

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ  
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  26  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  1

2024



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 26, № 1. 2024

DOI 10.15507/2079-6900.26.202401

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 26, NO. 1. 2024

DOI 10.15507/2079-6900.26.202401

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

# Журнал Средневолжского математического общества

## Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарева», 2024

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications, where basic scientific results of dissertations for the degrees of Doctor and Candidate of Sciences in scientific specialties and their respective branches of science should be published. List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Губайдуллин Ирек Марсович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

**Дерюгин Юрий Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ"(Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Золотых Николай Юрьевич** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных урав-

нений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Кузнецов Михаил Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

**Малышев Дмитрий Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

**Матус Петр Павлович** — член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математики и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, первый проректор ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сидоров Николай Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

**Старостин Николай Владимирович** — профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Aleksandr S. Andreev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Irek M. Gubaydullin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Nikolay Yu. Zolotykh** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Mikhail I. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

**Dmitry S. Malyshev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

**Petr P. Matus** — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Nikolay D. Morozkin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), President of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Olga V. Pochinka** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Petr V. Senin** — Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Lev A. Suharev** — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Nadezda G. Yarushkina** — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

**В. Е. Алексеев**, **Д. В. Захарова**

О линейных пространствах двудольных графов . . . . . 11

**О. В. Гермидер**, **В. Н. Попов**

Математическое моделирование упруго деформированных состояний тонких изотропных пластин с использованием многочленов Чебышева . . . 20

**С. В. Зелик**, **О. В. Починка**, **А. А. Ягилев**

О размерности Минковского некоторых инвариантных подмножеств динамических систем . . . . . 32

**Н. Д. Кузьмичев**

Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных . . . . . 44

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

---

**Л. В. Колегова**

О стабилизации движений трехзвенного робота-манипулятора с неполным измерением . . . . . 60

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

---

К 75-ЛЕТИЮ ВЛАДИМИРА ФЕДОРОВИЧА ТИШКИНА . . . . . 74

ПОЗДРАВЛЯЕМ С ЮБИЛЕЕМ ИРИНУ ПРОКОФЬЕВНУ РЯЗАНЦЕВУ . . . . . 75

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) . . . . . 78

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) . . . . . 82

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) . . . . . 86

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) . . . . . 92

Алфавитный указатель авторов . . . . . 96

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

<b>V. E. Alekseev</b> , <b>D. V. Zakharova</b>	
On linear spaces of bipartite graphs . . . . .	11
<b>O. V. Germider</b> , <b>V. N. Popov</b>	
Mathematical modeling of elastically deformed states of thin isotropic plates using Chebyshev polynomials . . . . .	20
<b>S. V. Zelik</b> , <b>O. V. Pochinka</b> , <b>A. A. Yagilev</b>	
On the Minkowski dimension of some invariant sets of dynamical systems . . .	32
<b>N. D. Kuzmichev</b>	
Application of the Fourier modulation analysis method to the problem of derivatives recovery . . . . .	44

---

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

<b>L. V. Kolegova</b>	
On the motion stabilization of a three-link robotic manipulator with incomplete measurement . . . . .	60

---

## MATHEMATICAL LIFE

---

TO THE 75TH ANNIVERSARY OF VLADIMIR TISHKIN . . . . .	74
CONGRATULATIONS TO IRINA RYAZANTSEVA ON HER ANNIVERSARY . . . . .	74
The rules of article design (in Russian) . . . . .	78
The rules of article design (in English) . . . . .	82
The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . .	86
The rules for article layout in the LaTeX system (in English) . . . . .	92
Author Index . . . . .	96

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202401.11-19

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.17

## О линейных пространствах двудольных графов

В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

**Аннотация.** В статье рассматриваются симметрические линейные пространства двудольных графов (СЛПДГ), т. е. множество двудольных графов с фиксированными долями, замкнутое относительно симметрической разности и перестановок вершин в каждой доле. В работе получено структурное описание всех СЛПДГ. Симметрические линейные пространства двудольных графов делят на тривиальные (четыре СЛПДГ) и нетривиальные. Нетривиальные, в свою очередь, подразделяют на два семейства: серия  $C$ , состоящая только из биполных графов (графов, являющихся дизъюнктивным объединением двух полных двудольных графов (крылья графа)) и серия  $D$ , состоящая из множества графов, у которых степени вершин в одной доле имеют одинаковую четность, а в другой могут быть любыми. Доказано, что любое СЛПДГ серии  $D$  совпадает с одним из девяти множеств, заданных четностями степеней вершин. Для СЛПДГ серии  $C$  (множество биполных графов) получено, что любое двустороннее СЛПДГ (т. е. содержащее графы, оба крыла которых имеют непустые доли) является пересечением множества всех биполных графов с множеством всех графов с четным числом ребер или каким-нибудь из пространств серии  $D$ .

**Ключевые слова:** граф, линейные пространства графов, двудольные графы, изоморфизм графов, симметрическая разность графов

**Для цитирования:** Алексеев В. Е., Захарова Д. В. О линейных пространствах двудольных графов // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 11–19. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.11-19>

Об авторах:

Алексеев Владимир Евгеньевич, доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1533-0697>

Захарова Дарья Владимировна, старший преподаватель кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8040-7164>, [darya.zakharova@itmm.unn.ru](mailto:darya.zakharova@itmm.unn.ru)

© В. Е. Алексеев, Д. В. Захарова



MSC2020 05C30, 05C60, 05C75

## On linear spaces of bipartite graphs

**V. E. Alekseev**, D. V. Zakharova*National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** The article considers symmetric linear spaces of bipartite graphs (SLSBG), i.e. the set of bipartite graphs with fixed lobes closed with respect to the symmetric difference and permutations of vertices in each lobe. The operation of symmetric difference itself is introduced in this work. The paper provides a structural description of all SLSBG. Symmetric linear spaces of bipartite graphs are divided into trivial (four SLSBG) and nontrivial. Nontrivial ones, in turn, are divided into two families. The first is  $C$ -series consisting only of bicomplete graphs, i.e. graphs that are a disjoint union of two complete bipartite graphs graph wings). The second family is  $D$ -series that includes graphs in which the degrees of vertices in one lobe have the same parity, and in the other lobe these degrees may be arbitrary. It is proved that every SLSBG of the  $D$ -series coincides with one of nine sets defined by the parity of the vertices' degrees. For the SLSBG of the  $C$ -series it is obtained that every two-sided SLSBG (i.e., containing graphs whose both wings have nonempty lobes) is the intersection of the set of all bicomplete graphs with the set of all graphs with an even number of edges or with any space of the  $D$ -series.

**Keywords:** graph, linear spaces of graphs, bipartite graph, graph isomorphism, symmetric difference of graphs

**For citation:** **V. E. Alekseev**, D. V. Zakharova. On linear spaces of bipartite graphs. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:1(2024), 11–19. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.11-19>

### *About the authors:*

**Vladimir E. Alekseev**, D.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1533-0697>

**Darya V. Zakharova**, Senior Lecturer, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603022, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-8040-7164>, [darya.zakharova@itmm.unn.ru](mailto:darya.zakharova@itmm.unn.ru)

## 1. Введение

Рассматриваются обыкновенные графы (неориентированные графы без петель и кратных ребер). Основную терминологию можно найти в [1–2]. В данной работе продолжается исследование симметрических линейных пространств графов, которое было начато в работах [3–4]. Рассматриваются множества графов, которые являются замкнутыми относительно сложения по модулю 2. Определение изоморфизма и операции суммы по модулю два для произвольных графов можно посмотреть, например, в [5–7]. В работе [4] были описаны все линейные пространства графов, замкнутые относительно изоморфизма (СЛПГ). В данной работе получен аналогичный результат для двудольных графов.

**V. E. Alekseev**, D. V. Zakharova. On linear spaces of bipartite graphs

**Определение 1.1.** Под двудольным графом понимается граф, множество вершин которого уже разбито на две доли  $A$  и  $B$ , а множество ребер – подмножество декартова произведения  $A \times B$ , т. е.  $G = (A, B, E)$ , где  $E \subseteq A \times B$ .

**Определение 1.2.** Двудольные графы  $G_1 = (A, B, E_1)$  и  $G_2 = (A', B', E_2)$  двудольно изоморфны, если существуют биекции  $f_1 : A \rightarrow A'$ ,  $f_2 : B \rightarrow B'$ , такие что  $(x_1, x_2) \in E_1$  тогда и только тогда, когда  $(f_1(x_1), f_2(x_2)) \in E_2$ .

Далее под изоморфизмом понимается двудольный изоморфизм.

В дальнейшем считаем, что одна доля двудольного графа является подмножеством множества  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_l\}$ , а другая – подмножеством множества  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_r\}$ . Множество всех таких графов обозначим через  $G(A, B)$ . Предполагаем, что  $l \geq 3$ ,  $r \geq 3$ . Ребро  $(a_i, b_j)$  будем кратко записывать как  $(i, j)$ , полагая, что первый элемент пары всегда есть индекс элемента из множества  $A$ , второй – из  $B$ . Будем использовать обозначения  $O_{l,r} = (A, B, \emptyset)$  и  $K_{p,q} = (X, Y, X \times Y)$ , где  $X = \{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ ,  $Y = \{b_1, b_2, \dots, b_q\}$ . Если  $G$  – двудольный граф, долями которого являются подмножества множеств  $A$  и  $B$ , то через  $GO$  обозначаем граф из  $G(A, B)$ , полученный добавлением к  $G$  отсутствующих вершин в качестве изолированных.

**Определение 1.3.** Сумма по модулю 2 двух двудольных графов с одинаковыми долями  $G_1 = (A, B, E_1)$  и  $G_2 = (A, B, E_2)$  есть граф  $G_1 \oplus G_2 = (A, B, (E_1 - E_2) \cup (E_2 - E_1))$ .

**Определение 1.4.** Множество двудольных графов с фиксированными долями  $A$  и  $B$  назовем симметрическим линейным пространством двудольных графов (СЛПДГ), если оно замкнуто относительно суммы по модулю 2 и двудольного изоморфизма.

Нужно отметить, что двудольные графы, изоморфные в обычном смысле, могут не быть двудольно изоморфными. Поэтому СЛПДГ, вообще говоря, не является симметрическим линейным пространством графов, как оно определено в [2]. В данной статье дается описание всех СЛПДГ.

Если  $G_1, \dots, G_k$  – графы из  $G(A, B)$ , то через  $[G_1, \dots, G_k]$  будем обозначать замыкание множества  $\{G_1, \dots, G_k\}$  относительно суммы по модулю 2 и переименования вершин в долях, т. е. минимальное СЛПДГ, содержащее все эти графы.

## 2. Предварительная классификация

Очевидно, все множество  $G(A, B)$ , множество  $\{O_{l,r}\}$ , и множество  $\{O_{l,r}, K_{l,r}\}$ , являются СЛПДГ. Легко также видеть, что сумма по модулю 2 двух графов, каждый из которых имеет четное число ребер, – тоже граф с четным числом ребер. Поэтому множество всех графов из  $G(A, B)$  с четным числом ребер, которое будем обозначать  $E_0$ , тоже есть СЛПДГ. Отметим, что не существует СЛПДГ, промежуточных между  $G(A, B)$  и  $E_0$ . Эти четыре СЛПДГ будем называть *тривиальными*. Остальные (нетривиальные) СЛПДГ разделим на два семейства.

**Определение 2.1.** Двудольный граф назовем *биполным*, если он является дизъюнктивным объединением двух полных двудольных графов (двудольный граф, у которого одна доля – пустое множество, тоже считается полным двудольным).

Таким образом, граф  $O_{l,r}$  – биполный. Граф  $K_{l,r}$  также считаем биполным. Если нетривиальное СЛПДГ состоит только из биполных графов, будем говорить, что оно принадлежит серии  $C$ , в противном случае – серии  $D$ . Далее эти два семейства рассматриваются по отдельности.

Полезной будет следующая структурная характеристика биполных графов. Семейство биполных двудольных графов – наследственный класс, т. е. замкнут относительно удаления вершин. Поэтому он может быть охарактеризован запрещенными графами – минимальными по отношению «быть порожденным подграфом» графами, не содержащимися в нем [8]. Покажем, что множество минимальных запрещенных подграфов состоит из двух графов.

Пусть  $F_1$  и  $F_2$  – двудольные графы с долями  $\{a_1, a_2\}$ ,  $\{b_1, b_2\}$  и множествами ребер соответственно  $\{(1, 1)\}$  и  $\{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}$ .

**Л е м м а 2.1.** *Двудольный граф является биполным тогда и только тогда, когда в нем нет порожденных подграфов, изоморфных  $F_1$  или  $F_2$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Очевидно, каждый из графов  $F_1, F_2$  не является биполным и это верно для любого графа, содержащего какой-нибудь из них в качестве порожденного подграфа. Следовательно, биполные графы не могут иметь порожденных подграфов, изоморфных  $F_1$  или  $F_2$ . Докажем обратное. Пусть  $G$  – граф, не являющийся пустым, в котором нет порожденных подграфов, изоморфных  $F_1$  или  $F_2$ . Рассмотрим его невырожденную (не являющуюся изолированной вершиной) компоненту связности. Допустим, эта компонента не является полным двудольным графом, тогда в ней есть две несмежные вершины из разных долей. В кратчайшем пути, соединяющем эти вершины, первые четыре вершины порождают подграф, изоморфный  $F_2$ , что невозможно. Следовательно, в графе  $G$  каждая невырожденная компонента связности есть полный двудольный граф. Допустим, имеются две невырожденные компоненты. Если бы существовала вершина, не принадлежащая этим компонентам, то, добавив к ней одну вершину из одной компоненты и две смежные вершины из другой, получили бы порожденный подграф  $F_1$ . Следовательно, весь граф состоит из этих двух компонент и, значит, он биполный. Если же невырожденная компонента только одна, то все изолированные вершины находятся в одной доле, иначе опять образовался бы порожденный подграф  $F_1$ . Значит, и в этом случае граф  $G$  биполный.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.**

### 3. Серия $D$ – множество графов, с одинаковыми степенями вершин в одной из долей

Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  – элементы множества  $\{0, 1, *\}$ . Обозначим через  $D(\alpha, \beta)$  множество всех графов из  $G(A, B)$ , у которых степени вершин в доле  $A$

- все четны, если  $\alpha = 0$ ;
- все нечетны, если  $\alpha = 1$ ;
- могут быть любыми, если  $\alpha = *$ ,

и аналогичный смысл имеет параметр  $\beta$  для доли  $B$ . Например,  $D(*, 1)$  есть множество графов, у которых все вершины в доле  $B$  имеют нечетные степени. Введем еще значение параметра  $eq$ , означающее, что в соответствующей доле степени всех вершин имеют одинаковую четность, и положим

- $D(0, eq) = D(0, 0) \cup D(0, 1)$ ;
- $D(eq, 0) = D(0, 0) \cup D(1, 0)$ ;
- $D(eq) = D(0, 0) \cup D(1, 1)$ ;
- $D(eq, eq) = D(0, 0) \cup D(0, 1) \cup D(1, 0) \cup D(1, 1)$ ;
- $D(eq, *) = D(0, *) \cup D(1, *)$ ;
- $D(*, eq) = D(*, 0) \cup D(*, 1)$ .

**Теорема 3.1.** Любое СЛПДГ серии  $D$  совпадает с одним из следующих множеств:  $D(0, 0)$ ,  $D(0, *)$ ,  $D(*, 0)$ ,  $D(0, eq)$ ,  $D(eq, 0)$ ,  $D(eq)$ ,  $D(eq, eq)$ ,  $D(eq, *)$ ,  $D(*, eq)$ .

То, что каждое из этих множеств является СЛПДГ, следует из того легко проверяемого факта, что при сложении графов по модулю 2 четности степеней вершин также складываются по модулю 2. Ни одно из них не состоит только из биполных графов, значит, все они относятся к серии  $D$ . Остаток этого раздела посвящен доказательству того, что других СЛПДГ серии  $D$  не существует.

**Лемма 3.1.** Любое СЛПДГ серии  $D$  содержит граф  $K_{2,2}O$ .

**Доказательство.** Рассмотрим какое-нибудь СЛПДГ, состоящее не только из биполных графов. По лемме 2.1 в нем имеется граф  $G$ , в котором множество  $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$  порождает подграф  $F_1$  или  $F_2$ . Допустим, что это  $F_1$ . Обозначим через  $G'$  граф, получаемый из графа  $G$  переименованием вершин посредством транспозиции  $(a_1, a_2)$ ,  $G''$  – посредством транспозиции  $(b_1, b_2)$ ,  $G'''$  – применением обеих транспозиций. Рассмотрим граф  $G^0 = G \oplus G' \oplus G'' \oplus G'''$ . Всякое ребро между вершинами, не принадлежащими множеству  $\{a_1, a_2, b_1, b_2\}$ , принадлежит каждому из четырех слагаемых, а ребро, соединяющее вершину из этого множества с вершиной вне него, принадлежит ровно двум слагаемым. Поэтому ни одно из таких ребер не содержится в графе  $G^0$ , следовательно,  $G^0 = K_{2,2}O$ . Это рассуждение дословно переносится на случай, когда в графе  $G$  имеется порожденный подграф, изоморфный  $F_2$ .  
Доказательство завершено.

**Лемма 3.2.**  $[K_{2,2}O] = D(0, 0)$ .

**Доказательство.** Из леммы 3.1 следует, что  $[K_{2,2}O] \subseteq D(0, 0)$ . Докажем обратное включение. Пусть  $G \in D(0, 0)$ . Если  $G$  не пустой, возьмем в нем вершину  $x_1 \in A$  ненулевой степени. Имеется не менее двух вершин, смежных с  $x_1$ , пусть  $y_1, y_2$  – такие вершины. Степень вершины  $y_1$  тоже не меньше 2, пусть  $x_2$  – смежная с ней вершина, отличная от  $x_1$ . Подграф, порожденный вершинами  $x_1, x_2, y_1, y_2$ , содержит не менее 3 ребер. Если граф  $G$  сложить с графом, полученным из  $K_{2,2}O$  таким переименованием вершин, чтобы эти два графа имели три одинаковых ребра, получим граф, имеющий меньше ребер, чем граф  $G$ . Повторяя эти действия, в конце концов получим пустой граф, т.е.  $G$  будет разложен в сумму графов, изоморфных  $K_{2,2}O$ .  
Доказательство завершено.

Приступаем к доказательству теоремы 3.1

**Доказательство.** Пусть  $X$  – СЛПДГ серии  $D$ , содержащее графы, имеющие вершины нечетной степени. В зависимости от того, как распределены такие вершины, рассмотрим следующие случаи (с точностью до симметрии между  $A$  и  $B$ ).

1. В каждой доле любого графа из  $X$  степени всех вершин имеют одинаковую четность.
  - 1.1. Во всех графах из  $X$  все вершины доли  $A$  имеют четные степени, а в доле  $B$  степени всех вершин имеют одинаковую четность, причем в  $X$  есть такой граф  $G$ , в котором степени всех вершин из доли  $B$  нечетны (т. е.  $G \in D(0, 1)$ ). Таким образом,  $X \subseteq D(0, eq)$ . Покажем, что на самом деле имеет место равенство. Напомним, что  $D(0, 0) \subseteq X$ , поэтому остается показать, что  $D(0, 1) \subseteq X$ . Пусть  $H$  – произвольный граф из  $D(0, 1)$ . Тогда  $G \oplus H = F \in D(0, 0)$ . Отсюда  $H = G \oplus F \in X$ .
  - 1.2. В каждом графе из  $X$  степени всех вершин имеют одинаковую четность, причем в  $X$  имеется граф  $G$ , у которого все степени нечетны. Таким образом,  $X \subseteq D(eq)$ . Обратное включение доказывается точно так же, как в п. 1.1, только  $D(0, 1)$  нужно заменить на  $D(1, 1)$ .
  - 1.3. В каждом графе из  $X$  степени всех вершин каждой доли имеют одинаковую четность (но степени вершин из разных долей могут быть разной четности), причем в  $X$  имеются графы  $G_1 \in D(0, 1)$  и  $G_2 \in D(1, 0)$ . Таким образом,  $X \subseteq D(eq, eq)$ . Как и в п. 1.1 доказываются включения  $D(0, 1) \subseteq X$ ,  $D(1, 0) \subseteq X$  и  $D(1, 1) \subseteq X$ , из которых следует  $D(eq, eq) \subseteq X$ .
2. В  $X$  имеется граф, у которого в одной из долей (может быть, в обеих) имеются вершины со степенями разной четности.
  - 2.1. Во всех графах из  $X$  все вершины доли  $A$  имеют четные степени, а в доле  $B$  могут быть вершины нечетной степени, причем в  $X$  есть такой граф, в котором доля  $B$  содержит вершины как четной, так и нечетной степени. Таким образом,  $X \subseteq D(0, *)$ . Покажем, что на самом деле имеет место равенство. Пусть  $G \in X$  – граф, в котором вершина  $b_1$  имеет четную степень, а вершина  $b_2$  – нечетную, а граф  $G'$  получен из  $G$  транспозицией  $(b_1, b_2)$ . Тогда в графе  $H = G \oplus G'$  в доле  $B$  все вершины, кроме  $b_1$  и  $b_2$ , изолированные, а вершины  $b_1$  и  $b_2$  имеют одинаковые окрестности и нечетные степени. Складывая этот граф с несколькими графами, изоморфными графу  $K_{2,2}O$  (принадлежащему, напомним, множеству  $X$ ), можно получить граф  $K_{2,1}O$ , который, таким образом, содержится в  $X$ . Очевидно, любой граф из  $D(0, *)$  раскладывается в сумму графов, изоморфных  $K_{2,1}O$ . Следовательно,  $D(0, *) \subseteq X$ .
  - 2.2. В каждом графе из  $X$  степени всех вершин доли  $A$  имеют одинаковую четность и в  $X$  имеется граф  $G_1$ , у которого эти степени нечетны, и граф  $G_2$ , у которого в доле  $B$  есть вершины со степенями разной четности. Таким образом,  $X \subseteq D(eq, *)$ . Включение  $D(0, *) \subseteq X$  доказывается точно так же, как в п. 2.1. Пусть  $H \in D(1, *)$ . Тогда  $H \oplus G_1 = F \in D(0, *)$ , отсюда  $H = G_1 \oplus F \in X$ .
  - 2.3. В  $X$  имеется граф  $G_1$ , у которого в доле  $A$  есть вершины со степенями разной четности, и граф  $G_2$ , у которого в доле  $B$  есть вершины со степенями разной четности. Как в п. 2.1. доказывается, что  $X$  содержит графы  $K_{1,2}O$  и  $K_{2,1}O$ . Легко видеть, что из этих двух графов можно «собрать» любой граф с четным числом ребер. Но тогда либо  $X = E0$  либо  $X = G(A, B)$ , в любом случае  $X$  не принадлежит серии  $D$ .

Доказательство завершено.

Отметим, что среди множеств, упоминаемых в формулировке теоремы 3.1, могут быть одинаковые. Например, если  $l$  четно, а  $r$  нечетно, то  $D(eq) = D(0, eq) = D(0, 0)$ ,  $D(eq, eq) = D(eq, 0)$ , а если оба параметра нечетны, то  $D(0, eq) = D(eq, 0) = D(0, 0)$ ,  $D(eq, eq) = D(eq)$ .

#### 4. Серия $C$ – биполные графы

Два полных двудольных подграфа, составляющих биполный граф, будем называть его *крыльями*. Сумма двух биполных графов – всегда биполный граф, так что множество всех биполных графов из  $G(A, B)$  образует СЛПДГ, его будем обозначать  $2C$ . В нем есть два очевидных подпространства:  $C(A)$  состоит из всех биполных графов, у которых у одного из крыльев одной из долей является все множество  $B$  (а у второго крыла, следовательно, одна доля пустая), аналогично определяется  $C(B)$  (граф  $K_{l,r}$  принадлежит обоим). Легко видеть, что у  $C(A)$  есть единственное нетривиальное подпространство  $C(A, 0)$ , состоящее из всех графов множества  $C(A)$ , у которых степени всех вершин из  $B$  четны, аналогично у  $C(B)$ . Далее рассмотрим другие подпространства пространства  $2C$ . Их будем называть *двусторонними*.

**Теорема 4.1.** Любое двустороннее СЛПДГ является пересечением  $2C$  с  $E_0$  или каким-нибудь из пространств серии  $D$ .

**Лемма 4.1.** Каждое двустороннее СЛПДГ содержит графы  $K_{2,r}O$  и  $K_{l,2}O$ .

**Доказательство.** Пусть  $G$  – биполный граф, у которого оба крыла имеют непустые доли в множестве  $A$ , причем вершины  $a_1$  и  $a_2$  принадлежат разным крыльям. Пусть  $G'$  – граф, полученный из  $G$  транспозицией этих вершин. Тогда  $G \oplus G' = K_{2,r}O$ . Аналогично получается  $K_{l,2}O$ .

Доказательство завершено.

Обозначим через  $K_{i,j}^+$  биполный граф, одним из крыльев которого является граф  $K_{i,j}$ .

