УДК 517.9

Эллиптическая краевая задача, вырождающаяся на границе

© Д. И. Бояркин[1]

Аннотация. В работе рассматривается эллиптическая краевая задача с вырождением на границе. Получены априорные оценки для решения задачи. При исследовании используются методы функционального анализа и геометрии гладких многообразий.

Ключевые слова: эллиптические операторы, гладкое многообразие, преобразование Фурье, условие Лопатинского

1. Постановка задачи

Рассмотрим $(n-i)-$ мерные гладкие многообразия Γ^{n-i} , $i=1,...,k$, $k \leq n-1$, причем $\Gamma^{n-1} \supset \Gamma^{n-2} \supset ... \supset \Gamma^1 \supset \Gamma^0$. На каждом Γ^{n-i} при $k<n-1$ определим невырождающееся векторное поле с гладкими вещественными коэффициентами μ^i таким образом, чтобы это поле касалось Γ^{n-i} вдоль Γ^{n-i-1} , но не касалось Γ^{n-i-1} . На Γ^1 определим невырождающееся векторное μ^{n-1} с гладкими вещественными коэффициентами, которое может касаться Γ^1 в точке Γ^0 .

Предположим, что все многообразия Γ^{n-i} относятся к первому классу. Продолжим гладким образом поля $\mu^1,...,\mu^i$ в достаточно малую окрестность Ω^i многообразия Γ^{n-i-1} в G . Предположим, что в Ω^i поля $\mu^1,...,\mu^i$ линейно независимые, в этой окрестности их можно дополнить до базиса $\{\mu^1,...,\mu^i,...,\mu^n\}$.

Так как все Γ^{n-i} относятся к первому классу, то можно утверждать, что в G существует $(n-1)$ -мерное гладкое многообразие N^{n-1} , проходящее через Γ^{n-2} трансверсально к полю μ^1 , причем каждую точку из Ω^1 можно соединить с N^{n-1} интегральной кривой поля μ^1 . Далее, определим $(n-i)-$ мерные гладкие многообразия N^{n-i} , $i=2,...,k$ со следующими свойствами:

1. $N^{n-i} \in N^{n-i+1}$;
2. N^{n-i} проходит через Γ^{n-i-1} трансверсально к полю μ^i и каждую точку из N^{n-i+1} можно соединить с N^{n-i} интегральной кривой поля μ^i .

Заметим, что в окрестности точки Γ^0 многообразие N^1 будет являться внутренней нормалью к границе Γ области G , проведенной в точке Γ^0 .

Рассмотрим краевую задачу

$$Lu=f \tag{1.1}$$

в G,

$$\mu^1(x,D)u=\varphi^1, \tag{1.2}$$

на Γ^{n-1} ,

[1]Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н.П.Огарева, г. Саранск; uralsib3@saransk-com.ru.

$$\mu^i(x, D)u = \varphi^i, \tag{1.3}$$

на $\Gamma^{n-i}, i = 2, ..., k = n-1$,

где L - эллиптический оператор второго порядка с коэффициентами из класса $C^{3,\alpha}(\bar{G})$; $\mu^1(x, D)$- дифференцирование вдоль гладкого векторного поля μ^1 ; $\mu^i(x, D)$- дифференцирование вдоль гладкого векторного поля μ^i.

Замечание 1.1. *В локальной системе координат* $\{\mu^1, ..., \mu^i, ..., \mu^n\}$ *оператор* L *на* $N^{n-i} \bigcap \Omega^i$, $i = 1, ..., k-1$ *можно представить в виде*

$$L = L_i + \sum_{q=1}^{i} l_q^i \left(\mu^q \left(x, D\right)\right), \tag{1.4}$$

где L_i - эллиптический оператор второго порядка по $\mu^{i+1}, ..., \mu^n$; l_q^i - дифференциальный оператор первого порядка по переменным $\mu^q, ..., \mu^n$.

Замечание 1.2. *При* $k = n-1$ *многообразие* N^2, *проходящее через* Γ^1 *трансверсально к полю* μ^{n-1}, *будет иметь размерность равное 2.*

Так как не вырождающееся векторное поле μ^{n-1} по предположению имеет только вещественные коэффициенты, то условие Шапиро – Лопатинского выполняется на Γ^1 для операторов $L_{n-2}, \mu^{n-1}(x, D)$ даже в случае, когда поле μ^{n-1} касается кривой Γ^1 в точке Γ^0.

