УДК 517.938

Динамика диффеоморфизмов класса SV, сосредоточенная в базовых полноториях

© Е. В. Жужома[1], Н. В. Исаенкова[2], Л. А. Куприна[3]

Аннотация. Обобщается конструкция С. Смейла диффеоморфизма полнотория с аттрактором, являющимся одномерным соленоидом.

Ключевые слова: соленоид, диффеоморфизм Смейла-Виеториса, базисные множества.

Первые примеры соленоидов были построены Виеторисом [12] в 1927 году и независимо Ван Данцигом [7] в 1930 году. В теории динамических систем соленоид был использован в книге [4] (гл.4, п.8) для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, состоящим из почти периодических траекторий. Специальные потоки с соленоидальными инвариантными множествами рассматривались в [8]. В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл [11], который построил диффеоморфизм полнотория в себя с одномерным растягивающимся аттрактором, являющимся соленоидом (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [1], [2], [5], [10]). В данной статье обобщается конструкция Смейла, и изучаются типы возможных базисных множеств.

Рассмотрим полноторий $S^1 \times D^2$, где $S^1 = [0;1]/(0 \sim 1)$ – единичная окружность, наделенная естественной параметризацией $[0;1] \to S^1$, $D^2 \subset \mathbb{R}^2$ – единичный круг $x^2 + y^2 \leq 1$ в евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$ с декартовыми координатами (x, y). Сюрьективное C^1 отображение $g : S^1 \to S^1$ называется *эндоморфизмом*. Эндоморфизм g называется *неособым*, если его производная $Dg \neq 0$ [9]. Мы для определенности будем рассматривать сохраняющие ориентацию неособые эндоморфизмы с положительной Dg. Будем говорить, что диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$, удовлетворяющий аксиоме A Смейла, замкнутого 3-многообразия M^3 принадлежит классу SV[4], если существует вложенный в M^3 полноторий $\mathcal{B}^3$ (далее мы отождествляем полноторий $S^1 \times D^2$ с его вложением $\mathcal{B}^3 \subset M^3$, *базовым* полноторием) такой, что ограничение $f|_{\mathcal{B}^3} \stackrel{\text{def}}{=} F$ является диффеоморфизмом $F : \mathcal{B}^3 \to F(\mathcal{B}^3) \subset \mathcal{B}^3$ на свой образ, который удовлетворяет следующим условиям:

- F имеет вид
$$F(t, z) = (g(t), w(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^2, \tag{1.1}$$
где $g : S^1 \to S^1$ – неособый C^1 эндоморфизм степени $d \geq 2$;

- при фиксированном $t \in S^1$ преобразование $w|_{\{t\}\times D^2} : \{t\} \times D^2 \to \mathcal{B}^3$ является равномерно сжимающим C^1 вложением
$$\{t\} \times D^2 \to int\left(\{g(t)\} \times D^2\right) \tag{1.2}$$
т.е. существуют константы $0 < \lambda < 1$, $C > 0$ такие, что
$$diam\ (F^n(\{t\} \times D^2)) \leq C\lambda^n diam\ (\{t\} \times D^2),\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.3}$$

---

[1]Профессор, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[2]Аспирант, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; nisaenkova@mail.ru.

[3]Доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

[4]Аббревиатура SV составлена из первых букв фамилий Smale, Vietoris

Отметим, что так как неособый эндоморфизм g имеет степень $d \geq 2$, то для любой точки $t \in S^1$ полный прообраз $g^{-1}(t)$ состоит из d различных точек. Пусть t_1, t_2, $\dots$, $t_d \in S^1$ попарно различны и $g(t_1) = \ldots = g(t_d)$. Тогда

$$F(t_i, D^2) \cap F(t_j, D^2) = \emptyset, \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq d, \tag{1.4}$$

т.е. диски $F(t_1, D^2)$, $\dots$, $F(t_d, D^2)$ попарно не пересекаются.

В классическом примере Смейла [11] эндоморфизм g представляет собой линейный растягивающий эндоморфизм $E_d : S^1 \to S^1$ вида $E_d(x) = dx \mod 1$ степени $d \geq 2$. В этом случае неблуждающее множество диффеоморфизма $f|_{\mathcal{B}^3} = F$ совпадает с соленоидом $\cap_{n\geq 0} F^n(\mathcal{B}^3)$. Ключевую роль в доказательстве этого факта играет то, что неблуждающее множество растягивающего эндоморфизма E_d совпадает с окружностью S^1. В общем случае неблуждающее множество диффеоморфизма F принадлежит соленоиду, но не обязательно совпадает с ним.

В [6] рассматривалась аналогичная конструкция построения диффеоморфизма $(2n+2)$-мерной сферы S^{2n+2}, отталкиваясь от эндоморфизма n-многообразия K^n. Типы базисных множеств при этом не изучались.

Лемма 1.1. *Пересечение* $Sol\ (F) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{n\geq 0} F^n(\mathcal{B})$ *является соленоидом.*

Доказательство. Из условия (1.3) для отображения F вытекает, что $F^i(\mathcal{B}) \supset F^{i+1}(\mathcal{B})$ для любого $i \geq 0$. Поэтому $F^i(\mathcal{B})$ образуют последовательно вложенные друг в друга полнотории $\mathcal{B} \supset F(\mathcal{B}) \supset \ldots \supset F^i(\mathcal{B}) \supset F^{i+1}(\mathcal{B}) \supset \ldots$. Из (1.1) следует, что ось полнотория $F^{i+1}(\mathcal{B})$ обходит $d \geq 2$ раз ось полнотория $F^i(\mathcal{B})$, не образуя крюков. В силу (1.3), пересечение каждого диска $\{t\} \times D^2$ с $\bigcap_{n\geq 0} F^n(\mathcal{B})$ является нигде не плотным множеством. Из неравенства $d \geq 2$ вытекает, что это пересечение является совершенным и, следовательно, канторовым множеством в $\{t\} \times D^2$. Отсюда следует, что $\bigcap_{n\geq 0} F^n(\mathcal{B})$ – соленоид. $\square$

Поскольку соленоид является притягивающим множеством, то неблуждающее множество в базисном полнотории принадлежит соленоиду, и самая интересная динамика сосредоточена в $Sol\ (f)$. Следующая теорема описывает возможные базисные множества в $Sol\ (f) \subset \mathcal{B}^3$.

Теорема 1.1. *Пусть* $f : M^3 \to M^3$ *– диффеоморфизм из класса* SV *замкнутого 3-многообразия* M^3. *Тогда*

1. *Ограничение* $f|_{Sol\ (f)}$ *сопряжено обратному пределу отображения* g.

2. *Неблуждающее множество, принадлежащее базовому полноторию, содержит ровно одно нетривиальное базисное множество* $\Lambda(f)$, *которое есть либо*

   - *одномерный растягивающийся аттрактор, и тогда* $\Lambda(f) = Sol\ (f)$, *либо*
   - *нульмерное базисное множество, и тогда пересечение* $NW(f) \cap \mathcal{B}^3 \subset Sol\ (f)$ *состоит из* $\Lambda(f)$, *конечного (ненулевого) числа стоковых периодических точек и конечного (возможно, нулевого) числа седловых изолированных периодических точек.*

   Обе возможности реализуются.

В данной статье приводится доказательство первого пункта теоремы 1.1., который является ключевым (доказательство второго пункта основано на первом). Докажем следующую лемму, необходимую для построения символической модели ограничения отображения F на соленоид $Sol\ (F)$.

Лемма 1.2. *Каждой точке $p \in Sol\ (F)$ соответствует единственная последовательность точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in S^1$, и соответствующая последовательность замкнутых двумерных дисков $D_i = F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})$ такие, что*

- $p \in \dots \subset D_i \subset \dots \subset D_0$, $p = \cap_{i \geq 0} D_i$;
- $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$.

