УДК 517.938

# Полная управляемость линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами

© И. С. Потапова[1]

**Аннотация.** В статье изучается проблема полной управляемости линейной системы дифференциальных уравнений с управлением специального вида, найдены необходимые и достаточные условия полной управляемости, исследуется проблема приведения матрицы с переменными к диагональному виду, найде-ны необходимые и достаточные условия неособенного преобразования.

**Ключевые слова:** линейные системы дифференциальных уравнений, полная управляемость, фундаментальная матрица.

## 1. Введение

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u, \tag{1.1}$$

где $A(t)$ – $n \times n$, $B(t)$ – $n \times m$ матрицы, $u$ – $m$-мерный вектор-управление.

Предположим, что на сегменте $[0, T]$ матрицы $A(t)$ и $B(t)$ определены и непрерывны, где $T > 0$ – некоторое число. Множество допустимых управлений определим равенством $U = \{u(t)\}$, в котором $u(t)$ кусочно-непрерывная на сегменте $[0, T]$.

**Определение 1.1.** *Система (1.1) называется вполне управляемой на сегменте* $[0, T]$ *во множестве допустимых управлений* $U$, *если для любых векторов* $\alpha$ *и* $\beta$ *пространства* $\mathbb{E}^n$ *существует управление* $u(t) \in U$, *при котором система (1.1) имеет решение* $x(t) \in En$, *определенное на сегменте* $[0, T]$, *удовлетворяющее краевым условиям* $x(0, \alpha, u) = \alpha$, $x(T, \alpha, u) = \beta$.

## 2. Постановка задачи

Ставится задача – найти условия полной управляемости линейной системы дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами (1.1) на сегменте $[0, T]$ во множестве допустимых управлений $U$.

Пусть $X(t)$ – фундаментальная матрица системы $\dot{x} = A(t)x$, $X(0) = E$, $u(t)$ – произвольная, но фиксированная вектор-функция. Тогда решение системы (1.1) определится равенством

$$x(t, \alpha, u) = X(t)\alpha + X(t)\int\limits_0^t X^{-1}(\xi)B(\xi)u(\xi)d\xi.$$

[1]Аспирант кафедры Математики и МПМД, Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина, г. Рязань; irina00000@yandex.ru.

Следовательно, для того, чтобы система (1.1) была вполне управляемой во множестве допустимых управлений $U$, необходимо и достаточно, чтобы для любых векторов $\alpha \in \mathbb{E}^n$ и $\beta \in \mathbb{E}^n$ существовало допустимое управление $u(t) \in U$, удовлетворяющее равенству

$$\int_0^T X^{-1}(t)B(t)u(t)dt = \gamma, \tag{2.1}$$

в котором $\gamma = X^{-1}(T)\beta - \alpha$.

Определим множество управлений

$$U = \{u(t) : u(t) = R(t)v\}, \tag{2.2}$$

$R(t) = (r_{ij}(t))_{11}^{mn}$, $r_{ij}(t) = \sum\limits_{\lambda=1}^{k} r_{ij}^{(\lambda)}\varphi_\lambda(t)$, $r_{ij}^{(\lambda)}$ – действительные числа, при любом $\lambda \in \overline{1,k}$ $\varphi_\lambda(t)$ – известные функции, определенные и кусочно-непрерывные на сегменте $[0,T]$, $v$ – $n$-мерный постоянный вектор.

Следовательно, для того, чтобы система (1.1) была вполне управляемой во множестве допустимых управлений $U$, определенном равенством (2.2), необходимо и достаточно, чтобы существовала матрица $R(t)$, удовлетворяющая неравенству

$$\det \int_0^T X^{-1}(t)B(t)R(t)dt \neq 0$$

.

Пусть $P = \int\limits_0^T X^{-1}(t)B(t)R(t)dt$, $r$ – $mnk$-мерный вектор, определенный равенством $r = (r_1, r_2, ..., r_{mn}, ..., r_{mnk})$, в котором $r_1 = r_{11}^{(1)}$, $r_2 = r_{21}^{(1)}, ...,$ $r_{mn} = r_{mn}^{(1)}, ...,$ $r_{mnk} = r_{mn}^{(k)}$.

Непосредственным вычислением устанавливаем, что $\det P = \sum\limits_{(i_1,i_2,...,i_n)\in D} a_{(i_1,i_2,...,i_n)} r_{i_1} r_{i_2} ... r_{i_n}$, где $D$ – множество сочетаний из натуральных чисел $\overline{1,mnk}$ по $n$.

## 3. Необходимые и достаточные условия полной управляемости

**Теорема 3.1.** *Для того чтобы система (1.1) была вполне управляемой на сегменте* $[0,T]$ *во множестве допустимых управлений* $U$, *определенном равенством (2.2), необходимо и достаточно, чтобы существовало хотя бы одно сочетание* $(i_1, i_2, ..., i_n) \in D$, *при котором* $a_{(i_1,i_2,...,i_n)} \neq 0$.

Согласно теореме 3.1 для решения проблемы полной управляемости конкретных линейных систем дифференциальных уравнений с переменными коэфициентами необходимо иметь явное представление фундаментальной матрицы системы $\dot{x} = A(t)x$.

## 4. Приведение матрицы с переменными коэффициентами к диагональному виду

**Т е о р е м а 4.1.** *Пусть $A(t)$ – $n \times n$ матрица, определенная на сегменте $[0,T]$. Тогда для того чтобы существовали постоянная неособенная матрица $Y$ и диагональная матрица $C(t)$, удовлетворяющие равенству*

$$A(t)Y = YB(t), \tag{4.1}$$

*необходимо и достаточно, чтобы*

*1. матрицу $A(t)$ можно представить следующим равенством*

$$A(t) = \sum_{s=1}^{m} A_s f_s(t), \tag{4.2}$$

*в котором $m \le n$, матрицы $A_s$ постоянные, $f_s(t)$ – известные и определенные на промежутке $[0,T]$ функции, при любом $s \in \overline{1,n}$*

$$A_s = k_s h_s, \tag{4.3}$$

$k_s = colon(k_{1s}, k_{2s}, ..., k_{ns})$, $k_{is} \in R$, $h_s = colon(h_{s1}, h_{s2}, ..., h_{sn})$, $h_{sj} \in R$, $K = (k_1, k_2, ..., k_m)$ – $n \times m$ *постоянная матрица,* $rang(K) = m$;

*2. при любых $i, j \in \{1, ..., n\}$ выполняются соотношения*

$$i \ne j (h_i, k_j) = 0, \tag{4.4}$$

$$i = j (h_i, k_i) \ne 0, \tag{4.5}$$

$(\cdot,\cdot)$ *– скалярное произведение.*

## 5. Вычисление векторов $h_s$, $k_s$ удовлетворяющих соотношениям (4.4), (4.5)

Пусть матрица $A(t)$ определена равенством

$$A(t) = A_1 f_1(t) + A_2 f_2(t) + ... + A_m f_m(t), \tag{5.1}$$

в котором при любом $s \in \overline{1,m}$, $A_s = (a_{ij}^{(s)})_1^n$, $a_{ij}^{(s)}$ – постоянные действительные числа, $f_s(t)$ – непрерывная функция на сегменте $[0,T]$. Интерес представляет тот случай, когда $A_s$ - ненулевая матрица.

Пусть $s \in \overline{1,m}$ произвольное, но фиксированное число. Заметим, что $h_s k_s = (h_{is} k_{sj})_1^n$ матрица. Найдем условия, при которых выполняется равенство

$$(a_{ij}^{(s)})_1^n = (h_{is} k_{sj})_1^n. \tag{5.2}$$

Для простоты рассуждения предположим, что отличным от нуля является элемент $a_{11}^{(s)}$, тогда справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а 5.1.** *Для того чтобы существовали векторы $h_s$, $k_s$, удовлетворяющие равенству (5.2) необходимо и достаточно, чтобы для любых $i, j \in \overline{1,n}$ выполнялось равенство*

