В Средневолжском математическом обществе

УДК 517.9

Нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка плотности дислокаций

© С. Н. Алексеенко [1], С. Н. Нагорных [2]

Аннотация. В рамках теории упругости выведено новое уравнение, описывающее динамику плотности дислокаций. Изложена принципиальная схема применения к этому уравнению метода дополнительного аргумента

Ключевые слова: плотность дислокаций, нелинейное уравнение первого порядка, метод дополнительного аргумента

В работе [1] изложена теория упругого кручения стержней на основе уравнения Пуассона для функции кручения на плоскости. Эта теория послужила основой исследований по механике разрушений в фундаментальной работе [2]. В ней для моделирования процессов разрушения используется линейное псевдодифференциальное уравнение, второй порядок которого соответствует задаче для кручения стержней. Однако, в неупругом случае суперпозиция сдвиговых и нормальных напряжений нарушается и уравнение второго порядка становится нелинейным.

Целями настоящей работы являются: изучение процессов скольжения и переползания дислокаций при квазилинейном циклическом кручении; вывод нелинейного дифференциального уравнения в частных производных первого порядка динамики плотности дислокаций; исследование условий разрешимости полученного уравнения; вычисление моментов и жесткости стержней.

Согласно [1] полная дисторсия среды W_{ik} со скользящими и переползающими дислокациями, точечными дефектами, порам, трещинами и т.д. может быть представлена как сумма упругой дисторсии ω_{ik} и пластической дисторсии $\widetilde{\omega_{ik}}$:

$$W_{ik} = \omega_{ik} + \widetilde{\omega_{ik}}. \tag{0.1}$$

Поток дислокаций j_{ik} определяется так:

$$-j_{ik} = \frac{\partial \widetilde{\omega_{ik}}}{\partial t}. \tag{0.2}$$

Пластическая деформация $\widetilde{u_{ik}}$ имеет вид:

$$\frac{\delta \widetilde{u_{ik}}}{\delta t} = -\frac{1}{2}(j_{ik} + j_{ki}). \tag{0.3}$$

Кинетика скольжения плотности дислокаций ν_{lm} задаётся выражением:

$$j_{ik} = e_{ilm} \nu_{lk} V_m, \tag{0.4}$$

[1]Профессор кафедры математического анализа, Нижегородский педуниверситет,г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2]Доцент кафедры теоретической физики, Нижегородский педуниверситет,г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

где V_m - скорость скольжения дислокаций.

Отсюда вытекает

$$\widetilde{\omega_{ik}} = -e_{ilm}\nu_{lk}L_m. \tag{0.5}$$

где L_m - длина пути скольжения дислокации, т.е. $V_m = \frac{dL_m}{dt}$.

Умножим (0.1) на σ_{ik} - напряжение в среде, тогда при кручении цилиндра упругую энергию на единицу длины и площади стержня представим в виде:

$$\sigma_{ik}\omega_{ik} = 2\mu\tau^2(\bigtriangledown\nu_{lk})^2, \tag{0.6}$$

где μ -модуль сдвига, $\tau = \frac{d\varphi}{dz}$, φ -угол поворота стержня длиной dz , $l \neq k$.

В результате получим для произвольной среды с полной деформацией ε_{ik} :

$$\varepsilon_{ik} = e_{ilm}\nu_{lk}L_m + \frac{2\mu\tau^2}{\sigma_{ik}}(\bigtriangledown\nu_{lk})^2. \tag{0.7}$$

Обозначим плотность переползающих дислокаций $\nu_{lk} = \nu_H$ при $l \neq k$ во втором члене в правой части формулы (0.7), а в первом члене плотность скользящих дислокаций обозначим $\nu_{lk} = \nu_\delta, l = k, l \neq k.$

Воспользуемся моделью кинетики из [3]:

$$\dot{\nu}_H = \beta\nu_H\nu_\delta - a(\nu_H)\nu_H, \tag{0.8}$$

где β - удельная доля превращения скользящих дислокаций в переползающие, $a(\nu_H)$ - сток в среде (например, на поры).

В итоге приходим к нелинейному дифференциальному уравнению первого порядка:

$$\dot{v} + \alpha v(\nabla v)^2 + f(v) = 0, \tag{0.9}$$

где $v := \nu_H(t, x_1, x_2), \alpha := \frac{2\mu\tau^2\beta}{\sigma L}, f(v) := \left(a(v) - \frac{\varepsilon\beta}{L}\right)v$, с начальным условием

$$v(0, x_1, x_2) = \psi_3(x_1, x_2), x_1^2 + x_2^2 \leq R^2. \tag{0.10}$$

В стационарном случае из (0.9) следует

$$\alpha(\nabla v)^2 = \frac{\varepsilon\beta}{L} - a(v). \tag{0.11}$$

Известно, что энергия кручения единицы длины стержня есть интеграл по площади от (0.6) равный $\tilde{c}\tau^2/2$, где $\tilde{c}$ - жесткость. Тем самым

$$\tilde{c} = 4\mu\int(\nabla v)^2 dS. \tag{0.12}$$

В приближении модели [3]при $cv \ll 1$

$$a(v) = a_\mu(1 - cv), \tag{0.13}$$

где a_μ, c - постоянные числа.