Доказательство. Лемма тривиальна для $i = 0$ и $i = 1$. Для удобства читателя приведем геометрическую иллюстрацию для соленоида размерности $n = 3$, см. рис. 1.1.

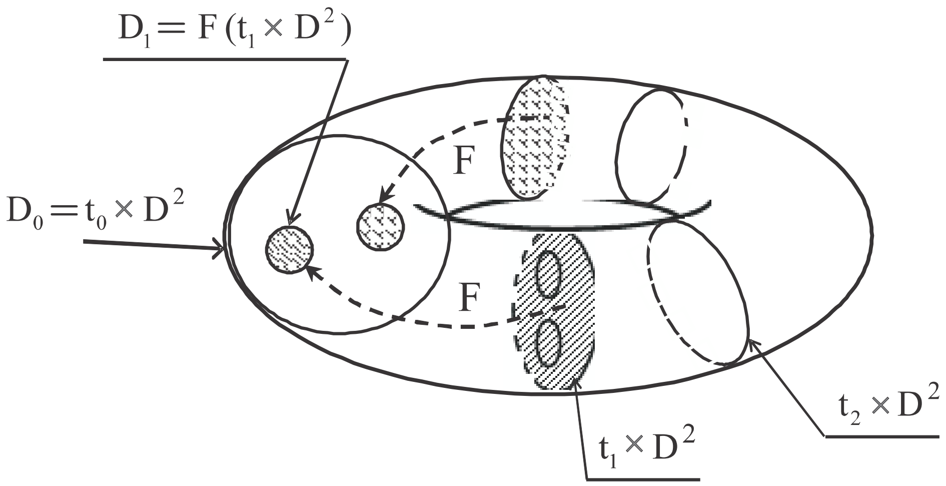

Рисунок **1.1**

Для фиксированной точки p существует единственная точка $t_0 \in S^1$ такая, что $p \in \{t_0\} \times D^{n-1}$. Положим $D_0 = \{t_0\} \times D^{n-1}$. Из (1.1) следует, что существуют попарно различные s_1 , ..., $s_d \in S^1$ такие, что $g(s_1) = g(s_2) = \ldots = g(s_d) = t_0$, а диски $F(\{s_i\} \times D^{n-1})$ принадлежат диску D_0 , $F(\{s_i\} \times D^{n-1}) \subset D_0$. Согласно (1.4), диски $F(\{s_i\} \times D^{n-1})$, $i = 1$, ..., d , попарно не пересекаются. Поэтому существует единственное s_j такое, что $p \in F(\{s_j\} \times D^{n-1})$. Положим $t_1 = s_j$, $D_1 = \{t_1\} \times D^{n-1}$. Таким образом, $p \in D_1 \subset D_0$.

Пусть по предположению индукции, существует единственная последовательность точек $\{t_l\}_0^{k-1}$, $t_l \in S^1$, и $k-1$ замкнутых двумерных дисков $D_l = F^l(\{t_l\} \times D^{n-1})$ таких, что $p \in D_{k-1} \subset \dots \subset D_l \subset \dots \subset D_0$, где $D_l = \{t_l\} \times D^{n-1}$. Таким образом, $p \in \bigcap_{l \geq 0}^{k-1} D_l$. Из (1.1) следует, что существуют

$$S_1, S_2 \ldots, S_d \in S^1 \ \text{ такие, что } \ g(S_1) = g(S_2) = \ldots = g(S_d) = t_{k-1},$$

а диски $F^k(\{S_i\} \times D^{n-1})$ принадлежат диску D_{k-1} , $F^k(\{S_i\} \times D^{n-1}) \subset D_{k-1}$. Из (1.4) следует, что существует единственное S_j такое, что $p \in F^k(\{S_j\} \times D^{n-1})$. Положим $t_k = S_j$, $D_k = \{t_k\} \times D^{n-1}$. Тогда $p \in D_k \subset D_{k-1} \subset \dots \subset D_0$. Из построения вытекает, что $t_i = g(t_{i+1})$ для всех $i \geq 0$. Из (1.3) следует, что $diam\ D_i = diam\ (F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})) \to 0$ при $i \to \infty$. Поэтому пересечение $\cap_{i \geq 0} D_i$ есть одноточечное множество, совпадающее с p .