Замечание 1.3. *Если же* $\mu^{n-1}(x, D)$ *- оператор типа Коши – Римана, то есть* $\mu^{n-1}(x, D) = \mu_1^{n-1}(x)\frac{\partial}{\partial \nu} + i \cdot \mu_2^{n-1}\frac{\partial}{\partial \tau}$, *где* $i^2 = -1$, ν, τ *- единичные векторы нормали и касательной к* Γ^1, *то на* Γ^1 *для операторов* $L_{n-2}, \mu^{n-1}(x, D)$ *условие Шапиро – Лопатинского может не выполняться, в этом случае на оператор* $\mu^{n-1}(x, D)$ *накладывается дополнительное условие, а в точке касания* Γ^0 *необходимо задать значения функции* u.

Задача (1.1) – (1.2) - (1.3) – нетерова.

Теперь пусть $k < n-1$, то есть вместо условий (1.3) имеем

$$\mu^i(x, D)u = \varphi^i, \tag{1.5}$$

на $\Gamma^{n-i}, i = 2, ..., k < n-1$,

В этом случае на $^{n-k-1}$ дополнительно определяем

$$u = \varphi^{k+1}, \tag{1.6}$$

на Γ^{n-k-1},

Задача (1.1) – (1.2) – (1.5) – (1.6) - нетерова.

2. Вспомогательные построения и предложения

Определим многообразия $\bar{\Gamma}^{n-i} = \Gamma^{n-i} \backslash \Gamma^{n-(i+1)}$, для $i = 1, ..., k-1$ и $\bar{\Gamma}^{n-k} = \Gamma^{n-k}$. Многообразие, проходящее через $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$ трансверсально к полю μ^i, обозначим через $\bar{N}^{n-i}$. Заметим, что многообразия $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$, $\bar{N}^{n-i}$ имеют все свойства пунктов а) и б) в постановке задачи. Кроме того, отметим, что поле μ^i, определенное на Γ^{n-i}, не касается этого многообразия в точках $\bar{\Gamma}^{n-i}$.

Предложение 2.1. Для каждой точки P, принадлежащей многообразию $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$, $i = 1, ..., k-1$, существует система координат $z_1, ..., z_n$ с центром в этой точке и такая, что в некоторой ее окрестности:

1. Поля $\mu^1(x, D), ..., \mu^i(x, D)$ совпадают соответственно с полями
$$\frac{\partial}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial}{\partial z_i}.$$
2. Многообразие $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$, определяется уравнениями $z_1 = ... = z_i = z_n = 0$.
3. Многообразие $\bar{N}^{n-i}$, проходящее через $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$, описывается уравнениями $z_1 = ... = z_i = 0$.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Существует разбиение единицы*
$$\psi^1_{M+1}(x) + \sum_{i=2}^{k-1} \left(\psi^{i+1}_{M+1}(x) \cdot \left(\sum_{\tau=1}^{M} \psi^i_\tau(x) \right) \right) + \sum_{\tau=1}^{M} \psi^k_\tau(x) = 1, k = 2, ..., n-1, \tag{2.1}$$
такое, что $\psi^i_\tau \in C^\infty(\bar{G})$.

Причем $\psi^{i+1}_{M+1}(x) = 0$ в некоторой $d/2-$окрестности многообразия $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$, $i = 1, ..., k-1$, и равна 1 вне этой окрестности, а в носителе каждой из остальных функций ψ^i_τ определена система координат $z_1, ..., z_n$, удовлетворяющая условиям предложения 2.1 и $\mu^1(x, D)\psi^{i+1}_\tau = ... = \mu^i(x, D)\psi^{i+1}_\tau = 0$ в некоторой окрестности многообразия $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$.

З а м е ч а н и е 2.1. *При* $k = 1$ *получается разбиение единицы*
$$\psi_{M+1}(x) + \sum_{\tau=1}^{M} \psi_\tau(x) = 1, \tag{2.2}$$
причем $\psi_{M+1}(x) = 0$ *в окрестности многообразия* $^{n-2}$.

