УДК 519.624.8

Итеративный метод регуляризации первого порядка для обобщенных вариационных неравенств

© И. П. Рязанцева[1]

Аннотация. Для обобщенных вариационных неравенств в банаховом пространстве с операторами некоторого класса при приближенном задании данных исследован итеративный метод регуляризации первого порядка.

Ключевые слова: обобщенное вариационное неравенство, регуляризация, итерация, оператор.

1. Пусть X – вещественное рефлексивное банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряженным X^*, Ω – выпуклое замкнутое множество из X, $A : X \to X^*$, $B : X \to X$ – некоторые отображения, причем $\Omega \subset R(B)$, $M = \{x \mid Bx \in \Omega\} \subset D(A)$, $\langle x, y\rangle$ при $x \in X$ и $y \in X^*$ есть отношение двойственности между пространствами X и X^*.

Задача нахождения элемента $x \in X$ такого, что

$$\langle Ax - f, Bx - u\rangle \le 0, \quad Bx \in \Omega \quad \forall u \in \Omega, \tag{1.1}$$

называется обобщенным вариационным неравенством (см. [1, 2]).

Определение 1.1. . *Оператор $A : X \to X^*$ называется B-монотонным, если справедливо неравенство*

$$\langle Ax - Ay, Bx - By\rangle \ge 0 \quad \forall x, y \in D(A) \cap D(B).$$

Пусть выполнены следующие условия:
(а) оператор A деминепрерывен, B^{-1} – непрерывное на Ω отображение;
(б) оператор A является B-монотонным на множестве M, т.е.

$$\langle Ax - Ay, Bx - By\rangle \ge 0 \quad \forall x, y \in M. \tag{1.2}$$

Вводя обозначение $Bx = v$, от (1.1) придем к обычному вариационному неравенству

$$\langle Cv - f, v - u\rangle \le 0, \quad v \in \Omega \quad \forall u \in \Omega \tag{1.3}$$

на выпуклом замкнутом множестве Ω, $C = AB^{-1}$.

В наших предположениях задача (1.1) некорректна. В данной работе для решения ее будем строить итеративный метод регуляризации первого порядка.

Пусть дополнительно выполнены следующие условия:
(в) задача (1.1) имеет непустое множество решений N;
(г) оператор A ограничен;
(д) данные в (1.1) возмущены, а именно, вместо $\{f, A, B, \Omega\}$ известны их приближения $\{f_k, A^k, B^k, \Omega_k\}$, $k = \overline{1, \infty}$, причем

$$\|f - f^k\| \le \delta_k; \tag{1.4}$$

[1]Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; ryazantseva@waise.nntu.sci-nnov.ru

$A^k : X \to X^*$ – B^k-монотонные деминепрерывные операторы, $B^k : X \to X$ – деминепрнрывные операторы, имеющие непрерывные обратные, множество $M^k = \{x \mid B^k x \in \Omega_k\} \subset D(A^k)$;

$$\|A^k x - Ax\| \le h_k g(\|x\|) \quad \forall x \in D(A) = D(A^k); \tag{1.5}$$

$$\|B^k x - Bx\| \le \beta_k q(\|x\|) \quad \forall x \in D(B) = D(B^k); \tag{1.6}$$

Ω_k – выпуклое замкнутое множество из $R(B^k)$, $\Omega \subset R(B)$,

$$r(\Omega, \Omega_k) \le \sigma_k; \tag{1.7}$$

здесь $g(s)$ и $q(s)$ – неотрицательные функции при $s \ge 0$, переводящие ограниченное множество в ограниченное, $r(\Omega, \Omega_k)$ – хаусдорфово расстояние в пространстве X между множествами Ω и Ω_k, $\{\delta_k\}$, $\{h_k\}$, $\{\beta_k\}$, $\{\sigma_k\}$ – последовательности неотрицательных чисел.

Если итеративный метод первого порядка из [3] применить для нахождения решения вариационного неравенства (1.3), то одно из достаточных условий сходимости метода принимает вид

$$\|C^k u - Cu\| = \|A^k (B^k)^{-1} u - AB^{-1} u\| \le \tilde{h}_k \tilde{g}(\|u\|), \tag{1.8}$$

где $\tilde{h}_k \ge 0$ при всех $k = \overline{1, \infty}$, $\tilde{g}(s)$ – функция того же класса, что $g(s)$ и $q(s)$. Проверить справедливость последнего неравенства нелегко, так как нелинейные операторы B^{-1} и $(B^k)^{-1}$ не всегда можно представить в явном виде. Укажем для примера, что нахождение значения оператора J^{-1}, обратного к оператору дуального отображения в пространствах Соболева [4] – [6] в некоторой точке, следует решить краевую задачу (см. [7], с.126). Поэтому в данной работе итеративные методы регуляризации строятся непосредственно для обобщенного вариационного неравенства (1.1). При доказательстве сильной сходимости метода от предположения (1.8) удается отказаться и заменить его неравенствами (1.5), (1.6). Последние легко проверяются для некоторых известных классов нелинейных операторов (см. [5], [8]).

