

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 25 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 3

2023

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 25, № 3. 2023

DOI 10.15507/2079-6900.25.202303

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 25, NO. 3. 2023

DOI 10.15507/2079-6900.25.202303

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.
Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарева», 2023

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications, where basic scientific results of dissertations for the degrees of Doctor and Candidate of Sciences in scientific specialties and their respective branches of science should be published. List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2023

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Золотых Николай Юрьевич — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович – академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Кузнецов Михаил Иванович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Малышев Дмитрий Сергеевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Мартынов Сергей Иванович – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

Морозкин Николай Данилович – профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич – профессор, доктор технических наук, первый проректор ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сидоров Николай Александрович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

Старостин Николай Владимирович – профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

Сухарев Лев Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна – профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Aleksandr S. Andreev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Vyacheslav Z. Grines — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Nikolay Yu. Zolotykh — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Mikhail I. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Dmitry S. Malyshev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Sergey I. Martynov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Nikolay D. Morozkin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Prezident of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Olga V. Pochinka — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Petr V. Senin — Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

Е. В. Десяев, П. А. Шаманаев

О периодических решениях линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым возмущением при производной 111

В. Е. Круглов, М. С. Рекшинский

Обобщённый граф Вонга для потоков Морса на поверхностях 123

Ф. В. Лубышев, А. М. Болотнов, М. Э. Файрузов

Математические модели совместного расчёта электрических и тепловых полей в электрохимических системах (в электролитах) 150

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Е. Е. Пескова, В. Н. Снытников

Численное исследование конверсии метановых смесей под воздействием лазерного излучения 159

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

А. О. Сыромясов, Ю. П. Еделева

Взаимодействие разреженного слоя частиц с плоскостью постоянного нагрева в присутствии поперечного градиента температуры 174

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Памяти Вячеслава Зигмундовича Гринеса 187

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 189

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 193

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) 197

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) 203

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) 207

Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) 208

Contents

MATHEMATICS

- E. V. Desyaev, P. A. Shamanaev**
On periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation at the derivative 111
- V. E. Kruglov, M. S. Rekshinskiy**
Generalised Wang's Graph for Morse Flows on Surfaces 123
- F. V. Lubyshev, A. M. Bolotnov, M. E. Fairuzov**
Mathematical Models of Joint Calculation of Electric and Thermal Fields in Electrochemical Systems (in Electrolytes) 150
-

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

- E. E. Peskova, V. N. Snytnikov**
Numerical Study of Methane Mixtures' Conversion Under the Influence of Laser Radiation 159
-

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

- A. O. Syromyasov, Yu. P. Edeleva**
Interaction of a sparse particle stratum with a constantly heated plane in presence of a transverse temperature gradient 174
-

MATHEMATICAL LIFE

- In memory of Vyacheslav Zigmundovich Grines 187
-
- The rules of article design (in Russian) 189
- The rules of article design (in English) 193
- The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) 197
- The rules for article layout in the LaTeX system (in English) 203
-
- Author Index (In Russian) 207
- Author Index (in English) 208
-

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202303.111-122

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

О периодических решениях линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым возмущением при производной

Е. В. Десяев, П. А. Шаманаев

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. В банаховом пространстве методами теории ветвления построено периодическое решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с малым возмущением при производной (возмущенное уравнение). При условии наличия полного обобщенного жорданова набора доказана единственность этого периодического решения. Показано, что при равенстве нулю малого параметра и при выполнении некоторых условий периодическое решение возмущенного уравнения переходит в семейство периодических решений невозмущенного уравнения. Результат получен с помощью представления возмущенного уравнения в виде операторного уравнения в банаховом пространстве и применения теории обобщенных жордановых наборов и модифицированного метода Ляпунова-Шмидта, сводящий исходную задачу к исследованию разрешающей системы Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве. При этом разрешающая система распадается на две неоднородные системы линейных алгебраических уравнений, которые при $\varepsilon \neq 0$ имеют единственные решения, а при $\varepsilon = 0$ – $2n$ -параметрические семейства вещественных решений, соответственно.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, малый параметр при производной, модифицированный метод Ляпунова-Шмидта, обобщенные жордановы наборы, разрешающая система Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве

Для цитирования: Десяев Е. В., Шаманаев П. А. О периодических решениях линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым возмущением при производной // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 3. С. 111–122. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.111-122>

Об авторах:

Десяев Евгений Васильевич, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2583-6966>, desyaev@rambler.ru

Шаманаев Павел Анатольевич, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, korspa@yandex.ru

© Е. В. Десяев, П. А. Шаманаев



MSC2020 34G10

On periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation at the derivative

E. V. Desyaev, P. A. Shamanaev

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. In a Banach space, using branching theory methods, a periodic solution of a linear inhomogeneous differential equation with a small perturbation at the derivative (perturbed equation) is constructed. Under the condition of presence of a complete generalized Jordan set, the uniqueness of this periodic solution is proven. It is shown that when a small parameter is equal to zero and certain conditions are met, the periodic solution of the perturbed equation transforms into the family of periodic solutions of the unperturbed equation. The result is obtained by representing the perturbed equation as an operator equation in Banach space and applying the theory of generalized Jordan sets and modified Lyapunov-Schmidt method. As is known, the latter method reduces the original problem to study of the Lyapunov-Schmidt resolving system in the root subspace. In this case, the resolving system splits into two inhomogeneous systems of linear algebraic equations, that have unique solutions at $\varepsilon \neq 0$, and $2n$ -parameter families of real solutions at $\varepsilon = 0$, respectively.

Keywords: differential equations in Banach spaces, small parameter at the derivative, modified Lyapunov-Schmidt method, generalized Jordan sets, Lyapunov-Schmidt resolving system in the root subspace

For citation: *E. V. Desyaev, P. A. Shamanaev. On periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation at the derivative. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 25:3(2023), 111–122. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.111-122>*

About the authors:

Evgeniy V. Desyaev, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshhevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2583-6966>, desyaev@rambler.ru

Pavel A. Shamanaev, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshhevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, korspa@yandex.ru

1. Введение

Основные положения теории ветвления были заложены в работах [1–2]. В дальнейшем эти подходы были распространены на уравнения в банаховых пространствах и получили названия методы Ляпунова-Шмидта [3]. Этим методам посвящено большое количество работ [4–8]. Наиболее полный обзор по методам Ляпунова-Шмидта содержится в [9].

В настоящей работе метод Ляпунова-Шмидта применяется для нахождения периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с малым возмущением при производной в банаховом пространстве.

2. Постановка задачи

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Рассмотрим линейное неоднородное дифференциальное уравнение

$$(A_0 + \varepsilon A_1) \frac{dx}{dt} = B_0 x - f(t), \quad (2.1)$$

где $x \in E_1$, A_0, A_1 и B_0 – плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, причем A_0 – вырожденный или тождественный оператор, функция $f \in E_2$ непрерывна и периодична $f(t+T) = f(t)$, $T > 0$, ε – малый вещественный параметр. Предполагается, что операторы $A_0 : E_1 \supset D_{A_0} \rightarrow E_2$ и $B_0 : E_1 \supset D_{B_0} \rightarrow E_2$ не имеют общих нуль-элементов, а также выполнены условия: $D_{B_0} \subset D_{A_0}$ и A_0 подчинен B_0 , т. е. $\|A_0 x\| \leq \|B_0 x\| + \|x\|$ на D_{B_0} или $D_{A_0} \subset D_{B_0}$ и B_0 подчинен A_0 , т. е. $\|B_0 x\| \leq \|A_0 x\| + \|x\|$ на D_{A_0} , что позволяет свести обсуждение к ограниченным операторам [3].

Пусть $\sigma_{A_0}^0(B_0)$ – A_0 -спектр оператора B_0 , лежащий на мнимой оси и состоящий из конечного числа ненулевых точек $\pm i\alpha_\sigma$, $\alpha_\sigma = \alpha m_\sigma$, $\alpha = \frac{2\pi}{T}$, $\sigma = \overline{1, r}$, где m_σ – натуральные числа без нетривиальных общих делителей. Пусть далее числу $i\alpha_\sigma$ отвечает n_σ A_0 -собственных элементов u_{k_σ} , то есть $B_0 u_{k_\sigma} = i\alpha_\sigma A_0 u_{k_\sigma}$, $k_\sigma \in N_\sigma$, $\sigma = \overline{1, r}$. Здесь $N_1 = \{1, 2, \dots, n_1\}$, $N_2 = \{n_1 + 1, \dots, n_1 + n_2\}$, ..., $N_r = \{n_1 + \dots + n_{r-1} + 1, \dots, n\}$. $n = n_1 + \dots + n_r$. Следовательно A_0 -собственными элементами, отвечающими соответствующим числам $-i\alpha_\sigma$, будут \bar{u}_{k_σ} , то есть $B_0 \bar{u}_{k_\sigma} = -i\alpha_\sigma A_0 \bar{u}_{k_\sigma}$, $k_\sigma \in N_\sigma$, $\sigma = \overline{1, r}$. Аналогично для A_0^* -собственных элементов v_{k_σ} и \bar{v}_{k_σ} , отвечающими соответствующим числам $i\alpha_\sigma$ и $-i\alpha_\sigma$, сопряженного оператора B_0^* справедливо $B_0^* v_{k_\sigma} = i\alpha_\sigma A_0^* v_{k_\sigma}$, $B_0^* \bar{v}_{k_\sigma} = -i\alpha_\sigma A_0^* \bar{v}_{k_\sigma}$, $k_\sigma \in N_\sigma$, $\sigma = \overline{1, r}$.

Тогда линейное однородное уравнение

$$A_0 \frac{dy}{dt} = B_0 y. \quad (2.2)$$

имеет $2n$ T -периодических решений вида $\varphi_{k_\sigma} = u_{k_\sigma} e^{i\alpha_\sigma t}$, $\bar{\varphi}_{k_\sigma} = \bar{u}_{k_\sigma} e^{-i\alpha_\sigma t}$, $k_\sigma \in N_\sigma$, $\sigma = \overline{1, r}$. Соответственно уравнение, сопряженное к (2.2), имеет $2n$ T -периодических решений вида $\psi_{k_\sigma} = v_{k_\sigma} e^{i\alpha_\sigma t}$, $\bar{\psi}_{k_\sigma} = \bar{v}_{k_\sigma} e^{-i\alpha_\sigma t}$, $k_\sigma \in N_\sigma$, $\sigma = \overline{1, r}$.

Ставится задача [3]: при достаточно малых ε найти все T -периодические решения $x(t, \varepsilon)$ уравнения (2.1), удовлетворяющие условию $x(t, 0) = z(t)$, где $z(t)$ – T -периодические решения уравнения

$$A_0 \frac{dz}{dt} = B_0 z - f(t). \quad (2.3)$$

3. Построение разрешающей системы с помощью модифицированного метода Ляпунова-Шмидта

Для решения поставленной задачи представим уравнение (2.1) в виде

$$B_0 x = f(t) + \varepsilon C_1 x, \quad B_0 x \equiv B_0 x - A_0 \frac{dx}{dt}, \quad C_1 x \equiv A_1 \frac{dx}{dt}, \quad (3.1)$$

и применим модифицированный метод Ляпунова-Шмидта, приводящий к исследованию разрешающих систем в корневом подпространстве [7].

Здесь операторы \mathcal{B}_0 и C_1 отображают пространство \mathcal{X} T -периодических непрерывно-дифференцируемых по t функций со значениями в $\mathcal{E}_1 = E_1 + iE_1$ в пространство \mathcal{Z} T -периодических непрерывно-дифференцируемых по t функций со значениями в $\mathcal{E}_2 = E_2 + iE_2$. Значение функционала e на элементе x задаётся равенством

$$\ll x, e \gg = \frac{1}{T} \int_0^T \langle x(t), e(t) \rangle dt, \quad x \in \mathcal{X}, \quad e \in \mathcal{X}^* \quad (x \in \mathcal{Z}, \quad e \in \mathcal{Z}^*).$$

Пространства нулей операторов \mathcal{B}_0 и \mathcal{B}_0^* имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{B}_0) &= span\{\varphi_{k_\sigma}^{(1)}, \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}, \quad k_\sigma \in N_\sigma, \quad \sigma = \overline{1, r}\}, \\ \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*) &= span\{\psi_{k_\sigma}^{(1)}, \bar{\psi}_{k_\sigma}^{(1)}, \quad k_\sigma \in N_\sigma, \quad \sigma = \overline{1, r}\}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Согласно [3] для каждого элемента $\varphi_{k_\sigma}^{(1)} \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$ определим A_1 -жорданову цепочку с помощью уравнений

$$\mathcal{B}_0 \varphi_{k_\sigma}^{(1)} = 0, \quad \mathcal{B}_0 \varphi_{k_\sigma}^{(j)} = A_1 \varphi_{k_\sigma}^{(j-1)}, \quad j = \overline{2, p_{k_\sigma}}, \quad k_\sigma \in N_\sigma, \quad \sigma = \overline{1, r},$$

причём будем предполагать, что не все числа $\ll A_1 \varphi_{k_\sigma}^{(p_{k_\sigma})}, \psi_{s_\nu}^{(1)} \gg, s_\nu \in N_\nu, \nu = \overline{1, r}$ равны нулю.

Аналогично для каждого элемента $\psi_{k_\sigma}^{(j)} \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$ определим A_1^* -жорданову цепочку с помощью уравнений

$$\mathcal{B}_0^* \psi_{s_\nu}^{(1)} = 0, \quad \mathcal{B}_0^* \psi_{s_\nu}^{(l)} = A_1^* \psi_{s_\nu}^{(l-1)}, \quad l = \overline{2, p_{s_\nu}}, \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r}.$$

Аналогично, предположим, что не все числа $\ll A_1^* \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu})}, \varphi_{k_\sigma}^{(1)} \gg, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1, r}$ равны нулю.

В предположении, что обобщенные жордановы наборы $\{\varphi_{k_\sigma}^{(j)}, j = \overline{1, p_{k_\sigma}}, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1, r}\}, \{\psi_{s_\nu}^{(l)}, l = \overline{1, p_{s_\nu}}, s_\nu \in N_\nu, \nu = \overline{1, r}\}$ являются полными, выберем их так, чтобы выполнялись условия биортогональности [6]

$$\begin{aligned} \ll \varphi_{k_\sigma}^{(j)}, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg &= \delta_{k_\sigma s_\nu} \delta_{jl}, \quad \ll z_{k_\sigma}^{(j)}, \psi_{s_\nu}^{(l)} \gg = \delta_{k_\sigma s_\nu} \delta_{jl}, \\ \gamma_{s_\nu}^{(l)} &= A_1^* \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu}+1-l)}, \quad z_{k_\sigma}^{(j)} = A_1 \varphi_{k_\sigma}^{(p_{k_\sigma}+1-j)}, \\ j &= \overline{1, p_{k_\sigma}}, \quad l = \overline{1, p_{s_\nu}}, \quad k_\sigma \in N_\sigma, \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \sigma, \nu = \overline{1, r}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

где $\delta_{k_\sigma s_\nu}, \delta_{jl}$ – символы Кроннекера.

Каждый из наборов элементов $\{\varphi_{k_\sigma}^{(j)}, \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)}, j = \overline{1, p_{k_\sigma}}, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1, r}\}$ и $\{z_{k_\sigma}^{(j)}, \bar{z}_{k_\sigma}^{(j)}, j = \overline{1, p_{k_\sigma}}, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1, r}\}$ является линейно независимым и формирует базис соответствующих корневых подпространств $E_1^{2K} = span\{\varphi_{k_\sigma}^{(j)}, \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)}, j = \overline{1, p_{k_\sigma}}, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1, r}\}$ и $E_2^{2K} = span\{z_{k_\sigma}^{(j)}, \bar{z}_{k_\sigma}^{(j)}, j = \overline{1, p_{k_\sigma}}, k_\sigma \in N_\sigma, \sigma = \overline{1, r}\}$.

Здесь $K = \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} p_{k_\sigma}$.

Вводя регуляризатор Шмидта [3]

$$\tilde{\mathcal{B}}_0 = \mathcal{B}_0 + \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \ll \cdot, \gamma_{k_\sigma}^{(1)} \gg z_{k_\sigma}^{(1)} + \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \ll \cdot, \bar{\gamma}_{k_\sigma}^{(1)} \gg \bar{z}_{k_\sigma}^{(1)},$$

запишем уравнение (3.1) в виде системы

$$\begin{cases} \tilde{\mathcal{B}}_0 x = \varepsilon C_1 x + \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} z_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{z}_{k_\sigma}^{(1)}] + f(t), \\ \xi_{s_\nu, l} = \ll x, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg, \quad \bar{\xi}_{s_\nu, l} = \ll x, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg, \\ l = \overline{1, p_{s_\nu}}, \quad k_\sigma \in N_\sigma, \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \sigma, \nu = \overline{1, r}. \end{cases} \quad (3.4)$$

Решение системы (3.4) будем искать в виде

$$x = w + v, \quad v = \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \sum_{j=1}^{p_{k_\sigma}} [\xi_{k_\sigma, j} \varphi_{k_\sigma}^{(j)} + \bar{\xi}_{k_\sigma, j} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)}]. \quad (3.5)$$

Подставляя выражение (3.5) в первое уравнение системы (3.4), получим

$$\tilde{\mathcal{B}}_0 w + \tilde{\mathcal{B}}_0 v = \varepsilon C_1 w + \varepsilon C_1 v + \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} z_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{z}_{k_\sigma}^{(1)}] + f(t).$$

Согласно обобщённой леммы Шмидта [3] для регуляризатора Шмидта существует обратный оператор $\Gamma_0 = \tilde{\mathcal{B}}_0^{-1}$. Учитывая, что $\Gamma_0 z_{k_\sigma}^{(1)} = \varphi_{k_\sigma}^{(1)}$, $\Gamma_0 \bar{z}_{k_\sigma}^{(1)} = \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}$, находим

$$[I - \varepsilon \Gamma_0 C_1] w = -[I - \varepsilon \Gamma_0 C_1] v + \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + \Gamma_0 f(t).$$

Пусть для ε выполняется условия $|\varepsilon| \leq \rho_0 < \|\Gamma_0 C_1\|^{-1}$, тогда оператор $[I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1}$ существует и

$$w = -v + [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \Gamma_0 f(t). \quad (3.6)$$

Учитывая равенство $[I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} = I + \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1}$, получим

$$\begin{aligned} w = -v + \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + \\ + \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma,1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma,1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + \\ + [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \Gamma_0 f(t) \quad (3.7) \end{aligned}$$

С учётом выражения (3.5) и равенства $[I - \varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1}\Gamma_0 = \Gamma_0[I - \varepsilon C_1\Gamma_0]^{-1}$, находим

$$w = - \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \sum_{j=2}^{p_{k_\sigma}} [\xi_{k_\sigma, j} \varphi_{k_\sigma}^{(j)} + \bar{\xi}_{k_\sigma, j} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)}] +$$

$$+ \varepsilon\Gamma_0C_1[I - \varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1} \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma, 1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma, 1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] +$$

$$+ \Gamma_0[I - \varepsilon C_1\Gamma_0]^{-1} f(t). \quad (3.8)$$

Учитывая равенства

$$(\Gamma_0A_1)^j \varphi_{k_\sigma}^{(1)} = \varphi_{k_\sigma}^{(r_{k_\sigma}+1)}, \quad (\Gamma_0A_1)^j \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)} = \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(r_{k_\sigma}+1)}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (3.9)$$

$$k_\sigma \in N_\sigma, \quad \sigma = \overline{1, r},$$

где r_{k_σ} – остаток от деления j на p_{k_σ} , получим

$$(\Gamma_0C_1)^j \varphi_{k_\sigma}^{(1)} = (i\alpha_\sigma)^j \varphi_{k_\sigma}^{(r_{k_\sigma}+1)}, \quad (\Gamma_0C_1)^j \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)} = (-i\alpha_\sigma)^j \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(r_{k_\sigma}+1)}, \quad (3.10)$$

$$j = 1, 2, \dots; \quad k_\sigma \in N_\sigma, \quad \sigma = \overline{1, r}.$$

Аналогично, для сопряжённых операторов $\Gamma_0^*A_1^*$ и $\Gamma_0^*C_1^*$, справедливы равенства

$$(\Gamma_0^*A_1^*)^l \psi_{s_\nu}^{(1)} = \psi_{s_\nu}^{(q_{s_\nu}+1)}, \quad (\Gamma_0^*A_1^*)^l \bar{\psi}_{s_\nu}^{(1)} = \bar{\psi}_{s_\nu}^{(q_{s_\nu}+1)}, \quad (3.11)$$

$$(\Gamma_0^*C_1^*)^l \varphi_{s_\nu}^{(1)} = (-i\alpha_\nu)^l \psi_{s_\nu}^{(r_{s_\nu}+1)}, \quad (\Gamma_0^*C_1^*)^l \bar{\varphi}_{s_\nu}^{(1)} = (i\alpha_\nu)^l \bar{\psi}_{s_\nu}^{(r_{s_\nu}+1)}, \quad (3.12)$$

$$l = 1, 2, \dots; \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r},$$

где q_{s_ν} – остаток от деления l на p_{s_ν} .

Тогда для элементов $\varphi_{k_\sigma}^{(1)}, \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}$ справедливы выражения

$$\varepsilon\Gamma_0C_1[I - \varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} = \frac{1}{1 - (i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}} [i\alpha_\sigma\varepsilon \varphi_{k_\sigma}^{(2)} + (i\alpha_\sigma\varepsilon)^2 \varphi_{k_\sigma}^{(3)} + \dots + (i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}} \varphi_{k_\sigma}^{(1)}], \quad (3.13)$$

$$\varepsilon\Gamma_0C_1[I - \varepsilon\Gamma_0C_1]^{-1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)} =$$

$$= \frac{1}{1 - (-i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}} [-i\alpha_\sigma\varepsilon \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(2)} + (-i\alpha_\sigma\varepsilon)^2 \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(3)} + \dots + (-i\alpha_\sigma\varepsilon)^{p_{k_\sigma}} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}]. \quad (3.14)$$

Подставляя выражение (3.5) во второе и третье уравнение системы (3.4), и учитывая условия биортогональности (3.3), разрешающая система примет вид

$$\left\{ \begin{array}{l} - \ll w, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg = 0, \\ - \ll w, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg = 0, \\ l = \overline{1, p_{s_\nu}}, \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r}; \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left\{ \begin{array}{l} - \ll w, \gamma_{s_\nu}^{(1)} \gg = 0, \\ - \ll w, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg = 0, \\ - \ll w, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(1)} \gg = 0, \\ - \ll w, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg = 0, \\ l = \overline{2, p_{s_\nu}}, \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r}. \end{array} \right. \quad (3.15)$$

Подставляя выражение (3.8) для w в разрешающую систему (3.15), получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \sum_{j=2}^{p_{k_\sigma}} \left[\xi_{k_\sigma, j} \ll \varphi_{k_\sigma}^{(j)}, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg + \bar{\xi}_{k_\sigma, j} \ll \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)}, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg \right] - \\ & - \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \xi_{k_\sigma, 1} \ll \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 B_1]^{-1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)}, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg - \\ & - \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \bar{\xi}_{k_\sigma, 1} \ll \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg = \ll \Gamma_0 [I - \varepsilon C_1 \Gamma_0]^{-1} f, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg, \\ & l = \overline{1, p_{s_\nu}}, \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r}; \end{aligned} \tag{3.16}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \sum_{j=2}^{p_{k_\sigma}} \left[\xi_{k_\sigma, j} \ll \varphi_{k_\sigma}^{(j)}, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg + \bar{\xi}_{k_\sigma, j} \ll \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)}, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg \right] - \\ & - \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \xi_{k_\sigma, 1} \ll \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 B_1]^{-1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)}, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg - \\ & - \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \bar{\xi}_{k_\sigma, 1} \ll \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg = \ll \Gamma_0 [I - \varepsilon C_1 \Gamma_0]^{-1} f, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg, \\ & l = \overline{1, p_{s_\nu}}, \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Учитывая выражения (3.13), (3.14), и условия биортогональности (3.3), вычислим при $l = 1$

$$\begin{aligned} \ll \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)}, \gamma_{s_\nu}^{(1)} \gg &= \frac{(i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}{1 - (i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}} \delta_{k_\sigma, s_\nu}, \\ \ll \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(1)} \gg &= \frac{(-i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}}{1 - (-i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}} \delta_{k_\sigma, s_\nu}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

при $l = \overline{2, p_{s_\nu}}$

$$\begin{aligned} \ll \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)}, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg &= \frac{(i\alpha\varepsilon)^{l-1}}{1 - (i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}} \delta_{k_\sigma, s_\nu}, \\ \ll \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg &= \frac{(-i\alpha\varepsilon)^{l-1}}{1 - (-i\alpha\varepsilon)^{p_{k_\sigma}}} \delta_{k_\sigma, s_\nu}. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Здесь, $|\varepsilon| \leq \rho_1 < 1$. Аналогично, находим

$$\ll \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg = 0, \quad \ll \varepsilon \Gamma_0 C_1 [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)}, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg = 0.$$

С учётом равенств

$$\Gamma_0^* \gamma_{s_\nu}^{(1)} = \psi_{s_\nu}^{(1)}, \Gamma_0^* \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(1)} = \bar{\psi}_{s_\nu}^{(1)}, \Gamma_0^* \gamma_{s_\nu}^{(l)} = \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 2 - l)}, \Gamma_0^* \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} = \bar{\psi}_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 2 - l)}, \quad l = \overline{2, p_{s_\nu}}$$

представим правую часть разрешающей системы (3.15) в виде

$$\begin{aligned}
 &\ll \Gamma_0[I - \varepsilon C_1 \Gamma_0]^{-1} f, \gamma_{s_\nu}^{(1)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon \Gamma_0^* C_1^*]^{-1} \psi_{s_\nu}^{(1)} \gg, \\
 &\ll \Gamma_0[I - \varepsilon C_1 \Gamma_0]^{-1} f, \gamma_{s_\nu}^{(l)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon \Gamma_0^* C_1^*]^{-1} \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 2 - l)} \gg, \\
 &\ll \Gamma_0[I - \varepsilon C_1 \Gamma_0]^{-1} f, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(1)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon \Gamma_0^* C_1^*]^{-1} \bar{\psi}_{s_\nu}^{(1)} \gg, \\
 &\ll \Gamma_0[I - \varepsilon C_1 \Gamma_0]^{-1} f, \bar{\gamma}_{s_\nu}^{(l)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon \Gamma_0^* C_1^*]^{-1} \bar{\psi}_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 2 - l)} \gg.
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

Учитывая равенства (3.12), получим

$$\begin{aligned}
 [I - \varepsilon \Gamma_0^* C_1^*]^{-1} \psi_{s_\nu}^{(1)} &= \frac{1}{1 - (-i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu}}} h_{s_\nu, 1}, \\
 h_{s_\nu, 1} &= \psi_{s_\nu}^{(1)} + (-i\alpha_\nu \varepsilon) \psi_{s_\nu}^{(2)} + \dots + (-i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu} - 1} \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu})}, \\
 [I - \varepsilon \Gamma_0^* C_1^*]^{-1} \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 2 - l)} &= \frac{1}{1 - (i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu}}} h_{s_\nu, l}, \quad l = \overline{2, p_{s_\nu}}, \quad \nu = \overline{1, r},
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$

$$\begin{aligned}
 h_{s_\nu, l} &= \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 2 - l)} + (-i\alpha_\nu \varepsilon) \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 3 - l)} + \dots + (-i\alpha_\nu \varepsilon)^{l - 2} \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu})} + \\
 &+ (-i\alpha_\nu \varepsilon)^{l - 1} \psi_{s_\nu}^{(1)} + \dots + (-i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu} - 1} \psi_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 1 - l)}. \\
 [I - \varepsilon \Gamma_0^* C_1^*]^{-1} \bar{\psi}_{s_\nu}^{(1)} &= \frac{1}{1 - (i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu}}} \bar{h}_{s_\nu, 1}, \\
 \bar{h}_{s_\nu, 1} &= \bar{\psi}_{s_\nu}^{(1)} + (i\alpha_\nu \varepsilon) \bar{\psi}_{s_\nu}^{(2)} + \dots + (i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu} - 1} \bar{\psi}_{s_\nu}^{(p_{s_\nu})}, \\
 [I - \varepsilon \Gamma_0^* C_1^*]^{-1} \bar{\psi}_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 2 - l)} &= \frac{1}{1 - (i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu}}} \bar{h}_{s_\nu, l}, \quad l = \overline{2, p_{s_\nu}}, \quad \nu = \overline{1, r}, \\
 \bar{h}_{s_\nu, l} &= \bar{\psi}_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 2 - l)} + (i\alpha_\nu \varepsilon) \bar{\psi}_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 3 - l)} + \dots + (i\alpha_\nu \varepsilon)^{l - 2} \bar{\psi}_{s_\nu}^{(p_{s_\nu})} + \\
 &+ (i\alpha_\nu \varepsilon)^{l - 1} \bar{\psi}_{s_\nu}^{(1)} + (i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu} - 1} \bar{\psi}_{s_\nu}^{(p_{s_\nu} + 1 - l)}.
 \end{aligned}
 \tag{3.22}$$

Вводя обозначения

$$\beta_{s_\nu} = (i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu}}, \tag{3.23}$$

$$\theta_{s_\nu, l} = \frac{(i\alpha_\nu \varepsilon)^{l - 1}}{1 - (i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu}}}, \tag{3.24}$$

$$l = \overline{1, p_{s_\nu}}, \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r}.$$

и учитывая (3.18), (3.19), (3.21) и (3.22), разрешающая система (3.16)-(3.17) примет вид

$$\begin{cases}
 \beta_{s_\nu} \theta_{s_\nu, 1} \xi_{s_\nu, 1} &= - \ll f, \bar{\theta}_{s_\nu, 1} h_{s_\nu, 1} \gg, \quad l = 1, \\
 \xi_{s_\nu, l} - \theta_{s_\nu, l} \xi_{s_\nu, 1} &= \ll f, \bar{\theta}_{s_\nu, 1} h_{s_\nu, l} \gg, \quad l = \overline{2, p_{s_\nu}}, \\
 \bar{\beta}_{s_\nu} \bar{\theta}_{s_\nu, 1} \bar{\xi}_{s_\nu, 1} &= - \ll f, \theta_{s_\nu, 1} \bar{h}_{s_\nu, 1} \gg, \quad l = 1, \\
 \bar{\xi}_{s_\nu, l} - \bar{\theta}_{s_\nu, l} \bar{\xi}_{s_\nu, 1} &= \ll f, \theta_{s_\nu, 1} \bar{h}_{s_\nu, l} \gg, \quad l = \overline{2, p_{s_\nu}}, \\
 s_\nu \in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r}.
 \end{cases}
 \tag{3.25}$$

Разрешающая система (3.25) представляет собой две сопряженные неоднородные системы линейных алгебраических уравнений относительно $\xi_{s_\nu, l}$ и $\bar{\xi}_{s_\nu, l}$, $l = \overline{1, p_{s_\nu}}$, $s_\nu \in N_\nu$, $\nu = \overline{1, r}$. При $\varepsilon \neq 0$ эта система имеет единственное решение.