Тогда $\tilde{c}$ - для квазиупругой среды будет равна:

$$\tilde{c} = \frac{\pi R^4}{2}\mu\left[1 - \frac{a_\mu L}{\tau R\beta}\left(1 - \frac{c\,b}{\pi R^2}\right)\right], \tag{0.14}$$

где b - вектор Бюргерса, являющийся функцией от t, x_1, x_2 ; R - радиус стержня.

Квазилинейный момент M для стержня длинной l имеет вид $M = \tilde{c}\tau\, l$.

В сравнении с [1] M ослаблен за счет стока на поры, но усилен истоком из пор переползающих дислокаций v, с вектором Бюргерса b, динамику которых и распределение в сечении дают решения дифференциального уравнения (0.9). При моменте кручения превышающем критический момент наступает разрушение.

Таким образом, уравнение (0.9) имеет, во-первых, фундаментальный характер, как уравнение динамики плотности дислокаций v, учитывающее различные механизмы стоков и истоков (т.е. видов нелинейностей)в механике разрушения твёрдых тел; а во вторых, прикладное значение, так как с его помощью становится возможным нахождение M в различных конструктивных элементах с различными упрочняющими механизмами.

Существуют различные методы исследования и нахождения численных решений для уравнений в частных производных первого порядка. Отличительной особенностью метода дополнительного аргумента [4, 5, 6] является то, что он даёт возможность анализировать условия существования решений и строить численные решения в исходных координатах.

Опишем принципиальную схему исследования задачи (0.9) - (0.10) с помощью этого метода. Вначале преобразуем уравнение (0.9) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (0.9) по x_1 и x_2 и введя новые неизвестные функции $p_1(t,x_1,x_2) = \frac{\partial v(t,x_1,x_2)}{\partial x_1}, p_2(t,x_1,x_2) = \frac{\partial v(t,x_1,x_2)}{\partial x_2}$, придём к системе уравнений

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} + 2\alpha\, v\left(p_1\frac{\partial p_i}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial p_i}{\partial x_2}\right) = F_i(t,p_1,p_2,v), \quad (i=1,2), \tag{0.15}$$

где $F_i(t,p_1,p_2,v) = -\alpha\, p_i(p_1^2+p_2^2) - (a(v)-\gamma)p_i - a'(v)v\, p_i$.

Из (0.9) "сконструируем"ещё одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + 2\alpha\, v\left(p_1\frac{\partial v}{\partial x_1} + p_2\frac{\partial v}{\partial x_2}\right) = F_3(t,p_1,p_2,v), \quad (i=1,2), \tag{0.16}$$

где $F_3(t,p_1,p_2,v) = -(a(v)-\gamma)v + \alpha\, v(p_1^2+p_2^2)$. Из (0.10) естественным образом следуют начальные условия для p_1 и p_2:

$$p_i(0,x_1,x_2) = \psi_i(x_1,x_2), \quad (i=1,2), \tag{0.17}$$

где $\psi_i(x_1,x_2) = \frac{\partial\psi_3(x_1,x_2)}{\partial x_i}$.

Ввиду того, что множество значений независимых переменных x_1 и x_2, на котором заданы начальные данные, ограничено: $x_1^2+x_2^2 \le R^2$, то, среди прочих, стоит и задача определения области существования решения, а,главное, выяснения соответствия между решениями задачи и физической моделью. В рамках данной работы примем упрощающее предположение, что функция $\psi_3(x_1,x_2)$, а значит и функции $\psi_i(x_1,x_2), i=1,2,$ определены не только при $x_1^2+x_2^2 \le R^2$, но и в некоторой окрестности круга $x_1^2+x_2^2 \le R^2$, достаточной для корректности нижеследующих выкладок.