Сделаем дополнительные предположения:
(е) пусть $\{\alpha_k\}$ – бесконечно малая убывающая последовательность положительных чисел;
(ж) справедливы неравенства

$$\|Ax\| \le p(\|Bx\|) \quad \forall Bx \in \Omega, \quad x \in X,$$

$$\|A^k x\| \le p(\|B^k x\|) \quad \forall B^k x \in \Omega_k, \quad x \in X,$$

здесь $p(s)$ – неотрицательная непрерывная при $s \ge 0$ функция;
(з) масштабная функция $\mu(t)$ дуального отображения J^μ (см. [4] – [6]) обладает свойством

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{t\mu(t)}{p(t)} = +\infty. \tag{1.9}$$

Теперь в силу следствия 1 из [9] заключаем, что последовательность $\{x_k^\alpha\}$ решений обобщенного вариационного неравенства

$$\langle Ax_k^\alpha + \alpha_k J^\mu Bx_k^\alpha - f, Bx_k^\alpha - By \rangle \le 0, \quad Bx_k^\alpha \in \Omega \quad \forall By \in \Omega \tag{1.10}$$

сходится по норме пространства X к B-нормальному решению x^* обобщенного вариационного неравенства (1.1), т.е.

$$\|v^*\| = \|Bx^*\| = \{\|Bx\| \mid Bx \in \Omega, \ x \in N\}.$$

Заметим, что в [9] установлена сходимость

$$Bx_k^\alpha \to Bx^* \quad \text{при} \quad k \to +\infty. \tag{1.11}$$

Далее будем использовать некоторый оператор обобщенного проектирования из пространства X^* на выпуклое замкнутое множество из пространства X (сравни с [5], [6]). Приведем некоторые результаты, связанные с этим понятием.

Построим функционал

$$V^\mu(x,y) = \Phi(\|J^\mu x\|) - \langle J^\mu x, y\rangle + \Psi(\|y\|), \tag{1.12}$$

где $\Psi(t) = \int_0^t \mu(s)ds$, $\nu(\tau)$ – функция, обратная к $\mu(t)$, $\Phi(\tau) = \int_0^\tau \nu(s)ds$. Тогда (см. [5], [6])

$$S(J^\mu x) = grad_{J^\mu x} V^\mu(x,y) = x - y, \qquad Ty = grad_y V^\mu(x,y) = J^\mu y - J^\mu x. \tag{1.13}$$

Операторы $S : X^* \to X$, $T : X \to X^*$ являются строго монотонными (см. [4], с.313). Теперь в силу теоремы 5.1 из [4] делаем вывод о строгой выпуклости функционала $V^\mu(x,y)$ по переменным $J^\mu x$ и y.

На основании определения оператора J^μ запишем равенство

$$V^\mu(x,x) = \Phi(\mu(\|x\|)) - \|x\|\mu(\|x\|) + \Psi(\|x\|).$$

Кроме того, $\mu(0) = \Phi(0) = \Psi(0) = 0$, что вытекает из определения этих функций. Построим функцию $\xi(s) = \Phi(\mu(s)) - s\mu(s) + \Psi(s)$. Легко убедиться, что $\xi'(s) = \nu(\mu(s))\mu'(s) - \mu(s) - s\mu'(s) + \mu(s) = 0$ (функцию $\mu(t)$ считаем дифференцируемой). Но $\xi(0) = 0$. Тем самым доказано, что

$$V^\mu(x,x) = 0 \quad \forall x \in X. \tag{1.14}$$

Так как $V^\mu(x,y)$ есть выпуклый по $J^\mu x$ функционал, то (см. [4], с.104)

$$V^\mu(z,y) - V^\mu(x,y) \geq \langle J^\mu z - J^\mu x, x - y\rangle \quad \forall x,y,z \in X.$$

Отсюда при $z = y$ в силу (1.14) имеем неравенство

$$\langle J^\mu x - J^\mu y, x - y\rangle \geq V^\mu(x,y). \tag{1.15}$$

Из (1.12) и определения оператора J^μ выводим неравенство

$$V^\mu(x,y) \geq \Phi(\mu(\|x\|)) - \|y\|\mu(\|x\|) + \Psi(\|y\|). \tag{1.16}$$

Поскольку $\Psi(t)/t \sim \mu(t)$ при $t \to \infty$, то $V^\mu(x,y) \to +\infty$ при $\|y\| \to \infty$ и любом фиксированном $x \in X$. Теперь с учетом строгой выпуклости функционала $V^\mu(x,y)$ по y делаем вывод о существовании единственного элемента $y \in X$ такого, что

$$V^\mu(x,y) = \min\{V^\mu(x,\xi) \mid \xi \in \Omega\} \tag{1.17}$$

(см. [4], с. 102, 119). Следовательно, можно ввести определение.

Определение 1.2. . *Оператор $P_\Omega^\mu : X^* \to X$ такой, что*

$$P_\Omega^\mu z = y \in \Omega, \ z = J^\mu x, \tag{1.18}$$

а элемент y удовлетворяет (1.17), называется оператором обобщенного проектирования.

Подобно [6], параграф 3.4 доказывается утверждение.

Л е м м а 1.2. . *Элемент y из Ω удовлетворяет (1.17), (1.18) тогда и только тогда, когда выполняется неравенство*

$$\langle J^\mu y - J^\mu x, y - \xi\rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in \Omega.$$

Пусть масштабная функция $\mu(t) = t^{s-1}$ с $s \geq 2$, тогда оператор J^μ и функционал V^μ будем обозначать J^s и V^s соответственно. Это предположение продиктовано тем, что оператор J^s и функционал V^s хорошо изучены и имеют более простой вид, чем J^μ и V^μ при произвольной функции $\mu(t)$ (см. [4] – [6]). Оператор обобщенного проектирования на основе функционала V^s будем обозначать P^s_Ω.

Так как в нашем случае $\nu(\tau) = \tau^{1/(s-1)}$, $\Psi(t) = t^s/s$, $\Phi(\tau) = \tau^m/m$, $1/s + 1/m = 1$, то (1.16) примет вид

$$V^s(x, y) \geq \|x\|^s/m - \|y\|\|x\|^{s-1} + \|y\|^s/s.$$

Используя тривиальное неравенство

$$a^r - b^r \leq r a^{r-1}(a - b), \quad r > 1$$

и связь величин s и m, нетрудно установить, что

$$V^s(x, y) \geq \|x\|^{s-2}(\|x\| - \|y\|)^2/m.$$

Отсюда заключаем, что $V^s(x, y) \geq 0$ при всех x и y из X. Условие (1.9) при нашем выборе масштабной функции принимает вид

$$\lim_{t\to\infty} \frac{t^s}{p(t)} = +\infty. \tag{1.19}$$

Далее считаем, что (1.19) выполняется.

Рассмотрим метод итеративной регуляризации следующего вида

$$\begin{aligned} B^k u_k \ &= \ P^s_{\Omega_k}(J^s B^k u_k - \frac{J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1}}{\tau_k} - \\ &- \ \gamma_k[A^k u_k + \alpha_k J^s B^k u_k - f^k]), \quad k = 1,\ 2,\ \dots\,, \end{aligned} \tag{1.20}$$

где элемент $u_0 \in X$ задается, $\{\tau_k\}$ и $\{\gamma_k\}$ – ограниченные последовательности положительных чисел. В силу леммы 1.2. от (1.20) перейдем к обобщенному вариационному неравенству

$$\begin{aligned} \langle J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1} \ &+ \ \tau_k\gamma_k(A^k u_k + \alpha_k J^s B^k u_k - f^k), B^k u_k - B^k y\rangle \leq 0 \\ &\forall B^k y \in \Omega_k, \quad B^k u_k \in \Omega_k. \end{aligned} \tag{1.21}$$

Нетрудно убедиться в строгой B^k-монотонности и B^k-коэрцитивности оператора $C^k = J^s B^k + \tau_k\gamma_k(A^k + \alpha_k J^s B^k)$ (см. [9]). Следовательно, по теореме 1 из [9] обобщенное вариационное неравенство (1.20), а значит, и уравнение (1.21) однозначно разрешимы. Исследуем поведение последовательности $\{u_k\}$ при $k \to \infty$.