**Лемма 4.2.** Каждое двустороннее СЛПДГ содержит графы  $K_{2p,r-2q}^+$  для всех  $p \leq l/2$ ,  $q \leq r/2$ .

**Доказательство.** Пусть  $G_i$  – граф, полученный из  $K_{2,r}O$  переименованием вершин в соответствии с транспозициями  $(a_1, a_{2i-1})$ ,  $(a_2, a_{2i})$ , а  $H_i$  получается из  $K_{l,2}O$  в соответствии с транспозициями  $(b_1, b_{2i-1})$ ,  $(b_2, b_{2i})$ . Тогда  $G_1 \oplus \dots \oplus G_p \oplus H_1 \oplus \dots \oplus H_q = K_{2p,r-2q}^+$ .

Доказательство завершено.

Докажем теорему 4.1

**Доказательство.** Рассмотрим три случая в зависимости от четности чисел  $l$  и  $r$ . Пусть  $X$  – двустороннее СЛПДГ.

1.  $l$  и  $r$  четны. Из леммы 4.2 следует, что  $X$  содержит все биполные графы, у которых степени всех вершин четны. Если в  $X$  нет графов с нечетными степенями, то  $X = 2C \cap D(0, 0)$ . Заметим, что  $X$  не может содержать графов, у которых в одной доле есть вершины со степенями разной четности. Поэтому, придерживаясь плана, примененного в доказательстве теоремы 3.1, достаточно рассмотреть только пункт 1 этого плана. Все рассуждения, проведенные при доказательстве этого

пункта в теореме 3.1, почти буквально переносятся на рассматриваемый случай и мы их опускаем. Результатом являются множества:  $2C \cap D(0, eq)$ ,  $2C \cap D(eq, 0)$ ,  $2C \cap D(eq)$ ,  $2C \cap D(eq, eq)$ , причем последнее совпадает с  $2C$ .

- $l$  чётно,  $r$  нечётно. В этом случае в графах из  $X$  все вершины доли  $B$  имеют одинаковую чётность. Значит,  $X \subseteq 2C \cap (D(*, 0) \cup D(*, 1))$ . Из леммы 4.2 следует, что  $2C \cap D(*, 0) \subseteq X$ . Если  $X \cap D(*, 1) \neq \emptyset$ , то точно так же, как в доказательстве п. 1.1 теоремы 3.1, доказывается, что  $2C \cap D(*, 1) \subseteq X$ . Таким образом, в этом случае имеются два СЛПГ:  $2C \cap D(*, 0)$  и  $2C \cap D(*, eq)$ .
- $l$  и  $r$  нечётны. В этом случае множество  $2C$  есть объединение двух подмножеств:  $C_1$  состоит из биполных графов, у которых в каждом крыле одна доля содержит чётное число вершин, другая – нечётное, а  $C_2$  – из тех, у которых в одном крыле обе доли имеют чётную мощность, в другом нечётную. Заметим, что  $C_1 = 2C \cap E_0$ . Положим  $X_1 = X \cap C_1$ ,  $X_2 = X \cap C_2$ . Из леммы 4.2 следует, что  $X_1 = C_1$ . Нетрудно проверить, что сумма по модулю 2 любых двух графов из  $C_2$  принадлежит  $C_1$ . Допустим,  $X_2 \neq \emptyset$ ,  $G \in X_2$ , а  $H$  – любой граф из  $C_2$ . Тогда  $G \oplus H = F \in C_1 \subseteq X$ , отсюда  $H = G \oplus F \in X$ . Таким образом, в этом случае  $X = 2C$ .

Доказательство завершено.

**Благодарности.** Результаты данной работы были получены несколько лет назад совместно с В. Е. Алексеевым, ушедшим из жизни в 2020 г. Я выражаю огромную благодарность Владимиру Евгеньевичу за постановку задачи и научное руководство. Его постоянная поддержка была очень важна на протяжении всего процесса написания статьи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. М., 1990. 384 с.
- Зыков А. А. Основы теории графов. М.: Наука, 1987. 383 с.
- Алексеев В. Е., Захарова Д. В. О симметрических пространствах графов // Дискретный анализ и исследование операций. 2007. Т. 14, № 1. С. 21–26.
- Захарова Д. В. Симметрические линейные пространства графов // Дискретная математика. 2011. Т. 23, № 2. С. 104–107. DOI: <https://doi.org/10.1515/dma.2011.019>
- Алексеев В. Е., Таланов В. А. Графы. Модели вычислений. Алгоритмы. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2005. 308 с.
- Алексеев В. Е., Таланов В. А. Графы и алгоритмы. Структуры данных. Модели вычислений. М.: ИНТУИТ, 2006. 319 с.
- Алексеев В. Е., Захарова Д. В. Теория графов. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. ун-та им. Н. И. Лобачевского, 2018. 118 с.

8. Алексеев В. Е. Исследование количественных и сложностных характеристик наследственных классов графов : дис. на соиск. . . . д-ра физ.-мат. наук. Н. Новгород, 2002. 113 с.

*Поступила 11.01.2024; доработана после рецензирования 29.01.2024;  
принята к публикации 27.02.2024*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. V. A. Emelichev, O. I. Melnikov, V. I. Sarvanov, R. I. Tyshkevich, *Lectures on graph theory*, Nauka Publ., Moscow, 1990 (In Russ), 384 p.
2. A. A. Zykov, *Basics of graph theory*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ), 383 p.
3. V. E. Alekseev, D. V. Zakharova, "Symmetric spaces of graphs", *Discrete analysis and operations research*, **14**:1 (2007), 24-26 (In Russ).
4. D. V. Zakharova, "Symmetric linear spaces of graphs", *Discrete Mathematics and Applications*, **23**:2 (2011), 104-107 (In Russ). DOI: <https://doi.org/10.1515/dma.2011.019>
5. V. T. Alekseev, V. A. Talanov, *Graphs. Computing models. Algorithms*, Nizhny Novgorod St. Univ. Publ., 2005 (In Russ).
6. V. E. Alekseev, V. A. Talanov, *Graphs and algorithms. Data structures. Computation models.*, M. INTUIT, 2006 (In Russ).
7. V. E. Alekseev, D. V. Zakharova, *Graph theory*, Nizhny Novgorod St. Univ. Publ., 2018 (In Russ).
8. V. E. Alekseev, *Investigation of quantitative and complexity characteristics of hereditary graph classes*, Doctoral dissertation (Phys.-Math), Nizhny Novgorod, 2002 (In Russ).

*Submitted 11.01.2024; Revised 29.01.2024; Accepted 27.02.2024*

*The author have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.*

DOI 10.15507/2079-6900.26.202401.20-31

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

## Математическое моделирование упруго деформированных состояний тонких изотропных пластин с использованием многочленов Чебышева

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

ФГАОУ ВО «Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова» (г. Архангельск, Российская Федерация)

**Аннотация.** В данной работе предложен метод получения решения неоднородного бигармонического уравнения в задаче о математическом моделировании упруго деформированных состояний тонких изотропных прямоугольных пластин с использованием системы ортогональных многочленов Чебышева первого рода. Метод основан на нахождении решения исходного бигармонического уравнения в виде конечной суммы ряда Чебышева по каждой независимой переменной в сочетании с матричными преобразованиями и свойствами многочленов Чебышева. Задача рассматривается для случая, когда на пластину действует поперечная нагрузка, а в качестве граничных условий используется шарнирное закрепление по краям пластины. Используя экстремумы и нули многочленов Чебышева первого рода в качестве точек коллокации, краевая задача сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов при разложении искомого решения по этим многочленам. Представлены результаты расчетов с использованием предложенного метода. Как показало сравнение, полученные результаты с высокой степенью точности совпадают с аналогичными результатами, полученными при использовании аналитических решений, приведенных в работе. В статье также представлены результаты расчетов с использованием предложенного метода в случае, когда два противоположных края пластины защемлены, а два шарнирно закреплены. Проведено сравнение с аналогичными результатами моделирования напряженно-деформированного состояния прямоугольных пластин, которые представлены в открытой печати.

**Ключевые слова:** неоднородное бигармоническое уравнение, многочлены Чебышева, упругая деформация тонких изотропных пластин

**Для цитирования:** Гермидер О. В., Попов В. Н. Математическое моделирование упруго деформированных состояний тонких изотропных пластин с использованием многочленов Чебышева // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 20–31. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.20-31>

*Об авторах:*

**Гермидер Оксана Владимировна**, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры инженерных конструкций, архитектуры и графики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, ул. Набережная Северной Двины, д. 17), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2112-805X>, o.germider@narfu.ru

**Попов Василий Николаевич**, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры высшей и прикладной математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова (163002, Россия, г. Архангельск, ул. Набережная Северной Двины, д. 17), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0803-4419>, v.popov@narfu.ru

© О. В. Гермидер, В. Н. Попов



MSC2020 35Q20

# Mathematical Modeling of Elastically Deformed States of Thin Isotropic Plates Using Chebyshev Polynomials

O. V. Germider, V. N. Popov

*Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov*

**Abstract.** In this paper a method for solving an inhomogeneous biharmonic equation while modeling elastically deformed states of thin isotropic rectangular plates using a system of orthogonal Chebyshev polynomials of the first kind is proposed. The method is based on representation of a solution to the initial biharmonic equation as a finite sum of Chebyshev series by each independent variable in combination with matrix transformations and properties of Chebyshev polynomials. The problem is examined for the case when a transverse load acts on the plate, and the hinge fastening along the edges of the plate is taken as boundary conditions. Using the extremes and zeros of Chebyshev polynomials of the first kind as collocation points, the boundary value problem is reduced to a system of linear algebraic equations. Decomposition coefficients of desired function with respect to Chebyshev polynomials act as unknowns in this system. As the comparison showed, the results obtained by this method with a high degree of accuracy coincide with similar results derived using analytical approach that are given in the article. The paper also presents the results of calculations using the proposed method in the case when two opposite edges of the plate are pinched and two others are pivotally fixed. The comparison with similar results of modeling the stress-strain states of rectangular plates which are presented in the open sources is carried out.

**Keywords:** inhomogeneous biharmonic equation, Chebyshev polynomials, deformation of a thin isotropic plate

**For citation:** O. V. Germider, V. N. Popov. Mathematical Modeling of Elastically Deformed States of Thin Isotropic Plates Using Chebyshev Polynomials. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:1(2024), 20–31. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.20-31>

*About the authors:*

**Oksana V. Germider**, Ph.D. (Phys. and Math.), Associate Professor of the Department of Engineering Structures, Architecture and Graphics, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov (17 Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk 163002, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2112-805X>, [o.germider@narfu.ru](mailto:o.germider@narfu.ru)

**Vasily N. Popov**, D.Sci. (Phys. and Math.), Professor of the Department of Higher and Applied Mathematics, Northern (Arctic) Federal University named after M. V. Lomonosov (17 Severnaya Dvina Emb., Arkhangelsk 163002, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0803-4419>, [v.popov@narfu.ru](mailto:v.popov@narfu.ru)

## 1. Введение

Определение напряженно-деформированного состояния изотропных пластин под действием поперечных нагрузок в рамках теории Кирхгофа–Лява основывается на решении бигармонического уравнения Софи Жермен–Лагранжа [1]. Аналитическое решение этого уравнения при граничных условиях шарнирного опирания, защемления и

свободного края пластин можно получить лишь в ограниченных случаях, что приводит к необходимости разработки эффективных методов решения таких краевых задач. Так, в [2–4] для получения решения краевых задач использован проекционно-сеточный метод коллокации и наименьших квадратов, в [5–6] – спектральные методы, в [7–8] – методы конечных элементов и разностей, соответственно, [9] – метод сплайн-коллокации, в [10] решение построено в виде рядов по собственным функциям Папковича–Фадля. В связи с трудностью достижения требуемой степени детализации области интегрирования, что предполагает решение систем линейных уравнений очень высокого порядка с неразрезанной матрицей [11], проблема поиска решений бигармонических уравнений, к которым могут быть сведены задачи моделирования деформаций тонких пластин, продолжает оставаться актуальной. При этом, как отмечено в [3–4], построение их решения вызывает ряд трудностей, связанных с наличием в эллиптических уравнениях производных четвертого порядка, оказывающих существенное влияние на обусловленность исходных краевых задач. Исследования в этом направлении способствуют разработке универсальных высокоточных методов, которые могут быть применены к решению дифференциальных уравнений с частными производными эллиптического типа, возникающих при моделировании процессов в механике деформируемого твердого тела, в частности при описании упругопластических деформирований нанопластин [12].

В представленной работе для моделирования деформаций изотропных тонких упругих пластин прямоугольной формы предложен метод с использованием полиномиальной аппроксимации Чебышева. Решение неоднородного бигармонического уравнения записывается в виде усеченного ряда по ортогональным многочленам Чебышева первого рода для каждой переменной в двумерной области. Коэффициенты в этом разложении искомой функции находятся с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений, при этом в качестве точек коллокации выбраны точки экстремума и нули многочленов Чебышева. Следует заметить, что за последнее время метод коллокации с использованием многочленов Чебышева показал свою эффективность и универсальность при решении ряда краевых задач механики сплошных сред [13–14]. В отличие от методов конечных разностей и конечных элементов скорость сходимости спектральных методов ограничена только регулярностью интерполируемой функции [6], в случае использования полиномов Чебышева в качестве базисных функций и точек коллокации в нулях или точках экстремума этих полиномов наблюдается устойчивость к ошибкам округления [13].

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим задачу статического изгиба изотропной тонкой упругой прямоугольной пластины со стенками расположенными в плоскостях  $x = 0$ ,  $x = d_1$ ,  $y = 0$  и  $y = d_2$  декартовой системы координат  $Oxyz$  в рамках теории Кирхгофа–Лява. В этом случае прогиб пластины  $\omega(x, y)$  будем описывать на основе бигармонического уравнения Софи Жермен–Лагранжа, которое запишем в виде [1]:

$$\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (2.1)$$

где  $q(x, y)$  – поперечная нагрузка;  $D = Eh^3/(12(1 - \nu^2))$  – цилиндрическая жесткость пластины;  $h$  – толщина пластины;  $E$  – модуль Юнга;  $\nu$  – коэффициент Пуассона.

В качестве граничного условия используем шарнирное закрепление [1]:

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = 0, \quad x = 0, d_1, \quad (2.2)$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0, d_2. \quad (2.3)$$

Получим решение поставленной краевой задачи с использованием многочленов Чебышева первого рода.

### 3. Решение краевой задачи

Представляем функцию  $\omega(x, y)$ , где  $x \in [0, d_1]$  и  $y \in [0, d_2]$ , в виде частичной суммы ряда полиномов Чебышева первого рода  $\{T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i), (j_i = \overline{0, n_i})\}$  [14] по каждой переменной  $x_i \in [-1, 1]$  ( $n_i \in \mathbb{N}, i = 1, 2$ ):

$$x_1 = \frac{2}{d_1}x - 1, \quad x_2 = \frac{2}{d_2}y - 1.$$

В результате получим

$$w(x, y) = \sum_{\substack{k_i=0 \\ i=1,2}}^{n_i} a_{k_1 k_2} T_{k_1}(x_1) T_{k_2}(x_2) = \mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \mathbf{A}, \quad (3.1)$$

где  $\mathbf{T}_i(x_i)$  – матрица-строка размером  $1 \times n'_i$  ( $n'_i = n_i + 1, i = 1, 2$ ):

$$\mathbf{T}_i(x_i) = (T_0(x_i) T_1(x_i) \dots T_{n_i-1}(x_i) T_{n_i}(x_i));$$

$\mathbf{A}$  – матрица-столбец, имеющая размер  $n'_1 n'_2 \times 1$ , элементами которой являются коэффициенты  $a_{k_1 k_2}$  в разложении (3.1):

$$\mathbf{A} = (a_{00} a_{01} \dots a_{n_1 n_2-1} a_{n_1 n_2})^T;$$

знаком  $\otimes$  в (3.1) обозначено тензорное умножение двух матриц [15].

Выберем в бигармоническом уравнении (2.1) в качестве точек коллокации для каждой введенной переменной  $x_i$  точки экстремума многочлена  $T_{n_i}(x_i)$  [14]:

$$x_{i, k_i} = \cos\left(\frac{\pi(n_i - k_i)}{n_i}\right), \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (3.2)$$

При подстановке точек (2.1) в  $T_{j_i}(x_i) = \cos(j_i \arccos x_i)$  получим:

$$T_{j_i}(i, x_{k_i}) = \cos\left(\frac{\pi j_i(n_i - k_i)}{n_i}\right), \quad j_i, k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (3.3)$$

Производную  $\mathbf{T}_i(x_i)$  по переменной  $x_i$  запишем в виде произведения [16]

$$\frac{d\mathbf{T}_i}{dx_i} = \mathbf{T}_i \mathbf{J}_i, \quad (3.4)$$

где  $\mathbf{J}_i$  – верхнетреугольная матрица размерности  $n'_i \times n'_i$

$$J_{i,j_1 j_2} = \begin{cases} j_2, & j_1 = 0, j_2 \text{ неч.}, \\ 2j_2 & j_1 > 0, j_2 - j_1 > 0, j_2 - j_1 \text{ неч.} \end{cases}$$

Здесь и ниже нумерацию строк и столбцов осуществляем с нуля. Вторую и четвертую производную  $\mathbf{T}_i(x_i)$  по каждой переменной  $x_i$  находим, соответственно, как

$$\frac{d^j \mathbf{T}_i}{dx_i^j} = \mathbf{T}_i \mathbf{J}_i^j, \quad j = 2, 4; i = 1, 2. \quad (3.5)$$

Подставляя (3.1) и (3.2) в (2.1) и используя (3.3)-(3.5), приходим к системе линейных  $n'_1 n'_2$ -уравнений, в которой согласно граничным условиям (2.2) и (2.3) осуществляем замену уравнений в точках, для которых  $x_i = x_{i,0}$  и  $x_i = x_{i,n_i}$ , на уравнения

$$\mathbf{T}_1(x_{1,0}) \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{T}_1(x_{1,n_1}) \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \mathbf{A} = 0, \quad (3.6)$$

$$\mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_{2,0}) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{T}_1(x_1) \otimes \mathbf{T}_2(x_{2,n_2}) \mathbf{A} = 0, \quad (3.7)$$

а в точках  $x_{i,1}$  и  $x_{i,n_i-1}$  – на уравнения

$$\mathbf{T}_1(x_{1,0}) \mathbf{J}^2 \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{T}_1(x_{1,n_1}) \mathbf{J}^2 \otimes \mathbf{T}_2(x_2) \mathbf{A} = 0, \quad (3.8)$$

$$\mathbf{T}_1(x_1) \otimes (\mathbf{T}_2(x_{2,0}) \mathbf{J}^2) \mathbf{A} = 0, \quad \mathbf{T}_1(x_1) \otimes (\mathbf{T}_2(x_{2,n_2}) \mathbf{J}^2) \mathbf{A} = 0. \quad (3.9)$$

Полученная таким образом система линейных  $n'_1 n'_2$ -уравнений в матричной форме имеет вид

$$\mathbf{B} \mathbf{A} = \mathbf{F}, \quad \mathbf{B} = \sum_{i=1}^5 \mathbf{B}_i, \quad (3.10)$$

где  $\mathbf{B}_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) – квадратные матрицы размером  $n'_1 n'_2 \times n'_1 n'_2$ : первые три из них получены из бигармонического уравнения (2.1) в точках (3.2) за исключением  $x_{i,0}$ ,  $x_{i,1}$ ,  $x_{i,n_i-1}$  и  $x_{i,n_i}$ , соответствующие им строки матриц нулевые; матрицы  $\mathbf{B}_4$  и  $\mathbf{B}_5$  строятся из граничных условий (2.2) и (2.3), ненулевые строки матрицы  $\mathbf{B}_4$  соответствуют крайним узлам  $x_{i,0}$  и  $x_{i,n_i}$ , для матрицы  $\mathbf{B}_5$  – узлам  $x_{i,1}$  и  $x_{i,n_i-1}$ ;  $\mathbf{F} = (f_{01} f_{02}, \dots, f_{n_1 n_2})^T$  – матрица-столбец размера  $n'_1 n'_2 \times 1$  с элементами  $f_{k_1 k_2} = q(x(x_{1,k_1}), y(x_{2,k_2})) / D$  за исключением нулевых элементов в крайних узлах. Для  $\mathbf{B}_i$  ( $i = \overline{1,3}$ ) соответственно имеем

$$\mathbf{B}_1 = 16d_1^{-4} \mathbf{G}_1'' \mathbf{J}_1^4 \otimes \mathbf{G}_2'', \quad \mathbf{B}_3 = 16d_2^{-4} \mathbf{G}_1'' \otimes (\mathbf{G}_2'' \mathbf{J}_2^4),$$

$$\mathbf{B}_2 = 32(d_1 d_2)^{-2} \mathbf{G}_1'' \mathbf{J}_1^2 \otimes (\mathbf{G}_2'' \mathbf{J}_2^2).$$

Здесь  $\mathbf{G}_i$  ( $i = 1, 2$ ) – квадратные матрицы размером  $n'_i \times n'_i$ , в которых  $k_i$ -строки равны соответственно  $\mathbf{T}_i(x_{i,k_i})$  ( $k_i = \overline{0, n_i}$ ). Двойной штрих у матриц  $\mathbf{G}_i''$  ( $i = 1, 2$ ) означает, что первые две строки и последние две строки нулевые, остальные строки такие же, как у матриц  $\mathbf{G}_1$  и  $\mathbf{G}_2$ . Заметим, что для заполнения матриц  $\mathbf{G}_1''$  и  $\mathbf{G}_2''$  необходимо вычислить элементы их верхних левых четвертей, остальные ненулевые элементы восстанавливаются путем умножения на  $-1$  в соответствующей степени из полученных. Если  $n_i$  нечетное, то для элементов их верхних правых четвертей имеем  $G_{i,k_i n_i - j_i} = G_{i,k_i j_i} (-1)^{n_i - k_i}$ , для элементов их нижних левых четвертей –  $G_{i,n_i - k_i j_i} = G_{i,k_i j_i} (-1)^{j_i}$ , для элементов их нижних правых четвертей –

$G_{i,n_i-k_i n_i-j_i} = G_{i,k_i j_i} (-1)^{j_i+k_i} (k_i, j_i = \overline{2, \lceil n_i/2 \rceil}, i = 1, 2)$ . Здесь квадратные скобки введены для обозначения целой части числа. Если  $n_i$  четное, то дополнительно  $G_{i,n_i/2 2j_i} = (-1)^{j_i}$ ,  $G_{i,2j_i n_i/2} = (-1)^{j_i+n_i/2}$  ( $j_i = \overline{2, n_i/2}, i = 1, 2$ ). Для  $\mathbf{B}_i$  ( $i = 4, 5$ ) из (3.6)-(3.9) получаем

$$\mathbf{B}_4 = \mathbf{G}_3 \otimes \mathbf{G}_2 + \mathbf{G}_1 \otimes \mathbf{G}_4,$$

$$\mathbf{B}_5 = 4d_1^{-2} \mathbf{G}_5 \mathbf{J}_1^2 \otimes \mathbf{G}_2 + 4d_2^{-2} \mathbf{G}_1 \otimes (\mathbf{G}_6 \mathbf{J}_2^2),$$

Здесь  $\mathbf{G}_i$  ( $i = \overline{3, 6}$ ) – квадратные матрицы размером  $n'_i \times n'_i$ : в  $\mathbf{G}_3$  и  $\mathbf{G}_4$  только первые и последние строки ненулевые и равны соответствующим строкам матриц  $\mathbf{G}_j$  ( $j = 1, 2$ ), в  $\mathbf{G}_5$  и  $\mathbf{G}_6$  – вторые и предпоследние строки.

Для приближения матрицы  $\mathbf{B}$  в (3.10) к разреженной матрице можно воспользоваться свойствами конечных сумм многочленов Чебышева в выбранных точках коллокации (3.2). Левые и правые части уравнения (3.10) умножаем на  $\mathbf{G}_1^{-1} \otimes \mathbf{G}_2^{-1}$ . Обратные матрицы  $\mathbf{G}_i^{-1}$  находим как  $2(\mathbf{G}_i^T)/n_i$  ( $i = 1, 2$ ), где первые и последние строки и столбцы полученных матриц делим на 2 [17]. Здесь верхний индекс  $T$  у матриц  $\mathbf{G}_i$  ( $i = 1, 2$ ) обозначает операцию транспонирования. В частности, в результате умножения получим

$$\mathbf{G}_1^{-1} \otimes \mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{B}_1 = 16d_1^{-4} \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{G}_1'' \mathbf{J}_1^4 \otimes (\mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{G}_2''),$$

$$\mathbf{G}_1^{-1} \otimes \mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{B}_5 = 4d_1^{-2} \mathbf{G}_1^{-1} \mathbf{G}_5 \mathbf{J}_1^2 \otimes \mathbf{I}_2 + 4d_2^{-2} \mathbf{I}_1 \otimes (\mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{G}_6 \mathbf{J}_2^2),$$

где  $\mathbf{I}_i$  – единичная матрица размером  $n'_i \times n'_i$  ( $i = 1, 2$ ).

Решение преобразованного уравнения (3.10) находим  $LU$ -методом. Зная элементы матрицы  $\mathbf{A}$ , функцию  $w(x, y)$  получаем на основании (3.1).