Покажем, что для любой точки $p \in Sol\ (F)$ последовательность точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in S^1$ определяется единственным образом от противного. Допустим, для точки p существуют две различные последовательности точек $\{t_i\}_0^\infty$, $t_i \in S^1$ и $\{t_i^{'}\}_0^\infty$, $t_i^{'} \in S^1$, т.е. найдется i , для которого $t_i \neq t_i^{'}$. Это означает существование двух дисков $D_i = F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})$ и $D_i^{'} = F^i(\{t_i^{'}\} \times D^{n-1})$, такие что $p \in D_i$ и $p \in D_i^{'}$, но это противоречит условию (1.4), так как диски попарно не пересекаются $F(t_i, D^{n-1}) \cap F(t_i^{'}, D^{n-1}) = \emptyset$. □

Обозначим через $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ прямое произведение счетного семейства окружностей $S_i^1 = S^1$, наделенное тихоновской топологией (напомним, что в этой топологии база образована множествами $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} V_i$, где V_i открыты в S_i^1, и только для конечного множества индексов i множества V_i отличны от S_i^1, см. [3], стр. 155), где $\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N}\cup\{0\}$ - множество целых неотрицательных чисел. Точками множества $\prod_{i\in\mathbb{N}} S_i^1$ являются последовательности $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i \in S_i^1$.

Обозначим через $\prod_g$ подмножество множества $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} S_i^1$, состоящее из последовательностей $\{t_i\}_0^\infty$, где $t_i = g(t_{i+1})$ при всех $i \geq 0$. Топология на $\prod_g$ индуцируется топологией на $\prod_{i\in\mathbb{Z}_0^+} S_i^1$. Определим на $\prod_g$ отображение $\hat{g} : \prod_g \to \prod_g$, положив

$$\hat{g}\left(\{t_0, \dots, t_i, \dots\}\right) = \{g(t_0), t_0, \dots, t_i \dots\}.$$

Следуя [13] (см. также [10]), пространство $\prod_g$ с отображением $\hat{g}$ будем называть *обратным пределом преобразования* g.

Лемма 1.3. *$\hat{g}$ – взаимнооднозначное отображение.*

Доказательство. Докажем инъективность отображения $\hat{g}$. Для этого возьмем две различные последовательности $\{t_i\}_0^\infty, \{t_i'\}_0^\infty \in \prod_g$, т.е. существуют такие i, j, что $t_i \neq t_j$. Отсюда и способа задания отображения $\hat{g}$ следует, что образы этих последовательностей $\hat{g}\left(\{t_i\}_0^\infty\right) \neq \hat{g}\left(\{t_i'\}_0^\infty\right)$.

Пусть $\{t_i\}_0^\infty = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$, где $t_i = g(t_{i+1})$ при всех $i \geq 0$. Существует последовательность $\{t_1, \dots, t_i, \dots\} \in \prod_g$ которая при действии отображения $\hat{g}$, с учетом равенства $t_0 = g(t_1)$, переходит в исходную $\hat{g}\left(\{t_1, \dots, t_i, \dots\}\right) = \{g(t_1), t_1, \dots, t_i, \dots\} = \{t_0, t_1 \dots, t_i, \dots\}$, что и доказывает сюръективность этого отображения. □

Лемма 1.4. *Отображение $\hat{g}$ непрерывно.*

Доказательство. Пусть $\{r_0, \dots, r_i, \dots\} \in \prod_g$, и пусть U_ε – окрестность точки

$$\hat{g}\left(\{r_0, \dots, r_i, \dots\}\right) = \{g(r_0), r_0, \dots, r_i \dots\}.$$