Составим для задачи (0.15),(0.16), (0.17),(0.10) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом:

$$\frac{d\eta_1(s,t,x_1,x_2)}{ds} = 2\alpha\, w_3(s,t,x_1,x_2)w_1(s,t,x_1,x_2), \qquad \eta_1(t,t,x_1,x_2) = x_1,$$

$$\frac{d\eta_2(s,t,x_1,x_2)}{ds} = 2\alpha\, w_3(s,t,x_1,x_2)w_2(s,t,x_1,x_2), \qquad \eta_2(t,t,x_1,x_2) = x_2,$$

$$\frac{dw_i(s,t,x_1,x_2)}{ds} = F_i(s,w_1,w_2,w_3), \quad (i=1,2,3), \tag{0.18}$$

$$w_i(0,t,x_1,x_2)=\psi_i(\eta_1(0,t,x_1,x_2),\eta_2(0,t,x_1,x_2)),\quad (i=1,2,3). \tag{0.19}$$

Так как в правую часть (0.18) функции $\eta_i,\quad i=1,2,$ явным образом не входят, то мы приходим к системе трех интегральных уравнений от трех неизвестных функций:

$$w_i(s,t,x_1,x_2)=\psi_i(x_1-2\alpha\int_0^t w_3(\tau,t,x_1,x_2)w_1(\tau,t,x_1,x_2)d\tau,$$
$$x_2-2\alpha\int_0^t w_3(\tau,t,x_1,x_2)w_2(\tau,t,x_1,x_2)d\tau)+$$
$$+\int_0^s F_i(\tau,w_1(\tau,t,x_1,x_2),w_2(\tau,t,x_1,x_2),w_3(\tau,t,x_1,x_2))d\tau, \tag{0.20}$$
$$(i=1,2,3).$$

Существует и может быть определена из исходных данных такая величина T_0, что при $0<t\leq T_0$ система интегральных уравнений (0.20) имеет непрерывно дифференцируемое решение. Функции $p_i(t,x_1,x_2)=w_i(t,t,x_1,x_2),\quad i=1,2,\quad v(t,x_1,x_2)=w_3(t,t,x_1,x_2)$ дадут решение задачи (0.15),(0.16),(0.17),(0.10), а функция $v(t,x_1,x_2)$ будет решением задачи (0.9),(0.10).

В зависимости от конкретных свойств функций и величин, входящих в физическую модель, можно указать условия, когда задача (0.9), (0.10) будет иметь решение на заданном отрезке времени $[0,T]$, или когда решение может обратиться в бесконечность. Вместе с тем, система интегральных уравнений (0.20) может быть использована для нахождения численного решения задачи (0.9),(0.10) в исходных координатах.

Список литературы

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.Наука.1987,с.245.

2. Гольдштейн Р.В., Ентов В.М. Качественные методы в механике сплошных сред. М.Наука.1989,с.224.

3. Крупкин П.Л., Куров И.Е., Нагорных С.Н., Цыванюк К.И. Феноменологическая модель эволюции дислокационных структур при циклическом кручении. ФММ, 1988, т.66, в.5, с.978-984.

4. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема. Доклады Академии наук, 1992, т.323, №3. -5с.

5. Иманалиев М.И., Алексеенко С.Н. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Доклады РАН, 2001, т.379, №1. - 5 с.

6. Алексеенко С.Н., Нагорных С.Н. Математическое моделирование волн в в слабодиссипативных структурах стимулированной диффузии. Материалы IV Всероссийской начно-методич.конф.14-16 мая 2009 г."Проблемы современного математич. образования в вузах и школах России". -Киров: Изд-во ВятГГУ, 2009. -С.55.

Дата поступления 02.05.2010

The first-order nonlinear partial differential equation of the dislocation density

© S. N. Alekseenko[3], S. N. Nagornyh[4]

Abstract. Within the framework of the theory of elasticity, the new equation governing a dynamics of the dislocation density is obtained. A basic scheme to apply the method of additional argument for solving this equation is presented.
Key Words: dislocation density, nonlinear first-order equation, local reducibility, method of additional argument.

References

1. Landau L.D., Lifshitz E.M. Theory of elasticity. – M.: Nauka, 1987. – 245 p.

2. Goldshtein R.V., Entov V.M. Qualitative methods in the mechanics of continua.-M.: Nauka, 1989. 224 p.

3. Krupkin P.L., Kurov I.E., Nagornyh S.N., Tcyvanuk K.I. Phenomenological model of evolution of dislocation structures at a cyclical torsion. // FMM. – 1988. – Vol. 66, issue 5. – P. 978-984.

4. Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. On the theory of nonlinear integro-partial differential equations of Whitham type. // Russian Acad. Sci. Dokl. Math. Vol.323 (1992), № 3.

5. Imanaliev M.I., Alekseenko S.N. To a problem of an existence of a smooth bounded solution for a system of two nonlinear differential partial equations of the first order. //Russian Acad. Sci. Dokl. Math. Vol.378 (2001), № 1.

6. Alekseenko S.N., Nagornyh S.N. Mathematical modeling of waves in weakly-dissipative structures of the stimulated diffusion. // Materials of the IV All-Russia scientific-methodical conference, on May, 14 - 16, 2009 - "Problems of the modern mathematical education in universities and schools of Russia "- Kirov: VyatGGU, 2009, P. 55.

[3]The professor of the mathematical analysis chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[4]The senior lecture of the theoretical physics chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru