

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ  
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  25  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  2

2023



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 25, № 2. 2023

DOI 10.15507/2079-6900.25.202302

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 25, NO. 2. 2023

DOI 10.15507/2079-6900.25.202302

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

# Журнал Средневолжского математического общества

## Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала: «Математика», «Прикладная математика и механика», «Математическое моделирование и информатика».

Журнал входит в Перечень рецензируемых научных изданий, в которых должны быть опубликованы основные научные результаты диссертаций на соискание ученой степени кандидата наук, на соискание ученой степени доктора наук по следующим научным специальностям (с 20.03.2023):

1.1.1. Вещественный, комплексный и функциональный анализ (физико-математические науки)

1.1.2. Дифференциальные уравнения и математическая физика (физико-математические науки)

1.1.5. Математическая логика, алгебра, теория чисел и дискретная математика (физико-математические науки)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (технические науки)

1.1.8. Механика деформируемого твердого тела (физико-математические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (технические науки)

1.1.9. Механика жидкости, газа и плазмы (физико-математические науки)

1.2.2. Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ (физико-математические науки)

Журнал входит в международные базы данных Scopus (с 9.05.2023) и Zentralblatt MATH (zbMATH), включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.



Материалы журнала доступны по лицензии Creative Commons Attribution 4.0 International License.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарева», 2023

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are: “Mathematics”, “Applied Mathematics and Mechanics”, “Mathematical modeling and computer science”.

The journal is included in the List of the leading peer-reviewed scientific journals and publications, where basic scientific results of dissertations for the degrees of Doctor and Candidate of Sciences in scientific specialties and their respective branches of science should be published. List of scientific specialties:

1.1.1. The theory of functions of a real and complex variable and functional analysis (physical and mathematical sciences)

1.1.2. Differential Equations and Mathematical Physics (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.5. Mathematical logic, algebra, number theory and discrete mathematics (physical and mathematical sciences)

1.1.6. Вычислительная математика (физико-математические науки)

1.1.8. Mechanics of a deformable solid body (technical sciences)

1.1.8. Mechanics of a Deformable Solid Body (Physical and Mathematical Sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (technical sciences)

1.1.9. Mechanics of liquid, gas and plasma (physical and mathematical sciences)

1.2.2. Mathematical modeling, numerical methods and complexes programs (physical and mathematical sciences)

The journal is included in the international database Scopus (from May 9, 2023), Zentralblatt MATH (zbMATH), DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is indexed in the database Russian Index of Scientific Citations (RISC), the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.



All the materials of the journal are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

© National Research Mordovia State University, 2023

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Губайдуллин Ирек Марсович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

**Дерюгин Юрий Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Золотых Николай Юрьевич** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** – академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Кузнецов Михаил Иванович** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

**Малышев Дмитрий Сергеевич** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

**Матус Петр Павлович** – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

**Морозкин Николай Данилович** – профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Починка Ольга Витальевна** – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** – профессор, доктор технических наук, первый проректор ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сидоров Николай Александрович** – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

**Старостин Николай Владимирович** – профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** – профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Aleksandr S. Andreev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Vyacheslav Z. Grines** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Irek M. Gubaydullin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Nikolay Yu. Zolotykh** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Mikhail I. Kuznetsov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

**Dmitry S. Malyshev** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

**Petr P. Matus** — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Nikolay D. Morozkin** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Prezident of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Olga V. Pochinka** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Petr V. Senin** — Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Lev A. Suharev** — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Nadezda G. Yarushkina** — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

**М. К. Баринава, Е. К. Шустова**

Об энергетической функции для прямого произведения дискретных динамических систем . . . . . 11

**О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, А. А. Тронов**

О глобальных экстремумах степенных функций Такаги . . . . . 22

**Е. Я. Гуревич, Е. К. Родионова**

Двухцветный граф каскадов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях 37

**С. И. Мартынов**

Анизотропный перенос диэлектрических частиц однородным электрическим полем в неоднородно нагретой вязкой жидкости . . . . . 53

**И. А. Сараев**

О сведении проблемы топологической классификации градиентно-подобных потоков к классификации полярных потоков . . . . . 62

---

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

---

К 75-ЛЕТИЮ ПЕТРА АЛЕКСАНДРОВИЧА ВЕЛЬМИСОВА . . . . . 76

---

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) . . . . . 77

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) . . . . . 81

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) . . . . . 85

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) . . . . . 91

---

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) . . . . . 95

Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) . . . . . 96

---

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

<b>M. K. Barinova, E. K. Shustova</b>	
Energy function for direct products of discrete dynamical systems . . . . .	11
<b>O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, A. A. Tronov</b>	
On global extrema of power Takagi functions . . . . .	22
<b>E. Ya. Gurevich, E. K. Rodionova</b>	
Bicolor Graph of Morse-Smale Cascades on manifolds of dimension three . . .	37
<b>S. I. Martynov</b>	
Anisotropic transport of dielectric particles by a uniform electric field in an inhomogeneously heated viscous fluid . . . . .	53
<b>I. A. Saraev</b>	
On the reduction of the topological classification of gradient-like flows problem to the classification of polar flows . . . . .	62

---

## MATHEMATICAL LIFE

---

TO THE 75TH ANNIVERSARY OF PETR ALEKSANDROVICH VELMISOV . . . . .	76
The rules of article design (in Russian) . . . . .	77
The rules of article design (in English) . . . . .	81
The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . .	85
The rules for article layout in the LaTeX system (in English) . . . . .	91
Author Index (In Russian) . . . . .	95
Author Index (in English) . . . . .	96

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.25.202302.11-21

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

## Об энергетической функции для прямого произведения дискретных динамических систем

М. К. Барина, Е. К. Шустова

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Данная работа посвящена построению энергетической функции — гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством динамической системы — для каскада, который является прямым произведением двух систем. Один из сомножителей представляет собой структурно устойчивый диффеоморфизм на двумерном торе, неблуждающее множество которого состоит из нульмерного нетривиального базисного множества без пар сопряженных точек и неподвижных источника и стока, а второй является тождественным отображением на вещественной прямой. Ранее было доказано, что если неблуждающее множество динамической системы содержит нульмерное базисное множество, как у рассматриваемого диффеоморфизма, то такая система не обладает энергетической функцией, а именно любая функция Ляпунова будет иметь критические точки вне цепно-рекуррентного множества. Для тождественного отображения энергетическая функция является константой на всей вещественной прямой. В данной работе показано, что отсутствие энергетической функции для одного из сомножителей не является достаточным условием отсутствия такой функции у прямого произведения динамических систем, то есть в некоторых случаях удается подобрать второй каскад таким образом, что прямое произведение будет обладать энергетической функцией.

**Ключевые слова:** прямое произведение, диффеоморфизм, цепно рекуррентное множество, энергетическая функция

**Для цитирования:** Барина М.К., Шустова Е.К. Об энергетической функции для прямого произведения дискретных динамических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 11–21. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.11-21>

*Информация об авторах:*

**Барина Марина Константиновна**, старший научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4406-583X>, [mkbarinova@yandex.ru](mailto:mkbarinova@yandex.ru)

**Шустова Евгения Константиновна**, студент, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4998-2186>, [ekshustova@gmail.com](mailto:ekshustova@gmail.com)

© М. К. Барина, Е. К. Шустова



MSC2020 37D20

# Energy Function for Direct Products of Discrete Dynamical Systems

M. K. Barinova, E. K. Shustova

*HSE University (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** This paper is devoted to the construction of an energy function, i.e. a smooth Lyapunov function, whose set of critical points coincides with the chain-recurrent set of a dynamical system — for a cascade that is a direct product of two systems. One of the multipliers is a structurally stable diffeomorphism given on a two-dimensional torus, whose non-wandering set consists of a zero-dimensional non-trivial basic set without pairs of conjugated points and without fixed source and sink, and the second one is an identical mapping on a real axis. It was previously proved that if a non-wandering set of a dynamical system contains a zero-dimensional basic set, as the diffeomorphism under consideration has, then such a system does not have an energy function, namely, any Lyapunov function will have critical points outside the chain-recurrent set. For an identical mapping, the energy function is a constant on the entire real line. In this paper, it is shown that the absence of an energy function for one of the multipliers is not a sufficient condition for the absence of such a function for the direct product of dynamical systems, that is, in some cases it is possible to select the second cascade in such a way that the direct product will have an energy function.

**Keywords:** Direct product, diffeomorphism, chain recurrent set, energy function

**For citation:** M. K. Barinova, E. K. Shustova. Energy Function for Direct Products of Discrete Dynamical Systems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:2(2023), 11–21. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.11-21>

*About the authors:*

**Marina K. Barinova**, Senior Research Fellow, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4406-583X>, [mkbarinova@yandex.ru](mailto:mkbarinova@yandex.ru)

**Evgenia K. Shustova**, student, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4998-2186>, [ekshustova@gmail.com](mailto:ekshustova@gmail.com)

## 1. Введение

Хорошо известно, что дискретные динамические системы, в отличие от непрерывных, не всегда обладают энергетической функцией – гладкой функцией Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством динамической системы. На сегодняшний день критерий существования такой функции не известен. Еще в 1977 г. Д. Пикстон построил пример диффеоморфизма Морса-Смейла, не обладающего энергетической функцией. Позднее был найден класс каскадов с хаотической гиперболической динамикой, у которых нет энергетической функции.

Пусть  $M$  — гладкое  $n$ -многообразие и  $f : M \rightarrow M$  — диффеоморфизм с цепно-рекуррентным<sup>1</sup> множеством  $R_f$ . Функцией Ляпунова [1] для каскада  $f : M \rightarrow M$  называется непрерывная функция  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , обладающая следующими свойствами:

- 1) если  $x \notin R_f$ , то  $\varphi(x) > \varphi(f(x))$ , т. е. функция Ляпунова убывает вдоль орбит вне цепно-рекуррентного множества;
- 2) если  $x, y \in R_f$ , то  $\varphi(x) = \varphi(y)$  тогда и только тогда, когда  $x \sim y$ ;
- 3)  $\varphi(R_f)$  — нигде не плотное подмножество  $\mathbb{R}$ .

В силу результатов Ч. Конли [1] такая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название «Фундаментальная теорема динамических систем». Гладкая функция Ляпунова, множество критических точек<sup>2</sup> которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы, называется *энергетической функцией* [2].

Вопросом существования энергетических функций занимались К. Мейер [2], С. Смейл [3], Дж. Фрэнкс [4], М. Шуб [5], Ф. Такенс [6]. На настоящий момент известно, что энергетическая функция есть у любого потока, заданного на замкнутой поверхности ([4]). Для дискретных динамических систем выделено несколько классов каскадов, обладающих энергетической функцией, как с регулярной динамикой, так и с хаотической [7–9]. Также были найдены классы диффеоморфизмов, у которых не существует энергетических функций [10–11]. Более подробную информацию по данной тематике можно найти в обзоре [12].

Пусть  $M = M_1 \times M_2$ , где  $M_1$  и  $M_2$  — гладкие многообразия. Тогда диффеоморфизм  $f : M \rightarrow M$  называется *прямым произведением* диффеоморфизмов  $f_1 : M_1 \rightarrow M_1$  и  $f_2 : M_2 \rightarrow M_2$  и обозначается  $f = f_1 \times f_2$ , если  $f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ , где  $x_i \in M_i$ . Многие свойства динамических систем переносятся на их прямые произведения, например, если диффеоморфизмы  $f_1$  и  $f_2$  структурно устойчивые или  $\Omega$ -устойчивые<sup>3</sup>, то и  $f$  является таковым [13]. Также, если каскады  $f_1$  и  $f_2$  обладают энергетическими функциями и хотя бы у одного из них конечное число цепных компонент, то и у  $f$  есть энергетическая функция.

Рассмотрим прямое произведение структурно устойчивого диффеоморфизма  $f_1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , заданного на двумерном торе  $\mathbb{T}^2$ , неблуждающее множество которого содержит нульмерное нетривиальное базисное множество без пар сопряженных точек (более подробное описание диффеоморфизма  $f_1$  будет дано в разделе 2.), и тождественного диффеоморфизма  $f_2 = Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Из работы [11] следует факт отсутствия энергетической функции у диффеоморфизма  $f_1$ , а энергетическая функция для диффеоморфизма  $f_2$  — константа на  $\mathbb{R}$ . Таким образом, сформулируем следующую теорему.

**Т е о р е м а 1.1.** *Пусть  $f_1$  — структурно устойчивый диффеоморфизм двумерного тора, неблуждающее множество которого состоит из источника, стока и нульмерного базисного множества без пар сопряженных точек. Тогда существует*

<sup>1</sup> $\varepsilon$ -цепью длины  $n$ , соединяющей точку  $x$  с точкой  $y$  для каскада  $f : M \rightarrow M$  называется последовательность  $x = x_0, \dots, x_n = y$  точек в  $M$  такая, что  $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$  для  $1 \leq i \leq n$ . Точка  $x \in M$  называется *цепно рекуррентной* для каскада  $f$ , если для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $n$ , зависящее от  $\varepsilon$ , и  $\varepsilon$ -цепь длины  $n$ , соединяющая точку  $x$  с ней самой. На множестве  $R_f$  можно ввести отношение эквивалентности  $\sim$  следующим образом:  $x \sim y$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $\varepsilon$ -цепь, соединяющая точку  $x$  с точкой  $y$ , и  $\varepsilon$ -цепь, соединяющая точку  $y$  с точкой  $x$ . Две такие точки называются *цепно эквивалентными*, класс эквивалентности называется *цепной компонентой*, множество всех цепно рекуррентных точек называется *цепно-рекуррентным множеством* и обозначается  $R_f$ .

<sup>2</sup>Точка  $x \in M$  называется *критической* для функции  $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ , если  $\nabla\varphi(x) = 0$ .

<sup>3</sup>Структурная устойчивость ограничений систем на неблуждающие множества называется  $\Omega$ -устойчивостью.

диффеоморфизм  $f_2$  такой, что прямое произведение  $f_1 \times f_2$  обладает энергетической функцией.

## 2. Диффеоморфизм с нульмерным базисным множеством

В данном разделе мы опишем пример диффеоморфизма с нульмерным нетривиальным базисным множеством без пар сопряженных точек и приведем некоторые свойства таких диффеоморфизмов.

Рассмотрим диффеоморфизм Аносова  $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , индуцированный линейным отображением плоскости  $L_A : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , заданным с помощью гиперболической матрицы  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$  с собственными значениями  $\lambda$  и  $1/\lambda$ , где  $\lambda > 1$ .

Выберем две различные неподвижные точки  $p$  и  $q$  диффеоморфизма  $f_A$  (если  $f_A$  не имеет двух неподвижных точек, достаточно рассмотреть в качестве матрицы  $A$  некоторую ее степень). Чтобы получить диффеоморфизм  $f_1$  с нульмерным седловым базисным множеством, проведем «хирургические операции Смейла» [3] в непересекающихся окрестностях  $U_p$  и  $U_q$  неподвижных точек  $p$  и  $q$  таким образом, чтобы в результате в  $U_p$  получился гиперболический источник  $\alpha$ , а в  $U_q$  — гиперболический сток  $\omega$ . Кроме  $\alpha$  и  $\omega$  цепно-рекуррентное множество диффеоморфизма  $f_1$  будет содержать нульмерное седловое множество  $\Sigma$  без пар сопряженных точек<sup>4</sup>. Множество  $\Sigma$  при этом будет иметь локальную структуру прямого произведения канторовского множества на самого себя (см. рис. 2.1).

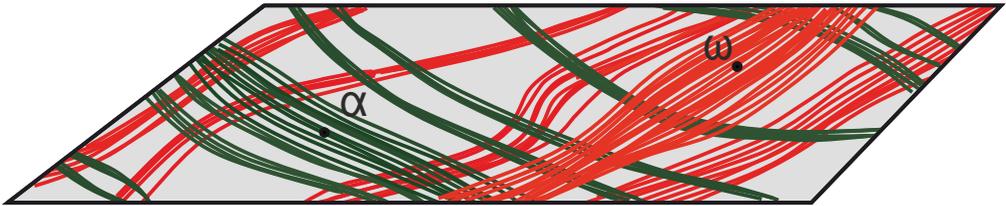


Рис. 2.1. Диффеоморфизм с нульмерным нетривиальным базисным множеством

Fig. 2.1. Diffeomorphism with a zero-dimensional nontrivial basic set

Каскады с такой динамикой изучались в работе [8]. Приведем некоторые свойства диффеоморфизма  $f_1$ . При таком построении цепно-рекуррентное множество  $R_f$  является гиперболическим. Более того, диффеоморфизм  $f_1$  будет структурно устойчивым [12]. Для каждой точки  $x \in \mathbb{T}^2$  можно определить устойчивое и неустойчивое многообразия  $W_x^s$  и  $W_x^u$  следующим образом:

$$W_x^s = \{y \in \mathbb{T}^2 \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0\},$$

$$W_x^u = \{y \in \mathbb{T}^2 \mid \lim_{n \rightarrow +\infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

Из теоремы о спектральном разложении [14] следует, что

$$\mathbb{T}^2 = W_\alpha^u \cup \overline{W_\Sigma^u} = W_\omega^s \cup \overline{W_\Sigma^s}.$$

<sup>4</sup>Различные точки  $x, y \in \Lambda$  называются парой сопряженных точек, если  $(x, y) \in (W_x^s \cap W_y^u)$ ,  $(x, y)^s \cap \Lambda = \emptyset$  и  $(x, y)^u \cap \Lambda = \emptyset$ , где  $\Lambda$  — базисные множества.

В силу фундаментальной теоремы динамических систем Ч. Конли данная система обладает функцией Ляпунова. Однако в работе [11] было доказано, что  $f_1$  не обладает энергетической функцией, т. е. множество критических точек любой функции Ляпунова для данного диффеоморфизма не совпадает с цепно-рекуррентным множеством.

### 3. Построение энергетической функции

Рассмотрим прямое произведение диффеоморфизма  $f_1 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  на тождественный диффеоморфизм  $f_2 = Id : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . В данном разделе мы построим энергетическую функцию для диффеоморфизма  $f = f_1 \times f_2 : M \rightarrow M$ , где  $M = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ . Для удобства мы будем использовать в качестве обозначения точки на многообразии  $M$  либо символ  $a$ , либо  $(t, z)$ , подразумевая, что  $a = (t, z)$ ,  $a \in M$ ,  $t \in \mathbb{T}^2$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

Напомним, что цепно-рекуррентное множество диффеоморфизма  $f_1$  состоит из источника  $\alpha$ , стока  $\omega$  и нульмерного седлового множества  $\Sigma$ , а у диффеоморфизма  $f_2$  всего одна цепная компонента, совпадающая с  $\mathbb{R}$ . Тогда цепные компоненты прямого произведения  $f = f_1 \times f_2$  — это  $\alpha \times \mathbb{R}$ ,  $\omega \times \mathbb{R}$  и  $\Sigma \times \mathbb{R}$ , обозначим их через  $R_\alpha$ ,  $R_\omega$  и  $R_\Sigma$  соответственно. Положим также  $W_{R_\alpha}^s = W_\alpha^s \times \mathbb{R}$ ,  $W_{R_\omega}^s = W_\omega^s \times \mathbb{R}$  и  $W_{R_\Sigma}^s = W_\Sigma^s \times \mathbb{R}$ .

Построение энергетической функции разобьем на 3 шага.

#### 3.1. Шаг 1

Сначала построим гладкую функцию  $\Phi : M \rightarrow [0, 1]$  со следующими свойствами:

- 1)  $\Phi|_{W_{R_\alpha}^u}$  является энергетической функцией для ограничения диффеоморфизма  $f$  на  $W_{R_\alpha}^u$ ;
- 2)  $\Phi(a) = 1$  для всех  $a \in R_\alpha$ ;
- 3)  $\Phi(a) = 0$  для всех  $a \in \overline{W_{R_\Sigma}^u}$ .
- 4) Функция  $\Phi(a)$  не зависит от  $z$ , где  $a = (t, z)$ ,  $t \in \mathbb{T}^2$ ,  $z \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $h_\alpha : W_\alpha^u \rightarrow \mathbb{R}^2$  — диффеоморфизм, сопрягающий  $f_1|_{W_\alpha^u}$  с линейным растяжением плоскости  $L_\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $L(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ , то есть  $h_\alpha \circ f = L_\alpha \circ h_\alpha$ .