Предположим, что существуют положительные постоянные a_1 и a_2 такие, что

$$\|u_k\| \leq a_1, \quad \|Bu_k\| \leq a_2, \quad k = 1,\ 2,\ \dots\,, \tag{1.22}$$

и построим последовательность неотрицательных чисел $\{\rho_k\}$, где

$$\rho_k = V^s(B^k u_k, Bx_k^\alpha) = \|J^s B^k u_k\|^m/m - \langle J^s B^k u_k, Bx_k^\alpha\rangle + \|Bx_k^\alpha\|^s/s, \tag{1.23}$$

здесь $1/m + 1/s = 1.$ Используя (1.13) и неравенство (см. [6], с.66)

$$\|x\|^\lambda/\lambda - \|y\|^\lambda/\lambda \geq \langle J^\lambda y, x - y\rangle, \quad \lambda > 1,$$

имеем

$$\begin{aligned} \rho_k - \rho_{k-1} &\leq \langle J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1}, B^k u_k - Bx_k^\alpha\rangle + \\ &+ \langle J^s Bx_k^\alpha - J^s B^{k-1} u_{k-1}, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\rangle. \end{aligned} \tag{1.24}$$

В силу условия (1.7) при каждом $k \geq 1$ найдутся элементы $Bv^k \in \Omega$ и $B^k w_k^\alpha \in \Omega_k$ такие, что

$$\|B^k u_k - Bv_k\| \leq \sigma_k, \quad \|Bx_k^\alpha - B^k w_k^\alpha\| \leq \sigma_k. \tag{1.25}$$

Положив в (1.21) $y = w_k^\alpha$, а в (1.1) при $J^\mu = J^s$, умноженном на $\gamma_k \tau_k$, принимая $y = v_k$ и сложив результаты, приходим к неравенству

$$\langle J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1} + \tau_k \gamma_k (A^k u_k + \alpha_k J^s B^k u_k - f^k), B^k u_k - B^k w_k^\alpha\rangle +$$

$$+\tau_k \gamma_k \langle Ax_k^\alpha + \alpha_k J^s Bx_k^\alpha - f, Bx_k^\alpha - Bv_k\rangle \leq 0.$$

Перепишем последнее неравенство в следующей эквивалентной форме, удобной для получения нужных оценок:

$$\begin{aligned} \langle J^s B^k u_k &- J^s B^{k-1} u_{k-1}, B^k u_k - Bx_k^\alpha\rangle + \langle J^s Bx_k^\alpha - J^s B^{k-1} u_{k-1}, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\rangle + \\ &+ \langle J^s B^k u_k - J^s B^{k-1} u_{k-1}, Bx_k^\alpha - B^k w_k^\alpha\rangle - \\ &- \langle J^s Bx_k^\alpha - J^s B^{k-1} u_{k-1}, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\rangle + \\ &+ \tau_k \gamma_k \{\langle A^k u_k - A^k x_k^\alpha, B^k u_k - B^k x_k^\alpha\rangle + \\ &+ \langle A^k u_k, (B^k x_k^\alpha - Bx_k^\alpha) + (Bx_k^\alpha - B^k w_k^\alpha)\rangle + \\ &+ \langle A^k x_k^\alpha - Ax_k^\alpha, Bv_k - Bx_k^\alpha\rangle + \langle A^k x_k^\alpha, (B^k u_k - Bv_k) + (Bx_k^\alpha - B^k x_k^\alpha)\rangle + \\ &+ \alpha_k [\langle J^s B^k u_k - J^s Bx_k^\alpha, B^k u_k - Bx_k^\alpha\rangle + \langle J^s B^k u_k, Bx_k^\alpha - B^k w_k^\alpha\rangle + \\ &+ \langle J^s Bx_k^\alpha, B^k u_k - Bv_k\rangle] + \langle f^k, Bv_k - B^k u_k\rangle + \\ &+ \langle f, B^k w_k^\alpha - Bx_k^\alpha\rangle + \langle f - f^k, Bv_k - B^k w_k^\alpha\rangle\} \leq 0. \end{aligned} \tag{1.26}$$

На основании (1.15) имеем

$$\langle J^s B^k u_k - J^s Bx_k^\alpha, B^k u_k - Bx_k^\alpha\rangle \geq \rho_k. \tag{1.27}$$