$$a_{11}^{(s)} a_{ij}^{(s)} = a_{i1}^{(s)} a_{1j}^{(s)}. \tag{5.3}$$

Предположим для определенности, что для любого $q \in \overline{1,m}$ ненулевым элементом матрицы $A_q$ является элемент $a_{11}^{(q)}$. Тогда на основании теоремы 5.1 получим справедливость равенства (5.2) при $s = q$. Следовательно, $k_{iq} = \frac{a_{i1}^{(q)} k_{1q}}{a_{11}^{(q)}}$. Таким образом, имеем равенства

$$k_{iq} = \frac{a_{i1}^{(q)} k_{1q}}{a_{11}^{(q)}}, h_{sj} = \frac{a_{1j}^{(s)}}{k_{1s}}. \tag{5.4}$$

Пусть $k_q^* = colon(a_{11}^q, a_{21}^q, ..., a_{n1}^q)$, $h_s^* = (a_{11}^s, a_{12}^s, ..., a_{1n}^s)$. Тогда из равенства (5.4) следует, что

$$k_q = \frac{k_{1q}}{a_{11}^{(q)}} k_q^*, h_s = \frac{1}{k_{1s}} h_s^*. \tag{5.5}$$

**Теорема 5.2.** *Для того чтобы векторы $k_q$, $h_s$ определенные равенством (5.5), удовлетворяли соотношениям (4.4), (4.5) необходимо и достаточно, чтобы при $(h_s^*, k_q^*) = 0$ при $q \neq s$ и $(h_s^*, k_s^*) \neq 0$.*

Матрицу $K^*$ определим равенством $K^* = (k_1^*, k_2^*, ..., k_m^*)$.

**Теорема 5.3.** *Для того чтобы $rangK = m$ $(K = (k_1, k_2, ..., k_m))$ необходимо и достаточно, чтобы $rangK^* = m$.*

**Теорема 5.4.** *Если выполнены условия теорем 5.1, 5.2, 5.3, то неособенная матрица $Y$ и диагональная матрица $C(t)$, удовлетворяющие равенству (4.1), определяются равенствами*

$$Y = (k_1, k_2, ..., k_m, y_{m+1}, ..., y_n),$$
$$C(t) = diag((h_1 k_1) f_1(t), (h_2 k_2) f_2(t), ..., (h_m k_m) f_m(t), \underbrace{0, ..., 0}_{n-m}).$$

Таким образом, приходим к выводу – теоремы 5.1, 5.2 и 5.3 полностью описывают множество матриц $A(t)$, определенных равенством (5.1), для которых существуют постоянная неособенная матрица $Y$ и диагональная матрица $C(t)$, удовлетворяющие равенству (4.1) при любом $t \in [0, T]$.

## Список литературы


1. Ретюнских Н.В. Критерий приведения матрицы к диагональному или треугольному виду с помощью постоянной матрицы // Известия РАЕН. Дифференциальные уравнения. – 2002. – №6. – С. 72-76.

2. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. – М.: Наука, 1972. – 574 с.


*Дата поступления 12.05.2010*

# Full controllability of linear systems the differential equations with variables coefficients

© I. S. Potapova[2]

**Abstract.** In article the problem of full controllability of linear system is studied the differential equations with management of a special kind, are found Necessary and sufficient conditions of full controllability, it is investigated Problem of reduction of a matrix with variables to a diagonal kind, necessary and sufficient conditions nonexceptional Transformations.

**Key Words:** Linear systems of the differential equations, The full controllability, fundamental matrix.

## References

1. Retjunskih N.V. Criterion of reduction of a matrix to diagonal or triangular To kind by means of a constant matrix//News of the Russian Academy of Natural Sciences. The differential equations. – 2002. – №6. – P. 72-76.

2. Li A.B., Markus L. Bases of the theory of the optimum control. – M.: Science, 1972. – 574 p.

[2]The post-graduate student of chair of Mathematics and technique of teaching of mathematical disciplines, Ryazan State University after S.A. Esenin, Ryazan; irina00000@yandex.ru.