Функция  $\varphi_{L_\alpha} : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ , определенная формулой

$$\varphi_{L_\alpha}(x, y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2, & x^2 + y^2 \leq 1/4, \\ \frac{3}{4}e^{(1-4x^2-4y^2)/3}, & x^2 + y^2 > 1/4, \end{cases}$$

является энергетической функцией для диффеоморфизма  $L_\alpha$ . Тогда функция  $\varphi_{cont} : \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, 1]$

$$\varphi_{cont}(t) = \begin{cases} \varphi_{L_\alpha} \circ h_\alpha, & t \in W_\alpha^u, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

будет энергетической функцией для  $f_1|_{W_\alpha^u}$  и непрерывной на всём  $\mathbb{T}^2$ . По [8, Лемма 5] существует функция  $u_\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  такая, что  $\varphi = u_\alpha \circ \varphi_{cont}$  — энергетическая функция для  $f_1|_{W_\alpha^u}$ , но уже гладкая на всём  $\mathbb{T}^2$  (см. рисунок 3.1).

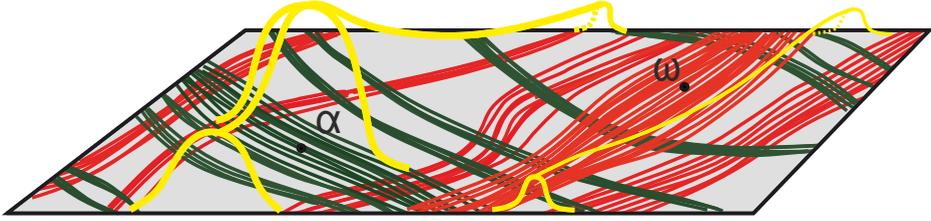


Рис. 3.1. График функции  $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, 1]$

Fig. 3.1. Function  $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow [0, 1]$

Тогда функция  $\Phi(t, z) = \varphi(t)$  для всех  $t \in \mathbb{T}^2$  и  $z \in \mathbb{R}$  — искомая.

### 3.2. Шаг 2

Построим гладкую функцию  $\Psi : M \rightarrow [0, 1]$  со следующими свойствами:

- 1)  $\Psi|_{W_{R_\omega}^s}$  — энергетическая функция для  $f|_{W_{R_\omega}^s}$ ;
- 2)  $\Psi(a) = 0$  для всех  $a \in R_\omega$ ;
- 3)  $\Psi(a) = 1$  для всех  $a \in \overline{W_{R_\Sigma}^s}$ ;
- 4)  $\Psi'_z(t, z) \neq 0$  для всех  $(t, z) \in W_{R_\omega}^s \setminus R_\omega$ .

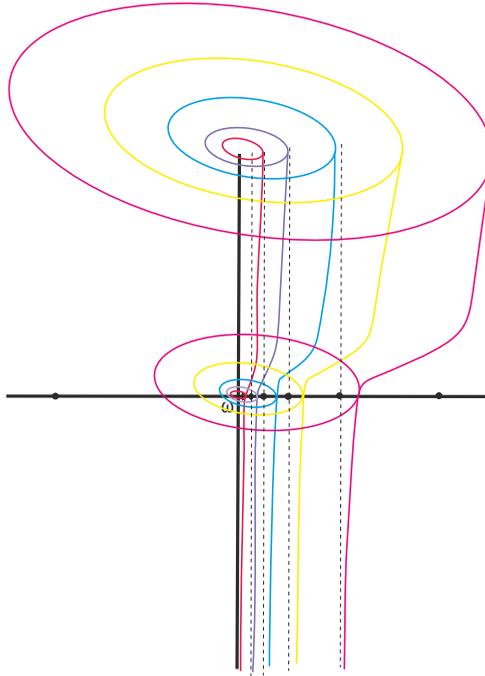
Пусть  $h_{shift} : W_{R_\omega}^s \setminus R_\omega \rightarrow S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = S^1 \times \mathbb{R}^2$  — диффеоморфизм, такой что  $h_{shift} \circ (f_1 \times f_2) = (L_{shift} \times f_2) \circ h_{shift}$ , где  $L_{shift} : (s, x) \rightarrow (s, x - 1)$  для всех  $s \in S^1$  и  $x \in \mathbb{R}$ . Рассмотрим расслоение  $\mathbb{R}^2$  на кривые вида  $l_c = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in (c - 1, c + 1), y = \text{tg} \frac{\pi(x - c)}{2}\}$  и функцию  $\psi : S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$ , определенную формулой  $\psi(s, x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg c$ ,  $s \in S^1$ ,  $(x, y) \in l_c$  (см. Рис. 3.2).

Непосредственно проверяется, что функция  $\psi$  — энергетическая для диффеоморфизма  $L_{shift} \times f_2$ . Тогда функция  $\psi_{cont} : M \rightarrow [0, 1]$

$$\psi_{cont}(a) = \begin{cases} \psi \circ h_{shift}, & a \in W_{R_\omega}^s \setminus R_\omega, \\ 0, & a \in R_\omega, \\ 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

будет энергетической функцией для  $f|_{W_{R_\omega}^s}$  и непрерывной на  $M$ . Действительно, множество  $W_{R_\omega}^s$  содержит единственную цепную компоненту  $R_\omega$  и  $\Psi(a) = 0$  для всех  $a \in R_\omega$ . Теперь покажем убывание вдоль траектории вне цепно рекуррентного множества, т. е. если  $a \notin R_\omega$ , то  $\psi_{cont}(a) > \psi_{cont}(f(a))$ .

- $\psi_{cont}(a) = \psi(h_{shift}(a)) = \psi(s, x, y)$ , где  $h_{shift}(a) = (s, x, y)$ ;
- $\psi_{cont}(f(a)) = \psi_{cont}(h_{shift}(f(a))) = \psi((L_{shift} \times f_2)(h_{shift}(a))) = \psi((L_{shift} \times f_2)(s, x, y)) = \psi(L_{shift}(s, x), f_2(y)) = \psi(s, x - 1, y)$ ;
- $\psi(s, x, y) > \psi(s, x - 1, y)$ , т. к.  $\psi(s, x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg c_1$ , где  $c_1 = x - \frac{2}{\pi} \arctg y$ , и  $\psi(s, x - 1, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg c_2$ , где  $c_2 = x - 1 - \frac{2}{\pi} \arctg y$ . Отсюда  $c_1 > c_2$ .



**Рис. 3.2.** Линии уровня функции  $\psi : S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  в множестве  $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$ , если точка  $(s, x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$  соответствует точке  $(\lambda^x, 2\pi s, y) \in \mathbb{R}^3 \setminus Oz$  в цилиндрических координатах

**Fig. 3.2.** Curve lines of the function  $\psi : S^1 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, 1]$  in the set  $\mathbb{R}^3 \setminus Oz$  if the point  $(s, x, y) \in S^1 \times \mathbb{R}^2$  corresponds to the point  $(\lambda^x, 2\pi s, y) \in \mathbb{R}^3 \setminus Oz$  in cylindrical coordinates

Таким образом, функция  $\psi_{cont}|_{W_{R_\omega}^s}$  убывает вдоль траекторий вне цепно рекуррентного множества диффеоморфизма  $f|_{W_{R_\omega}^s}$ .

Из [8] следует, что существует функция  $u_\omega : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ , такая что  $\Psi = u_\omega \circ \psi_{cont}$  будет энергетической функцией для  $f|_{W_{R_\omega}^s}$  и гладкой на  $M$ . Заметим, что  $u_\omega'(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x \in \{0, 1\}$ . Для того, чтобы  $\Psi$  оказалась искомой, необходимо проверить выполнение пункта 4, т. е. то, что  $\Psi'_z(t, z) \neq 0$  для всех  $(t, z) \in W_{R_\omega}^s \setminus R_\omega$ .

$$\Psi'_z(t, z) = (u_\omega \circ \psi_{cont}(t, z))'_z = u_\omega' \psi_{cont}'_z(t, z) = u_\omega' \psi'_y(s, x, y) = u_\omega' \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg(x - \frac{2}{\pi} \arctg(y)) \right)'_y = u_\omega' \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1 + (x - \frac{2}{\pi} \arctg(y))^2} \cdot \left( -\frac{2}{\pi} \right) \cdot \frac{1}{1 + y^2} \neq 0 \text{ для всех } (t, z) \in W_{R_\omega}^s \setminus R_\omega.$$

### 3.3. Шаг 3

Докажем, что функция  $\Theta = \Phi + \Psi$  — энергетическая для диффеоморфизма  $f$ . Для этого проверим выполнение следующих условий:

- 1)  $\Theta$  — функция Ляпунова для  $f$ ;
- 2)  $\Theta$  — гладкая;

- 3) Множество критических точек  $Cr(\Theta)$  совпадает с цепно-рекуррентным множеством диффеоморфизма  $f \times g$ .

Напомним, что цепно рекуррентное множество  $R_f$  диффеоморфизма  $f$  состоит из трех цепных компонент  $R_\omega$ ,  $R_\alpha$  и  $R_\Sigma$ . Для удобства будем использовать следующие обозначения:  $B_{R_\omega} = W_{R_\omega}^s \setminus R_\omega$ ,  $B_{R_\alpha} = W_{R_\alpha}^u \setminus R_\alpha$ . Тогда  $M = R_\alpha \sqcup R_\omega \sqcup R_\Sigma \sqcup (B_{R_\alpha} \cup B_{R_\omega})$ . Заметим, что  $B_{R_\alpha} \cap B_{R_\omega} \neq \emptyset$ .

1. Докажем сначала убывание вдоль траекторий вне цепно рекуррентного множества. Если  $a \notin R_f$ , то либо  $a \in B_{R_\omega}$ , либо  $a \in B_{R_\alpha}$ . В первом случае  $\Phi(a) \geq \Phi(f(a))$ , а  $\Psi(a) > \Psi(f(a))$ . Во втором случае  $\Phi(a) > \Phi(f(a))$ , а  $\Psi(a) \geq \Psi(f(a))$ . Таким образом, если  $a \notin R_f$ , то  $\Theta(a) > \Theta(f(a))$ .

Заметим, что по построению  $\Theta(R_\omega) = 0$ ,  $\Theta(R_\alpha) = 2$  и  $\Theta(R_\Sigma) = 1$ .

2. Функция  $\Theta$  – гладкая как линейная комбинация гладких функций.

3. Покажем, что градиент функции  $\Theta$  обращается в ноль только в цепно-рекуррентных точках.

По построению, функция  $\Phi(t, z) = \varphi(t)$ , где  $t \in \mathbb{T}^2$ , т. е. она не зависит от координаты  $z$  и  $\Phi(t, z)'_z = 0$  для любого  $z \in \mathbb{R}$ , а значит, ее градиент имеет вид:  $grad \Phi(t, z) = (grad \varphi(t), 0)$ , где  $grad \varphi(t) \neq 0$  тогда и только тогда, когда  $t \in W_\alpha^u \setminus \alpha$ , а значит,  $grad \Phi(t, z) \neq 0$  тогда и только тогда, когда  $(t, z) \in B_{R_\alpha}$ . Конструкция функции  $\Psi(t, z)$  такова, что  $grad \Psi(t, z) \neq 0$  и  $\Psi'_z(t, z) \neq 0$  тогда и только тогда, когда  $(t, z) \in B_{R_\omega}$ .

Очевидно, что если  $(t, z) \in R_f$ , то  $grad \Theta(t, z) = grad \Phi(t, z) + grad \Psi(t, z) = 0$ . Пусть теперь  $(t, z) \notin R_f$ . Тогда может быть один из трех вариантов:

- $(t, z) \in B_{R_\alpha} \setminus B_{R_\omega}$ , тогда  $grad \Phi(t, z) \neq 0$ ,  $grad \Psi(t, z) = 0$ , а значит,  $grad \Theta(t, z) \neq 0$ ;
- $(t, z) \in B_{R_\omega} \setminus B_{R_\alpha}$ , тогда  $grad \Phi(t, z) = 0$ ,  $grad \Psi(t, z) \neq 0$ , а значит,  $grad \Theta(t, z) \neq 0$ ;
- $(t, z) \in B_{R_\omega} \cap B_{R_\alpha}$ , тогда  $\Phi'_z(t, z) = 0$ ,  $\Psi'_z \neq 0$ , а значит,  $grad \Theta(t, z) \neq 0$ .

Таким образом,  $\Theta$  – энергетическая функция для диффеоморфизма  $f$ .

#### 4. Заключительные замечания

Энергетическую функцию в данном примере удастся построить за счет того, что цепно-рекуррентное множество для тождественного диффеоморфизма – это вся действительная прямая. В действительности вместо  $f_2$  можно использовать любой диффеоморфизм с таким свойством, например,  $f_2(x) = -x$ . Возникает вопрос, какими свойствами должен обладать диффеоморфизм  $f_2$ , чтобы для прямого произведения  $f_1 \times f_2$  не существовало энергетической функции, при условии, что диффеоморфизм  $f_1$  ее не имеет. Имеет место следующая гипотеза: диффеоморфизм  $f_2$  должен иметь хотя бы одну компактную цепную компоненту.

**Благодарности.** Исследование динамики диффеоморфизмов рассматриваемого класса поддержано грантом РНФ (проект 21-11-00010).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Conley C. Isolated invariant sets and Morse index. Colorado: Am. Math. Soc., 1978. 89 p.

2. Meyer K. R. Energy functions for Morse–Smale systems // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90, No. 4. pp. 1031–1040. DOI: <https://doi.org/10.2307/2373287>
3. Smale S. On gradient dynamical systems // Annals Math. 1961. Vol. 74, No. 1. pp. 199–206. DOI: <https://doi.org/10.2307/1970311>
4. Franks J. Nonsingular Smale flow on  $S^3$  // Topology. 1985. Vol. 24, No. 3. pp. 265–282. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(85\)90002-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(85)90002-3)
5. Shub M. Morse-Smale diffeomorphisms are unipotent on homology // Dynamical Systems. 1973. pp. 489–491. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50040-0>
6. Takens F. Tolerance stability // Dynamical systems -Warwick 1974 (Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974; presented to E. C. Zeeman on his fiftieth birthday), Lecture Notes in Math., vol. 468, Springer, 1975, p. 293-304.
7. Grines V. Z., Laudenbach F., Pochinka O. V. Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. Vol. 278. pp. 34–48. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543812060041>
8. Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B. Existence of an energy function for three-dimensional chaotic “sink-source” cascades // Chaos. 2021. Vol. 31, No. 6. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0026293>
9. Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Построение энергетической функции для  $A$ -диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Vol. 17, No. 3. pp. 12–17.
10. Pixton D. Wild unstable manifolds // Topology. 1977. Vol. 16, No. 2. pp. 167–172. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(77\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3)
11. Barinova M. On existence of an energy function for  $\omega$ -stable surface diffeomorphisms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, No. 14. pp. 3317–3323. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222020020>
12. Гринес В. З., Починка О. В. Построение энергетических функций для омега-устойчивых диффеоморфизмов на 2- и 3-многообразиях // Современная математика. Фундаментальные направления. 2017. Т. 63, № 2. С. 191–222. DOI: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222>
13. Баринова М. К., Шустова Е. К. Динамические свойства прямых произведений дискретных динамических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 21–30. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30>
14. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // Успехи мат. наук. 1970. Т. 25, № 1. pp. 113–185.

Поступила 27.01.2023; доработана после рецензирования 04.03.2023;  
принята к публикации 25.05.2023

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

## REFERENCES

1. C. Conley, “Isolated invariant sets and Morse index”, 1978, 89 p.
2. K. Meyer, “Energy functions for Morse–Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031—1040. DOI: <https://doi.org/10.2307/2373287>
3. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Annals Math.*, **74**:1 (1961), 199—206. DOI: <https://doi.org/10.2307/1970311>
4. J. Franks, “Nonsingular Smale flow on  $S^3$ ”, *Topology*, **24**:3 (1985), 265—282. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(85\)90002-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(85)90002-3)
5. M. Shub, “Morse-Smale diffeomorphisms are unipotent on homology”, *Dynamical Systems*, 1973, 489-491. DOI: <https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50040-0>
6. F. Takens, “Tolerance stability”, *Dynamical systems - Warwick 1974* (Proc. Sympos. Appl. Topology and Dynamical Systems, Univ. Warwick, Coventry, 1973/1974; presented to E. C. Zeeman on his fiftieth birthday, Lecture Notes in Math., vol. 468, Springer, 1975), 1974, 293-304.
7. V. Z. Grines, F. Laudenbach, O. V. Pochinka, “Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **278** (2012), 27–40. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0081543812060041>
8. M. Barinova, V. Grines, O. Pochinka, B. Yu, “Existence of an energy function for three-dimensional chaotic “sink-source” cascades”, *Chaos*, **31**:6 (2021). DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0026293>
9. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, “Construction of an energy function for A-diffeomorphisms of two-dimensional non-wandering sets on 3-manifolds”, *Zhurnal SVMO*, **17**:3 (2015), 12–17.
10. D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167—172. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(77\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3)
11. M. Barinova, “On existence of an energy function for  $\omega$ -stable surface Diffeomorphisms”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:14 (. 2021), 3317–3323. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080222020020>
12. V. Grines, O. Pochinka, “Constructing energy function for certain classes of omega-stable and diffeomorphisms on manifolds of dimension 2 and 3”, *Journal of Mathematical Sciences*, **63**:2 (2017), 191–222 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.22363/2413-3639-2017-63-2-191-222>

13. M. K. Barinova, E. K. Shustova, “Dynamical properties of direct products of discrete dynamical systems”, *Zhurnal SVMO*, **24**:1 (2022), 21-30 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30>
14. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Russian Mathematical Surveys*, **25**:1 (1970), 113–185 (In Russ.).

*Submitted 27.01.2023; Revised 04.03.2023; Accepted 25.05.2023*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202302.22-36

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.518

## О глобальных экстремумах степенных функций Такаги

О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, А. А. Тронов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

**Аннотация.** Степенные функции Такаги  $S_p$  по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги, описанной в 1903 г. Функции  $S_p$  имеют один вещественный параметр  $p > 0$  и задаются на числовой прямой с помощью ряда  $S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (S_0(2^n x)/2^n)^p$ , где  $S_0(x)$  — расстояние между точкой  $x \in \mathbb{R}$  и ближайшей к ней целой точкой. Мы показываем, что при любом  $p > 0$  функции  $S_p$  на  $\mathbb{R}$  являются всюду непрерывными, но нигде не дифференцируемыми. Далее для степенных функций Такаги мы выводим функциональные уравнения. С их помощью можно, в частности, вычислять значения  $S_p(x)$  в рациональных точках  $x$ . Кроме того, при всех значениях параметра  $p$  из интервала  $(0; 1)$  мы находим глобальные экстремумы функций  $S_p$ , а также точки, где они достигаются. При этом оказывается, что глобальный максимум функций  $S_p$  равен  $2^p/(3^p(2^p - 1))$  и достигается только в точках вида  $(q + 1/3)$  и  $(q + 2/3)$ , где  $q$  — произвольное целое число. Глобальный минимум функций  $S_p$  равен 0 и достигается только в целых точках. Используя результаты о глобальных экстремумах, мы получаем двусторонние оценки для функций  $S_p$  и находим точки, в которых эти оценки достигаются.