Далее найдем оценку сверху для $\|Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\|$. В силу (1.10) имеем

$$\langle Ax_{k-1}^\alpha + \alpha_{k-1} J^\mu Bx_{k-1}^\alpha - f, Bx_{k-1}^\alpha - By\rangle \leq 0, \quad Bx_{k-1}^\alpha \in \Omega \quad \forall By \in \Omega.$$

Положив в полученном неравенстве $y = x_k^\alpha$, а в (1.10) – $y = x_{k-1}^\alpha$ и сложив результаты, запишем неравенство

$$\langle Ax_k^\alpha - Ax_{k-1}^\alpha, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\rangle + \alpha_k \langle J^s Bx_k^\alpha - J^s Bx_{k-1}^\alpha, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\rangle +$$

$$+(\alpha_k - \alpha_{k-1})\langle J^s Bx_{k-1}^\alpha, Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\rangle \leq 0.$$

Учитывая здесь B-монотонность оператора A, ограниченность последовательности $\{Bx_k^\alpha\}$ (см. (1.11)) и свойство дуального отображения J^s (см. [6], с.88), приходим к неравенству

$$c\|Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\|^{s-2}\delta_X(\|Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\|/a_4) \le a_3\frac{\alpha_{k-1}-\alpha_k}{\alpha_k}\|Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\|,$$

где $a_3 > 0,\ c > 0,\ s \ge 2,\ a_4 = \max\{1,\ a_5\},\ \|Bx_k^\alpha\| \le a_5$ при всех $k = 1,\ 2,\ \dots, \delta_X(\tau)$ – модуль выпуклости пространства X. Отсюда выводим оценку

$$\|Bx_k^\alpha - Bx_{k-1}^\alpha\| \le a_4 g_X^{-1}\left(a_5\frac{\alpha_{k-1}-\alpha_k}{\alpha_k}\right), \quad a_5 = \frac{a_3}{c}, \tag{1.28}$$

здесь $g_X^{-1}(\tau)$ – функция, обратная к функции $g_X(\xi)$,

$$g_X(\xi) \le \delta_X(\xi)\xi^{s-3}. \tag{1.29}$$

Предположения (г), (1.5), (1.6) и (1.22) дают неравенство

$$\|A^k u_k - Au_k\| \le h_k g(\|u_k\|), \quad \|B^k u_k - Bu_k\| \le \beta_k q(\|u_k\|),$$

т.е.

$$\|A^k u_k\| \le a_6(1+h_k), \quad \|B^k u_k\| \le \tilde{a}_6(1+\beta_k), \ \ a_6 > 0, \quad \tilde{a}_6 > 0. \tag{1.30}$$

Следовательно, последовательности $\{A^k u_k\}$, $\{B^k u_k\}$ ограничены. Теперь, используя (1.4) – (1.6), (1.24), (1.25), (1.27), (1.28), (1.30), из (1.26) выводим оценку

$$\rho_k \le (1-\eta_k)\rho_{k-1} + a_7\left[\gamma_k\tau_k(\delta_k + h_k + \beta_k + \sigma_k) + \sigma_k + g_X^{-1}\left(a_5\frac{\alpha_{k-1}-\alpha_k}{\alpha_k}\right)\right], \tag{1.31}$$

здесь $a_7 > 0$,

$$\eta_k = \frac{\alpha_k\gamma_k\tau_k}{1+\alpha_k\gamma_k\tau_k} \ge \frac{\alpha_k\gamma_k\tau_k}{1+a_0}, \tag{1.32}$$

$a_0 = \sup\{\alpha_k\gamma_k\tau_k \mid k = 1,\ 2,\ \dots\} > 0$. Теперь лемма из [10], (1.31) и (1.32) обеспечивают справедливость соотношений

$$\lim_{k\to\infty}\rho_k = \lim_{k\to\infty}V^s(B^k u_k, Bx_k^\alpha) = 0, \tag{1.33}$$

если

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\delta_k + h_k + \beta_k}{\alpha_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sigma_k}{\alpha_k\gamma_k\tau_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{g_X^{-1}\left(a_5\frac{\alpha_{k-1}-\alpha_k}{\alpha_k}\right)}{\alpha_k\gamma_k\tau_k} = 0, \tag{1.34}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\alpha_k\gamma_k\tau_k = +\infty. \tag{1.35}$$

Неравенство (см. [6], с.98)

$$V^s(x,y) \ge \|x-y\|^{s-2}\delta_X(\|x-y\|/a_4), \quad s \ge 2,$$

свойства функции $\delta_X(\xi)$ (см. [6], параграф 1.2) и (1.33) позволяют сделать вывод о том, что $\|B^k u_k - Bx_k^\alpha\| \to 0$ при $k \to \infty$. Отсюда в силу (1.6), (1.11), (1.22) и (а) имеем сходимость последовательности $\{u_k\}$ к B-нормальному решению обобщенного вариационного неравенства (1.1). Тем самым доказано утверждение.