З а м е ч а н и е 2.2. *Из построения разбиения единицы* (2.1) *следует, что*
$$\begin{aligned} &Supp(\psi^1_{M+1}(x)) \bigcap ... \bigcap Supp\left(\psi^i_{M+1}(x) \cdot \left(\textstyle\sum_{\tau=1}^{M} \psi^{i-1}_\tau(x)\right)\right) \bigcap ... \bigcap \\ &\bigcap Supp\left(\textstyle\sum_{\tau=1}^{M} \psi^k_\tau(x)\right) = \emptyset. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Определим функции

1. $h^k_1(x) = \sum_{\tau=1}^{M} \psi^k_\tau(x)$, $h^i_1(x) = \psi^{i+1}_{M+1}(x)\left(\sum_{\tau=1}^{M} \psi^i_\tau(x)\right)$, $i = 2, ..., k-1$, $h^1_1(x) = \psi^1_{M+1}(x)$.

   Функция $h^i_1(x)$ будет равна 1 в некоторой $d/2-$окрестности многообразия $\bar{\Gamma}^{n-i}$ и равна 0 вне $d-$окрестности $\bar{\Gamma}^{n-i}$. То есть функция $h^i_1(x)$ будет являться срезающей функцией для многообразия $\bar{\Gamma}^{n-i}$, $i = 1, ..., k$.

2. $h^k(x) = \sum_{\tau=1}^{M} \psi_\tau^k(x)$, $h^i(x) = \left(\sum_{\tau=i}^{k} h_1^\tau(x)\right)$, $i = 2, ..., k-1$,

   $h^1(x) = \psi_{M+1}^1(x)$

   Функция $h^i(x)$ будет равна 1 в некоторой $d/2-$окрестности многообразия ${}^{n-i}$ и равна 0 вне $d-$окрестности Γ^{n-i}. То есть функция $h^i(x)$ будет являться срезающей функцией для многообразия ${}^{n-i}$, $i = 1, ..., k$.

Пусть U окрестность произвольной точки $P \in \bar{\Gamma}^{n-2}$ с достаточно малым диаметром d и $z_1, ..., z_n$ система координат, введенная в предложении 2.1. Так как $\bar{\Gamma}^{n-2}$ многообразие первого класса, то каждую точку окрестности U можно соединить с многообразием $\bar{N}^{n-1}$, описывающийся уравнением $z_1 = 0$, отрезком, параллельным оси $0z_1$, целиком лежащим в G и имеющим длину $\leq d$.

Л е м м а 2.1. *Для любого $\varepsilon_1 > 0$ найдется такое d, что если диаметр окрестности U равен d, функция $u \in H_s(G)$ при $s \geq 0$ и $u(x) = 0$ вне U, то*

$$\left\| \int_0^{z_1} u(\xi_1, z_2, ..., z_n) d\xi_1 \right\|_s \leq \varepsilon_1 \|u\|_s$$

Аналогичная лемма справедлива и для точки $P \in {}^{n-(i+1)}$, $i \leq k-1$. Опять рассмотрим окрестность U точки P достаточно малого диаметра d, в которой существует система координат $z_1, ..., z_n$ из предложения 2.1. Напомним, что в этой системе координат многообразия $\bar{N}^{n-i}$ и $\bar{\Gamma}^{n-(i+1)}$ описываются соответственно уравнениями $z_1 = ... = z_i = 0$ и $z_1 = ... = z_i = z_n = 0$. Обозначим через U^{n-i} пересечение окрестности U с $\bar{N}^{n-i}$, а через d_i - диаметр U^{n-i}. Заметим, что $d_i \leq d$.

Л е м м а 2.2. *Для любого $\varepsilon_i > 0$ найдется такое d_i, что если диаметр окрестности U^{n-i} точки $P \in {}^{n-(i+1)}$, $i \leq k-1$ равен d_i, функция $u \in H_s(G)$ при $s \geq 0$ и $u(x) = 0$ вне U^{n-i}, то*

$$\left\| \int_0^{z_i} u(0, ..., 0\xi_{i1}, z_{i+1}, ..., z_n) d\xi_i \right\|_s \leq \varepsilon_i \|u(0, ..., 0, z_i, ..., z_n\|_s.$$

Из лемм 2.1 и 2.2. следует

Л е м м а 2.3. *Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое d, что если диаметр окрестности U точки $P \in {}^{n-(i+1)}$, $i = 1, ..., k-1$ равен d, функция $u \in H_s(G)$ при $s \geq 1$ и $u(x) = 0$ вне U, то справедливо неравенство*

$$\|u\|_s \leq \varepsilon \left(\left\| \frac{\partial u}{\partial z_1} \right\|_s + \sum_{q=1}^{i-1} \left\| \frac{\partial u^q}{\partial z_{q+1}} \right\|_s^{U^{n-q}} \right) + \left\| u^i \right\|_s^{U^{n-i}},$$

где $u^q = u(0, ..., 0, z_{q+1}, ..., z_n)$, $u^i = u(0, ..., 0, z_{i+1}, ..., z_n)$, $U^{n-q} = U \bigcap \bar{N}^{n-q}$, $U^{n-i} = U \bigcap \bar{N}^{n-i}$.