Так как в решение входят только $\xi_{s_\nu, 1}$ и $\bar{\xi}_{s_\nu, 1}$, ограничимся их вычислением. При $\varepsilon \neq 0$ из первого и третьего уравнения разрешающей системы (3.25) находим

$$\begin{aligned} \xi_{s_\nu, 1} &= -\frac{1}{\beta_{s_\nu}} \ll f, h_{s_\nu, 1} \gg = \\ &= -\frac{1}{\beta_{s_\nu}} (c_{s_\nu, 1} + c_{s_\nu, 2}(i\alpha_\nu \varepsilon) + c_{s_\nu, 3}(i\alpha_\nu \varepsilon)^2 + \dots + c_{s_\nu, p_{s_\nu}}(i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu}-1}), \\ \bar{\xi}_{s_\nu, 1} &= -\frac{1}{\bar{\beta}_{s_\nu}} \ll f, \bar{h}_{s_\nu, 1} \gg = \\ &= -\frac{1}{\bar{\beta}_{s_\nu}} (\bar{c}_{s_\nu, 1} + \bar{c}_{s_\nu, 2}(-i\alpha_\nu \varepsilon) + \bar{c}_{s_\nu, 3}(-i\alpha_\nu \varepsilon)^2 + \dots + \bar{c}_{s_\nu, p_{s_\nu}}(-i\alpha_\nu \varepsilon)^{p_{s_\nu}-1}), \\ c_{s_\nu, l} &= \ll f, \psi_{s_\nu}^{(l)} \gg, \quad \bar{c}_{s_\nu, l} = \ll f, \bar{\psi}_{s_\nu}^{(l)} \gg, \quad l = \overline{1, p_{s_\nu}}, \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

При $\varepsilon = 0$ разрешающая система (3.25) примет вид

$$\left\{ \begin{aligned} 0 \cdot \xi_{s_\nu, 1} &= - \ll f, \psi_{s_\nu, 1} \gg, \quad l = 1, \\ \xi_{s_\nu, l} &= \ll f, \psi_{s_\nu, l}^{(p_{s_\nu}+2-l)} \gg, \quad l = \overline{2, p_{s_\nu}}, \\ 0 \cdot \bar{\xi}_{s_\nu, 1} &= - \ll f, \bar{\psi}_{s_\nu, 1} \gg, \quad l = 1, \\ \bar{\xi}_{s_\nu, l} &= \ll f, \bar{\psi}_{s_\nu, l}^{(p_{s_\nu}+2-l)} \gg, \quad l = \overline{2, p_{s_\nu}}, \\ s_\nu &\in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r}. \end{aligned} \right. \tag{3.27}$$

Для того, чтобы разрешающая система (3.27) имела решение необходимо и достаточно, чтобы

$$\ll f, \psi_{s_\nu, 1} \gg = 0, \quad \ll f, \bar{\psi}_{s_\nu, 1} \gg = 0, \quad s_\nu \in N_\nu, \quad \nu = \overline{1, r}. \tag{3.28}$$

4. Периодические решения возмущенной и невозмущенной системы

Подставляя формулы (3.26) в выражение (3.5), и учитывая обозначения (3.24) и (3.25), получим T -периодическое решение уравнения (2.1)

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [\xi_{k_\sigma, 1} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + \bar{\xi}_{k_\sigma, 1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \xi_{k_\sigma, 1} \frac{1}{1 - (i\alpha_\sigma \varepsilon)^{p_{k_\sigma}}} [i\alpha_\sigma \varepsilon \varphi_{k_\sigma}^{(2)} + (i\alpha_\sigma \varepsilon)^2 \varphi_{k_\sigma}^{(3)} + \dots + (i\alpha_\sigma \varepsilon)^{p_{k_\sigma}} \varphi_{k_\sigma}^{(1)}] + \\ &+ \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \bar{\xi}_{k_\sigma, 1} \frac{1}{1 - (-i\alpha_\sigma \varepsilon)^{p_{k_\sigma}}} [-i\alpha_\sigma \varepsilon \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(2)} + (-i\alpha_\sigma \varepsilon)^2 \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(3)} + \dots + (-i\alpha_\sigma \varepsilon)^{p_{k_\sigma}} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \Gamma_0 f(t) = \\
& = \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} \sum_{j=1}^{p_{k_\sigma}} [\theta_{k_\sigma, j} \xi_{k_\sigma, 1} \varphi_{k_\sigma}^{(j)} + \bar{\theta}_{k_\sigma, j} \bar{\xi}_{k_\sigma, 1} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(j)}] + [I - \varepsilon \Gamma_0 C_1]^{-1} \Gamma_0 f(t), \quad (4.1)
\end{aligned}$$

где $\xi_{k_\sigma, 1}$, $\bar{\xi}_{k_\sigma, 1}$ вычисляются по формулам (3.26).

При $\varepsilon = 0$ из разрешающей системы (3.27) получим $\xi_{k_\sigma, 1}^{(1)} = c_{k_\sigma}^{(1)}$, $\xi_{k_\sigma, 1}^{(2)} = c_{k_\sigma}^{(2)}$, где $c_{k_\sigma}^{(1)}$, $c_{k_\sigma}^{(2)} \in R$ и, учитывая, что T -периодические решения уравнений (2.1) и (2.3) совпадают, находим что они представимы в виде

$$x(t, 0) = z(t) \equiv \sum_{\sigma=1}^r \sum_{k_\sigma \in N_\sigma} [c_{k_\sigma}^{(1)} \varphi_{k_\sigma}^{(1)} + c_{k_\sigma}^{(2)} \bar{\varphi}_{k_\sigma}^{(1)}] + \Gamma_0 f(t). \quad (4.2)$$

Благодарности. Авторы благодарят д.ф.-м.н. профессора Б. В. Логинова за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Lyapunov A. M. Sur les figures d'équilibre peu differentes des ellipsoides d'une masse liquide homogene donee d'un mouvement de rotation, P. 1, Notes of Academician Sciences, St. Petersburg, 1906.
2. Schmidt E. Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integral gleichungen // Math. Ann. 1908. Vol. 65. pp. 370-399.
3. Вайнберг М. М., Треногин В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М. Наука, 1968. 528 с.
4. Loginov B. V. Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation, Nonlinear Analysis: TMA, 1997, Vol. 28, no. 12, pp. 2035-2047.
5. Loginov B. V., Kim-Tyan L. R., Rousak Yu. B. On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative, Nonlinear analysis, 2007. Vol. 67, no. 5. pp. 1570-1585.
6. Коноплева И. В., Логинов Б. В., Русак Ю. Б. Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки. 2009, 115-124.
7. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого // Журнал Средневожского математического общества. 2016. Т. 18, № 1. С. 45-53.

8. Шаманаев П. А., Логинов Б. В. О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущением в виде малого линейного слагаемого с запаздывающим аргументом // Журнал Средневолжского математического общества. 2016. Т. 18, № 3. С. 61–69.
9. Sidorov N., Loginov B., Falaleev M. Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications, Mathematics and its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, 550 p.

*Поступила 21.04.2023; доработана после рецензирования 10.06.2023;
принята к публикации 25.08.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. M. Lyapunov, “Sur les figures d’équilibre peu différentes des ellipsoïdes d’une masse liquide homogène donnée d’un mouvement de rotation”, *Academician Sciences*, St. Petersburg, 1906.
2. E. Schmidt, “Zur Theorie linearen und nichtlinearen Integralgleichungen”, *Math. Ann.*, **65** (1908), 370-399.
3. M. M. Vaynberg, V. A. Trenogin, *Teoriya vetvleniya resheniy nelineynykh uravneniy [Branching theory for solutions to nonlinear equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russ.), 528 p.
4. B. V. Loginov, “Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation”, *Nonlinear Analysis: TMA*, **28**:12 (1997), 2035-2047.
5. B. V. Loginov, L. R. Kim-Tyan, Yu. B. Rousak, “On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative”, *Nonlinear analysis*, **67**:5 (2007), 1570-1585.
6. I. V. Konopleva, B. V. Loginov, Yu. B. Rusak, “Simmetriya i potentsial’nost’ uravneniy razvetvleniya v kornevykh podprostranstvakh v neyavno zadannykh statsionarnykh i dinamicheskikh bifurkatsionnykh zadachakh [Symmetry and potentiality of branching equations in root subspaces in implicitly given stationary and dynamic bifurcation problems]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Severo-Kavkazskiy region. Seriya: Estestvennye nauki [News of higher educational institutions. North Caucasus region. Series: Natural Sciences]*, 2009, 115-124 (In Russ.).
7. A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator in the derivative and the disturbance in the form of small linear term”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:1 (2016), 45–53 (In Russ.).
8. P. A. Shamanaev B. V. Loginov, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

9. N. Sidorov, B. Loginov, M. Falaleev, *Lyapunov-Schmidt methods in nonlinear analysis and applications*, *Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2002, 550 p.

Submitted 21.04.2023; Revised 10.06.2023; Accepted 25.08.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202303.123-149

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

Обобщённый граф Вонга для потоков Морса на поверхностях

В. Е. Круглов, М. С. Рекшинский

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. Настоящая работа посвящена градиентно-подобным потокам на поверхностях, представляющих из себя потоки Морса-Смейла без предельных циклов, и их топологической классификации с точностью до топологической сопряжённости. Такие потоки, называемые иначе потоками Морса, были неоднократно классифицированы посредством различных топологических инвариантов. Одним из таких инвариантов является двуцветный граф К. Вонга, действующий лишь для градиентно-подобных потоков на ориентируемых поверхностях. Целью данного исследования было обобщение графа Вонга на случай произвольных замкнутых поверхностей. В работе вводится новый инвариант – обобщённый граф Вонга. Посредством обобщённого графа Вонга получена топологическая классификация градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях, т. е. с добавлением неориентируемого случая; в т. ч. выполнена реализация обобщённого графа Вонга стандартным потоком Морса на поверхности. Для получения всех результатов используется конструктивный метод: для доказательства классификационной теоремы строится гомеоморфизм, отображающий области с одинаковым поведением траекторий друг в друга, а граф позволяет установить верное расположение таких областей друг относительно друга. Для доказательства теоремы реализации также используется конструктивный метод: по графу строится стандартный поток, топологически сопряжённый каждому потоку, которому соответствует данный граф. Таким образом, в работе построена полная топологическая классификация потоков Морса на поверхностях посредством инварианта, в некоторых отношениях превосходящего в простоте и практической ориентированности граф Пейшото, так и трёхцветный граф Ошемкова-Шарко.

Ключевые слова: градиентно-подобный поток, поток Морса, топологическая классификация, граф Вонга, поток на поверхности

Для цитирования: Круглов В. Е., Рекшинский М. С. Обобщённый граф Вонга для потоков Морса на поверхностях // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 3. С. 123–149. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.123-149>

Об авторах:

Круглов Владислав Евгеньевич, научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603145, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), кандидат математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

Рекшинский Михаил Сергеевич, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603145, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-4683-4619>, mrekshinskii@mail.ru

© В. Е. Круглов, М. С. Рекшинский



MSC2020 37D15

Generalised Wang's Graph for Morse Flows on Surfaces

V. E. Kruglov, M. S. Rekshinskiy

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. This paper is devoted to gradient-like flows on surfaces, which are Morse-Smale flows without limit cycles, and to their topological classification up to topological conjugacy. Such flows, otherwise called Morse flows, have been repeatedly classified by means of various topological invariants. One of these invariants is the two-colour Wang's graph, which is valid only for gradient-like flows on orientable surfaces. The purpose of this study was to generalize the Wang's graph to the case of arbitrary closed surfaces. A new invariant, the generalized Wang's graph, is introduced in the paper. Using this generalization, a topological classification of gradient-like flows on arbitrary surfaces is obtained, including a non-orientable case. The realization of the generalized Wang's graph by the standard Morse flow on the surface is performed as well. To obtain all the results, constructive method is used: to prove the classification theorem, a homeomorphism is constructed that maps regions with the same behavior of trajectories into each other, and the graph allows to establish the correct location of such regions relative to each other. The realization theorem is also proven constructively: basing on the graph being considered, standard flow is created that is topologically conjugated to every flow such that the graph corresponds to this flow. Thus, a complete topological classification of Morse flows on surfaces is constructed by means of an invariant, which in some respects surpasses in simplicity and practicality both the directed Peixoto graph and the three-colour Oshemkov-Sharko graph.

Keywords: gradient-like flow, Morse flow, topological classification, Wang's graph, surface flow

For citation: V. E. Kruglov, M. S. Rekshinskiy. Generalised Wang's Graph for Morse Flows on Surfaces. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:3(2023), 123–149. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.123-149>

About the authors:

Vladislav E. Kruglov, Research Fellow, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, HSE University (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), Cand.Sci. (Mathematical Sciences), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

Mihail S. Rekshinskiy, student, Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, HSE University (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-4683-4619>, mrekshinskii@mail.ru

1. Введение

Понятие *грубых потоков* на плоскости были введено в статье А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1]. Неблуждающее множество таких потоков состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов, кроме того, отсутствуют траектории, соединяющие седловые точки. Этот важный класс потоков был обобщён С. Смейлом в работе [2] на произвольные размерности, назван классом потоков Морса-Смейла и классифицирован с точностью до

топологической эквивалентности. В настоящей работе рассматриваются потоки Морса-Смейла без периодических траекторий на поверхностях, называемые потоками Морса или градиентно-подобными потоками.

Изучение динамики потока на поверхностях путем разбиения фазового пространства на ячейки с одним и тем же предельным поведением траекторий внутри ячейки восходит к классическим работам А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1], Е. А. Леонтович и А. Г. Майера [3–4]. Типы ячеек (число которых конечно) и их примыкание друг к другу полностью определяют класс топологической эквивалентности потока с конечным числом особых траекторий. На основе данного разбиения в работах Пейшото [5] и Вонга [6] были введены соответствующие топологические инварианты. Пейшото ввел понятие различающего ориентированного графа, который ставится в соответствие потоку Морса-Смейла на поверхности, и сформулировал теорему о том, что этот граф является полным топологическим инвариантом для потоков Морса-Смейла с точностью до топологической эквивалентности. Однако как было выяснено впоследствии, описанный Пейшото ориентированный граф является полным топологическим инвариантом лишь для градиентно-подобных потоков. В свою очередь Вонг предъявил более простой, чем у Пейшото, инвариант для потоков Морса-Смейла, определённый только на ориентируемых поверхностях. И поскольку Вонг построил свой инвариант на основе работы Пейшото, он также является полным инвариантом лишь для потоков Морса.

Более подробные сведения по истории классификации потоков на поверхностях и, в частности, градиентно-подобных потоков смотрите, например, в работах [7–8].

Граф Вонга $\Gamma_{f^t}^W$ для градиентно-подобного потока f^t на ориентируемой поверхности S – это двуцветный ориентированный граф, дуальный к графу Пейшото: вершины такого графа соответствуют ячейкам потока f^t , его рёбра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по сепаратрисам, соответствующим рёбрам. Ребру присваивается цвет u , если оно соответствует неустойчивой седловой сепаратрисе, и цвет s , если соответствует устойчивой седловой сепаратрисе. Заметим, что если какая-либо седловая сепаратриса лежит во внутренности замыкания некоторой ячейки, то этой сепаратрисе соответствует петля на графе. Таким образом, каждая вершина имеет валентность 4, если считать петлю за два условных ребра. Также, на всех s - и u -рёбрах графа $\Gamma_{f^t}^W$ задаётся ориентация, индуцированная выбором ориентации на несущем многообразии S , такая, что ориентация рёбер на всех su циклах задаёт согласованную ориентацию на каждом одноцветном цикле.

В ходе построения своего графа Вонг использовал некий вспомогательный граф, у которого отсутствуют цвета и ориентация рёбер, но присутствует разбиение всех рёбер на пары следующим образом: набор из четырех инцидентных одной вершине рёбер, включая условные, разбивается на пары, в каждую из которых входит одно ребро, соответствующее устойчивой сепаратрисе, и одно ребро, соответствующее неустойчивой сепаратрисе, примыкающие друг к другу на границе ячейки, соответствующей вершине. Такие пары обозначаются дугой, пересекающей оба ребра пары.

При построении обобщённого графа Вонга используется нечто среднее между этим вспомогательным графом и, собственно, графом Вонга для потоков Морса. Определим обобщённый граф Вонга следующим образом: обобщённый граф Вонга Γ_{f^t} для потока Морса f^t – это двуцветный граф Вонга без ориентации на рёбрах, но с описанным выше разбиением на пары всех рёбер.

В качестве основного результата работы доказывается, что такой граф является полным топологическим инвариантом для градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях, а не только на ориентируемых.

2. Формулировка результатов

Определение 2.1 (см., например, [2]). Поток f^t называется потоком Морса-Смейла, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов, инвариантные многообразия которых пересекаются друг с другом только трансверсально.

Для потока на поверхности последнее условие означает отсутствие траекторий, соединяющих седловые точки.

Определение 2.2 (см., например, [5]). Поток Морса-Смейла без периодических траекторий называется потоком Морса или градиентно-подобным потоком.

Определение 2.3 (см., например, [5]). Потоки $f^t, f^{t'}: M \rightarrow M$ на многообразии M называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, отображающий траектории потока f^t в траектории потока $f^{t'}$ с сохранением направления движения по траекториям.

Определение 2.4 (см., например, [9]). Два потока называются топологически сопряжёнными, если выполняется условие $h \circ f^t = f^{t'} \circ h$, это означает, что h отображает траектории в траектории, сохраняя не только направление, но и время движения по траекториям.

Предложение 2.1 ([10], теорема 1; [11], теорема 7). Градиентно-подобные потоки на замкнутой поверхности топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они топологически эквивалентны.

Предложение 2.2 ([12], гл. 2, теорема 5.1; [9], гл. 4, теорема 7.1). Пусть p – неподвижная гиперболическая точка потока $f^t: S \rightarrow S$. Тогда существует окрестность $U_p \subset S$ точки p и гомеоморфизм на образ $\eta_p: U_p \rightarrow \mathbb{R}^2$ такой, что поток $f^t|_{U_p}$ топологически сопряжён с одним из следующих потоков:

$$a_0^t(x, y) = (2^{-t}x, 2^{-t}y), \quad (2.1)$$

$$a_1^t(x, y) = (2^{-t}x, 2^t y), \quad (2.2)$$

$$a_2^t(x, y) = (2^t x, 2^t y), \quad (2.3)$$

то есть $\eta_p \circ f^t|_{U_p} = a_{i_p}^t \circ \eta_p|_{U_p}$, $i_p \in \{0, 1, 2\}$ для любого t , не выводящего точки за пределы U_p . Окрестность U_p и гомеоморфизм η_p будем называть линейризующими. В случае $i_p = 0, 1, 2$ неподвижная точка p называется стоком, седлом, источником соответственно.

Напомним, что конечным графом Γ называется упорядоченная пара (B, E) , для которой выполнены следующие условия: B – непустое множество вершин; E – множество рёбер, каждое из которых соединяет некоторую пару вершин из множества B .

Каждую из вершин a, b , которые соединяет ребро ab , называют инцидентной ребру ab . Валентностью вершины называется число инцидентных ей рёбер. Граф, рёбра которого соединяют упорядоченные пары вершин, называется ориентированным. Граф называется связным, если любые две его вершины b_0, b_k можно соединить путём, то есть последовательностью $b_0, b_0b_1, b_1, \dots, b_{k-1}, b_{k-1}b_k, b_k$, при этом k – длина пути. Если начало и конец пути совпадают, то путь называют циклом. Если обе вершины ребра

совпадают, то ребро называется *петлёй*. *Подграфом* графа Γ называется пара множеств (\tilde{B}, \tilde{E}) , где $\tilde{B} \subset B, \tilde{E} \subset E$.

Два графа Γ и Γ' называются *изоморфными*, если существует отображение, переводящее вершины и рёбра графа Γ в вершины и рёбра графа Γ' соответственно, с сохранением, при наличии, цветов, направлений и оснащений.

Будем обозначать через $\Omega_{ft}^0, \Omega_{ft}^1, \Omega_{ft}^2$ множества всех стоков, седёл, источников потока f^t соответственно.

Рассмотрим множество

$$\tilde{S} = S \setminus \bigcup_{\sigma \in \Omega_{ft}^1} (cl(W_\sigma^u) \cup cl(W_\sigma^s)).$$

Замыкание любой его компоненты связности называется *ячейкой*. Согласно [5], все ячейки градиентно-подобных потоков могут быть только трёх типов (Рис. 2.1).

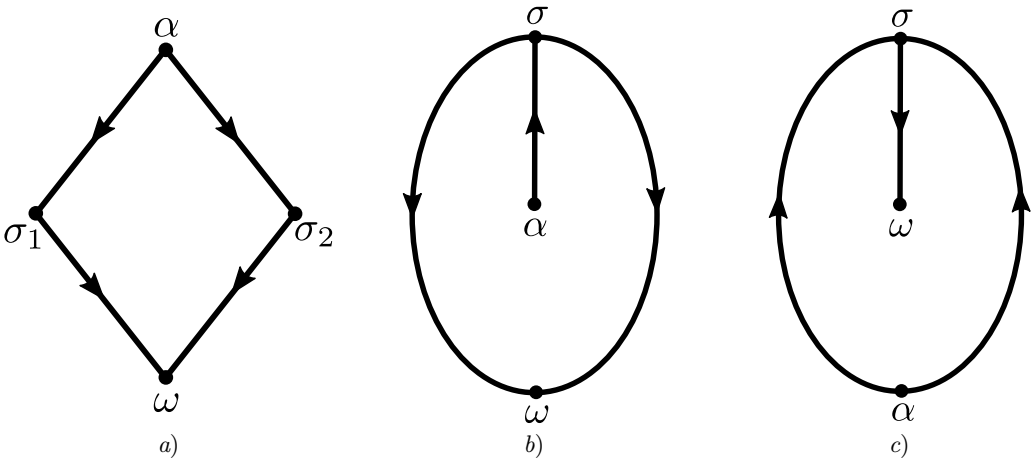


Рис. 2.1. Три типа ячеек градиентно-подобного потока на поверхностях:
 а) тип 1; б) тип 2; в) тип 3

Fig 2.1. Three types of gradient-like flow's cells on surfaces:
 а) Type 1; б) Type 2; в) Type 3

Пусть $f^t: S \rightarrow S$ – градиентно-подобный поток, заданный на поверхности S . Граф Вонга Γ_{ft}^W для такого потока на ориентируемой поверхности S – это двуцветный ориентированный граф: вершины такого графа соответствуют ячейкам потока f^t , его рёбра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по сепаратрисам, соответствующим рёбрам. Ребру присваивается цвет u , если оно соответствует неустойчивой седловой сепаратрисе, и цвет s , если устойчивой седловой сепаратрисе. Заметим, что если какая-либо седловая сепаратриса лежит во внутренности замыкания некоторой ячейки, то этой сепаратрисе соответствует петля на графе. Таким образом, каждая вершина имеет валентность 4, если принять петлю за два условных ребра. Также на всех s - и u -рёбрах графа Γ_{ft}^W задаётся ориентация, индуцированная выбором ориентации на несущем многообразии S , такая, что ориентация рёбер на всех su -циклах задаёт согласованную ориентацию на каждом одноцветном цикле (см. Рис. 2.2, Рис. 2.3).

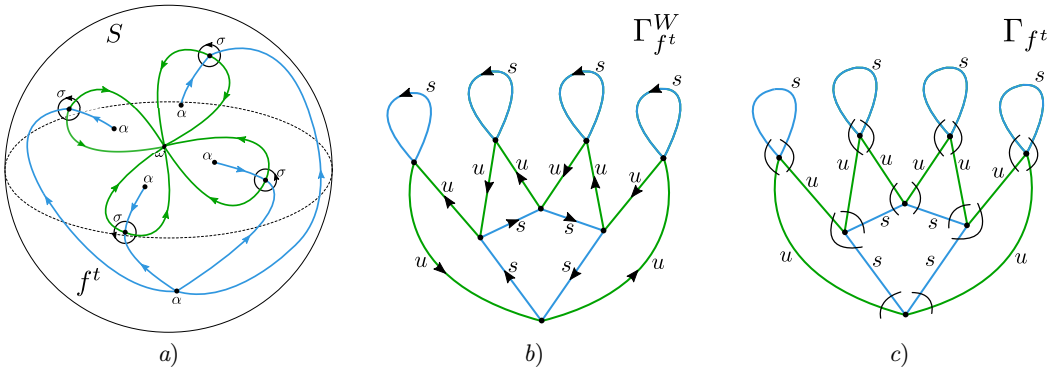


Рис. 2.2. Графы потока f^t на сфере: а) фазовый портрет потока f^t ; б) граф Вонга $\Gamma_{f^t}^W$; в) обобщённый граф Вонга Γ_{f^t}
Fig 2.2. Graphs for a flow f^t on the sphere: а) phase portrait for a flow f^t ; б) Wang's graph $\Gamma_{f^t}^W$; в) generalised Wang's graph Γ_{f^t}

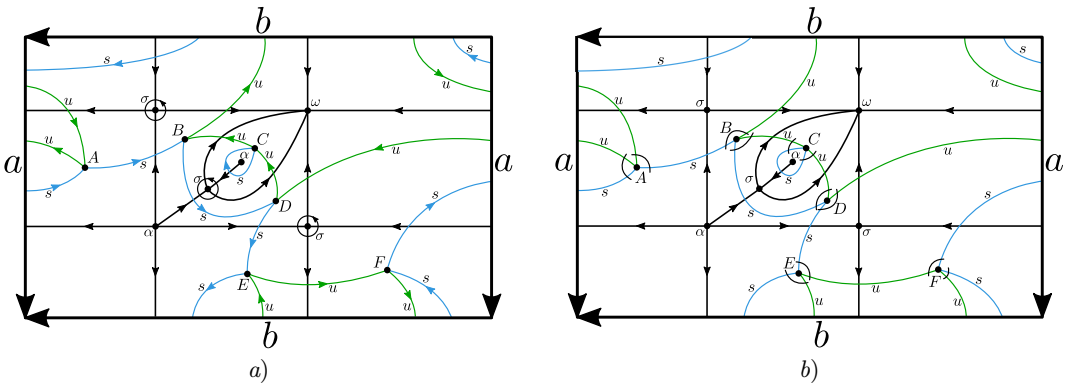


Рис. 2.3. Графы $\Gamma_{f^t}^W$ и Γ_{f^t} (нарисованные в цвете) для потока f^t (фазовый портрет нарисован чёрным) на торе: а) граф $\Gamma_{f^t}^W$; б) граф Γ_{f^t}
Fig 2.3. Graphs $\Gamma_{f^t}^W$ and Γ_{f^t} painted in colour for a flow f^t painted in black // on the torus: а) graph $\Gamma_{f^t}^W$; б) graph Γ_{f^t}

Обобщённым графом Вонга для градиентно-подобного потока f^t назовём граф Γ_{f^t} . Вершины обобщённого графа Вонга Γ_{f^t} соответствуют ячейкам потока f^t , его рёбра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по соответствующим рёбрам сепаратрисам. Ребро окрашивается в цвет u , если соответствует неустойчивой седловой сепаратрисе или u -кривой, и в цвет s , если соответствует устойчивой седловой сепаратрисе или s -кривой. При этом, если какая-либо седловая сепаратриса лежит во внутренности замыкания некоторой ячейки, то этой ячейке и этой сепаратрисе соответствует вершина графа с петлёй. Другими словами, каждая вершина имеет валентность 4, если принять петлю за два условных ребра. Набор этих четырех рёбер, включая условные, разбивается на пары, в каждую из которых входит одно ребро, соответствующее устойчивой сепаратрисе, и одно ребро, соответствующее неустойчивой сепаратрисе, примыкающие друг к другу на границе ячейки, соответствующей вершине. Такие пары обозначаются дугой, пересекающей оба ребра

пары (см. Рис. 2.2, Рис. 2.3, Рис. 2.4).

