УДК 517.9

Об одном способе продолжения функций в пространствах С. Л. Соболева-Л. Н. Слободецкого

© **Г. А. Смолкин**[1]

Аннотация. В работе исследована проблема продолжения функции за пределы рассматриваемой области в неизотропных пространствах С. Л. Соболева, Л. Н. Слободецкого с помощью задания следов ее производных на границе области. В доказательстве соответствующей теоремы использованы элементы теории псевдодифференциальных операторов [1,3,4], специальное разбиение единицы двойственной переменной, статья Л. Н. Слободецкого [2]. Полученные результаты могут быть применены при изучении априорных оценок в краевых задачах для уравнений с частными производными.

Ключевые слова: продолжение функций, пространства С.Л.Соболева – Л.Н.Слободецкого, псевдодифференциальные операторы.

В статье приняты следующие обозначения:
$n-$ натуральное число, $n \geq 2$, R^n - мерное евклидово пространство точек $x = (x_1, ..., x_n)$; $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ - двойственная переменная,
$x\xi = x_1\xi_1 + \cdots + x_n\xi_n$, $i^2 = -1$,

$$\widetilde{W} = \widetilde{W}(\xi) = \int e^{-ix\xi} W(x)dx - \text{ преобразование Фурье функции } W(x).$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ - мультииндекс с целочисленными неотрицательными координатами, то

$$\partial_x^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n; \ \partial_k^j = \frac{\partial^j}{\partial x_k^j}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Кроме этого, всюду ниже предполагается, что $U(x) \in C_0^\infty(R^n)$, $\Omega = \{x : x_1 > 0\}$, $\Gamma = \{x : x_1 = 0\}$; $s \geq 0$, $[s]-$ целая часть числа s; $m-$ целое неотрицательное число, $\mu = 1/(m+1)$, $\lambda(\xi) = (1 + |\xi_1|^{2(m+1)} + |\xi'|^2)^{\mu/2}$, $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $y' = (y_2, \ldots, y_n)$, $\alpha' = (\alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\xi' = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$.

Нормы $\| \cdot \|_{s,m}$, $\| \cdot \|_{s,m,\Omega}$, $\| \cdot \|_{s,\Gamma}$, определяются следующим образом:

$$\|U\|_{s,m}^2 = \int |\tilde{U}(\xi)|^2 \lambda^{2s}(\xi) d\xi,$$

$$\|U\|_{s,m,\Omega}^2 = \int_\Omega (\sum_{j \leq [s]} |\partial_1^j U|^2 + \sum_{|\alpha'| \leq [s\mu]} |\partial_{x'}^{\alpha'} U|^2) dx + C_{1,U} + C_{2,U},$$

$$\|U\|_{s,\Gamma}^2 = \int_\Omega \sum_{|\alpha'| \leq [s]} |\partial_{x'}^{\alpha'} U(0, x')|^2 dx' + C_{3,U}, \text{ где}$$

$$C_{1,U} = \begin{cases} 0, \text{ если } s = [s] \\ \sum_{j \leq [s]} \int_\Omega \int_0^\infty dy_1 \frac{|\partial_1^j U(x) - \partial_1^j U(y_1, x')|^2}{|x_1 - y_1|^{1+2(s-[s])}} dx, \text{ если } s \neq [s], \end{cases}$$

[1]Доцент кафедры дифференциальных уравнений, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г.Саранск.

$$C_{2,U} = \begin{cases} 0, \text{ если } s\mu = [s\mu] \\ \sum_{|\alpha'|\leq[s\mu]} \int_\Omega dx \int \frac{|\partial_{x'}^{\alpha'} U(x) - \partial_{y'}^{\alpha'} U(x_1,y')|^2}{|x'-y'|^{n-1+2(s\mu-[s\mu])}} dy', \text{ если } s\mu \neq [s\mu], \end{cases}$$

$$C_{3,U} = \begin{cases} 0, \text{ если } s = [s] \\ \sum_{|\alpha'|\leq[s\mu]} \int\int \frac{|\partial_{x}^{\alpha'} U(0,x') - \partial_{y}^{\alpha'} U(0,y')|^2}{|x'-y'|^{n-1+2(s\mu-[s\mu])}} dx'dy', \text{ если } s \neq [s]. \end{cases}$$

Пополнение пространства $C_0^\infty(R^n)\bigcap C^\infty(\Omega)$ по норме $\|\cdot\|_{s,m,\Omega}$ называется пространством С.Л.Соболева-Л.Н.Слободецкого в Ω.

Постоянные, возникающие в неравенствах в качестве коэффициентов, будем обозначать буквой C с индексами.

Введем разбиение единицы двойственной переменной ξ. Пусть $H(t) \in C_0^\infty(R)$, $0 \leq H(t) \leq 1$; $H(t) = 1$, если $|t| \leq 1$; $H(t) = 0$, если $|t| \geq 2$. Пусть

$$g_k(t) = H(t-k)/\sum_{j=0}^{\infty} H(t-j),$$

$$\Psi_k(\xi) = g_k(\ln(\lambda(\xi))),\ k = 0, 1, \dots\ .$$

Очевидно, что в каждой точке $\xi \in R^n$ персекается конечное число носителей функций $\Psi_k(\xi)$,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(\xi) = 1,$$

$$e^{-2}\lambda(\xi) \leq e^k \leq e^2\lambda(\xi), \text{ если } \xi \in supp\Psi_k(\xi).$$

Функции $\Psi_k(\xi)$ соответствует псевдодифференциальный оператор $\Psi_k(D)$, определяемый по формуле

$$\Psi_k(D)W(x) = (2\pi)^{-n}\int e^{ix\xi}\Psi_k(\xi)\widetilde{W}(\xi)d\xi.$$

Пусть $q(\xi') = (1+|\xi'|)^\mu$, $j-$ натуральное число, $l-$ целое и неотрицательное,

$$\Phi_l(x) = \partial_1^l U(x),$$

$$V_l = V_l(x) = (2\pi)^{-n+1}x_1^l \int e^{ix'\xi'} H(x_1 q) \int e^{-iy'\xi'}\Phi_l(0,y')dy'd\xi'/l!$$
$$= x_1^l H(x_1 q(D'))\Phi_l(0,x')/l!\ .$$

Положим

$$W_j(x) = 2\sum_{l=0}^{[j/2]} V_{2l}, \text{если } j - \text{нечетное};$$

$$W_j(x) = 2\sum_{l=0}^{-1+j/2} V_{2l+1}, \text{если } j - \text{четное}; \tag{0.1}$$

$$U_j = U_j(x) = \begin{cases} U(x), \text{ если } x_1 \geq 0 \\ (-1)^j U(-x_1,x') + W_j(x), \text{ если } x_1 < 0. \end{cases}$$

Теорема. Функция U_j имеет непрерывные производные до порядка j включительно и существуют постоянные $C_{j,s}$, не зависящие от $U(x) \in C_0^\infty(R^n)\bigcap C^\infty(\Omega)$, такие, что для всех $s \in [0, j+1]$, $s \neq [s]+1/2$ справедливы оценки:

$$\|U_j\|_s \leq C_{j,s}(\|U\|_{s,m,\Omega} + \sum_{l=0}^{j-1} \|\partial_1^l U(x)\|_{(s-l)\mu-\mu/2,\Gamma}). \tag{0.2}$$

Доказательство. Непрерывность производных U_j вытекает из равенств:

$$\partial_1^l((-1)^j U(-x_1,x') + W_j(x))_{x_1=0} = \partial_1^l U(x)_{x_1=0}, \quad l=0,\dots,j. \tag{0.3}$$

Очевидно, что

$$\|U_j\|^2_{s,m} \le C_1 \int (1+|\xi'|^{2s\mu})|\widetilde{U}_j|^2 d\xi + C_2 \int |\xi_1|^{2s}|\widetilde{U}_j|^2 d\xi, \tag{0.4}$$

$$\int (1+|\xi'|^{2s\mu})|\widetilde{U}(\xi)_j|^2 d\xi \le C_3(\|U\|^2_{s,m,\Omega} + \sum_{l=0}^{j-1} \|\partial_1^l U(x)\|^2_{(s-l)\mu-\mu/2,\Gamma}).$$

Оценим второе слагаемое неравенства (0.4). Пусть $s-$ целое. Из (0.3) следует

$$\partial_1^s U_j = \begin{cases} \partial_1^s U(x), \text{ если } x_1 \ge 0 \\ (-1)^j \partial_1^s U(-x_1,x') + \partial_1^s W_j(x), \text{ если } x_1 < 0. \end{cases}$$

Положим

$$F_l(\xi') = \int \exp^{-ix'\xi'} \partial_1^l U(0,x') dx'.$$

Из равенства Парсеваля имеем

$$\int |\partial_1^s W_j(x)|^2 dx \le C_4 \int \int \sum_{l=0}^{j-1} |\partial_1^s (H(x_1(1+|\xi'|)^\mu) x_1^l)|^2 dx_1 |F_l(\xi')|^2 d\xi'$$

$$\le C_5 \sum_{l=0}^{j-1} | \int (1+|\xi'|)^{(2s-2l)\mu-\mu/2)} |F_l(\xi')|^2 d\xi'.$$

Это доказывает теорему для целого s.

Пусть $s-$ нецелое, $\gamma = s-[s]$.

Сначала предположим, что одновременно $[s], j-$ четные, или нечетные. Тогда справедливо равенство

$$\partial_1^{[s]} U_j = U_{j,1} + U_{j,2},$$

где

$$U_{j,1} = \begin{cases} \partial_1^{[s]} U(x), \ x_1 \ge 0 \\ \partial_1^{[s]} U(z,x'), \ z=-x_1, \ x_1 < 0, \end{cases}$$

$$U_{j,2} = \begin{cases} 0, \ x_1 \ge 0 \\ \partial_1^{[s]} W_j(x), \ x_1 < 0. \end{cases}$$

Из [2] имеем

$$\int |\xi_1|^{2s} |\widetilde{U}_j(\xi)|^2 d\xi \le C_6(\int |\xi_1|^{2\gamma} |\widetilde{U}_{j,1}(\xi)|^2 d\xi + \int |\xi_1|^{2\gamma} |\widetilde{U}_{j,2}(\xi)|^2 d\xi), \tag{0.5}$$

$$\int |\xi_1|^{2\gamma} |\widetilde{U}_{j,1}(\xi)|^2 d\xi \le C_7 \|U\|^2_{s,m,\Omega}, \tag{0.6}$$

$$\int |\xi_1|^{2\gamma}|\widetilde{U}_{j,2}(\xi)|^2 d\xi \le C_8(\int_{x_1<0}\int_{y_1>0} |\partial_1^{[s]}W_j(x)|^2/|x_1-y_1|^{1+2\gamma}dy_1dx$$
$$+\int_{x_1<0}\int_{y_1<0} |\partial_1^{[s]}W_j(x)-\partial_1^{[s]}W_j(y_1,x')|^2/|x_1-y_1|^{1+2\gamma}dy_1dx+\|\partial_1^{[s]}W_j(x)\|^2)$$
$$\le C_9(\|W_j\|^2_{s,m}+\int |\partial_1^{[s]}W_j(x)|^2/|x_1|^{2\gamma}dx). \tag{0.7}$$

Если $[s]-$ четное, то

$$|\partial^{[s]}(H(x_1(1+|\xi'|)^\mu)x_1^{2l+1})|/|x_1|^\gamma \le C_{10}(1+|\xi'|)^{(2l+1-\gamma-[s])\mu}).$$

Если $[s]-$ нечетное, то

$$|\partial^{[s]}(H(x_1(1+|\xi'|)^\mu)x_1^{2l})|/|x_1|^\gamma \le C_{11}(1+|\xi'|)^{(2l-\gamma-[s])\mu}).$$

Поэтому, получаем

$$\int |\partial_1^{[s]}W_j(x)|^2/|x_1|^{2\gamma}dx \le C_{12}\sum_{l=0}^{j-1}\|\partial_1^l U(x)\|_{(s-l)\mu-\mu/2,\Gamma}).. $$

Отсюда и из (0.5)-(0.7) получаем оценку (0.2).
Пусть $[s]-$ четное, а $j-$ нечетное, или $[s]-$ нечетное, а $j-$ четное.
Положим

$$G=G(x)\in C_0^\infty(R^n,\ G(x)=\partial_1^{[s]}U(z,x')_{z=-x_1},\ \text{если}\quad x_1\le 0,$$
$$Q(x)=-2G(x)+\partial_1^{[s]}W_j(x),\ x\in R^n.$$