**Ключевые слова:** степенная функция Такаги, непрерывность, нигде не дифференцируемость, функциональные уравнения, глобальный экстремум

**Для цитирования:** Галкин О. Е., Галкина С. Ю., Тронов А. А. О глобальных экстремумах степенных функций Такаги // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 22–36. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.22-36>

Об авторах:

**Галкин Олег Евгеньевич**, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2085-572X>, [olegegalkin@ya.ru](mailto:olegegalkin@ya.ru)

**Галкина Светлана Юрьевна**, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2476-2275>, [svetlana.u.galkina@mail.ru](mailto:svetlana.u.galkina@mail.ru)

**Тронов Антон Александрович**, студент магистратуры факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0009-0000-6454-1226>, [tronovaa@yandex.ru](mailto:tronovaa@yandex.ru)

© О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, А. А. Тронов



MSC2020 26A15, 26A16, 26A27

## On global extrema of power Takagi functions

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, A. A. Tronov

*National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** By construction, power Takagi functions  $S_p$  are similar to Takagi's continuous nowhere differentiable function described in 1903. These real-valued functions  $S_p(x)$  have one real parameter  $p > 0$ . They are defined on the real axis  $\mathbb{R}$  by the series  $S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (S_0(2^n x)/2^n)^p$ , where  $S_0(x)$  is the distance from real number  $x$  to the nearest integer number. We show that for every  $p > 0$ , the functions  $S_p$  are everywhere continuous, but nowhere differentiable on  $\mathbb{R}$ . Next, we derive functional equations for Takagi power functions. With these, it is possible, in particular, to calculate the values  $S_p(x)$  at rational points  $x$ . In addition, for all values of the parameter  $p$  from the interval  $(0; 1)$ , we find the global extrema of the functions  $S_p$ , as well as the points where they are reached. It turns out that the global maximum of  $S_p$  equals to  $2^p/(3^p(2^p - 1))$  and is reached only at points  $q + 1/3$  and  $q + 2/3$ , where  $q$  is an arbitrary integer. The global minimum of the functions  $S_p$  equals to 0 and is reached only at integer points. Using the results on global extremes, we obtain two-sided estimates for the functions  $S_p$  and find the points at which these estimates are reached.

**Keywords:** power Takagi function, continuity, nowhere differentiability, functional equations, global extrema

**For citation:** O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, A. A. Tronov. On global extrema of power Takagi functions. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:2(2023), 22–36. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.22-36>

*About the authors:*

**Oleg E. Galkin**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2085-572X>, [olegegalkin@ya.ru](mailto:olegegalkin@ya.ru)

**Svetlana Yu. Galkina**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2476-2275>, [svetlana.u.galkina@mail.ru](mailto:svetlana.u.galkina@mail.ru)

**Anton A. Tronov**, master's student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0009-0000-6454-1226>, [tronovaa@yandex.ru](mailto:tronovaa@yandex.ru)

### 1. Введение

Данная статья посвящена изучению степенных функций Такаги  $S_p(x)$ . Эти функции по конструкции аналогичны непрерывной, но нигде не дифференцируемой функции Такаги  $T(x)$ , описанной в 1903 г. в работе [1]. Они имеют один вещественный параметр  $p > 0$  и задаются следующим образом:

**Определение 1.1.** Степенной функцией Такаги с параметром (показателем)  $p > 0$  мы называем вещественнозначную функцию  $S_p$ , задаваемую на числовой оси  $\mathbb{R}$  с помощью равенства

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{S_0(2^n x)}{2^n} \right)^p = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n x)}{2^{np}}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

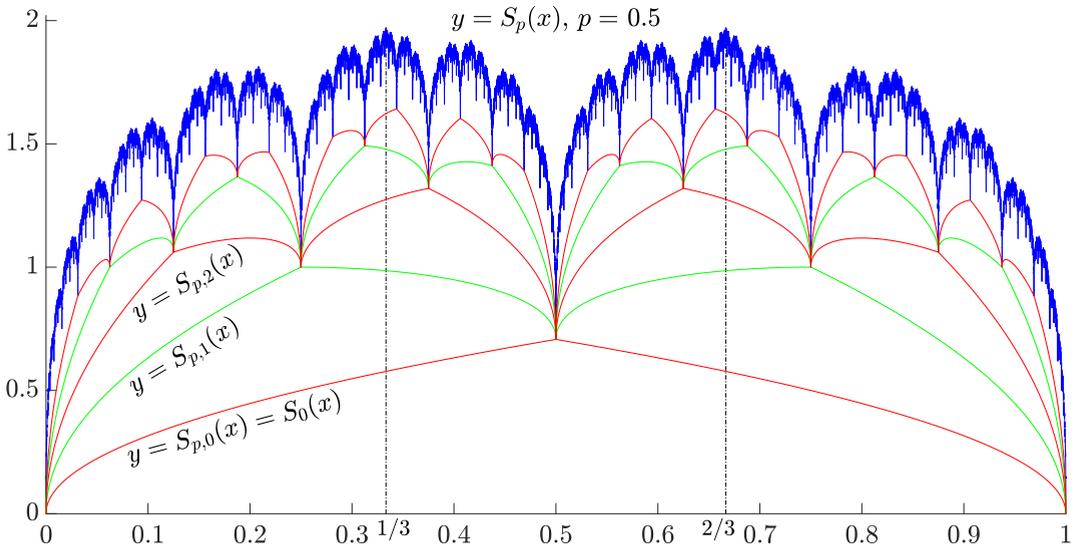
где  $S_0(x) = |x - [x + 1/2]| = |\{x + 1/2\} - 1/2| = \rho(x, \mathbb{Z}) = \inf_{q \in \mathbb{Z}} |x - q|$  — расстояние между точкой  $x$  и ближайшей к ней целой точкой;  $[y]$  — целая часть числа  $y \in \mathbb{R}$ ;  $\{y\}$  — дробная часть числа  $y$ .

При  $p = 1$  функция  $S_p(x)$  совпадает с функцией Такаги  $T(x)$  из [1].

Частичные суммы ряда (1.1) будем обозначать через  $S_{p,m}(x)$ :

$$S_{p,m}(x) = \sum_{k=0}^m \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}}.$$

**Иллюстрация 1.** Графики степенных функций Такаги  $y = S_p(x)$ , изображенные линией синего цвета, можно увидеть далее на двух рисунках: во-первых, при  $p = 0,5$  — на Рис. 1.1, вместе с графиками частичных сумм  $y = S_{p,n}(x)$  при  $n = 0, 1, 2, 3, 4$ , изображенными линиями красного либо зеленого цвета; во-вторых, при  $p = 0,7$  — на Рис. 4.1, вместе с графиками  $y = S_{p,3}(x)$  и  $y = \tilde{S}_{p,3}(x)$  (см. предложение 4.1), изображенными линиями красного и зеленого цветов соответственно. Вертикальные пунктирные линии на этих рисунках указывают положение двух точек глобального максимума на отрезке  $[0; 1]$ :  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$  (см. далее теорему 4.1).



**Рис. 1.1.** График функции  $y = S_p(x)$  при  $p = 0,5$

**Fig. 1.1.** Graph of the function  $y = S_p(x)$  for  $p = 0,5$

Функции  $S_p$  при любом  $p > 0$  являются непрерывными, но нигде не дифференцируемыми на  $\mathbb{R}$ , как показано нами далее в теоремах 2.1 и 2.3.

Примеры непрерывных нигде не дифференцируемых функций на  $\mathbb{R}$  одним из первых построил Вейерштрасс (не позднее 1872 г.). В дальнейшем появилось множество других примеров таких функций. В частности, свои конструкции для их построения предложили Дини в 1878 г. и Дарбу в 1879 г. Краткий очерк истории развития теории непрерывных нигде не дифференцируемых функций можно найти в работе [2, Глава V]. Обзор некоторых конструкций непрерывных нигде не дифференцируемых функций имеется в [3]. В последние годы ряд новых способов построения таких функций был предложен, в частности, в работах [4–5].

Функция Такаги  $T(x)$ , описанная ещё в 1903 году [1], до сих пор привлекает внимание исследователей в силу простоты своей конструкции. Прекрасный обзор большого числа работ, посвященных этой функции и её обобщениям, можно найти в работе [6]. В 1959 г. Кахан [7, Lieu 1] нашел точки локальных и глобальных экстремумов функции  $T(x)$ . Одним из широких обобщений функции Такаги является *класс Такаги* [8, Sec. 2], состоящий из вещественных функций вида  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n S_0(2^n x)$ , где числа  $c_0, c_1, c_2, \dots$  образуют абсолютно сходящийся ряд. Несколькими авторами изучалось также подмножество этого класса, состоящее из функций, имеющих один вещественный параметр  $v = 1/2^p$  и задаваемых формулой

$$T_v(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v^n S_0(2^n x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_0(2^n x)/2^{np}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

Это подмножество можно назвать *показательным классом Такаги–Ландсберга* (см. [9–10]). В работе [11] фактически вычислен глобальный максимум функции  $T_{1/\sqrt{2}}(x)$ , и затем это использовано для получения точной оценки суммы коэффициентов Фурье–Хаара функций ограниченной вариации на отрезке. В 2009 г. Я. Табор и И. Табор в работе [12] для точной оценки непрерывных полувывуклых функций поставили и частично решили задачу поиска глобальных максимумов функций  $T_v$ . Обзор некоторых свойств функций из показательного класса Такаги–Ландсберга можно найти в [13]. Полностью задача поиска глобальных экстремумов функций  $T_v$  при  $v \in (-1; 1)$  была решена в [9] Ханом и Шидом, а также в работе [10].

Непрерывные нигде не дифференцируемые функции используются не только в различных областях математики: математическом анализе, теории вероятностей, теории чисел и др. (см., например, [6, Sect. 8]), но и в физике [14]. Например, функция  $H_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^n$  была введена Хази и Палесом [15] для оценки функций,  $(\varepsilon, p)$ -вышуклых по Йенсену. В [16–17] и других работах нигде не дифференцируемые функции были применены для оценки цифровых сумм. В работах [18–17] для поиска глобальных экстремумов произвольных (в т. ч. нигде не дифференцируемых) функций был разработан метод крайних подаргументов и надаргументов. В статье [19] функция Такаги используется для оптимизации передачи точечной нагрузки на грунт. В работе [20] авторы изучают свойства потоков Гамильтона–Якоби с нигде не дифференцируемыми начальными условиями. Таким образом, несмотря на сложность изучения нигде не дифференцируемых функций, интерес к ним постоянно растет.

В настоящей статье мы при различных значениях параметра  $p$  изучаем непрерывность, нигде не дифференцируемость, функциональные уравнения и глобальные экстремумы степенных функций Такаги  $S_p$ , заданных формулой (1.1). Эти функции интересны, в частности, тем, что на них удалось отработать различные методы исследования нигде не дифференцируемых функций аналогичной конструкции. Новизна и в то же время сложность проводимого исследования состоит ещё и в том, что при  $p \neq 1$  сла-

гаемые ряда (1.1), задающего функции  $S_p$ , не являются кусочно-линейными, в отличие, например, от ряда (1.2), задающего функции  $T_v$ .

Кратко опишем основные результаты работы и её структуру. Статья состоит из пяти пунктов. *Пункт 1.* — это введение. *В пункте 2.* мы доказываем, что при любом  $p > 0$  функции  $S_p$  на  $\mathbb{R}$  непрерывны, имеют период 1, симметричны и ограничены (теорема 2.1), а также что при  $p \in (0; 1)$  они нигде не дифференцируемы (теорема 2.3). *В пункте 3.* в случае  $p > 0$  мы выводим функциональные уравнения  $S_p(x) = S_{p,m-1}(x) + S_p(2^m x)/2^{mp}$  при  $m \in \mathbb{N}$  (теорема 3.1) и вычисляем значение  $S_p(1/3) = 2^p/(3^p(2^p - 1))$  (лемма 3.1). *В пункте 4.* для любого  $p \in (0; 1)$  показано, что глобальный максимум функции  $S_p$  равен  $2^p/(3^p(2^p - 1))$  и достигается только в точках вида  $q + 1/3$  и  $q + 2/3$ , где  $q \in \mathbb{Z}$ , а глобальный минимум равен 0 и достигается только в целых точках (теорема 4.1). В заключение в предложении 4.1 получены двусторонние оценки  $S_{p,n} \leq S_p \leq S_{p,n} + 1/(3^p(2^p - 1)2^{np})$  при  $n = 0, 1, 2, \dots$ , и доказана их точность. *В пункте 5.* описаны возможные направления дальнейших исследований.

Далее в работе мы используем для множества натуральных чисел обозначение  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ .

## 2. Непрерывность и нигде не дифференцируемость степенных функций Такаги

В этом параграфе мы доказываем, что степенные функции Такаги на  $\mathbb{R}$  непрерывны, периодичны, симметричны, ограничены при  $p > 0$  (теорема 2.1), и что они нигде не дифференцируемы при  $p \in (0; 1)$  (теорема 2.3).

**З а м е ч а н и е 2.1.** Функция  $S_0(x) = \rho(x, \mathbb{Z})$ , описанная в определении 1.1, очевидно, является непрерывной, четной, имеет период 1 и обладает следующим свойством симметрии относительно полуцелых точек числовой оси:

$$S_0(q/2 + x) = S_0(q/2 - x) \quad \text{при любых } q \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

Более того,  $S_0(x)$  для любого  $x \in [0; 1]$  может быть задана формулой

$$S_0(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in [0, 1/2]; \\ 1 - x & \text{при } x \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (2.2)$$

**Т е о р е м а 2.1.** При любом  $p > 0$  степенная функция Такаги  $S_p$  на множестве  $\mathbb{R}$  всюду определена, непрерывна, четна, имеет период 1 и обладает следующим свойством симметрии:

$$S_p(x) = S_p(q - x) \quad \text{при всех } q \in \mathbb{Z} \text{ и всех } x \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Кроме того, для любого  $p > 0$  функция  $S_p$  ограничена, причем для всех  $x \in \mathbb{R}$  выполняется неравенство  $0 \leq S_p(x) \leq 1/(2^p - 1)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Зафиксируем произвольное число  $p > 0$ .

1. Сначала с помощью признака Вейерштрасса докажем равномерную сходимость функционального ряда (1.1), задающего функцию  $S_p$ . Очевидно, при всех  $x \in \mathbb{R}$  выполняется неравенство  $0 \leq S_0(x) \leq 1/2$ . Поэтому верны соотношения  $0 \leq S_0^p(2^n x)/2^{np} \leq (1/2)^p/2^{np} = 1/2^{(n+1)p}$ . Ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} 1/2^{(n+1)p}$  сходится, и его сумма равна  $1/(2^p - 1)$ .

Следовательно, функциональный ряд (1.1) сходится равномерно по  $x \in \mathbb{R}$ , причем при всех  $x \in \mathbb{R}$  верно неравенство  $0 \leq S_p(x) \leq 1/(2^p - 1)$ .

2. Из равномерной сходимости ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^{np}$  и непрерывности его слагаемых вытекает непрерывность его суммы  $S_p(x)$  при всех  $x \in \mathbb{R}$ .

3. Периодичность функции  $S_p(x)$  следует из формулы (1.1) и наличия периода 1 у функции  $S_0$  (см. замечание 2.1).

4. Равенство (2.3) следует из формулы (1.1) и равенства (2.1).

Доказательство завершено.

Нигде не дифференцируемость функций  $S_p$  вытекает из теоремы Ф. Катера [4, Theorem 1]. Учитывая, в частности, что данный автор для понятия «вогнутость» почему-то использовал слово «convex», эту теорему можно сформулировать следующим образом:

**Теорема 2.2** (Ф. Катер, 2003). Пусть  $(a_j)_{j=1}^{\infty}$  — последовательность неотрицательных действительных чисел, такая что  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$ . Пусть  $(b_j)_{j=1}^{\infty}$  — последовательность натуральных чисел, такая что  $b_j$  делит  $b_{j+1}$  при любом  $j \in \mathbb{N}$ , и последовательность  $(a_j b_j)_{j=1}^{\infty}$  не сходится к 0. Для каждого  $j \in \mathbb{N}$  пусть задана непрерывная функция  $f_j: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$ , такая что  $f_j(k) = 0$ ,  $f_j(k + 1/2) = 1$  и  $f_j$  вогнута на интервале  $(k, k + 1)$  при каждом  $k \in \mathbb{Z}$ . Тогда функция  $\sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j(b_j x)$  непрерывна и не имеет ни конечной левой, ни конечной правой производной ни в одной точке  $x \in \mathbb{R}$ .

**Теорема 2.3.** При любом  $p \in (0; 1)$  у степенной функции Такаги  $S_p$  нет ни конечной левой, ни конечной правой производной ни в одной точке из  $\mathbb{R}$ .

Доказательство. Для каждого  $j \in \mathbb{N}$  положим  $a_j = 1/2^{jp}$ ,  $b_j = 2^{j-1}$  и зададим на  $\mathbb{R}$  функцию  $f_j(x) = 2^p S_0^p(x)$ . Тогда последовательности  $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ ,  $(b_j)_{j=1}^{\infty}$  и  $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ , очевидно, удовлетворяют условиям теоремы 2.2. Значит, в силу этой теоремы, функция  $S_p(x) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j f_j(b_j x)$  не имеет ни конечной левой, ни конечной правой производной ни в одной точке  $x \in \mathbb{R}$ .

Доказательство завершено.

### 3. Функциональное уравнение для степенных функций Такаги

В этом параграфе мы выводим функциональные уравнения для функции  $S_p$  (теорема 3.1) и вычисляем значения  $S_p(1/3)$ ,  $S_p(2/3)$  (лемма 3.1).

**Теорема 3.1.** При любых  $p > 0$  и  $m \in \mathbb{N}$  степенная функция Такаги  $S_p(x)$  удовлетворяет функциональному уравнению

$$S_p(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}} + \frac{S_p(2^m x)}{2^{mp}} = S_{p, m-1}(x) + \frac{S_p(2^m x)}{2^{mp}}, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

Доказательство. В силу равенства (1.1) для каждого  $x \in \mathbb{R}$  имеем:

$$S_p(2^m x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^n \cdot 2^m x)}{2^{np}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^{n+m} x)}{2^{np}}.$$

Разделив обе части этого равенства на  $2^{mp}$ , получим:

$$\frac{S_p(2^m x)}{2^{mp}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S_0^p(2^{n+m} x)}{2^{(n+m)p}} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}} = S_p(x) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{S_0^p(2^k x)}{2^{kp}}.$$

Отсюда следует равенство (3.1), которое мы доказываем.

**Доказательство завершено.**

Применяя теорему 3.1 в случае  $m = 1$ , получаем такое следствие:

**С л е д с т в и е 3.1.** При любом  $p > 0$  степенная функция Такаги  $S_p$  удовлетворяет функциональному уравнению

$$S_p(x) = S_0^p(x) + \frac{S_p(2x)}{2^p}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (3.2)$$

которое равносильно уравнению

$$S_p(2x) = 2^p(S_p(x) - S_0^p(x)), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.3)$$

Применим это следствие для вычисления  $S_p(1/3)$  и  $S_p(2/3)$ .

**Л е м м а 3.1.** Для любого  $p > 0$  значения функции  $S_p(x)$  в точках  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$  можно вычислить по формуле  $S_p(1/3) = S_p(2/3) = 2^p/(3^p(2^p - 1))$ .

**Доказательство.** Подставив в формулу (3.3) значение  $x = 1/3$ , получим:  $S_p(2/3) = 2^p(S_p(1/3) - S_0^p(1/3))$ . Следовательно, так как  $S_0^p(1/3) = 1/3$  в силу (2.2) и  $S_p(2/3) = S_p(1/3)$  по свойству симметрии (2.3), получаем равенство  $S_p(1/3) = 2^p(S_p(1/3) - 1/3^p)$ . Отсюда  $S_p(1/3) = 2^p/(3^p(2^p - 1))$ .

**Доказательство завершено.**

#### 4. Глобальные экстремумы и двусторонняя равномерная оценка степенных функций Такаги с параметром $p \in (0; 1)$

Этот параграф посвящен поиску глобальных экстремумов функций  $S_p$  для значений параметров  $p \in (0; 1)$  и поиску точек, в которых достигаются эти экстремумы (теорема 4.1). Метод, применяемый для поиска максимумов, фактически можно было бы назвать методом половинного деления. В заключение мы получаем точные двусторонние равномерные оценки функций  $S_p$  (предложение 4.1).

Для доказательства теоремы 4.1 нам понадобятся следующие три леммы.

**Л е м м а 4.1.** Для любых действительных чисел  $a, b, s$  и  $p$ , удовлетворяющих условиям  $0 < s \leq a < b$  и  $0 < p < 1$ , выполняется неравенство

$$(a + s)^p - (a - s)^p > (b + s)^p - (b - s)^p.$$

**Доказательство.** Нам достаточно доказать положительность функции  $f(s) = ((a + s)^p - (a - s)^p) - ((b + s)^p - (b - s)^p)$  при всех  $s \in (0, a]$ . Имеем:  $f'(s) = p \cdot ((a + s)^{p-1} - (a - s)^{p-1}) + p \cdot ((a - s)^{p-1} - (b - s)^{p-1}) > 0$  при всех  $s \in (0, a]$ . Значит, в силу непрерывности  $f(s)$  на отрезке  $[0, a]$ , функция  $f(s)$  строго возрастает на  $[0, a]$ . Поэтому  $f(s) > f(0) = 0$  для любого  $s \in (0, a]$ .

**Доказательство завершено.**

**Л е м м а 4.2.** Пусть  $0 < p < 1$ . Для каждого целого неотрицательного числа  $n$  зададим на полуинтервале  $(0; 1]$  функцию  $D_n$  с помощью равенства

$$D_n(s) = \sum_{k=0}^n \left( (2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} + (-1)^k \cdot 3s)^p - (2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} - (-1)^k \cdot 3s)^p \right). \quad (4.1)$$

Тогда для любого  $s \in (0; 1]$  выполняются неравенство  $D_n(s) > 0$ , если  $n$  четно, и неравенство  $D_n(s) < 0$ , если  $n$  нечетно.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для любых  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$ ,  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$  положим

$$d_{n,k}(s) = (2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} + (-1)^k \cdot 3s)^p - (2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} - (-1)^k \cdot 3s)^p \quad (4.2)$$

при всех  $s \in (0; 1]$  Тогда из (4.1) следует равенство  $D_n(s) = \sum_{k=0}^n d_{n,k}(s)$ .

1. Сначала докажем, что  $D_n(s) < 0$  при нечетных  $n$ . Разобьем сумму  $\sum_{k=0}^n d_{n,k}(s)$  на пары слагаемых:  $D_n(s) = \sum_{i=0}^{(n-1)/2} (d_{n,2i}(s) + d_{n,2i+1}(s))$ . Теперь достаточно показать, что сумма каждой пары отрицательна, т. е.  $d_{n,2i}(s) + d_{n,2i+1}(s) < 0$  при любых  $s \in (0; 1]$  и  $i = 0, 1, \dots, (n-1)/2$ .

Положим  $a_{n,i} = 2^{n-2i+1} - 1$  и  $b_{n,i} = 2^{n-2i+2} + 1$ . Тогда в силу (4.2) имеем:

$$\begin{aligned} d_{n,2i}(s) + d_{n,2i+1}(s) &= (2^{n-2i+2} + 1 + 3s)^p - (2^{n-2i+2} + 1 - 3s)^p + \\ &\quad + (2^{n-2i+1} - 1 - 3s)^p - (2^{n-2i+1} - 1 + 3s)^p = \\ &= ((b_{n,i} + 3s)^p - (b_{n,i} - 3s)^p) - ((a_{n,i} + 3s)^p - (a_{n,i} - 3s)^p). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Поскольку  $0 < 3s \leq 3 \leq a_{n,i} < b_{n,i}$ , то, применяя лемму 4.1 при  $a = a_{n,i}$  и  $b = b_{n,i}$ , получим оценку  $(a_{n,i} + 3s)^p - (a_{n,i} - 3s)^p > (b_{n,i} + 3s)^p - (b_{n,i} - 3s)^p$ . Из нее и из формулы (4.3) следует нужное неравенство  $d_{n,2i}(s) + d_{n,2i+1}(s) < 0$ .

2) Теперь докажем, что  $D_n(s) > 0$  при четных  $n$ . Для этого в сумме  $D_n(s) = \sum_{k=0}^n d_{n,k}(s)$  первое слагаемое выделим отдельно, а остальные разобьем на пары:  $D_n(s) = d_{n,0}(s) + \sum_{i=1}^{n/2} (d_{n,2i-1}(s) + d_{n,2i}(s))$ . Нам достаточно показать, что в этом случае все слагаемые положительны, т. е.  $d_{n,0}(s) > 0$  и  $d_{n,2i-1}(s) + d_{n,2i}(s) > 0$  при любых  $s \in (0; 1]$  и любых  $i = 0, 1, \dots, n/2$ .

В силу формулы (4.2) имеем  $d_{n,0}(s) = (2^{n+2} - 1 + 3s)^p - (2^{n+2} - 1 - 3s)^p > 0$ . Далее положим  $a_{n,i} = 2^{n-2i+2} - 1$  и  $b_{n,i} = 2^{n-2i+3} + 1$ . Тогда верно равенство

$$\begin{aligned} d_{n,2i-1}(s) + d_{n,2i}(s) &= (2^{n-2i+3} + 1 - 3s)^p - (2^{n-2i+3} + 1 + 3s)^p + \\ &\quad + (2^{n-2i+2} - 1 + 3s)^p - (2^{n-2i+2} - 1 - 3s)^p = \\ &= ((a_{n,i} + 3s)^p - (a_{n,i} - 3s)^p) - ((b_{n,i} + 3s)^p - (b_{n,i} - 3s)^p). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Поскольку  $0 < 3s \leq 3 \leq a_{n,i} < b_{n,i}$ , то по лемме 4.1 при  $a = a_{n,i}$  и  $b = b_{n,i}$  верна оценка  $(a_{n,i} + 3s)^p - (a_{n,i} - 3s)^p > (b_{n,i} + 3s)^p - (b_{n,i} - 3s)^p$ . Отсюда и из формулы (4.4) получаем нужное неравенство  $d_{n,2i-1}(s) + d_{n,2i}(s) > 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.**

**Л е м м а 4.3.** Пусть при всех  $n = 0, 1, 2, \dots$  заданы отрезки  $[a_n, b_n]$  с концами

$$a_n = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n+2}} - \frac{1}{2^{n+2}} \quad \text{и} \quad b_n = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3 \cdot 2^{n+2}} + \frac{1}{2^{n+2}}. \quad (4.5)$$

Тогда верны следующие три утверждения:

1. при каждом  $n = 0, 1, 2, \dots$  длина отрезка  $[a_n, b_n]$  равна  $1/2^{n+1}$ , а его середина  $c_n = 1/3 - (-1)^n/(3 \cdot 2^{n+2})$  может быть записана также в виде  $c_n = q_n/2^{n+2}$ , где  $q_n$  — некоторое целое число;

2. Если  $n$  — четно, то  $a_{n+1} = c_n$  и  $b_{n+1} = b_n$ , т. е. отрезок  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  является правой половиной отрезка  $[a_n, b_n]$ . Если  $n$  — нечетно, то  $a_{n+1} = a_n$  и  $b_{n+1} = c_n$ , то есть отрезок  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  является левой половиной отрезка  $[a_n, b_n]$ ;

3. отрезки  $[a_n, b_n]$  вложены:  $[0, 1/2] = [a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots$ , и выполнено равенство  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{1/3\}$ .

**Доказательство.** 1. Имеем:  $c_n = (a_n + b_n)/2 = 1/3 - (-1)^n/(3 \cdot 2^{n+2})$ . Поэтому  $c_n = q_n/2^{n+2}$ , где  $q_n = (2^{n+2} - (-1)^n)/3$ . Изучая остатки от деления  $2^{n+2}$  на 3 видим, что  $q_n$  является целым числом как при четном, так и при нечетном  $n$ .

2. Если  $n$  — четное, то из (4.5) вытекают равенства  $c_n = 1/3 - 1/(3 \cdot 2^{n+2})$ ,  $b_n = 1/3 + 1/(3 \cdot 2^{n+1})$ ,  $a_{n+1} = 1/3 - 1/(3 \cdot 2^{n+2})$  и  $b_{n+1} = 1/3 + 1/(3 \cdot 2^{n+1})$ . Таким образом, при четном  $n$  имеем:  $a_{n+1} = c_n$  и  $b_{n+1} = b_n$ . При нечетном  $n$  аналогично делается проверка равенств  $a_{n+1} = a_n$  и  $b_{n+1} = c_n$ .

3. Вложенность отрезков  $[a_n, b_n]$  следует из доказанного пункта 2. Равенство  $\bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{1/3\}$  следует из теоремы Кантора о вложенных отрезках и соотношения  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1/3$ , вытекающего из формул (4.5).

**Доказательство завершено.**

**Теорема 4.1.** Пусть  $p \in (0; 1)$ . Тогда:

1) глобальный максимум функции  $S_p(x)$  по  $x \in \mathbb{R}$  равен  $2^p/(3^p(2^p - 1))$  и достигается только в точках вида  $x = q + 1/3$  и  $x = q + 2/3$ , где  $q$  — произвольное целое число;

2) глобальный минимум функции  $S_p(x)$  по  $x \in \mathbb{R}$  равен 0 и достигается только в целых точках  $x$ .

**Доказательство.** 1. Поскольку функция  $S_p(x)$  имеет период 1 и обладает свойством симметрии (2.3), то достаточно изучить ее глобальные экстремумы лишь на отрезке  $[0; 1/2]$ . Обозначим множество точек глобального максимума функции  $S_p(x)$  на отрезке  $[0; 1/2]$  через  $\text{Argmax}_{[0, 1/2]} S_p$ . Нам достаточно доказать, что  $\text{Argmax}_{[0, 1/2]} S_p = \{1/3\}$ . Для этого покажем, что для каждого  $n = 0, 1, 2, \dots$  множество  $\text{Argmax}_{[0, 1/2]} S_p$  содержится в отрезке  $[a_n, b_n]$ , заданном в лемме 4.3. Отсюда в силу пункта 3 леммы 4.3, справедливо соотношение  $\text{Argmax}_{[0, 1/2]} S_p \subset \bigcap_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] = \{1/3\}$ , ведущее к нужному равенству  $\text{Argmax}_{[0, 1/2]} S_p = \{1/3\}$ .

Воспользуемся методом математической индукции.

**База индукции:**  $n = 0$ . Включение  $\text{Argmax}_{[0, 1/2]} S_p \subset [a_0, b_0] = [0, 1/2]$  верно по определению множества  $\text{Argmax}_{[0, 1/2]} S_p$ .

**Шаг индукции:** из включения  $\text{Argmax}_{[0, 1/2]} S_p \subset [a_n, b_n]$  нужно вывести включение  $\text{Argmax}_{[0, 1/2]} S_p \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ . Для этого зададим на полуинтервале  $(0; 1]$  функцию  $f_n$  с помощью равенства

$$f_n(s) = S_p(c_n + s/2^{n+2}) - S_p(c_n - s/2^{n+2}), \quad s \in (0; 1], \quad (4.6)$$

где  $c_n$  — середина отрезка  $[a_n, b_n]$  (см. лемму 4.3). Заметим, что если  $s$  пробегает полуинтервал  $(0; 1]$ , то  $(c_n + s/2^{n+2})$  пробегает полуинтервал  $(c_n, b_n]$ , а точка  $(c_n - s/2^{n+2})$  пробегает полуинтервал  $[a_n, c_n)$ . Поэтому если  $f_n(s) > 0$  при всех  $s \in (0; 1]$ , то множество  $\text{Argmax}_{[0, 1/2]} S_p$  лежит в правой половине отрезка  $[a_n, b_n]$ , а если  $f_n(s) < 0$  при всех

$s \in (0; 1]$ , то  $\text{Argmax}_{[0,1/2]} S_p$  лежит в левой половине отрезка  $[a_n, b_n]$  (далее мы увидим, что возможны только эти два варианта). Следовательно, необходимо исследовать знак функции  $f_n(s)$  при  $s \in (0; 1]$ . В силу формул (4.6) и (1.1) имеем:

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{S_0(2^k(c_n + s/2^{n+2}))}{2^k} \right)^p - \left( \frac{S_0(2^k(c_n - s/2^{n+2}))}{2^k} \right)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{kp}} \left( S_0^p(2^k c_n + 2^{k-n-2} s) - S_0^p(2^k c_n - 2^{k-n-2} s) \right). \tag{4.7}$$

Преобразуем последнюю сумму, используя свойство симметрии (2.1) функции  $S_0$ . В силу пункта 1 леммы 4.3 верно равенство  $c_n = q_n/2^{n+2}$ , где  $q_n$  — целое число. Поэтому при любом  $k \geq n + 1$  число  $2^{k+1}c_n$  тоже будет целым. Следовательно, в силу формулы (2.1) при любом  $k \geq n + 1$  будет выполняться равенство  $S_0(2^k c_n + 2^{k-n-2} s) = S_0(2^k c_n - 2^{k-n-2} s)$ . Поэтому в последней сумме формулы (4.7) все слагаемые с номерами  $k \geq n + 1$  равны нулю. Таким образом, в силу равенства  $c_n = 1/3 - (-1)^n/(3 \cdot 2^{n+2})$  (см. пункт 1 леммы 4.3), формулу (4.7) можно переписать в виде

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{kp}} \left( S_0^p(2^k c_n + 2^{k-n-2} s) - S_0^p(2^k c_n - 2^{k-n-2} s) \right) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{kp}} \left( S_0^p \left( \frac{2^k}{3} - \frac{(-1)^n - 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \right) - S_0^p \left( \frac{2^k}{3} - \frac{(-1)^n + 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \right) \right). \tag{4.8}$$

Ввиду наличия у функции  $S_0$  периода 1, в этом равенстве числа  $2^k/3$  можно заменить на их дробные части  $\{2^k/3\}$ . Если  $k \geq 0$  и чётно, то  $\{2^k/3\} = 1/3$ , поэтому  $\{2^k/3\} - ((-1)^n \pm 3s)/(3 \cdot 2^{n-k+2}) \in [0, 1/2]$ . Поэтому, в силу формулы (2.2) для функции  $S_0$ , имеем:

$$S_0 \left( \frac{2^k}{3} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \right) = \frac{1}{3} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \quad \text{при чётных } k \geq 0. \tag{4.9}$$

Аналогично, если  $k \geq 0$  и нечётно, то тогда  $\{2^k/3\} = 2/3$ , поэтому  $\{2^k/3\} - ((-1)^n \pm 3s)/(3 \cdot 2^{n-k+2}) \in [1/2, 1]$ . Значит, в силу формулы (2.2), верны равенства

$$S_0 \left( \frac{2^k}{3} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \right) = S_0 \left( \left\{ \frac{2^k}{3} \right\} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \right) = 1 - \left( \frac{2}{3} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \quad \text{при нечётных } k \geq 0. \tag{4.10}$$

Из формул (4.9)–(4.10), видим, что при всех целых  $k \geq 0$  верно равенство

$$S_0 \left( \frac{2^k}{3} - \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \right) = \frac{1}{3} - (-1)^k \frac{(-1)^n \pm 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}}.$$

Отсюда и из формулы (4.8) вытекает следующая цепочка равенств:

$$f_n(s) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{kp}} \left( \left( \frac{1}{3} - (-1)^k \frac{(-1)^n - 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \right)^p - \left( \frac{1}{3} - (-1)^k \frac{(-1)^n + 3s}{3 \cdot 2^{n-k+2}} \right)^p \right) = \frac{1}{3^p \cdot 2^{(n+2)p}} \sum_{k=0}^n \left( (2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} + (-1)^k \cdot 3s)^p - (2^{n-k+2} - (-1)^{n+k} - (-1)^k \cdot 3s)^p \right) = \frac{D_n(s)}{3^p \cdot 2^{(n+2)p}},$$

где  $D_n(s)$  — функция, задаваемая равенством (4.1) и изученная в лемме 4.2.

В силу леммы 4.2 при четном  $n$  функция  $D_n(s)$ , а значит, и функция  $f_n(s)$ , положительны при любых  $s \in (0; 1]$ , поэтому множество  $\text{Argmax}_{[0,1/2]} S_p$  лежит в правой половине отрезка  $[a_n, b_n]$ , т. е. на отрезке  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  (по пункту 4 леммы 4.3). Аналогично, при нечетном  $n$  функция  $D_n(s)$ , а значит, и функция  $f_n(s)$ , отрицательны при любых  $s \in (0; 1]$ , поэтому множество  $\text{Argmax}_{[0,1/2]} S_p$  лежит в левой половине отрезка  $[a_n, b_n]$ , т. е. тоже на отрезке  $[a_{n+1}, b_{n+1}]$  (по пункту 4 леммы 4.3). Таким образом, включение  $\text{Argmax}_{[0,1/2]} S_p \subset [a_{n+1}, b_{n+1}]$  доказано и при четных, и при нечетных  $n$ .

Итак, шаг индукции выполнен, и первое утверждение теоремы доказано.

Глобальный максимум функции  $S_p(x)$  на  $\mathbb{R}$  в силу доказанного равен значению  $S_p(1/3)$ , которое в силу леммы 3.1 равно  $2^p/(3^p(2^p - 1))$ .

2. Утверждение теоремы о глобальном минимуме функции  $S_p(x)$  вытекает из определения 1.1, задающего эту функцию.

Доказательство завершено.

**Иллюстрация 2.** Иллюстрациями к этой теореме могут служить Рис. 1.1 и 4.1, где для случаев  $p = 0,5$  и  $p = 0,7$  соответственно пунктиром отмечено положение глобальных максимумов в точках  $x = 1/3$  и  $x = 2/3$ .

**Замечание 4.1.** При  $p = 1$  утверждение теоремы 4.1 о точках максимума уже неверно, поскольку, согласно Кахану [7], эти точки образуют континуальное множество канторовского типа.

Теперь с помощью доказанной теоремы 4.1 получим точные двусторонние оценки функций  $S_p(x)$ , равномерные по  $x \in \mathbb{R}$ .

**Предложение 4.1.** Для любого  $p \in (0; 1)$ , любого  $n \in \{0, 1, 2, \dots\}$  и любого  $x \in \mathbb{R}$  положим

$$\tilde{S}_{p,n}(x) = S_{p,n}(x) + \frac{S_p(1/3)}{2^{(n+1)p}} = S_{p,n}(x) + \frac{1}{3^p(2^p - 1)2^{np}}.$$

Тогда верна двусторонняя оценка

$$S_{p,n}(x) \leq S_p(x) \leq \tilde{S}_{p,n}(x). \quad (4.11)$$

При каждом фиксированном  $n$  равенство здесь достигается: в левом неравенстве — при  $x = q/2^{n+1}$ , где  $q \in \mathbb{Z}$ ; в правом неравенстве — при  $x = (3q \pm 1)/(3 \cdot 2^{n+1})$ , где  $q \in \mathbb{Z}$ , т. е. при  $x = t/(3 \cdot 2^{n+1})$ , где  $t$  — целое число, не делящееся на 3.

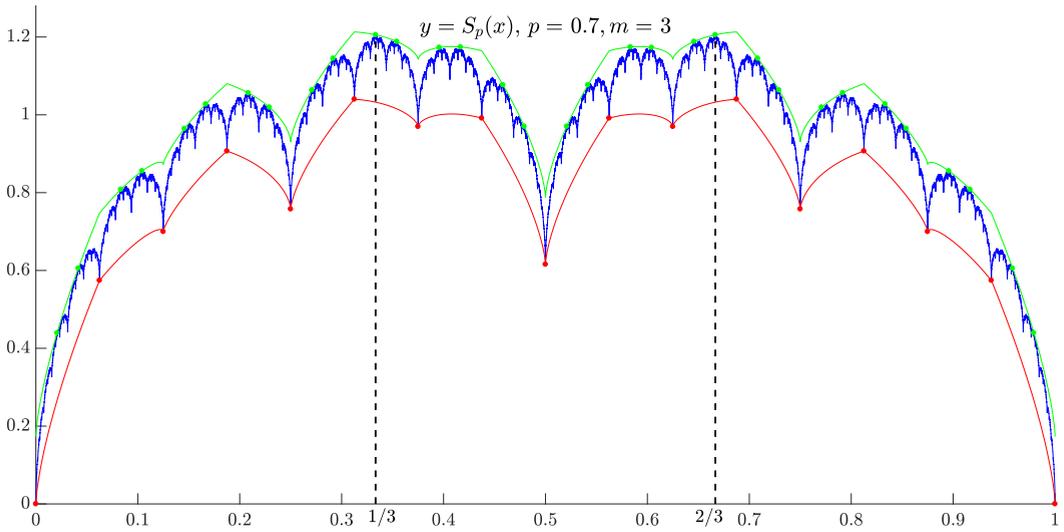
**Доказательство.** В силу функционального уравнения (3.1) при  $t = n + 1$  имеем  $S_p(x) = S_{p,n}(x) + S_p(2^{n+1}x)/2^{(n+1)p}$ . Поэтому доказываемое неравенство (4.11) равносильно неравенству

$$0 \leq S_p(2^{n+1}x) \leq S_p(1/3). \quad (4.12)$$

Из теоремы 4.1 следует, что левое неравенство здесь верно, причем оно становится равенством лишь когда число  $q = 2^{n+1}x$  является целым, т. е. при  $x = q/2^{n+1}$ . Из той же теоремы 4.1 следует, что правое неравенство в (4.12) также верно, и оно становится равенством лишь когда число  $2^{n+1}x$  имеет вид  $q + 1/3$  или  $q - 1/3$ , где  $q$  — целое. Отсюда  $x = (3q \pm 1)/(3 \cdot 2^{n+1})$ .