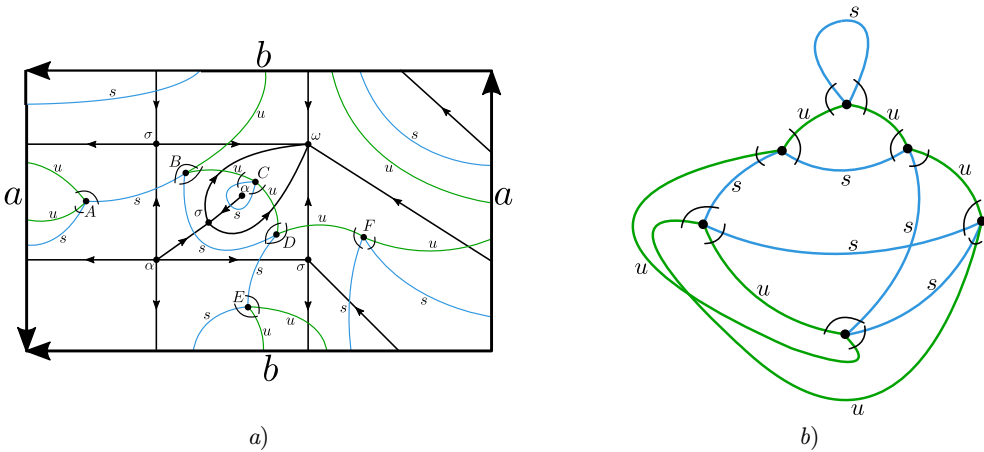


Рис. 2.4. Граф Γ_{f^t} для потока f^t на бутылке Клейна: а) граф, нарисованный цветным, поверх фазового портрета потока, нарисованного чёрным; б) граф Γ_{f^t} в чистом виде

Fig 2.4. Graph Γ_{f^t} for a flow f^t on the Klein bottle: а) graph Γ_{f^t} painted in colour with a flow f^t painted in black; б) only graph Γ_{f^t}

Назовём su -циклом цикл на графе Γ_{f^t} , состоящий из чередующихся рёбер цветов s и u , каждое из которых объединено в пару с каждым из соседних с ним в цикле рёбер. Назовём s -циклом, u -циклом цикл на графе Γ_{f^t} , состоящий лишь из рёбер цветов s , u соответственно.

Два обобщённых графа Вонга Γ_{f^t} и $\Gamma_{f^{t^t}}$, соответствующих потокам f^t и f^{t^t} соответственно, назовём изоморфными, если существует взаимное однозначное отображение ψ вершин и рёбер одного графа соответственно в вершины и рёбра другого графа с сохранением цветности и разбиения на пары всех рёбер.

Обозначим через π_{f^t} взаимно-однозначное соответствие между потоком f^t и графом Γ_{f^t} .

Теорема 2.1. *Градиентно-подобные потоки $f^t, f^{t^t} : S \rightarrow S$ на произвольных поверхностях топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их обобщённые графы Вонга $\Gamma_{f^t}, \Gamma_{f^{t^t}}$ изоморфны.*

Теорема 2.2. *Для любого допустимого графа Γ существует градиентно-подобный поток f^t , заданный на замкнутой поверхности S , граф которого изоморфен исходному графу, при этом:*

i) эйлерова характеристика поверхности S вычисляется по формуле

$$\chi(S) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2, \tag{2.4}$$

где ν_0, ν_1 и ν_2 – число всех u -, su - и s - циклов графа Γ_{f^t} соответственно;

ii) поверхность S является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф Γ_{f^t} содержит хотя бы один цикл с нечётным количеством вершин, содержащихся вместе с s - и u -рёбрами, исходящими из них и состоящими в паре.

3. Доказательство классификационного результата

3.1. Доказательство теоремы 1.1.

Докажем теорему 2.1, частично следуя конструкции из работы [13].

Необходимость.

Пусть потоки f^t и $f^{t'}$ топологически сопряжены, тогда эти потоки топологически эквивалентны, т. е. существует гомеоморфизм $h : S \rightarrow S$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока $f^{t'}$. Тогда гомеоморфизм h переводит ячейки потока f^t в ячейки потока $f^{t'}$, седловые сепаратрисы – в седловые сепаратрисы с сохранением устойчивости и порядка в границе ячейки, и искомый изоморфизм $\psi : \Gamma_{f^t} \rightarrow \Gamma_{f^{t'}}$ определяется формулой $\psi = \pi_{f^{t'}} h (\pi_{f^t})^{-1}$ (см. Рис. 3.1)

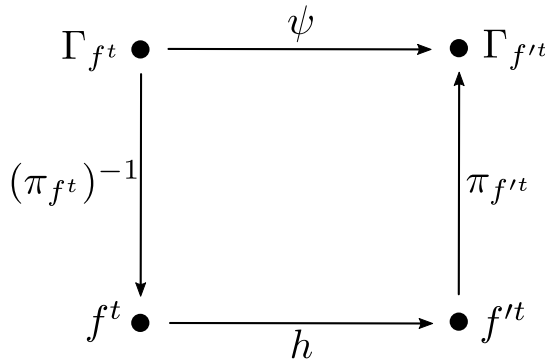


Рис. 3.1. Диаграмма отображений
Fig. 3.1. Diagram of mappings

Достаточность.

Пусть графы Γ_{f^t} и $\Gamma_{f^{t'}}$ потоков f^t и $f^{t'}$ изоморфны посредством ψ . Рассмотрим ячейку $J \in J_{f^t}$. Её граница содержит единственный источник α , единственный сток ω и либо пару седел σ_1, σ_2 , либо одно седло $\sigma_3(\sigma_4)$, в зависимости от типа ячейки. Рассмотрим ячейку J' потока $f^{t'}$, для которой выполняется равенство

$$J' = (\pi_{f^{t'}})^{-1} \psi \pi_{f^t}(J).$$

Изоморфизм ψ обеспечивает одинаковое количество одноцветных простых рёбер и петель, исходящих из вершин графов Γ_{f^t} и $\Gamma_{f^{t'}}$, соответствующих ячейкам J и J' , что означает наличие в границе у J' ровно одного стока ω' , одного источника α' и либо пары седел σ'_1, σ'_2 , либо одного седла $\sigma'_3(\sigma'_4)$, а также сохранение её типа, и как следствие, количества седел в её границе. Заметим, что, благодаря дугам на графе, осуществляющим разбиение на пары всех рёбер, две сепаратрисы одного типа, соответствующие двум рёбрам одного цвета, входящим в разные пары, при гомеоморфизме не меняются местами.

Поскольку изоморфизм ψ сохраняет цветность и разбиение на пары всех рёбер, то построение гомеоморфизма $h : S \rightarrow S$, осуществляющего топологическую эквивалентность потоков f^t и $f^{t'}$, сводится к построению гомеоморфизма $h_J : cl(J) \rightarrow cl(J')$, переводящего траектории потока f^t , лежащие в $cl(J)$, в траектории потока $f^{t'}$, лежащие

в $cl(J')$, таким образом, что

$$h_J|_{cl(J) \cap cl(\tilde{J})} = h_{\tilde{J}}|_{cl(J) \cap cl(\tilde{J})}$$

для любых ячеек J, \tilde{J} потока f^t . Для этого построим замкнутые кривые $\zeta_\alpha, \zeta_\omega$, ограничивающие попарно непересекающиеся окрестности $U_\alpha \ni \alpha, U_\omega \ni \omega$ и заданные формулами $\zeta_\alpha = \eta_\alpha^{-1}(\zeta_0^{\tau_*})$, и $\zeta_\omega = \eta_\omega^{-1}(\zeta_0^{\tau_*})$, при $\tau_* \in (0, 1]$, где $\zeta_0^\tau = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = \tau^2\}$. Также положим $\zeta_\alpha^\tau = \eta_\alpha^{-1}(\zeta_0^\tau)$, и $\zeta_\omega^\tau = \eta_\omega^{-1}(\zeta_0^\tau)$, при $\tau \in (0, \tau_*]$.

Обозначим через $l_{\alpha, \sigma_1}, l_{\alpha, \sigma_2}$ и $l_{\sigma_1, \omega}, l_{\sigma_2, \omega}$ соответственно устойчивые и неустойчивые сепаратрисы на границе ячейки J первого типа и через $l_{\alpha, \sigma_3}(l_{\sigma_4, \alpha}, l_{\alpha, \sigma_4})$ и $l_{\sigma_3, \omega}, l_{\omega, \sigma_3}(l_{\sigma_4, \omega})$ соответственно устойчивые и неустойчивые сепаратрисы на границе ячейки J второго (третьего) типа. Положим $\{A\} = \zeta_\omega \cap l_{\sigma_2, \omega}, \{A_0\} = \zeta_\omega \cap l_{\sigma_1, \omega}, \{C\} = \zeta_\alpha \cap l_{\alpha, \sigma_2}, \{C_0\} = \zeta_\alpha \cap l_{\alpha, \sigma_1}, \{D\} = \zeta_\omega \cap l_{\omega, \sigma_3}, \{D_0\} = \zeta_\omega \cap l_{\sigma_3, \omega}, \{F\} = \zeta_\alpha \cap l_{\alpha, \sigma_3}, \{G\} = \zeta_\omega \cap l_{\sigma_4, \omega}, \{I\} = \zeta_\alpha \cap l_{\sigma_4, \alpha}, \{I_0\} = \zeta_\alpha \cap l_{\alpha, \sigma_4}$ (см. Рис. 3.2 и Рис. 3.6).

Везде далее мы будем использовать следующие обозначения:

- \mathcal{O}_z – траектория точки $z \in cl(J)$;
- $m_{a,b}$ – замыкание отрезка некоторой секущей к траекториям потока $f^t|_{cl(J)}$, ограниченного точками a и b ;
- m_a – частный случай $m_{a,b}$, где $a = b$;
- $l_{a,b}$ – отрезок траектории, ограниченный точками a и b , и $\lambda_{a,b}$ – его длина;
- $h_{\{a,b\}, \{c,d\}} : l_{a,b} \rightarrow l_{c,d}$ – гомеоморфизм по длине дуги, то есть гомеоморфизм, определённый формулой

$$h_{\{a,b\}, \{c,d\}}(z) = p, z \in l_{a,b}, p \in l_{c,d}, \text{ где } \lambda_{c,p} = \frac{\lambda_{a,z} \cdot \lambda_{c,d}}{\lambda_{a,b}}.$$

Введем аналогичные обозначения со штрихом для соответствующих объектов ячейки J' , полагая $t'_* = t_*$, и далее будем строить гомеоморфизм h_J для ячейки первого типа по шагам.

I. Построим гомеоморфизм в ячейке типа 1.

Шаг 1. Построим h_J в окрестностях узловых точек.

Пусть $h_{m_{A,A_0}} : m_{A,A_0} \rightarrow m_{A',A'_0}$ – произвольный гомеоморфизм. Для $z \in m_{A,A_0}$ и $\tau \in (0, \tau_*]$ положим $z_\tau = \zeta_\omega^\tau \cap \mathcal{O}_z$. Положим $z' = h_{m_{A,A_0}}(z)$ и $z'_\tau = \zeta_{\omega'}^\tau \cap \mathcal{O}_{z'}$. Определим гомеоморфизм $h_{U_\omega} : cl(U_\omega) \cap J \rightarrow cl(U_{\omega'}) \cap J'$ так, что $h_{U_\omega}(\omega) = \omega'$ и $h_{U_\omega}(z_\tau) = z'_\tau$.

Аналогично строится гомеоморфизм $h_{U_\alpha} : cl(U_\alpha) \cap J \rightarrow cl(U_{\alpha'}) \cap J'$, при условии, что $h_{m_{C,C_0}}(m_{C,C_0} \cap \mathcal{O}_z) = m_{C',C'_0} \cap \mathcal{O}_{z'}$.

Шаг 2. Построим h_J на границе J . Для этого построим следующие гомеоморфизмы по длине дуги: $h_{[A_0, \sigma_1], [A'_0, \sigma'_1]} : l_{A_0, \sigma_1} \rightarrow l_{A'_0, \sigma'_1}, h_{[C_0, \sigma_1], [C'_0, \sigma'_1]} : l_{C_0, \sigma_1} \rightarrow l_{C'_0, \sigma'_1}, h_{[A, \sigma_2], [A', \sigma'_2]} : l_{A, \sigma_2} \rightarrow l_{A', \sigma'_2}, h_{[C, \sigma_2], [C', \sigma'_2]} : l_{C, \sigma_2} \rightarrow l_{C', \sigma'_2}$.

Аналогичная конструкция на сепаратрисах в границах замыканий всех ячеек обеспечивает выполнение условия $h_J|_{cl(J) \cap cl(\tilde{J})} = h_{\tilde{J}}|_{cl(J) \cap cl(\tilde{J})}$ для любых J, \tilde{J} .

Шаг 3. Построим секущую, граничными точками которой являются седла σ_1 и σ_2 .

Определим секущую $m_{\sigma_2, \sigma_1}(m_{\sigma'_2, \sigma'_1})$ следующим образом. Пусть

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\}.$$

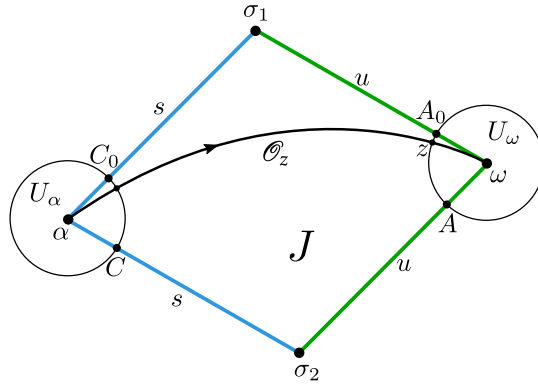


Рис. 3.2. Шаги 1-2 построения гомеоморфизма h_J для ячейки первого типа
Fig. 3.2. Steps 1-2 of constructing the homeomorphism h_J for a cell of the first type

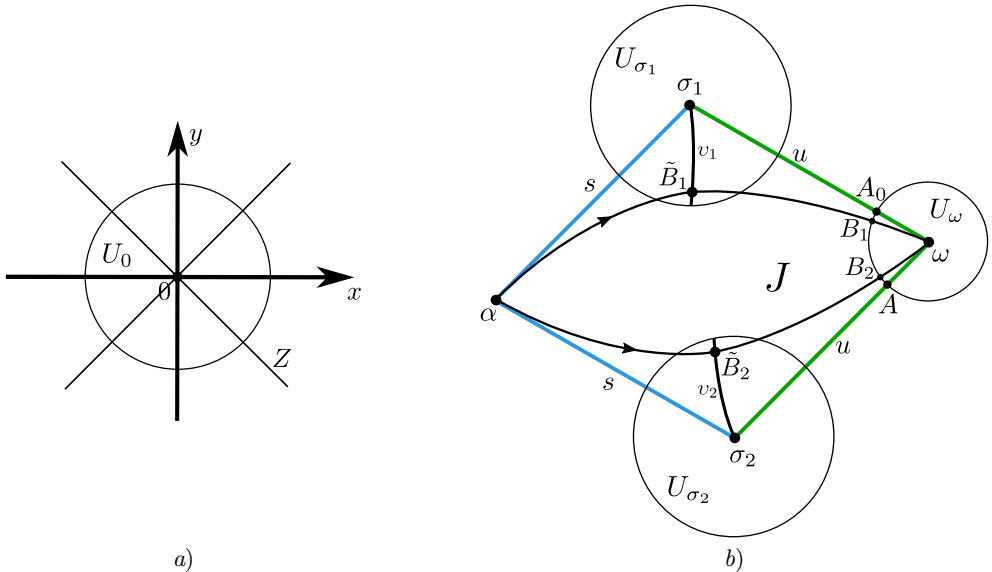


Рис. 3.3. Начало построения секущей: а) множество Z в окрестности U_0 ;
 б) построение v_i с помощью множества Z
Fig 3.3. Beginning of construction a secant: а) set Z in the neighbourhood U_0 ;
 б) constructing v_i by means of Z

Множество Z состоит из двух прямых, пересекающихся в начале координат и трансверсальных траекториям потока a_1^t (Предложение 2.2). Пусть $v_i = \eta_{\sigma_i}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J(v_i' = \eta_{\sigma_i}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J')$ (см. Рис. 3.3). Выберем некоторую пару точек $B_1, B_2 \in m_{A,A_0}$, такую что $m_{B_1,A_0} \cap m_{B_2,A} = \emptyset, \mathcal{O}_{B_i} \cap v_i \neq \emptyset (m_{B_1,A_0} \cap m_{B_2,A'} = \emptyset, \mathcal{O}_{B_i} \cap v_i' \neq \emptyset)$ и $B_i' = h_{A,A_0}(B_i), i \in \{1, 2\}$. Пусть $\{\tilde{B}_i\} = \mathcal{O}_{B_i} \cap v_i$ (см. Рис. 3.4). Обозначим через $m_{\tilde{B}_i, \sigma_i}$ подмножество v_i , ограниченное точками \tilde{B}_i и σ_i . Пусть $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, такие что $\tilde{B}_2 = f^{t_0}(B_2)$ и $\tilde{B}_1 = f^{t_1}(B_1)$. Поскольку секущая m_{B_2, B_1} гомеоморфна отрезку $[0, 1]$,

то точки $z \in m_{B_2, B_1}$ будем считать параметризованными: $z = z(s), s \in [0, 1]$ так, что $z(0) = \tilde{B}_2$. Положим $t_s = st_1 + (1 - s)t_0$ и

$$m_{\tilde{B}_2, \tilde{B}_1} = \{f^{t_s}(z(s)), z(s) \in m_{B_2, B_1}\}.$$

Тогда $m_{\sigma_2, \sigma_1} = m_{\sigma_2, \tilde{B}_2} \cup m_{\tilde{B}_2, \tilde{B}_1} \cup m_{\tilde{B}_1, \sigma_1}$ – секущая к траекториям потока в $int(J)$ (Рис. 3.4). Аналогично определяются $m_{\sigma'_2, \tilde{B}'_2}, m_{\tilde{B}'_2, \tilde{B}'_1}$ и $m_{\tilde{B}'_1, \sigma'_1}$.

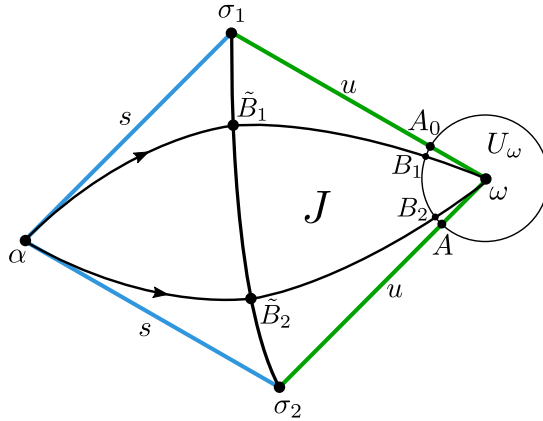


Рис. 3.4. Построение секущей
Fig. 3.4. Constructing a secant

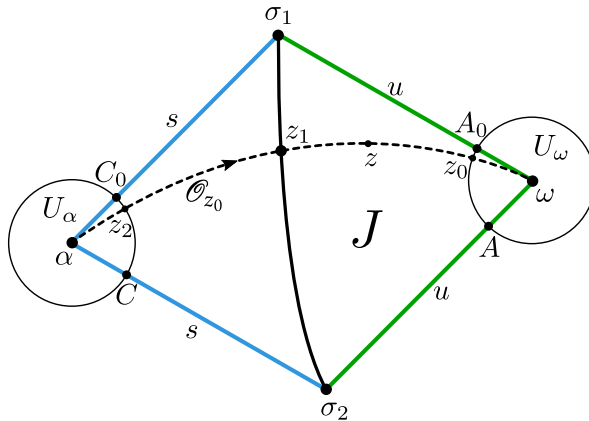


Рис. 3.5. Продолжение гомеоморфизма h_J внутрь ячейки J типа 1
Fig. 3.5. Extending the homeomorphism h_J inside a cell J of type 1

Шаг 4. Продолжим h_J внутрь J . Пусть $z_0 \in m_{A, A_0}, z'_0 = h_{m_{A, A_0}}(z_0)$. Положим $\{z_1\} = \mathcal{O}_{z_0} \cap m_{\sigma_2, \sigma_1}, \{z'_1\} = \mathcal{O}_{z'_0} \cap m_{\sigma'_2, \sigma'_1}, \{z_2\} = \mathcal{O}_{z_0} \cap m_{C, C_0}, \{z'_2\} = \mathcal{O}_{z'_0} \cap m_{C', C'_0}$ (Рис. 3.5). Положим $h_J|_{I_{z_{i-1}, z_i}} = h_{[z_{i-1}, z_i], [z'_{i-1}, z'_i]}$, где $i \in \{1, 2\}$.

II. Построим гомеоморфизм h_J в ячейках типа 2 и 3.

Шаги 1 и 2 проводятся аналогично шагам 1 и 2 для ячейки первого типа (см. Рис. 3.6).

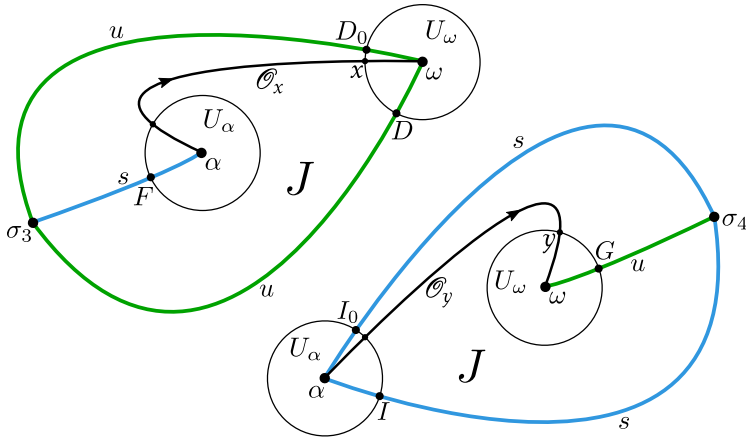


Рис. 3.6. Шаги 1-2 построения гомеоморфизма h_J для ячеек второго и третьего типов
Fig. 3.6. Steps 1-2 of constructing the homeomorphism h_J for cells of the second and third types

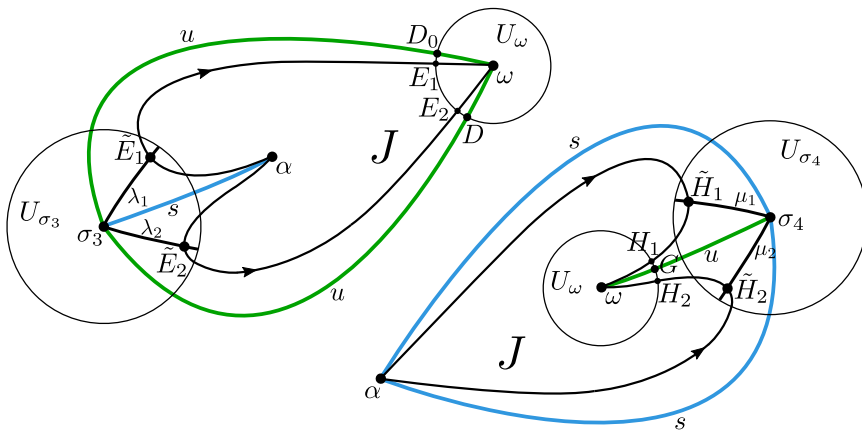


Рис. 3.7. Начало построения секущей. Построение $\lambda_{1,2}, \mu_{1,2}$.
Fig. 3.7. The beginning of a secant design. Constructing $\lambda_{1,2}, \mu_{1,2}$

Шаг 3. Построим секущую, граничной точкой которой является седловая точка $\sigma_3(\sigma_4)$.

Определим секущую $m_{\sigma_3}(m_{\sigma'_3})(m_{\sigma_4}(m_{\sigma'_4}))$ следующим образом.

Пусть $\lambda_i = \eta_{\sigma_3}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J(\lambda'_i = \eta_{\sigma'_3}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J')$ и $\mu_i = \eta_{\sigma_4}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J(\mu'_i = \eta_{\sigma'_4}^{-1}(Z \cap U_0) \cap J')$ (Рис. 3.7). Выберем некоторую пару точек $E_1, E_2 \in m_{D, D_0}(H_1, H_2 \in m_G)$, такую что $\mathcal{O}_{E_i} \cap \lambda_i \neq \emptyset$ ($\mathcal{O}_{E'_i} \cap \lambda'_i \neq \emptyset$) ($\mathcal{O}_{H_i} \cap \mu_i \neq \emptyset$) ($\mathcal{O}_{H'_i} \cap \mu'_i \neq \emptyset$) и $E'_i =$

$h_{D,D_0}(E_i)(H'_i = h_G(H_i)), i \in \{1, 2\}$. Пусть $\{\tilde{E}_i\} = \mathcal{O}_{E_i} \cap \lambda_i(\{\tilde{H}_i\} = \mathcal{O}_{H_i} \cap \mu_i)$ (см. Рис. 3.8). Обозначим через $m_{\tilde{E}_i, \sigma_3}(m_{\tilde{H}_i, \sigma_4})$ подмножество $\lambda_i(\mu_i)$, ограниченное точками $\tilde{E}_i(\tilde{H}_i)$ и $\sigma_3(\sigma_4)$. Пусть $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, такие что $\tilde{E}_2 = f^{t_0}(E_2)(\tilde{H}_2 = f^{t_0}(H_2))$ и $\tilde{E}_1 = f^{t_1}(E_1)(\tilde{H}_1 = f^{t_1}(H_1))$. Поскольку секущая $m_{E_2, E_1}(m_{H_2, H_1})$ гомеоморфна отрезку $[0, 1]$, то точки $x \in m_{E_2, E_1}(y \in m_{H_2, H_1})$ будем считать параметризованными: $x = x(s)(y = y(s)), s \in [0, 1]$ так, что $x(0) = \tilde{E}_2(y(0) = \tilde{H}_2)$. Положим $t_s = st_1 + (1 - s)t_0$ и

$$m_{\tilde{E}_2, \tilde{E}_1} = \{f^{t_s}(x(s)), x(s) \in m_{E_2, E_1}\}(m_{\tilde{H}_2, \tilde{H}_1} = \{f^{t_s}(y(s)), y(s) \in m_{H_2, H_1}\}).$$

Тогда $m_{\sigma_3} = m_{\sigma_3, \tilde{E}_2} \cup m_{\tilde{E}_2, \tilde{E}_1} \cup m_{\tilde{E}_1, \sigma_3}(m_{\sigma_4} = m_{\sigma_4, \tilde{H}_2} \cup m_{\tilde{H}_2, \tilde{H}_1} \cup m_{\tilde{H}_1, \sigma_4})$ – секущая к траекториям потока в $int(J)$ (см. Рис. 3.8). Аналогично определяются $m_{\sigma'_3, \tilde{E}'_2}, m_{\tilde{E}'_2, \tilde{E}'_1}$ и $m_{\tilde{E}'_1, \sigma'_3}(m_{\sigma'_4, \tilde{H}'_2}, m_{\tilde{H}'_2, \tilde{H}'_1}$ и $m_{\tilde{H}'_1, \sigma'_4}$.

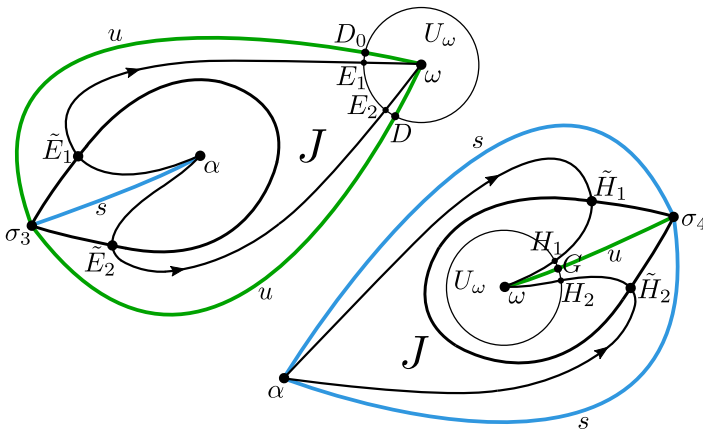


Рис. 3.8. Построение секущей
Fig. 3.8. Constructing a secant

Шаг 4. Продолжим h_J внутрь J .

Пусть $x_0 \in m_{D, D_0}, x'_0 = h_{m_{D, D_0}}(x_0)(y_0 \in m_G, y'_0 = h_{m_G}(y_0))$. Положим $\{x_1\} = \mathcal{O}_{x_0} \cap m_{\sigma_3}(\{y_1\} = \mathcal{O}_{y_0} \cap m_{\sigma_4}), \{x'_1\} = \mathcal{O}_{x'_0} \cap m_{\sigma'_3}(\{y'_1\} = \mathcal{O}_{y'_0} \cap m_{\sigma'_4}), \{x_2\} = \mathcal{O}_{x_0} \cap m_F(\{y_2\} = \mathcal{O}_{y_0} \cap m_{I, I_0}), \{x'_2\} = \mathcal{O}_{x'_0} \cap m_{F'}(\{y'_2\} = \mathcal{O}_{y'_0} \cap m_{I', I'_0})$ (Рис. 3.9). Положим $h_J|_{l_{x_{i-1}, x_i}} = h_{[x_{i-1}, x_i], [x'_{i-1}, x'_i]}(h_J|_{l_{y_{i-1}, y_i}} = h_{[y_{i-1}, y_i], [y'_{i-1}, y'_i]})$, где $i \in \{1, 2\}$.

Таким образом, мы отобразили посредством гомеоморфизма h_J замыкание ячейки J на замыкание ячейки J' . Из этого следует топологическая эквивалентность потоков f^t и f'^t и, как следствие, их топологическая сопряжённость (Предложение 2.1). Теорема доказана.