Аналогично, коэффициенты в разложении (3.1) могут быть найдены, если в качестве точек коллокации в уравнении (2.1) для каждой введенной переменной  $x_i$  использовать нули многочлена  $T_{n_i+1}(x_i)$  [14]:

$$x_{i,k_i}^* = \cos\left(\frac{\pi(2n_i - 2k_i + 1)}{2(n_i + 1)}\right), \quad k_i = \overline{0, n_i}, \quad i = 1, 2. \tag{3.11}$$

#### 4. Результаты вычислений и их анализ

Рассмотрим изгиб шарнирно закрепленной пластины, на которую действует распределенная нагрузка  $q(x, y) = 10^5 \sin(\pi x/d_1) \sin(\pi y/d_2)$  Па [3]. В этом случае аналитическое решение краевой задачи (2.1)-(2.3) имеет вид [1]

$$\omega(x, y) = \frac{q(x, y) d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + d_2^2)^2}. \tag{4.1}$$

При проведении вычислений на основании (3.1) использованы значения физических параметров из [2–3]:  $d_1 = d_2 = 10$  м,  $h = 0.1$  м,  $E = 200$  ГПа,  $\nu = 0.28$ ,  $n_{1,2} = n$ . В Таблице 4.1 представлены результаты вычислений для случая узловых точек, являющимися точками экстремума многочлена Чебышева степени  $n$  (3.2) и нулями  $T_{n+1}(x_k)$  ( $k = 1, 2$ ) (3.11), где для расчета погрешности построенного решения, как и в [2–3], применены 100 равномерно распределенных контрольных точек  $(x_i, y_j)$ :

$$\|E_n\|_\infty = \frac{\max_{i,j} |\omega(x_i, y_j) - w(x_i, y_j)|}{\max_{i,j} |\omega(x_i, y_j)|}.$$

Порядок сходимости погрешности определяем согласно [2–3] и [18]

$$r_1 = \frac{\|E_n\|_\infty}{\|E_{2n}\|_\infty}, \quad r_2 = \log_2 r_1.$$

**Таблица 4.1.** Значения погрешности полученного решения и порядка сходимости для случая шарнирного закрепления (2.2) и (2.3)  
**Table 4.1.** Error values of the obtained solution and the order of convergence for the case of hinged fastening (2.2) and (2.3)

$n$	$\ E_n\ _\infty$		
	(2.2), (2.3) и (4.1)	(2.2), (2.3) и (3.11)	[2]
9	$3.0 \cdot 10^{-5}$	$6.2 \cdot 10^{-5}$	$1.8 \cdot 10^{-2}$
11	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$6.6 \cdot 10^{-7}$	-
18	$1.2 \cdot 10^{-14}$	$1.3 \cdot 10^{-14}$	$2.8 \cdot 10^{-3}$
	$r_1$		
	$2.5 \cdot 10^9$	$4.7 \cdot 10^9$	6.4
	$r_2$		
	31.2	32.2	2.7

Из Таблицы 4.1 видно, что высокая точность полученного решения с использованием точек экстремумов и нулей многочленов Чебышева первого рода достигается при сравнительно малых значениях  $n$ , при этом наблюдается быстрая сходимость. Здесь отметим также, что при  $n = 18$  погрешность построенного в настоящей работе решения  $w(x, y)$  краевой задачи (2.1)-(2.3) имеет один порядок с погрешностью интерполируемой функции, полученной на основе (3.1), где коэффициенты в этом разложении (3.1) определяются с использованием значений точного решения  $\omega(d_1(x_1+1)/2, d_2(x_2+1)/2)$ , вычисленного в узлах (3.2):  $\mathbf{A} = \mathbf{G}_1^{-1} \otimes \mathbf{G}_2^{-1} \mathbf{W}$ , где  $\mathbf{W} = (w_{01} w_{02}, \dots, w_{n_1 n_2})^T$  – матрица-столбец размера  $n'_1 n'_2 \times 1$  с элементами  $w_{k_1 k_2} = \omega(x(x_{1,k_1}), y(x_{2,k_2}))$ .

Приведем сравнение полученных результатов с результатами авторов работы [4], использовавших метод коллокации и наименьших квадратов в пространстве полиномов Чебышева. В [4] для достижения относительной погрешности приближенного решения в бесконечной норме  $\|E\|_\infty = 1.11 \cdot 10^{-7}$  применена сетка  $16 \times 16$ , в каждой ячейке которой записана локальная система линейных алгебраических уравнений с  $l = (K+1)(K+2)/2$  неизвестными, где  $K = 7$  – степень старшего полинома Чебышева. Здесь глобальная система уравнений является объединением локальных систем. Из представленных результатов следует, что предлагаемым в настоящей работе методом удастся построить более точное решение, по сравнению с представленным в работе [4], за счет использования свойств полиномов Чебышева, в частности их дискретной ортогональности. В работе [3] интегральным методом коллокации и наименьших квадратов значение  $\|E\|_\infty = 7.58 \cdot 10^{-13}$  получено с применением сетки  $16 \times 16$  и локальной системы линейных  $l = (K+1)(K+2)/2$  уравнений при  $K = 10$ .

Предлагаемый в работе метод может быть применен и в случае других граничных условий. Рассмотрим, например, случай, когда на двух краях  $x = 0$  и  $x = d_1$  пластина закреплена, а на других краях шарнирно опирается. На прямоугольную пластину

действует распределенная нагрузка

$$q(x, y) = 10^5 \left( \frac{d_1^4}{(d_1^2 + 4d_2^2)^2} - \cos\left(\frac{2\pi x}{d_1}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi y}{d_2}\right) \text{ Па.}$$

Граничные условия запишем в виде [1]

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad x = 0, d_1, \tag{4.2}$$

$$\omega = 0, \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} = 0, \quad y = 0, d_2. \tag{4.3}$$

В этом случае аналитическое решение задачи (2.1), (4.2) и (4.3) имеет вид

$$\omega(x, y) = \frac{10^5 d_1^4 d_2^4}{\pi^4 D (d_1^2 + 4d_2^2)^2} \left( 1 + \cos\left(\frac{\pi(2x - d_1)}{d_1}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi y}{d_2}\right).$$

Результаты вычислений представлены в Таблице 4.2. Из таблиц 4.1 и 4.2 видно, что решения краевых задач, полученные представленным методом, сходятся с высоким порядком к аналитическим решениям при сравнительно небольших значениях  $n$ . Значения относительной погрешности решений в бесконечной норме использованием точек экстремумов и нулей многочленов Чебышева первого рода оказались близкими, что говорит об хороших аппроксимационных свойствах метода. Результаты проведенных вычислительных экспериментов показывают, что метод является спектрально точным для гладкой функции решения.

**Таблица 4.2.** Значения погрешности полученного решения и порядка сходимости для граничного условия (4.2) и (4.3)

**Table 4.2.** Error values of the obtained solution and the order of convergence for the boundary conditions (4.2) and (4.3)

$n$	$\ E_n\ _\infty$	
	(3.2), (4.2) и (4.3)	(3.11), (4.2) и (4.3)
9	$5.0 \cdot 10^{-4}$	$1.6 \cdot 10^{-3}$
11	$1.3 \cdot 10^{-5}$	$5.0 \cdot 10^{-5}$
18	$4.7 \cdot 10^{-13}$	$3.0 \cdot 10^{-12}$
	$r_1$	
	$1.1 \cdot 10^9$	$5.3 \cdot 10^8$
	$r_2$	
	30.0	29.0

## 5. Заключение

В работе с использованием многочленов Чебышева построено решение задачи моделирования напряженно-деформированного состояния прямоугольных изотропных пластин под действием поперечных нагрузок для случая шарнирного опирания на каждом

крае пластин и его комбинации с защемлением на двух концах этих пластин. Показано, что полученные результаты с высокой точностью совпадают с аналитическими решениями краевых задач при сравнительно небольших значениях степеней этих многочленов в разложении искомой функции, определяющей решение бигармонического уравнения.

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00381 «Развитие методов полиномиальной аппроксимации Чебышева для решения нелинейных задач математической физики».

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластины и оболочки. М.: Наука, 1966. 636 с.
2. Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.
3. Шапеев В. П., Брындин Л. С., Беляев В. А. hp-Вариант метода коллокации и наименьших квадратов с интегральными коллокациями решения бигармонического уравнения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2022. Т. 26, № 3. С. 556–572. DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1936>
4. Беляев В. А., Брындин Л. С., Голушко С. К., Семисалов Б. В., Шапеев В. П. H-, P- и HP-варианты метода коллокации и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 4. С. 531–552. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542522040029>
5. Mai-Duy N., Strunin D., Karunasena W. A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation // Engineering Analysis with Boundary Elements. 2022. Vol. 143. pp. 687–699. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.07.014>
6. Shao W., Wu X. An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations // Applied Mathematical Modelling. 2015. Vol. 39, Issue 9. pp. 2554–2569. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.048>
7. Ye X., Zhang Sh. A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation // Results in Applied Mathematics. 2022. Vol. 15. pp. 100318. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100318>
8. Моханти Р. К., Каур Д. Компактная разностная схема высокой точности для одномерной нестационарной квазилинейной бигармонической задачи второго рода: приложение к физическим задачам // Сибирский журнал вычислительной математики. 2018. Т. 21, № 1. С. 65–82. DOI: <https://doi.org/10.15372/SJNM20180105>
9. Lytvyn O. M., Lytvyn O. O., Tomanova I.S. Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5 // Cybernetics and Systems Analysis. 2018. Vol. 54. pp. 944–947. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0097-x>

10. Зверьяев Е. М., Коваленко М. Д., Аbruков Д. А., Меньшова И. В., Кержаев А. П. О разложениях по функциям Папковича-Фадля в задаче изгиба пластины // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019. Т. 38. 28 с. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-38>
11. Ряжских В. И., Слюсарев М. И., Попов М. И. Численное интегрирование бигармонического уравнения в квадратной области // Вестн. С.-Петербург. ун-та. Сер. 10. Прикл. матем. Информ. Проц. упр. 2013. Т. 1. С. 52–62.
12. Тебякин А. Д., Крысько А. В., Жигалов М. В., Крысько В. А. Упругопластическое деформирование наноластин. Метод вариационных итераций (расширенный метод Канторовича) // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2022. Т. 22, № 4. С. 494–505. DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505>
13. Baseri A., Abbasbandy S., Babolian E. A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 322. pp. 55–65. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.11.048>
14. Mason J., Handscomb D. Chebyshev polynomials. New York: Chapman and Hall/CRC, 2002. 360 p.
15. Liu S., Trenkler G. Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products // International Journal of Information and Systems Sciences. 2008. Vol. 4, Issue 1. pp. 160–177.
16. Yuksel G., Isik O., Sezer M. Error analysis of the Chebyshev collocation method for linear second-order partial differential equations // International Journal of Computer Mathematics. 2015. Vol. 92, Issue 10. pp. 2121–2138. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207160.2014.966099>
17. Гермидер О. В., Попов В. Н. О решении модельного кинетического уравнения ES // Чебышевский сборник. 2022. Т. 23, № 3. С. 37–49. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49>
18. Chen G., Li Zh., Lin P. A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow // Advances in Computational Mathematics. 2008. Vol. 29. pp. 113–133. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10444-007-9043-6>

*Поступила 26.01.2024; доработана после рецензирования 10.02.2024;  
принята к публикации 27.02.2024*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book Comp., New York, 1959, 580 p.

2. S. K. Golushko, S. V. Idimeshev, V. P. Shapeyev, “[Metod kollokatsiy i naimen’shikh nevyazok v prilozhenii k zadacham mekhaniki izotropnykh plastin]”, *Vychislitel’nyye tekhnologii*, **18**:6 (2013), 31–43 (In Russ.).
3. V. P. Shapeyev, L. S. Bryndin, V. A. Belyayev, “hp-Variant metoda kollokatsii i naimen’shikh kvadratov s integral’nymi kollokatsiyami resheniya bigarmonicheskogo uravneniya”, *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Ser. Fiz.-mat. nauki*, **26**:3 (2022), 1–15 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.14498/vsgtu1936>
4. V. A. Belyaev, L. S. Bryndin, S. K. Golushko, B. V. Semisalov, V. P. Shapeyev, “h-, p-, and HP-versions of the least-squares collocation method for solving boundary value problems for biharmonic equation in irregular domains and their applications”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **62**:4 (2022), 517–537. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542522040029>
5. N. Mai-Duy, D. Strunin, W. Karunasena, “A new high-order nine-point stencil, based on integrated-RBF approximations, for the first biharmonic equation”, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **143** (2022), 687–699. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2022.07.014>
6. W. Shao, X. Wu, “An effective Chebyshev tau meshless domain decomposition method based on the integration-differentiation for solving fourth order equations”, *Applied Mathematical Modelling*, **39**:9 (2015), 2554–2569. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.048>
7. X. Ye, Sh. Zhang, “A family of H-div-div mixed triangular finite elements for the biharmonic equation”, *Results in Applied Mathematics*, **15** (2022), 100318. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rinam.2022.100318>
8. R. K. Mohanty, D. Kaur, “Compact difference scheme with high accuracy for one dimensional unsteady quasi-linear biharmonic problem of second kind: Application to physical problems”, *Siberian Mathematical Journal*, **21**:1 (2018), 65–82 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15372/SJNM20180105>
9. O. M. Lytvyn, O. O. Lytvyn, I. S. Tomanova, “Solving the biharmonic plate bending problem by the Ritz method using explicit formulas for splines of degree 5”, *Cybernetics and Systems Analysis*, **54** (2018), 994–947. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10559-018-0097-x>
10. Ye. M. Zveryayev, M. D. Kovalenko, D. A. Abrukov, I. V. Men’shova, A. P. Kerzhayev, *O razlozheniyakh po funktsiyam Papkovicha–Fadlya v zadache izgiba plastiny*, Preprinty IPM im. M. V. Keldysha, Moskva, 2019 DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-38> (In Russ.), 28 p.
11. V. I. Ryazhskikh, M. I. Slyusarev, M. I. Popov, “Chislennoye integrirovaniye bigarmonicheskogo uravneniya v kvadratnoy oblasti”, *Vestn. S.-Peterburg. un-ta. Ser. 10. Prikl. matem. Inform. Prots. upr.*, **1**:1 (2013), 52–62 (In Russ.).
12. A. D. Tebyakin, A. V. Krysko, M. V. Zhigalov, V. A. Krysko, “Elastic-plastic deformation of nanoplates. The method of variational iterations (extended Kantorovich method)”, *Izvestiya of Saratov University. Mathematics. Mechanics. Informatics*, **22**:4

(2022), 494–505 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-4-494-505>

13. A. Baseri, S. Abbasbandy, E. Babolian, “A collocation method for fractional diffusion equation in a long time with Chebyshev functions”, *Applied Mathematics and Computation*, **322** (2018), 55–65. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.11.048>
14. J. Mason, D. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, New York, 2002, 360 p.
15. S. Liu, G. Trenkler, “Hadamard, Khatri-Rao, Kronecker and other matrix products”, *International Journal of Information and Systems Sciences*, **4:1** (2008), 160–177.
16. G. Yuksel, O. Isik, M. Sezer, “Error analysis of the Chebyshev collocation method for linear second-order partial differential equations”, *International Journal of Computer Mathematics*, **92:10** (2015), 2121–2138. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207160.2014.966099>
17. O. V. Germider, V. N. Popov, “O reshenii model'nogo kineticheskogo uravneniya ES”, *Chebyshevskiy sbornik*, **23:3** (2022), 37–49 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2022-23-3-37-49>
18. G. Chen, Zh. Li, P. Lin, “A fast finite difference method for biharmonic equations on irregular domains and its application to an incompressible Stokes flow”, *Advances in Computational Mathematics*, **29** (2008), 113–133. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10444-007-9043-6>

*Submitted 26.01.2024; Revised 10.02.2024; Accepted 27.02.2024*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.26.202401.32-43

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

## О размерности Минковского некоторых инвариантных подмножеств динамических систем

С. В. Зелик, О. В. Починка, А. А. Ягилев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

**Аннотация.** Хорошо известно, что фрактальное множество не является подмножеством объемлющего пространства. Однако фракталы возникают как инвариантные подмножества, даже в бесконечно гладких динамических системах; размерность Минковского служит в этом случае характеристикой сложности такого множества. Например, в момент потери устойчивости состоянием равновесия при бифуркации Андронова-Хопфа замыкание неособой траектории является параметрически заданной кривой фрактального типа. В настоящей работе вычислена фрактальная размерность таких кривых. Кроме того, исследовано двухпараметрическое семейство функций, размерность Минковского графиков которых варьируется в промежутке от 1 до 2. Полученный результат позволяет реализовать регулярную динамическую систему, замыкание двумерного устойчивого многообразия изолированной гиперболической точки которой может иметь размерность Минковского больше 2. Вычисление размерности графика основано на разбиении отрезка аргумента, его задающего, на две части. Размерность одной части графика при этом возможно оценить сверху с помощью непосредственного вычисления длины соответствующей кривой. Размерность другой оценивается сверху через площадь прямоугольника, в которой она лежит. Оценка размерности Минковского снизу основана на вычислении мощности  $\varepsilon$ -различимого множества точек графика.

**Ключевые слова:** размерность Минковского, покрытие множества,  $\varepsilon$ -различимое множество, бифуркация Андронова-Хопфа

**Для цитирования:** Зелик С. В., Починка О. В., Ягилев А. А. О размерности Минковского некоторых инвариантных подмножеств динамических систем // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 32–43. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.32-43>

*Об авторах:*

**Зелик Сергей Витальевич**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4884-5040>, [s.zelik@surrey.ac.uk](mailto:s.zelik@surrey.ac.uk).

**Починка Ольга Витальевна**, доктор физико-математических наук, заведующий международной лабораторией динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru).

**Ягилев Андрей Александрович**, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5088-8075>, [agilevandrej@gmail.com](mailto:agilevandrej@gmail.com).

© С. В. Зелик, О. В. Починка, А. А. Ягилев



MSC2020 57N10

# On the Minkowski dimension of some invariant sets of dynamical systems

S. V. Zelik, O. V. Pochinka, A. A. Yagilev

*Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** It is well known that a fractal set is not a submanifold of the ambient space. However, fractals arise as invariant subsets even in infinitely smooth conditions and the Minkowski dimension serves in this case as a characteristic of complexity of this scale. For example, when the equilibrium state during the Andronov-Hopf bifurcation loses its stability, the closure of the non-singular trajectory is a parametrically defined curve of the fractal type. In this work the fractal dimension of such curves is calculated. In addition, special two-parameter family of functions is studied such that Minkowski dimension of their graphs varies from 1 to 2. The obtained result allows us to implement a regular dynamic system with an isolated hyperbolic point such that the closure of two-dimensional stable manifold of this point may have Minkowski dimension greater than 2. To calculate the graph dimension, the segment of the argument defining the graph is split into two parts. The dimension of the first part of the graph can be estimated from above by direct calculation of the corresponding curve's length. The upper estimation of the other part's dimension is provided by means of the area of rectangle containing this curve. The lower estimation of the Minkowski dimension is based on calculating the cardinality of  $\varepsilon$ -distinguishable set of graph points.

**Keywords:** Minkowski dimension, set coverage,  $\varepsilon$ -distinguishable set, Andronov-Hopf bifurcation

**For citation:** S. V. Zelik, O. V. Pochinka, A. A. Yagilev. On the Minkowski dimension of some invariant sets of dynamical systems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:1(2024), 32–43. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.32-43>

*About the authors:*

**Zelik Sergey Vitalievich**, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Researcher at the International Laboratory of Dynamic Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4884-5040>, [s.zelik@surrey.ac.uk](mailto:s.zelik@surrey.ac.uk).

**Pochinka Olga Vitalievna**, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the International Laboratory of Dynamic Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru).

**Yagilev Andrey Alexandrovich**, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5088-8075>, [agilevandrej@gmail.com](mailto:agilevandrej@gmail.com).

## 1. Введение

Топологическая размерность – это наиболее привычная всем величина, которая апеллирует к нашим представлениям о линии, поверхности, объемном теле. Однако,

она нечувствительна к гладкости множества, “не чувствует” извилистости линии, шероховатости поверхности, пористости объемного тела. Более “чувствительный” подход определяется посредством покрытий и приводит к понятию размерности Минковского для точных определений).

Напомним определение размерности Минковского (см., например, [1]).

Для любого множества  $C$  будем обозначать через  $\text{card}(C)$  *мощность множества*  $C$ .

Пусть  $\mathbb{R}^m = \{x = (x_1, \dots, x_m) : x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}\}$  – евклидово пространство с метрикой

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^m (x_k - y_k)^2}.$$

Пусть  $X \subset \mathbb{R}^m$ . *Диаметром* множества  $X$  называется величина

$$\text{diam}(X) = \sup \{d(x, y) : x, y \in X\}$$

Множество  $X$  называется  $\varepsilon$ -различимым ( $\varepsilon > 0$ ), если  $d(x, y) \geq \varepsilon$  для любых  $x, y \in X$ .

Покрытие  $U = \{U_j\}_{j \in J}$  множества  $X$  называется  $\varepsilon$ -покрытием, если  $\text{diam}(U_j) \leq \varepsilon$  для любого  $j \in J$ .

Везде далее речь пойдет об ограниченном множестве  $E \subset \mathbb{R}^m$ . Для любого такого множества  $E$  и любого  $\varepsilon > 0$  корректно определены числа

$$N(E, \varepsilon) = \min \{\text{card}(U) : U - \varepsilon\text{-покрытие множества } E\}, \quad (1.1)$$

$$M(E, \varepsilon) = \max \{\text{card}(A) : A \subset E - \varepsilon\text{-различно}\}, \quad (1.2)$$

и имеет место следующее неравенство

$$N(E, \varepsilon) \leq M(E, \varepsilon) \leq N\left(E, \frac{\varepsilon}{2}\right). \quad (1.3)$$

*Верхней (нижней) размерностью Минковского* множества  $E$  называют верхний (нижний) предел:

$$\overline{\dim}_M(E) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln N(E, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad \left( \underline{\dim}_M(E) = \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln N(E, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \right). \quad (1.4)$$

Когда верхний и нижний пределы совпадают, то предел

$$\dim_M(E) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{\ln N(E, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \quad (1.5)$$

называется *размерностью Минковского*.

Множества, для которых размерность Минковского строго больше топологической размерности, называются *фрактальными множествами или фракталами*.

Размерность Минковского  $n$ -мерного подмногообразия совпадает с его топологической размерностью  $n$ . Таким образом, фрактальное множество не является подмногообразием объемлющего пространства. Однако, фракталы возникают, как инвариантные подмножества, даже в бесконечно гладких динамических системах и размерность Минковского служит в этом случае характеристикой сложности такого множества. На сегодняшний день хорошо известно появление фрактального инвариантного подмножества у непрерывной динамической системы в момент бифуркации.

Одна из самых известных бифуркаций двумерных систем на плоскости – это *бифуркация Андронова-Хопфа* [2], [3], [4]. Устойчивое состояние равновесия  $(0, 0)$  с чисто мнимыми комплексно сопряженными собственными значениями становится неустойчивым и потеря устойчивости сопровождается рождением устойчивого предельного цикла, к которому стремятся все траектории, кроме самой особой точки (см. Рис. 1.1).

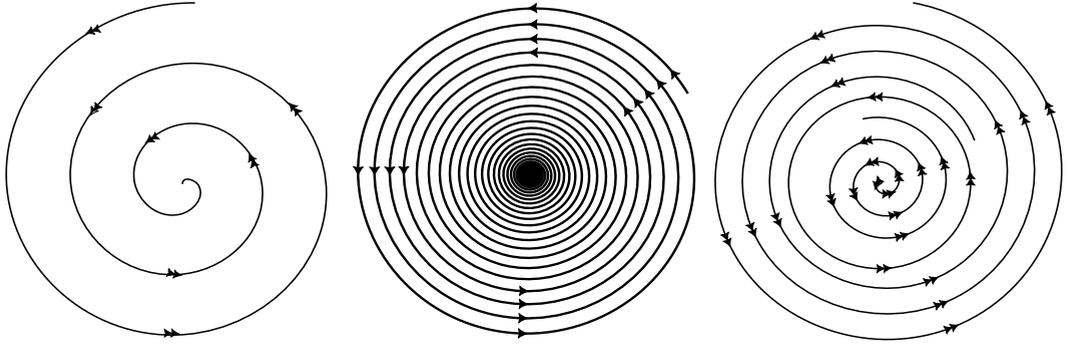


Рис. 1.1. Бифуркация Андронова-Хопфа

Fig 1.1. Andronov-Hopf bifurcation

В момент потери устойчивости замыкание неособой траектории является параметрически заданной фрактальной кривой [5] следующего вида.

Рассмотрим параметрически заданную кривую  $\phi(t) = \phi_a(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , для любого параметра  $a \in (0, 1)$  определенную формулой

$$\phi(t) = \begin{cases} (t^a \cos(\frac{2\pi}{t}), t^a \sin(\frac{2\pi}{t})), & 0 < t \leq 1; \\ (0, 0), & t = 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Обозначим через

$$\Gamma_\phi = \{\phi(t) \in \mathbb{R}^2, t \in [0, 1]\}$$

график кривой  $\phi(t)$ . Вычисление размерности Минковского графика  $\Gamma_\phi$  представлено во втором параграфе.