3. Априорные оценки для решений краевой задачи

Т е о р е м а 3.1. *Если $u \in H_{s+1}(G)$, $d > 0$ - достаточно малое число и $s > \frac{3}{2}$, то существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от u, что выполняются оценки*

1. *при* $k = n - 1$

$$C^{-1} \left(\|u\|_s + \left\|\mu^1(x,D)h^2u\right\|_s + \sum_{i=2}^{k-1} \left(\sum_{q=1}^{i-1} \left\|\mu^{q+1}(x,D)h^{q+2}u\right\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^{i} \left\|h^{q+1}u\right\|_s^{N^{n-q}} \right)\right) \leq$$

$$\leq (\|f\|_{s-2} + \left\|\mu^1(x,D)h^2f\right\|_{s-2} + \sum_{i=2}^{k-1} \left(\sum_{q=1}^{i-1} \left\|\mu^{q+1}(x,D)h^{q+2}f\right\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^{i} \left\|h^{q+1}f\right\|_{s-2}^{N^{n-q}} \right) +$$

$$+ \|\varphi^1\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-1} + \|h^2\varphi^1\|_{s-\frac{1}{2}}^{n-1} + \textstyle\sum_{i=2}^{k-1}(\sum_{q=1}^{i-1}(\|\varphi^{q+1}\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-(q+1)} + \|h^{q+2}\varphi^{q+1}\|_{s-\frac{1}{2}}^{n-(q+1)}))+$$
$$+ \textstyle\sum_{i=2}^{k-1} \|\varphi^{i+1}\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-(i+1)} + \|u\|_0 \Big) \leq$$

$$\leq C \left(\|u\|_s + \left\|\mu^1(x,D)h^2u\right\|_s + \sum_{i=2}^{k-1} \left(\sum_{q=1}^{i-1} \left\|\mu^{q+1}(x,D)h^{q+2}u\right\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^{i} \left\|h^{q+1}u\right\|_s^{N^{n-q}} \right)\right),$$

где $f = Lu$ *в* G, $\varphi^i = \mu^i(x,D)u$ *на* $^{n-i}$.

2. *при* $k < n - 1$

$$C^{-1} \left(\|u\|_s + \left\|\mu^1(x,D)h^2u\right\|_s + \sum_{i=2}^{k} \left(\sum_{q=1}^{i-1} \left\|\mu^{q+1}(x,D)h^{q+2}u\right\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^{i} \left\|h^{q+1}u\right\|_s^{N^{n-q}} \right)\right) \leq$$

$$\leq (\|f\|_{s-2} + \left\|\mu^1(x,D)h^2f\right\|_{s-2} + \sum_{i=2}^{k} \left(\sum_{q=1}^{i-1} \left\|\mu^{q+1}(x,D)h^{q+2}f\right\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^{i} \left\|h^{q+1}f\right\|_{s-2}^{N^{n-q}} \right) +$$

$$+\left\|\varphi^1\right\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-1}+\left\|h^2\varphi^1\right\|_{s-\frac{1}{2}}^{n-1}+\sum_{i=2}^{k}(\sum_{q=1}^{i-1}(\left\|\varphi^{q+1}\right\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-(q+1)}+\left\|h^{q+2}\varphi^{q+1}\right\|_{s-\frac{1}{2}}^{n-(q+1)}))+\left\|\varphi^{k+1}\right\|_{s-\frac{3}{2}}^{n-(k+1)}+\|u\|_0\Big) \leq$$

$$\leq C \left(\|u\|_s + \left\|\mu^1(x,D)h^2u\right\|_s + \sum_{i=2}^{k-1} \left(\sum_{q=1}^{i-1} \left\|\mu^{q+1}(x,D)h^{q+2}u\right\|_s^{N^{n-q}} + \sum_{q=1}^{i} \left\|h^{q+1}u\right\|_s^{N^{n-q}} \right)\right),$$

где $f = Lu$ *в* G, $\varphi^i = \mu^i(x,D)u$ *на* $^{n-i}$, $\varphi^{k+1} = u$ *на* $^{n-(k+1)}$.