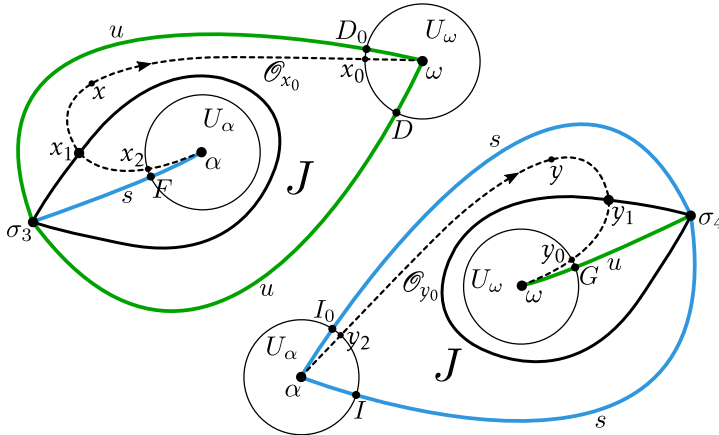


Рис. 3.9. Продолжение гомеоморфизма h_J внутрь ячейки J типов 2 и 3
Fig. 3.9. Extending the homeomorphism h_J inside a cell J of types 2 and 3

4. Реализация обобщённого графа Вонга

Пусть f^t – градиентно-подобный поток, заданный на поверхности S . Напомним, что ячейкой J потока f^t называется компонента связности множества $\tilde{S} = S \setminus (W_{f^t}^u \cup W_{f^t}^s \cup W_{f^t}^t)$. Обозначим через J_{f^t} множество всех ячеек потока f^t и выберем по одной траектории θ_J (t -кривой) в каждой ячейке $J \in J_{f^t}$. Положим $\mathcal{T} = \bigcup_{J \in \tilde{S}} \theta_J$, $\bar{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}$.

Назовём u -кривыми неустойчивые седловые сепаратрисы и s -кривыми – устойчивые седловые сепаратрисы.

Из работы [5] следует, что каждая компонента связности Δ множества \bar{S} является криволинейным треугольником, ограниченным одной s -, одной u - и одной t -кривой, в следствии чего мы будем называть Δ *треугольной областью*.

Трёхцветный граф $\Gamma_{f^t}^{OS}$ Ошемкова-Шарко из работы [14], соответствующий градиентно-подобному потоку f^t , строится следующим образом (см. Рис. 4.1):

- 1) вершины графа $\Gamma_{f^t}^{OS}$ взаимно однозначно соответствуют треугольным областям потока;
- 2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t, u , если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую s -, t -, u -сторону, а между этим ребром и s -, t -, u -кривой устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Предложение 4.1 ([14], п. 2, теорема 1.12). Пусть $\Gamma_{f^t}^{OS}$ - трёхцветный граф градиентно-подобного потока f^t , заданного на поверхности S . Тогда поверхность S является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф $\Gamma_{f^t}^{OS}$ содержит хотя бы один цикл нечётной длины.

4.1. Допустимый граф

Конечный связный двухцветный граф Γ с дугами между парами рёбер, находящихся в паре, описанных выше, назовём *допустимым*, если он содержит su -циклы и каждый

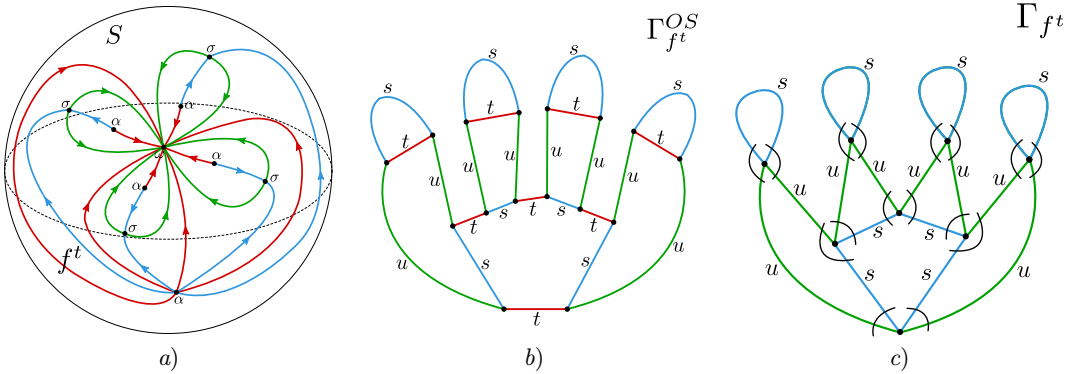


Рис. 4.1. Графы потока f^t на сфере: а) фазовый портрет потока f^t ; б) трёхцветный граф Ошемкова-Шарко $\Gamma_{f^t}^{OS}$; в) обобщённый граф Вонга Γ_{f^t}
Fig 4.1. Graphs for a flow f^t on the sphere: а) phase portrait for a flow f^t ; б) three-colour Oshemkov-Sharko's graph $\Gamma_{f^t}^{OS}$; в) generalised Wang's graph Γ_{f^t}

такой цикл имеет длину 4.

Цикл графа Γ назовём s -циклом (u -циклом), если все его рёбра имеют цвет s (u).

Л е м м а 4.1. *Граф Γ_{f^t} является допустимым.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказательстве будем следовать конструкциям из [14–13].

Поскольку поток f^t лежит на замкнутой поверхности S , а каждая вершина графа соответствует его ячейке, значит, можно построить граф, изоморфный данному, просто расположив его вершины внутри ячеек, а рёбрами сделав вложенные в поверхность кривые, соединяющие эти вершины и пересекающие каждая свою цветную кривую единственный раз. Как граф, построенный по потоку f^t , он очевидно будет изоморфен графу Γ_{f^t} . Поэтому, не уменьшая общности, будем считать, что граф Γ_{f^t} вложен в поверхность S вышеописанным образом. Поскольку поверхность S связна, то связан и граф Γ_{f^t} .

Поскольку к каждой точке $p \in \Omega_{f^t}$ примыкает конечное число ячеек, разделенных сепаратрисами, то точке p посредством отображения π_{f^t} однозначно соответствует цикл из вершин, соответствующих примыкающим к p ячейкам, и цветных рёбер, пересекающих сепаратрисы, выходящие из p . Так, если к седлу примыкают либо в точности четыре ячейки первого типа, либо две ячейки первого типа и одна второго (третьего) типа, либо две ячейки второго (третьего) типа, все разделены u - и s -кривыми, то каждому седлу потока f^t соответствует su -цикл графа Γ_{f^t} , а именно цикл из четырёх обычных рёбер, трёх обычных и одного условного ребра, двух обычных и двух условных рёбер, в первом, втором и третьем случаях соответственно. Справедливо и обратное соответствие: каждый su -цикл можно поместить в окрестность единственной седловой точки так, что для разных su -циклов эти окрестности не пересекаются. Таким образом, граф Γ_{f^t} содержит su -циклы, и каждый такой цикл имеет длину 4. Следовательно, граф Γ_{f^t} является допустимым.

Л е м м а 4.2. *Отображение π_{f^t} устанавливает взаимно однозначное соответствие между множествами $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$ и множествами s -, su -, u -циклов соответственно.*

Доказательство. Соответствие посредством отображения π_{f^t} между множеством $\Omega_{f^t}^1$ и множеством su циклов следует из доказательства леммы 4.1. К каждой стоковой точке ω потока f^t примыкают области, разделенные u -кривыми, лежащими в бассейне W_ω^s . Значит, точке ω посредством отображения π_{f^t} соответствует единственный u -цикл графа Γ_{f^t} . Справедливо и обратное соответствие: поскольку бассейны различных стоков разделяются s -кривыми, то каждый u -цикл можно поместить в бассейн единственного стока. Таким образом, отображение π_{f^t} устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\Omega_{f^t}^0$ и множеством u -циклов. Соответствие между множеством $\Omega_{f^t}^2$ и множеством s -циклов устанавливается аналогично.

4.2. Доказательство теоремы 1.2.

Пусть мы имеем некоторый допустимый граф Γ .

I. Построим по шагам поток f^t , соответствующий классу изоморфности графа Γ , частично следуя конструкции из [13].

Шаг 1. Рассмотрим некоторую вершину b графа Γ . Она инцидентна либо четырём простым рёбрам, два из которых s -рёбра, а два другие – u -рёбра, либо трём рёбрам, два из которых s -рёбра (u -рёбра), а третье – u -ребро (s -ребро) – является петлёй. Построим на плоскости \mathbb{R}^2 квадрат $A_1A_2A_3A_4$ с центром в точке $O(0, 0)$, вершинами $A_1(1, 0), A_2(0, 1), A_3(-1, 0), A_4(0, -1)$ соответственно (Рис. 4.2). Заметим, что сторона этого квадрата равна $\sqrt{2}$, а его центральный угол равен $\frac{\pi}{2}$.

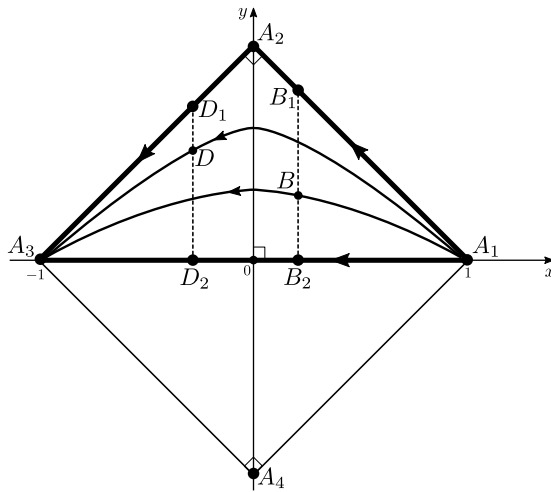


Рис. 4.2. Построение векторного поля v_b^j
Fig. 4.2. Constructing of the vector field v_b^j

Вершине b графа Γ соответствует ячейка J_b , состоящая из двух треугольных областей. Обозначим треугольник $A_1A_2A_3$, представляющий из себя половину квадрата, лежащую выше оси Ox , через $S_b^j, j = 1, 2$, где b – вершина графа; j – номер треугольника, лежащего в ячейке J_b .

Сторону A_1A_2 назовём устойчивой сепаратрисой s , сторону A_2A_3 – неустойчивой сепаратрисой u , а сторону A_1A_3 – t -кривой. Точки A_1, A_2, A_3 назовём источником, седлом

и стоком соответственно.

Шаг 2. Построим векторное поле v_b^j на S_b^j следующим образом.

Сначала определим векторное поле $v_{A_1A_3}$ на стороне A_1A_3 системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y} = 0, \\ \dot{x} = x^2 - 1, x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

По построению A_1, A_3 – неподвижные точки, и поток, порождённый этим векторным полем, движется от A_1 к A_3 . Определим векторное поле на остальных сторонах треугольника S_b^j .

Рассмотрим стороны A_1A_2 и A_2A_3 . Прямые, проходящие через точки A_1, A_2 и A_2, A_3 , имеет следующие уравнения:

$$A_1A_2: y = -x + 1,$$

$$A_2A_3: y = x + 1$$

соответственно. Их углы наклона к положительному направлению оси Ox равны $\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ соответственно.

Сведём рассматриваемую ситуацию к случаю стороны A_1A_3 . Для этого установим взаимно однозначные соответствия t_1 между точками отрезков $[0, 1]$ и $[-1, 1]$ и t_2 между точками отрезков $[-1, 0]$ и $[-1, 1]$ формулами

$$t_1 = 2x - 1,$$

$$t_2 = 2x + 1.$$

Определим векторные поля $v_{A_1A_2}, v_{A_2A_3}$ системами дифференциальных уравнений:

$$v_{A_1A_2} = \begin{cases} \dot{x} = -(1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, x \in [0, 1], \\ \dot{y} = (1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, x \in [0, 1]. \end{cases}$$

$$v_{A_2A_3} = \begin{cases} \dot{x} = -(1 - t_2^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, x \in [-1, 0], \\ \dot{y} = -(1 - t_2^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, x \in [-1, 0]. \end{cases}$$

Шаг 3. Построим векторное поле v_{int} внутри треугольника S_b^j . Выберем пару произвольных точек B и D с координатами $(x_1, y_1), x_1 \geq 0$ и $(x_2, y_2), x_2 < 0$, соответственно внутри треугольника S_b^j . Тогда B и D принадлежат вертикальным отрезкам B_1B_2 и D_1D_2 , соответственно, где $B_1 \in A_1A_2, D_1 \in A_2A_3$, а B_2 и D_2 – проекции B_1 и D_1 на Ox , соответственно (Рис. 4.2). Определим векторное поле v_{int} системой дифференциальных уравнений

$$v_{int} = \begin{cases} \begin{cases} \dot{x} = \frac{B_1 B}{B_1 B_2} (x^2 - 1) - \frac{B B_2}{B_1 B_2} (1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, \\ \dot{y} = -\frac{B B_2}{B_1 B_2} (1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x. \end{cases} & \text{если } x \in [0, 1], \\ \begin{cases} \dot{x} = \frac{D_1 D}{D_1 D_2} (x^2 - 1) - \frac{D D_2}{D_1 D_2} (1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x, \\ \dot{y} = \frac{D D_2}{D_1 D_2} (1 - t_1^2) \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sign } x. \end{cases} & \text{если } x \in [-1, 0). \end{cases}$$

Определим векторное поле v_b^j системой:

$$v_b^j(x, y) = \begin{cases} v_{A_1 A_3}(x, y), & (x, y) \in A_1 A_3, \\ v_{A_1 A_2}(x, y), & (x, y) \in A_1 A_2, \\ v_{A_2 A_3}(x, y), & (x, y) \in A_2 A_3, \\ v_{int}(x, y), & (x, y) \in \text{int } S_b^j. \end{cases}$$

Шаг 4. Склеив два идентичных треугольника по t -кривым так, что сток склеится со стоком, а источник с источником, мы получим четырёхугольник, соответствующий ячейке первого типа. Склеив получившийся четырёхугольник по устойчивым (неустойчивым) сепаратрисам так, что седло склеится с седлом, мы получим геометрическую фигуру, соответствующую ячейке второго (третьего) типа. Каждой ячейке потока f^t соответствует вершина графа Γ с инцидентными ей рёбрами, количество которых совпадает с количеством сепаратрис в данной ячейке.

Более детально. Обозначим через B множество вершин, через N – число вершин и через E – множество рёбер графа Γ . Присвоим рёбрам, исходящим из вершины b и принадлежащим одной паре, номер $j = 1, 2$. Пусть π_b – отображение, ставящее в соответствие u - или s -ребру, инцидентному вершине b , u - или s -сторону треугольника $S_b^j \subset J_b, j = 1, 2$ соответственно, где J_b – ячейка, а паре рёбер u_j - и s_j -, инцидентных вершине b – t -сторону треугольника S_b^j соответственно, $j = 1, 2$. Обозначим через \mathcal{S} дизъюнктное объединение треугольников $S_b^j, b \in B$. Введём на множестве \mathcal{S} минимальное отношение эквивалентности \sim , удовлетворяющее следующему правилу: если вершины b_1, b_2 из множества B инцидентны ребру e из множества E , то отрезки $P_1 Q_1 = \pi_{b_1}(e)$ и $P_2 Q_2 = \pi_{b_2}(e)$ отождествляются так, что точка $(x_1, y_1) \in P_1 Q_1 = [(x_{P_1}, y_{P_1}), (x_{Q_1}, y_{Q_1})]$ эквивалентна точке $(x_2, y_2) \in P_2 Q_2 = [(x_{P_2}, y_{P_2}), (x_{Q_2}, y_{Q_2})]$, где

$$\begin{cases} x_2 = x_{P_2} + \frac{(x_1 - x_{P_1})(x_{Q_2} - x_{P_2})}{x_{Q_1} - x_{P_1}}, \\ y_2 = y_{P_2} + \frac{(y_1 - y_{P_1})(y_{Q_2} - y_{P_2})}{y_{Q_1} - y_{P_1}}. \end{cases}$$

Отрезки $\overline{P_1 Q_1} = \pi_b(s_1 u_1)$ и $\overline{P_2 Q_2} = \pi_b(s_2 u_2)$, представляющие собой t -стороны треугольников S_b^1 и S_b^2 соответственно, отождествляются по такому же правилу.

Если вершина b инцидентна петле $s_1 = s_2(u_1 = u_2)$, то по такому же правилу отождествляются отрезки $\widetilde{P_1 Q_1} = \pi_b(s_1)$ и $\widetilde{P_2 Q_2} = \pi_b(s_2)$ ($\widetilde{P_1 Q_1} = \pi_b(u_1)$ и $\widetilde{P_2 Q_2} = \pi_b(u_2)$), представляющие собой s -стороны (u -стороны) треугольников S_b^1 и S_b^2 соответственно.

Из свойств допустимого графа следует, что факторпространство $S = S / \sim$ является замкнутым топологическим 2-многообразием. Обозначим через $q: S \rightarrow S$ естественную проекцию. Заметим, что векторное поле в эквивалентных посредством \sim точках имеет одинаковую длину, поэтому на многообразии S проекция q индуцирует непрерывное векторное поле, обозначим его V .

Шаг 5. Определим на S гладкую структуру, относительно которой поле V является гладким.

Покроем многообразие S конечным числом карт $(U_z, \psi_z), z \in S$, где $U_z \subset S$ – открытая окрестность точки z и $\psi_z: U_z \rightarrow \mathbb{R}^2$ – гомеоморфизм на образ следующих типов.

1. Рассмотрим на графе Γ su -циклы трёх возможных типов. Цикл первого типа:

$$\zeta_1 = \{b_1^1, b_1^1 b_2^1 = s, b_2^1, b_2^1 b_3^1 = u, b_3^1, b_3^1 b_4^1 = s, b_4^1, b_4^1 b_1^1 = u, b_1^1\},$$

где вершине $b_i^1 \in B, i = \overline{1, 4}$ соответствует треугольник $S_{b_i^1}^j$, и $\pi_{b_1^1}(s), \pi_{b_2^1}(s)$ – сторона $A_1 A_2$ в треугольниках $S_{b_1^1}^a, S_{b_2^1}^b$; $\pi_{b_2^1}(u), \pi_{b_3^1}(u)$ – сторона $A_2 A_3$ в треугольниках $S_{b_2^1}^b, S_{b_3^1}^c$; $\pi_{b_3^1}(s), \pi_{b_4^1}(s)$ – сторона $A_1 A_2$ в треугольниках $S_{b_3^1}^c, S_{b_4^1}^d$; $\pi_{b_4^1}(u), \pi_{b_1^1}(u)$ – сторона $A_2 A_3$ в треугольниках $S_{b_4^1}^d, S_{b_1^1}^a$, где $a, b, c, d \in \{1, 2\}$ (Рис. 4.3).

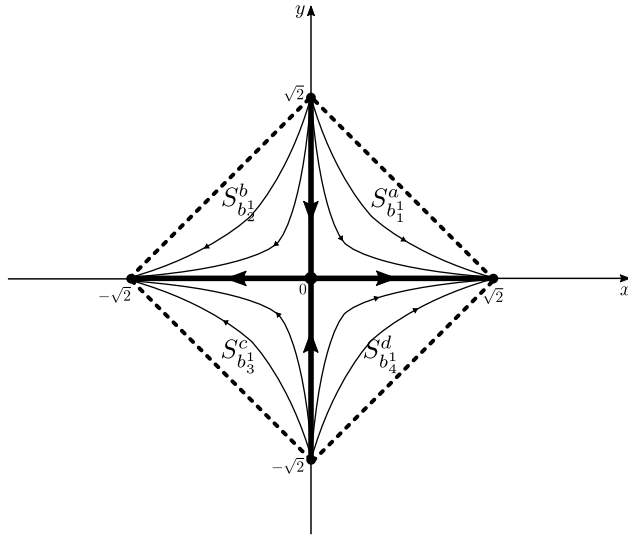


Рис. 4.3. Пример карты $\psi_z(U_z)$, соответствующей su -циклу первого типа
Fig. 4.3. Example of a $\psi_z(U_z)$ map which corresponds to a su -cycle of the first type

Цикл второго типа:

$$\zeta_2 = \{b_1^2, b_1^2 b_2^2 = s, b_2^2, b_2^2 b_3^2 = u, b_3^2, b_3^2 b_1^2 = s, b_1^2\},$$

где вершине $b_i^2 \in B, i = 1, 2, 3$ соответствует треугольник (пара треугольников) $S_{b_i^2}^j$, $\pi_{b_1^2}(s), \pi_{b_2^2}(s)$ – сторона $A_1 A_2$ в треугольниках $S_{b_1^2}^f, S_{b_2^2}^1$; $\pi_{b_2^2}(u)$ – сторона $A_2 A_3$ в треугольниках $S_{b_2^2}^1, S_{b_3^2}^2$; $\pi_{b_3^2}(s), \pi_{b_1^2}(s)$ – сторона $A_1 A_2$ в треугольниках $S_{b_3^2}^2, S_{b_1^2}^g$; $\pi_{b_3^2}(u), \pi_{b_1^2}(u)$ – сторона $A_2 A_3$ в треугольниках $S_{b_3^2}^g, S_{b_1^2}^f$, где $f, g \in \{1, 2\}$.

Цикл третьего типа:

$$\zeta_3 = \{b_1^3, b_1^3 b_2^3 = s, b_2^3, b_2^3 b_2^3 = u, b_2^3, b_2^3 b_1^3 = s, b_1^3, b_1^3 b_1^3 = u, b_1^3\},$$

где вершине $b_i^3 \in B$, $i = 1, 2$ соответствует пара треугольников $S_{b_i^3}^j$, $\pi_{b_i^3}(s)$, $\pi_{b_i^3}(s)$ – сторона $A_1 A_2$ в треугольниках $S_{b_1^3}^2, S_{b_2^3}^1$; $\pi_{b_2^3}(u)$ – сторона $A_2 A_3$ в треугольниках $S_{b_2^3}^1, S_{b_2^3}^2$; $\pi_{b_1^3}(s)$, $\pi_{b_1^3}(s)$ – сторона $A_1 A_2$ в треугольниках $S_{b_1^3}^2, S_{b_1^3}^1$; $\pi_{b_1^3}(u)$ – сторона $A_2 A_3$ в треугольниках $S_{b_1^3}^1, S_{b_1^3}^2$.

Положим

$$U_z = \text{int}\left(\bigcup_{b_i^1} q(S_{b_i^1}^j)\right), \quad \psi_z(\tilde{z}) = \nu_{1,i,j,1}(p_1((q|_{S_{b_i^1}^j})^{-1}(\tilde{z})))$$

для $\tilde{z} \in q(S_{b_i^1}^j)$, $b_i^1 \in \zeta_1$, $i = \overline{1, 4}$,

$$U_z = \text{int}\left(\bigcup_{b_i^2} q(S_{b_i^2}^j)\right), \quad \psi_z(\tilde{z}) = \nu_{1,i,j,2}(p_1((q|_{S_{b_i^2}^j})^{-1}(\tilde{z})))$$

для $\tilde{z} \in q(S_{b_i^2}^j)$, $b_i^2 \in \zeta_2$, $i = \overline{1, 3}$,

$$U_z = \text{int}\left(\bigcup_{b_i^3} q(S_{b_i^3}^j)\right), \quad \psi_z(\tilde{z}) = \nu_{1,i,j,3}(p_1((q|_{S_{b_i^3}^j})^{-1}(\tilde{z})))$$

для $\tilde{z} \in q(S_{b_i^3}^j)$, $b_i^3 \in \zeta_3$, $i = 1, 2$,

где

$$p_1(x, y) = (x, y - 1),$$

$$\nu_{1,i,j,k}(r, \theta) = \theta - \frac{5\pi}{4} \quad \text{для } S_{b_i^k}^j, \quad \text{где } (i, j, k) = (1, a, 1), (1, f, 2), (1, 2, 3),$$

$$\nu_{1,i,j,k}(r, \theta) = -\theta + \frac{\pi}{4} \quad \text{для } S_{b_i^k}^j, \quad \text{где } (i, j, k) = (2, b, 1), (2, 1, 2), (2, 1, 3),$$

$$\nu_{1,i,j,k}(r, \theta) = \theta - \frac{\pi}{4} \quad \text{для } S_{b_i^k}^j, \quad \text{где } (i, j, k) = (3, c, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 3),$$

$$\nu_{1,i,j,k}(r, \theta) = -\theta + \frac{5\pi}{4} \quad \text{для } S_{b_i^k}^j, \quad \text{где } (i, j, k) = (4, d, 1), (3, g, 2), (1, 1, 3).$$

Здесь функция $p_1(x, y)$ осуществляет параллельный перенос треугольника $S_{b_i^k}^j$ так, что вершина A_2 попадает в начало координат. Функция $\nu_{1,i,j,k}(r, \theta)$ совмещает угол при вершине A_2 с координатными четвертями.

2. Рассмотрим на графе Γ s -цикл

$$\{b_1, b_1 b_2 = s, b_2, b_2 b_3 = s, b_3, \dots, b_{m-1}, b_{m-1} b_m = s, b_m, b_m b_1 = s, b_1\},$$

где вершине $b_i \in B$, $i = \overline{1, m}$, соответствует пара треугольников $S_{b_i}^j$, $j = 1, 2$; $\pi_{b_{l-1}}(s)$, $\pi_{b_l}(s)$ – сторона $A_1 A_2$ в треугольниках $S_{b_{l-1}}^v, S_{b_l}^1$; $\pi_{b_{2l}}(s_1 u_1)$, $\pi_{b_{2l}}(s_2 u_2)$ – сторона $A_1 A_3$ в треугольниках $S_{b_l}^1, S_{b_l}^2$; $\pi_{b_l}(s)$, $\pi_{b_{l+1}}(s)$ – сторона $A_1 A_2$ в треугольниках $S_{b_l}^2, S_{b_{l+1}}^n$, где $v, n \in \{1, 2\}$, $l = \overline{1, m}$.

Положим

$$U_z = \text{int}\left(\bigcup_{i=1}^m q(S_{b_i}^j)\right), \quad \psi_z(\tilde{z}) = \nu_{2,i,j}(p_2(q|_{S_{b_i}^j})^{-1}(\tilde{z})) \quad \text{для } \tilde{z} \in q(S_{b_i}^j), i = \overline{1, m},$$

где

$$p_2(x, y) = (x - 1, y),$$

и

$$\nu_{2,i,j}(x, y) = \nu_{2,i,j}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos(\theta_{2,i,j}(\theta)), r \sin(\theta_{2,i,j}(\theta))),$$

а функция $\theta_{2,i,j}(\theta)$ задаётся формулой

$$\theta_{2,i,j}(\theta) = \left(2i + j - 2 + (-2) \cdot \left(\frac{2i + j - 2}{2} \pmod{1}\right)\right) \cdot \frac{\pi}{m} + (-1)^{2i+j-3} \frac{8\theta - 6\pi}{m}.$$

Здесь функция $p_2(x, y)$ осуществляет параллельный перенос многоугольника $S_{b_i}^j$ так, что вершина A_1 попадает в начало координат. Функции $\nu_{2,i,j}(x, y)$, $i = \overline{1, m}$, $j = 1, 2$, меняют величину угла при вершине A_1 до $\frac{2\pi}{m}$ и размещают многоугольники $S_{b_i}^j$ вершинами A_1 в начале координат так, чтобы их углы при вершине A_1 примыкали друг к другу и заполняли полный угол, располагаясь каждый на i -м месте при обходе вокруг начала координат начиная с положительной полуоси Ox против часовой стрелки, а также организуя совпадение сторон одинакового цвета у прилегающих друг к другу многоугольников.

3. Рассмотрим на графе Γ u -цикл

$$\{b_1, b_1 b_2 = u, b_2, b_2 b_3 = u, b_3, \dots, b_{m-1}, b_{m-1} b_m = u, b_m, b_m b_1 = u, b_1\},$$

где вершине $b_i \in B$, $i = \overline{1, m}$, соответствует пара треугольников $S_{b_i}^j$, $j = 1, 2$; $\pi_{b_{l-1}}(u)$, $\pi_{b_l}(u)$ – сторона $A_2 A_3$ в треугольниках $S_{b_{l-1}}^e$, $S_{b_l}^1$; $\pi_{b_{2l}}(s_1 u_1)$, $\pi_{b_{2l}}(s_2 u_2)$ – сторона $A_1 A_3$ в треугольниках $S_{b_l}^1$, $S_{b_l}^2$; $\pi_{b_l}(u)$, $\pi_{b_{l+1}}(u)$ – сторона $A_2 A_3$ в треугольниках $S_{b_l}^2$, $S_{b_{l+1}}^w$, где $e, w \in \{1, 2\}$, $l = \overline{1, m}$.

Положим

$$U_z = \text{int}\left(\bigcup_{i=1}^m q(S_{b_i}^j)\right), \quad \psi_z(\tilde{z}) = \nu_{3,i,j}(p_3(q|_{S_{b_i}^j})^{-1}(\tilde{z})) \quad \text{для } \tilde{z} \in q(S_{b_i}^j), i = \overline{1, m},$$

где

$$p_3(x, y) = (x + 1, y),$$

и

$$\nu_{3,i,j}(x, y) = \nu_{3,i,j}(r \cos \theta, r \sin \theta) = (r \cos(\theta_{3,i,j}(\theta)), r \sin(\theta_{3,i,j}(\theta))),$$

а функция $\theta_{3,i,j}(\theta)$ задаётся формулой

$$\theta_{3,i,j}(\theta) = \left(2i + j - 2 + (-2) \cdot \left(\frac{2i + j - 2}{2} \pmod{1}\right)\right) \cdot \frac{\pi}{m} + (-1)^{2i+j-3} \frac{8\theta}{5m}.$$

Здесь функция $p_3(x, y)$ осуществляет параллельный перенос многоугольника $S_{b_i}^j$ так, что вершина A_3 попадает в начало координат. Функции $\nu_{3,i,j}(x, y)$, $i = \overline{1, m}$, $j = 1, 2$,

меняют величину угла при вершине A_3 до $\frac{2\pi}{m}$ и размещают многоугольники $S_{b_i}^j$ вершинами A_3 в начале координат так, чтобы их углы при вершине A_3 примыкали друг к другу и заполняли полный угол, располагаясь каждый на i -м месте при обходе вокруг начала координат начиная с положительной полуоси Ox против часовой стрелки, а также организуя совпадение сторон одинакового цвета у прилегающих друг к другу многоугольников.

Для введённых карт отображения перехода являются композициями гладких отображений, построенных в 1-3, и обратных к ним, в силу чего эти карты задают гладкую структуру на поверхности S .