На рисунке 1.2 изображен фазовый портрет потока в  $\mathbb{R}^3$ . Гиперболическая седловая точка  $\sigma$  рассматриваемого потока имеет двумерное устойчивое многообразие, которое трансверсально пересекает плоскость  $z = 1$  по кривой, заданной непрерывной функцией  $f = f_{a,b} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , для положительных параметров  $a, b$  определенную формулой

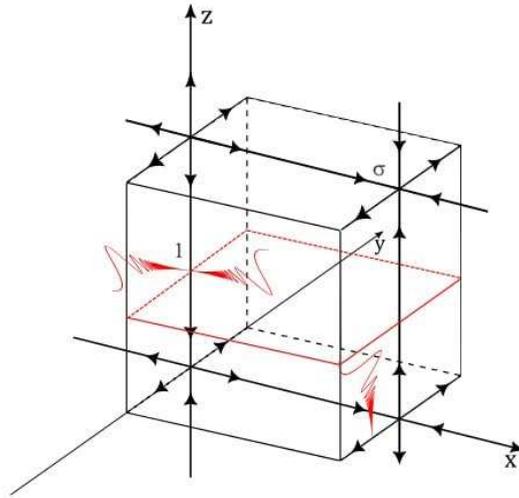
$$f(x) = \begin{cases} x^a \sin(x^{-b}), & 0 < x \leq 1; \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Обозначим через

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2, x \in [0, 1]\}$$

график функции  $f$ .

Вычисление размерности Минковского графика  $\Gamma_f$  функции  $f(x)$  представлено в третьем параграфе.



**Рис. 1.2.** Фазовый портрет потока в  $\mathbb{R}^3$ .

**Fig 1.2.** Phase portrait of the flow in  $\mathbb{R}^3$

Полученный результат позволяет реализовать регулярную динамическую систему, замыкание двумерного устойчивого многообразия изолированной гиперболической точки которой может иметь размерность Минковского больше 2.

Заметим, что приведенные примеры систем с фрактальной размерностью инвариантных подмножеств, не являются структурно устойчивыми. На сегодняшний день широко известны примеры структурно устойчивых систем с дико вложенными инвариантными инвариантными подмножествами (см., например, [6], [7]). Однако, топологическая размерность таких подмножеств во всех известных случаях совпадает с размерностью Минковского.

## 2. Вычисление размерности Минковского графика $\Gamma_\phi$

**Л е м м а 2.1.** Для любого  $\gamma \in (\mathbb{R} \setminus 0)$  существует  $r_\gamma > 0$  такое, что для всех  $x > r_\gamma$  выполняется следующее неравенство:

$$\frac{|\gamma|}{2}x^{\gamma-1} < |(x+1)^\gamma - x^\gamma| < \frac{3|\gamma|}{2}x^{\gamma-1}. \quad (2.1)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Поскольку

$$(x+1)^\gamma - x^\gamma = x^\gamma \left( \left(1 + \frac{1}{x}\right)^\gamma - 1 \right) = x^{\gamma-1} (\gamma + \alpha(x)),$$

где  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ , то существует  $r_\gamma > 0$  такое, что

$$|\alpha(x)| < \frac{|\gamma|}{2}, \quad \forall x > r_\gamma.$$

Так как

$$||\gamma| - |\alpha(x)|| < |\gamma + \alpha(x)| < |\gamma| + |\alpha(x)|,$$

то

$$\frac{|\gamma|}{2} < |\gamma + \alpha(x)| < \frac{3|\gamma|}{2}, \forall x > r_\gamma.$$

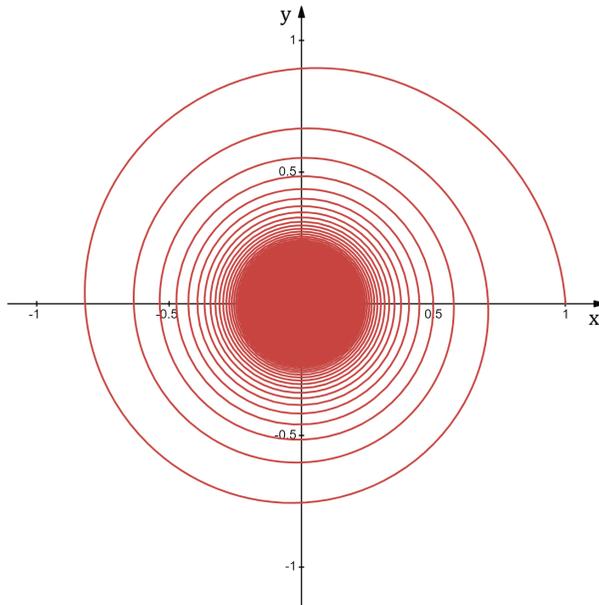
Таким образом,

$$\frac{|\gamma|}{2}x^{\gamma-1} < |(x+1)^\gamma - x^\gamma| < \frac{3|\gamma|}{2}x^{\gamma-1}, \forall x > r_\gamma.$$

Доказательство завершено.

**Т е о р е м а 2.1.** *Размерность Минковского графика  $\Gamma_\phi$  кривой  $\phi(t) = \phi_a(t)$  вида (1.6) равна (см. Рис. 2.1)*

$$\dim_M(\Gamma_\phi) = \frac{2}{a+1}. \tag{2.2}$$



**Рис. 2.1.** График кривой  $\phi(t)$  с параметром  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\dim_M(\Gamma_\phi) = \frac{4}{3}$ .

**Fig 2.1.** Graph of the curve  $\phi(t)$  with the parameter  $a = \frac{1}{2}$ ,  $\dim_M(\Gamma_\phi) = \frac{4}{3}$

Доказательство. Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Непосредственно проверяется, что кривая  $\phi(t)$  пересекает ось абсцисс при значениях параметра  $t_k = \frac{1}{k}$  в точках  $(x_k, 0)$ , где

$$x_k = k^{-a}, k \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

В силу леммы 2.1, для всех  $k$ , начиная с некоторого, справедливо неравенство

$$c_1 k^{-a-1} \leq x_k - x_{k+1} \leq c_2 k^{-a-1}$$

(здесь и всюду ниже  $c_i$  — некоторые положительные величины, зависящие от  $a$ , но не зависящие от  $k$  и  $\varepsilon$ ).

Так как последовательность  $k^{-a-1}$  монотонно убывает и  $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-a-1} = 0$ , то найдётся  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  такое, что  $(k_\varepsilon + 1)^{-a-1} \leq \varepsilon \leq k_\varepsilon^{-a-1}$ . Откуда

$$c_3 \varepsilon^{-\frac{1}{a+1}} \leq k_\varepsilon \leq c_4 \varepsilon^{-\frac{1}{a+1}} \quad (2.4)$$

и, в силу (2.3),

$$c_5 \varepsilon^{\frac{a}{a+1}} \leq x_{k_\varepsilon} \leq c_6 \varepsilon^{\frac{a}{a+1}} \quad (2.5)$$

Обозначим через  $S_\varepsilon$  график кривой  $\phi(t)$  на отрезке  $t \in \left[\frac{1}{k_\varepsilon}, 1\right]$  и через  $l(S_\varepsilon)$  — его длину. Тогда,

$$l(S_\varepsilon) = \int_{\frac{1}{k_\varepsilon}}^1 \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt = \int_{\frac{1}{k_\varepsilon}}^1 t^{a-2} \sqrt{a^2 t^2 + 4\pi^2} dt.$$

Из условия  $t \leq 1$  получим, что

$$l(S_\varepsilon) \leq \sqrt{a^2 + 4\pi^2} \int_{\frac{1}{k_\varepsilon}}^1 t^{a-2} dt = \frac{\sqrt{a^2 + 4\pi^2}}{1-a} (k_\varepsilon^{a-1} - 1).$$

Откуда, в силу неравенства (2.4),

$$l(S_\varepsilon) \leq c_7 \varepsilon^{\frac{a-1}{a+1}}$$

и, следовательно,

$$N(S_\varepsilon, \varepsilon) \leq \frac{l(S_\varepsilon)}{\varepsilon} \leq c_7 \varepsilon^{\frac{a-1}{a+1}-1} = c_7 \varepsilon^{-\frac{2}{a+1}}. \quad (2.6)$$

Положим  $\Sigma_\varepsilon = \Gamma_\phi \setminus S_\varepsilon$ . Тогда график  $\Sigma_\varepsilon$  лежит в квадрате  $[-k_\varepsilon^a, k_\varepsilon^a] \times [-k_\varepsilon^a, k_\varepsilon^a]$ , площадь которого равна  $4k_\varepsilon^{-2a}$ . В силу неравенства (2.4), получаем, что

$$4k_\varepsilon^{-2a} \leq c_8 \varepsilon^{\frac{2a}{a+1}}$$

и, следовательно

$$N(\Sigma_\varepsilon, \varepsilon) \leq c_8 \frac{\varepsilon^{\frac{2a}{a+1}}}{\varepsilon^2} = c_8 \varepsilon^{-\frac{2}{a+1}}. \quad (2.7)$$

Из неравенств (2.6), (2.7) следует, что

$$N(\Gamma_\phi, \varepsilon) \leq c_9 \varepsilon^{-\frac{2}{a+1}}. \quad (2.8)$$

Из формулы (1.3) следует, что

$$N(\Gamma_\phi, \varepsilon) \geq M(\Gamma_\phi, 2\varepsilon) \geq M(S_\varepsilon, 2\varepsilon).$$

Покажем, что  $M(S_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq c_{10} \varepsilon^{-\frac{2}{a+1}}$ , тогда из формулы (1.5) будет следовать, что  $\dim_M(\Gamma_\phi) = \frac{2}{a+1}$ .

Действительно, обозначим через  $S_k$  график кривой  $\phi(t)$  на отрезке

$$\Delta_k = [t_k, t_{k+1}], \quad k \in \mathbb{N}$$

и через  $l(S_k)$  – длину дуги этой кривой. Непосредственно проверяется, что  $l(S_k)$  не меньше длины окружности с центром в начале координат радиуса  $x_{k+1}$ . Откуда следует, что

$$M(S_k, 2\varepsilon) \geq \frac{\pi x_{k+1}}{\varepsilon}. \tag{2.9}$$

По построению  $S_\varepsilon$  – график кривой  $\phi(t)$  на отрезке  $[t_{k_\varepsilon}, 1]$  и этот отрезок содержит все отрезки  $\Delta_k, k = 1, \dots, k_\varepsilon$ . Тогда  $M(S_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq \frac{\pi k_\varepsilon x_{k_\varepsilon}}{\varepsilon}$ , откуда, в силу неравенств (2.4), (2.5),  $M(S_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq c_{10} \varepsilon^{-\frac{2}{a+1}}$ .

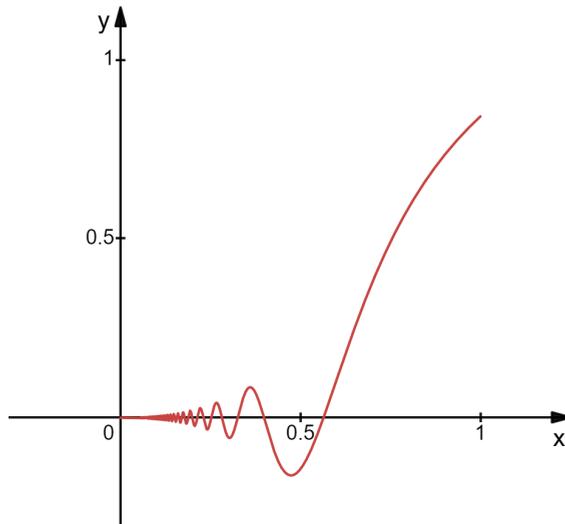
Доказательство завершено.

### 3. Вычисление размерности Минковского графика $\Gamma_f$

**Теорема 3.1.** *Размерность Минковского графика  $\Gamma_f$  функции  $f(x) = f_{a,b}(x)$  (1.7) равна (см. Рис. 3.1, 3.2)*

$$\dim_M(\Gamma_f) = 2 - \frac{a+1}{b+1}, \quad a < b; \tag{3.1}$$

$$\dim_M(\Gamma_f) = 1, \quad a \geq b. \tag{3.2}$$



**Рис. 3.1.** График функции  $f(x)$  с параметрами  $a = \frac{12}{5}, b = 2, \dim_M(\Gamma_f) = 1$

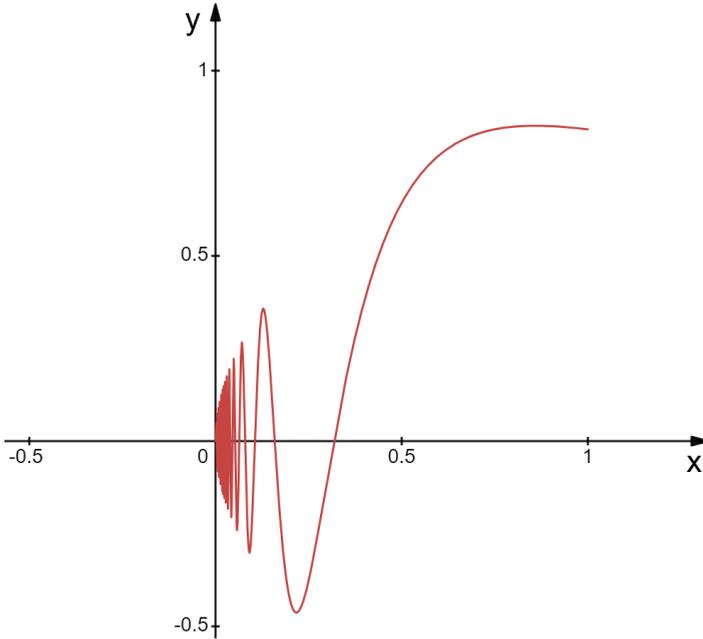
**Fig 3.1.** Graph of the function  $f(x)$  with parameters  $a = \frac{12}{5}, b = 2, \dim_M(\Gamma_f) = 1$

**Доказательство.** Заметим, что функция  $f(x)$  является гладкой, когда  $a > b + 1$  и, следовательно (см. например, [8]),  $\dim_M(\Gamma_f) = 1$  в этом случае.

Рассмотрим случай  $a \leq b + 1$ .

Положим  $d = b + 1 - a$ . Тогда  $d \geq 0$  и для  $x \in (0, 1]$

$$f'(x) = x^{-d} (ax^b \sin(x^{-b}) - b \cos(x^{-b})).$$



**Рис. 3.2.** График функции  $f(x)$  с параметрами  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ ,  $\dim_M(\Gamma_f) = 1,25$

**Fig 3.2.** Graph of the function  $f(x)$  with parameters  $a = \frac{1}{2}$ ,  $b = 1$ ,  $\dim_M(\Gamma_f) = 1,25$

Откуда

$$0 \leq |f'(x)| \leq x^{-d}(a+b).$$

Поскольку  $1 \leq x^{-2d}$ , то

$$1 \leq \sqrt{1 + (f'(x))^2} \leq x^{-d} \sqrt{1 + (a+b)^2}. \quad (3.3)$$

Обозначим через  $l(\Gamma_f)$  длину графика  $\Gamma_f$ . По определению

$$l(\Gamma_f) = \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\delta}^1 \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

В силу неравенства (3.3), для  $0 \leq d \leq 1$  величина  $l(\Gamma_f)$  конечна. Откуда

$$\frac{1}{\varepsilon} \leq N(\Gamma_f, \varepsilon) \leq \frac{l(\Gamma_f)}{\varepsilon}$$

и, следовательно,

$$1 \leq \frac{\ln N(\Gamma_f, \varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} \leq \frac{\ln(l(\Gamma_f)/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}.$$

Тогда из формулы (1.5) следует, что  $\dim_M(\Gamma_f) = 1$ .

Далее рассмотрим случай  $d > 1$ .

Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ . Непосредственно проверяется, что график функции  $f(x)$  пересекает ось абсцисс в точках  $x_0 = 0$  и

$$x_k = (\pi k)^{-\frac{1}{b}}, k \in \mathbb{N}. \tag{3.4}$$

Поскольку

$$x_k - x_{k+1} = (\pi)^{-\frac{1}{b}} \left( k^{-\frac{1}{b}} - (k+1)^{-\frac{1}{b}} \right),$$

то, в силу леммы 2.1, для всех  $k$ , начиная с некоторого, справедливо неравенство

$$c_1 k^{-\frac{b+1}{b}} \leq x_k - x_{k+1} \leq c_2 k^{-\frac{b+1}{b}}$$

(здесь и всюду ниже  $c_i$  – некоторые положительные величины, зависящие от  $a$  и  $b$ , но не зависящие от  $k$  и  $\varepsilon$ ). Поскольку последовательность  $k^{-\frac{b+1}{b}}$  монотонно убывает и  $\lim_{k \rightarrow \infty} k^{-\frac{b+1}{b}} = 0$ , то найдётся  $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$  такое, что  $x_{k_\varepsilon+1} \leq \varepsilon \leq x_{k_\varepsilon}$ . Откуда

$$c_3 \varepsilon^{-\frac{b}{b+1}} \leq k_\varepsilon \leq c_4 \varepsilon^{-\frac{b}{b+1}} \tag{3.5}$$

и, в силу (3.4),

$$c_5 \varepsilon^{\frac{1}{b+1}} \leq x_{k_\varepsilon} \leq c_6 \varepsilon^{\frac{1}{b+1}} \tag{3.6}$$

Обозначим через  $\Gamma_\varepsilon$  график функции  $f$  на отрезке  $[x_{k_\varepsilon}, 1]$  и через  $l(\Gamma_\varepsilon)$  его длину. Тогда, в силу неравенства (3.3),

$$l(\Gamma_\varepsilon) \leq \sqrt{1 + (a+b)^2} \int_{x_{k_\varepsilon}}^1 x^{-d} dx = \frac{\sqrt{1 + (a+b)^2}}{d-1} ((x_{k_\varepsilon})^{1-d} - 1).$$

Откуда, в силу формулы (3.6), справедливо неравенство

$$l(\Gamma_\varepsilon) \leq c_7 \varepsilon^{\frac{a-b}{b+1}}$$

и, следовательно,

$$N(\Gamma_\varepsilon, \varepsilon) \leq \frac{l(\Gamma_\varepsilon)}{\varepsilon} \leq c_7 \varepsilon^{\frac{a-b}{b+1}-1} = c_7 \varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}-2}. \tag{3.7}$$

Положим  $G_\varepsilon = \Gamma_f \setminus \Gamma_\varepsilon$ . Тогда график  $G_\varepsilon$  лежит в прямоугольнике  $[0, x_{k_\varepsilon}] \times [-x_{k_\varepsilon}^a, x_{k_\varepsilon}^a]$ , площадь которого равна  $2x_{k_\varepsilon}^{a+1}$ . В силу формулы (3.6), справедливо неравенство

$$2x_{k_\varepsilon}^{a+1} \leq c_8 \varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}}$$

и, следовательно,

$$N(G_\varepsilon, \varepsilon) \leq \frac{2x_{k_\varepsilon}^{a+1}}{\varepsilon^2} \leq c_8 \varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}-2}. \tag{3.8}$$

Из неравенств (3.7), (3.8) следует, что

$$N(\Gamma_f, \varepsilon) \leq c_9 \varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}-2}. \tag{3.9}$$

Из формулы (1.3) следует, что

$$N(\Gamma_f, \varepsilon) \geq M(\Gamma_f, 2\varepsilon) \geq M(\Gamma_\varepsilon, 2\varepsilon).$$

Покажем, что  $M(\Gamma_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq c_{10}\varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}-2}$ , тогда из формулы (1.5) будет следовать, что  $\dim_M(\Gamma_f) = 2 - \frac{a+1}{b+1}$ .

Действительно, обозначим через  $\Gamma_k$  график функции  $f(x)$  на отрезке

$$\Delta_k = [x_{k+1}, x_k], \quad k \in \mathbb{N}.$$

Непосредственно проверяется, что на отрезке  $\Delta_k$  функция  $|f|$  достигает наибольшего значения в точке  $(\frac{\pi k}{2})^{-\frac{1}{b}}$  и оно равно  $(\frac{\pi k}{2})^{-\frac{a}{b}}$ . Откуда следует, что

$$M(\Gamma_k, 2\varepsilon) \geq \frac{(\frac{\pi k}{2})^{-\frac{a}{b}}}{\varepsilon}.$$

По построению  $\Gamma_\varepsilon$  – график функции  $f$  на отрезке  $[x_{k_\varepsilon}, 1]$  и этот отрезок содержит все отрезки  $\Delta_k$ ,  $k = 1, \dots, k_\varepsilon$ . Тогда  $M(\Gamma_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq \frac{k_\varepsilon (\frac{\pi k_\varepsilon}{2})^{-\frac{a}{b}}}{\varepsilon}$ , откуда, в силу неравенства (3.5),  $M(\Gamma_\varepsilon, 2\varepsilon) \geq c_{10}\varepsilon^{\frac{a+1}{b+1}-2}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о .**

**Благодарности.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (№ 23-71-30008).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука. 1973. 575 с.
2. Андронов А. А., Леонтович Е. А. Некоторые случаи зависимости предельных циклов от параметра // Уч. записки Горьк. ун-та. 1937. Т. 5. С. 3–24.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука. 1937. 568 с.
4. Hopf E. Abzweigung einer periodischen Lösung von einer stationären Lösung eines Differential systems // Ber. Math.-Phys. Sächsische Academie der Wissenschaften, Leipzig. 1942. Vol. 94. pp. 1–22.
5. Зелик С. В. Аттракторы. Тогда и сейчас. // Успехи математических наук. 2023. Т. 78, № 4. С. 53–198.
6. Bonatti C., Grines V. Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere  $S^3$  // Journal of dynamical and control systems. 2000. Vol. 6, no. 4. pp. 579–602.
7. Medvedev T. V., Pochinka O. V. The wild Fox-Artin arc in invariant sets of dynamical systems // Dynamical Systems. 2018. Vol. 33. pp. 660–666.
8. Fernandez-Martinez M., Sanchez-Granero M. A. A new fractal dimension for curves based on fractal structures // Topology Applications. 2016. Vol. 203. pp. 108–124.

Поступила 09.01.2024; доработана после рецензирования 10.02.2024;  
принята к публикации 27.02.2024

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. P. S. Alexandrov, B. A. Pasyukov, *Vvedenie v teoriyu razmernosti [Introduction to the theory of dimension]*, Nauka, Moscow, 1973 (In Russ), 575 p.
2. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, "Some cases of dependence of limit cycles on a parameter", *Science notes of Gorky University*, **5** (1937), 3-24 (In Russ).
3. A. A. Andronov, A. A. Witt, S. E. Khaykin, *Teoriya kolebaniy [Theory of oscillations]*, Nauka, Moscow, 1937 (In Russ), 568 p.
4. E. Hopf, "Abzweigung einer periodischen Losung von einer stationaren Losung eines Differential systems", *Ber. Math.-Phys. Sachsische Academie der Wissenschaften, Leipzig*, **94** (1942), 1-22.
5. S. V. Zelik, "Attractors. Then and now", *Russian Math. Surveys*, **78**:4 (2023), 635-677 (In Russ).
6. C. Bonatti, V. Grines, "Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere  $S^3$ ", *Journal of dynamical and control systems*, **6**:4 (2000), 579-602.
7. T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, "The wild Fox-Artin arc in invariant sets of dynamical systems", *Dynamical Systems*, **33** (2018), 660-666.
8. M. Fernandez-Martinez, M. A. Sanchez-Granero, "A new fractal dimension for curves based on fractal structures", *Topology Applications*, **203** (2016), 108-124.

Submitted 09.01.2024; Revised 10.02.2024; Accepted 27.02.2024

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.26.202401.44-59

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.65:517.521:538.9

## Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных

Н. Д. Кузьмичев

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)

**Аннотация.** В работе получены формулы для нахождения высших производных функции, выраженные через ее коэффициенты Фурье (амплитуды гармоник). Указанные формулы найдены путем дифференцирования функции с гармонически модулированным аргументом и ее ряда Фурье. Приведенные выражения позволяют находить высшие производные функций численно с любой наперед заданной точностью, например, методом численного интегрирования формул Эйлера-Фурье для амплитуд гармоник или экспериментально при исследовании нелинейного физического процесса путем регистрации в цифровом формате амплитуд гармоник исследуемой зависимости при одновременном статическом и гармоническом воздействиях. Поставлена задача восстановления производных из коэффициентов Фурье и выполнен анализ ее корректности. Определены формулы для оценки ошибок восстановления и даны рекомендации для их уменьшения. Приведены примеры с разными свойствами гладкости аналитических и используемых для объяснения экспериментов функций: 1) аналитическая функция, используемая для объяснения магнитных свойств сверхпроводников, коэффициенты Фурье которой определяются численно с ошибкой вычислительного алгоритма программной среды Mathcad; 2) вольтамперная характеристика (ВАХ) двух встречно включенных полупроводниковых диодов, амплитуды гармоник которой определялись экспериментально с заданной ошибкой измерения прибора. Выполнено сравнение полученной производной ВАХ с производной, полученной с помощью формул численного дифференцирования; 3) аналитическая функция, производная которой имеет разрыв первого рода. Ошибки измерения коэффициентов Фурье добавлялись искусственно с помощью генератора случайных чисел.