Доказательство завершено.

**Иллюстрация 3.** Иллюстрацию к этому предложению можно увидеть на Рис. 4.1, где для случая  $p = 0,7$  и  $m = 3$  приведены графики  $y = S_p(x)$  (синей линией), а также  $y = S_{p,m}(x)$  (красной линией) и  $y = \tilde{S}_{p,m}(x)$  (зеленой линией).



**Рис. 4.1.** Графики  $y = S_p(x)$ ,  $y = S_{p,m}(x)$  и  $y = \tilde{S}_{p,m}(x)$  при  $p = 0,7$  и  $m = 3$

**Fig. 4.1.** Graphs  $y = S_p(x)$ ,  $y = S_{p,m}(x)$  and  $y = \tilde{S}_{p,m}(x)$  for  $p = 0,7$  and  $m = 3$

## 5. Направления дальнейших исследований

1. Было бы интересно изучить как в случае  $p \in (0; 1)$ , так и в случае  $p > 1$  следующие свойства функций  $S_p(x)$ : не только глобальные, но и локальные экстремумы; гёльдеровость и др.
2. В дальнейшем авторы предполагают, кроме того, провести исследование свойств функций из более широкого класса, например функций вида  $\sum_{n=0}^{\infty} S_0^p(2^n x)/2^{nq}$ , где  $p > 0$  и  $q > 0$ .

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2022-1101.

Авторы благодарят Ивана Ремизова за внимание к работе.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Takagi T. A simple example of a continuous function without derivative // Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku. 1901. Vol. 1. pp. 176–177. DOI: <https://doi.org/10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176>
2. Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного. М.: Наука, 1975. 248 с.
3. Thim J. Continuous nowhere differentiable functions : Master thesis. Luleå: Luleå University of Technology, 2003. 98 p.

4. Cater F. S. Constructing nowhere differentiable functions from convex functions // *Real Anal. Exchange*. 2002/2003. Vol. 28, No. 2. pp. 617–623.
5. Fujita Y., Hamamuki N., Siconolfi A., Yamaguchi N. A class of nowhere differentiable functions satisfying some concavity-type estimate // *Acta Mathematica Hungarica*. 2020. Vol. 160. pp. 343–359. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10474-019-01007-3>
6. Allaart P. C., Kawamura K. The Takagi function: a survey // *Real Anal. Exchange*. 2011/12. Vol. 37, No. 1. pp. 1–54. DOI: <https://doi.org/10.14321/realanalexch.37.1.0001>
7. Kahane J.-P. Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée // *Enseignement Math.* 1959. Vol. 5. pp. 53–57. DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35474>
8. Hata M., Yamaguti M. Takagi function and its generalization // *Japan J. Appl. Math.* 1984. Vol. 1. pp. 183–199. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03167867>
9. Han X., Schied A. Step roots of Littlewood polynomials and the extrema of functions in the Takagi class // *Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc.* 2022. Vol. 173. pp. 591–618. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004122000020>
10. Galkin O. E., Galkina S. Yu. Functions consistent with real numbers, and global extrema of functions in exponential Takagi class. 2020. 60 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.08540>
11. Галкина С. Ю. О коэффициентах Фурье–Хаара от функций с ограниченной вариацией // *Матем. заметки*. 1992. Vol. 51, No 1. pp. 42–54. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01229431>
12. Tabor J., Tabor J. Takagi functions and approximate midconvexity // *J. Math. Anal. Appl.* 2009. Vol. 356, No 2. pp. 729–737. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.03.053>
13. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. О свойствах функций показательного класса Такаги // *Уфимск. матем. журн.* 2015. Т. 7, № 3. С. 29–37. DOI: <https://doi.org/10.13108/2015-7-3-28>
14. Tasaki S., Antoniou I., Suchanecki Z. Deterministic diffusion, de Rham equation and fractal eigenvectors // *Physics Letter A*. 1993. Vol. 179, No. 2. pp. 97–102. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90656-K](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90656-K)
15. Házy A., Páles Zs. On approximately  $t$ -convex functions // *Publ. Math. Debrecen*. 2005. Vol. 66, No 3. pp. 489–501. DOI: <https://doi.org/10.5486/PMD.2005.3123>
16. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Глобальные экстремумы функции Кобаяши–Грея–Такаги и двоичные цифровые суммы // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. 2017. Т. 27, № 1. С. 17–25. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170102>
17. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Глобальные экстремумы функции Деланжа, оценки цифровых сумм и вогнутые функции // *Матем. сб.* 2020. Т. 211, № 3. С. 32–70. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9143>

18. Галкин О. Е., Галкина С. Ю. Применение крайних под- и надаргументов, выпуклых и вогнутых оболочек для поиска глобальных экстремумов // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2019. Т. 29, № 4. С. 483–500. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190402>
19. Rodríguez-Cuadrado J., San Martín J. Sierpinski-Takagi combination for a uniform and optimal point-surface load transmission // Appl. Math. Modelling. 2022. Vol. 105. pp. 307–320. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.12.040>
20. Fujita Y., Siconolfi A., Yamaguchi N. Hamilton-Jacobi flows with nowhere differentiable initial data // Mathematische Annalen. 2023. Vol. 385. pp. 1061–1084. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00208-021-02353-w>

*Поступила 05.02.2023; доработана после рецензирования 10.04.2023;  
принята к публикации 25.05.2023*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. T. Takagi, “A simple example of a continuous function without derivative”, *Tokyo Sugaku-Butsurigakkwai Hokoku*, **1** (1901), 176–177. DOI: <https://doi.org/10.11429/subutsuhokoku1901.1.F176>
2. F. A. Medvedev, *Essays on the history of the theory of functions of a real variable*, Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russ.), 248 p.
3. J. Thim, “Continuous nowhere differentiable functions: Master thesis”, 2003, 98 p.
4. F. S. Cater, “Constructing nowhere differentiable functions from convex functions”, *Real Anal. Exchange.*, **28**:2 (2002/2003), 617–623.
5. Y. Fujita, N. Hamamuki, A. Siconolfi, N. Yamaguchi, “A class of nowhere differentiable functions satisfying some concavity-type estimate”, *Acta Mathematica Hungarica*, **160** (2020), 343–359. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10474-019-01007-3>
6. P. C. Allaart, K. Kawamura, “The Takagi function: a survey”, *Real Anal. Exchange.*, **37**:1 (2011/12), 1–54. DOI: <https://doi.org/10.14321/realanalexch.37.1.0001>
7. J.-P. Kahane, “Sur l'exemple, donné par M. de Rham, d'une fonction continue sans dérivée”, *Enseignement Math.*, **5** (1959), 53–57. DOI: <https://doi.org/10.5169/seals-35474>
8. M. Hata, M. Yamaguti, “Takagi function and its generalization”, *Japan J. Appl. Math.*, **1** (1984), 183–199. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF03167867>
9. X. Han, A. Schied, “Step roots of Littlewood polynomials and the extrema of functions in the Takagi class”, *Math. Proc. of the Cambridge Phil. Soc.*, **173** (2022), 591–618. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004122000020>

10. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, “Functions consistent with real numbers, and global extrema of functions in exponential Takagi class”, 2020, 60 p. DOI: <https://doi.org/10.48550/arXiv.2003.08540>
11. S. Yu. Galkina, “On the Fourier-Haar coefficients of functions of bounded variation”, *Math. Notes*, **51**:1 (1992), 27–36. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01229431>
12. J. Tabor, J. Tabor, “Takagi functions and approximate midconvexity”, *J. Math. Anal. Appl.*, **356**:2 (2009), 729–737. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2009.03.053>
13. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, “On properties of functions in exponential Takagi class”, *Ufa Mathematical Journal*, **7**:3 (2015), 28–37. DOI: <https://doi.org/10.13108/2015-7-3-28>
14. S. Tasaki, I. Antoniou, Z. Suchanecki, “Deterministic diffusion, de Rham equation and fractal eigenvectors”, *Physics Letter A.*, **179**:2 (1993), 97–102. DOI: [https://doi.org/10.1016/0375-9601\(93\)90656-K](https://doi.org/10.1016/0375-9601(93)90656-K)
15. A. Háy, Zs. Páles, “On approximately  $t$ -convex functions”, *Publ. Math. Debrecen.*, **66**:3 (2005), 489–501. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0305004122000020>
16. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, “Global extrema of the Gray Takagi function of Kobayashi and binary digital sums”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **27**:1 (2017), 17–25 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20537/vm170102>
17. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, “Global extrema of the Delange function, bounds for digital sums and concave functions”, *Sbornik: Mathematics*, **211**:3 (2020), 336–372. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9143>
18. O. E. Galkin, S. Yu. Galkina, “Application of extreme sub- and epiarguments, convex and concave envelopes to search for global extrema”, *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, **29**:4 (2019), 483–500 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190402>
19. J. Rodríguez-Cuadrado, J. San Martín, “Sierpinski-Takagi combination for a uniform and optimal point-surface load transmission”, *Appl. Math. Modelling.*, **105** (2022), 307–320. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2021.12.040>
20. Y. Fujita, A. Siconolfi, N. Yamaguchi, “Hamilton–Jacobi flows with nowhere differentiable initial data”, *Mathematische Annalen.*, **385** (2023), 1061–1084. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00208-021-02353-w>

*Submitted 05.02.2023; Revised 10.04.2023; Accepted 25.05.2023*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202302.37-52

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.91

## Двухцветный граф каскадов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях

Е. Я. Гуревич, Е. К. Родионова

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Цель исследования — выделить класс каскадов (диффеоморфизмов) Морса-Смейла с трехмерным фазовым пространством, допускающих топологическую классификацию при помощи комбинаторных инвариантов. В общем случае препятствием к такой классификации является возможность дикого вложения замыканий сепаратрис в объемлющее многообразие, приводящая к счетному множеству топологически неэквивалентных систем уже в классе каскадов Морса-Смейла, имеющих всего одну седловую неподвижную точку. Для решения поставленной проблемы несущее многообразие диффеоморфизма представляется в виде объединения трех попарно непересекающихся множеств: связанных аттрактора и репеллера, размерность которых не превышает единицы, и дополнения к ним, состоящего из блуждающих точек диффеоморфизма, названного характеристическим множеством. Известно, что топология пространства орбит ограничения диффеоморфизма Морса-Смейла на характеристическое множество и вложения в него проекций двумерных сепаратрис является полным топологическим инвариантом для диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях. Кроме того, ранее описаны свойства пространства орбит, необходимые и достаточные для включения диффеоморфизма Морса-Смейла в топологический поток. Эти результаты используются в настоящей работе, чтобы показать, что классы топологической сопряженности диффеоморфизмов Морса-Смейла, включающихся в топологический поток и не имеющих гетероклинических кривых, допускают комбинаторное описание. Более точно, в работе рассмотрен класс диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на замкнутых трехмерных многообразиях, включающихся в топологические потоки и не имеющие гетероклинических кривых. Каждому диффеоморфизму из этого класса поставлен в соответствие двухцветный граф, описывающий взаимное расположение двумерных сепаратрис седловых периодических точек. Доказано, что существование изоморфизма двухцветных графов, сохраняющего цвет ребер, является необходимым и достаточным условием топологической сопряженности каскадов. Показано, что скорость алгоритма, различающего двухцветные графы, полиномиально зависит от числа его вершин. Описан алгоритм построения представителя каждого класса топологической сопряженности.

**Ключевые слова:** диффеоморфизмы Морса-Смейла, топологическая классификация, структурно-устойчивые диффеоморфизмы, двухцветный граф, топологическая сопряженность

**Для цитирования:** Гуревич Е. Я., Родионова Е. К. Двухцветный граф каскадов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 37–52. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.37-52>

© Е. Я. Гуревич, Е. К. Родионова



*Об авторах:*

**Гуревич Елена Яковлевна**, доцент кафедры фундаментальной математики, старший научный сотрудник лаборатории «Динамические системы и приложения», Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, [egurevich@hse.ru](mailto:egurevich@hse.ru)

**Родионова Елена Константиновна**, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2449-521X>, [ekrodionova@edu.hse.ru](mailto:ekrodionova@edu.hse.ru)

*Original article*

*MSC2020 37D15*

## Bicolor Graph of Morse-Smale Cascades on Manifolds of Dimension Three

**E. Ya. Gurevich, E. K. Rodionova**

*Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** The purpose of this study is to single out a class of Morse-Smale cascades (diffeomorphisms) with a three-dimensional phase space that allow a topological classification using combinatorial invariants. In the general case, an obstacle to such a classification is the possibility of wild embedding of separatrix closures in the ambient manifold, which leads to a countable set of topologically nonequivalent systems. To solve the problem, we study the orbit space of a cascade. The ambient manifold of a diffeomorphism can be represented as a union of three pairwise disjoint sets: a connected attractor and a repeller whose dimension does not exceed one, and their complement consisting of wandering points of a cascade called the characteristic set. It is known that the topology of the orbit space of the restriction of the Morse-Smale diffeomorphism to the characteristic set and the embedding of the projections of two-dimensional separatrices into it is a complete topological invariant for Morse-Smale cascades on three-dimensional manifolds. Moreover, a criterion for the inclusion of Morse-Smale cascades in the topological flow was obtained earlier. These results are used in this paper to show that the topological conjugacy classes of Morse-Smale cascades that are included in a topological flow and do not have heteroclinic curves admit a combinatorial description. More exactly, the class of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections, defined on closed three-dimensional manifolds included in topological flows and not having heteroclinic curves, is considered. Each cascade from this class is associated with a two-color graph describing the mutual arrangement of two-dimensional separatrices of saddle periodic points. It is proved that the existence of an isomorphism of two-color graphs that preserves the color of edges is a necessary and sufficient condition for the topological conjugacy of cascades. It is shown that the speed of the algorithm that distinguishes two-color graphs depends polynomially on the number of its vertices. An algorithm for constructing a representative of each topological conjugacy class is described.

**Keywords:** Morse-Smale diffeomorphisms, topological classification, structurally stable diffeomorphisms, be-color graph, topological conjugacy

**For citation:** *E. Ya. Gurevich, E. K. Rodionova. Bicolor Graph of Morse-Smale Cascades on Manifolds of Dimension Three. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 25:2(2023), 37–52. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.37-52>*

*E. Ya. Gurevich, E. K. Rodionova. Bicolor Graph of Morse-Smale Cascades on manifolds of dimension three*

*About the authors:*

**Elena Ya. Gurevich**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, Senior Researcher, Laboratory "Dynamical Systems and Applications"(25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, [egurevich@hse.ru](mailto:egurevich@hse.ru)

**Elena K. Rodionova**, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, Trainee Researcher, Laboratory "Dynamical Systems and Applications"(25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0009-0004-2449-521X>, [ekrodionova@edu.hse.ru](mailto:ekrodionova@edu.hse.ru)

## 1. Введение

Пусть  $M^n$  — связное гладкое замкнутое многообразие размерности  $n \geq 1$ . Напомним, что диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$ , называется *диффеоморфизмом (каскадом) Морса–Смейла*, если выполняются следующие условия:

- 1) его неблуждающее множество  $\Omega_f$  конечно и состоит из гиперболических периодических точек;
- 2) инвариантные многообразия  $W_p^s, W_q^u$  любых точек  $p, q \in \Omega_f$  пересекаются трансверсально.

Несмотря на то, что неблуждающее множество каскада Морса–Смейла состоит из конечного множества периодических траекторий, его блуждающее множество на многообразии размерности большей единицы устроено значительно сложнее, чем у аналогичных потоков. Во-первых, это связано с наличием гетероклинических орбит, принадлежащих пересечению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических траекторий, что приводит к сложному асимптотическому поведению инвариантных многообразий. Во-вторых, диффеоморфизмы Морса–Смейла на многообразиях размерности три и выше могут иметь дико вложенные инвариантные многообразия. Первые примеры таких диффеоморфизмов были построены в работах [1–2].

Полная топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла на поверхностях с конечным множеством гетероклинических орбит была получена А.Н. Безденежных и В.З. Гринесом в работах [3–4]. В цикле работ [5–7] Х. Бонатти, В. З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, В. С. Медведева и О. В. Починки была решена проблема топологической классификации каскадов Морса–Смейла на 3-многообразиях. В этих работах показано, что полным топологическим инвариантом для диффеоморфизмов Морса–Смейла является схема каскада, описывающая топологию пространства орбит действия ограничения диффеоморфизма на некоторое подмножество блуждающих точек и вложение проекций сепаратрис в это пространство.

В работе [8] было введено понятие тривиальности схемы и доказано, что диффеоморфизм Морса–Смейла, схема которого тривиальна, является сдвигом на единицу времени некоторого топологического потока, эквивалентного гладкому потоку Морса–Смейла. В настоящей работе показывается, что диффеоморфизмы Морса–Смейла с тривиальной схемой и не имеющие гетероклинических пересечений допускают топологическую классификацию в комбинаторных терминах, аналогично потокам Морса–Смейла (см., например, [9]). Сформулируем результат более точно.

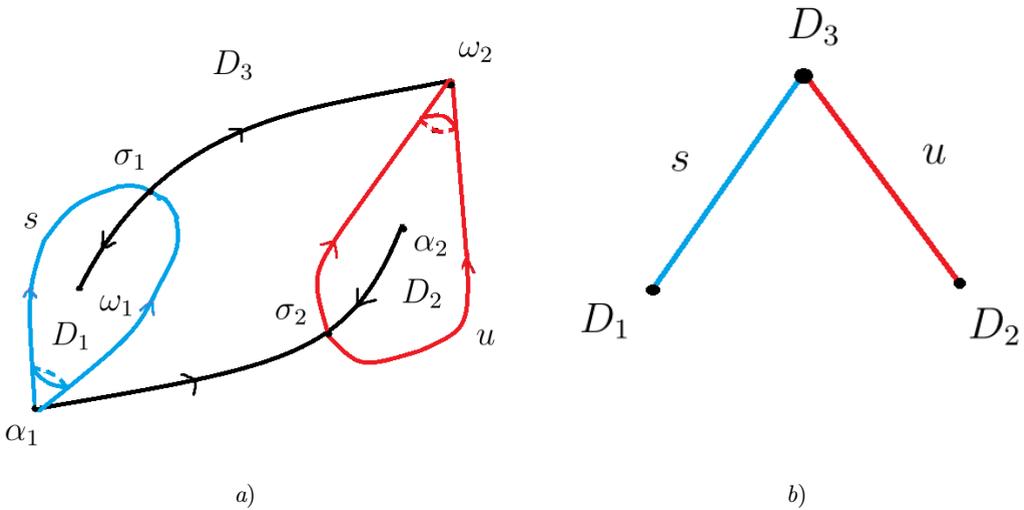
Пусть  $G(M^3)$  — класс диффеоморфизмов Морса–Смейла без гетероклинических пересечений, вкладывающихся в топологический поток. Положим  $\Omega_f^i = \{p \in \Omega_f |$

$\dim W_p^u = i\}$ ,  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Обозначим через  $\mathcal{L}_f$  множество всех замыканий двумерных инвариантных многообразий седловых точек диффеоморфизма  $f$ . Любой элемент множества  $\mathcal{L}_f$  является топологически вложенной сферой. Пусть  $\mathcal{D}_f$  обозначает множество всех компонент связности многообразия  $M^3 \setminus (\bigcup_{\sigma_1 \in \Omega_f^1} cl W_{\sigma_1}^s \cup \bigcup_{\sigma_2 \in \Omega_f^2} cl W_{\sigma_2}^u)$ .