Т е о р е м а 1.1. . *Пусть X – вещественное равномерно выпуклое банахово пространство со строго выпуклым сопряженным, и выполнены предположения (а) – (з), (1.19), (1.22), (1.34), (1.35). Тогда последовательность $\{u_k\}$, однозначно определяемая из (1.20) (или из (1.21)), сильно сходится при $k \to \infty$ к B-нормальному решению обобщенного вариационного неравенства (1.1).*

З а м е ч а н и е 1.2. . *Существование функции $g_X(\xi)$, удовлетворяющей (1.29), для известных пространств отмечалось в* [3].

З а м е ч а н и е 1.3. . *Возможные обобщения теоремы 1.1. указаны в* [9].

Список литературы

1. Siddiqi A.H., Ansari Q.H. General strongly nonlinear variational inequalities// J. Math. Anal. and Appl. 1992. V. 166. No 2. P. 386-392.

2. Коннов И.П. Комбинированный релаксационный метод для обобщенных вариационных неравенств// Известия вузов. Математика. 2001. No 12. С. 46-54.

3. Рязанцева И.П. Регуляризованные методы первого порядка для монотонных вариационных неравенств с оператором обобщенного проектирования//Журнал вычислительной математики и математической физики. 2005. Т. 45. No 11. С. 1954-1962.

4. Вайнберг М.М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. – 416с.

5. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. – 410p.

6. Рязанцева И.П. Избранные главы теории операторов монотонного типа. Нижний Новгород: НГТУ, 2008. – 272с.

7. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978. – 336с.

8. Рязанцева И.П. Устойчивые методы решения нелинейных монотонных некорректных задач. Дисс...д.ф.-м.н. Новосибирск: НГУ, 1996. – 344с.

9. Рязанцева И.П. Операторные методы регуляризации обобщенных вариационных неравенств//Труды Средневолжского математического общества. 2009. Т. 11. No 1. С. 52-64.

10. Апарцин А.С. К построению итерационных процессов в гильбертовом пространстве//Труды по прикладной матем. и кибернетике. Иркутск, 1972. С. 7-14.

Дата поступления 07.05.2010

Iterative regularized method of first-order for general variational inequalities

© I. P. Ryazantseva[2]

Abstract. Iterative first-order regularized method for general variational inequalities with some class operators by perturbation data is investigated.
Key Words: general variational inequalition, iteration, regularization, operator.

References

1. Siddiqi A.H., Ansari Q.H. General strongly nonlinear variational inequalities// J. Math. Anal. and Appl. 1992. V. 166. No 2. P. 386-392.

2. Konnov I.P. Combinatorial relaxly method for general variational inequations// Izvestiya vuzov. Matematika. 2001. No 12. P. 46-54.

3. Ryazantseva I.P. Regularized first-order methods for monotone variational inequalities with generalized projection operator//Zhurnal vichislitelnoi mathematiki i mathematicheskoi phiziki. 2005. V. 45. No 11. P. 1954-1962.

4. Vainberg M.M. Variational method and method of monotone operators in theory of nonlinear equations. M.: Nauka, 1972. – 416p.

5. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer, 2006. – 410p.

6. Ryazantseva I.P. Electly chapters of theory monotone type operators. Nizhnii Novgorod: NGTU, 2008. – 272p.

7. Gajewski Kh., Greger K., Zacharias K. Nonlinear operator equations and operator differetial equations. M.: Mir, 1978. – 336p.

8. Ryazantseva I.P. Stable methods of the solutions of nonlinear ill-posed problems, D. Sc. Thesis, Novosibirsk, 1996. – 344p.

9. Ryazantseva I.P. Operator regularized methods for general variational inequalities// Trudi Srednevolzhskogo mathematicheskogo obschestva. 2009. V. 11. No 1. P. 52-64.

10. Aparzin A.S. To construction of iterative processes in Hilbert space// Trudi po prikladnoi mathem. i kibernetike. Irkutsk, 1972. P. 7-14.

[2]Professor of Applied Mathematics Chair, Nizhnii Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev, Nizhnii Novgorod; ryazantseva@waise.nntu.sci-nnov.ru