Тогда

$$\partial_1^{[s]}U_j=U_{j,1}+U_{j,3},\ \text{где}$$

$$U_{j,1}=\begin{cases}\partial_1^{[s]}U(x),\ \text{если}\ x_1\ge 0\\ \partial_1^{[s]}U(z,x'),\ z=-x_1\ \text{если}\ x_1<0,\end{cases}$$

$$U_{j,3}=\begin{cases}0,\ \text{если}\ x_1>0\\ Q(x),\ \text{если}\ x_1\le 0.\end{cases}$$

Из [2] следует

$$\|U_{j,1}\|_\gamma \le C_{13}\|U(x)\|_{s,m,\Omega}.$$

Как и в неравенствах (0.7), имеем

$$\int |\xi_1|^{2\gamma}|\widetilde{U}_{j,3}|^2 d\xi \le C_{14}(\|U\|^2_{s,m,\Omega}+\int |Q(x)|^2dx+\int |Q(x)|^2/|x_1|^{2\gamma}dx).$$

Так как

$$\sum_{k=1}^\infty \Psi_k(\xi)=1,\ \text{то}\quad \int |Q(x)|^2/|x_1|^{2\gamma}dx$$
$$\le \int |\sum_{k=1}^\infty G_{k,1}(x)|^2/|x_1|^{2\gamma}dx+\int |\sum_{k=1}^\infty G_{k,2}(x)|^2/|x_1|^{2\gamma}dx, \tag{0.8}$$

где

$$G_{k,1}(x) = (1 - H(x_1 e^k))G_k(x),\ G_{k,2}(x) = H(x_1 e^k)G_k(x),\ G_k(x) = \Psi_k(D)Q(x).$$

Очевидно,что

$$\int |\sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x)|^2/|x_1|^{2\gamma} dx = \int \sum_{k=1}^{\infty} |G_{k,1}(x)|^2/|x_1|^{2\gamma} dx$$
$$+2\int \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x) \sum_{j=k+1}^{\infty} \overline{G}_{j,1}(x)/|x_1|^{2\gamma} dx$$
$$\le \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\|^2 \exp(2k\gamma) + \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\| \exp(2k\gamma)).$$

На носителе функции $G_{k,1}(x)$ справедливо неравенство $|x_1| \ge \exp(-k)$. Поэтому

$$\int |\sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x)|^2/|x_1|^{2\gamma} dx = \int |\sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x)|^2/|x_1|^{2\gamma} dx$$
$$+2\int \sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x) \sum_{j=k+1}^{\infty} \overline{G}_{j,1}(x)/|x_1|^{2\gamma} dx$$
$$\le 2(\sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\|^2 e^{2k\gamma} + \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\| e^{2k\gamma}).$$

Так как $\Psi_k(\xi)e^{k\gamma} \le \Psi_k(\xi)e^2\lambda^\gamma(\xi)$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\|^2 e^{2k\gamma} \le C_{14}(\|G(x)\|^2_{\gamma,m} + \|\partial_1^{[s]} W_j(x)\|^2_{\gamma,m}).$$

Далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\| \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\| e^{2k\gamma} \le \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\|^2 e^{4k\gamma - 2j\gamma + (j-k)\gamma}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\|^2 e^{2j\gamma - (j-k)\gamma} \le \sum_{k=1}^{\infty} \|G_{k,1}(x)\|^2 e^{2\gamma} \sum_{j=k+1}^{\infty} e^{k\gamma - 2j\gamma + (j-k)\gamma}$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\|^2 e^{2\gamma} e^{-(j-k)\gamma} \le C_{15}(\|G(x)\|^2_{\gamma,m} + \|\partial_1^{[s]} W_j(x)\|^2_{\gamma,m}),$$

так как

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=k+1}^{\infty} \|G_{j,1}(x)\|^2 e^{2\gamma} e^{-(j-k)\gamma}$$
$$= e^{2\gamma}(\|G_{2,1}(x)\|^2 e^{-\gamma} + \|G_{3,1}(x)\|^2 e^{-2\gamma} + \ldots + \|G_{\nu,1}(x)\|^2 e^{-(\nu-1)\gamma} + \ldots$$
$$+\|G_{3,1}(x)\|^2 e^{-\gamma} + \ldots + \|G_{\nu,1}(x)\|^2 e^{-(\nu-2)\gamma} + \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+\|G_{\nu,1}(x)\|^2 e^{-\gamma} + \ldots)$$
$$\le C_{16}(\|G(x)\|^2_{\gamma,m} + \|\partial_1^{[s]} W_j(x)\|^2_{\gamma,m}).$$