Согласно определению тихоновской топологии, не уменьшая общности, можно считать, что существуют некоторые $k \in \mathbb{Z}^+$ и сколь угодно малое $\varepsilon > 0$ такие, что для любой точки $r' = \{r_0', \dots, r_i' \dots\} \in U_\varepsilon$ выполняются неравенства:

$$|g(r_0) - g(r_0')| < \varepsilon, \quad |r_i - r_i'| < \varepsilon \quad \text{для любого} \quad i = 1, \dots, k-1.$$

Так как g непрерывно, то существует $\delta > 0$ такое, что $|r_0 - r_0'| < \delta$ влечет $|g(r_0) - g(r_0')| < \varepsilon$. Ясно что, можно считать $\delta \leq \varepsilon$. Зададим окрестность U_δ точки $\{r_0, \dots, r_i, \dots\}$, положив $r' = \{r_0', \dots, r_i' \dots\} \in U_\delta$, если $|r_i - r_i'| < \delta$ для любого $i = 1, \dots, k-1$. Тогда $\hat{g}\left(U_\delta\right) \subset U_\varepsilon$. □

Определим отображение $\theta : Sol\ (F) \to \prod_g$ следующим образом. Согласно лемме 1.2., любой точке $p \in Sol\ (F)$ соответствует единственная последовательность точек $\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ такая, что $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$. Положим $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$.

Множество $\{t\} \times D^{n-1} \overset{\text{def}}{=} D_t^{n-1}$ назовем *t-сечением*, где $t \in S^1$. Каждое сечение естественным образом отождествляется с D^{n-1} посредством проекции $p_2 : S^1 \times D^{n-1} \to D^{n-1}$. Согласно (1.2), диффеоморфизм F переводит t-сечение в $g(t)$-сечение. Поэтому естественным образом определяется диаметр множества $F^n(D_t^{n-1})$: $diam\ F^n(D_t^{n-1}) = diam\ p_2(F^n(D_t^{n-1}))$.

Для точек α, $\beta \in S^1$ положим $D_{\alpha\beta}^{n-1} = I_{\alpha\beta} \times D^{n-1}$, где $I_{\alpha\beta} \subset S^1$ – открытый интервал минимальной длины с концевыми точками α, β. Другими словами, $D_{\alpha\beta}^{n-1}$ есть $\frac{|\beta-\alpha|}{2}$-окрестность $\frac{\beta+\alpha}{2}$-сечения в $\mathcal{B}^n$.

Лемма 1.5. *Отображение θ является гомеоморфизмом таким, что $\theta \circ F|_{Sol\ (F)} = \widehat{g} \circ \theta$.*

Доказательство. Докажем сперва инъективность отображения θ. Возьмем различные $p_1, p_2 \in Sol\ (F)$. Согласно лемме 1.2., каждой точке p_i, $i = 1, 2$, соответствует последовательность замкнутых дисков $D^i_j = F^j(\{t^i_j\} \times D^{n-1})$ таких, что $p_i = \cap_{j \geq 0} D^i_j$. Поскольку $p_1 \neq p_2$ и диаметры дисков стремятся к нулю, то существует k такое, что

$$D^1_1 = D^2_1, \ldots, D^1_{k-1} = D^2_{k-1}, D^1_k \neq D^2_k.$$

Поэтому $t^1_k \neq t^2_k$ и, следовательно, $\theta(p_1) \neq \theta(p_2)$.

Докажем сюръективность отображения θ. Возьмем $\{t_0, t_1, \ldots\} \in \prod_g$. Из $t_i = g(t_{i+1})$ и условия (1.3) вытекает что

$$\{t_0\} \times D^{n-1} \supset F(\{t_1\} \times D^{n-1}) \supset \ldots \supset F^i(\{t_i\} \times D^{n-1}) \supset \ldots.$$

Более того, так как $diam\ (F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})) \to 0$ при $i \to \infty$, то пересечение $\bigcap_{i \geq 0} F^i(\{t_i\} \times D^{n-1})$ состоит ровно из одной точки, скажем p. Из определения множества $Sol\ (F)$ следует, что $p \in Sol\ (F)$. Таким образом, $\theta(p) = (t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots)$.