**Ключевые слова:** ряд Тейлора-Фурье, коэффициент Фурье, амплитуда гармоники, высшая производная функции, задача восстановления производных, корректность задачи, ошибки восстановления производных

**Для цитирования:** Кузьмичев Н. Д. Применение метода модуляционного Фурье-анализа для задачи восстановления производных // Журнал Средневожского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 44–59. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.44-59>

Об авторе:

**Кузьмичев Николай Дмитриевич**, д. ф.-м. н., профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, [kuzmichevnd@yandex.ru](mailto:kuzmichevnd@yandex.ru)

© Н. Д. Кузьмичев



MSC2020 35K200

# Application of the Fourier Modulation Analysis Method to the Problem of Derivatives Recovery

N. D. Kuzmichev

*National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

**Abstract.** In this work, formulas are obtained for finding higher derivatives of a function (dependence), expressed through its Fourier coefficients (harmonic amplitudes). These formulas were found by differentiating both a function with a harmonically modulated argument and its Fourier series. The expressions given make it possible to find higher derivatives of functions numerically with any accuracy by means of different methods. For example, numerical integration of the Euler-Fourier formulas may be used for harmonic amplitudes. Derivatives also can be found experimentally when studying a nonlinear physical process by digitally recording the harmonic amplitudes of the dependence under study under simultaneous static and harmonic influences. The problem of reconstructing derivatives from Fourier coefficients is posed and an analysis of its correctness is performed. Formulas for estimating recovery errors are defined and recommendations are given to reduce these errors. Examples are given with different smoothness of analytical functions and of functions used to explain experiments: 1) an analytical function used to explain the magnetic properties of superconductors, whose Fourier coefficients are determined numerically with the error of the computational algorithm in the Mathcad software environment; 2) current-voltage characteristic (CVC) of 2 back-to-back semiconductor diodes, whose harmonic amplitudes were determined experimentally with a given measurement error of the device. The resulting derivative of the current-voltage characteristic is compared with the derivative obtained using numerical differentiation formulas; 3) an analytical function whose derivative has a discontinuity of the first kind. Errors in measuring Fourier coefficients were added artificially using a random number generator.

**Keywords:** Taylor-Fourier series, Fourier coefficients, harmonic amplitudes, higher derivative of a function, the problem of restoring derivatives, problem correctness, errors in restoring derivatives

**For citation:** N. D. Kuzmichev. Application of the Fourier Modulation Analysis Method to the Problem of Derivatives Recovery. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:1(2024), 44–59. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.44-59>

*About the author:*

**Nikolay D. Kuzmichev**, D.Sci. ((Phys.-Math.), Professor, Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, [kuzmichevnd@yandex.ru](mailto:kuzmichevnd@yandex.ru)

## 1. Введение

В связи с бурным развитием в последние десятилетия вычислительной и экспериментальной техники, а также вычислительных методов многие задачи, которые раньше решать было сложно и, в некоторых случаях невозможно, в настоящее время удается их решить. Это позволяет по-новому взглянуть на старые задачи, методы и идеи. Так, во

многих прикладных задачах необходимо иметь в своем арсенале значения высших производных исследуемой зависимости. Например, в экспериментальной физике: в оптике, физике конденсированного состояния, при исследовании электронного парамагнитного и ядерного магнитного резонансов и т. д. На практике широко применяется модуляционная методика, разработанная на случай малых амплитуд модуляции для слабой нелинейности и достаточно гладкой изучаемой зависимости [1–2] и др. В случае, когда зависимость имеет особенности и гистерезисные свойства, а также в случае больших амплитуд модуляции, когда в сигнале имеется значительное количество высших гармоник, разработан метод модуляционного Фурье-анализа [3–7]. Данный метод также часто используется в тех случаях, когда непосредственное измерение физической характеристики по каким-либо причинам затруднено. Например, исследуемая нелинейная часть зависимости «замаскирована» значительной её линейной частью или, например, зависимость является динамической. Известно, что регистрировать и усиливать переменный сигнал проще, чем статический сигнал, что приводит к меньшим погрешностям и к большей чувствительности прибора, измеряющего изучаемую зависимость. Численное дифференцирование непосредственного измерения с экспериментальной ошибкой исследуемой зависимости является в силу своей природы некорректной задачей и приводит к большим ошибкам ее производных [8–9]. Для корректности полученных результатов приходится сглаживать полученные результаты, а это приводит к потере ряда особенностей изучаемой зависимости, например, скачков или изломов. Кроме того, при экспериментальном исследовании динамических процессов часто приходится регистрировать первую и высшие гармоники исследуемой зависимости вместо непосредственного измерения самой зависимости. При этом возникает задача восстановления зависимости из ее гармоник. Также модуляционный Фурье-анализ можно применять для численного интегрирования дифференциальных уравнений.

Ранее в работах [3–7] получены формулы для коэффициентов Фурье функции, выраженные через ее производные, и даны предварительные оценки точности модуляционного восстановления исходных зависимостей. В работах [9–11] разработаны методы экспериментального восстановления дифференциального сопротивления и магнитной восприимчивости полупроводниковых и сверхпроводящих материалов.

## 2. Разложение функции с гармонически модулированным аргументом в ряды Тейлора и Фурье. Связь высших производных функции и ее коэффициентов Фурье

Рассмотрим зависимость, которая описывается функцией  $f(x) \in \mathbb{C}^\infty$  и разложим ее в ряд Тейлора в некоторой точке  $x_0$ , в интервале  $\Delta = (x_0 - R, x_0 + R)$ , где  $R$  – радиус сходимости ряда. Введем гармоническую функцию  $z(t) = h \cdot \cos(t)$  с амплитудой  $h$ . При  $|h| < R$  функции  $f(x_0 + z(t))$  соответствует ряд Тейлора, которому в силу периодичности и четности  $f$  от параметра  $t$ , соответствует ряд Фурье [3–7]:

$$f(x) = f(x_0 + h \cdot \cos(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \cos^n(t)}{n!} f^{(n)}(x_0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(mt), \quad (2.1)$$

где амплитуды гармоник (коэффициенты Фурье)  $A_m$  выражаются формулами:

$$A_m = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+m)!} \left(\frac{h}{2}\right)^{(2n+m)} f^{(2n+m)}(x_0). \quad (2.2)$$

Здесь функции  $f^{(k)}(x_0)$  являются производными  $k$ -го порядка от  $f(x)$  для  $x = x_0$ . Кроме того, амплитуды гармоник (2.2) в силу четности функции  $f$  от  $t$ , также можно выразить через интегралы [12–13]:

$$A_m(x_0, h) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x_0 + h \cos(t)) \cos(mt) dt, m = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Вычислим производную по параметру  $t$  от  $f(x) = f(x_0 + z(t))$ :

$$\frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = -h \sin(t) \left( \frac{dx}{dt} \right)_{x=x_0+h \cos t} = - \sum_{m=1}^{\infty} m A_m \sin(mt). \quad (2.4)$$

Положим в (2.4)  $t = \pi/2$  и в результате получим ряд для производной  $f(x)$  [5]:

$$\left( \frac{df}{dx} \right)_{x_0} = f^{(1)}(x_0) = \frac{1}{h} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+1) A_{2m+1}(x_0, h). \quad (2.5)$$

Для функции  $f(x)$  и ее второй производной [5] имеем:

$$f(x_0) = \frac{A_0(x_0, h)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_{2m}(x_0, h). \\ f^{(2)}(x_0) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (2m+2)^2 A_{2m+2}(x_0, h). \quad (2.6)$$

Для третьей, четвертой, пятой, шестой и седьмой производных, следуя алгоритму вычисления формулы (2.5), получим ряды:

$$f^{(3)}(x_0) = \frac{1}{h^3} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+3)^3 - (2m+3)] A_{2m+3}(x_0, h). \quad (2.7)$$

$$f^{(4)}(x_0) = \frac{1}{h^4} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+4)^4 - 4(2m+4)^2] A_{2m+4}(x_0, h). \quad (2.8)$$

$$f^{(5)}(x_0) = \frac{1}{h^5} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+5)^5 - 10(2m+5)^3 + 9(2m+5)] A_{2m+5}(x_0, h). \quad (2.9)$$

$$f^{(6)}(x_0) = \frac{1}{h^6} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+6)^6 - 20(2m+6)^4 + 64(2m+6)^2] A_{2m+6}(x_0, h). \quad (2.10)$$

$$f^{(7)}(x_0) = \frac{1}{h^7} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m [(2m+7)^7 - 35(2m+7)^5 + 259(2m+7)^3 - \\ - 225(2m+7)] A_{2m+7}(x_0, h). \quad (2.11)$$

В итоге получим коэффициенты Фурье, выраженные через производные (2.2) и производные, выраженные через коэффициенты Фурье (амплитуды гармоник) (2.5) – (2.11). Для численных приложений важны не столько ряды, сколько конечные суммы, аппроксимирующие  $f^{(k)}(x_0)$ .

Формулы (2.5)–(2.11) не требуют таких жестких ограничений, накладываемых на функцию  $f(x)$ , какие требуют формулы (2.2). Например, для справедливости формулы (2.5) необходимо, чтобы  $f(x)$  в точке  $x_0$  имела производную [12–13], которую можно вычислить с помощью выражений (2.3) и (2.5). Поэтому формулы (2.5)–(2.11) можно применять для приближения функций, у которых производные имеют особенности, например, разрывы первого рода. При этом возникает вопрос, на сколько ряды или конечные суммы, составленные из коэффициентов Фурье, соответствуют производным функции  $f(x)$ . Предварительно методом «регуляризации по здравому смыслу» [8; 14] (использование частных сумм ряда) без анализа корректности задачи восстановления и без учета степени убывания ошибки измерения амплитуд гармоник, указанный вопрос рассматривался в работах [5–7].

Коэффициенты Фурье  $A_m$ , с использованием формулы (2.3) можно вычислять численно, применяя различные квадратурные формулы, например, трапеций, Симпсона, Гаусса, Филона и др. Также амплитуды гармоник  $A_m(x_0, h)$  можно получать, экспериментально регистрируя в цифровом формате первую и высшие гармоники исследуемой зависимости образца при одновременном воздействии на него статического  $x_0$  и гармонического амплитудой  $h$  воздействий. В последнем случае возникает задача восстановления функции и ее производных по приближенно заданным (полученным экспериментально амплитудам гармоник) коэффициентам Фурье. Если оценивать отклонение суммы ряда в метрике  $C$ , то данная задача в метрике  $l_2$  является некорректной [8, 14].

### 3. Оценки точности восстановления производных функции по ее гармоникам

Рассмотрим функцию, имеющую производную  $(m + 1)$  порядка, удовлетворяющую условиям Дирихле [12; 13; 15], т. е.  $(m + 1)$ -производная имеет конечное число разрывов первого рода. В этом случае сходится ряд  $\sum_{m=1}^{\infty} k^m |A_k|$  и, соответственно, ряды (2.5)–(2.11), которые составлены из коэффициентов Фурье функции (2.1). Как было отмечено во введении, при экспериментальном исследовании некоторой зависимости физического процесса часто приходится регистрировать первую и высшие гармоники исследуемой зависимости, вместо непосредственного ее измерения. При этом возникает задача восстановления зависимости из ее гармоник. Как правило, регистрируются несколько гармоник с определенной ошибкой измерения. Необходимо восстановить исследуемую зависимость и оценить точность восстановления [5, 7]. Пусть нам необходимо определить производную безгистерезисной зависимости, имея в своем арсенале  $N$  экспериментально определенных первых  $k$  гармоник ( $k = 1, 2, \dots, N$ ). Допустим, что абсолютная ошибка  $\delta_k$  определения амплитуды гармоники  $A_k$  убывает с ростом номера  $k$  по закону:  $\delta_k = c/k^{1+\alpha}$ , где  $c$  (ошибка определения  $A_1$ ) и  $\alpha > 0$ . Это обусловлено тем, что амплитуды гармоник  $m$ -раз дифференцируемой функции убывают не медленнее, чем  $B/k^{m+1}$ . Здесь величина  $B > 0$  – некоторая постоянная. Поэтому измерение  $A_{k+1}$  желательно проводить с большей чувствительностью, чем  $A_k$ , и, соответственно, с меньшей абсолютной ошибкой. Оценим величину ошибки восстановления. Рассмотрим следующую функцию  $S(x)$ , которая является суммой ряда  $S = \sum_{m=1}^{\infty} A_k$ , где  $A_k$  –

коэффициенты ряда (2.1), и оценим ее ошибку  $\delta S$  восстановления:

$$\begin{aligned} \delta S &= \left| \sum_{k=1}^N (A_k - U_k) + \sum_{N+1}^{\infty} A_k \right| < \sum_{k=1}^N |A_k - U_k| + |R_N| = \sum_{k=1}^N c/k^{1+\alpha} + |R_N| < \\ &< c \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{N^\alpha} \right) \right] + |R_N|. \end{aligned}$$

Здесь  $U_k$  – экспериментально определенные коэффициенты Фурье (амплитуды гармоник), а  $R_N = \sum_{k=N+1}^{\infty} A_k$  – остаток ряда, который зависит от дифференциальных свойств функции (зависимости)  $f(x)$ . Очевидно, что при  $\alpha = 0$  и  $N \rightarrow \infty$  величина  $\delta S \rightarrow \infty$ , а задача будет некорректно поставленной. Оценим остаток ряда  $R_N$ . Для  $m$ -раз дифференцируемой функции амплитуды  $|A_k| \leq B/k^{m+1}$ , поэтому  $\sum_{k=N+1}^{\infty} |A_k| \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} B/k^{m+1} \leq B/(mN^m)$  [12–13]. Получим следующую оценку:

$$\delta S = \left| \sum_{k=1}^N (A_k - U_k) + \sum_{N+1}^{\infty} A_k \right| < c \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{N^\alpha} \right) \right] + \frac{B}{m} \frac{1}{N^m}. \quad (3.1)$$

В итоге, если ошибка измерения  $k$ -той гармоники убывает по закону  $\delta_k = c/k^{1+\alpha}$  ( $\alpha > 0$ ), тогда ошибка  $\delta S$  будет конечной величиной, а задача восстановления – корректной. Абсолютную ошибку восстановления суммы можно оценивать правой частью выражения (3.1). Заметим, что первый член в правой части (3.1), определяющий ошибку измерения, имеет следующие значения при  $N \rightarrow \infty$  и  $\alpha = 0$ :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} c \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{N^\alpha} \right) \right] = c \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

и

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} c \left[ 1 + \frac{1}{\alpha} \left( 1 - \frac{1}{N^\alpha} \right) \right] = c(1 + \ln N).$$

При очень малых значениях  $\alpha \ll 1$  ошибка растет пропорционально логарифму числа коэффициентов Фурье в первой сумме левой части неравенства (3.1), и задача будет плохо обусловленной, т. е. приводит к большим ошибкам восстановления. При значениях  $\alpha \sim 0,5 \div 2$  и более величина  $\delta S$  сравнима с ошибкой  $c$  измерения первой гармоники. Отметим, что при  $c = 0$  ошибка  $\delta S$  будет определяться количеством  $N$  учтенных гармоник и числом  $m$ , определяющим дифференциальные свойства восстанавливаемой функции, и равна второму члену в правой части (3.1). Таким образом, из результатов анализа полученной оценки (3.1) следует, что для соблюдения корректности задачи восстановления необходимо параметр  $\alpha$  выбирать не слишком малой величиной.

На основании полученных выше выводов найдем погрешность восстановления производной функции на основании формулы (2.5). Пусть на эксперименте были получены  $N$  нечетных зависимостей коэффициентов Фурье (амплитуд гармоник)  $U_{2n-1}(x_0, h)$  ( $n = 1, 2, \dots, N$ ) с ошибкой  $\delta_{2n-1} = c_1/(2n-1)^{2+\alpha}$ , тогда сумма  $f^{(1)}(x_0) \approx (1/h) \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} (2n-1) U_{2n-1}(x_0, h)$  (см. (2.5), для удобства счет в сумме начнем с  $n = 1$ ) аппроксимирует производную  $f(x)$  в точке  $x_0$ . Допустим, что  $f(x)$  имеет непрерывные производные  $m$ -порядка, а производная  $(m+1)$ -порядка удовлетворяет условиям Дирихле. Вычислим ошибку восстановления производной, следуя алгоритму

получения оценки (3.1) и формуле (2.5):

$$h \cdot \delta f^{(1)} = \left| \sum_{n=1}^N [(-1)^{n-1}(2n-1)(A_{2n-1} - U_{2n-1})] + \sum_{n=N+1}^{\infty} (-1)^{n-1}(2n-1)A_{2n-1} \right| < \\ < c_1 \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \frac{1}{(2N-1)^\alpha} \right) \right] + \frac{B}{m(2N-1)^m}.$$

Таким образом, ошибка восстановления производной определяется формулой:

$$\delta f^{(1)} = \frac{c_1}{h} \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left( 1 - \frac{1}{(2N-1)^\alpha} \right) \right] + \frac{B}{mh(2N-1)^m}. \quad (3.2)$$

Для второй и третьей производных получим следующие оценки:

$$\delta f^{(2)} = \frac{c_2}{h^2} \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{2^\alpha} - \frac{1}{(2N)^\alpha} \right) \right] + \frac{B}{mh^2(2N)^m}, \quad (3.3)$$

$$\delta f^{(3)} = \frac{c_3}{h^3} \left[ 1 + \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{(2N+1)^\alpha} \right) \right] + \frac{B}{mh^3(2N+1)^m}, \quad (3.4)$$

Заметим, что с ростом  $N$  при  $\alpha \rightarrow 0$  в квадратных скобках выражения (3.2)–(3.4) расходятся логарифмически, что делает задачу восстановления производных при очень малых значениях  $\alpha$  некорректной в силу больших значений первого члена правых частей (3.2)–(3.3). Также задача будет некорректной для очень малых амплитуд модуляции  $h$ , например, при  $|f^{(1)}| \sim c_1/h$ . Другими словами ошибка восстановления производной может быть сравнима или превышать значения самой производной, т. е.  $\delta f^{(1)} \sim |f^{(1)}|$ .

Таким образом, для выполнения корректности задачи восстановления необходимо выполнения следующих условий:

1. Параметр  $\alpha$ , определяющий степень убывания ошибки определения коэффициентов Фурье с ростом их номера, должен быть приближенно в пределах  $\alpha \sim 0,5 \div 2$ .

Амплитуда модуляции  $h$  должна быть значительной, например,  $h > c_1/|f^{(1)}|$ .

Если условия либо 1, либо 2 не выполняются, то необходимо ограничиться первыми  $N = 1 \div 3$  членами ряда Фурье. Амплитудами гармоник, значения которых сравнимы или меньше ошибки измерения, пренебречь. Абсолютную ошибку восстановления первой производной в этом случае можно оценивать по формуле [5, 7]:  $\delta f^{(1)} = (c_1/h)N^2$ . Ошибка восстановления в этом случае будет большой.

Ниже рассмотрим случаи численного восстановления производных исследуемой зависимости с помощью формул (2.5)–(2.7) на ряде примеров.

#### 4. Примеры восстановления производных

С использованием формул (2.5)–(2.7) первые три производные аппроксимировались суммой конечного числа  $N + 1$  слагаемых

$$F_N^{(1)}(x) = \frac{1}{h} \sum_{m=0}^N (-1)^m (2m+1) A_{2m+1}(x, h), \quad (4.1)$$

$$F_N^{(2)}(x) = \frac{1}{h^2} \sum_{m=0}^N (-1)^m (2m+2)^2 A_{2m+2}(x, h), \quad (4.2)$$

$$F_N^{(3)}(x) = \frac{1}{h^3} \sum_{m=0}^N (-1)^m [(2m + 3)^3 - (2m + 3)] A_{2m+3}(x, h). \tag{4.3}$$

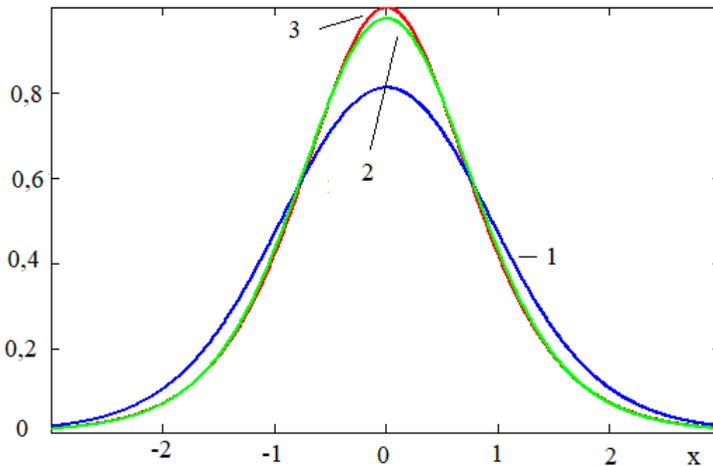
Коэффициенты Фурье  $A_1(x, h), \dots, A_5(x, h)$  определялись по формуле (2.3), полагая  $h = 1$ .

**Пример 4.1.** Рассмотрим зависимость, которую часто используют на практике, например, намагниченности тонкого сверхпроводящего диска, находящегося в критическом состоянии:  $f(x) = M \cdot \tanh(x)$ . Для простоты положим  $M = 1$ .

Расчеты производились в программной среде Mathcad с ошибками, обусловленными вычислительными алгоритмами данной среды, которыми пренебрегали в силу их малости, т. е. величины  $c_1, c_2$  и  $c_3 \cong 0$ . Таким образом, найденная ошибка восстановления определяется остаточным членом  $R_N$  содержащим неучтенные гармоники.

На Рис. 4.1 представлены графики точной первой производной функции  $f(x) = \tanh(x)$  и ее аппроксимации

$$F_0^{(1)}(x) = \frac{1}{h} A_1(x, h), \quad F_1^{(1)}(x) = \frac{1}{h} [A_1(x, h) - 3A_3(x, h)].$$



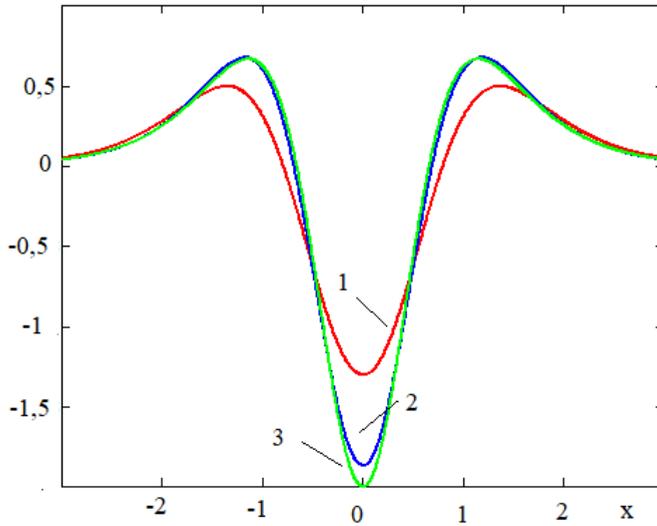
**Рис. 4.1.** Графики точной первой производной функции  $f(x) = \tanh(x)$  – (3) и их аппроксимации  $F_0^{(1)}(x)$  – (1),  $F_1^{(1)}(x)$  – (2)

**Fig. 4.1.** Graphs of exact first derivative of the function  $f(x) = \tanh(x)$  – (3) and their approximation  $F_0^{(1)}(x)$  – (1),  $F_1^{(1)}(x)$  – (2)

На Рис. 4.2 представлены графики точной третьей производной функции  $f(x) = \tanh(x)$  и ее аппроксимации

$$F_0^{(3)}(x) = \frac{24}{h^3} A_3(x, h), \quad F_0^{(3)}(x) = \frac{1}{h^3} [24A_3(x, h) - 120A_5(x, h)].$$

Из Рис. 4.1-4.2 видно, что даже при большой амплитуде модуляции  $h = 1$  амплитуды гармоник в силу гладкости функции резко спадают в зависимости от номера гармоники



**Рис. 4.2.** Графики точной третьей производной функции  $f(x) = \tanh(x) - (3)$  и их аппроксимации  $F_0^{(3)}(x) - (1)$ ,  $F_1^{(3)}(x) - (2)$

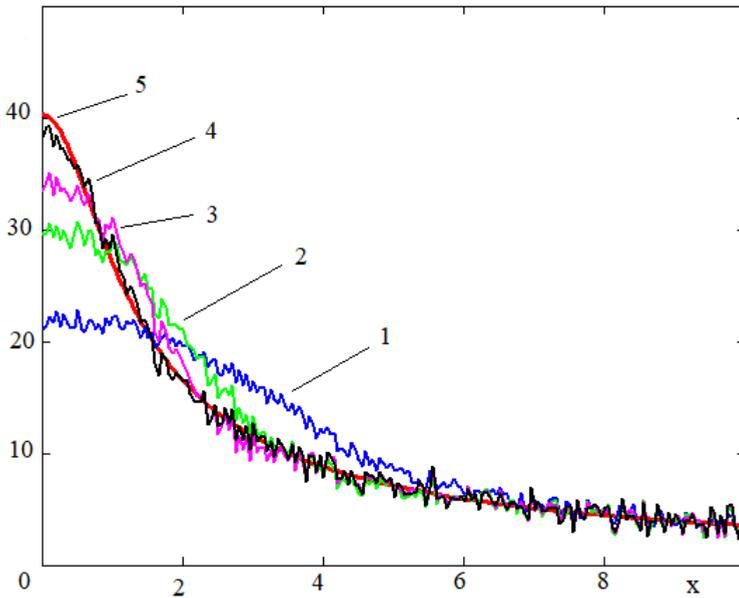
**Fig. 4.2.** Graphs of the exact third derivative of the function  $f(x) = \tanh(x) - (3)$  and their approximations  $F_0^{(3)}(x) - (1)$ ,  $F_1^{(3)}(x) - (2)$

и уже практически первые три нечетные гармоники в основном восстанавливают производные. При учете 5-ой гармоники восстановленная и аналитическая производные практически не различимы.