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Двухцветным графом каскада  $f \in G(M^3)$  назовем граф  $\Gamma_f$  со следующими свойствами:

- 1) множество  $V(\Gamma_f)$  вершин графа  $\Gamma_f$  находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством  $\mathcal{D}_f$ , множество  $E(\Gamma_f)$  ребер графа  $\Gamma_f$  находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством  $\mathcal{L}_f$ ;
- 2) вершины  $v_i, v_j$  инцидентны ребру  $e_{i,j}$  тогда и только тогда, когда соответствующие им области  $D_i, D_j$  имеют общую границу;
- 3) ребро  $e_{i,j}$  имеет цвет  $s$  ( $u$ ) если оно соответствует сфере  $cl W_{\sigma_1}^s \in \mathcal{L}_f$  ( $cl W_{\sigma_2}^u \in \mathcal{L}_f$ ).

На Рис. 1.1 изображены фазовый портрет диффеоморфизма  $f$  на  $S^3$  и соответствующий ему двухцветный граф.



**Рис. 1.1.** а) фазовый портрет диффеоморфизма  $f$  на  $S^3$ ; б) двухцветный граф диффеоморфизма  $f$  на  $S^3$

**Fig 1.1.** a) phase portrait of the diffeomorphism  $f$  on  $S^3$ ; б) two-color graph of  $f$  diffeomorphism on  $S^3$

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Двухцветные графы  $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$  каскадов  $f, f' \in G(M^3)$  будем называть изоморфными, если существует биекция  $\zeta : V(\Gamma_f) \rightarrow V(\Gamma_{f'})$ , сохраняющая отношение смежности и цвет ребер.

Приведем основные результаты настоящей работы.

**Т е о р е м а 1.1.** Диффеоморфизмы  $f, f' \in G(M^3)$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы  $\Gamma_f$  и  $\Gamma_{f'}$  изоморфны.

**О п р е д е л е н и е 1.3.** Простой связный граф  $\Gamma$ , ребра которого окрашены в цвета  $s, u$ , называется допустимым, если он имеет  $g \geq 0$  попарно различных простых циклов, на каждом цикле имеется по крайней мере по одному ребру цвета  $s$  и по одному ребру цвета  $u$ , и никакое ребро не принадлежит двум циклам одновременно.

В силу следствия 2.2, доказываемого ниже, граф  $\Gamma_f$  любого диффеоморфизма  $f \in G(M^3)$  является допустимым. Таким образом, для предъявления канонического представителя каждого класса топологической сопряженности диффеоморфизмов из  $G(M^3)$  достаточно доказать следующую теорему.

**Т е о р е м а 1.2.** Для любого допустимого графа  $\Gamma$  существует диффеоморфизм  $f \in G(M^3)$ , граф  $\Gamma_f$  которого изоморфен графу  $\Gamma$  посредством изоморфизма, сохраняющего раскраску ребер.

Сформулируем теорему, устанавливающую существование алгоритмов, различающих любые два допустимых двухцветных графа не больше чем за полиномиальное число шагов.

**Т е о р е м а 1.3.** Пусть  $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$  — двухцветные графы диффеоморфизмов  $f, f' \in G(M^3)$  с одинаковым числом вершин и циклов,  $n$  — число вершин,  $g$  — число циклов. Если несущее многообразие является сферой  $S^3$ , то  $g = 0$  и существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов  $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$  за время  $O(n)$ . Если  $M^3$  отлично от сферы, то  $g > 0$  и существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов  $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$  за время  $O(n^{O(g)})$ .

Доказательство теорем 1.1, 1.2 и 1.3 содержится в разделах 3, 4 и 5, соответственно.

## 2. Свойства диффеоморфизмов рассматриваемого класса

В этом разделе мы приведем ряд свойств диффеоморфизмов рассматриваемого класса, которые будут использоваться при доказательстве основных результатов.

### 2.1. Топология несущего многообразия $M^3$

Пусть  $f \in G(M^3)$ . Обозначим через  $k_f$  число его седловых, через  $l_f$  — число узловых периодических точек и положим

$$g_f = (k_f - l_f + 2)/2.$$

Из [5] следует справедливость следующего утверждения.

**У т в е р ж д е н и е 2.1.** Пусть  $f \in G(M^3)$ . Тогда если  $g_f = 0$ , то многообразие  $M^3$  диффеоморфно трехмерной сфере, если  $g_f > 0$ , то  $M^3$  диффеоморфно связной сумме  $g_f$  копий  $S^2 \times S^1$ .

## 2.2. Схема диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ как полный топологический инвариант

Представим многообразие  $M^3$  в виде объединения множеств  $A_f = (\bigcup_{\sigma \in \Omega^1_f} W_\sigma^u) \cup (\bigcup_{\omega \in \Omega^0_f} \omega)$ ,  $R_f = (\bigcup_{\sigma \in \Omega^2_f} W_\sigma^s) \cup (\bigcup_{\alpha \in \Omega^3_f} \alpha)$ ,  $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$ .

Обозначим через  $\widehat{V}_f = V_f/f$  пространство орбит действия диффеоморфизма  $f$  на  $V_f$  и через  $p_f : V_f \rightarrow \widehat{V}_f$  естественную проекцию. Поскольку группа  $\{f^n|_{V_f}\}$  действует на многообразии  $V_f$  свободно и разрывно, то пространство  $\widehat{V}_f$  является многообразием, а естественная проекция  $p_f : V_f \rightarrow \widehat{V}_f$  является накрытием.

Проекция  $p_f$  индуцирует эпиморфизм  $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$  по следующему правилу. Пусть  $\hat{c} \subset \widehat{V}_f$  — кривая, не гомотопная нулю в  $\widehat{V}_f$ , и  $[\hat{c}] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$  — класс гомотопической эквивалентности кривой  $c$ . Выберем произвольную точку  $\hat{x} \in c$ , обозначим через  $p_f^{-1}(\hat{x})$  полный прообраз  $\hat{x}$  и зафиксируем точку  $\tilde{x} \in p_f^{-1}(\hat{x})$ . Поскольку  $p_f$  является накрытием, то существует единственный путь  $\tilde{c}(t)$ , начинающийся в точке  $\tilde{x}$  (т. е.  $\tilde{c}(0) = \tilde{x}$ ), который накрывает кривую  $c$  (т. е.  $p_f(\tilde{c}(t)) = c$ ). Следовательно, существует  $m \in \mathbb{Z}$ , такое что  $\tilde{c}(1) = f^m(\tilde{x})$ . Гомотопическому классу  $[c] \in \pi_1(\widehat{V}_f)$  эпиморфизм  $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$  ставит в соответствие число  $m$ .

Положим  $\hat{L}_f^s = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^1} p_f(W_\sigma^s \setminus \sigma)$ ,  $\hat{L}_f^u = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^2} p_f(W_\sigma^u \setminus \sigma)$ .

Следуя работе [2], набор  $S_f = (\widehat{V}_f, \hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u, \eta_f)$  будем называть *схемой диффеоморфизма*  $f \in G(M^3)$ .

Схемы  $S_f$  и  $S_{f'}$  диффеоморфизмов  $f, f' \in G(M^3)$  называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $\hat{\varphi} : \widehat{V}_f \rightarrow \widehat{V}_{f'}$ , такой что  $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^s) = \hat{L}_{f'}^s$ ,  $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^u) = \hat{L}_{f'}^u$  и  $\eta_f = \eta_{f'} \circ \hat{\varphi}_*$ .

Из работы [6] вытекает справедливость следующего утверждения.

**У т в е р ж д е н и е 2.2.** *Диффеоморфизмы  $f, f' \in G(M^3)$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.*

## 2.3. Свойства схемы диффеоморфизма $f \in G(M^3)$

Пусть  $\mathbb{S}_g$  обозначает ориентируемую поверхность (замкнутое двумерное многообразие) рода  $g$ .

**О п р е д е л е н и е 2.1.** *Будем называть схему  $S_f$  диффеоморфизма  $f \in G(M^3)$  тривиальной схемой, если существует гомеоморфизм  $\hat{\psi}_f : \widehat{V}_f \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$  такой, что для каждой компоненты связности  $\hat{\ell}$  множества  $\hat{L}_f^s \cup \hat{L}_f^u$  найдется простая замкнутая дуга  $c_\ell \subset \mathbb{S}_g$ , такая что  $\hat{\psi}_f(\hat{\ell}) = c_\ell \times \mathbb{S}^1$ .*

В [8] доказано, что тривиальность схемы диффеоморфизма Морса-Смейла, заданного на трехмерном многообразии, является необходимым и достаточным условием включения этого диффеоморфизма в топологический поток. Отсюда непосредственно вытекает следующее утверждение.

**У т в е р ж д е н и е 2.3.** *Схема диффеоморфизма  $f \in G(M^3)$  тривиальна.*

Из тривиальности схемы, в частности, вытекает справедливость следующих фактов.

**Предложение 2.1.** Пусть  $f \in G(M^3)$ . Тогда

- 1) ограничение диффеоморфизма  $f$  на инвариантное многообразии произвольной неподвижной точки является сохраняющим ориентацию;
- 2) множество  $\Omega_f$  состоит из неподвижных точек.

**Доказательство.** Докажем пункт 1. Пусть  $\omega$  — стоковая периодическая точка диффеоморфизма  $f$ . Поскольку  $f$  включается в топологический поток  $F_\omega^t$ , то ограничение  $f$  на множество  $W_\omega^s$  является сдвигом  $F_\omega^1$  на единицу времени вдоль траекторий потока  $F_\omega^t$ , следовательно, изотопно тождественному отображению (при помощи изотопии  $F_\omega^t$ ). Рассуждения для источниковой точки аналогичны. Поскольку  $W_\omega^s$  является открытым трехмерным шаром, а многообразии  $M^3$  ориентировано, то диффеоморфизм  $f$  сохраняет ориентацию многообразии  $M^3$ .

Покажем, что ограничение диффеоморфизма  $f$  на инвариантное многообразии произвольной седловой точки  $\sigma$  является сохраняющим ориентацию. Предположим противное. Возможны два случая:  $\sigma \in \Omega_f^2, \sigma \in \Omega_f^1$ . Пусть  $\sigma \in \Omega_f^2$  — седловая точка периода  $m$ , такая что диффеоморфизм  $f^m|_{W_\sigma^u}$  является обращающим ориентацию. Тогда существует гомеоморфизм  $h : W_\sigma^u \rightarrow \mathbb{R}^2$  такой, что  $hf^m|_{W_\sigma^u} = a_-h$ , где  $a_- : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  — линейное отображение плоскости, задаваемое формулой  $a_-(x_1, x_2) = (-2x_1, 2x_2)$ .

Кольцо  $K = \{(x_1, x_2) | 1 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 4\}$  является фундаментальной областью действия  $a_-$  на множестве  $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}$ . Пространство орбит  $\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}/a_-$  этого действия получается склейкой компонент края кольца  $K(h^{-1}(K))$  по диффеоморфизму  $a_-(f)$ , а значит, гомеоморфно бутылке Клейна. Следовательно, и пространство  $\hat{\downarrow}_\sigma^u = (\bigcup_{i=1}^m f^i(W_\sigma^u \setminus \sigma))/f = p_f(\bigcup_{i=1}^m f^i(W_\sigma^u \setminus \sigma))$  гомеоморфно бутылке Клейна, что противоречит определению тривиальности схемы, согласно которому множество  $\hat{\downarrow}_\sigma^u$  гомеоморфно тору.

Рассмотрим второй случай. Пусть  $\sigma \in \Omega_f^1$  и  $f^m|_{W_\sigma^u}$  является меняющим ориентацию. Поскольку  $f$  в целом является сохраняющим ориентацию, то  $f^m|_{W_\sigma^s}$  меняет ориентацию на  $W_\sigma^s$ , тогда рассуждениями, аналогичными изложенным выше, приходим к противоречию с тривиальностью схемы.

Докажем пункт 2. Пусть  $\sigma \in \Omega_f^1$  — седловая точка периода  $m$ . Из определения тривиальной схемы следует, что множество  $\hat{\downarrow}_\sigma^s = p_f(W_\sigma^s \setminus \sigma)$  гомеоморфно тору и существует гомеоморфизм  $\hat{\psi}_f : \hat{V}_f \rightarrow \mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{S}^1$ , такой что  $\hat{\psi}_f(\hat{\downarrow}_\sigma^s) = c_{\hat{\downarrow}_\sigma^s} \times \mathbb{S}^1$ , где  $c_{\hat{\downarrow}_\sigma^s}$  — простая замкнутая кривая. Пусть  $x \in c_{\hat{\downarrow}_\sigma^s}$  — произвольная точка, тогда  $\beta_x = \hat{\psi}_f^{-1}(x \times \mathbb{S}^1)$  — негомотопная нулю замкнутая кривая, принадлежащая тору  $\hat{\downarrow}_\sigma^s$ . Из определения тривиальной схемы следует, что множество  $\tilde{\beta}_x = p_f^{-1}(\beta_x)$  является незамкнутой кривой, гомеоморфной  $x \times \mathbb{R}$ , и на дуге  $\tilde{\beta}_x$  найдутся точки  $\tilde{x}, f(\tilde{x})$ , такие что  $\hat{\psi}_f(p_f(\tilde{x})) = \hat{\psi}_f(p_f(f(\tilde{x}))) = x$ , следовательно,  $f(W_\sigma^s \setminus \sigma) = W_\sigma^s \setminus \sigma$  и  $\sigma$  — неподвижная точка. Аналогично доказывается, что любая седловая точка  $\sigma \in \Omega_f^2$  также является неподвижной. Отсюда и из пункта 1 следует, что каждая сепаратриса седловой периодической точки является  $f$ -инвариантной. Поскольку все стоковые и источникивые точки принадлежат замыканиям сепаратрис седловых периодических точек, из  $f$ -инвариантности сепаратрис следует, что все стоковые и источникивые точки диффеоморфизма  $f$  являются неподвижными. Таким образом, множество  $\Omega_f$  состоит из неподвижных точек.

**Доказательство завершено.**

Отметим, что в силу [10] условия предложения 2.1 являются необходимыми условиями включения диффеоморфизма Морса-Смейла в топологический поток.

#### 2.4. Взаимосвязь схемы и двухцветного графа

Пусть  $r \in \mathbb{S}^1$  — произвольная точка и  $\Sigma_{f^t} \subset V_f$  — связная ориентируемая поверхность, такая что  $p_f(\Sigma_{f^t}) = \mathbb{S}_g \times \{r\}$ .

**О п р е д е л е н и е 2.2.** Поверхность  $\Sigma_f$  будем называть характеристической поверхностью диффеоморфизма  $f$ .

Из тривиальности схемы и определения характеристической поверхности непосредственно вытекает следующий факт.

**П р е д л о ж е н и е 2.2.** Для любой сферы  $\ell \subset L_f^s \cup L_f^u$  пересечение  $\tilde{c}_\ell = \ell \cap \Sigma_f$  гомеоморфно окружности.

**Л е м м а 2.1.** Сфера  $\ell \in L_f^s \cup L_f^u$  делит многообразие  $M^3$  тогда и только тогда, когда окружность  $\tilde{c}_\ell$  делит характеристическую поверхность.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из определения множеств  $V_f, A_f, R_f$  и  $\mathcal{L}_f$  следует, что  $M^3 \setminus \mathcal{L}_f = V_f \setminus \mathcal{L}_f$ . Из тривиальности схемы  $S_f$  следует, что  $V_f$  гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}_{g_f} \times \mathbb{R}$ . Отсюда и из предложения 2.2 следует, что для любого элемента  $L \in \mathcal{L}_f$  и для любого  $r \in \mathbb{R}$  множества  $V_f \setminus L$  и  $\mathbb{S}_g \times \{r\}$  являются связными либо несвязными одновременно, что доказывает справедливость леммы.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.**

Непосредственно из леммы 2.1 вытекают следующие утверждения.

**С л е д с т в и е 2.1.** Пусть  $f \in G(M^3)$ . Тогда

- 1) двухцветный граф  $\Gamma_f$  вкладывается в характеристическую поверхность таким образом, что:
  - (a) каждая компонента связности  $d$  множества  $\Sigma_f \setminus (L_f^s \cup L_f^u)$  содержит в точности одну точку  $v$ , соответствующую вершине графа  $\Gamma_f$ ;
  - (b) если компоненты связности  $d_i, d_j$  множества  $\Sigma_f \setminus (L_f^s \cup L_f^u)$  имеют общую граничную окружность  $\ell_{i,j}$ , то точки  $v_i \in d_i, v_j \in d_j$  соединены гладкой дугой  $e_{i,j}$ , трансверсально пересекающей окружность  $\tilde{c}_{\ell_{i,j}}$ ;
- 2) граф  $\Gamma_f$  связан;
- 3) граф  $\Gamma_f \setminus e_{i,j}$  связан тогда и только тогда, когда множество  $\Sigma_f \setminus \tilde{c}_{\ell_{i,j}}$  связно.

**С л е д с т в и е 2.2.** Пусть  $f^t \in G(M^3)$ . Если  $g_f = 0$ , то граф  $\Gamma_{f^t}$  является деревом. Если  $g_f > 0$ , то граф  $\Gamma_{f^t}$  связан и имеет в точности  $g_f$  простых попарно различных циклов, таких что:

- 1) никакое ребро не принадлежит одновременно двум циклам;
- 2) каждый цикл графа  $\Gamma_{f^t}$  содержит как ребро, окрашенное в цвет  $s$ , так и ребро, окрашенное в цвет  $u$ .

**Доказательство.** Из определения рода ориентируемой поверхности следует, что максимальное число попарно непересекающихся замкнутых кривых, не делящих поверхность, равно роду этой поверхности. Отсюда и из пунктов 2-3 следствия 2.1 непосредственно следует, что при  $g_f = 0$  граф  $\Gamma_f$  является деревом. Пусть  $g_f > 0$ . Из определения характеристической поверхности следует, что многообразие  $M^3 \setminus \Sigma_f$  имеет две компоненты связности  $Q_a \supset A_f, Q_r \supset R_f$ , такие что  $A_f, R_f$  являются деформационными ретрактами замыканий  $cl Q_a, cl Q_r$  множеств  $Q_a, Q_r$  соответственно. Отсюда следует, что каждое из множеств  $A_f, R_f$  содержит в точности  $g_f$  подмножеств, гомеоморфных окружности. Пусть  $\sigma_1 \in A_f$  — седловая точка, принадлежащая подмножеству множества  $A_f$ , гомеоморфному окружности. Тогда  $A_f \setminus \sigma_1 = A_f \setminus W_\sigma^s$  связно. Следовательно,  $\Sigma_f \setminus W_\sigma^s$  связно. Тогда, с учетом того факта, что устойчивые многообразия разных седловых точек не пересекаются, найдется ровно  $g_f$  сфер из множества  $L_f^s$ , не делящих  $\Sigma_f$ . Отсюда, в силу следствия 2.1, граф  $\Gamma_f$  имеет в точности  $g_f$  ребер, окрашенных в цвет  $s$ , принадлежащих непересекающимся циклам. Аналогично доказывается, что граф  $\Gamma_f$  имеет в точности  $g_f$  ребер, окрашенных в цвет  $u$ , принадлежащих непересекающимся циклам. В то же время из определения рода поверхности следует, что не более чем  $g_f$  окружностей, являющихся следами сфер  $L_f^s \cup L_f^u$ , не делит поверхность  $\Sigma_f$ . Отсюда получаем, в силу следствия 2.1, что граф  $\Gamma_f$  имеет не более чем  $g_f$  непересекающихся циклов, что и требовалось доказать.