Из вышесказанного следует, что граф является обобщённым графом Вонга Γ_{ft} тогда и только тогда, когда этот граф *допустимый*. **II.** Докажем пункты i) и ii) теоремы 1.2.

i) Докажем, что эйлерова характеристика поверхности S вычисляется по формуле $\chi(S) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2$, где ν_0 , ν_1 и ν_2 – число всех u -, su - и s -циклов графа Γ_{ft} соответственно. Из предложения 4.2 следует, что число всех стоков, седел и источников равно, соответственно, ν_0 , ν_1 и ν_2 . Отсюда следует доказываемое утверждение, поскольку приведённая формула является формулой для суммы индексов особых точек потока f^t .

ii) Докажем, что поверхность S является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф Γ_{ft} содержит хотя бы один цикл с нечётным количеством вершин, содержащихся вместе с s - и u -рёбрами, исходящими из них и состоящими в паре.

Для доказательства рассмотрим трёхцветный граф Ошемкова-Шарко Γ_{ft}^{OS} [14]. Данный граф получается из обобщённого графа Вонга заменой каждой вершины на две вершины, соединённые ребром цвета t , которые инцидентны, помимо t -ребра, s - и u -рёбрам, состоящим в паре, а также удалением дуг между рёбрами (см. Рис. 4.1).

Напомним критерий неориентируемости поверхности S для графа Γ_{ft}^{OS} (Предложение 4.1). Пусть трёхцветный граф Γ_{ft}^{OS} – инвариант градиентно-подобного потока f^t , заданного на поверхности S , тогда поверхность S является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф Γ_{ft}^{OS} содержит хотя бы один цикл нечётной длины.

Рассмотрим все возможные циклы графа Γ_{ft}^{OS} .

1. Пусть цикл не содержит s - и u -ребра, исходящие из одной и той же вершины, тогда этот цикл чётный, ввиду чередования t - и s - (u -) рёбер.

2. Пусть цикл содержит одну вершину, вместе с s - и u -рёбрами, исходящими из неё (Рис. 4.4, *b*), тогда этот цикл содержит n рёбер цвета $s(u)$ и $n - 1$ рёбер цвета t , где $n \in \{2, \dots, n\}$, следовательно, цикл нечётный.

3. Пусть цикл содержит две вершины вместе с различными s - и u -рёбрами, исходящими из них, тогда t - рёбер на одно меньше, чем в цикле из пункта 2), следовательно, цикл чётный.

4. Пусть цикл содержит три вершины вместе с различными s - и u -рёбрами, исходящими из них (Рис. 4.4, *e*), в этом случае, очевидно, цикл будет нечётным.

5. Пункты 3) и 4) также верны для случая, где вершины содержатся вместе с различными s - и u -рёбрами, исходящими из них, одно из которых соединяет обе вершины (Рис. 4.4, *d, f*)

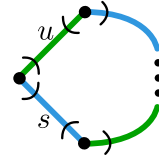
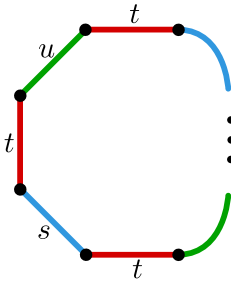
6. При увеличении количества вершин, содержащихся вместе с s - и u -рёбрами, исходящими из них, будет происходить чередование чётности цикла, а именно, когда количество таких вершин нечётное, цикл нечётный и наоборот.

7. Рассмотрим цикл с четырьмя вершинами и s - и u -рёбрами, исходящими из них, которые, в свою очередь, соединяют только эти четыре вершины. Данный цикл явля-

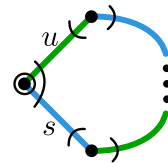
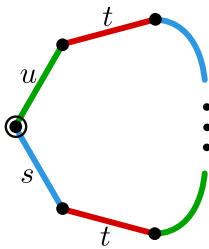
ется su циклом, длина которого фиксирована и равна 4 (Рис. 4.4, g).

Γ_{ft}^{OS}

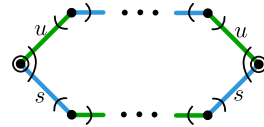
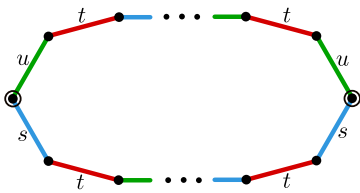
Γ_{ft}



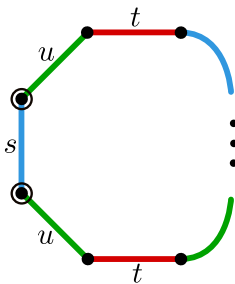
a)



b)



c)



d)

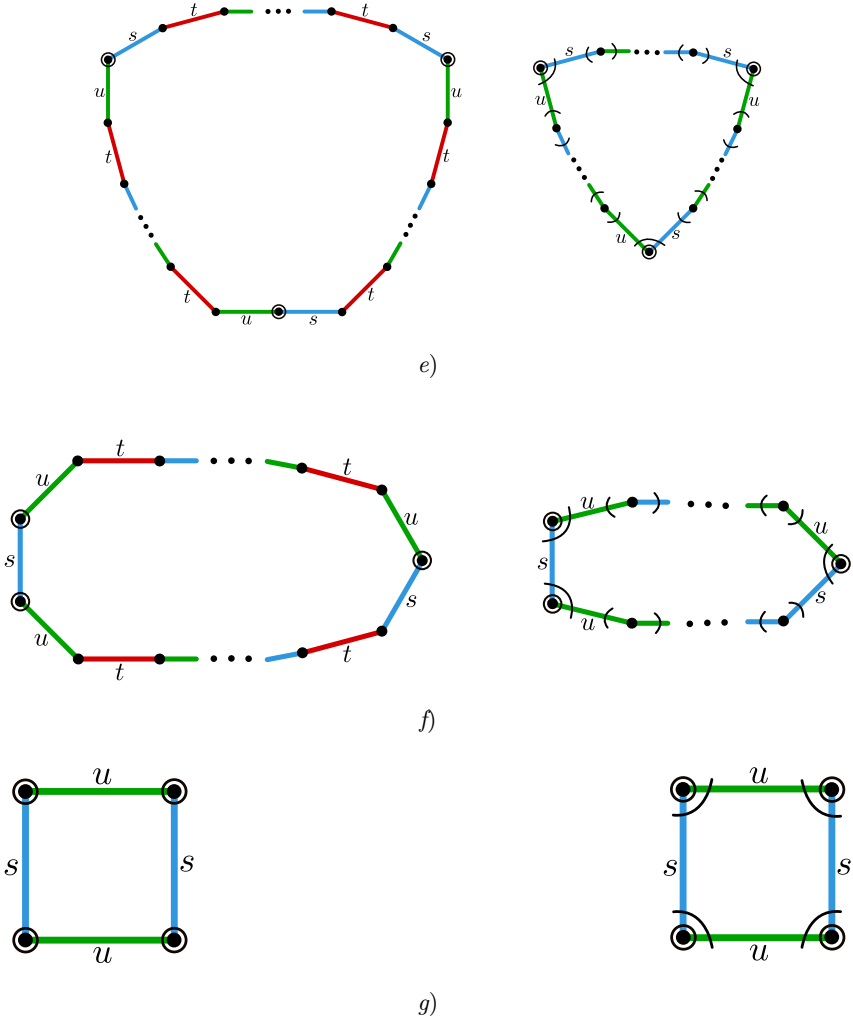


Рис. 4.4. Циклы графа Γ_{ft}^{OS} (слева) и соответствующие циклы графа Γ_{ft} (справа): а) цикл без рёбер, объединённых в пару; б) цикл с двумя рёбрами в паре; в) цикл с двумя непересекающимися парами; д) цикл с двумя пересекающимися парами; е) цикл с тремя непересекающимися парами; ф) цикл с двумя парами, пересекающимися друг с другом, но не пересекающимися с третьей парой; г) su -цикл

Fig 4.4. Cycles of a graph Γ_{ft}^{OS} (to the left) and corresponding cycles of the graph Γ_{ft} (to the right): а) a cycle without couples; б) a cycle with one couple; в) a cycle with two uncrossed couples; д) a cycle with two crossed couples; е) a cycle with three uncrossed couples; ф) a cycle with two couples crossed with each other but uncrossed with a third couple; г) su -cycle

Поскольку вершины, содержащиеся вместе с s - и u -рёбрами, исходящими из них, графа Γ_{ft}^{OS} , соответствуют вершинам графа Γ_{ft} , содержащимся вместе с s - и u -рёбрами, исходящими из них и состоящими в паре (Рис. 4.4), то из предложения 1.3. следует, что поверхность S неориентируема тогда и только тогда, когда Γ_{ft} содержит хотя бы

один цикл с нечётным количеством вершин, содержащихся вместе с s - и u -рёбрами, исходящими из них и состоящими в паре.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2022-1101.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
2. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25. С. 113–185.
3. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 251–257.
4. Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Доклады АН СССР. 1955. Т. 103, № 4. С. 557–560.
5. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds // Dynamical Systems: Proc. New York: Academic Press, 1973. pp. 389–419. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50033-3>
6. Wang X. The C^* -algebras of Morse-Smale flows on two-manifolds // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1990. Vol. 10. pp. 565–597.
7. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Починка О. В. Классификация систем Морса–Смейла и топологическая структура несущих многообразий // Успехи математических наук. 2019. Т. 74, № 1(445). С. 41–116.
8. Nikolaev I., Zhuzhoma E. Flows on 2-dimensional manifolds. // Lect. Notes in Math. 1999. Vol. 1705.
9. Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. London: Tokyo CRC Press, 1995. pp. xii+467.
10. Kruglov V. Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces // Динамические системы. 2018. Т. 8, № 1. С. 15–21.
11. Kruglov V. E., Malyshev D. S., Pochinka O. V. On algorithms that effectively distinguish gradient-like dynamics on surfaces // Arnold Mathematical Journal. 2018. Vol. 4. pp. 483–504.
12. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение / пер. с англ. В. Н. Колокольцова. М.: Мир, 1986. С. 302.
13. Круглов В. Е., Малышев Д. С., Починка О. В. Многоцветный граф как полный топологический инвариант для Ω -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях // Математический сборник. 2018. Т. 209, № 1. С. 100–126.

14. Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник. 1998. Т. 189, № 8. С. 93–140.

*Поступила 07.05.2023; доработана после рецензирования 21.07.2023;
принята к публикации 25.08.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, “Rough systems”, *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, **14**:5 (1937), 247–250 (In Russ.).
2. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
3. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, “On trajectories that determine the qualitative structure of sphere partitioning into trajectories”, *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, **14**:5 (1937), 251–257 (In Russ.).
4. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, “About the scheme defining the topological structure of partitioning into trajectories”, *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, **103**:4 (1955), 557–560 (In Russ.).
5. M. M. Peixoto, “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical Systems*, 1973, 389–419.
6. X. Wang, “The C*-algebras of Morse-Smale flows on two-manifolds”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **10** (1990), 565–597.
7. V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka, “Classification of Morse-Smale systems and topological structure of the carrying manifolds”, *Uspehi matematicheskikh nauk*, **74**:1(445) (2019), 41–116 (in Russ.).
8. I. Nikolaev, E. Zhuzhoma, “Flows on 2-dimensional manifolds”, *Lect. Notes in Math.*, **1705** (1999).
9. C. Robinson, *Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, Tokyo CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, 1995, xii+467 p.
10. V. Kruglov, “Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces”, *Dinamicheskie sistemy*, **8**:1 (2018), 15–21.
11. V. E. Kruglov, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, “On Algorithms that Effectively Distinguish Gradient-Like Dynamics on Surfaces”, *Arnold Mathematical Journal*, **4** (2018), 483–504.
12. J. Palis, W. de Melo, *Geometric Theory of Dynamical Systems. An Introduction.*, Springer-Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin, 1982.

13. V. E. Kruglov, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, “Multicolor graph as a complete topological invariant for Ω -stable flows without periodic trajectories on surfaces”, *Matem. sb.*, **209**:1 (2018), 100–126 (In Russ.).
14. A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, “On the classification of Morse-Smale flows on two-dimensional manifolds”, *Matematicheskij sbornik*, **189**:8 (1998), 93–140 (In Russ.).

Submitted 07.05.2023; Revised 23.07.2023; Accepted 25.08.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

УДК 51-74:541.138

Математические модели совместного расчёта электрических и тепловых полей в электрохимических системах (в электролитах)

Ф. В. Лубышев, А. М. Болотнов, М. Э. Файрузов

ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию математических моделей совместного расчёта электрических и тепловых полей в электрохимических системах (в электролитах). Как известно, процесс прохождения в электролите электрического тока сопровождается выделением джоулева тепла. Следствием перераспределения температуры в электрохимической системе является изменение основных физико-химических параметров: вязкости и плотности проводящей среды, удельной электропроводности и теплопроводности, коэффициента теплоотдачи и т. д. Учет в математических моделях взаимовлияния тепловых и электрических полей особую значимость приобретает в технологиях электролиза цветных металлов (в первую очередь, промышленного производства алюминия), характеризующегося высокотемпературными режимами и интенсивностью электротепломассопереноса. Процессы электролитно-плазменного удаления покрытий, полирования деталей и плазменно-электролитического оксидирования привлекают особое внимание со стороны машиностроительной промышленности благодаря возможности качественного улучшения свойств поверхности. В статье исследуются вопросы корректности постановок нелинейных моделей. Исследован вопрос однозначной разрешимости системы, установлены априорные оценки обобщенного решения в Соболевских нормах. Также система нелинейных уравнений в частных производных, рассматриваемая в работе, может описывать математическую модель совместного расчёта электрических и тепловых полей в твердых проводниках электричества и тепла.

Ключевые слова: математическое моделирование, нелинейная система эллиптических уравнений, смешанная граничная задача, обобщенное решение, операторное уравнение, соболевские пространства, априорная оценка

Для цитирования: Лубышев Ф. В., Болотнов А. М., Файрузов М. Э. Математические модели совместного расчёта электрических и тепловых полей в электрохимических системах (в электролитах) // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 3. С. 150–158. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.150-158>

Об авторах:

Лубышев Федор Владимирович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru

Болотнов Анатолий Миронович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0009-0004-3309-2885>, bolotnovam@mail.ru

© Ф. В. Лубышев, А. М. Болотнов, М. Э. Файрузов



Файрузов Махмут Эрнстович, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Уфимский университет науки и технологий» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, fairuzovme@mail.ru

Original article

MSC2020 35J60

Mathematical Models of Joint Calculation of Electric and Thermal Fields in Electrochemical Systems (in Electrolytes)

F. V. Lubyshev, A. M. Bolotnov, M. E. Fairuzov

Ufa University of Science and Technology (Ufa, Russian Federation)

Abstract. This paper studies mathematical models for a joint calculation of electric and thermal fields in electrochemical systems (in electrolytes). As is known, passing of electric current through an electrolyte is accompanied by release of Joule heat. The consequence of temperature redistribution in an electrochemical system is a change in the main physical and chemical parameters: viscosity and density of the conductive medium, specific electrical and thermal conductivity, heat transfer coefficient, etc. Taking into account in mathematical models the mutual influence of thermal and electric fields is of particular importance in the technologies of electrolysis of non-ferrous metals (primarily in the industrial production of aluminum) that is accompanied by high-temperature conditions and intensive electrical heat and mass transfer. The processes of electrolytic-plasma removal of coatings, polishing of parts and plasma-electrolytic oxidation attract special attention from the machine-building industry due to the possibility of qualitative improvement of surface properties. In the article correctness of statements of nonlinear models are investigated. The question of unique solvability of the system is explored and a priori estimates of the generalized solution in the Sobolev norms are established. Also, the system of nonlinear partial derivative equations considered in the paper can describe a mathematical model for the joint calculation of electric and thermal fields in solid conductors of electricity and heat.

Keywords: mathematical modeling, nonlinear system of elliptic equations, mixed boundary value problem, generalized solution, operator equation, Sobolev spaces, a priori estimate

For citation: F. V. Lubyshev, A. M. Bolotnov, M. E. Fairuzov. Mathematical Models of Joint Calculation of Electric and Thermal Fields in Electrochemical Systems (in Electrolytes). *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:3(2023), 150–158. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.150-158>

About the authors:

Fedor V. Lubyshev, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Ufa University of Science and Technology» (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru

Anatoly M. Bolotnov, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Ufa University of Science and Technology» (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0009-0004-3309-2885>, bolotnovam@mail.ru

Ф. В. Лубышев, А. М. Болотнов, М. Э. Файрузов. Математические модели совместного расчёта ...

Mahmut E. Fairuzov, Associate Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Ufa University of Science and Technology» (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Ph. D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, fairuzovme@mail.ru

1. Введение

Вопросы проектирования промышленных установок и технологий, основанных на электролизе, и проблемы оптимизации процессов в существующих электрохимических системах связаны как с экспериментальными исследованиями, так и с разработкой адекватных математических моделей и алгоритмов расчета взаимосвязанных электрических и тепловых полей. Как известно, процесс прохождения в электролите электрического тока сопровождается выделением джоулева тепла. Следствием перераспределения температуры в электрохимической системе является изменение основных физико-химических параметров: вязкости и плотности проводящей среды, удельной электропроводности и теплопроводности, коэффициента теплоотдачи и т. д. Учет в математических моделях взаимовлияния тепловых и электрических полей особую значимость приобретает в технологиях электролиза цветных металлов, в первую очередь, промышленного производства алюминия, сопровождающегося высокими температурными режимами и интенсивностью электротепломассопереноса [1–2]. Процессы электролитно-плазменного удаления покрытий, полирования деталей и плазменно-электролитического оксидирования привлекают особое внимание со стороны машиностроительной промышленности благодаря возможности качественного улучшения свойств поверхности. Плазменно-электролитические процессы отличаются наличием микроарядов и кипения электролита вблизи поверхностного слоя детали, что приводит к интенсивному росту оксидных покрытий с высокими защитными характеристиками на легких металлах и сплавах [3–4]. Наличие нелинейных зависимостей поляризации электродов от плотности тока вносит дополнительные сложности в алгоритмы совместного расчета электрических и тепловых полей в рассматриваемых электрохимических системах. Следует отметить, что разработка эффективных численных алгоритмов расчета совместных электрических и тепловых полей имеет не только практическую значимость, но и представляет определенный теоретический интерес.

Настоящая работа посвящена исследованию математических моделей совместного расчёта электрических и тепловых полей в электрохимических системах (в электролитах). Рассмотрены вопросы корректности постановок нелинейных моделей. Исследован вопрос однозначной разрешимости системы, установлены априорные оценки обобщенного решения в Соболевских нормах. Данная статья по своей тематике примыкает и дополняет [5]. Система нелинейных уравнений в частных производных, рассматриваемая в работе, может описывать также математическую модель совместного расчёта электрических и тепловых полей в твердых проводниках электричества и тепла.

2. Постановка задачи

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ – ограниченная область с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим следующую нелинейную граничную задачу для системы уравнений с частными производными [5]. Требуется найти пару функций $(T(x), u(x))$, таких что они

удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$L_1(T, u) = -\operatorname{div}(\sigma(T)\nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$L_2(T, u) = -\operatorname{div}(\lambda(T)\nabla T) = \underbrace{\sigma(T)|\operatorname{grad} u|^2}_{\sigma(T)(\nabla u)^2}, \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

или, в другой записи,

$$L_1(T, u) = -\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\sigma(T) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$L_2(T, u) = -\sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \right) = \sigma(T) \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2, \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

и, дополнительно, пара функций $(T(x), u(x))$ удовлетворяет смешанным граничным условиям

$$\sigma(T) \frac{\partial u}{\partial n} = \varphi(x), \quad x \in S_1, \quad (2.5)$$

$$\sigma(T) \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha(x)u = \mu(x), \quad x \in S_2; \quad (2.6)$$

$$T(x) = 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma_2, \quad (2.7)$$

где S_1, S_2 – относительно открытые подмножества Γ , такие что

$$S_1 \cap S_2 = \emptyset, \quad \bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 = \Gamma = \partial\Omega;$$

а Γ_1, Γ_2 – относительно открытые подмножества Γ такие, что

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset, \quad \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \Gamma = \partial\Omega,$$

здесь $\frac{\partial T}{\partial n}$ – производная по внешней нормали к соответствующей части границы $\Gamma = \partial\Omega$.

Предполагается, что $\sigma(\xi), \lambda(\xi), f(x), \varphi(x), \mu(x), g(x), \alpha(x)$ – заданные функции, причём:

$$f(x) \in L_2(\Omega), \varphi(x) \in L_2(S_1), \mu(x) \in L_2(S_2), g(x) \in L_2(\Gamma_2), \alpha(x) \in L_\infty(S_2),$$

функции $\sigma(\xi), \lambda(\xi)$ считаем непрерывными на \mathbb{R}^1 , причём такими что при всех $\xi \in \mathbb{R}^1$

$$\sigma_0 \leq \sigma(\xi) \leq \sigma_1, \quad \sigma_0 > 0, \quad \lambda_0 \leq \lambda(\xi) \leq \lambda_1, \quad \lambda_0 > 0;$$

непрерывный коэффициент $\lambda(\xi)$ непрерывен по Липшицу, т. е.

$$|\lambda(\xi) - \lambda(\eta)| \leq L|\xi - \eta|, \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^1, \quad L = \text{const} > 0.$$

Кроме того, полагаем

$$\alpha_0 \leq \alpha(x) \leq \alpha_1, \quad \alpha_0 > 0, \quad \text{п.в. на } S_2.$$

Здесь $\sigma_0, \sigma_1, \lambda_0, \lambda_1, L, \alpha_0, \alpha_1$ – заданные константы.

Таким образом, система уравнений (2.1)–(2.4) состоит из эллиптического уравнения для $T(x)$ и эллиптического уравнения для $u(x)$. Эта система описывает образование тепла в проводнике под действием электрического тока. Здесь u – электрический потенциал; T – температура внутри проводника; $\lambda(T)$ – теплопроводность материала; $\sigma(T)$ – его электропроводность.

О п р е д е л е н и е 2.1. Пару функций $T(x), u(x)$ назовём обобщенным решением задачи (2.1)–(2.7), если

$$T(x) \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1), \quad u(x) \in W_2^1(\Omega), \quad (2.8)$$

$$f_0(x) = \sigma(T)|\text{grad } u|^2 = \sigma(T) \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 \in L_2(\Omega), \quad (2.9)$$

и для них справедливы тождества:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^3 \sigma(T) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} d\Omega + \int_{S_2} \alpha(x) u v dS_2 = \\ & = \int_{\Omega} f(x) v d\Omega + \int_{S_1} \varphi(x) v dS_1 + \int_{\mathbb{S}_2} \mu(x) v dS_2, \quad \forall v \in W_2^1(\Omega); \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \eta}{\partial x_\alpha} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma(T) |\text{grad } u|^2 \eta(x) d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_2} g(x) \eta(x) d\Gamma_2, \quad \forall \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1). \end{aligned} \quad (2.11)$$

3. Исследование задачи относительно функции $u(x)$, исключение неизвестной функции $u(x)$ из системы уравнений

Т е о р е м а 3.1. Для каждого заданного $T(x) \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)$ существует единственное решение $u(x) \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющее тождеству (2.10). Задача о нахождении этого решения

$$u(x) = u_T(x) \in W_2^1(\Omega) \quad (3.1)$$

из (2.10) эквивалентна решению операторного уравнения

$$A_T u = h, \quad (3.2)$$

где оператор $A_T : W_2^1(\Omega) \rightarrow (W_2^1(\Omega))^*$ определяется соотношением

$$\langle A_T u, v \rangle = \int_{\Omega} \sigma(T) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} d\Omega + \int_{S_2} \alpha(x) u v dS_2, \quad \forall u, v \in W_2^1(\Omega), \quad (3.3)$$

а правая часть $h \in (W_2^1(\Omega))^*$ определена соотношением

$$\langle h, v \rangle = \int_{\Omega} f(x)v \, d\Omega + \int_{S_1} \varphi(x)v \, dS_1 + \int_{S_2} \mu(x)v \, dS_2. \tag{3.4}$$

Справедлива априорная оценка решения $u(x) = u_T(x) \in W_2^1(\Omega)$

$$\|u(x)\|_{W_2^1(\Omega)} = \|u_T(x)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_0 (\|f(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|\varphi(x)\|_{L_2(S_1)} + \|\mu(x)\|_{L_2(S_2)}), \tag{3.5}$$

где $C_0 = const > 0$.

Доказательство теоремы 3.1 опирается на лемму Лакса-Мильграма [6] и теоремы вложения [7].

Л е м м а 3.1. Пусть $u(x) = u_T(x) \in W_2^1(\Omega)$ – решение уравнения (3.2)

$$A_T u = h, \tag{3.6}$$

отвечающее заданному элементу $T(x) \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)$. Пусть обобщенное решение $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ задачи (2.10) такое, что оно ограничено в норме $W_4^1(\Omega)$, т. е.

$$\|u(x)\|_{W_4^1(\Omega)} \leq M, \tag{3.7}$$

где

$$\|u(x)\|_{W_4^1(\Omega)} = \sum_{\alpha=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right\|_{L_4(\Omega)} + \|u(x)\|_{L_4(\Omega)}. \tag{3.8}$$

Тогда имеет место включение

$$f_0(x) = \sigma(T)|\text{grad } u|^2 = \sigma(T) \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 \in L_2(\Omega),$$

причём

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} f_0^2(x) \, d\Omega \right)^{1/2} &= \|f_0(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{3}\sigma_1 \left(\sum_{\alpha=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right\|_{L_4(\Omega)} \right)^2 \leq \\ &\leq M_0 \|u(x)\|_{W_4^1(\Omega)}^2 \leq M_0 M^2; \quad M_0 = \sqrt{3}\sigma_1. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Здесь $\sigma(\xi)$ – непрерывная на \mathbb{R}^1 функция, причём

$$0 < \sigma_0 \leq \sigma(\xi) \leq \sigma_1, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^1.$$

Доказательство оценки (3.9) имеет цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f_0^2(x) \, d\Omega &= \int_{\Omega} \sigma^2(T) \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^2 \right]^2 \, d\Omega \leq \\ &\leq 3\sigma_1^2 \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} \right)^4 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} \right)^4 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_3} \right)^4 \right] \, d\Omega = \\ &= 3\sigma_1^2 \left[\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L_4(\Omega)}^4 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L_4(\Omega)}^4 + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|_{L_4(\Omega)}^4 \right] \leq \\ &\leq 3\sigma_1^2 \left[\left\| \frac{\partial u}{\partial x_1} \right\|_{L_4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_2} \right\|_{L_4(\Omega)} + \left\| \frac{\partial u}{\partial x_3} \right\|_{L_4(\Omega)} \right]^4 = 3\sigma_1^2 \left(\sum_{\alpha=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right\|_{L_4(\Omega)} \right)^4. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} f_0^2(x) d\Omega \right)^{1/2} &\leq \sqrt{3}\sigma_1 \left(\sum_{\alpha=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right\|_{L_4(\Omega)} \right)^2 \leq \\ &\leq \sqrt{3}\sigma_1 \left(\sum_{\alpha=1}^3 \left\| \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right\|_{L_4(\Omega)} + \|u(x)\|_{L_4(\Omega)} \right)^2 = \sqrt{3}\sigma_1 \|u(x)\|_{W_4^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Если $\|u(x)\|_{W_4^1(\Omega)} \leq M$, то $\|f_0(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq \sqrt{3}\sigma_1 M^2 < \infty$.

Таким образом, мы исключили неизвестную функцию $u(x)$ из системы уравнений (2.10), (2.11).

Перейдем теперь к исследованию полученной задачи относительно функции $T(x)$. Причём в последней формулировке задачи только функция $T(x)$ выступает как неизвестная.

4. Исследование нелинейной задачи относительно функции $T(x)$

Поставим следующую задачу: требуется найти функцию $T(x) \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)$ из интегрального тождества

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \eta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma(T) |\text{grad } u_T|^2 \cdot \eta d\Omega + \int_{\Gamma_2} g(x) \eta d\Gamma_2, \quad \forall \eta \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1). \quad (4.1)$$

Задача (4.1) есть обобщенная постановка смешанной нелинейной краевой задачи

$$\begin{aligned} - \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}} \right) &= \sigma(T) |\text{grad } u_T|^2 = \sigma(T) \sum_{\alpha=1}^3 \left(\lambda(T) \frac{\partial u_T}{\partial x_{\alpha}} \right)^2, \quad x \in \Omega, \\ T(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_1, \quad \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} = g(x), \quad x \in \Gamma_2, \\ \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 &= \Gamma = \partial\Omega, \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия из леммы 3.1. Тогда существует единственное обобщенное решение $T(x) \in W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)$, удовлетворяющее интегральному тождеству (4.1). Причём справедлива априорная оценка

$$\|T(x)\|_{W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)} \leq \frac{1}{\lambda_0} (M_0 M^2 C_1 + C_2 \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}). \quad (4.3)$$

Доказательство теоремы опирается на лемму 3.1 и [8–9]. Приведём доказательство оценки (4.3).

Из интегрального тождества (4.1) имеем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^3 \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}} d\Omega &= \int_{\Omega} f_0(x) T(x) d\Omega + \int_{\Gamma_2} g(x) T(x) d\Gamma_2, \\ \lambda_0 \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^3 \left(\frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega &\leq \|f_0(x)\|_{L_2(\Omega)} \|T(x)\|_{L_2(\Omega)} + \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)} \|T(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Справедливы следующие неравенства [7]

$$\|T(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_1 \|T(x)\|_{W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)}, \quad (4.5)$$

$$\|T(x)\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq C_2 \|T(x)\|_{W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)}, \quad (4.6)$$

где $C_1, C_2 = \text{const} > 0$.

