-2x_1+1}{2})-\cos(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})},\quad d_2=c_4=c_6=\frac{1}{2\nu}\frac{\sin(\nu\xi)\sin(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})}.$$

Для $\xi\in(x_1,x_2)$

$$c_1=c_3=\frac{1}{\nu}\frac{\cos(\nu\frac{x_1}{2})\cos(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})},\qquad d_3=c_5=\frac{1}{\nu}\frac{\cos(\nu\frac{x_2+1}{2})\cos(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})},$$

$$c_2=c_4=\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_1}{2})\cos(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})},\qquad d_4=c_6=\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_2+1}{2})\cos(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}.$$

Для $\xi\in(x_2,1]$

$$c_1=c_3=c_5=\frac{1}{2\nu}\frac{\sin(\nu(\xi-1))\cos(\nu\frac{x_1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-1}{2})},\quad d_5=\frac{-1}{2\nu}\frac{\sin\nu\cos(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})-\sin(\nu\xi)\cos(\nu\frac{2x_2-x_1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-1}{2})},$$

$$c_2=c_4=c_6=\frac{1}{2\nu}\frac{\sin(\nu(\xi-1))\sin(\nu\frac{x_1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-1}{2})},\quad d_6=\frac{1}{2\nu}\frac{\cos\nu\cos(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})-\cos(\nu\xi)\cos(\nu\frac{2x_2-x_1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-1}{2})}.$$

Задача $\mathbf{A_{12}}$.

Для $\xi\in[0,x_1)$

$$c_1=-\frac{1}{2\nu}\frac{\sin(\nu\xi)\sin(\nu\frac{x_2-2x_1+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})},\qquad d_1=c_3=c_5=-\frac{1}{2\nu}\frac{\sin(\nu\xi)\sin(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})},$$

$$c_2=\frac{1}{2\nu}\frac{\cos(\nu\xi)\sin(\nu\frac{x_2-2x_1+1}{2})-\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})},\quad d_2=c_4=c_6=\frac{1}{2\nu}\frac{\sin(\nu\xi)\cos(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})}.$$

Для $\xi\in(x_1,x_2)$

$$c_1=c_3=-\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})\cos(\nu\frac{x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})},\qquad d_3=c_5=-\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_2+1}{2})\cos(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})},$$

$$c_2=c_4=-\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})},\qquad d_4=c_6=\frac{1}{\nu}\frac{\cos(\nu\frac{x_2+1}{2})\cos(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}.$$

Для $\xi\in(x_2,1]$

$$c_1=c_3=c_5=-\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})\cos(\nu\frac{x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})},\qquad d_5=-\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_2+1}{2})\cos(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})},$$

$$c_2=c_4=c_6=-\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})},\qquad d_6=\frac{1}{\nu}\frac{\cos(\nu\frac{x_2+1}{2})\cos(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})}.$$

Задача $\mathbf{A_{21}}$.

Для $\xi \in [0, x_1)$

$$c_1 = \frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_1}{2})\cos(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}, \qquad d_1 = c_3 = c_5 = -\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})\cos(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})},$$

$$c_2 = -\frac{1}{\nu}\frac{\cos(\nu\frac{x_1}{2})\cos(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}, \qquad d_2 = c_4 = c_6 = -\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})\sin(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}.$$

Для $\xi \in (x_1, x_2)$

$$c_1 = c_3 = \frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_1}{2})\cos(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}, \qquad d_3 = c_5 = -\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})\cos(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})},$$

$$c_2 = c_4 = -\frac{1}{\nu}\frac{\cos(\nu\frac{x_1}{2})\cos(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}, \qquad d_4 = c_6 = -\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})\sin(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}.$$

Для $\xi \in (x_2, 1]$

$$c_1 = c_3 = c_5 = \frac{1}{2\nu}\frac{\sin(\nu(\xi-1))\sin(\nu\frac{x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-1}{2})}, \quad d_5 = \frac{1}{2\nu}\frac{\sin\nu\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2}) - \sin(\nu\xi)\sin(\nu\frac{2x_2-x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-1}{2})},$$

$$c_2 = c_4 = c_6 = \frac{-1}{2\nu}\frac{\sin(\nu(\xi-1))\cos(\nu\frac{x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-1}{2})}, \quad d_6 = \frac{-1}{2\nu}\frac{\cos\nu\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2}) - \cos(\nu\xi)\sin(\nu\frac{2x_2-x_1}{2})}{\cos(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-1}{2})}.$$

Задача $\mathbf{A_{22}}$.