**Пример 4.2.** В данном примере в качестве функции  $f(x)$  в целях экспериментальной проверки была выбрана вольтамперная характеристика (ВАХ) двух встречно включенных полупроводниковых диодов, которая использовалась в работах [9–10]. Измерения ВАХ и амплитуд напряжения гармоник осуществлялось с экспериментальной ошибкой, которая убывала с ростом номера гармоники  $n$  как  $\delta_n \sim 1/n^{1,5}$ . В нашем случае  $x$  – величина постоянного тока, а  $h$  – амплитуда модуляции. Величины  $x$  и  $h$  определялись в мА,  $df/dx$  – Ом. Выбиралась большая амплитуда модуляции силы тока:  $h = 4$  мА. При такой амплитуде имеется много гармоник. Абсолютная ошибка измерения напряжения ВАХ равна  $\delta f = 1$  мВ. Здесь следует подчеркнуть, что для аппроксимации производных ВАХ использовались экспериментально определенные зависимости амплитуд гармоник  $A_m(x, h)$ , записанные в цифровом формате при изменении и фиксированной величины  $h$ .

На Рис. 4.3 приведены графики производных ВАХ полупроводниковой структуры, восстановленные с использованием  $N$  первых нечетных экспериментально определенных гармоник  $A_{2k-1}$  ( $k \leq N$ ) (форм. (4.1)).

Из Рис. 4.3 следует, что с ростом числа используемых гармоник точность восстановления увеличивается. При этом случайная ошибка восстановленной производной растет незначительно. Практически шести гармоник  $A_k$  ( $k = 1, 3, 5, \dots, 11$ ) достаточно для восстановления производной ВАХ для достаточно большой амплитуде модуляции.



**Рис. 4.3.** Графики точной первой производной ВАХ полупроводниковой структуры – (5) и их аппроксимации  $F_1^{(1)}(x)$  – (1),  $F_2^{(1)}(x)$  – (2),  $F_3^{(1)}(x)$  – (3),  $F_6^{(1)}(x)$  – (4)

**Fig. 4.3.** Graphs of the exact first derivative of the current-voltage characteristic of the semiconductor structure – (5) and their approximations  $F_1^{(1)}(x)$  – (1),  $F_2^{(1)}(x)$  – (2),  $F_3^{(1)}(x)$  – (3),  $F_6^{(1)}(x)$  – (4)

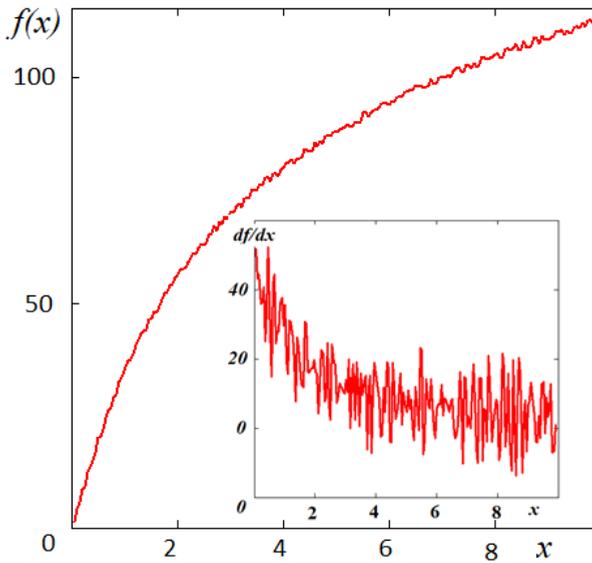
Следует отметить, что восстанавливаются хуже те области производной, где она имеет резкие изменения. Например, в окрестности  $x = 0$ . В этом случае следует уменьшить  $h$  так, чтобы величина  $h$  была меньше размера области резкого изменения функции.

На Рис. 4.4 приведена ВАХ и на вставке численно полученная производная с использованием формулы

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{2d}[f(m+1) - f(m-1)] + O(d^2). \quad (4.4)$$

Здесь  $d = 0,05$  (мА) – шаг измерения ВАХ. Абсолютная ошибка измерения напряжения ВАХ равна  $\delta f = 1$  (мВ). Из Рис. 4.4 на вставке видно, что ошибка полученной производной сравнима с величиной самой производной и равна  $\approx 40$  Ом. Применение формул, имеющих точность  $O(d^m)$ , где  $m > 2$ , не приводит к повышению точности. Поэтому здесь необходима процедура сглаживания, уменьшающая колебания производной, что делает задачу относительно корректной. Вместе с тем указанная процедура приводит к сглаживанию всех особенностей функции. Данная процедура имеет смысл для функций, относительно которых априори известно, что они являются достаточно гладкими.

На Рис. 4.5–4.6 изображены вторая и третья производные ВАХ полупроводниковой



**Рис. 4.4.** График ВАХ полупроводниковой структуры и ее производной, рассчитанной с использованием формулы (4.4)

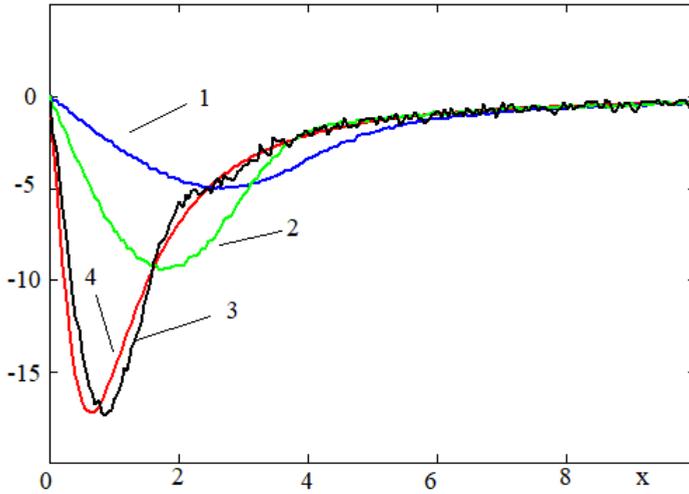
**Fig. 4.4.** Graph of the current-voltage characteristic of a semiconductor structure and its derivative, calculated using the formula (4.4)

структуры и ее аппроксимации, вычисленные по формулам (4.2)-(4.3) с использованием  $(N + 1)$  первых нечетных и четных экспериментально определенных амплитуд гармоник  $A_{2m+2}, A_{2m+3}, (m = 0, \dots, N)$  соответственно. Данного успеха невозможно было бы достичь прямым численным дифференцированием.

Видно, что их ошибки сравнимы с ошибками первой производной. На графике величина  $x$  приведена в мА,  $F_k^{(2)}(x)$  – Ом/мА,  $F_k^{(3)}(x)$  – Ом/мА<sup>2</sup>.

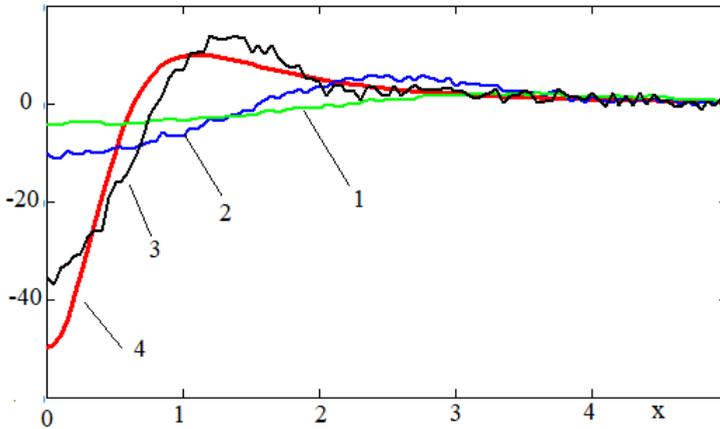
**Пример 4.3.** В этом примере приведены результаты восстановления производной функции  $f(x) = |x|$ . Заметим, что производная этой функция в точке  $x = 0$  имеет разрыв первого рода. Амплитуды гармоник  $A_k(x, h)$  имеют ошибки измерения, которые убывают быстрее, чем  $\delta_k = c/k^{1.5}$ . Здесь  $c = 0,01$  и  $\alpha = 0,5$ . «Ошибки измерения» добавлялись с помощью генератора случайных чисел, встроенного в Mathcad

Восстановленные первая и вторая производные приведены на Рис. 4.7-4.8. Из рисунков видно, что восстановленная производная с ростом числа гармоник стремится к аналитической производной  $y = \text{sign}(x)$ , а вторая производная к  $\delta(x)$  – дельта-функции Дирака. В области  $x \in (-h, h)$  производные имеют максимальные колебания, обусловленные не только ошибкой, но и свойствами тригонометрических полиномов вблизи особенностей аппроксимируемой функции. В пределе сумма ряда около особенности перейдет в «выброс» (явление Гиббса) [12].



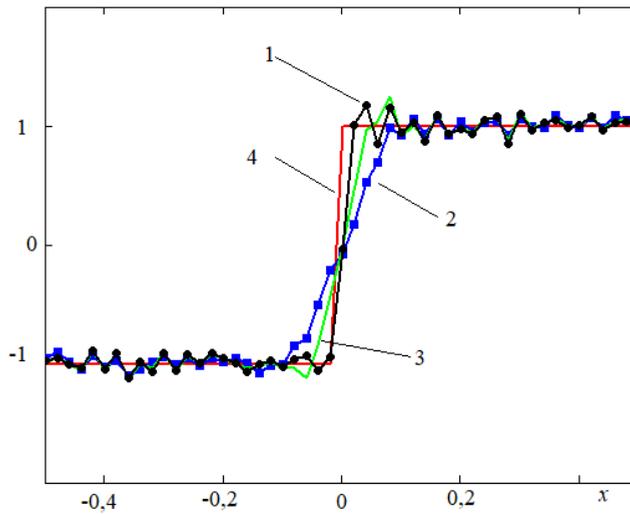
**Рис. 4.5.** Графики точной второй производной ВАХ полупроводниковой структуры – (4) и их аппроксимации  $F_1^{(2)}(x)$  – (1),  $F_2^{(2)}(x)$  – (2),  $F_6^{(2)}(x)$  – (3)

**Fig. 4.5.** Graphs of the exact second derivative of the current-voltage characteristic of the semiconductor structure – (4) and their approximations  $F_1^{(2)}(x)$  – (1),  $F_2^{(2)}(x)$  – (2),  $F_6^{(2)}(x)$  – (3)



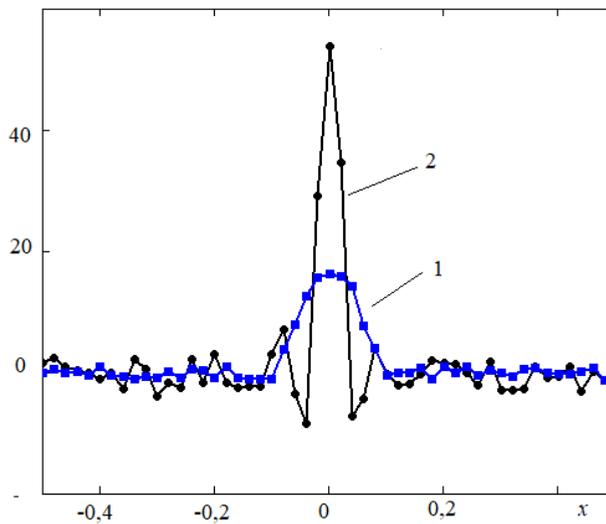
**Рис. 4.6.** Графики точной третьей производной ВАХ полупроводниковой структуры – (4) и их аппроксимации  $F_1^{(3)}(x)$  – (1),  $F_2^{(3)}(x)$  – (2),  $F_6^{(3)}(x)$  – (3)

**Fig. 4.6.** Graphs of the exact third derivative of the current-voltage characteristic of the semiconductor structure – (4) and their approximations  $F_1^{(3)}(x)$  – (1),  $F_2^{(3)}(x)$  – (2),  $F_6^{(3)}(x)$  – (3)



**Рис. 4.7.** Графики точной первой производной функции  $f(x) = |x| - (4)$  и их аппроксимации  $F_5^{(1)}(x) - (1)$ ,  $F_1^{(1)}(x) - (2)$ ,  $F_2^{(1)}(x) - (3)$

**Fig. 4.7.** Graphs of the exact first derivative of the function  $f(x) = |x| - (4)$  and their approximations  $F_5^{(1)}(x) - (1)$ ,  $F_1^{(1)}(x) - (2)$ ,  $F_2^{(1)}(x) - (3)$



**Рис. 4.8.** Графики аппроксимации второй производной функции  $f(x) = |x|$ :  
 $F_1^{(2)}(x) - (1)$ ,  $F_4^{(2)}(x) - (2)$

**Fig. 4.8.** Graphs of approximation of the second derivative of a function  $f(x) = |x|$ :  
 $F_1^{(2)}(x) - (1)$ ,  $F_4^{(2)}(x) - (2)$

## 5. Заключение

В работе получены формулы для нахождения высших (с первой по седьмую) производных функции, выраженные через ее коэффициенты Фурье. С помощью полученных выражений (2.5)–(2.11) высшие производные функций можно находить численно с любой точностью методами, например, численным интегрированием (2.3). Кроме того, коэффициенты Фурье (амплитуды гармоник) можно получать, например, при экспериментальном исследовании нелинейных физических процессов, возникающих в образце. В этом случае более целесообразно измерять не саму исследуемую зависимость, а гармоники этой зависимости  $A_m(x_0, h)$  при одновременном воздействии статического (или медленно меняющегося)  $x_0$  и гармонического амплитудой  $h$  воздействий, регистрируя в цифровом формате первую и высшие гармоники исследуемой зависимости. Выполнен анализ корректности задачи восстановления производных из коэффициентов Фурье и получены формулы для оценки ошибок полученных производных (3.2)–(3.4). Приведены условия оптимальности выполнения задачи восстановления: 1) параметр  $\alpha$  лучше выбирать в пределах  $\alpha \sim 0,5 - 2$ ; 2) параметр  $h > c_n/|f^{(n)}|$ . При невыполнении указанных условий необходимо ограничиться первыми  $N$  членами ряда Фурье, а ошибку восстановления можно оценивать, например, для первой гармоники по формуле:  $\delta f^{(1)} \approx (c_1/h)N^2$ . Для демонстрации развитого метода приведены три различных примера: 4.1, 4.2 и 4.3.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение. М.: Мир, 1974, 430 с.
2. Вертц Дж., Болтон Дж. Теория и практические приложения метода ЭПР. М.: Мир, 1975, 548 с.
3. Кузьмичев Н. Д. Поведение намагниченности поликристаллических образцов  $YBa_2Cu_3O_{7-x}$  в слабых магнитных полях // Письма в ЖТФ. 1991. Т. 17, № 7. С. 56–60.
4. Кузьмичев Н. Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // ЖТФ. 1994. Т. 64, № 12. С. 63–74.
5. Кузьмичев Н. Д. Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 1. С. 70–80.
6. Кузьмичев Н. Д. Модуляционная методика восстановления исходных зависимостей и их производных в случае произвольных амплитуд модуляции // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20, № 22. С. 39–43.
7. Кузьмичев Н. Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производны // ЖТФ. 1997. Т. 37, № 7. С. 124–127.
8. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1986, 288 с.

9. Кузьмичев Н. Д., Васютин М. А., Шилкин Д. А. Экспериментальное определение вольт-амперной характеристики нелинейной полупроводниковой структуры с помощью модуляционного Фурье-анализа // ФТП. 2016. Т. 50, № 6. С. 830–833.
10. Кузьмичев Н. Д., Васютин М. А. Дифференциальные уравнения для восстановления производной без гистерезисной нелинейной вольт-амперной характеристики полупроводниковой структуры // ФТП. 2019. Т. 53, № 1. С. 111–114.
11. Кузьмичев Н. Д., Васютин М. А., Шитов А. Ю., Бурьянов И. В. Дифференциальные уравнения для восстановления средней дифференциальной восприимчивости сверхпроводников из измерений первой гармоники намагниченности // Журнал Средневожского математического общества. 2018. Т. 20, № 3. С. 327–337.
12. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления М.: Наука, 1970. Т. 2., 800 с.; Т. 3., 656 с.
13. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Наука, 1974. Т. 2. 656 с.
14. Арсенин В. Я. Методы математической физики и специальные функции. М.: Наука, 1984. 384 с.
15. Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х. Математический анализ. Продолжение курса / под. ред. А. Н. Тихонова. М.: Изд-во МГУ, 1987. 358 с.

*Поступила 14.01.2024; доработана после рецензирования 18.02.2024;  
принята к публикации 27.02.2024*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. L. Solymar, *Tunneling effect in superconductors and its application*, Mir Publ., Moscow, 1974 (In Russ.), 430 p.
2. J. Vertc, J. Bolton, *Theory and practical applications of the EPR method*, Mir Publ., Moscow, 1975 (In Russ.), 548 p.
3. N.D. Kuzmichev, “Behavior of the magnetization of polycrystalline YBa<sub>2</sub>Cu<sub>3</sub>O<sub>7-x</sub> samples in weak magnetic fields”, *JTF Letters*, **17**:7 (1991), 56–60 (In Russ.).
4. N.D. Kuzmichev, “Hysteresis magnetization and generation of harmonics by magnetic materials: Analysis of the spectrum of magnetization harmonics on the example of high-temperature superconductors”, *JTF*, **64**:12 (1994), 63–74 (In Russ).
5. N.D. Kuzmichev, “Application of the Taylor-Fourier series for the numerical and experimental determination of the derivatives of the dependence under study”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:1 (2011), 70–80 (In Russ).

6. N. D. Kuzmichev, “Modulation technique for restoring the original dependences and their derivatives in the case of arbitrary modulation amplitudes”, *JTF Letters*, **20**:22 (1994), 39–43 (In Russ).
7. N. D. Kuzmichev, “Estimates of errors in the modulation recovery of the response function and its derivatives”, *JTF*, **37**:7 (1997), 124–127 (In Russ).
8. A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Methods for solving ill-posed problems*, Nauka Publ., Moscow, 1986 (In Russ.), 288 p.
9. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, D. A. Shilkin, “Experimental determination of the derivative of the current-voltage characteristic of a nonlinear semiconductor structure using modulation Fourier analysis”, *FTP*, **50**:6 (2016), 830–833 (In Russ.).
10. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, D. A. Shilkin, “Differential equations for restoring the derivative without hysteresis of the nonlinear current-voltage characteristic of a semiconductor structure”, *FTP*, **53**:1 (2019), 111–114 (In Russ.).
11. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, D. A. Shilkin, I. V. Buryanov, “Differential Equations for reconstructing the average differential susceptibility of superconductors from measurements of the first harmonic of magnetization”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **20**:3 (2018), 327–335 (In Russ.).
12. G. M. Fichtenholtz, *Course of differential and integral calculus*, **2, 3**, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russ.), 800, 656 p.
13. V. I. Smirnov, *Course of higher mathematics*, Nauka Publ., Moscow, 1974 (In Russ.), 656 p.
14. V. Ya. Arsenin, *Methods of mathematical physics and special functions*, Nauka Publ., Moscow, 1984 (In Russ.), 656 p.
15. V. A. Ilyin, V. A. Sadovnichy, B. Kh. Sendov, *Mathematical analysis. Continuation of the course*, Moscow State University Publ., 1987 (In Russ.), 358 p.

*Submitted 14.01.2024; Revised 18.02.2024; Accepted 27.02.2024*

*The author has read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.26.202401.60-73

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.711.3:531.36:62-50

## О стабилизации движений трехзвенного робота-манипулятора с неполным измерением

Л. В. Колегова

*Ульяновский государственный университет (г. Ульяновск, Россия)*

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается математическая модель манипулятора, представляющего собой вертикальную колонку и присоединенные к ней последовательно два звена, а также захват с грузом. Колонка, опираясь на неподвижное основание, может вращаться вокруг своей вертикальной оси. Звенья соединены посредством цилиндрических шарниров, позволяющих им вращаться в одной и той же вертикальной плоскости. Колонка и звенья моделируются как твердые тела, при этом звенья имеют неравные главные моменты инерции. Положение манипулятора в пространстве определяется тремя углами поворота колонки и звеньев. Манипулятор может иметь следующие типы установившихся программных движений. При компенсации гравитационных моментов управляющими моментами, приложенными в цилиндрических шарнирах, манипулятор имеет заданное программное положение равновесия. Манипулятор также может иметь программное движение, в котором колонка вращается с заданной постоянной угловой скоростью, а звенья имеют заданные относительные положения равновесия в своей плоскости. Исследуется задача о стабилизации указанных программных движений манипулятора посредством управляющих моментов с обратной связью при измерении только углов поворота колонки и звеньев. Поставленная задача решается в виде нелинейного пропорционально-интегрального регулятора с учетом цилиндрического фазового пространства математической модели манипулятора. Решение состоит в построении функционала Ляпунова со знакопостоянной производной и в применении соответствующих теорем об асимптотической устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа. Полученные условия стабилизируемости программных движений имеют робастный характер относительно массоинерционных параметров манипулятора. Результаты численного моделирования управляемого движения манипулятора демонстрируют глобальное притяжение к заданному его положению в цилиндрическом фазовом пространстве.

**Ключевые слова:** робот-манипулятор, стабилизация движения, управление, неполное измерение, устойчивость, функционал Ляпунова

**Для цитирования:** Колегова Л. В. О стабилизации движений трехзвенного робота-манипулятора с неполным измерением // Журнал Средневолжского математического общества. 2024. Т. 26, № 1. С. 60–73. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.60-73>

*Об авторах:*

**Колегова Любовь Владимировна**, ассистент кафедры информационной безопасности и теории управления Ульяновского государственного университета (432017, Россия, Ульяновск, ул. Л. Толстого, 42), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-7734-983X>, [flv\\_603@mail.ru](mailto:flv_603@mail.ru)

© Л. В. Колегова



MSC2020 70E60

# On the motion stabilization of a three-link robotic manipulator with incomplete measurement

L. V. Kolegova

*Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)*

**Abstract.** This paper considers a mathematical model of a manipulator which consists of a vertical column, two links, connected to it in series, and a gripper with a load. The column resting on a fixed base can rotate around its vertical axis. The links are connected by cylindrical hinges allowing them to rotate in the same vertical plane. The column and the links are modeled as rigid bodies with the links having unequal principal moments of inertia. The position of the manipulator in space is determined by three rotation angles of the column and the links. The manipulator can have several types of steady-state program movements. When gravitational torques are compensated by control torques applied in the cylindrical hinges, the manipulator has a program equilibrium position. The manipulator can also have a program motion when the column rotates at a given constant angular velocity, and the links have given relative equilibrium positions in their plane. The stabilization problem of manipulator motion is investigated by means of control torques with feedback when only the rotation angles of the column and links are measured. The problem posed is solved in the form of a nonlinear proportional-integral controller taking into account the cylindrical phase space of the manipulator's mathematical model. The solution includes construction of a Lyapunov functional with a semi-definite derivative and application of the corresponding theorems on the asymptotic stability of non-autonomous functional differential retarded-type equations. The obtained conditions for the program motion stabilization are robust with respect to the mass-inertial parameters of the manipulator. The numerical simulation results demonstrate global attraction to its given position in cylindrical phase space.

**Keywords:** robot manipulator, motion stabilization, control, incomplete measurement, stability, Lyapunov functional

**For citation:** L. V. Kolegova. On the motion stabilization of a three-link robotic manipulator with incomplete measurement. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 26:1(2024), 60–73. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.26.202401.60-73>

*About the authors:*

**Lubov V. Kolegova**, Assistant, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (42, Leo Tolstoy st., Ulyanovsk 432017, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-7734-983X>, [flv\\_603@mail.ru](mailto:flv_603@mail.ru)

## 1. Введение

Интенсивная автоматизация технологий и производств, широкое применение роботов-манипуляторов в различных областях человеческой деятельности с одновременным ростом требований к их надежности, точности, энергозатратности и других факторов эффективной эксплуатации стимулируют активные работы в соответствующих областях науки и инженерии. В число важных научных задач входят математическое моделирование манипуляторов на основе нелинейных уравнений и их движе-

ния, обоснование структуры управления с учетом недостаточной определенности массо-инерционных и других параметров, неполноты и ограниченности управления, неполного измерения фазовых координат, необходимости глобальной и полуглобальной управляемости и стабилизируемости программных движений.

Трехзвенный манипулятор на первых этапах развития робототехники являлся одним из основных промышленных роботов. В настоящее время такой манипулятор имеет достаточно широкое применение в научных лабораториях [1], для выполнения простых операций в индустрии [2], в качестве составляющего устройства сложных робототехнических систем. Точность и надежное функционирование роботов-манипуляторов стимулируют активные исследования по моделированию их кинематики и динамики, соответствующим методам их анализа [2–5]. Точная динамическая модель робота-манипулятора имеет множество преимуществ для проектирования систем управления движением, анализа механической конструкции и моделирования его движения [6–7]. В проблеме о математическом моделировании и конструировании структуры управления робота-манипулятора актуальными являются задачи об обосновании управления с неполной обратной связью, с неполным измерением фазовых координат, при неизвестных массово-инерционных и других параметрах манипулятора, учете положительного действия гравитационных сил и иных факторов.