**Доказательство завершено.**

### 3. Граф как полный топологический инвариант для класса $G(M^3)$

Пусть диффеоморфизмы  $f, f' \in G(M^3)$  топологически сопряжены. Тогда существует гомеоморфизм  $h : M^3 \rightarrow M^3$ , такой что  $f' = h^{-1}fh$ . Гомеоморфизм  $h$  отображает инвариантные многообразия диффеоморфизма  $f$  в инвариантные многообразия диффеоморфизма  $f'$ , откуда следует, что графы  $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$  изоморфны. Таким образом, необходимость условий теоремы 1.1 доказана.

Докажем достаточность. Предположим, что графы  $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$  диффеоморфизмов  $f, f' \in G(M^3)$  изоморфны и докажем, что диффеоморфизмы  $f, f'$  топологически сопряжены. В силу утверждения 2.2 достаточно доказать, что из наличия изоморфизма графов  $f, f'$  следует эквивалентность их схем  $S_f, S_{f'}$ .

Отметим, что в силу предложения 2.2 граф  $\Gamma_f$  имеет в точности  $g_f$  простых попарно непересекающихся циклов. Поскольку графы  $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$  изоморфны, то  $g_f = g_{f'} = g$ . Аналогично [9, § 3.4] показывается, что существует гомеоморфизм  $h : \Sigma_f \rightarrow \Sigma_{f'}$ , такой что  $h(\Sigma_f \cap L_f^\delta) = \Sigma_{f'} \cap L_{f'}^\delta, \delta \in \{s, u\}$ . Докажем, что существует гомеоморфизм  $\hat{h} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ , такой что  $\hat{h}(\hat{L}_f^\delta) = \hat{L}_{f'}^\delta, \delta \in \{s, u\}$ . Пусть  $\hat{\psi} : \hat{V}_f \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, \hat{\psi}' : \hat{V}_{f'} \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$  — гомеоморфизмы, удовлетворяющие условию определения 2.1 и  $r, r' \in \mathbb{S}^1$  — такие точки, что  $p_f(\Sigma_f) = \mathbb{S}_2 \times \{r\}, p_{f'}(\Sigma_{f'}) = \mathbb{S}_g \times \{r'\}$ . Обозначим через  $\eta_{r'-r}$  поворот окружности  $\mathbb{S}^1$ , перемещающий точку  $r'$  в точку  $r$ . Гомеоморфизм  $h : \Sigma_f \rightarrow \Sigma_{f'}$ , определенный на шаге 2, индуцирует гомеоморфизм  $h_r : \mathbb{S}_g \times r \rightarrow \mathbb{S}_g \times r$ , такой что  $p_f h_r = h p_{f'} \eta_{r'-r}$ . Положим  $\theta(x, r) = (x, h_r)$ . Тогда соотношение  $\hat{h} = \hat{\psi}'^{-1} \theta \hat{\psi}$  определяет искомым гомеоморфизм.

Теорема 1.1 доказана.

#### 4. Реализация

**Предложение 4.1.** Пусть  $\Gamma(g)$  — допустимый граф с  $g$  циклами. Тогда

- 1) граф  $\Gamma(g)$  вкладывается в ориентируемую поверхность  $\mathbb{S}_g$  рода  $g$ ;
- 2) существует набор попарно непересекающихся гладко вложенных окружностей  $c_1, \dots, c_k \subset \mathbb{S}_g$  со следующими свойствами:
  - (a)  $k$  равно числу ребер графа  $\Gamma(g)$ ;
  - (b) для любого  $i \in \{1, \dots, k\}$  окружность  $c_i$  пересекает ровно одно ребро  $e_i$  графа  $\Gamma(g)$ , пересечение  $c_i \cap e_i$  состоит из единственной точки, отличной от вершины графа  $\Gamma(g)$ ;
  - (c) окружность  $c_i$  окрашена в цвет ребра  $e_i$ ;
  - (d) каждая компонента связности множества  $\mathbb{S}_g \setminus \bigcup_{i=1}^k c_i$  содержит в точности одну вершину графа  $\Gamma(g)$ .

**Доказательство.** Докажем пункт 1 индукцией по числу  $g$ . Если  $g = 0$ , то граф  $\Gamma(g)$  является деревом и, следовательно, является планарным и вкладывается в сферу  $\mathbb{S}^2 = \mathbb{S}_0$ . Предположим, что при  $g > 0$  любой допустимый граф  $\Gamma(g)$  вкладывается в поверхность  $\mathbb{S}_g$  и докажем, что допустимый граф  $\Gamma(g+1)$  вкладывается в поверхность  $\mathbb{S}_{g+1}$ . Пусть ребро  $e$  принадлежит циклу графа  $\Gamma(g+1)$  и вершины  $v, w$  инцидентны ребру  $e$ . Тогда граф  $\Gamma'(g) = \Gamma(g+1) \setminus e$  связан и вкладывается в поверхность  $\mathbb{S}_g$ . Выберем два непересекающихся диска  $B_v, B_w$ , не пересекающиеся с вершинами графа  $\Gamma(g)$ , отличными от  $v, w$  и такие, что  $v \in \text{int } B_v, w \in B_w$ , приклеим к  $\mathbb{S}_g$  ручку по дискам  $B_v, B_w$  и соединим вершины  $v, w$  дугой, проходящей по ручке. В результате получим граф  $\Gamma'(g+1)$ , изоморфный графу  $\Gamma(g+1)$ , вложенный в поверхность  $\mathbb{S}_{g+1}$ .

Докажем пункт 2. Поскольку циклы графа  $\Gamma(g)$  не пересекаются, то существует набор  $c_1, \dots, c_g$  попарно непересекающихся гладко вложенных в поверхность  $\mathbb{S}_g$  окружностей со следующими свойствами: а) каждая окружность  $c_i, i \in \{1, \dots, g\}$  пересекает граф  $\Gamma(g)$  в единственной точке, принадлежащей одному из его циклов и отличной от вершины; б) существует набор попарно непересекающихся трубчатых окрестностей  $T_1, \dots, T_g$ , такой что многообразие  $S' = \mathbb{S}_g \setminus \bigcup_{i=1}^g \text{int } T_i$  гомеоморфно поверхности, получаемой из сферы  $\mathbb{S}^2$  удалением внутренности объединения  $2g$  попарно непересекающихся двумерных дисков. Тогда любая окружность  $c'$  делит многообразие  $S'$  на две компоненты связности. Пусть  $e_i$  — ребро, пересекающееся с окружностью  $c_i$ . Тогда граф  $\Gamma' = \Gamma(g) \setminus \bigcup_{i=1}^g e_i$  является деревом, и построение оставшихся окружностей проводится последовательно, начиная с ребер, инцидентных листьям дерева  $\Gamma'$ , и заканчивая ребрами, инцидентными центральной вершине или вершинам.

**Доказательство завершено.**

Пусть  $c_1, \dots, c_k \subset \mathbb{S}_g$  — окружности, удовлетворяющие заключению предложения 4.1. Перейдем к пространству  $\mathbb{S}_g \times \times \mathbb{S}^1$  и для окружности  $c_i(c_j)$ , окрашенной в цвет  $s(u)$ , положим  $\hat{\ell}^s = c_i \times \mathbb{S}^1, \hat{\ell}^u = c_j \times \mathbb{S}^1$ . Обозначим через  $\hat{L}^s, \hat{L}^u$  совокупности всех торов  $\hat{\ell}^s, \hat{\ell}^u$  соответственно.

Построим диффеоморфизм  $f \in G(M^3)$ , схема которого эквивалентна тройке  $\{\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, \hat{L}^s, \hat{L}^u\}$ . Тогда двухцветный граф  $\Gamma_f$  диффеоморфизма  $f$  будет изоморфен допустимому графу  $\Gamma_g$ . Построение диффеоморфизма  $f$  проведем по шагам, следуя алгоритму, предложенному в [11, Proposition 2.2].

**Шаг 1.** *Определение вспомогательного диффеоморфизма*  $a_g : \mathbb{S}_g \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}_g \times \mathbb{R}$ .

Положим  $a_g(x, r) = (x, r + 1)$ . Для дуги  $c_i \in \mathbb{S}_g$ , окрашенной в цвет  $\delta \in \{s, u\}$ , положим  $l^\delta = c_i \times \mathbb{R}$ , обозначим через  $L^\delta$  совокупность всех цилиндров  $l^\delta$  и через  $N_{L^\delta} = \{N_{l^\delta}\}$  множество попарно непересекающихся гладких трубчатых окрестностей цилиндров из множества  $L^\delta$ , таких что  $N_{l^\delta} = K_{l^\delta} \times \mathbb{R}$ , где  $K_{l^\delta} \subset \mathbb{S}_g$  — гладкое двумерное кольцо, содержащее окружность  $c_i$ .

**Шаг 2.** *Добавление седла индекса 1.* В пространстве  $\mathbb{R}^3$  рассмотрим подмножество  $\mathbb{U} = \{(x_1, x_2, x_3) : (x_1^2 + x_2^2)x_3^2 \leq 1\}$  и зададим на нем диффеоморфизм поток  $b$  формулой  $b(x_1, x_2, x_3) = (2^{-1}x_1, 2^{-1}x_2, 2x_3)$ . Положим  $\hat{\mathbb{N}}^s = (\mathbb{U} \setminus Ox_3)/b$ . По построению многообразию  $\hat{\mathbb{N}}^s$  диффеоморфно  $K \times \mathbb{S}^1$ , где  $K$  — стандартное двумерное кольцо, то есть диффеоморфно  $K_{l^\delta} \times \mathbb{S}^1$ . Тогда для любого  $l^s \in L^s$  существует диффеоморфизм  $\mu_{l^s}^s : N_{l^s} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3)$ , сопрягающий диффеоморфизмы  $a_g|_{N_{l^s}}$  и  $b|_{\mathbb{U} \setminus Ox_3}$ . Пусть  $k^s$  — число всех элементов множества  $L^s$ . Обозначим через  $\mu_s : N_{L^s} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{k^s}$  диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов  $\mu_{l^s}^s$ . Положим  $Q^s = (\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}) \cup_{\mu_s} (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^s})$ . Пространство  $Q^s$  является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим  $\bar{Q}^s = (\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^s})$  и обозначим через  $p_s : \bar{Q}^s \rightarrow Q^s$  естественную проекцию. Положим  $p_{s,1} = p_s|_{\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}}$ ,  $p_{s,2} = p_s|_{\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^s}}$ . Определим диффеоморфизм  $\tilde{f}_s$  на многообразии  $Q^s$  формулой

$$\tilde{f}_s(x) = \begin{cases} p_{s,1}(a_g(p_{s,1}^{-1}(x))), & x \in p_{s,1}(\mathbb{S}_g \times \mathbb{R}); \\ p_{s,2}(b(p_{s,2}^{-1}(x))), & x \in p_{s,2}(\mathbb{U} \times \{i\}), i \in \mathbb{Z}_{k^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество диффеоморфизма  $\tilde{f}_s$  состоит из  $k^s$  седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице.

**Шаг 3.** *Добавление седла индекса 2.* Будем обозначать образы множеств  $L^u$ ,  $N_{L^u}$  и их элементов относительно проекции  $p_s$  теми же буквами, что и оригиналы. Пусть  $k^u$  — число элементов множества  $L^u$ . Рассуждениями, аналогичными примененным на шаге 1, доказывается существование диффеоморфизма  $\mu_{l^u}^u : N_{l^u} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3)$ , сопрягающего диффеоморфизмы  $\tilde{f}_s|_{N_{l^u}}$  и  $b^{-1}|_{\mathbb{U} \setminus Ox_3}$ . Как и в шаге 2, обозначим через  $\mu^u : N_{L^u} \rightarrow (\mathbb{U} \setminus Ox_3) \times \mathbb{Z}_{k^u}$  диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов  $\mu_{l^u}^u$ , и положим  $Q^u = Q^s \cup_{\mu^u} (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^u})$ . Пространство  $Q^u$  является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим  $\bar{Q}^u = Q^s \cup (\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^u})$  и обозначим через  $p_u : \bar{Q}^u \rightarrow Q^u$  естественную проекцию. Положим  $p_{u,1} = p_u|_{Q^s}$ ,  $p_{u,2} = p_u|_{\mathbb{U} \times \mathbb{Z}_{k^u}}$ . Определим диффеоморфизм  $\tilde{f}_u$  на многообразии  $Q^u$  формулой

$$\tilde{f}_u(x) = \begin{cases} p_{u,1}(\tilde{f}_s(p_{u,1}^{-1}(x))), & x \in p_{u,1}(Q^s); \\ p_{u,2}(b^{-1}(p_{u,2}^{-1}(x))), & x \in p_{u,2}(\mathbb{U} \times \{i\}), i \in \mathbb{Z}_{k^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока  $\tilde{f}_u$  состоит из  $k^s$  седловых неподвижных точек с индексом Морса, равным единице, и  $k^u$  неподвижных точек с индексом Морса, равным двум.

**Шаг 4. Добавление стоков.** Обозначим через  $W_{\Omega_{\tilde{f}_u}}^s$  объединение устойчивых многообразий всех неподвижных точек диффеоморфизма  $\tilde{f}_u$ , положим  $R^s = Q^u \setminus W_{\Omega_{\tilde{f}_u}}^s$  и обозначим через  $\rho_1^s, \dots, \rho_{n^s}^s$  компоненты связности множества  $R^s$ . Из конструкции следует, что каждая компонента  $\rho_i^s$  диффеоморфна  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ . Отсюда следует, что существует диффеоморфизм  $\nu_i^s : \rho_i^s \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ , гладко сопрягающий  $\tilde{f}_u|_{\rho_i^s}$  с диффеоморфизмом  $a_0|_{\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}}$ , заданным формулой  $a_0(x_1, x_2, x_3) = (2^{-1}x_1, 2^{-1}x_2, 2^{-1}x_3)$ . Обозначим через  $\nu^s : R^s \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus O x_3) \times \mathbb{Z}_{n^s}$  диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов  $\nu_1^s, \dots, \nu_{n^s}^s$ . Положим  $M^s = Q^u \cup_{\nu^s} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$ . Пространство  $M^s$  является гладким связным ориентируемым 3-многообразием без края.

Положим  $\bar{M}^s = Q^u \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s})$  и обозначим через  $q_s : \bar{M}^s \rightarrow M^s$  естественную проекцию. Положим  $q_{s,1} = q_s|_{Q^u}$ ,  $q_{s,2} = q_s|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^s}}$  и определим диффеоморфизм  $f_s$  на многообразии  $M^s$  формулой

$$f_s(x) = \begin{cases} q_{s,1}(\tilde{h}_u(q_{s,1}^{-1}(x))), & x \in q_{s,1}(Q^u); \\ q_{s,2}(a_0(q_{s,2}^{-1}(x))), & x \in q_{s,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), i \in \mathbb{Z}_{n^s}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество потока  $f_s$  состоит из  $k^s$  седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице,  $k^u$  седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум, и  $n^s$  стоковых неподвижных гиперболических точек.

**Шаг 5. Добавление источников.** Положим  $R^u = M^s \setminus W_{\Omega_{\tilde{f}_s}}^u$  и обозначим через  $\rho_1^u, \dots, \rho_{n^u}^u$  компоненты связности множества  $R^u$ . Каждая компонента  $\rho_i^u$  диффеоморфна  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ , и диффеоморфизм  $f_s|_{\rho_i^u}$  гладко сопряжен с диффеоморфизмом  $a_0^{-1}|_{\mathbb{R}^3 \setminus O}$  посредством некоторого диффеоморфизма  $\nu_i^u$ . Обозначим через  $\nu^u : R^u \rightarrow (\mathbb{R}^3 \setminus O x_3) \times \mathbb{Z}_{n^u}$  диффеоморфизм, составленный из диффеоморфизмов  $\nu_1^u, \dots, \nu_{n^u}^u$ . Положим  $M^u = M^s \cup_{\nu^u} (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$ . Пространство  $M^u$  является гладким связным замкнутым ориентируемым 3-многообразием.

Положим  $\bar{M}^u = M^s \cup (\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u})$  и обозначим через  $q_u : \bar{M}^u \rightarrow M^u$  естественную проекцию. Положим  $q_{u,1} = q_u|_{M^s}$ ,  $q_{u,2} = q_u|_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_{n^u}}$ . Определим диффеоморфизм  $f_u$  на многообразии  $M^u$  формулой

$$f_u(x) = \begin{cases} q_{u,1}(f_s(q_{u,1}^{-1}(x))), & x \in q_{u,1}(M^s); \\ q_{u,2}(a_0^{-t}(q_{u,2}^{-1}(x))), & x \in q_{u,2}(\mathbb{R}^3 \times \{i\}), i \in \mathbb{Z}_{n^u}. \end{cases}$$

По построению неблуждающее множество диффеоморфизма  $f_u$  состоит из  $k^s$  седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным единице,  $k^u$  седловых неподвижных гиперболических точек с индексом Морса, равным двум,  $n^s$  стоковых неподвижных гиперболических точек и  $n^u$  источниковых неподвижных гиперболических точек, а его ограничение на множество  $V_f$  топологически сопряжено с потоком  $a_g$ , построенном на первом шаге. Отсюда следует, что схема диффеоморфизма  $f_u$  эквивалентна тройке  $\{\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1, L^s, L^u\}$ , следовательно, диффеоморфизм  $f_u$  является искомым.

Теорема 1.2 доказана.

## 5. Оценка скорости алгоритмов сравнения двухцветных графов

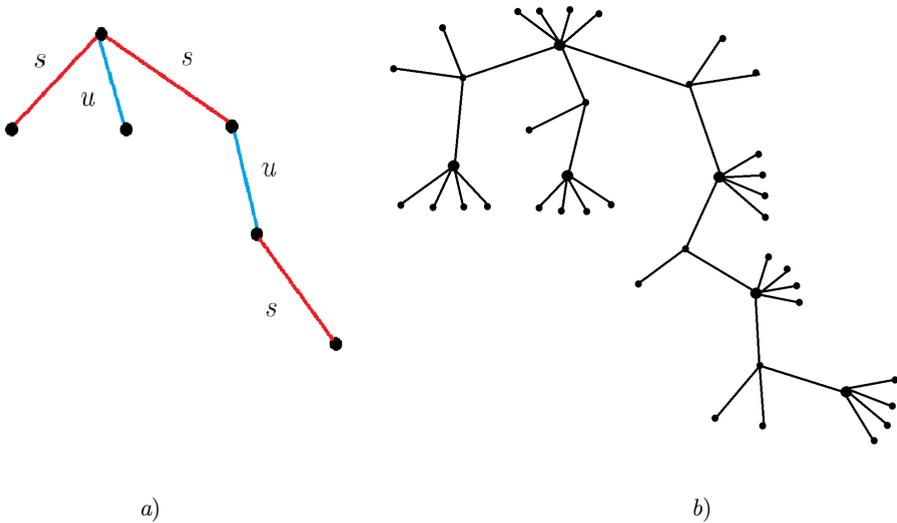
Результаты этого раздела основываются на следующем утверждении, доказанном в [12–13].

**У т в е р ж д е н и е 5.1.** Пусть  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – графы с одинаковым числом вершин  $n$ , вкладывающиеся в поверхность рода  $g \geq 0$ . Тогда существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов  $\Gamma_1, \Gamma_2$  за время  $O(n^{O(g)})$ . Если  $g = 0$ , то существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов  $\Gamma_1, \Gamma_2$  за время  $O(n)$ .

Для сведения проблемы различения двухцветных графов к утверждению 5.1 будем пользоваться идеями, предложенными Д. С. Малышевым в работе [14]. Справедливость теоремы 1.3 будет следовать из утверждения 5.1 и следующего предложения.

**П р е д л о ж е н и е 5.1.** Для любого допустимого двухцветного графа  $\Gamma$  с  $g$  циклами существует неоснащенный граф  $\Gamma'$ , вложенный в поверхность  $\mathbb{S}_g$  и такой, что допустимые графы  $\Gamma_1, \Gamma_2$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы  $\Gamma'_1, \Gamma'_2$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть теперь  $\Gamma_1, \Gamma_2$  – допустимые двухцветные графы с одинаковым числом вершин  $n$  и одинаковым числом циклов  $g$ . К каждой вершине графов  $\Gamma_1, \Gamma_2$  добавим по четыре висячие вершины. Далее, удалим каждое ребро  $e_i = (a_i, b_i)$  цвета  $u$ , добавим ребра  $(a_i, c_i), (b_i, c_i)$  и висячую вершину, смежную с  $c_i$ . Для ребра цвета  $s$  делаем то же самое, только добавим две висячие вершины, каждая из которых смежна с  $c_i$  (Рис. 5.1). В результате этих действий получим графы  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$ , имеющие  $g$  циклов.