Для $\xi \in [0, x_1)$

$$c_1 = \frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}, \qquad d_1 = c_3 = c_5 = -\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})\sin(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})},$$

$$c_2 = -\frac{1}{\nu}\frac{\cos(\nu\frac{x_1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}, \qquad d_2 = c_4 = c_6 = \frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})\cos(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}.$$

Для $\xi \in (x_1, x_2)$

$$c_1 = c_3 = \frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}, \qquad d_3 = c_5 = -\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})\sin(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})},$$

$$c_2 = c_4 = -\frac{1}{\nu}\frac{\cos(\nu\frac{x_1}{2})\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}, \qquad d_4 = c_6 = \frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})\cos(\nu\frac{x_2+1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x_1+1}{2})}.$$

Для $\xi \in (x_2, 1]$

$$c_1 = c_3 = c_5 = \frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})\sin(\nu\frac{x_1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})}, \qquad d_5 = -\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_2+1}{2})\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})},$$

$$c_2 = c_4 = c_6 = -\frac{1}{\nu}\frac{\sin(\nu\frac{x_2-2\xi+1}{2})\cos(\nu\frac{x_1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})}, \qquad d_6 = \frac{1}{\nu}\frac{\cos(\nu\frac{x_2+1}{2})\sin(\nu\frac{2\xi-x_1}{2})}{\sin(\nu\frac{x_2-x1+1}{2})}.$$

Для более сложных задача Штурма-Лиувилля с одним или несколькими смещениями функция Грина остается прежней.

Список литературы

1. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

2. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. – 1969. – Т. 185, № 4. – С. 739-740.

3. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальные краевые задачи первого рода для оператора Штурма-Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 7. – С. 1198-1207.

4. Ильин В. А., Моисеев Е. И. Нелокальные краевые задачи второго рода для оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. – 1987. – Т. 23, № 8. – С. 1422-1431.

5. Логинов Б. В., Макеева О. В. Метод ложных возмущений в обобщенных задачах на собственные значения // Доклады РАН. – 2008. – Т. 419, № 2. – С. 160-163.

6. Loginov B. V., Makeeva O. V. Pseudoperturbation methods in generalized eigenvalue problems // ROMAI J. – 2008. – V. 4, № 1. – P. 149-168.

Дата поступления 26.05.2010

Green functions construction for model boundary value problems with displacements

© T. E. Badokina[4], O. V. Makeeva[5], D. E. Rakhmatullova[6]

Abstract. For the simplest Sturm-Liouville problem with one or two displacements by standard methods [1] Green functions are constructed. By this the Fredholm property for these problems is proved.

Key Words: Sturm-Liouville problem; displacements in boundary conditions; Green functions.

References

1. Naymark M. A. Linear differential operators. – M.: Nauka, 1969. – 528 p.

2. Bitsadze A. V., Samarskii A. A. On some simplest generalizations of linear elliptic boundary value problems // SSSR Doklady. – Mathematics. – 1969. – B. 185, № 4. – P. 739-740.

3. Il'in V. A., Moiseev E. I. Nonlocal boundary value problem of the first kind for Sturm-Liouville operator in differential and difference treatments // Differentsial'nye Uravnenia. – 1987. – B. 23, № 7. – P. 1198-1207.

4. Il'in V. A., Moiseev E. I. Nonlocal boundary value problem of the second kind for Sturm-Liouville operator // Differentsial'nye Uravnenia. – 1987. T. 23, № 8. – P. 1422-1431.

5. Loginov B. V., Makeeva O. V. The Pseudoperturbation method in generalized eigenvalue problems // Doklady Mathematics. – 2008. – V. 7, № 2. – P. 194-197.

6. Loginov B. V., Makeeva O. V. Pseudoperturbation methods in generalized eigenvalue problems // ROMAI J. – 2008. – V. 4, № 1. – P. 149-168.

[4]PhD Student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; bad_zip@mail.ru

[5]Associate professor of Mathematics Analyze Chair, Ulyanovsk State Pedagogical University after I. N. Ulyanova, Ulyanovsk; omakeeva@hotbox.ru

[6]Student Phys.-Math. Faculty, Ulyanovsk State Pedagogical University after I. N. Ulyanova, Ulyanovsk.