Из (3.9), (4.4)–(4.6) имеем

$$\begin{aligned} \lambda_0 \|T(x)\|_{W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)} &\leq C_1 \|T(x)\|_{W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)} \|f_0\|_{L_2(\Omega)} + \\ &+ C_2 \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)} \|T(x)\|_{W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)} \leq \\ &\leq (C_1 \|f_0(x)\|_{L_2(\Omega)} + C_2 \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}) \|T(x)\|_{W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)} \leq \\ &\leq (M_0 M^2 C_1 + C_2 \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}) \|T(x)\|_{W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Следовательно, получаем оценку (4.3)

$$\|T(x)\|_{W_{2,0}^1(\Omega, \Gamma_1)} \leq \frac{1}{\lambda_0} (M_0 M^2 C_1 + C_2 \|g(x)\|_{L_2(\Gamma_2)}).$$

З а м е ч а н и е 4.1. Система нелинейных уравнений в частных производных (2.1)–(2.2) может описывать также математическую модель совместного расчёта электрических и тепловых полей в твёрдых проводниках электричества и тепла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Двухфазная трехмерная модель алюминиевого электролизера / Н. П. Савенкова [и др.] // Прикладная физика. 2012. № 3. С. 111–115.
2. Математическое моделирование МГД-стабильности алюминиевого электролизера / Н. П. Савенкова [и др.] // Журнал Сибирского федерального университета. Серия: Техника и технологии. 2020. Т. 13, № 2. С. 243–253. DOI: <https://doi.org/10.17516/1999-494X-0211>
3. Мукаева В. Р., Парфенов Е. В. Математическое моделирование процесса электролитно-плазменного полирования // Вестник УГАТУ. 2012. Т. 16, № 6. С. 67–73.
4. Модельные представления о механизме микродугового оксидирования металлических материалов и управление этим процессом / А. Г. Ракоч [и др.] // Защита металлов. 2006. Т. 42, № 2. С. 173–184.
5. Методы совместных расчетов электрических и тепловых полей в электрохимических системах / В. Т. Иванов [и др.]. М.: Наука, 1978. 104 с.
6. Самарский А. А., Лазаров Л. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая школа, 1987. 296 с.
7. Ладыженская О. А., Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

8. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: УРСС, 2003. 784 с.
9. Francu J., Monotone operators. A survey directed to applications to differential equations // *Aplikace Matematiky*. 1990. Vol. 35, no. 4. P. 257–301.

*Поступила 03.06.2023; доработана после рецензирования 11.07.2023;
принята к публикации 25.08.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. N. P. Savenkova, S. V. Anpilov, R. N. Kuz'min, O. G. Provorova, T. V. Piskazhova, "Dvuhfaznaya trekhmernaya model' alyuminievogo elektrolizera", *Prikladnaya fizika*, 2012, no. 3, 111–115 (In Russ.).
2. N. P. Savenkova, A. YU. Mokin, N. S. Udovichenko, A. A. P'yanyh, "Matematicheskoe modelirovanie MGD-stabil'nosti alyuminievogo elektrolizera", *Zhurnal Sibirskogo federal'nogo universiteta. Seriya: Tekhnika i tekhnologii*, **13:2** (2020), 243–253 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.17516/1999-494X-0211>
3. V. R. Mukaeva, E. V. Parfenov, "Matematicheskoe modelirovanie processa elektrolitno-plazmennogo polirovaniya", *Vestnik UGATU*, **16:5** (2012), 67–73 (In Russ.).
4. A. G. Rakoch, V. V. Hohlov, V. A. Bautin, N. A. Lebedeva, Yu. V. Magurova, I. V. Bardin, "Model'nye predstavleniya o mekhanizme mikrodogovogo oksidirovaniya metallicheskih materialov i upravlenie etim processom", *Zashchita metallov*, **42:2** (2006), 173–184 (In Russ.).
5. V. T. Ivanov, F. V. Lubyshev, A. S. Derkach, V. S. Merkur'ev, *Metody sovmestnykh raschetov elektricheskikh i teplovykh polej v elektrohimicheskikh sistemah*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 104 p.
6. A. A. Samarskij, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, [*Difference schemes for differential equations with generalized solutions*], Vysshaya shkola Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 296 p.
7. O. A. Ladyzhenskaya, [*Boundary value problems of mathematical physics*], Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 408 p.
8. A. A. Samarskij, P. N. Vabishchevich, [*Computational heat transfer*], Librokom Publ., M., 2009 (In Russ.), 784 p.
9. J. Francu, "Monotone operators. A survey directed to applications to differential equations", *Aplikace Matematiky*, **35:4** (1990), 257–301.

Submitted 03.06.2023; Revised 11.07.2023; Accepted 25.08.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202303.159-173

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63

Численное исследование конверсии метановых смесей под воздействием лазерного излучения**Е. Е. Пескова^{1, 2}, В. Н. Снытников¹**¹ *Институт Катализа СО РАН (г. Новосибирск, Российская Федерация)*² *ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)*

Аннотация. В настоящей работе проведено исследование лазерной конверсии метановых смесей при различных условиях проведения вычислительного эксперимента. Подобные течения характеризуются резкими локальными изменениями газодинамических характеристик и концентраций компонент смеси. Их динамика и взаимные превращения описываются жесткой системой из уравнений Навье-Стокса и химической кинетики, что накладывает серьезные ограничения на выбор вычислительного алгоритма. Вычислительные эксперименты проводились с использованием ранее разработанного 2D-кода для моделирования дозвуковых осесимметричных течений многокомпонентной среды, дополненным модулем для учета лазерного излучения и модулем решения уравнений химической кинетики конверсии метана. Верификация результатов осуществлялась посредством расчетов конверсии метана под воздействием внешнего обогрева стенок. Сопоставление концентраций веществ на выходе из трубы с непосредственным решением системы дифференциальных уравнений химической кинетики при различных температурах проведения реакции показало хорошее соответствие результатов. Проведены вычислительные эксперименты по воздействию лазерного излучения на течение химически активной поглощающей среды. Показано, что вводимое в смесь лазерное излучение, поглощаемое этиленом, изменяет характер течения и значительно увеличивает температуру газовой смеси. Повышение температуры способствует увеличению выхода целевых продуктов (этилена, ацетилена, водорода) на меньшей длине реактора, в то время как в отсутствие излучения максимальные концентрации продуктов появляются на выходе из реактора. Исследовано влияние исходного состава газовой смеси на конверсию метана, сделан вывод, что наличие этилена значительно увеличивает образование целевых продуктов при умеренных температурах стенок реактора в присутствии лазерного излучения.

Ключевые слова: компьютерное моделирование, уравнения Навье-Стокса, осесимметричные течения, химическая кинетика, лазерная конверсия метана

Для цитирования: Пескова Е.Е., Снытников В.Н. Численное исследование конверсии метановых смесей под воздействием лазерного излучения // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 3. С. 159–173. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.159-173>



Об авторах:

Пескова Елизавета Евгеньевна, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), старший научный сотрудник, Институт Катализа СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 5), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, e.e.peskova@math.mrsu.ru

Снытников Валерий Николаевич, ведущий научный сотрудник, Институт Катализа СО РАН (630090, Россия, г. Новосибирск, пр-т Академика Лаврентьева, д. 5), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2655-1532>, snyt@catalysis.ru

Original article

MSC2020 35Q92

Numerical Study of Methane Mixtures' Conversion Under the Influence of Laser Radiation

E. E. Peskova^{1,2}, V. N. Snytnikov¹

¹ *Boreskov Institute of Catalysis SB RAS (Novosibirsk, Russian Federation)*

² *National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

Abstract. The article presents a study of methane mixtures' laser conversion under various conditions of the computational experiment. Such flows are characterized by sharp local changes in the gas dynamic characteristics and the mixture components' concentrations. Their dynamics and mutual transformations are described by a stiff system of Navier-Stokes equations and chemical kinetics, which imposes serious restrictions on the choice of a computational algorithm. Numerical experiments were carried out using previously developed 2D code for modeling subsonic axisymmetric flows of a multicomponent medium, supplemented by modules that take into account laser radiation and solve equations of methane conversion's chemical kinetics. Verification of the results was made by calculating the conversion of methane under the influence of walls' external heating. Comparison of the substances' concentrations at the pipe outlet with the direct solution of the chemical kinetics system at different reaction temperatures showed a good agreement of the results. Computational experiments on the laser radiation's effect on the flow of a chemically active absorbing medium have been completed. It is shown that the laser radiation introduced into the mixture and absorbed by ethylene, changes the flow pattern and significantly increases the temperature of the gas mixture. An increase in temperature contributes to an increase in the yield of target products (ethylene, acetylene, hydrogen) at the reactor shorter length, while in the absence of radiation, the maximum concentrations of products appear at the reactor's outlet. The effect of the initial composition of the gas mixture on the methane's conversion is investigated, and it is concluded that the presence of ethylene significantly increases the formation of target products at moderate reactor walls' temperatures in the presence of laser radiation.

Keywords: computer modeling, Navier-Stokes equations, axisymmetric flows, chemical kinetics, methane laser conversion

For citation: E. E. Peskova, V. N. Snytnikov. Numerical Study of Methane Mixtures' Conversion Under the Influence of Laser Radiation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:3(2023), 159–173. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.159-173>

About the authors:

Elizaveta E. Peskova, Associate professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Senior Researcher, Boreskov Institute of Catalysis SB RAS (5 Lavrentiev Ave., Novosibirsk 630090, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, e.e.peskova@math.mrsu.ru

Valeriy N. Snytnikov, Leading Researcher, Boreskov Institute of Catalysis SB RAS (5 Lavrentiev Av., Novosibirsk 630090, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2655-1532>, snyt@catalysis.ru

1. Введение

В настоящее время перед отечественной промышленностью и наукой стоит задача эффективной переработки углеводородов с целью получения таких ценных продуктов химической промышленности, как водород, этилен и ацетилен. Перспективным и малоисследованным направлением в этой области является конверсия углеводородного сырья при воздействии на него лазерного излучения [1–3]. Поглощаемое смесью излучение повышает температуру газовой смеси с образованием радикалов, которые активно диффундируют и способствуют значительному увеличению выхода целевых продуктов. Нужно отметить, что температуру газовой смеси можно увеличить и посредством нагрева стенок реактора, однако это накладывает высокие требования к качеству материала и размерам установок, что делает использование лазерного излучения актуальным направлением при разработке реакторов для конверсии углеводородов.

Доступность компьютерной техники и развитие численных методов сделало возможным проведение вычислительных экспериментов с созданными и верифицированными в экспериментах кинетическими схемами радикальных цепных реакций углеводородов [4–5]. На основе проведенных вычислительных экспериментов можно планировать дальнейшие действия по разработке и усовершенствованию труб пиролиза. Явления, возникающие при лазерной конверсии углеводородов, характеризуются резкими локальными изменениями температуры, плотности, скорости, диффузии, состава смеси. Указанные особенности значительно влияют на выбор вычислительного алгоритма и программы для исследования конверсии углеводородов. Существующие коммерческие и свободнораспространяемые коды [6–8] требуют трудоемкой предварительной адаптации к решению указанных задач или, как правило, не предоставляют возможность учета всех процессов лазерной конверсии углеводородов.

Для исследования процесса конверсии углеводородов ранее авторами был разработан, реализован и прошел валидацию вычислительный алгоритм решения многокомпонентных уравнений Навье-Стокса в двумерной геометрии течения среды [9–10]. Данный алгоритм был также реализован для осесимметричной геометрии расчетной области [11]. В настоящей работе проведена его адаптация для исследования конверсии метана под воздействием лазерного излучения, проведено сравнение полученных результатов по конверсии метана с результатами непосредственного решения системы уравнений химической кинетики. Выполнены многопараметрические расчеты лазерной конверсии метановых смесей при различных температурах стенок, мощности лазерного излучения и состава исходной смеси.

2. Математическая модель и численный алгоритм

Для описания дозвукового течения многокомпонентной газовой смеси используем систему уравнений Навье-Стокса в приближении малых чисел Маха [12–14]. В цилиндрической системе координат для осесимметричного течения уравнения записываются в следующем векторном виде:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (F^{(1)}(U) - H^{(1)}(U))}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r (F^{(2)}(U) - H^{(2)}(U)))}{\partial r} = W. \quad (2.1)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho Y_m \\ \rho u_z \\ \rho u_r \\ \rho h \end{pmatrix}, \quad F^{(1)}(U) = \begin{pmatrix} \rho u_z Y_m \\ \rho u_z^2 + \pi \\ \rho u_z u_r \\ \rho h u_z \end{pmatrix}, \quad F^{(2)}(U) = \begin{pmatrix} \rho u_r Y_m \\ \rho u_z u_r \\ \rho u_r^2 + \pi \\ \rho h u_r \end{pmatrix},$$

$$H^{(1)}(U) = \begin{pmatrix} J_{mz} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{zr} \\ q_z \end{pmatrix}, \quad H^{(2)}(U) = \begin{pmatrix} J_{mr} \\ \tau_{rz} \\ \tau_{rr} \\ q_r \end{pmatrix}, \quad W = \begin{pmatrix} R_m \\ 0 \\ 0 \\ \alpha \theta \end{pmatrix}.$$

Здесь $m = 1, \dots, M$, M — количество компонент в газовой смеси; ρ — плотность смеси; Y_m — массовая доля m -ой компоненты смеси; u_z, u_r — проекции вектора скорости \vec{u} на оси z и r ; h — энтальпия смеси; $\pi = p - p_0$ — динамическая составляющая давления; p — давление; p_0 — термодинамическая составляющая давления, постоянная в области; R_m — скорость образования или расхода m -ой компоненты смеси; T — температура; α — коэффициент поглощения; θ — интенсивность излучения.

Для термодинамической составляющей давления и энтальпии смеси можно записать выражения:

$$p_0 = \rho R T \sum_m \frac{Y_m}{M_{wm}}, \quad (2.2)$$

$$h(T, Y_m) = \sum_m Y_m h_m(T). \quad (2.3)$$

M_{wm} — молекулярная масса m -ой компоненты смеси; $h_m(T)$ — энтальпия m -й компоненты смеси, R — универсальная газовая постоянная.

Интенсивность излучения, которое распространяется вдоль оси реактора, находится из решения дифференциального уравнения вида [2]:

$$\frac{d\theta(z)}{dz} = -\alpha\theta(z), \quad \alpha = \frac{\alpha_0 Y_{C_2H_4} e^{-E_0/kT}}{1 + \theta(z)/I_0}, \quad (2.4)$$

α_0 — сечение вдали от насыщения; I_0 — интенсивность насыщения; E_0 — энергия кванта.

Компоненты вектора диффузионного потока \vec{J}_m вычисляются по формулам

$$J_{mz} = \rho D_{m,mix} \frac{\partial Y_m}{\partial z}, \quad J_{mr} = \rho D_{m,mix} \frac{\partial Y_m}{\partial r},$$

где $D_{m,mix}$ — средний по смеси коэффициент диффузии m -й компоненты.

Компоненты вектора теплового потока \vec{q} вычисляются по формулам

$$q_z = \lambda \frac{\partial T}{\partial z} + \sum_{m=1}^M h_m \rho D_{m,mix} \frac{\partial Y_m}{\partial z}, \quad q_r = \lambda \frac{\partial T}{\partial r} + \sum_{m=1}^M h_m \rho D_{m,mix} \frac{\partial Y_m}{\partial r},$$

где λ — теплопроводность смеси.

Компоненты тензора вязких напряжений $\vec{\tau}$ представляются в виде

$$\tau_{zz} = \mu \left(2 \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} \right) \right), \quad \tau_{rr} = \mu \left(2 \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r u_r}{\partial r} \right) \right),$$

$$\tau_{zr} = \tau_{rz} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} \right).$$

где μ — коэффициент динамической вязкости смеси.

Подробное описание и выражения для нахождения коэффициентов многокомпонентных смесей можно найти в работах [15].

Для представленной математической модели должно быть выполнено условие на дивергенцию вектора скорости [14]:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho C_p T} \left(\nabla \cdot \lambda \nabla T + \sum_m \rho D_{m,mix} \nabla Y_m \nabla h_m + \alpha \theta \right) + \frac{1}{\rho} \sum_m \frac{M_w}{M_{wm}} (\nabla \cdot \rho D_{m,mix} \nabla Y_m) +$$

$$+ \frac{1}{\rho} \sum_m \left(\frac{M_w}{M_{wm}} - \frac{h_m}{C_p T} \right) R_m, \quad (2.5)$$

где $C_p(Y_m, T)$ — теплоемкость смеси при постоянном давлении; M_w — молекулярная масса смеси.

Систему уравнений (2.1) необходимо дополнить начальными и граничными условиями. Постановка этих условий определяется конкретной решаемой задачей. В наших исследованиях задаются условия втекания и вытекания газового потока, условия прилипания с температурой стенок, на оси симметрии задаются условия симметрии.

Для описанной математической модели ранее был построен вычислительный алгоритм с использованием схемы расщепления по физическим процессам, разработан код для задач с осесимметричной геометрией и проведен ряд вычислительных экспериментов [11]. В данной работе приведем кратко описание алгоритма.

1. Интегрируем уравнения химической кинетики с помощью подключаемого пакета RADAU5 [16], в котором реализован трехстадийный метод Рунге-Кутты с адаптивным шагом по времени. Находим промежуточные значения плотности смеси и концентраций компонент:

$$\frac{\rho \widetilde{Y}_m - (\rho Y_m)^n}{\Delta t} = (R_m)^n. \quad (2.6)$$

2. Интегрируем уравнения неразрывности с учетом процесса переноса и диффузии, находим плотность и концентрацию компонент на следующем шаге по времени:

$$\frac{(\rho Y_m)^{n+1} - \widetilde{\rho Y_m}}{\Delta t} = -\Lambda_1(\rho Y_m \vec{v})^n - \Lambda_2(\vec{J}_m)^n, \quad (2.7)$$

$$\rho^{n+1} = \sum_{m=1}^M (\rho Y_m)^{n+1}. \quad (2.8)$$

3. Интегрируем уравнение для интенсивности излучения, находим интенсивность на текущем шаге по времени:

$$\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial l} = -\Lambda_3(Y_m^n, T^n, \theta^{n+1}). \quad (2.9)$$

4. Интегрируем уравнение для энтальпии смеси, находим энтальпию на следующем шаге по времени:

$$\frac{(\rho h)^{n+1} - (\rho h)^n}{\Delta t} = -\Lambda_4(\rho h \vec{v})^n - \Lambda_5(\vec{q})^n - (\alpha \theta)^{n+1}. \quad (2.10)$$

5. С использованием найденных концентраций веществ Y_m и энтальпии смеси h методом Ньютона из выражения (2.3) находим температуру смеси T .

6. Интегрируем уравнение непрерывности без учета давления, находим предварительный вектор скорости

$$\frac{\vec{v}^* - \vec{v}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \Lambda_6(\rho \vec{v} \vec{v}) - \frac{1}{\rho^n} \Lambda_7(\vec{\tau}). \quad (2.11)$$

7. Находим динамическую составляющую давления из решения уравнения Пуассона и скорость на следующем шаге по времени:

$$\nabla \cdot \frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1} = \frac{\nabla \cdot \vec{v}^* - \nabla \cdot \vec{v}^{n+1}}{\Delta t}, \quad (2.12)$$

$$\frac{\vec{v}^{n+1} - \vec{v}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho^n} \nabla \pi^{n+1}. \quad (2.13)$$

В этой схеме операторы $\Lambda_1, \dots, \Lambda_6$ являются пространственными производными в соответствующих уравнениях. В расчетах используем равномерную прямоугольную сетку.

3. Тестирование кода на задаче конверсии метана в цилиндрической трубе

Конверсия метана рассматривается в реакторе цилиндрической формы длиной 220 мм, диаметром 20 мм. Исходная смесь, температура которой 870.15 К, состоит из метана, который поступает в трубу слева и по всему периметру трубы на расстоянии 5 см с суммарным расходом 40 л/ч (Рис. 3.1). Давление на выходе справа 101325 Па,

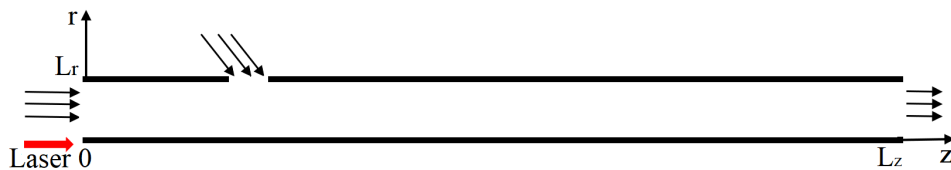


Рис. 3.1. Расчетная область
Fig 3.1. Computational domain

давление на входе газовой смеси рассчитывалось по расходу и давлению на выходе согласно уравнению Пуазейля. В начальный момент времени труба заполнена метаном.

Для описания схемы реакции пиролиза метана была принята 24-стадийная радикальная кинетическая схема (Таблица 3.1) [4]. Расчеты проводились для пяти разных температур стенок (1173 К, 1273 К, 1373 К, 1473 К, 1573 К) с фиксированными другими начальными условиями. Для аналогичных температур проводилось решение системы дифференциальных уравнений, составленных на основе схемы из Таблицы 3.1 с использованием пакета RADAU5 [16]. Массовые доли компонент смеси рассматривались на выходе из трубы (справа). Расчет системы дифференциальных уравнений проводился до времени, равного приблизительно времени прохождения частицы газа по трубе.

Таблица 3.1. Схема реакции
Table 3.1. Reaction scheme

Reaction	A_i, s^{-1} or $m^3 \times mol^{-1} \times s^{-1}$	$E_i, kJ \times mol^{-1}$
$C_2H_6 \rightarrow CH_3^\bullet + CH_3^\bullet$	2.4e16	366.0
$CH_3^\bullet + CH_3^\bullet \rightarrow C_2H_6$	14.04e7	5.9
$CH_3^\bullet + C_2H_6 \rightarrow CH_4 + C_2H_5^\bullet$	3.26e6	50.24
$CH_4 + C_2H_5^\bullet \rightarrow CH_3^\bullet + C_2H_6$	1.5e3	52.55, $n = 4.14$
$C_2H_5^\bullet \rightarrow C_2H_4 + H^\bullet$	2.0e13	166.0
$C_2H_4 + H^\bullet \rightarrow C_2H_5^\bullet$	1.0e7	6.3
$H^\bullet + C_2H_6 \rightarrow H_2 + C_2H_5^\bullet$	1.0e8	40.16
$H_2 + C_2H_5^\bullet \rightarrow H^\bullet + C_2H_6$	3.98e7	96.45
$CH_3^\bullet + C_2H_4 \rightarrow C_3H_7^\bullet$	3.3e5	32.26
$C_3H_7^\bullet \rightarrow CH_3^\bullet + C_2H_4$	3.0e14	139.0
$C_2H_5^\bullet + C_2H_5^\bullet \rightarrow C_2H_4 + C_2H_6$	1.65e7	3.34
$C_3H_7^\bullet + C_2H_4 \rightarrow C_2H_5^\bullet + C_3H_6$	2.65e4	27.6
$CH_3^\bullet + C_2H_4 \rightarrow CH_4 + C_2H_3^\bullet$	4.16e6	46.56
$CH_4 + C_2H_3^\bullet \rightarrow CH_3^\bullet + C_2H_4$	8.9e4	25.94
$CH_3^\bullet + C_2H_3^\bullet \rightarrow CH_4 + C_2H_2$	9.03e6	3.2
$C_2H_3^\bullet + H^\bullet \rightarrow C_2H_2 + H_2$	1.2e7	0.0
$CH_4 + H^\bullet \rightarrow CH_3^\bullet + H_2$	7.59e7	49.89
$CH_3^\bullet + H_2 \rightarrow CH_4 + H^\bullet$	3.3e6	51.05
$CH_3^\bullet + CH_3^\bullet \rightarrow C_2H_5^\bullet + H^\bullet$	8.0e8	111.0
$C_2H_5^\bullet + H^\bullet \rightarrow CH_3^\bullet + CH_3^\bullet$	1.08e8	3.64
$C_2H_4 + H^\bullet \rightarrow C_2H_3^\bullet + H_2$	5.42e8	62.36

Reaction	A_i, s^{-1} or $m^3 \times mol^{-1} \times s^{-1}$	$E_i, kJ \times mol^{-1}$
$C_2H_3^\bullet + H_2 \rightarrow C_2H_4 + H^\bullet$	9.7e4	34.75
$CH_4 \rightarrow CH_3^\bullet + H^\bullet$	2.4e16	439.0
$CH_3^\bullet + H^\bullet \rightarrow CH_4$	1.9e8	1.15

В Таблице 3.2 представлены массовые доли основных компонент смеси для двух расчетов. Из таблицы 3.2 очевидно, что решения в обоих случаях согласуются, что говорит об адекватности используемого расчетного алгоритма [11] и установившемся течении во второй половине трубы.

Таблица 3.2. Сравнение газодинамических расчетов и решения системы уравнений химической кинетики при разных температурах стенок
Table 3.2. Comparison of gas-dynamic calculations and solutions of a system of chemical kinetics equations at different wall temperatures

Температура, К	1173	1273	1373	1473	1573
CH_4 , %, текущий расчет	99.59	89.52	48.01	7.42	0.89
CH_4 , %, расчет RADAU5 [16]	99.57	89.50	48.07	7.44	0.89
C_2H_4 , %, текущий расчет	0.12	7.63	10.57	0.42	$5.93 \cdot 10^{-3}$
C_2H_4 , %, расчет RADAU5 [16]	0.12	7.64	10.62	0.43	$6.1 \cdot 10^{-3}$
C_2H_2 , %, текущий расчет	$1.26 \cdot 10^{-4}$	0.79	32.57	76.81	84.20
C_2H_2 , %, расчет RADAU5 [16]	$1.23 \cdot 10^{-4}$	0.73	31.92	74.68	80.41
H_2 , %, текущий расчет	0.03	1.26	8.42	15.29	14.88
H_2 , %, расчет RADAU5 [16]	0.03	1.32	8.96	17.41	18.67
C_2H_6 , %, текущий расчет	0.24	0.77	0.39	0.02	$5.68 \cdot 10^{-3}$
C_2H_6 , %, расчет RADAU5 [16]	0.25	0.78	0.39	0.018	$4.43 \cdot 10^{-3}$

4. Конверсия метановых смесей под воздействием лазерного излучения

Мы рассматриваем постановку, когда лазерное излучение вводится через левый конец трубы (Рис. 3.1, 4.1), оно поглощается компонентами смеси (этиленом), и происходит значительное увеличение температуры в центральной области реактора (Рис. 4.2). Отсюда возникает интерес к исследованию газодинамического процесса и поведения компонент смеси в центральной части трубы с целью определения условий для максимальной конверсии исходного сырья.

Нами проведены расчеты с начальными условиями, описанными в предыдущем разделе, диаметром лазерного луча 4 мм и различной мощностью излучения (0 Вт, 8 Вт, 32 Вт, 64 Вт). Температура стенок задавалась 870 К у левого конца трубы и до входа газовой смеси по периметру, далее температура стенок задана 1373 К. Такое распределение температур выбрано для смещения зоны поглощения излучения и активных химических превращений в область смешения потоков.

На Рис. 4.3 приведено распределение температуры вдоль оси реактора для различ-

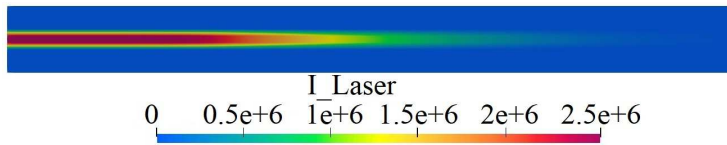


Рис. 4.1. Интенсивность лазерного излучения, Вт/м³
Fig 4.1. Intensity of laser radiation, W/m³

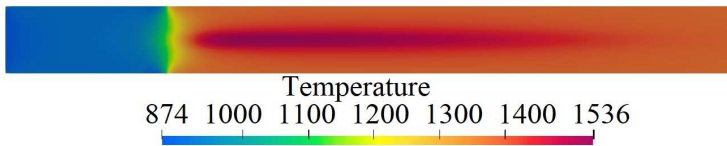


Рис. 4.2. Температура, К
Fig 4.2. Temperature, K

ной мощности лазерного излучения. Как следует из представленных графиков, уже при незначительной мощности излучения в 8 Вт происходит увеличение температуры на 150 К по сравнению с температурой в отсутствие излучения. При увеличении мощности до 64 Вт температура сохраняет свои максимальные значения на всей длине трубы.

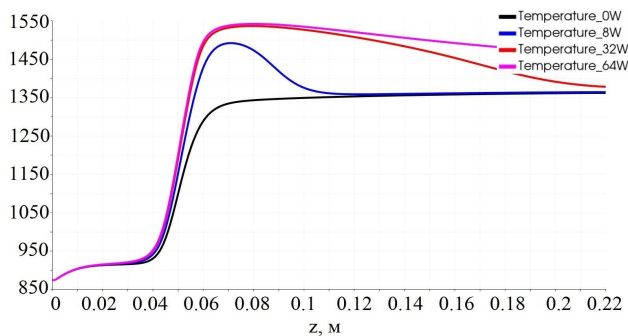


Рис. 4.3. Распределение температуры смеси вдоль оси для разной мощности излучения, К
Fig 4.3. Mixture temperature distribution along the axis for different radiation powers, K

На Рис. 4.4 представлены выходы основных компонент смеси вдоль оси реактора. С вводом лазерного излучения конверсия метана при значениях мощности выше 32 Вт увеличивается приблизительно в 1.5-2 раза уже в центральной части трубы. Последующее увеличение мощности (64 Вт) не оказывает сильного влияния на конверсию. Из рисунков видно, что в случае заданных начальных и граничных условий увеличение мощности способствует выработке водорода и ацетилена, максимальное их содержание наблюдается на выходе из трубы. На расстоянии двух калибров трубы, в зоне смешения и активного поглощения лазерного излучения, наблюдается максимальный выход

этилена. Уменьшение его выхода во второй половине трубы связано с повышением температуры в этой области, при которой происходит образование водорода и ацетилена.