С л е д с т в и е 3.1. *Пространства решений однородных задач*

1. $Lu = 0$ *в* G, $\mu^1(x,D)u = 0$ *на* $^{n-1}$, $\mu^i(x,D)u = 0$, $i = 1,...,k$, $k = n - 1$, *на* $^{n-i}$.

2. $Lu = 0$ *в* G, $\mu^1(x,D)u = 0$ *на* $^{n-1}$, $\mu^i(x,D)u = 0$, $i = 1,...,k$, $k < n-1$, *на* $^{n-i}$. $\mu^{k+1}(x,D)u = 0$ *на* $^{n-k-1}$.

конечномерны

Следствие 3.2. *Обозначим через* $_s(G)$ *пространство функций с конечной нормой*

$$\|u\|_{s(G)} = \|u\|_s + \left\|\mu^1(h^2 u)\right\|_s + \sum_{i=2}^{k} \left\|\mu^i(h^{i+1}u)\right\|_s^{N^{n-(i-1)}},$$

а через $^{n-i}_s$, $i = 1,...,k-1$ *- пространства функций, определенных на* $^{n-i}$ *с конечной нормой*

$$\|u\|_{\underset{S}{n-i}} = \left\|h_1^i u\right\|_s^{n-i} + \left\|h^{i+1}u)\right\|_{s+1}^{n-i},$$

где h_1^i, h^i *- функции, определенные в предложении 2.2. Тогда область значений операторов*

1. $u \to (Lu\,,\ \mu^i(x,D)u\,,\ \mu^k(x,D)u\,)$, $k = n-1$, *действующего из* $_s(G)$ *в* $_{s-2}(G) \times^{n-1}_{s-\frac{3}{2}} \times ... \times^{n-(k-1)}_{s-\frac{3}{2}} \times H_{s-\frac{3}{2}}(^{n-k})$;

2. $u \to (Lu\,,\ \mu^i(x,D)u\,,\ u\,)$, $k < n-1$,*действующего из* $_s(G)$ *в* $_{s-2}(G) \times^{n-1}_{s-\frac{3}{2}} \times ... \times^{n-k}_{s-\frac{3}{2}} \times H_{s-\frac{1}{2}}(^{n-(k-1)})$

замкнута.

Список литературы

1. Agmon S., Douglies A., Nirenberg L. Estimates near boundary for elliptic differential equations satisfying general boundary conditions. –Comm. Pure Applied Math., 1959, 12, - p. 623-727.

2. Baderko E. Schauder estimates for oblique derivative problems. – C. r. Acad.sci. Ser. 1., 1998, 326, №12, 1377-1380.

3. Borrelli R. The singular, second order oblique derivative problem. –J. Math. and Mech., 1966, 51-81.

4. Егоров. Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – Наука, М. 1984.- 360 с.

5. Kohn J. J. Subellipticity of the ∂ - Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions. – Acta mathem., 1979, 142, 79-122.

6. M. Taylor. Pseudodifferential operators.- Princeton University Press Princeton, New Jersey, 1981. –p. 472.

Дата поступления 29.11.2009

The elliptic regional problem degenerating on border

© D.I. Boyarkin[2]

Abstract. In work the elliptic regional problem with degeneration on border is considered. Aprioristic estimations for the decision of a problem are received. At research methods of the functional analysis and geometry of smooth varieties are used.
Key Words: elliptic operators, smooth variety, transformation Fourier, condition Lopatinsky.

References

1. Agmon S., Douglies A., Nirenberg L. Estimates near boundary for elliptic differential equations satisfying general boundary conditions. –Comm. Pure Applied Math., 1959, 12, - p. 623-727.

2. Baderko E. Schauder estimates for oblique derivative problems. – C. r. Acad.sci. Ser. 1., 1998, 326, №12, 1377-1380.

3. Borrelli R. The singular, second order oblique derivative problem. –J. Math. and Mech., 1966, 51-81.

4. Егоров. Ю. В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – Наука, М. 1984.- 360 с.

5. Kohn J. J. Subellipticity of the ∂ - Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions. – Acta mathem., 1979, 142, 79-122.

6. M. Taylor. Pseudodifferential operators.- Princeton University Press Princeton, New Jersey, 1981. –p. 472.

[2]Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; uralsib3@saransk-com.ru.