Докажем непрерывность отображения θ. Пусть U – окрестность точки $\theta(p) = \{t_i\}^\infty_0$, где $p \in Sol\ (F)$. Согласно определению топологии на множестве $\prod_g$, можно считать, что U задается числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ такими, что $U = \{\{x_i\}^\infty_0 \in \prod_g : |x_i - t_i| < \varepsilon$, для $i = 0, \ \ldots, \ r\}$. В силу леммы 1.2.,

$$p \in F^r(D^{n-1}_{t_r}) \subset F^{r-1}(D^{n-1}_{t_{r-1}}) \subset \cdots \subset F(D^{n-1}_{t_1}) \subset D^{n-1}_{t_0}.$$

Поскольку, согласно Поскольку, согласно инвариантности множества $Sol\ (F)$ относительно F, имеют место равенства $F(Sol\ (F)) = F^{-1}(Sol\ (F)) = Sol\ (F)$, то ограничение $F|_{Sol\ (F)}$ есть диффеоморфизм $Sol\ (F) \to Sol\ (F)$. Поэтому существуют однозначно определенные точки $p_i \in D^{n-1}_{t_i} \cap Sol\ (F)$, $1 \leq i \leq r$, такие, что $p = F^i(p_i)$.

Из (1.2) вытекает, что p является внутренней точкой множества $F^r(D^{n-1}_{t_r})$ в топологии t_0-сечения $D^{n-1}_{t_0}$. Пусть V_0 – окрестность точки p в этой топологии, принадлежащая $F^r(D^{n-1}_{t_r})$. Отметим, что для любой точки $q \in V_0$ имеет место включение $\theta(q) \in U$, так как $q \in F^r(D^{n-1}_{t_r}) \subset \cdots \subset F(D^{n-1}_{t_1}) \subset D^{n-1}_{t_0}$. Наша задача – сделать из V_0 "объемную" окрестность точки p в D^{n-1}_1.

Так как $\theta(p) = \{t_0, t_1, \ldots, t_i, \ldots\} \in \prod_g$, где $t_0 = g(t_1)$, $t_1 = g(t_2)$, $t_2 = g(t_3)$, $\ldots$ $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$, то $t_0 = g(t_1) = g^2(t_2) = \ldots = g^i(t_i)$, $t_1 = g(t_2) = g^2(t_3) = \ldots = g^{i-1}(t_i)$, $t_2 = g(t_3) = g^2(t_4) = \ldots = g^{i-2}(t_i), \ldots, t_i = g^{i-j}(t_i)$ для всех $1 \leq j \leq i$ и некоторого i. Поэтому $\theta(p) = \{t_0, t_1, \ldots, t_{i-1}, t_i, \ldots\} = \{g^i(t_i), g^{i-1}(t_i), \ldots, g(t_i), t_i, \ldots\}$.

Поскольку для точки $\theta(p)$ в ее окрестности U, заданной числами $r \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, выполняется равенство $t_{r-j} = g^j(t_r)$ для всех $1 \leq j \leq r$, а отображение g непрерывное, то существует такое $0 < \delta \leq \varepsilon$, что $|x_r - t_r| < \delta$ влечет $|x_i - t_i| < \varepsilon$ для всех $i = 0, \ \ldots, \ r$, см. рис. 1.2.