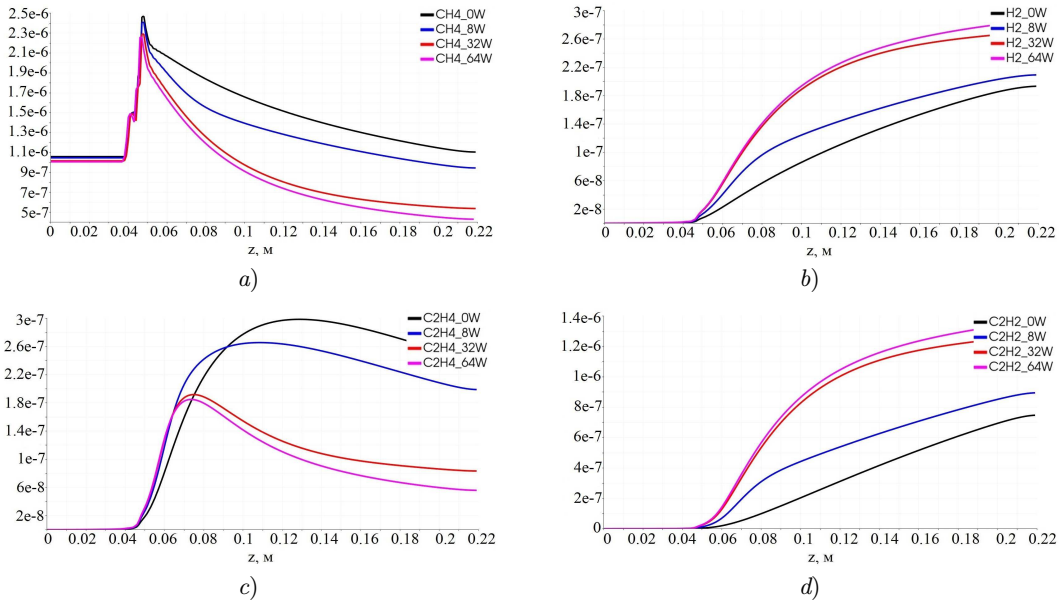


Рис. 4.4. Распределение выхода (кг/сек) основных компонент смеси вдоль оси для разной мощности излучения: а) CH_4 ; б) H_2 ; в) C_2H_4 ; д) C_2H_2
Fig 4.4. Yield of the main components of the mixture distribution (kg/s) along the axis for different radiation powers: а) CH_4 ; б) H_2 ; в) C_2H_4 ; д) C_2H_2

В экспериментальных исследованиях температура стенок, как правило, задается в пределах 1 100-1 200 К. Однако при указанной температуре и рассматриваемых временах нахождения смеси в реакторе метан не разлагается на продукты, и не образуется этилен, который поглощает лазерное излучение.

Для исследования лазерной конверсии метана в условиях реального эксперимента рассматривался реактор, описанный в разделе 3. с температурой стенок 1 173 К на расстоянии 5 см от левого торца, мощность излучения 64 Вт. Вычислительный эксперимент проводился для метан-этиленовой смеси с разным значением содержания этилена (0%, 1.5%, 2%, 2.5%). Результаты численного моделирования показывают, что с увеличением доли этилена температура смеси растет (Рис. 4.5) и конверсия метана увеличивается. На рисунке 4.6 представлены распределения основных компонент смеси вдоль оси реактора для разной концентрации этилена. В присутствии в исходной смеси этилена в количестве 1.5% не происходит значительного изменения температуры газа и конверсии исходной смеси по сравнению со смесью, состоящей из одного метана. При содержании этилена в смеси в количестве 2% на выходе наблюдается повышение температуры на 300 К (Рис. 4.5). При таких условиях реакции наблюдается увеличение на порядок выходов этилена и водорода по сравнению с расчетом, в котором исходная смесь состоит только из метана. Наибольшая конверсия метана наблюдается в присутствии в исходной смеси 2.5% этилена, который способствует повышению температуры газа уже в центральной области реактора до 1550 К. В интервале температур от 1 350 К до 1 500 К (на участке трубы от 0.08 м до 0.12 м) наблюдается преимущественное обра-

зование этилена с постепенным нарастанием концентрации водорода и ацетилена. При температуре газа выше 1 500 К происходит увеличение выхода ацетилена и водорода.

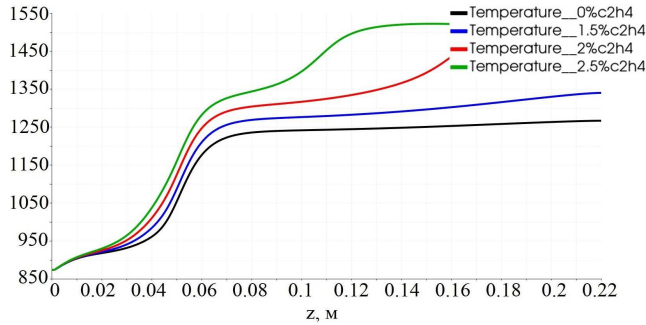


Рис. 4.5. Распределение температуры смеси вдоль оси для разного состава смеси, К

Fig 4.5. Mixture temperature distribution along the axis for different mixture composition, К

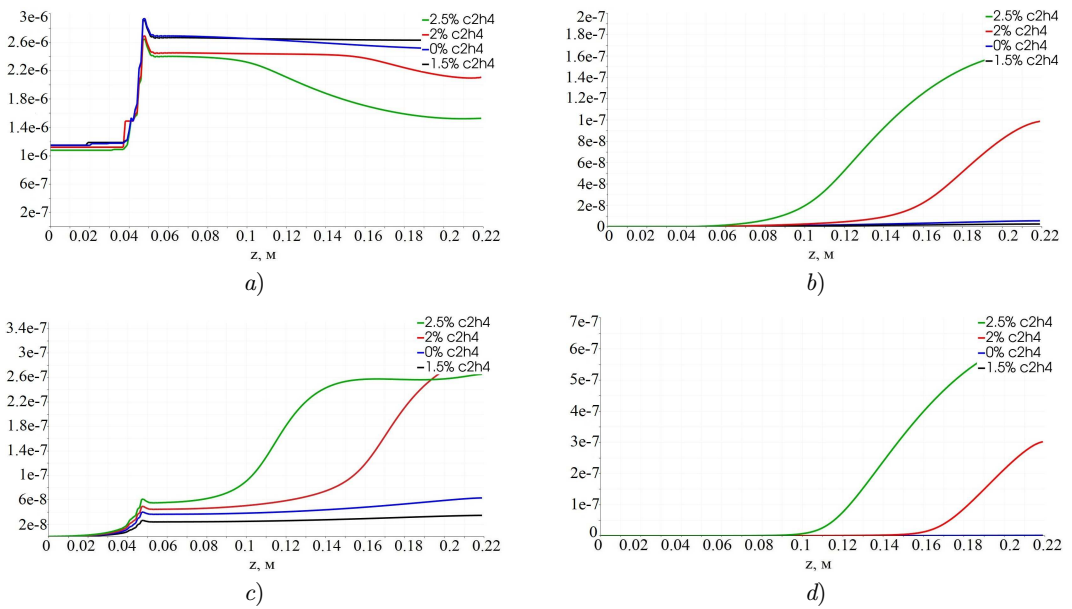


Рис. 4.6. Распределение выхода (кг/сек) основных компонент смеси вдоль оси для разного состава исходной смеси, $W = 64$ Вт:

a) CH_4 ; b) H_2 ; c) C_2H_4 ; d) C_2H_2

Fig 4.6. Yield of the main components of the mixture distribution (kg/s) along the axis for different composition of the initial mixture, $W = 64$ W:

a) CH_4 ; b) H_2 ; c) C_2H_4 ; d) C_2H_2

5. Выводы

Таким образом, нами проведено исследование лазерной конверсии метана при умеренных температурах среды. Исследование проводилось с использованием ранее разработанного кода для моделирования дозвуковых осесимметричных течений многокомпонентной среды, который был дополнен модулем учета лазерного излучения и модулем кинетической модели конверсии метана.

Для верификации кода проведены расчеты конверсии метана при различной температуре стенок без учета лазерного излучения. Полученные результаты показали соответствие с результатами расчета кинетической модели.

Изучено влияние мощности лазерного излучения на конверсию смеси, состоящей из метана, при высокой температуре стенок. Показано, что с увеличением мощности излучения происходит увеличение температуры смеси и конверсии метана. Этилен достигает максимальных значений в области смешения потоков. Конверсия метана, выход водорода и ацетилена достигают максимальных значений на выходе из трубы. Расчеты метан-этиленовой смеси при умеренных температурах стенок показали, что с уменьшением доли метана в смеси увеличивается выход целевых продуктов: этилена, водорода, ацетилена. Увеличение содержания этилена в исходной смеси приводит к активному формированию продуктов реакции в середине трубы, что показывает возможность получения продуктов на более коротких длинах труб. Таким образом, управляя размерами реактора, мощностью подаваемого излучения, температурой стенок, составом исходной смеси можно найти решение задачи максимальной конверсии метана для получения целевого продукта.

Полученные результаты указывают на возможность дальнейшего совершенствования процесса лазерного пиролиза метана на малотоннажных установках в целях получения таких ценных продуктов, как этилен, водород, ацетилен.

Благодарности. Исследование выполнено при поддержке РФФ (грант № 21-19-00429).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Masyuk N., Sherin A., Snytnikov V. N., Snytnikov V. N. Effect of Infrared Laser Radiation on Gas-Phase Pyrolysis of Ethane // Journal of Analytical and Applied Pyrolysis. 2018. Vol. 134. pp. 122–129. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jaap.2018.05.017>
2. Snytnikov V. N., Snytnikov V. N., Masyuk N. S., Markelova T. V. The Absorption of CO₂ Laser Radiation by Ethylene in Mixtures with Methane // Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer. 2020. Vol. 253. pp.107–119. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2020.107119>
3. Стенд лазерного катализа / В. Н. Снытников [и др.] // Приборы и техника эксперимента. 2021. Т. 64, № 3. С. 474–482. DOI: <https://doi.org/10.31857/S003281622102021X>
4. Лашина Е. А., Пескова Е. Е., Снытников В. Н. Математическое моделирование нестационарной температурной конверсии метан-этановых смесей в широком диапазоне температур // Химия в интересах устойчивого развития. 2023. № 3. С. 288–296.

5. Lashina E. A., Peskova E. E., Snytnikov V. N. Mathematical modeling of the homogeneous-heterogeneous non-oxidative CH_4 conversion: the role of gas-phase H or CH_3 // Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis. 2023. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11144-023-02442-8>
6. Ansys Fluent: [Электронный ресурс]. URL: <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent> (дата обращения: 15.07.2023).
7. FlowVision: [Электронный ресурс]. URL: <https://flowvisioncfd.com/en/> (дата обращения: 15.07.2023).
8. Open FOAM: [Электронный ресурс]. URL: <https://www.openfoam.com/> (дата обращения: 15.07.2023).
9. Gubaydullin I. M., Zhalnin R. V., Masyagin V. F., Peskova E. E., Tishkin V. F. Simulation of propane pyrolysis in a flow-through chemical reactor under constant external heating // Mathematical models and computer simulations. 2021. Vol. 13, No 3. pp. 437–444.
10. Моделирование течения многокомпонентного реагирующего газа с использованием алгоритмов высокого порядка точности / Р. В. Жалнин [и др.] // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Т. 27, № 1. С. 608–617. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170410>
11. Peskova E. E. Numerical modeling of subsonic axisymmetric reacting gas flows // Journal of Physics: Conference Series. 2021. Vol. 2057. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2057/1/012071>
12. Majda A., Sethian J. The derivation and numerical solution of the equations for zero Mach number combustion // Combust. Sci. Tech. 1985. Vol. 42. pp. 185–205. DOI: <https://doi.org/10.1080/00102208508960376>
13. Rehm R. G., Baum H. R. The equation of motion for thermally driven, buoyant flows // J. Research NBS. 1978. Vol. 83, Issue 3. pp. 297–308.
14. Day M. S., Bell J. B. Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry // Combustion Theory and Modelling. 2000. Vol. 4, No 4. pp. 535–556. DOI: <https://doi.org/10.1088/1364-7830/4/4/309>
15. Stadnichenko O. A., Snytnikov V. N., Snytnikov V. N., Masyuk N. S. Mathematical modeling of ethane pyrolysis in a flow reactor with allowance for laser radiation effects // Chemical Engineering Research and Design. 2016. Vol. 109. pp. 405–413. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2016.02.008>
16. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin, Heidelberg: Springer, 1996. 614 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-05221-7>

*Поступила 28.05.2023; доработана после рецензирования 21.07.2023;
принята к публикации 25.08.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. N. Masyuk, A. Sherin, V. N. Snytnikov, Vl. N. Snytnikov, “Effect of infrared laser radiation on gas-phase pyrolysis of ethane”, *Journal of Analytical and Applied Pyrolysis*, **134** (2018), 122–129. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jaap.2018.05.017>
2. V. N. Snytnikov, V. N. Snytnikov, N. S. Masyuk, T. V. Markelova, “The absorption of CO₂ laser radiation by ethylene in mixtures with methane”, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*, **253** (2020), 107–119. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jqsrt.2020.107119>
3. V. N. Snytnikov, V. N. Snytnikov, N. S. Masyuk, T. V. Markelova, V. N. Parmon, “A laser catalysis apparatus”, *Instruments and Experimental Techniques*, **64**:3 (2021), 474–482 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.31857/S003281622102021X>
4. E. A. Lashina, E. E. Peskova, V. N. Snytnikov, “Mathematical modelling of the dynamics of thermal conversion of methane-ethane mixtures in a wide temperature range”, *Khimiya v interesakh ustojchivogo razvitiya*, 2023, no. 3, 288–296 (In Russ.).
5. E. A. Lashina, E. E. Peskova, V. N. Snytnikov, “Mathematical modeling of the homogeneous-heterogeneous non-oxidative CH₄ conversion: the role of gas-phase H or CH₃”, *Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis*, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11144-023-02442-8>
6. *Ansys Fluent*, <https://www.ansys.com/products/fluids/ansys-fluent>.
7. *FlowVision*, <https://flowvisioncfd.com/en/>.
8. Open FOAM, *Electronic resource*, <https://www.openfoam.com/>.
9. I. M. Gubaydullin, R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova, V. F. Tishkin, “Simulation of propane pyrolysis in a flow-through chemical reactor under constant external heating”, *Mathematical models and computer simulations*, **13**:3 (2021), 437–444.
10. R. V. Zhalnin, E. E. Peskova, O. A. Stadnichenko, V. F. Tishkin, “Modeling the flow of a multicomponent reactive gas using high accuracy algorithms”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Kompjuternye nauki*, **27**:1 (2017), 608–617 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170410>
11. E. E. Peskova, “Numerical modeling of subsonic axisymmetric reacting gas flows”, *Journal of Physics: Conference Series*, **2057** (2021). DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/2057/1/012071>
12. A. Majda, J. Sethian, “The derivation and numerical solution of the equations for zero Mach number combustion”, *Combust. Sci. Tech.*, **42** (1985), 185–205. DOI: <https://doi.org/10.1080/00102208508960376>

13. R. G. Rehm, H. R. Baum, “The equation of motion for thermally driven, buoyant flows”, *J. Research NBS*, **83**:3 (1978), 297–308.
14. M. S. Day, J. B. Bell, “Numerical simulation of laminar reacting flows with complex chemistry”, *Combustion Theory and Modelling*, **4**:4 (2000), 535–556. DOI: <https://doi.org/10.1088/1364-7830/4/4/309>
15. O. A. Stadnichenko, V. N. Snytnikov, Vl. N. Snytnikov, N. S. Masyuk, “Mathematical modeling of ethane pyrolysis in a flow reactor with allowance for laser radiation effects”, *Chemical Engineering Research and Design*, **109** (2016), 405–413. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cherd.2016.02.008>
16. E. Hairer, G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations II. Stiff and Differential-Algebraic Problems*, Springer, Berlin, Heidelberg, 1996 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-642-05221-7>, 614 p.

Submitted 28.05.2023; Revised 21.07.2023; Accepted 25.08.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202303.174-186

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.958:536.2

Взаимодействие разреженного слоя частиц с плоскостью постоянного нагрева в присутствии поперечного градиента температуры

А. О. Сыромясов, Ю. П. Еделева

Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. При математическом моделировании поведения дисперсных сред в различных сосудах или трубах может потребоваться найти искажение, вносимое частицами взвеси в распределение температуры внутри емкости. Необходимым этапом такого расчета служит определение температурного поля, возникающего при расположении дисперсных частиц рядом с плоской стенкой сосуда; при этом предполагается, что несущая среда неподвижна, а инородные частицы для простоты считаются шарообразными. Авторы статьи при решении указанной задачи заменяют плоскость фиктивной частицей, зеркально расположенной относительно заданной. Это позволяет далее использовать метод мультипольного разложения для представления температуры, которая в данном случае является гармонической функцией координат. Найденное решение используется для нахождения эффективной теплопроводности слоя частиц, помещенных в полупространство, ограниченное плоскостью постоянной температуры. Для этого полученное решение осредняется по всем возможным положениям частиц внутри бесконечно протяженного объема ограниченной толщины, а результат сравнивается с решением эталонной задачи о распределении температуры в полупространстве, содержащем однородный слой иной теплопроводности. Вычисления проведены в предположении, что взвешенные в среде сферы расположены достаточно редко и потому взаимодействуют только с плоскостью, но не друг с другом. Найдено поправочное слагаемое, которое следует ввести в формулу эффективной теплопроводности в случае, когда общая протяженность среды в направлении, перпендикулярном плоскости, конечна.

Ключевые слова: термодинамическое взаимодействие, фиктивная частица, мультипольное разложение, тензорные коэффициенты, эффективная теплопроводность

Для цитирования: Сыромясов А. О., Еделева Ю. П. Взаимодействие разреженного слоя частиц с плоскостью постоянного нагрева в присутствии поперечного градиента температуры // Журнал Средневожского математического общества. 2023. Т. 25, № 3. С. 174–186. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.174-186>

Об авторах:

Сыромясов Алексей Олегович, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall@yandex.ru

© А. О. Сыромясов, Ю. П. Еделева



Еделева Юлия Павловна, магистрант факультета математики и информационных технологий, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0009-0008-5275-1435>, edelewa.yulia@yandex.ru

Original article

MSC2020 35J25, 35Q79, 80A19, 80M35

Interaction of a Sparce Particle Stratum with a Constantly Heated Plane in Presence of a Transverse Temperature Gradient

A. O. Syromyasov, Yu. P. Edeleva

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. While modelling dispersions in containers or tubes it may be necessary to find distortions brought by the suspended particles in the temperature distribution in a vessel. Essential step of such a calculation is to determine of temperature field emerging when the particles are placed near the plane wall of the vessel. For simplicity one may suppose additionally that the carrying medium is stationary and that the particles are spherical. Solving this problem, the authors replace the plane by a fictitious particle that is mirror-positioned with respect to a given one. This allows to use multipole expansion for representation of the temperature that is a harmonic function in the case discussed. The obtained solution is used to find effective heat conduction coefficient of particles' stratum placed in a half-space bounded by a plane with constant temperature. To do this, the authors average the temperature in the medium by the particles' positions and compare the result with the solution of reference problem about temperature distribution in a half-space with a uniform stratum of other thermal conductance. The calculation is provided under the assumption that suspended spheres are placed rarely and therefore interact only with the plane but not with each other. A correction term is obtained that must be included in the expression for heat conduction coefficient if the total medium longitude in the direction orthogonal to the plane is finite.

Keywords: thermodynamic interaction, fictitious particle, multipole expansion, tensor coefficients, effective heat conduction coefficient

For citation: A. O. Syromyasov, Yu. P. Edeleva. Interaction of a Sparce Particle Stratum with a Constantly Heated Plane in Presence of a Transverse Temperature Gradient. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:3(2023), 174–186. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202303.174-186>

About the authors:

Alexey O. Syromyasov, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall1@yandex.ru

Yuliya P. Edeleva, Master Student of the Faculty of Mathematics and Information Technologies, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0008-5275-1435>, edelewa.yulia@yandex.ru

1. Введение

Мелкие частицы примесей, диспергированные в веществах и имеющие свойства, отличные от свойств несущей среды, изменяют поведение этих веществ и тем самым оказывают влияние на процессы, в которые эти вещества вовлечены. Так, присутствие тел иной теплопроводности искажает распределение температуры в среде. Дж. К. Максвеллом была установлена аналогия между распространением тепла и электрического поля, а также найдено эффективное удельное сопротивление среды с не взаимодействующими включениями [1]. Этот результат стал отправной точкой для более подробных исследований, учитывающих специфику расположения и взаимного влияния частиц. Например, в [2] вычислена эффективная теплопроводность среды с шарообразными включениями, образующими кубическую решетку.

Чтобы уточнить модели процессов в сосудах или трубах, целесообразно изучать распределение температуры в дисперсной среде вблизи некоторой поверхности (стенки сосуда или трубы), тепловое поле на которой задано. В перспективе это должно стать одним из этапов при моделировании течений суспензий с переменными свойствами. Так, в [3] изучается движение жидкости, вязкость которой зависит от температуры, в канале с неравномерно нагретыми стенками, но наличие взвеси в ней не учитывается. Напротив, в [4] обсуждается гидродинамическое взаимодействие дисперсных частиц в такой жидкости, но не учтено влияние границ сосуда.

Трудность состоит в том, что размеры поверхности много больше размеров дисперсных частиц. Поэтому прямое численное моделирование пристенных облаков взвеси требует существенного измельчения расчетной сетки и ведет к росту вычислительных затрат. Выходом служит решение задачи о термодинамическом взаимодействии одной или нескольких частиц с плоскостью и дальнейшее его осреднение по объему облака.

Известно несколько подходов к аналитическому описанию систем вида “несущая среда + инородные частицы вблизи плоскости”. Так, в [5] распределение потенциала в среде с такой геометрией вычисляется непосредственно – переходом в цилиндрическую систему координат. В работах [6–7] для решения сходных задач применяется метод отражений, изложенный также в [8]. Статья [9] рассматривает плоскость как предельный случай сферы большого радиуса, а задачу о двух сферах предлагается решать переходом в бисферическую систему координат.

Перечисленные методы имеют недостатки. Переход к криволинейным координатам не позволяет исследовать систему из нескольких частиц, взаимодействующих друг с другом. Метод отражений решает эту проблему, но приводит к весьма громоздким выражениям. Следовательно, возникает необходимость в методе, не “привязанном” к криволинейным системам координат и позволяющим сравнительно просто моделировать термодинамическое взаимодействие частиц и плоскости. С этой целью предлагается использовать подход, описанный в [10] применительно к движению сферы вблизи плоскости в вязкой жидкости. В нем плоскость заменяется фиктивной частицей, зеркально расположенной относительно исходной, а суммарные возмущения, вносимые в искомую величину обеими сферами, удовлетворяют граничные условия на плоскости¹.

Настоящая статья организована следующим образом. Раздел 2 содержит постановку и решение задачи об одиночной сфере вблизи плоскости. В рассмотрение вводится упомянутая ранее фиктивная частица, после чего используется мультипольное разло-

¹Подобный подход, используемый, например, для построения функций Грина уравнения Лапласа [11], также называется методом отражений, что в сравнении с изложенным в работе [8] создает терминологическую путаницу.

жение температуры. В разделе 3 ставится задача об эффективной теплопроводности слоя инородных сфер и моделируется прохождение постоянного градиента температуры через полупространство, содержащее однородный слой иной теплопроводности. Путем сравнения с этим эталонным результатом в разделе 4 вычисляется эффективная теплопроводность слоя частиц, расположенных над плоскостью постоянной температуры; при этом решение задачи раздела 2 осредняется по положениям центров взвешенных частиц внутри слоя. Наконец, в разделе 5 обсуждается, какое влияние на значение эффективной теплопроводности слоя оказывают конечные размеры области, заполненной дисперсной средой.

2. Распределение температуры в полупространстве с инородным сферическим включением

Пусть в пространстве введена декартова прямоугольная система координат $Ox_1x_2x_3$ с началом O и вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задает положение произвольной точки относительно O . Предположим, что полупространство $x_3 > 0$ заполнено неподвижной сплошной средой с теплопроводностью κ_f и температурой $T_f = T_f(\vec{x})$, а ограничивающая его координатная плоскость $W = Ox_1x_2$ поддерживается при постоянной температуре T_W :

$$T_f \Big|_{x_3=0} = T_W. \quad (2.1)$$

Далее, пусть в точке $\vec{r} = (0, 0, h)$ располагается центр сферического включения Ω с радиусом $a < h$ и теплопроводностью $\kappa_p \neq \kappa_f$. Вдали от W градиент температуры постоянен и перпендикулярен плоскости:

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) &\rightarrow T_\infty(\vec{x}), \\ T_\infty &= T_W + T_3x_3, \quad T_3 = \text{const}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Таким образом, T_∞ – это температура сплошной среды в отсутствие включения (Рис. 2.1).

Описанная система моделирует вещество в сосуде (трубе, цистерне), противоположные стенки которого, удаленные на значительное расстояние L друг от друга, нагреты по-разному; это различие и приводит к возникновению среднего градиента температуры, равного T_3 . Предположим, что вещество содержит слой дисперсных частиц, находящихся на расстоянии порядка h от одной из стенок; тогда если $h \ll L$, вторую стенку в некотором приближении можно считать бесконечно удаленной.

Присутствие частицы с иными свойствами приводит к искажению изотерм, которые изначально являлись плоскостями, параллельными W . Поэтому T_f есть неизвестная заранее функция, удовлетворяющая граничным условиям (2.1)–(2.2) и, в силу их стационарности, уравнению

$$\Delta_x T_f = 0, \quad \vec{x} \notin \Omega. \quad (2.3)$$

Здесь и далее Δ_x есть оператор Лапласа, вычисленный по координатам \vec{x} .

Распределение температуры T_p внутри включения также неизвестно и должно быть найдено из уравнения

$$\Delta_y T_p = 0, \quad \vec{y} \in \Omega, \quad (2.4)$$

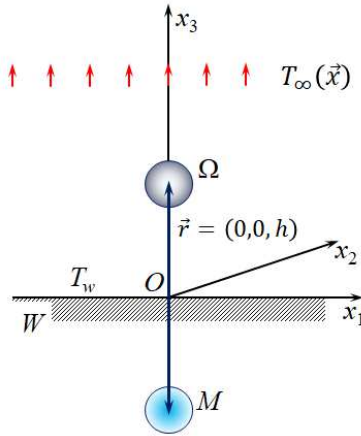


Рис. 2.1. Взаимодействие сферической частицы с плоскостью и введение зеркальной частицы

Fig 2.1. Interaction of a spherical particle with a plane and introduction of mirror particle

где $\vec{y} = \vec{x} - \vec{r}$. Граничным условием на T_p служит непрерывность температуры и теплового потока на границе сферы $\partial\Omega$:

$$T_f = T_p, \quad \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = \kappa_p \frac{\partial T_p}{\partial n}, \quad |\vec{x} - \vec{r}| = a, \tag{2.5}$$

производная берется по направлению внешней нормали \vec{n} к поверхности.

Наконец, внутри включения температура должна принимать конечные значения:

$$|T_p(\vec{y})| < +\infty, \quad \forall \vec{y} \in \Omega. \tag{2.6}$$

Первая из задач настоящего исследования заключается в том, чтобы найти функции $T_f(\vec{x})$ и $T_p(\vec{y})$, удовлетворяющие уравнениям (2.3)–(2.4) и дополнительным условиям (2.1)–(2.2), (2.5)–(2.6).

Проблема заключается в том, что поверхности W и $\partial\Omega$ имеют разную геометрию. С другой стороны, подход к моделированию термодинамического взаимодействия двух сферических частиц в безграничной среде известен [12]: вне сфер температура записывается в виде линейной комбинации мультиполей вида

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}, \quad L_{i_1 \dots i_n} = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \dots \frac{\partial}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right), \tag{2.7}$$

а внутри – в виде комбинации выражений того же вида, умноженных на $|\vec{x}|^{2n+1}$. Поэтому заменим W фиктивной сферой M , зеркально расположенной относительно Ω (Рис. 2.1). Тогда полученная конфигурация частиц, “наложенная” на граничные условия (2.1)–(2.2), (2.5), будет иметь группу симметрии $\infty \cdot m$ в обозначениях А. В. Шубникова: Ox_3 есть поворотная ось бесконечного порядка, через которую проходят плоскости зеркальной симметрии Ox_1x_3 и Ox_2x_3 . Следовательно, искомые функции представимы в виде суммы “фона” T_∞ и возмущений T' , индуцированных частицами, таким

образом:

$$\begin{aligned}
 T_f &= T_\infty(\vec{x}) + T'(\vec{x}, \vec{r}); \\
 T' &= T_3 \left[HA^{\text{ext}}(\Omega)L_3(\vec{x} - \vec{r}) + FA^{\text{ext}}(\Omega)L_{33}(\vec{x} - \vec{r}) + \right. \\
 &\quad + GA^{\text{ext}}(\Omega)L_{333}(\vec{x} - \vec{r}) + \dots + HA^{\text{ext}}(M)L_3(\vec{x} + \vec{r}) + \\
 &\quad \left. + FA^{\text{ext}}(M)L_{33}(\vec{x} + \vec{r}) + GA^{\text{ext}}(M)L_{333}(\vec{x} + \vec{r}) + \dots \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.8}$$

Для поля внутри частицы аналогичное представление следующее:

$$\begin{aligned}
 T_p &= T_\infty(\vec{r}) + T_3 \left[AA^{\text{int}}(\Omega)L_0(\vec{y})|\vec{y}| + HA^{\text{int}}(\Omega)L_3(\vec{y})|\vec{y}|^3 + \right. \\
 &\quad \left. + FA^{\text{int}}(\Omega)L_{33}(\vec{y})|\vec{y}|^5 + GA^{\text{int}}(\Omega)L_{333}(\vec{y})|\vec{y}|^7 + \dots \right].
 \end{aligned}
 \tag{2.9}$$

Коэффициенты AA , HA , ... постоянны и соответствуют возмущениям, вносимым реальной (Ω) и зеркальной (M) частицами; индексы “ext” и “int” указывают на разложение температуры вне и внутри Ω .