Отсюда следует

$$\int |\sum_{k=1}^{\infty} G_{k,1}(x)|^2/|x_1|^{2\gamma}dx \le C_{17}(\|G(x)\|_{2\gamma}^2 + \|\partial_1^{[s]}W_j(x)\|_{\gamma,m}^2).$$

Осталось оценить второе слагаемое правой части неравенства (0.8). Ясно, что

$$\int |\sum_{k=1}^{\infty} G_{k,2}(x)|^2/|x_1|^{2\gamma}dx \le I_1 + I_2, \text{ где}$$

$$I_1 = \int |\sum_{k=1}^{\infty}(G_{k,2}(x) - H(x_1e^k)G_k(0,x'))|^2/|x_1|^{2\gamma}dx,$$

$$I_2 = \int |\sum_{k=1}^{\infty} H(x_1e^k)G_k(0,x')|^2/|x_1|^{2\gamma}dx;$$

$$I_1 = \int_{x_1<0} |\sum_{k=1}^{\infty} H(x_1e^k)\int \partial_t G_k(t,x')dt|^2/|x_1|^{2\gamma}dx$$

$$\le C_{18}\int \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} H(x_1e^k)H(x_1e^j)/|x_1|^{-1+2\gamma}dx_1\|\partial_{x_1}G_k(x)\|\|\partial_{x_1}G_j(x)\|$$

$$\le C_{19}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty}\exp(-2j+2\gamma j)\|\partial_{x_1}G_k(x)\|\|\partial_{x_1}G_j(x)\|$$

$$\le C_{20}(\sum_{k=1}^{\infty}\|\partial_{x_1}G_k(x)\|^2\exp(-2k+2\gamma k)\sum_{j=k}^{\infty}\exp(-2j+2k)$$

$$+\sum_{j=1}^{\infty}\|\partial_{x_1}G_j(x)\|^2\exp(-2j+2\gamma j)\sum_{k=1}^{j}\exp(-2\gamma k)) \le C_{21}\|G(x)\|_{2\gamma}^2.$$

Оценка интеграла I_2 следует из того, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_k(0,x') = 0, \quad I_2 = \int |\sum_{k=1}^{\infty}(1 - H(x_1e^k))G_k(0,x')|^2/|x_1|^{2\gamma}dx.$$

Этим завершается доказательство теоремы.

Список литературы

1. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. - М.: Наука, 1984. - 360 с.

2. Слободецкий Л.Н. Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных.-Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та, 1958, 197, 54-112.

3. Тейлор М. Псевдодифференциальные операторы. -М.: Мир, 1985. - 472 с.

4. Хермандер Л. Псевдодифференциальные операторы и гипоэллиптические уравнения// Псевдодифференциальные операторы. - М.: Мир, 1967. - С.297-367.

Дата поступления 19.05.2010

About some method of extending of the function in spaces of Sobolev and Slobodetskii

© G. A. Smolkin[2]

Abstract. The problem of extending of the function out the region considered in anisotropic spaces of Sobolev and Slobodetskii defined traces its derivatives on the boundary. Elements of the theory pseudodifferential operators, a special partition of unity of the dual variable are used in the proof of the theorem. The results can be applied in the study of a priory estimates in the boundary value problems for partial differential equations.
Key Words: extending of functiobns, spaces of Sobolev and Slobodetskii, Pseudodifferential operators.

References

1. Egorov, Yu. V. Linear differential equations of principal type. - M.: Naula, 1984. - 360 p.

2. Slobodetskii, L.N., Generalized Sobolev spaces and their application to boundary-value problems for partial differential equations. - Sci. notes of Leningrad pedagogical institute, 1958, 197, 54-112.

3. Taylor, M. E. Pseudodifferential operators. – M.: Mir, 1985. - 472 p.

4. Hormander L. Pseudodifferential operators and hypoelliptic equations // Pseudodifferential operators. - M.: Mir, 1967. – P. 297 – 367.

[2]Associate professor of differential equations chair, Mordovian state university after N. P. Ogarev, Saransk.