Задача об управлении движением трехзвенного манипулятора являлась предметом изучения многочисленных работ. Из последних работ, относящихся непосредственно к исследованиям в данной статье, выделим следующие. Различные аспекты и особенности применения пропорционально-интегро-дифференцирующего регулятора (ПИД-регулятор) в зависимости от цели исследуемой конкретной задачи рассмотрены в работах [1, 6]. Статистика показывает, что ПИД-регуляторы составляют более 90 % промышленных регуляторов с обратной связью, используемых сегодня [6, 8]. В работах [9–11] предложены иные подходы для построения управления трехзвенными манипуляторами. В [9] метод, разработанный на основе преобразования координат, позволяет достичь глобальной стабилизации нулевого положения равновесия горизонтального трехзвенного манипулятора посредством неполного управления с измерением только его положения. Как отмечается в этой и других работах [12–13] регулятор без измерения скорости, не требующий установки датчиков скоростей, снижает стоимость всей структуры управления и позволяет избежать начального влияния на нее, вызванного «шумами» скоростей.

Целью настоящей работы является задача о построении в нелинейной постановке для пространственного трехзвенного манипулятора структуры ограниченного управления, обеспечивающей стабилизацию его установившихся программных движений без измерения угловых скоростей.

Во втором разделе работы выводятся уравнения динамики манипулятора, состоящего из последовательно соединенных при помощи цилиндрических шарниров трех тел: вертикальной колонки и двух несимметричных звеньев, при этом последнее звено имеет захват с грузом. Дана постановка задачи о стабилизации движения такой модели манипулятора в нелинейной форме.

В третьем разделе представлен закон управления в виде нелинейного ПИД-регулятора, обеспечивающий решение задачи о полуглобальной стабилизации заданного положения манипулятора.

В четвертом разделе излагается решение задачи о стабилизации движения, в котором вертикальная колонка равномерно вращается вокруг своей оси, а звенья занимают заданные положения в плоскости вращения.

В пятом разделе представлены графические результаты численного моделирования в среде Scilab управляемых движений манипулятора под действием построенного ПИ-регулятора. В заключении приводится обсуждение полученных результатов.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается математическая модель трехзвенного манипулятора с вертикальной колонкой, опирающейся на неподвижное основание и вращающейся вокруг своей вертикальной оси, его звенья соединены последовательно с колонкой и между собой цилиндрическими шарнирами, позволяющими им вращаться в одной вертикальной плоскости. Принимается, что колонка и звенья представляют собой твердые тела, второе звено имеет захват, содержащий груз. Схематическая модель представлена на Рис. 2.1. Через  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$  обозначены точки, соответствующие цилиндрическим шарнирам. Предполагается, что центры масс  $C_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) колонки и звеньев лежат на продольных осях  $O_1O_2$ ,  $O_2O_3$  и  $O_3O_4$  соответственно, где  $O_4$  – точка закрепления груза, принимаемого за материальную точку. Обозначены длины:  $|O_2O_3| = l_2$ ,  $|O_3O_4| = l_3$ ,  $|O_2C_2| = l_{21}$ ,  $|O_3C_3| = l_{31}$ .

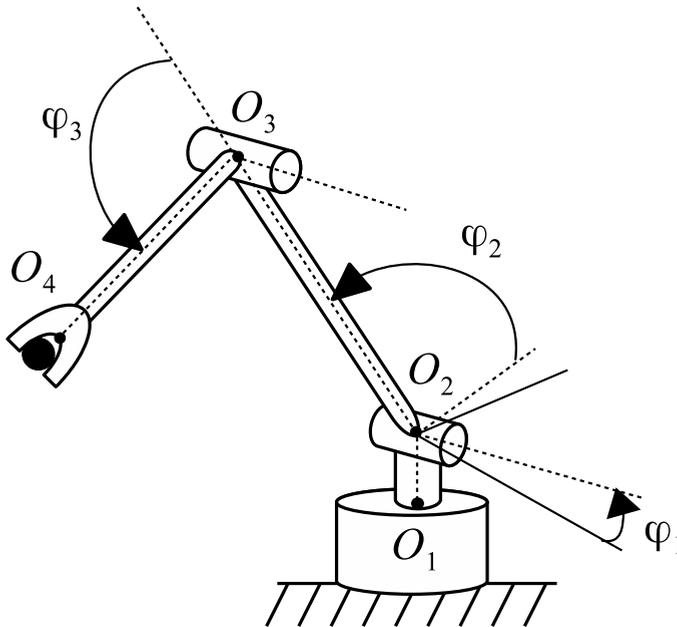


Рис. 2.1. Схема трехзвенного робота-манипулятора

Fig 2.1. Diagram of a three-link robotic manipulator

Вводятся системы координат  $O_1x_1y_1z_1$ ,  $C_2x_2y_2z_2$ ,  $C_3x_3y_3z_3$  так, что оси  $O_1y_1$ ,  $C_2y_2$ ,  $C_3y_3$  направлены вдоль продольных осей  $O_1O_2$ ,  $O_2O_3$ ,  $O_3O_4$ , при этом  $C_1y_1$ ,  $C_2y_2$  и  $C_3y_3$  являются центральными осями инерции, а главные центральные оси инерции  $C_2x_2$  и  $C_3x_3$  перпендикулярны вертикальной плоскости расположения манипулятора. Массы звеньев и захвата полагаются равными  $m_2$ ,  $m_3$  и  $m_0$  соответственно. Момент инерции колонки относительно ее оси вращения равен  $I_1$ , главные центральные моменты инер-

ции звеньев относительно осей  $C_2x_2y_2z_2$  и  $C_3x_3y_3z_3$  соответственно равны  $I_{2x}$ ,  $I_{2y}$ ,  $I_{2z}$ ,  $I_{3x}$ ,  $I_{3y}$  и  $I_{3z}$ . При этом отсутствует симметричность звеньев в поперечной плоскости, т. е.  $I_{2x} \neq I_{2z}$ ,  $I_{3x} \neq I_{3z}$ .

Данную модель можно принять за модель руки робота-манипулятора [14], за модель промышленного робота [15–16].

Кинетическая энергия системы равна следующему выражению

$$T = \frac{1}{2}(a_{11}\dot{\varphi}_1^2 + a_{22}\dot{\varphi}_2^2 + 2a_{23}\dot{\varphi}_2\dot{\varphi}_3 + a_{33}\dot{\varphi}_3^2),$$

где  $a_{11} = a_{11}(\varphi_2, \varphi_3) = I_1 + I_{2y} \cos^2 \varphi_2 + I_{2z} \sin^2 \varphi_2 + I_{3y} \cos^2(\varphi_2 + \varphi_3) + I_{3z} \sin^2(\varphi_2 + \varphi_3) + m_2 l_{21}^2 \sin^2 \varphi_2 + m_3 (l_2 \sin \varphi_2 + l_{31} \sin(\varphi_2 + \varphi_3))^2 + m_0 (l_2 \sin \varphi_2 + l_3 \sin(\varphi_2 + \varphi_3))^2$ ,  
 $a_{22} = a_{22}(\varphi_3) = I_{2x} + I_{3x} + m_2 l_{21}^2 + m_3 (l_2^2 + l_{31}^2 - 2l_2 l_{31} \cos \varphi_3) + m_0 (l_2^2 + l_3^2 - 2l_2 l_3 \cos \varphi_3)$ ,  
 $a_{23} = a_{23}(\varphi_3) = I_{3x} + m_3 (l_{31}^2 - l_2 l_{31} \cos \varphi_3) + m_0 (l_3^2 - l_2 l_3 \cos \varphi_3)$ ,  $a_{33} = I_{3x} + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2$ .

Потенциальная энергия манипулятора с точностью до постоянной определяется равенством

$$\Pi = -g(m_2 l_{21} + m_3 l_2 + m_0 l_2) \cos \varphi_2 - g(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \cos(\varphi_2 + \varphi_3).$$

Согласно уравнениям Лагранжа движение манипулятора под действием управляющих моментов  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$ , приложенных в цилиндрических шарнирах  $O_1$ ,  $O_2$  и  $O_3$ , моделируется уравнениями в матричном виде

$$A(\varphi)\ddot{\varphi} = C(\varphi, \dot{\varphi})\dot{\varphi} - G(\varphi) + U, \quad (2.1)$$

$$\text{где } A(\varphi) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad C(\varphi, \dot{\varphi}) = \begin{pmatrix} c_{11}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{12}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{13}(\varphi, \dot{\varphi}) \\ c_{21}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{22}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{23}(\varphi, \dot{\varphi}) \\ c_{31}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{32}(\varphi, \dot{\varphi}) & c_{33}(\varphi, \dot{\varphi}) \end{pmatrix},$$

$$\varphi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3), \quad G^T(\varphi) = (0, g_2(\varphi_2, \varphi_3), g_3(\varphi_2, \varphi_3)), \quad U^T = (U_1, U_2, U_3),$$

$$c_{11} = c_{11}^{(1)}\dot{\varphi}_2 + c_{11}^{(2)}\dot{\varphi}_3, \quad c_{12} = c_{11}^{(1)}\dot{\varphi}_1, \quad c_{13} = c_{11}^{(2)}\dot{\varphi}_1,$$

$$c_{11}^{(1)} = -\frac{1}{2}((I_{2z} - I_{2y} + m_2 l_{21}^2 + (m_3 + m_0)l_2^2) \sin(2\varphi_2) + (I_{3z} - I_{3y} + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2) \sin 2(\varphi_2 + \varphi_3) + 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin(2\varphi_2 + \varphi_1)),$$

$$c_{11}^{(2)} = -\frac{1}{2}((I_{3z} - I_{3y} + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2) \sin 2(\varphi_2 + \varphi_3) + 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_2 \cos(\varphi_2 + \varphi_1)),$$

$$c_{21} = -\frac{1}{2}c_{11}^{(1)}\dot{\varphi}_1,$$

$$c_{22} = -l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3,$$

$$c_{23} = -l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_2 - l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_3 \dot{\varphi}_3,$$

$$c_{31} = -\frac{1}{2}c_{11}^{(2)}\dot{\varphi}_1, \quad c_{32} = l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) \sin \varphi_2, \quad c_{33} = 0,$$

$$g_2 = g_2^{(0)} \sin \varphi_2 + g_3^{(0)} \sin(\varphi_2 + \varphi_3), \quad g_3 = g_3^{(0)} \sin(\varphi_2 + \varphi_3),$$

$$g_2^{(0)} = g(m_2 l_{21} + m_3 l_2 + m_0 l_2), \quad g_3^{(0)} = g(m_3 l_{31} + m_0 l_3),$$

$(\cdot)^T$  – операция транспонирования.

Уравнение (2.1) описывает движение манипулятора в цилиндрическом фазовом пространстве переменных  $\dot{\varphi}_1$ ,  $\dot{\varphi}_2$ ,  $\dot{\varphi}_3$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ .

В работе рассматривается задача об определении управляющего момента  $U$ , обеспечивающего стабилизацию заданных программных движений манипулятора.

### 3. Задача о стабилизации заданного положения манипулятора в пространстве

Пусть

$$\dot{\varphi} = 0, \varphi^{(0)} = (\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)})^T \tag{3.1}$$

есть заданное положение манипулятора.

Определим управляющий момент  $U$ , обеспечивающий стабилизируемость положения (3.1) с учетом цилиндрического фазового пространства без измерения скоростей.

Положим

$$U = (U_1, U_2, U_3)^T,$$

где

$$\begin{aligned} U_1 &= -\alpha_1 \sin \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1^{(0)}}{2} + \\ &+ \beta_1 \cos \frac{\varphi_1(t) - \varphi_1^{(0)}}{4} \int_{t-h_1}^t \gamma_1(\tau - t) \sin \frac{\varphi_1(\tau) - \varphi_1^{(0)}}{4} d\tau, \\ U_2 &= g_2^{(0)} \sin \varphi_2^{(0)} \cos(\varphi_2(t) - \varphi_2^{(0)}) + \\ &+ g_3^{(0)} \sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}) \cos(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}) - \\ &- \alpha_2 \sin \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2^{(0)}}{2} + \beta_2 \cos \frac{\varphi_2(t) - \varphi_2^{(0)}}{4} \int_{t-h_2}^t \gamma_2(\tau - t) \sin \frac{\varphi_2(\tau) - \varphi_2^{(0)}}{4} d\tau - \\ &- \alpha_4 \sin(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}), \\ U_3 &= g_3^{(0)} \sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}) \cos(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}) - \\ &- \alpha_3 \sin \frac{\varphi_3(t) - \varphi_3^{(0)}}{2} + \beta_3 \cos \frac{\varphi_3(t) - \varphi_3^{(0)}}{4} \int_{t-h_3}^t \gamma_3(\tau - t) \sin \frac{\varphi_3(\tau) - \varphi_3^{(0)}}{4} d\tau - \\ &- \alpha_4 \sin(\varphi_2(t) + \varphi_3(t) - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где параметры управления удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \gamma_j(t) &\geq 0, \dot{\gamma}_j(s) \geq \nu_0 > 0 \quad \forall s \in [-h_j, 0] \quad (h_j > 0), \quad \int_{-h_j}^0 \gamma_j(\tau) d\tau \leq \gamma_0 \quad (j = 1, 2, 3), \\ \alpha_1 - \frac{\beta_1 \gamma_0}{2} &= \mu_1 > 0, \quad \alpha_2 - \frac{\beta_2 \gamma_0}{2} + 2g_2^{(0)} \cos \varphi_2^{(0)} = \mu_2 > 0, \\ \alpha_3 - \frac{\beta_3 \gamma_0}{2} &= \mu_3 > 0, \quad \alpha_4 + g_3^{(0)} \cos(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}) = \mu_4 > 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Для вывода необходимого результата применим теорему об асимптотической устойчивости на основе функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную [12].

Выберем функционал Ляпунова

$$\begin{aligned} V(t, \dot{\varphi}(t), \varphi(t), \varphi^\tau(t)) &= T(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) + \Pi_1(\varphi(t)) + \\ &+ \sum_{j=1}^3 \beta_j \int_{-h_j}^0 \gamma_j(\tau) \left( \sin \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j^{(0)}}{4} - \sin \frac{\varphi_j(t + \tau) - \varphi_j^{(0)}}{4} \right)^2 d\tau, \end{aligned}$$

где через  $\varphi^\tau(t)$  обозначена вектор-функция  $\varphi^\tau(t) = (\varphi_1^\tau(t), \varphi_2^\tau(t), \varphi_3^\tau(t))^T$ ,  $\varphi_j^\tau(t) = \varphi_j(t + \tau)$

$t$ ),  $-h_j \leq \tau \leq 0$ ,  $j = 1, 2, 3$ ,

$$\begin{aligned} \Pi_1(\varphi) = & 2 \sum_{j=1}^3 \left( \alpha_j - \frac{\beta_j \gamma_0}{2} \right) \left( 1 - \cos \frac{\varphi_j - \varphi_j^{(0)}}{2} \right) + g_2^{(0)} \cos \varphi_2^{(0)} (1 - \cos(\varphi_2 - \varphi_2^{(0)})) + \\ & + (\alpha_4 + g_3^{(0)} \cos(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)})) (1 - \cos(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_2^{(0)} - \varphi_3^{(0)})). \end{aligned}$$

Несложно вывести, что для выбранного функционала Ляпунова имеет место оценка

$$V \geq \lambda_1 \sum_{j=1}^3 \dot{\varphi}_j^2(t) + \lambda_2 \sum_{j=1}^3 \sin^2 \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j^{(0)}}{4} \quad (\lambda_1, \lambda_2 > 0).$$

Производная функционала Ляпунова в силу уравнений (3.1) при управлении (3.2) согласно неравенствам (3.3) имеет следующую оценку:

$$\dot{V} \leq -\nu_0 \sum_{j=1}^3 \beta_j \int_{-h_0}^0 \left( \sin \frac{\varphi_j(t) - \varphi_j^{(0)}}{2} - \sin \frac{\varphi_j(t + \tau) - \varphi_j^{(0)}}{2} \right)^2 d\tau \leq 0.$$

Множество  $\{\dot{V} = 0\}$  при условиях (3.3) может содержать только установившиеся движения уравнений (2.1) с управлением (3.2),  $\varphi(\tau) \equiv \varphi(t)$  ( $t - h_0 \leq \tau \leq t$ ,  $h_0 = \min(h_1, h_2, h_3)$ ) или  $\{\varphi(t) = const, \dot{\varphi}(t) \equiv 0\}$ . Однако согласно этим уравнениям находим, что такими движениями могут быть положения

$$\varphi_j(t) \equiv \varphi_j^{(0)} + 2\pi k_j \quad k_j \in Z \quad (j = 1, 2, 3). \quad (3.4)$$

В соответствии с указанной теоремой из [12] заключаем, что управление (3.2) обеспечивает стабилизируемость положения манипулятора (3.1). А именно, любое возмущенное движение неограниченно приближается к одному из положений (3.4). При этом множество положений  $\{\dot{\varphi} = 0, \varphi_j(t) = \varphi_j^{(0)} + 4\pi k_j, k_j \in Z, j = 1, 2, 3\}$  является асимптотически устойчивым.

#### 4. Задача о стабилизации установившегося движения манипулятора

Пусть в программном движении манипулятора первое звено вращается по заданному закону вокруг вертикальной оси, а два других звена сохраняют постоянные относительные положения во вращающейся плоскости их действия

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1(t) = \dot{\varphi}_1^{(0)}, \quad \varphi_1^{(0)}(t) = \varphi_1^{(0)} t, \quad \dot{\varphi}_2(t) = \dot{\varphi}_3(t) = 0, \\ \varphi_2(t) = \varphi_2^{(0)} = const, \quad \varphi_3(t) = \varphi_3^{(0)} = const. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Манипулятор совершает движение (4.1) при условии, что в шарнирах 2 и 3 приложены постоянные моменты, уравновешивающие центробежные моменты, вызванные вращением первого звена, и моменты сил тяжести

$$\begin{aligned} U_2^{(0)} = \frac{1}{2} c_{11}^{(1)}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) (\dot{\varphi}_1^{(0)})^2 + g_2^{(0)} \sin \varphi_2^{(0)} + g_3^{(0)} \sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}), \\ U_3^{(0)} = \frac{1}{2} c_{11}^{(1)}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) (\dot{\varphi}_1^{(0)})^2 + g_3^{(0)} \sin(\varphi_2^{(0)} + \varphi_3^{(0)}). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Введем возмущения

$$x_1 = \varphi_1 - \varphi_1^{(0)}(t), \quad x_2 = \varphi_2 - \varphi_2^{(0)}, \quad x_3 = \varphi_3 - \varphi_3^{(0)}.$$

Покажем, что стабилизация программного движения (4.1) решается моментами

$$\begin{aligned} U_1^{(1)} &= U_1 - U_1^{(0)} = -\alpha_1 \sin \frac{x_1(t)}{2} + \beta_1 \cos \frac{x_1(t)}{4} \int_{-h_1}^0 \gamma_1(\tau) \sin \frac{x_1(t+\tau)}{4} d\tau, \\ U_2^{(1)} &= U_2 - U_2^{(0)} = -\alpha_2 x_2(t) + \beta_2 \int_{-h_2}^0 \gamma_2(\tau) x_2(t+\tau) d\tau, \\ U_3^{(1)} &= U_3 - U_3^{(0)} = -\alpha_3 x_3(t) + \beta_3 \int_{-h_3}^0 \gamma_3(\tau) x_3(t+\tau) d\tau, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где параметры  $\alpha_j > 0, \beta_j > 0$  ( $j = 1, 2, 3$ ) удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \gamma_j(\tau) &\geq 0, \quad \dot{\gamma}_j(\tau) \geq \nu_0 > 0 \quad \forall \tau \in [-h_j, 0], \quad (h_j > 0), \quad (j = 1, 2, 3), \\ \int_{-h_0}^0 \gamma_j(\tau) d\tau &\geq \gamma_0 > 0, \\ \mu_1 &= \alpha_1 - \frac{\beta_1 \gamma_0}{2} > 0, \\ \mu_2 &= \alpha_2 - \beta_2 \gamma_0 - g_2^{(0)} - g_3^{(0)} - |I_{2x} - I_{2z}| - m_2 l_{21}^2 - |I_{3z} - I_{2z}| - \\ &\quad - m_3 l_{31}^2 - m_0 l_3^2 - 4m_3 l_3 l_{31} - 4m_0 l_2 l_3 > 0, \\ \mu_3 &= \alpha_3 - \beta_3 \gamma_0 - g_3^{(0)} - |I_{3z} - I_{2z}| - m_3 l_{31}^2 - m_0 l_3^2 - 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3) > 0, \\ 4\mu_2 \mu_3 - (|I_{3z} - I_{3y}| + m_3 l_{31}^2 + m_0 l_3^2 + 2l_2(m_3 l_{31} + m_0 l_3))^2 &> 0. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Выберем функционал Ляпунова в виде

$$\begin{aligned} V(t, \dot{x}(t), x(t), x_\tau(t)) &= T(\dot{x}(t), x(t)) + \Pi(x(t)) - \sum_{j=2}^3 \frac{\partial \Pi}{\partial \varphi_j}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) x_j(t) - \\ &\quad - \Pi(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) - \frac{1}{2} a_{11}(x_2, x_3)(\dot{\varphi}_1^{(0)})^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \frac{\partial a_{11}}{\partial \varphi_j}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) (\varphi_1^{(0)})^2 x_j(t) - \\ &\quad - \frac{1}{2} a_{11}(\varphi_2^{(0)}, \varphi_3^{(0)}) (\dot{\varphi}_1^{(0)})^2 + 2 \left( \alpha_1 - \frac{\beta_1 \gamma_0}{2} \right) \left( 1 - \cos \frac{x_1(t)}{2} \right) + \\ &\quad + \beta_1 \int_{-h_0}^0 \gamma_1(\tau) \left( \sin \frac{x_1(t)}{4} - \sin \frac{x_1(\tau+t)}{4} \right)^2 d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 (\alpha_j - \beta_j \gamma_0) x_j^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=2}^3 \int_{-h_0}^0 \gamma_j(\tau) (x_j(t) - x_j(t+\tau))^2 d\tau. \end{aligned}$$

Можно найти, что для функционала  $V$  в силу условий (4.4) при малых  $|x_2|$  и  $|x_3|$  имеет место оценка

$$V \geq \lambda_1 (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2) + \lambda_2 \sin^2 \frac{x_1(t)}{4} + \lambda_3 (x_2^2(t) + x_3^2(t)), \quad (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 > 0).$$

Для производной функционала  $V(t)$  в силу уравнений (3.1) в соответствии с управлением (4.3), согласно условиям (4.4), находим оценку

$$\dot{V}(t) \leq -\nu_0 \int_{-h_0}^0 \left( \sin \frac{x_1(t)}{4} - \sin \frac{x_1(t+\tau)}{4} \right)^2 d\tau - \nu_0 \sum_{j=2}^3 \int_{-h_0}^0 (x_j(t) - x_j(t+\tau))^2 d\tau \leq 0.$$

Множество  $\{\dot{V}(t) = 0\}$  может содержать лишь те движения  $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ , которые удовлетворяют равенствам

$$\sin \frac{x_1(t)}{4} = \text{const}, \quad x_2(t) = \text{const}, \quad x_3(t) = \text{const}. \quad (4.5)$$

Из уравнений (3.1) с управлением (4.3) следует, что движения (4.5) при малых  $|x_2(t)|$  и  $|x_3(t)|$  таковы, что

$$x_1(t) \equiv 2\pi k \quad (k \in Z), \quad x_2(t) \equiv 0, \quad x_3(t) \equiv 0.$$

Соответственно, согласно [12], находим асимптотическую устойчивость движений

$$\varphi_1(t) = \varphi_1^{(0)}t + 4\pi k \quad (k \in Z), \quad \varphi_2(t) = \varphi_2^{(0)}, \quad \varphi_3(t) = \varphi_3^{(0)}.$$

## 5. Результаты численного моделирования

Выберем параметры робота в соответствии со значениями индустриального трехзвенного манипулятора [16]:

$$\begin{aligned} m_2 &= 15.91 \text{ кг}, \quad m_3 = 6.82 \text{ кг}, \quad m_0 = 2.5 \text{ кг}, \\ l_2 &= 0.5 \text{ м}, \quad l_3 = 0.5 \text{ м}, \quad l_{21} = 0.2 \text{ м}, \quad l_{31} = 0.2 \text{ м}, \\ I_1 &= 0.0267 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{2x} = 3.7691 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{2y} = 3.6939 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{2z} = 0.01 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \\ I_{3x} &= 0.2245 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{3y} = 0.2842 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad I_{3z} = 0.0904 \text{ кг} \cdot \text{м}^2. \end{aligned}$$

Желаемое положение манипулятора выберем в виде:

$$\varphi_1^{(0)} = \pi/4 \text{ рад}, \quad \varphi_2^{(0)} = -\pi/3 \text{ рад}, \quad \varphi_3^{(0)} = \pi/6 \text{ рад}.$$