В силу определения (2.7) записанная таким образом T_f удовлетворяет (2.3) и (2.2), а T_p – (2.4) и (2.6). Нетрудно убедиться, что четность мультиполей $L_{3\dots 3}(\vec{x})$ как функций координаты x_3 совпадает с четностью количества их индексов. Поэтому, положив

$$HA^{\text{ext}}(M) = HA^{\text{ext}}(\Omega), FA^{\text{ext}}(M) = -FA^{\text{ext}}(\Omega), GA^{\text{ext}}(M) = GA^{\text{ext}}(\Omega), \dots
 \tag{2.10}$$

мы удовлетворим условию (2.1) глобально – на всей плоскости $x_3 = 0$.

Далее обозначение “(Ω)” у коэффициентов будем опускать.

Остается найти HA^{ext} , FA^{ext} , ... и AA^{int} , HA^{int} , FA^{int} , ... Для этого подставим выражения (2.8), (2.9) и (2.10) в (2.5), разложим мультиполи в ряд Тейлора в окрестности $\vec{x} = \vec{r}$ и будем искать неизвестные коэффициенты в виде асимптотического разложения по степеням $\varepsilon = a/h < 1$. В итоге с точностью до ε^5 получим:

$$\begin{aligned}
 HA^{\text{ext}} &= a^3 \left[\frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} + \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \right)^2 \varepsilon^3 \right], \\
 FA^{\text{ext}} &= \frac{3a^4(\kappa_p - \kappa_f)^2 \varepsilon^4}{16(\kappa_p + 2\kappa_f)(2\kappa_p + 3\kappa_f)}, GA^{\text{ext}} = \frac{a^5(\kappa_p - \kappa_f)^2 \varepsilon^5}{16(\kappa_p + 2\kappa_f)(3\kappa_p + 4\kappa_f)}, \\
 AA^{\text{int}} &= a \left[-\frac{1}{4} \cdot \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \varepsilon^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \right)^2 \varepsilon^5 \right], \\
 HA^{\text{int}} &= -\frac{3\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} - \frac{3\kappa_f(\kappa_p - \kappa_f)\varepsilon^3}{(\kappa_p + 2\kappa_f)^2}, \\
 FA^{\text{int}} &= -\frac{15\kappa_f(\kappa_p - \kappa_f)\varepsilon^4}{32a(\kappa_p + 2\kappa_f)(2\kappa_p + 3\kappa_f)}, GA^{\text{int}} = -\frac{7\kappa_f(\kappa_p - \kappa_f)\varepsilon^5}{48a^2(\kappa_p + 2\kappa_f)(3\kappa_p + 4\kappa_f)}.
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

Отметим, что решение может быть найдено и с более высокой точностью по ε ; для этого следует включить в (2.8)–(2.9) мультиполи более высоких порядков. При $\varepsilon \rightarrow 0$, т. е. при бесконечном удалении плоскости от частицы, оно переходит в известное выражение для одиночной сферы [13].

Итак, формулы (2.8)–(2.11) описывают решение искомое распределение температуры в системе “сферическое включение в полупространстве”.

3. Задача об эффективной теплопроводности слоя

Рассмотрим теперь не одну, а бесконечно много однотипных частиц, случайным образом расположенных в слое $S = \{\vec{x} | h_1 \leq x_3 \leq h_2\}$, проходящем параллельно плоскости W (рис. 3.1, а). Их распределение внутри слоя будем считать равномерным. Тогда в среднем все эти частицы, вместе взятые, оказывают на поле температуры такое же влияние, как если бы S был заполнен однородной средой с теплопроводностью $\kappa^* \neq \kappa_f$, которую логично назвать *эффективной* (рис. 3.1, б). Возникает вопрос, как оценить это влияние и найти указанную величину.

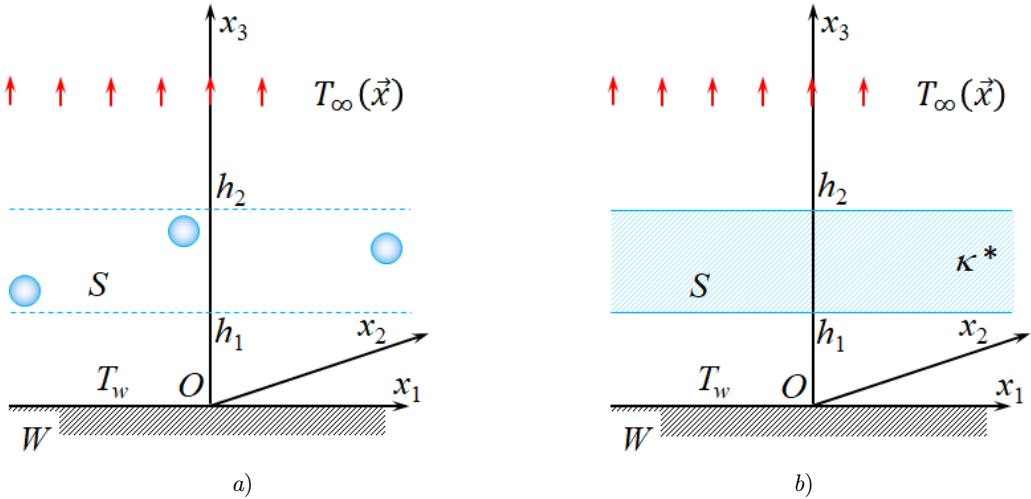


Рис. 3.1. Поперечный градиент температуры в полубесконечных средах с включениями: а) среда с разреженным слоем частиц, б) среда с включенным в нее однородным слоем

Fig 3.1. Transverse temperature gradient in semi-infinite media with inclusions а) a medium with sparse particle stratum, б) a medium with immersed uniform stratum

Решим сначала модельную задачу о температуре T_f в полупространстве $x_3 > 0$, содержащем сплошной слой теплопроводности κ^* .

Плоскости $x_3 = h_1$ и $x_3 = h_2$ разбивают полупространство на три области $V_1 = \{\vec{x} | x_3 < h_1\}$, $V_2 = S$ и $V_3 = \{\vec{x} | x_3 > h_2\}$, распределение температуры в которых будет различным. Обозначим через $T_f = T^{(k)}$ температуру внутри V_k , $k = 1, 2, 3$. Для каждой из этих функций должно быть выполнено уравнение Лапласа:

$$\Delta_x T^{(1)} = 0, \vec{x} \in V_1; \quad \Delta_x T^{(2)} = 0, \vec{x} \in V_2; \quad \Delta_x T^{(3)} = 0, \vec{x} \in V_3. \tag{3.1}$$

По-прежнему будем считать, что плоскость W нагрета до температуры T_W , т. е. выполнено (2.1). Условие (2.2) заменим на более слабое:

$$\nabla T_f \rightarrow (0, 0, T_3), x_3 \rightarrow \infty. \tag{3.2}$$

Наконец, на границах S должны быть выполнены условия, аналогичные (2.5):

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= T^{(2)}, \quad \kappa_f \frac{\partial T^{(1)}}{\partial n} = \kappa^* \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n}, \quad x_3 = h_1, \\ T^{(2)} &= T^{(3)}, \quad \kappa^* \frac{\partial T^{(2)}}{\partial n} = \kappa_f \frac{\partial T^{(3)}}{\partial n}, \quad x_3 = h_2. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Очевидно, что в обсуждаемом случае температура зависит только от x_3 . Используя (3.1)–(3.3), легко получить, что

$$\begin{aligned} T^{(k)} &= m^{(k)} x_3 + b^{(k)}, \quad k = 1, 2, 3, \\ m^{(1)} &= T_3, \quad b^{(1)} = T_W, \\ m^{(2)} &= T_3 \frac{\kappa_f}{\kappa^*}, \quad b^{(2)} = T_W - T_3 h_1 \frac{\kappa_f - \kappa^*}{\kappa^*}, \\ m^{(3)} &= T_3, \quad b^{(3)} = T_W + T_3 (h_2 - h_1) \frac{\kappa_f - \kappa^*}{\kappa^*}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Эти равенства представляют собой решение прямой задачи: вычисление температуры по заданным свойствам веществ и граничным условиям. Однако они помогают решить и обратную задачу по определению κ^* . Действительно, угловой коэффициент

$$m^{(2)} = \frac{T_f(h_2) - T_f(h_1)}{h_2 - h_1}, \quad (3.5)$$

поэтому если температуры $T_f(h_1)$ и $T_f(h_2)$ на границах слоя S известны, то из (3.4) можно вычислить

$$\kappa^* = \kappa_f \frac{T_3(h_2 - h_1)}{T_f(h_2) - T_f(h_1)}. \quad (3.6)$$

Ниже полученное выражение будет использовано для вычисления эффективной теплопроводности слоя частиц.

4. Эффективная теплопроводность слоя сферических частиц, взаимодействующих с плоскостью

Проведем расчеты, предполагая, что слой S является разреженным: расстояние от инородных сфер до плоскости много меньше, чем дистанция между ближайшими друг к другу частицами, а значит, они взаимодействуют лишь с плоскостью, но не друг с другом. Тогда возмущение, вносимое каждой из них, описывается равенствами (2.8)–(2.10), (2.11) с поправкой на то, что вектор \vec{r} в общем случае имеет отличные от нуля горизонтальные компоненты:

$$\vec{r} = \vec{r}_{2D} + \vec{h}, \quad \vec{r}_{2D} = (r_1, r_2, 0), \quad \vec{h} = (0, 0, h). \quad (4.1)$$

В качестве T_f в формуле (3.6) будем рассматривать значение этой функции, осредненное по всем возможным \vec{r} .

Введем n – числовую плотность частиц внутри S , тогда их объемная доля в слое есть $\phi = n|\Omega|$, где $|\Omega| = 4\pi a^3/3$ есть объем одного включения. Итогом вычислений должна стать зависимость $\kappa^*(\phi)$.

Учтем, что центры частиц расположены в слое $S' = \{\vec{x} \mid h_1 + a \leq x_3 \leq h_2 - a\}$. Это значит, что плотность n_C центров частиц внутри этой более узкой полосы равна

$$n_C = n \frac{h_2 - h_1}{h_2 - h_1 - 2a}. \quad (4.2)$$

Поскольку T_∞ в (2.8) не зависит от \vec{r} , осреднению подлежит лишь возмущение, вносимое сферами. Обозначим его результат через T'_Σ :

$$T'_\Sigma = \int_{S'} T'(\vec{x}, \vec{r}) n_C dr_1 dr_2 dh. \quad (4.3)$$

Представим вектор \vec{x} в виде, аналогичном (4.1):

$$\vec{x} = \vec{x}_{2D} + \vec{x}_3, \quad \vec{x}_{2D} = (x_1, x_2, 0), \quad \vec{x}_3 = (0, 0, x_3),$$

а затем воспользуемся этими представлениями, объединяя их с (2.8), (2.10) и (4.3). Учтем, что величины $HA^{\text{ext}}, FA^{\text{ext}}, \dots$ зависят от ε , а значит, и от h :

$$\begin{aligned} T'_\Sigma = n_C T_3 \int_{h_1+a}^{h_2-a} dh \iint_{-\infty}^{\infty} \left\{ HA^{\text{ext}}(h) \left[L_3(\vec{x}_{2D} + \vec{x}_3 - \vec{r}_{2D} - \vec{h}) + \right. \right. \\ \left. \left. + L_3(\vec{x}_{2D} + \vec{x}_3 - \vec{r}_{2D} + \vec{h}) \right] + FA^{\text{ext}}(h) \left[L_{33}(\vec{x}_{2D} + \vec{x}_3 - \vec{r}_{2D} - \vec{h}) - \right. \right. \\ \left. \left. - L_{33}(\vec{x}_{2D} + \vec{x}_3 - \vec{r}_{2D} + \vec{h}) \right] + \dots \right\} dr_1 dr_2. \end{aligned}$$

В этом равенстве принято во внимание, что при $\vec{r}_{2D} \neq \vec{0}$ зеркальному отражению относительно W подлежит лишь вертикальная компонента вектора \vec{r} , т. е. \vec{h} .

Нетрудно убедиться в следующих свойствах последнего выражения. Во-первых, фигурирующие в нем двойные несобственные интегралы сходятся абсолютно, ибо мультиполи $L_{3\dots 3}(\vec{x}_{2D} + \vec{x}_3 - \vec{r}_{2D} - \vec{h})$ при $|\vec{r}_{2D}| \rightarrow \infty$ имеют порядок малости $|\vec{r}_{2D}|^{-3}$ или выше. Во-вторых, значение \vec{x}_{2D} не влияет на T'_Σ , т. к. интегрирование по r_1 и r_2 производится по всей плоскости \mathbb{R}_2 . Поэтому положим $\vec{x}_{2D} = \vec{0}$ и будем далее писать $T'_\Sigma = T'_\Sigma(x_3)$.

Нахождение T'_Σ сведется к вычислению значения выражений вида

$$\iint_{-\infty}^{\infty} L_{3\dots 3}(\vec{r}_{2D} + \vec{z}) dr_1 dr_2,$$

где вектор $\vec{z} = \vec{x}_3 \pm \vec{h}$ перпендикулярен \vec{r}_{2D} ; обозначим также $z = x_3 \pm h$. Непосредственная проверка показывает, что

$$\iint_{-\infty}^{\infty} L_3(\vec{r}_{2D} + \vec{z}) dr_1 dr_2 = \begin{cases} -2\pi, & z > 0, \\ 2\pi, & z < 0, \end{cases}$$

остальные интегралы такого типа равны нулю независимо от \vec{z} .

При $x_3 > 0$ величина $x_3 + h$ всегда положительна. Т. к. $h \in [h_1 + a, h_2 - a]$, то $x_3 - h < 0$ при $x_3 = h_1$. Исходя из вышесказанного, это значит, что $T'_\Sigma(h_1) = 0$. Аналогично, $h_2 - h > 0$, поэтому $T'_\Sigma(h_2) = I_H$, где

$$I_H = -4\pi n_C T_3 \int_{h_1+a}^{h_2-a} HA^{\text{ext}}(h) dh.$$

Используя теперь (2.11), (4.2) и заменяя ε на a/h , получим

$$\begin{aligned} I_H &= -3\phi T_3(h_2 - h_1) \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} (1 + \chi), \\ \chi &= \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \cdot \frac{a^3(h_1 + h_2)}{8(h_1 + a)^2(h_2 - a)^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Окончательно, подставив в (3.6) выражения

$$T_f(h_1) = T_\infty(h_1), \quad T_f(h_2) = T_\infty(h_2) + I_H, \quad (4.5)$$

где I_H определена равенством (4.4), найдем

$$\kappa^*(\phi) = \kappa_f \cdot \frac{\kappa_p + 2\kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f - 3(1 + \chi)(\kappa_p - \kappa_f)\phi} \approx \kappa_f \left[1 + 3 \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} (1 + \chi)\phi \right]. \quad (4.6)$$

Последнее приближение справедливо при $\phi \rightarrow 0$. Это и есть искомое выражение для эффективной теплопроводности слоя. Отметим, что фигурирующий в этой формуле параметр χ зависит не только от физических свойств взвешенных в среде частиц, но и от их размеров, а также от положения слоя S относительно плоскости W .

Сравним этот результат с классическим выражением Максвелла. Согласно [1], эффективная теплопроводность безграничной среды с редко расположенными ($\phi \ll 1$) сферическими включениями равна

$$\kappa^*(\phi) = \kappa_f \cdot \frac{\kappa_p + 2\kappa_f + 2(\kappa_p - \kappa_f)\phi}{\kappa_p + 2\kappa_f - (\kappa_p - \kappa_f)\phi} \approx \kappa_f \left(1 + 3 \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} \phi \right).$$

Выполним предельный переход в (4.6). Предположим, что слой инородных частиц заполняет все полупространство: $h_1 \rightarrow 0$, $h_2 \rightarrow \infty$; в этом случае $\chi \rightarrow 0$, а $\kappa^*(\phi)$ переходит в приведенную выше приближенную формулу Максвелла. Таким образом, проверка предельным переходом успешно выполнена.

5. Влияние конечных размеров области на значение эффективной теплопроводности

Предположим теперь, что сплошная среда занимает не все полупространство $x_3 > 0$, а область $x_3 \in (0; L)$. На его нижней границе, вблизи которой расположены частицы, сохраним условие (2.1), а ограничение (2.2) заменим на

$$T_f = T_W + T_3 L, \quad x_3 = L. \quad (5.1)$$

Иными словами, теперь T_3 является средним градиентом температуры.

Задача (3.1), (2.1), (3.3), (5.1) имеет решение, переходящее в (3.4) при $L \rightarrow \infty$. В частности,

$$m^{(2)} = \frac{\kappa_f T_3 L}{L\kappa^* + (h_2 - h_1)(\kappa_f - \kappa^*)},$$

откуда

$$\kappa^* = \kappa_f \cdot \frac{T_3 L - m^{(2)}(h_2 - h_1)}{m^{(2)}L - m^{(2)}(h_2 - h_1)}.$$

Вновь используя выражения (3.5), (4.5), считая ϕ малым, а L – большим, найдем

$$\kappa^*(\phi) \approx \kappa_f \left[1 + 3 \frac{\kappa_p - \kappa_f}{\kappa_p + 2\kappa_f} (1 + \chi) \phi \left(1 + \frac{h_2 - h_1}{L} \right) \right].$$

От (4.6) эта формула отличается поправочным слагаемым $(h_2 - h_1)/L$. Новое приближение действительно, если $(h_2 - h_1)/L$ есть малая величина более низкого порядка, чем ϕ . В противном случае корректив, вносимая в (4.6), приобретает порядок ϕ^2 , что требует дополнительного учета взаимодействия частиц в слое друг с другом.

6. Заключение

Итак, в статье найдено распределение температуры в полупространстве, заполненном однородной сплошной средой и содержащей одиночное сферическое включение. Для этого адаптирован метод мультипольного разложения, позволяющий моделировать взаимодействие произвольного количества частиц. Полученное решение было использовано для расчета эффективной теплопроводности дисперсного слоя, расположенного параллельно плоскости, ограничивающей полупространство. Оказалось, что найденная величина не просто является характеристикой некоего “эффективного” материала, но и зависит от геометрических параметров слоя. В предельном случае вычисленная теплопроводность переходит в известную формулу Максвелла. Рассмотрено также влияние, оказываемое на теплопроводность слоя конечными размерами сосуда, содержащего среду.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Максвелл Дж. К. Трактат об электричестве и магнетизме: в 2-х т. М. : Наука, 1989. Т. I. 416 с.
2. Бердичевский А. Л. Об эффективной теплопроводности сред с периодически расположенными включениями // Доклады АН СССР. 1979. Т. 247, N 6. С. 1363–1367.
3. Thakur R., Sharma A., Govindarajan R. Early evolution of optimal perturbations in a viscosity-stratified channel // Journal of Fluid Mechanics. 2021. Vol. 914. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1160>
4. Ziegler S., Smith A.-S. Hydrodynamic particle interactions in linear and radial viscosity gradients // Journal of Fluid Mechanics. 2022. Vol. 943. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.421>
5. Stillinger F. H., Jr. Interfacial solutions of the Poisson – Boltzmann equation // Journal of Chemical Physics. 1961. Vol. 35, N 5. pp. 1584–1589. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1732113>
6. Hao Y., Haber S. Electrophoretic motion of a charged spherical particle normal to a planar dielectric wall // International Journal of Multiphase Flow. 1998. Vol. 24, N 5. pp. 793–824.

7. Сенницкий В. Л. О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки // Прикладная математика и техническая физика, 2000. Т. 41, N 1. С. 57–62. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02465236>
8. Хашпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М. : Мир, 1976. 632 с.
9. Liu H., Bau H. H. The dielectrophoresis of cylindrical and spherical particles submerged in shells and in semi-infinite media // *Physics of Fluids*. 2004. Vol. 16, № 5. pp. 1217–1228. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1649237>
10. Баранов В. Е., Мартынов С. И. Моделирование динамики частиц в вязкой жидкости при наличии плоской стенки // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, N 9. С. 1669–1686.
11. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики – 2-е изд., стереотип. М. : Физматлит, 2004. 400 с.
12. Сыромясов А. О. Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. Т 4, №. 3. С. 1158–1160.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.

*Поступила 26.05.2023; доработана после рецензирования 30.07.2023;
принята к публикации 25.08.2023*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, **1**, Clarendon Press, Oxford, 1873.
2. A. L. Berdichevsky, “On the efficient heat conduction of media with periodically located inclusions”, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **247**:6 (1979), 1363–1367 (In Russ.).
3. R. Thakur, A. Sharma, R. Govindarajan, “Early evolution of optimal perturbations in a viscosity-stratified channel”, *Journal of Fluid Mechanics*, **914** (2021). DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2020.1160>
4. S. Ziegler, A.-S. Smith, “Hydrodynamic particle interactions in linear and radial viscosity gradients”, *Journal of Fluid Mechanics*, **943** (2022). DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2022.421>
5. F. H. Stillinger Jr., “Interfacial solutions of the Poisson – Boltzmann equation”, *Journal of Chemical Physics*, **35**:5 (1961), 1584–1589. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1732113>

6. Y. Hao, S. Haber, “Electrophoretic motion of a charged spherical particle normal to a planar dielectric wall”, *International Journal of Multiphase Flow*, **24**:5 (1998), 793–824. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0301-9322\(97\)00090-6](https://doi.org/10.1016/S0301-9322(97)00090-6)
7. V. L. Sennitskii, “Force interaction of a sphere and a viscous liquid in the presence of a wall”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **41**:1 (2000), 50–54. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02465236>
8. J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Springer, Netherlands, 1983, 553 p.
9. H. Liu, H. H. Bau, “The dielectrophoresis of cylindrical and spherical particles submerged in shells and in semi-infinite media”, *Physics of Fluids*, **16**:5 (2004), 1217–1228. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.1649237>
10. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “Simulation of particle dynamics in a viscous fluid near a plane wall”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:9 (2010), 1588–1604. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542510090101>
11. V. S. Vladimirov, V. V. Zharinov, *Equations of mathematical physics*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2004 (In Russ.), 400 p.
12. A. O. Syromyasov, “Thermodynamic interaction of spherical particles in a fluid with a constant temperature gradient”, *Vestnik of Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod*, **4**:3 (2011), 1158–1160 (In Russ.).
13. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid mechanics*, Heinemann, Butterworth, 1987, 539 p.

Submitted 26.05.2023; Revised 30.07.2023; Accepted 25.08.2023

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ПАМЯТИ ВЯЧЕСЛАВА ЗИГМУНДОВИЧА ГРИНЕСА



Вячеслав Зигмундович Гринес
(13.12.1946-2.07.2023)

2 июля 2023 г. ушел из жизни Вячеслав Зигмундович Гринес, выдающийся математик, работавший на грани теории динамических систем и топологии, один из столпов Нижегородской математической школы. В студенческие годы он испытывал влияние Е.А. Леонтович и Л.П. Шильникова, а кандидатскую диссертацию сделал под руководством С.Х. Арансона и совместно с ним. В этой совместной работе был сделан прорыв в теории потоков на поверхностях рода выше единицы и найден инвариант, который для поверхностей высшего рода играет ту же роль, что число вращения Пуанкаре для тора, но определяется далеко не так просто. Эта работа принесла своим авторам известность, и стала существенным ингредиентом созданной позднее теории Аносова-Вейля дифференциальных уравнений на поверхностях.

Начало нашего столетия было ознаменовано для Гринеса еще одним прорывом, который он совершил в совместной работе с Кристианом Бонатти. Они открыли суще-

ствование диких вложений сепаратрис отображений Морса-Смейла в трехмерном пространстве. Опираясь на это открытие, Гринес с соавторами, в том числе и с учениками, выполнил серию работ, которые привели к полной топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных замкнутых многообразиях. Большую часть своей профессиональной жизни Вячеслав Зигмундович провел в стенах Горьковского сельскохозяйственного института, вне ведущих математических центров Нижнего Новгорода. Нужна была огромная преданность математике, чтобы в этих условиях оставаться ярким исследователем и педагогом.

Вячеслав Зигмундович создал небольшую, но яркую школу. Его ученицы последних 25 лет: О.Починка, Е.Гуревич, Ю.Левченко стали впоследствии его соавторами. Вместе с ними, а также со своими коллегами В.Медведевым и Е.Жужомой он опубликовал три монографии, одна из них вышла в издательстве Springer.

Вячеслав Зигмундович был одним из инициаторов создания в нижегородском филиале Вышки образовательных программ по чистой математике. В 2014 г. была создана Кафедра фундаментальной математики, которую возглавила его ученица О.В. Починка. С 2018 года В.З. Гринес работал ординарным профессором НИУ ВШЭ. Для многих сотрудников и студентов матфака поездки в Нижний Новгород — важная составляющая научной работы.

Вячеслав Зигмундович был необыкновенно скромным и обаятельным человеком. Он любил музыку и хорошо играл на баяне. Эту любовь и способность он передал своим детям и внукам. Его внуки Лиза и Павел — победители престижных российских и международных музыкальных конкурсов.

Коллеги, ученики и друзья знали Вячеслав Зигмундович как очень доброго, порядочного, интеллигентного и эрудированного человека, преданно служившего своему делу.

Российская наука и все его коллеги понесли невосполнимую утрату. Светлая память о Вячеславе Зигмундовиче навсегда пребудет в наших сердцах.

Друзья и коллеги

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

– *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

– *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society (American Mathematical Society)* and *European Mathematical Society (European Mathematical Society)*. To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX , дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты `svmo.sty` и `svmobib.sty`. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем `<ФамилияИО>.tex`. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: `{УДК}` {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: `{MSC 2020}` {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmbib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paref О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.
```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Выш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.
```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib6}
```

`\by В. Г. Малинов`
`\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике`
`\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды`
`\bookvol II`
`\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.`
`\yr 2016`
`\pages 48–50`
`\publ ФИЦ ИУ РАН`
`\publaddr М.`

В разделе `thebibliographyEn`:

`\Bibitem{shamanaevBib6En}`
`\by V. G. Malinov`
`\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator`
`\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings`
`\bookvol II`
`\procinfo Moscow, October 17-22, 2016`
`\yr 2016`
`\pages 48–50`
`\publ FRC CSC RAS Publ.`
`\publaddr Moscow`

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
```

```
\caption{Table name \ \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} \label{shamanaevtable1}
```

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_captio} {common_captio_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_captio}{common_captio_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmbib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmbib.sty package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

```
\lang In Russ.
```

Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
```

```
\by M. J. Berger, J. Oligier
```

```
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
```

```
\jour Journal of Computational Physics
```

```
\yr 1984
```

```
\vol 53
```

```
\pages 484–512
```

Articles in the electronic journals in Russian

```
\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

Articles in collections in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.
```

Books (monographs and collections) in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential
equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.
```

Conference proceedings in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

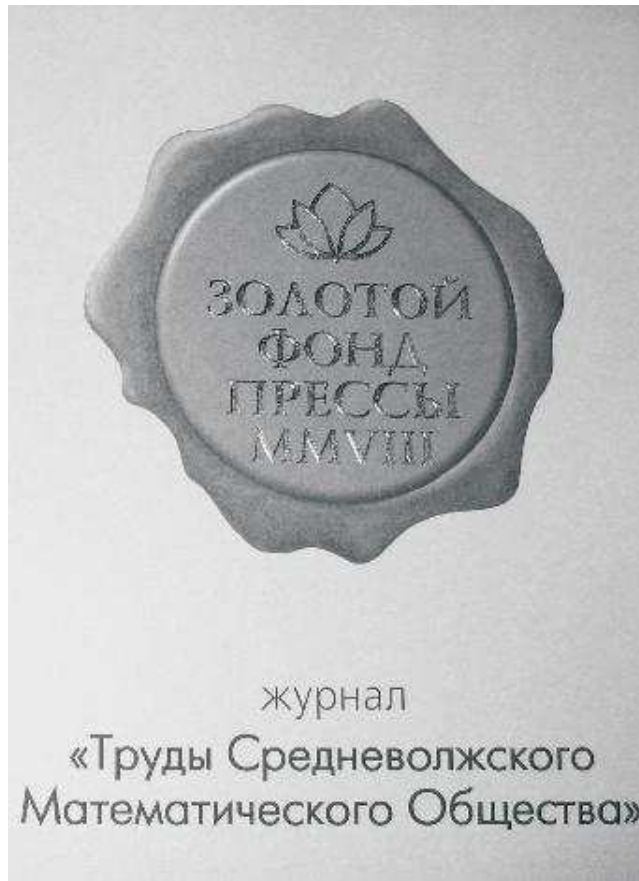
Алфавитный указатель авторов

Болотнов А. М.	150
Десяев Е. В.	111
Еделева Ю. П.	174
Круглов В. Е.	123
Лубышев Ф. В.	150
Пескова Е. Е.	159
Рекшинский М. С.	123
Снытников В. Н.	159
Сыромясов А. О.	174
Файрузов М. Э.	150
Шаманаев П. А.	111

Author Index

A. M. Bolotnov	150
Yu. P. Edeleva	174
E. V. Desyaev	111
V. E. Kruglov	123
F. V. Lubyshev	150
E. E. Peskova	159
M. S. Rekshinskiy	123
V. N. Snytnikov	159
A. O. Syromyasov	174
M. E. Fairuzov	150
P. A. Shamanaev	111

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 18.09.2023. Дата выхода в свет 30.09.2023. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 10,15 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 697.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования «Национальный
исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*
Translation: *A. O. Syromyasov*
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 18.09.2023. Date of publishing 30.09.2023. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 10,15.

Number of copies 100. Order no. 697.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