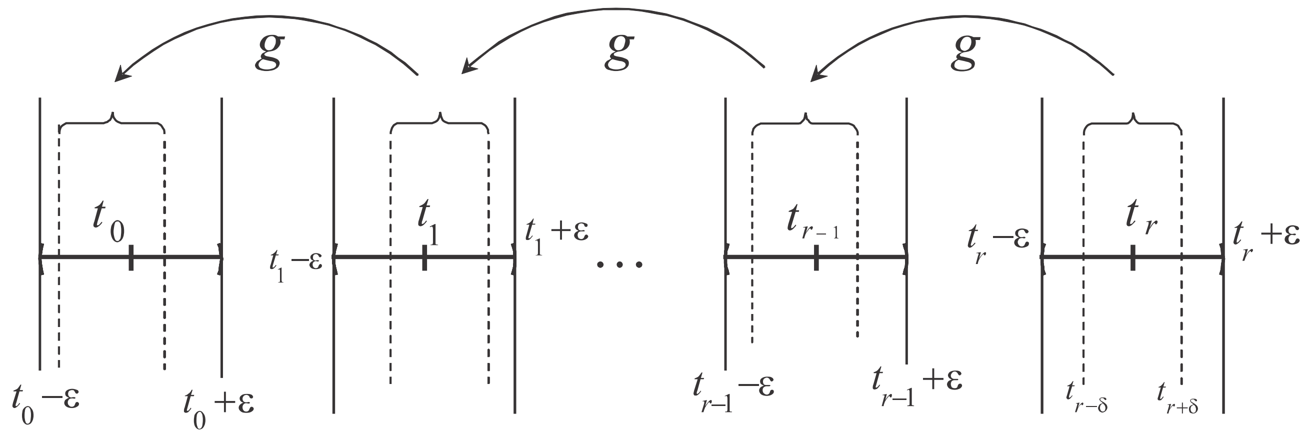

Рисунок **1.2**

Следовательно, $F^j(D^{n-1}_{t_j-\delta,t_j+\delta}) \subset D^{n-1}_{t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon}$ для всех $j = 0, \dots, r$. Множество $F^r(D^{n-1}_{t_r-\delta,t_r+\delta})$ имеет вид $D^{n-1}_{t_0-\nu_1,t_0+\nu_2}$ для некоторых $\nu_1, \nu_2 > 0$. Тогда множество $(S^1 \times V_0) \cap D^{n-1}_{t_0-\nu_1,t_0+\nu_2} \stackrel{\text{def}}{=} V$ является искомой "объемной" окрестностью точки p в $\mathcal{B}^n$. Из определения отображений F и θ вытекает, что $\theta(q) \in U$ для любой точки $q \in V$. Следовательно, θ – непрерывное отображение. Аналогичным образом доказывается непрерывность отображения θ^{-1}. Таким образом, θ – гомеоморфизм.

Докажем равенство $\theta \circ F|_{Sol\ (F)} = \widehat{g} \circ \theta$, которое можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Sol\ (F) & \xrightarrow{F} & Sol\ (F) \\ \downarrow \theta & & \downarrow \theta \\ \prod_g & \xrightarrow{\widehat{g}} & \prod_g \end{array}$$

Согласно лемме 1.2., любой точке $p \in Sol\ (F)$ соответствует единственная последовательность $\theta(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$, где $t_i = g(t_{i+1})$, $i \geq 0$. Образ точки $\theta(p)$ относительно отображения $\hat{g} : \prod_g \to \prod_g$ есть по определению

$$\hat{g}\left(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}\right) = \{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i \dots\}.$$

Из условия (1.2) вытекает, что $F(p) \in F(\{t_0\} \times D^{n-1}) \subset \{g(t_0)\} \times D^{n-1}$. В силу леммы 1.2., образом точки $F(p)$ относительно отображения θ является последовательность $\{g(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i \dots\}$. Следовательно, $\hat{g}\,[\theta(p)] = \theta\,[F(p)]$. Лемма доказана. □

Из этой леммы следует, что ограничение $f|_{Sol\ (f)}$ сопряжено обратному пределу отображения g.

Авторы благодарят РФФИ грант 08-01-00547 за финансовую поддержку.

Список литературы

1. Аносов Д.В. Исходные понятия. – В сб. серии "Современные проблемы математики Фундаментальные направления (Итоги науки и техники). том 1. 1985. Динамические системы - 1 (под ред. Д. В. Аносова). – С. 156–178.

2. Аносов Д.В., Солодов В.В. Гиперболические множества. – В сб. серии "Современные проблемы математики Фундаментальные направления (Итоги науки и техники). том 66. 1991. Динамические системы - 9 (под ред. Д. В. Аносова). – С. 12–99.