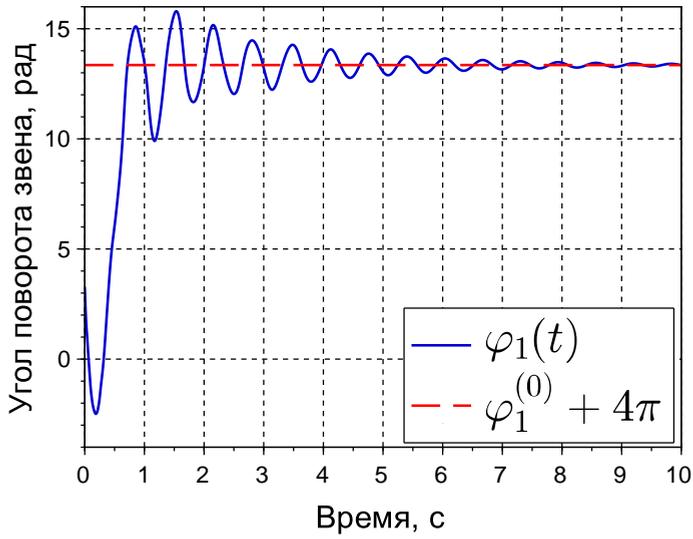
Подберем параметры управляющих моментов исходя из условий (4.4) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \alpha_k &= 2700, \quad \beta_k = 80\alpha_k, \\ \gamma_k(t) &= e^{90t}, \quad h_k = 0.2 \text{ с}, \quad k = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

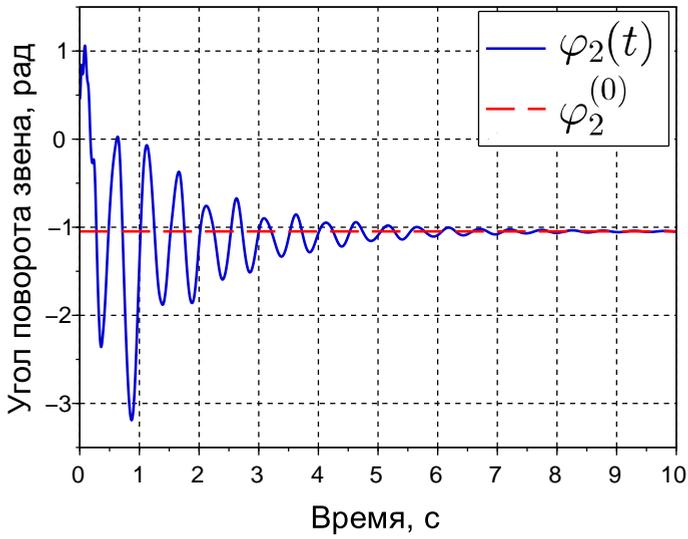
Чтобы продемонстрировать свойство глобального притяжения к заданному положению манипулятора, начальные отклонения и начальные скорости выберем достаточно большими:

$$\begin{aligned} x_1(0) &= 2.5 \text{ рад}, \quad x_2(0) = 1.5 \text{ рад}, \quad x_3(0) = 3.1 \text{ рад}, \\ \dot{\varphi}_1(0) &= 45 \text{ с}^{-1}, \quad \dot{\varphi}_2(0) = 2 \text{ с}^{-1}, \quad \dot{\varphi}_3(0) = -25 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

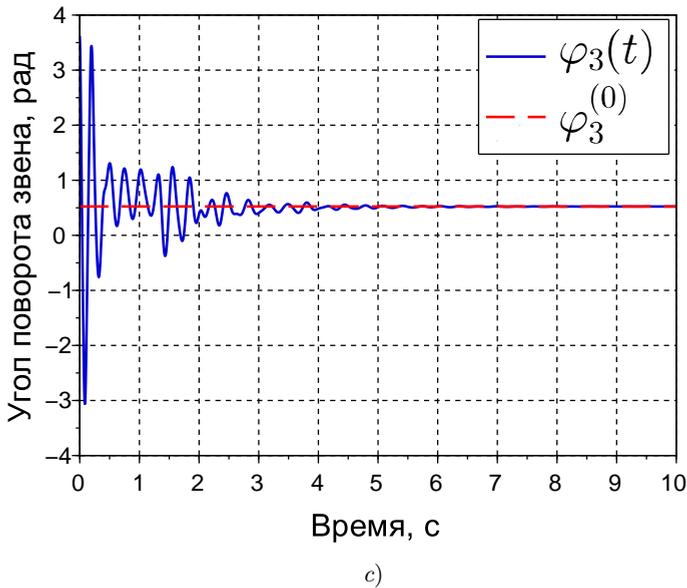
Результаты численного моделирования управляемого движения робота-манипулятора под управлением (3.2) в среде Scilab 5.5.2 демонстрируют стабилизацию заданного положения, как это видно из Рис. 5.1. При этом вращательное движение колонки в силу больших начальных скоростей приводится к заданному положению, смещенному на два полных оборота, что соответствует полученному решению задачи о стабилизации в цилиндрическом фазовом пространстве.



a)



b)



**Рис. 5.1.** Зависимости от времени углов поворота звеньев манипулятора: *a)* первое звено (вертикальная колонка); *b)* второе звено; *c)* третье звено

**Fig 5.1.** Dependence on the time of rotation of the manipulator links: *a)* first link (vertical column); *b)* second link; *c)* third link

## 6. Заключение

В работе рассмотрена задача об управлении вертикально расположенным трехзвенным роботом-манипулятором с грузом. Важной особенностью математической модели его динамики является учет несимметричности ведомых звеньев в поперечных сечениях. Обоснована модель ограниченного управления, обеспечивающего полуглобальную стабилизацию программного положения манипулятора при измерении только его угловых координат. При этом в зависимости от выбранного положения может быть учтено положительное действие гравитационных моментов для стабилизации. Рассматриваемый манипулятор может иметь программное движение в виде вращения колонки с постоянной скоростью и заданного положения ведомых звеньев во вращающейся вертикальной плоскости. Обосновано управление, обеспечивающее стабилизацию такого движения только при измерении угловых координат робота. Обоснованное управление представляет собой ПИ-регулятор достаточно простой структуры. Отсутствие датчиков скоростей позволяет снизить затраты на его конструирование и эксплуатацию. Параметры ПИ-регулятора определяют в виде явной теоретической зависимости от массоинерционных параметров манипулятора и заданного программного движения. При необходимости управление может быть выбрано робастным по отношению к нагрузке и заданному классу программных движений. Все это позволяет составить достаточно простой, но универсальный алгоритм программного продукта по управлению манипу-

лятором. Представлено численное моделирование обоснованного управления с использованием параметров известного индустриального трехзвенного манипулятора.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект № 22-71-00062, <https://rscf.ru/project/22-71-00062/>).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jangid M. K., Kumar S., Singh J. Trajectory tracking optimization and control of a three link robotic manipulator for application in casting // International Journal of Advanced Technology and Engineering Exploration. 2021. Vol. 8, No 83. pp. 1255. DOI: <https://doi.org/10.19101/IJATEE.2021.874468>
2. Ivanov S. E., Zudilova T., Voitiuk T., Ivanova L. N. Mathematical modeling of the dynamics of 3-DOF robot-manipulator with software control // Procedia Computer Science. 2020. Vol. 178. pp. 311–319. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.11.033>
3. Wu J., Yan R.-J., Shin K.-S., Han C.-S., Chen I.-M. A 3-DOF quick-action parallel manipulator based on four linkage mechanisms with high-speed cam // Mechanism and Machine Theory. 2017. Vol. 115. pp. 168–196. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.04.012>
4. Arian A., Danaei B., Abdi H., Nahavandi S. Kinematic and dynamic analysis of the Gantry-Tau, a 3-DoF translational parallel manipulator // Applied Mathematical Modelling. 2017. Vol. 51. pp. 217–231. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.06.012>
5. Zhang L., Yan X., Zhang Q. Design and analysis of 3-DOF cylindrical-coordinate-based manipulator // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. 2018. Vol. 52. pp. 35–45. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2018.02.006>
6. Ahmad S. G., Elbanna A. S., Elksas M. S., Areed F. G. Dynamic modelling with a modified PID controller of a three link rigid manipulator // Int. J. Comput. Appl. 2018. Vol. 179, No. 34. pp. 1–6.
7. Sciavicco L., Siciliano B. Modelling and Control of Robot Manipulators. – 2nd ed. Springer, 2000. DOI: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/11/12/709>
8. O’Dwyer A. Handbook of PI and PID controller tuning rules. – 3rd ed. London: Imperial College Press, 2009. 623 p.
9. Zhang A., Lai X., Wu M., She J. Global stabilization of underactuated spring-coupled three-link horizontal manipulator using position measurements only // Applied Mathematical Modelling. 2015. Vol. 39, No 7. pp. 1917–1928. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.010>
10. Yen V. T., Nan W. Y., Van Cuong P. Robust adaptive sliding mode neural networks control for industrial robot manipulators // International Journal of Control, Automation and Systems. 2019. Vol. 17. pp. 783–792. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12555-018-0210-y>

11. Yang X., Zhang X., Chen Z., Xu Sh., Liu P. X. Udwadia-Kalaba approach for three link manipulator dynamics with motion constraints // *IEEE Access*. 2019. Vol. 7. pp. 49240–49250. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2909934>
12. Андреев А. С., Перегудова О. А. О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей // *Прикладная математика и механика*. 2017. Т. 81, Вып. 2. С. 137–153.
13. Андреев А. С., Перегудова О. А. Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голономной механической системы // *Прикладная математика и механика*. 2018. Т. 82. Вып. 2. С. 156–176.
14. Черноусько Ф., Ананьевский И., Решмин С. Методы управления нелинейными механическими системами. 2022. 328 с.
15. Chertopolokhov V. A. On the problem of synchronization of virtual and real movements for virtual reality systems // *Journal of Physics: Conference Series*. 2021. Vol. 2056, No 1. P. 012052. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2056/1/012052>
16. Nikolic I. Z., Milivojevic I. Application of pseudo-derivative feedback in industrial robots controllers // *Facta Univ. (Nis), Mech. Autom. Contr. Robot*. 1998. Vol. 2, No. 8. pp. 741–756.

*Поступила 15.01.2024; доработана после рецензирования 12.02.2024;  
принята к публикации 27.02.2024*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. M. K. Jangid, S. Kumar, J. Singh, “Trajectory tracking optimization and control of a three link robotic manipulator for application in casting”, *International Journal of Advanced Technology and Engineering Exploration*, **8**:83 (2021), 1255. DOI: <https://doi.org/10.19101/IJATEE.2021.874468>
2. S. E. Ivanov, T. Zudilova, T. Voitiuk, L. N. Ivanova, “Mathematical modeling of the dynamics of 3-DOF robot-manipulator with software control”, *Procedia Computer Science*, **178** (2020), 311–319. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.procs.2020.11.033>
3. J. Wu, R.-J. Yan, K.-S. Shin, C.-S. Han, I.-M. Chen, “A 3-DOF quick-action parallel manipulator based on four linkage mechanisms with high-speed cam”, *Mechanism and Machine Theory*, **115** (2017), 168–196. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.mechmachtheory.2017.04.012>
4. A. Arian, B. Danaei, H. Abdi, S. Nahavandi, “Kinematic and dynamic analysis of the Gantry-Tau, a 3-DoF translational parallel manipulator”, *Applied Mathematical Modelling*, **51** (2017), 217–231. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.06.012>
5. L. Zhang, X. Yan, Q. Zhang, “Design and analysis of 3-DOF cylindrical-coordinate-based manipulator”, *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*, **52** (2018), 35–45. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rcim.2018.02.006>

6. S. G. Ahmad, A. S. Elbanna, M. S. Elksas, F. G. Areed, “Dynamic modelling with a modified PID controller of a three link rigid manipulator”, *Int. J. Comput. Appl.*, **179** (2018), 1–6.
7. L. Sciavicco and B. Siciliano, *Modelling and Control of Robot Manipulators. – 2nd ed.*, Springer, 2000 DOI: <https://doi.org/10.1088/0957-0233/11/12/709>.
8. A. O’Dwyer, *Handbook of PI and PID Controller Tuning Rules, 3rd ed.*, Imperial College Press, London, 2009, 623 p.
9. A. Zhang, X. Lai, M. Wu, J. She, “Global stabilization of underactuated spring-coupled three-link horizontal manipulator using position measurements only”, *Applied Mathematical Modelling*, **39:7** (2015), 1917–1928. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.10.010>
10. V. T. Yen, W. Y. Nan, P. Van Cuong, “Robust adaptive sliding mode neural networks control for industrial robot manipulators”, *International Journal of Control, Automation and Systems*, **17** (2019), 783–792. DOI: <https://doi.org/10.1007/s12555-018-0210-y>
11. X. Yang, X. Zhang, Z. Chen, Sh. Xu, P. X. Liu, “Udwadia-Kalaba approach for three link manipulator dynamics with motion constraints”, *IEEE Access*, **7** (2019), 49240–49250. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2019.2909934>
12. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, “Stabilization of the preset motions of a holonomic mechanical system without velocity measurement”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **81:2** (2017), 95–105.
13. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, “Nonlinear regulators in the position stabilization problem of the holonomic mechanical system”, *Mechanics of Solids*, **53** (2018), 22–38.
14. F. L. Chernous’ko, I. M. Ananievski, S. A. Reshmin, *Control of nonlinear dynamical systems: methods and applications*, Springer Science & Business Media, 2008.
15. V. A. Chertopolokhov, “On the problem of synchronization of virtual and real movements for virtual reality systems”, *Journal of Physics: Conference Series*, **2056:1** (2021), 012052. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2056/1/012052>
16. I. Z. Nikolic, I. Milivojevic, “Application of pseudo-derivative feedback in industrial robots controllers”, *Facta Univ. (Nis), Mech. Autom. Contr. Robot*, **2:8** (1998), 741–756.

*Submitted 15.01.2024; Revised 12.02.2024; Accepted 27.02.2024*

*The author has read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 75-ЛЕТИЮ

ВЛАДИМИРА ФЕДОРОВИЧА ТИШКИНА



Сердечно поздравляем главного редактора журнала – члена-корреспондента РАН, профессора, доктор физико-математических наук, заведующего отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва, Россия) Владимира Федоровича Тишкина с юбилеем. От всей души желаем ему крепкого здоровья, счастья, талантливых учеников и новых научных достижений!

*Редколлегия журнала,  
Средне-Волжское математическое общество,  
Коллектив Национального исследовательского  
Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва*

## ПОЗДРАВЛЯЕМ С ЮБИЛЕЕМ ИРИНУ ПРОКОФЬЕВНУ РЯЗАНЦЕВУ



Ирина Прокофьевна Рязанцева родилась 16 января 1949 г. в селе Енкаево Кадомского района Рязанской области. Школу закончила в 1966 г. с золотой медалью в пос. Кадом. В этом же году сдала вступительные экзамены на физико-математический факультет Мордовского госуниверситета в г. Саранске. Позже перевелась в Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского на факультет вычислительной математики и кибернетики (ВМК). В 1971 г. она окончила ВМК Горьковского государственного университета (ГГУ) с красным дипломом, в этом же году стала инженером математического отдела научно-исследовательского радиофизического института (НИРФИ) при ГГУ.

И. П. Рязанцева защитила кандидатскую диссертацию в 1979 году в г. Свердловск, а в 1998 г. – докторскую диссертацию в совете Новосибирского университета (председатель совета – академик РАН М. М. Лаврентьев). В настоящее время работает профессором кафедры прикладной математики Нижегородского государственного технического университета им. Р. Е. Алексеева.

Научную работу Ирина Прокофьевна начала с Я. И. Альбером, трудясь над нелинейными обратными некорректными задачами. Основопологающей для этого раздела математики стала работа А. Н. Тихонова, опубликованная 80 лет назад в журнале «Доклады АН СССР»: «Об устойчивости обратных задач». 1943. Т. 39, № 5. С. 195-198. Ранее считали некорректной обобщенную обратную задачу по Адамару, если при

возмущении данных задача становилась неустойчивой, то есть якобы не имела практического значения. В 1960-х гг. А. Н. Тихонов впервые ввел определение регуляризирующего семейства операторов для обобщенного уравнения с непрерывным линейным оператором в гильбертовом пространстве. А. Н. Тихонов предложил также метод построения приближенного решения, устойчивого к возмущениям или погрешностям данных, сводящийся к нахождению этого регуляризирующего семейства операторов. М. М. Лаврентьев и В. К. Иванов разработали некоторые варианты методов для линейных операторов, которые обычно также называют их именами. Так приблизительно начинался раздел математики, называемый "обратные некорректные задачи в который также внесли важный вклад иностранные авторы Ф. Е. Браудер, Х. Брезис, Р. Клюге, Р. Т. Рокафеллар.

Отметим результаты, полученные И. П. Рязанцевой. Так, ею была установлена сходимость операторного метода регуляризации обобщенных монотонных уравнений и обобщенных вариационных неравенств в банаховом пространстве при приближенном задании данных. Для некоторого класса задач получены достаточные условия существования решения, найдены оценки скорости сходимости. Обоснован выбор параметра регуляризации обобщенной невязки, как алгоритма, при известном и неизвестном уровне ошибки данных задач для монотонных уравнений и вариационных неравенств. Выбор параметра регуляризации применен к четырем типам классических некорректных задач. Для монотонных операторов модифицирован метод невязки и квазирешений и метод сглаживающего функционала А. Н. Тихонова. Исследована сходимость нескольких известных методов итеративной регуляризации монотонных уравнений в банаховом пространстве. Показана эквивалентность вариационных методов операторному методу регуляризации. Получено достаточное условие сходимости проекционных методов для квазирешений и невязки, для аккретивных уравнений, для нестационарного итеративного процесса. Исследовано псевдорешение монотонных уравнений и геометрии банахового пространства, разрешимость вариационных неравенств неограниченными полумонотонными отображениями. Предложен непрерывный и итеративный метод регуляризации 1-го порядка с квази-, смешанными вариационными неравенствами в банаховом пространстве, либо с операторами обобщенного проектирования, либо без. Предложен непрерывный метод 1-го порядка с аккретивными включениями в банахово пространство и монотонные включения в гильбертово пространство. Предложен непрерывный и итеративный метод регуляризации 2-го порядка экстремальных задач и квазिवариационных неравенств в банаховом пространстве. Предложен непрерывный и итеративный метод 3-го порядка монотонных операторных уравнений в гильбертовом пространстве. Исследована устойчивость стационарных решений нелинейных дифференциальных уравнений некоторого класса в гильбертовом пространстве, непрерывный и итеративный метод регуляризации нахождения обобщенной неподвижной точки нерастягивающего отображения на множестве гильбертова пространства.

Ирина Прокофьевна опубликовала около 140 работ в отечественных и иностранных журналах. Написаны две монографии: «Нелинейные некорректные задачи монотонного типа» (2006 г.) совместно с Я. И. Альбером в издательстве Springer (390 ссылок-цитирований), «Избранные главы теории операторов монотонного типа» (2008 г.) в издательстве Нижегородского технического университета. Подготовила для студентов ряд пособий по математическому и функциональному анализу, теории операторов, обратным некорректным задачам и ведет соответствующие курсы лекций.

И. П. Рязанцева является членом редколлегии научного рецензируемого журнала «Журнал Средневожского математического общества», двух советов по защите дис-

сергаций, а также постоянным участником научных конференций и школ-семинаров по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию, проводимых Национальным исследовательским Мордовским государственным университетом.

Свой юбилей Ирина Прокофьевна встречает в полном расцвете творческих сил. От всей души желаем ей крепкого здоровья, новых научных достижений, счастья и благополучия!

*Редколлегия журнала,*

*Средне-Волжское математическое общество,*

*Коллектив Нижегородского государственного  
технического университета им. Р.Е. Алексеева*

*Коллектив Нижегородского государственного  
университета им. Н.И. Лобачевского*

*Коллектив Московского государственного  
университета имени М.В. Ломоносова*

*Коллектив Национального исследовательского Мордовского  
государственного университета им. Н.П. Огарёва*

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

**УДК.** Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

**MSC2020.** Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аффилиция автора(-ов):** название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

**Информация об авторе(-ах).** Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

**Объем аннотаций** на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

**Ключевые слова.** Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

— *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

**Список литературы на русском языке** оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

**Список литературы на английском языке** оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

#### **Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.****Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р.А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р.А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Статьи в журналах на английском языке.**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Статьи в электронном журнале на русском языке.**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке.**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Книги (монографии и сборники) на русском языке.**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Статьи в материалах конференций на русском языке.**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

**UDC.** The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

**MSC2020 codes** The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

**Affiliate author(s):** the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

**Information about the author(s).** The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

**Keywords.** The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

**References** formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

*Books (monographs and collections) in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

**Examples of bibliographic references for the section *References*.**

**Journal articles in Russian.**

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Journal articles in English:**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Articles in the electronic journals in Russian:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Articles in collections in Russian:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

## Правила верстки рукописей в системе LaTeX

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

*Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.*

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation\***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение **table** с вложенным окружением **tabular**:

*The rules for article layout in the LaTeX system*

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

- а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

- б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

- в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

- г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

- д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

- е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmbib.sty`**

### Статьи в журналах на русском языке

**В разделе `thebibliography`:**

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paref О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневожского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

**Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):**

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

**Статьи в электронном журнале на русском языке****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**Статьи в сборниках на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib4}  
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев  
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий  
\inbook Прикладная математика и механика  
\publaddr Ульяновск  
\publ УлГТУ  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}  
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
\publaddr Ulyanovsk  
\publ UIGTU Publ.  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13  
\lang In Russ.
```

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib5}  
\by Ю. Н. Бибииков  
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений  
\publaddr М.  
\publ Выш. шк.  
\yr 1991  
\totalpages 303
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}  
\by Yu. N. Bibikov  
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential  
equations]  
\publaddr Moscow  
\publ Visshay shkola Publ.  
\yr 1991  
\totalpages 303  
\lang In Russ.
```

**Статьи в материалах конференций на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib6}
```

---

---

```
\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

## The rules for article layout in the LaTeX system

*Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.*

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

*If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.*

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation\*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
```

```
\caption{Table name \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} \label{shamanaevtable1}
```

*The rules for article layout in the LaTeX system*

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Design of pictures.** To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

- a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

- b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

- c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

- e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

- f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

- g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmbib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

**Examples of bibliographic references' using commands from the svmbib.sty package**

**Journal articles in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

```
\lang In Russ.
```

**Journal articles in English:**

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
```

```
\by M. J. Berger, J. Oliger
```

```
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
```

```
\jour Journal of Computational Physics
```

```
\yr 1984
```

```
\vol 53
```

```
\pages 484–512
```

**Articles in the electronic journals in Russian**

```
\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

**Articles in collections in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.
```

**Books (monographs and collections) in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential
equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.
```

**Conference proceedings in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

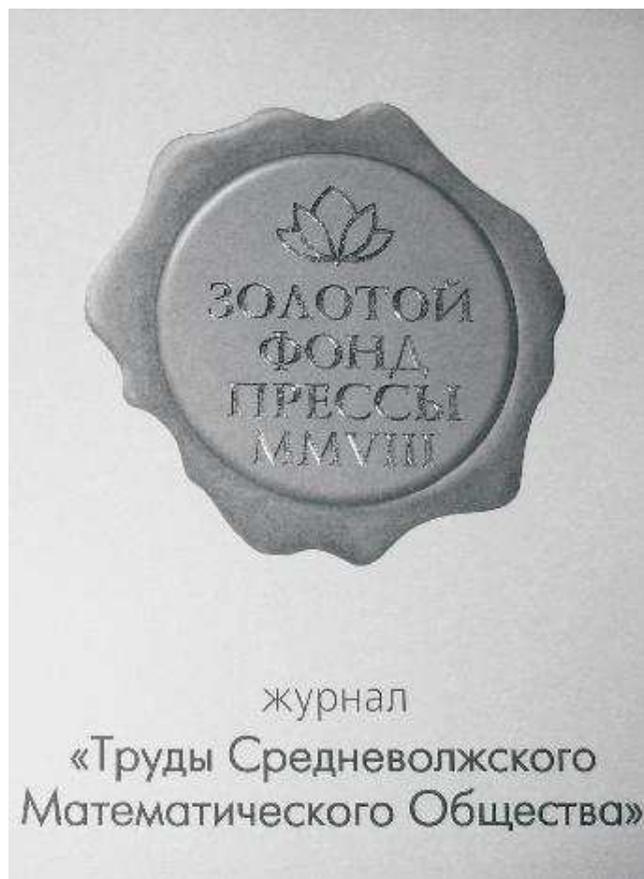
## Алфавитный указатель авторов

Алексеев В. Е.	11
Гермидер О. В.	20
Захарова Д. В.	11
Зелик С. В.	32
Колегова Л. В.	60
Кузьмичев Н. Д.	44
Попов В. Н.	20
Починка О. В.	32
Ягилев А. А.	32

## Author Index

V. E. Alekseev	11
O. V. Germider	20
L. V. Kolegova	60
N. D. Kuzmichev	44
V. N. Popov	20
O. V Pochinka	32
A. A. Yagilev	32
D. V. Zakharova	11
S. V. Zelik	32

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*  
Перевод: *Сыромясов А. О.*  
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 20.03.2024. Дата выхода в свет 31.03.2024. Цена свободная.

Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 8,75 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 164.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования «Национальный  
исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»  
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,  
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*  
Translation: *A. O. Syromyasov*  
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 20.03.2024. Date of publishing 31.03.2024. Free price.

Sheet size 70x108  $\frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 8,75.

Number of copies 100. Order no. 164.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University  
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,  
Republic of Mordovia, Russia