3. Куратовский Л. Топология. том 1. – М. Мир. 1966.

4. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. – М. ОГИЗ. 1947.

5. Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E. Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. – Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc. 1996. – 153 P.

6. Block L. Diffeomorphisms obtained from diffeomorphisms. – Trans. Amer. Math. Soc. 1975. 214. – P. 403–413.

7. van Danzig D. Über topologisch homogene Kontinua. – Fund. Math. 1930. 14. – P. 102–105.

8. Ittai Kan. Strange attractors of uniform flows. – Trans. of Amer. Math. Soc. 1986. 293. – P. 135–159.

9. Nitecki Z. Nonsingular endomorphisms of the circle. – Proc. Symp. Pure Math. 1970. 14. – P. 203–220.

10. Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. – Studies in Adv. Math. Sec. edition. CRC Press. 1999.

11. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. – P. 747–817. Имеется русский перевод: УМН. 1970. 25. – С. 113–185.

12. Vietoris L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Addildungen. – Math. Ann. 1927. 97. – P. 454–472.

13. Williams R. Expanding attractors. – Publ. Math. I.H.E.S. 1974. 43. – P. 169–203.

Дата поступления 01.06.2010

The dynamics of SV-diffeomorphisms on basic solid torus

© E. V. Zhuzhoma[5], N. V. Isaenkova[6], L. A. Kuprina[7]

Abstract. S. Smale constraction of diffeomorphism of the solid torus with one-dimensional solenoidal attractor is generalized.

Key Words: solenoid, Smale-Vietoris diffeomorphism, basic sets.

References

1. Anosov D.V. Basic Concepts. Elementary Theory. – In Dynamical Systems 1 (VINITI, Moscow, 1). Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fundam. Napravl. 1985. P. 156–204. Engl. transl. in Dynamical Systems I (Springer, Berlin, 1988). Encycl. Math. Sci. 1.

2. Anosov D.V., Solodov Hyperbolic sets. – In Dynamical Systems1 (VINITI, Moscow, 66). Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fundam. Napravl. 1999. – P. 12–99.

3. Kuratowski K. Topology. Volume 1. – Academic Press. New York–London. 1966.

4. Nemytskii V., Stepanov V.: Qualitative Theory of Differential Equations. – Princeton University Press. Princeton. N.J. 1960.

5. Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E. Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. – Translations of Math. Monographs, Amer. Math. Soc. 1996. – 153 P.

6. Block L. Diffeomorphisms obtained from diffeomorphisms. – Trans. Amer. Math. Soc. 1975. 214. – P. 403–413.

7. van Danzig D. Über topologisch homogene Kontinua. – Fund. Math. 1930. 14. – P. 102–105.

8. Ittai Kan. Strange attractors of uniform flows. – Trans. of Amer. Math. Soc. 1986. 293. – P. 135–159.

9. Nitecki Z. Nonsingular endomorphisms of the circle. – Proc. Symp. Pure Math. 1970. 14. – P. 203–220.

10. Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. – Studies in Adv. Math. Sec. edition. CRC Press. 1999.

11. Smale S. Differentiable dynamical systems. – Bull. Amer. Math. Soc. 1967. 73. – P. 747–817. Имеется русский перевод: УМН. 1970. 25. – С. 113–185.

12. Vietoris L. Über den höheren Zusammenhang kompakter Räume und Klasse von zusammenhangstreuen Addildungen. – Math. Ann. 1927. 97. – P. 454–472.

13. Williams R. Expanding attractors. – Publ. Math. I.H.E.S. 1974. 43. – P. 169–203.

[5]Professor, Nizhny Novgorod State Pedagogical Univercity, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[6]Post-graduate student, Nizhny Novgorod State Pedagogical Univercity, Nizhny Novgorod; nisaenkova@mail.ru.

[7]Assistant professor, Nizhny Novgorod State Agricultural Academy, Nizhny Novgorod; math@agri.sci-nnov.ru.