**Рис. 5.1.** Примеры графов: а) двухцветный граф  $\Gamma$ , б) неоснащенный граф  $\Gamma'$ , соответствующий двухцветному графу  $\Gamma$

**Fig 5.1.** Examples of graphs: а) two-color graph  $\Gamma$ , б) unframed graph  $\Gamma'$  corresponding to the two-color graph  $\Gamma$

Осталось доказать, что графы  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Необходимость следует из построения графов  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$ . По-

кажем, что из изоморфности  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  следует изоморфность  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ . Действительно, вершины графов  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  степени не менее единицы и не более четырех соответствуют ребрам  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , причем степень вершины однозначно определяет цвет ребра. Для определения вершины графа  $\Gamma_i$  нужно найти вершину графа  $\Gamma'_i$  степени выше четырех и удалить все соседние с ней висячие вершины и смежные им ребра. Таким образом, по графу  $\Gamma'_i$  однозначно восстанавливается граф  $\Gamma_i$ .

Поскольку связный граф с  $n$  вершинами и  $g$  циклами имеет ровно  $n - 1 - g$  ребер, то графы  $\Gamma'_1$  и  $\Gamma'_2$  имеют не более  $n + 4n + 4(n - 1 - g) < 9n$  вершин. Следовательно, предложение 5.1 справедливо и для двухцветных графов  $\Gamma_1, \Gamma_2$ .

Теорема 1.3 доказана.

**Благодарности.** Работа выполнена в ходе проведения исследования (№ 23-00-028) в рамках программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2023–2024 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pixton D. Wild unstable manifolds // *Topology*. 1977. Vol. 16, No. 2. pp. 167–172. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(77\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3)
2. Bonatti C., Grines V. Z. Knots as topological invariants for gradient-like diffeomorphisms of the sphere  $S^3$  // *Journal of Dynamical and Control Systems*. 2000. Vol. 6, No. 4. pp. 579–602. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009508728879>
3. Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. I, II. // *Методы качественной теории дифференциальных уравнений : межвуз. темат. сб. науч. тр.* 1987. С. 24–32.
4. Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // *Математические заметки*. 1993. Т. 54, № 3. С. 3–17. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01209552>
5. Bonatti C., Grines V. Z., Medvedev V. S., Pecou E. Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // *Topology and Its Applications*. 2002. Vol. 117, No. 3. pp. 335–344. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(01\)00028-1](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(01)00028-1)
6. Бонатти К., Гринес В. З., Починка О. В. Классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях // *Труды МИАН*. 2005. Т. 250. С. 5–53.
7. Bonatti C., Grines V., Pochinka O. Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // *Duke Mathematical Journal*. 2019. Vol. 168, No. 13. pp. 2507–2558. DOI: <https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0019>
8. Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Медведев В. С., Починка О. В. О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток // *Математический сборник*. 2012. Т. 203, № 12. С. 81–104. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8094>

9. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме  $S^{n-1} \times S^1$  // Математический сборник. 2023. Т. 214, № 5. С. 97–127. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9761>
10. Palis J., Smale S. Structural stability theorems // Matematika. 1969. Vol. 13, No. 2. pp. 145–155.
11. Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds // Topology. 2004. Vol. 43, No. 2. pp. 369–391. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0040-9383\(03\)00053-3](https://doi.org/10.1016/S0040-9383(03)00053-3)
12. Hopcroft J. E., Wong J. K. Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs (preliminary report) // Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 1974. pp. 172–184. DOI: <https://doi.org/10.1145/800119.803896>
13. Miller G. Isomorphism testing for graphs of bounded genus // Proceedings of the Twelfth Annual ACM Symposium on Theory of Computing. 1980. pp. 225–235. DOI: <https://doi.org/10.1145/800141.804670>
14. Grines V., Malyshev D., Pochinka O., Zinina S. Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms // Regular and Chaotic Dynamics. 2016. Vol. 21, No. 2. pp. 189–203.

*Поступила 21.03.2023; доработана после рецензирования 10.05.2023;  
принята к публикации 25.05.2023*

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. D. Pixton, “Wild unstable manifolds”, *Topology*, 1977, 167–172. DOI: [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(77\)90014-3](https://doi.org/10.1016/0040-9383(77)90014-3)
2. V. Z. Grines, Ch. Bonatti, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere  $S^3$ ”, *J. Dyn. Control Syst.*, 2000, 579–602. DOI: <https://doi.org/10.1023/A:1009508728879>
3. A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “Dynamic properties and topological classification of gradient-like diffeomorphisms on two-dimensional manifolds I, II”, *Metody kachestvennoy teorii differentsialnykh uravneniy : sbornik trudov*, 1987, 24–32 (In Russ.).
4. V. Z. Grines, “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces”, **54** (1993), 881–889. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01209552>
5. Ch. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. Pecou, “Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and Its Applications*, **117**:3 (2002), 335–344. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(01\)00028-1](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(01)00028-1)

6. Ch. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Classification of Morse–Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic orbits on 3-manifolds”, *Proceedings of MIAN*, **250** (2005), 5–53 (In Russ.).
7. C. Bonatti, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Duke Mathematical Journal*, 2019, 2507–2558. DOI: <https://doi.org/10.1215/00127094-2019-0019>
8. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, “On the inclusion of Morse–Smale diffeomorphisms on a 3-manifold in a topological flow”, *Mathematical Collection*, 2012, 81–104 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8094>
9. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “Combinatorial invariant of gradient-like flows on a connected sum  $S^{n-1} \times S^1$ ”, *Mathematical Collection*, **5** (2023), 97–127 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/sm9761>
10. Palis J., Smale S., “Structural stability theorems”, *Matematika*, **13:2** (1969), 145–155.
11. C. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, **43:2** (2004), 369–391. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0040-9383\(03\)00053-3](https://doi.org/10.1016/S0040-9383(03)00053-3)
12. J. Hopcroft, J. Wong, “Linear time algorithm for isomorphism of planar graphs”, *Proceedings of the Sixth Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 1974, 172–184. DOI: <https://doi.org/10.1145/800119.803896>
13. Miller G., “Isomorphism testing for graphs of bounded genus”, 1980, 225–235. DOI: <https://doi.org/10.1145/800141.804670>
14. V. Grines, D. Malyshev, O. Pochinka, S. Zinina, “Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **21:2** (2016), 189–203.

*Submitted 21.03.2023; Revised 10.05.2023; Accepted 25.05.2023*

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.25.202302.53-61

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.62:532.529:541.182

## Анизотропный перенос диэлектрических частиц однородным электрическим полем в неоднородно нагретой вязкой жидкости

С. И. Мартынов

БОУ ВО «Сургутский государственный университет» ( г. Сургут, Российская Федерация)

**Аннотация.** Моделируется анизотропный перенос диэлектрических частиц однородным электрическим полем в неоднородно нагретой жидкости. Анизотропия переноса определяется механизмом взаимодействия частиц, диэлектрическая проницаемость которых зависит от температуры. Распределение температуры в частицах и жидкости определяется их температуропроводностью и не зависит от движения жидкости, что соответствует малым числам Пекле. Течение жидкости рассматривается в приближении малых чисел Рейнольдса. Перенос частиц обусловлен действием анизотропной силы со стороны приложенного однородного электрического поля и сил трения со стороны жидкости. Учитывается взаимодействие частиц. Проведено численное моделирование динамики анизотропного переноса двух диэлектрических частиц в зависимости от взаимной ориентации вектора напряженности электрического поля, градиента температуры и начальной ориентации вектора, соединяющего центры частиц. Для случая большого числа частиц найдено анизотропное равновесное распределение концентрации частиц во внешнем силовом электрическом поле с учетом механизма диффузии при взаимодействии.

**Ключевые слова:** диэлектрические частицы, электрическое поле, градиент температуры, взаимодействие, анизотропия перемещения

**Для цитирования:** Мартынов С.И. Анизотропный перенос диэлектрических частиц однородным электрическим полем в неоднородно нагретой вязкой жидкости // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 53–61. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.53-61>

*Об авторе:*

**Мартынов Сергей Иванович**, главный научный сотрудник, БОУ ВО «Сургутский государственный университет», (628412, Россия, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1.), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, [martynovsi@mail.ru](mailto:martynovsi@mail.ru)

© С. И. Мартынов



MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

# Anisotropic Transport of Dielectric Particles by a Uniform Electric Field in an Inhomogeneously Heated Viscous Fluid

S. I. Martynov

*Surgut State University (Surgut, Russian Federation)*

**Abstract.** The anisotropic transfer of dielectric particles by a uniform electric field in a nonuniformly heated fluid is modeled. The transport anisotropy is determined by the mechanism of interaction between particles whose permittivity depends on temperature. The temperature distribution in the particles and in the fluid is determined by their thermal diffusivity and does not depend on the motion of the fluid, thus corresponding to small Peclet numbers. The fluid flow is considered in the approximation of small Reynolds numbers. The transfer of particles is due to the action of an anisotropic force exerted by applied uniform electric field and friction forces exerted by the fluid. The interaction of particles is taken into account. Numerical modeling of anisotropic transport dynamics of two dielectric particles is carried out. The process mentioned depends on the mutual orientation of electric field vector, temperature gradient, and initial orientation of the vector connecting the particle centers. For the case of a large number of particles, an anisotropic equilibrium distribution of the particle concentration in an external electric field is found taking into account the mechanisms of their diffusion and interaction.

**Keywords:** dielectric particles, electric field, temperature gradient, interaction, displacement anisotropy

**For citation:** *S. I. Martynov. Anisotropic Transport of Dielectric Particles by a Uniform Electric Field in an Inhomogeneously Heated Viscous Fluid. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 25:2(2023), 53–61. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.53-61>*

*About the author:*

**Sergey I. Martynov**, Chief Researcher, Surgut State University (1 Lenina Av., Surgut 628412, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, [martynovsi@mail.ru](mailto:martynovsi@mail.ru)

## 1. Введение

Использование управляемых физических процессов в микро- и наномасштабе является одним из приоритетных направлений развития современных технологий. Активно развиваются технологии проведения на подложке площадью в несколько квадратных сантиметров с использованием микро- или наноскопического количества образцов полного цикла операций, связанных с реализацией многостадийного химического и биологического анализов или органического/неорганического синтеза. Устройства, осуществляющие подобные операции, получили названия «микрофлюидные системы» (Micro Fluidic Systems) и «лаборатория на чипе» микрофлюидных систем с микроэкстракторами, микрореакторами, микронасосами, микросмесителями, микроклапанами, микротеплообменниками, микродатчиками и с наноразмерными функциональными

*S. I. Martynov. Anisotropic transport of dielectric particles by a uniform electric field in an . . .*

элементами. Развитие этих технологий открывает перспективы для таких областей, как комбинаторная и синтетическая химия, геномика и протеомика, высокопроизводительный скрининг (High Throughput Screening Systems), используемый при создании новых лекарственных препаратов, многих других [1]. Необходимость изучения биологических объектов привела к появлению новых методов и подходов, обеспечивающих возможность эффективного неразрушающего воздействия на частицы в жидкостях с помощью внешних полей. К ним относятся технологии, основанные на управлении движением и микро- и наноразделением (молекулярная и клеточная сортировка). Существуют следующие эффективные способы внешнего физического воздействия на частицы: электрические поля (постоянное и переменное); фотонное поле — обычно лазерное излучение; акустические и магнитные поля. Одним из активно используемых методов управления движением и разделением микрочастиц в жидких средах является диэлектрофорез. В его основе [2–3] лежит транспорт поляризующихся частиц под действием силы со стороны неоднородного электрического поля. В результате действия этой силы частицы с разными диэлектрическими свойствами и размерами отделяются и сосредотачиваются в различных областях межэлектродного пространства. В таком разделении есть аналогия с действием силы тяжести на частицы в жидкости: более плотные опускаются ко дну, а менее плотные поднимаются к поверхности. Другими словами разделение частиц происходит вдоль направления силы тяжести. Возможность создавать градиент напряженности электрического поля в любом направлении позволяет осуществлять разделение частиц диэлектрофорезом в том направлении, в котором необходимо устройству. Разделение частиц с различными диэлектрическими свойствами активно используется в медицине для разделения больных и здоровых клеток [4–6]. Однако в реальных условиях температура исследуемого объекта неоднородна. Наличие градиента температуры позволяет использовать этот фактор для разделения частиц. В работе [7] показано, что при наличии градиента температуры появляется анизотропия в действии на поляризующиеся частицы силы со стороны однородного электрического поля. Это открывает новые возможности в разделении частиц по их диэлектрическим свойствам. В настоящей работе приводятся результаты моделирования такого разделения на примере двух взаимодействующих поляризующихся частиц в неполяризующейся жидкости.

## 2. Постановка задачи

Моделируется транспорт двух сферических частиц радиуса  $a$  в жидкости с плотностью  $\rho$ , вязкостью  $\eta$ , постоянной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_f$  и коэффициентом температуропроводности  $\chi_f$ . В жидкости далеко от частиц приложено однородное электрическое поле напряженности  $\mathbf{E}_0$  и градиент температуры  $\nabla T_0$ . Положения центров двух сфер будем обозначать векторами  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(t)$  соответственно. Для введенных векторов имеем соотношение:

$$\mathbf{r}_1(t) - \mathbf{r}_2(t) = \mathbf{r}(t),$$

где вектор  $\mathbf{r}$  соединяет центры двух сфер.

Перенос частиц в жидкости определяется силами, действующими на неё со стороны жидкости и поля, причём эти силы зависят от распределения соответствующих параметров вблизи частиц. В однородном электрическом поле сила, действующая на частицы, равна нулю. Однако наличие частиц с другой диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_p$  и другим коэффициентом температуропроводности  $\chi_p$ , чем у жидкости, приводит к возмущению однородного электрического поля и распределения температуры в

жидкости. Поскольку считается, что диэлектрическая проницаемость частиц  $\varepsilon_p(T)$  зависит от температуры, то неоднородное распределение температуры в частицах также приводит к искажению электрического поля вокруг них. Следовательно, возмущение электрического поля в жидкости вокруг частиц обусловлено как различием диэлектрической проницаемости жидкости и частиц, так и неоднородностью диэлектрической проницаемости частиц из-за их неоднородного нагрева. Эти возмущения приводят к появлению силы, действующей на частицы со стороны электрического поля. Движение частиц изменяет распределение скорости  $\mathbf{u}$  и давления  $p$  в жидкости, что создаёт силы, действующие на них в результате гидродинамического взаимодействия. В результате действия всех этих сил происходит перемещение частиц. Закон движения центров частиц  $\mathbf{r}_1(t)$  и  $\mathbf{r}_2(t)$  определяется из уравнений движения с учетом действующим на нее сил и моментов. В рассматриваемом случае система уравнений записывается в виде

$$\mathbf{F}_k^e + \mathbf{F}_k^h = 0, \quad \mathbf{T}_k^e + \mathbf{T}_k^h = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{F}_s^h$  – силы;  $\mathbf{T}_s^h$  – моменты сил со стороны жидкости;  $\mathbf{F}_s^e$ ,  $\mathbf{T}_s^e$  – силы и моменты сил со стороны электрического поля, действующие на частицу с номером  $s = 1, 2$ . Силы со стороны электрического поля можно записать в виде

$$\mathbf{F}_s^e = \mathbf{F}_{s0}^e + \mathbf{F}_{sT}^e, \quad s = 1, 2.$$

Индексами «0» и «T» обозначены составляющиеся силы со стороны электрического поля, действующие на частицы в однородном и градиентном поле температуры соответственно. В нулевом по градиенту  $\nabla T_0$  приближении выражение для сил  $\mathbf{F}_{s0}^e$ , действующих на частицы со стороны электрического поля, представлено в работе [8]:

$$\mathbf{F}_{10}^{(e)} = -\varepsilon_f k_\varepsilon^2 \left[ 6 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{E}_0 + 3 \frac{E_0^2}{r^5} \mathbf{r} - 15 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})^2}{r^7} \mathbf{r} \right], \quad \mathbf{F}_{20}^{(e)} = -\mathbf{F}_{10}^{(e)}. \quad (2.2)$$

Здесь введено следующее обозначение:

$$k_\varepsilon = -a^3 \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_f}.$$

Выражение для сил  $\mathbf{F}_{sT}^e$ , действующих на каждую частицу со стороны электрического поля в линейном приближении по градиенту температуры, получено в работе [7]:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1T}^{(e)} = & -\varepsilon_f k_\varepsilon G \left[ 6 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla T_0)}{r^5} \mathbf{E}_0 + 3 \frac{E_0^2}{r^5} \nabla T_0 - 15 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})^2}{r^7} \nabla T_0 - 15 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{r}) E_0^2}{r^7} \mathbf{r} - \right. \\ & \left. - 30 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^7} \mathbf{E}_0 - 30 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{E}_0)(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^7} \mathbf{r} + 105 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})^2}{r^9} \mathbf{r} \right], \quad (2.3) \\ & \mathbf{F}_{2t}^{(e)} = \mathbf{F}_{1t}^{(e)}. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие коэффициенты:

$$\begin{aligned} K = & -\frac{q_\varepsilon q_\chi}{\varepsilon_{p0}} \left( \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial T} \right)_0, \quad G = -\frac{2\varepsilon_{p0}}{3(2\varepsilon_{p0} + 3\varepsilon_f)} a^5 K, \\ q_\varepsilon = & \frac{3\varepsilon_f}{\varepsilon_{p0} + 2\varepsilon_f}, \quad q_\chi = \frac{3\chi_f}{\chi_p + 2\chi_f}. \end{aligned}$$

В обоих случаях при вычислении силы со стороны электрического поля учитывалось взаимодействие частиц. Первая составляющая силы со стороны электрического

поля зависит от взаимной ориентации вектора  $\mathbf{E}_0$  напряженности внешнего электрического поля и вектора  $\mathbf{r}$ , соединяющего центры частиц. Эта составляющая силы может перемещать частицы относительно друг друга до достижения определенной ориентации относительно друг друга. Вторая составляющая силы, зависящая от градиента температуры, отвечает за перемещение частиц в пространстве. Структура этой силы такова, что перемещение частиц зависит от ориентации вектора напряженности электрического поля и градиента температуры. В результате совместного действия этих сил получаем анизотропию перемещения частиц во внешнем электрическом поле.

Гидродинамические силы, действующие на частицы с учетом их взаимодействия, были определены в работе [9]. Получены следующие выражения для сил, действующих на сферы в покоящейся на бесконечности жидкости:

$$F_{1i} = -6\pi\eta a \left[ U_{1i}^{\parallel} \left( 1 + \frac{9a^2}{4r^2} \right) + U_{2i}^{\parallel} \left( -\frac{3a}{2r} - \frac{19a^3}{8r^3} \right) + U_{1i}^{\perp} \left( 1 + \frac{9a^2}{16r^2} \right) + U_{2i}^{\perp} \left( \frac{3a}{4r} + \frac{59a^3}{64r^3} \right) \right], \quad (2.4)$$

$$F_{2i} = -6\pi\eta a \left[ U_{2i}^{\parallel} \left( 1 + \frac{9a^2}{4r^2} \right) + U_{1i}^{\parallel} \left( -\frac{3a}{2r} - \frac{19a^3}{8r^3} \right) + U_{2i}^{\perp} \left( 1 + \frac{9a^2}{16r^2} \right) + U_{1i}^{\perp} \left( \frac{3a}{4r} + \frac{59a^3}{64r^3} \right) \right]. \quad (2.5)$$

Индексами  $\parallel$  и  $\perp$  обозначены составляющие скорости частиц вдоль и перпендикулярно вектору  $\mathbf{r}$ , которые находятся следующим образом:

$$\mathbf{U}^{\parallel} = (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^2}, \quad \mathbf{U}^{\perp} = \mathbf{U} - (\mathbf{U} \cdot \mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{r^2}.$$

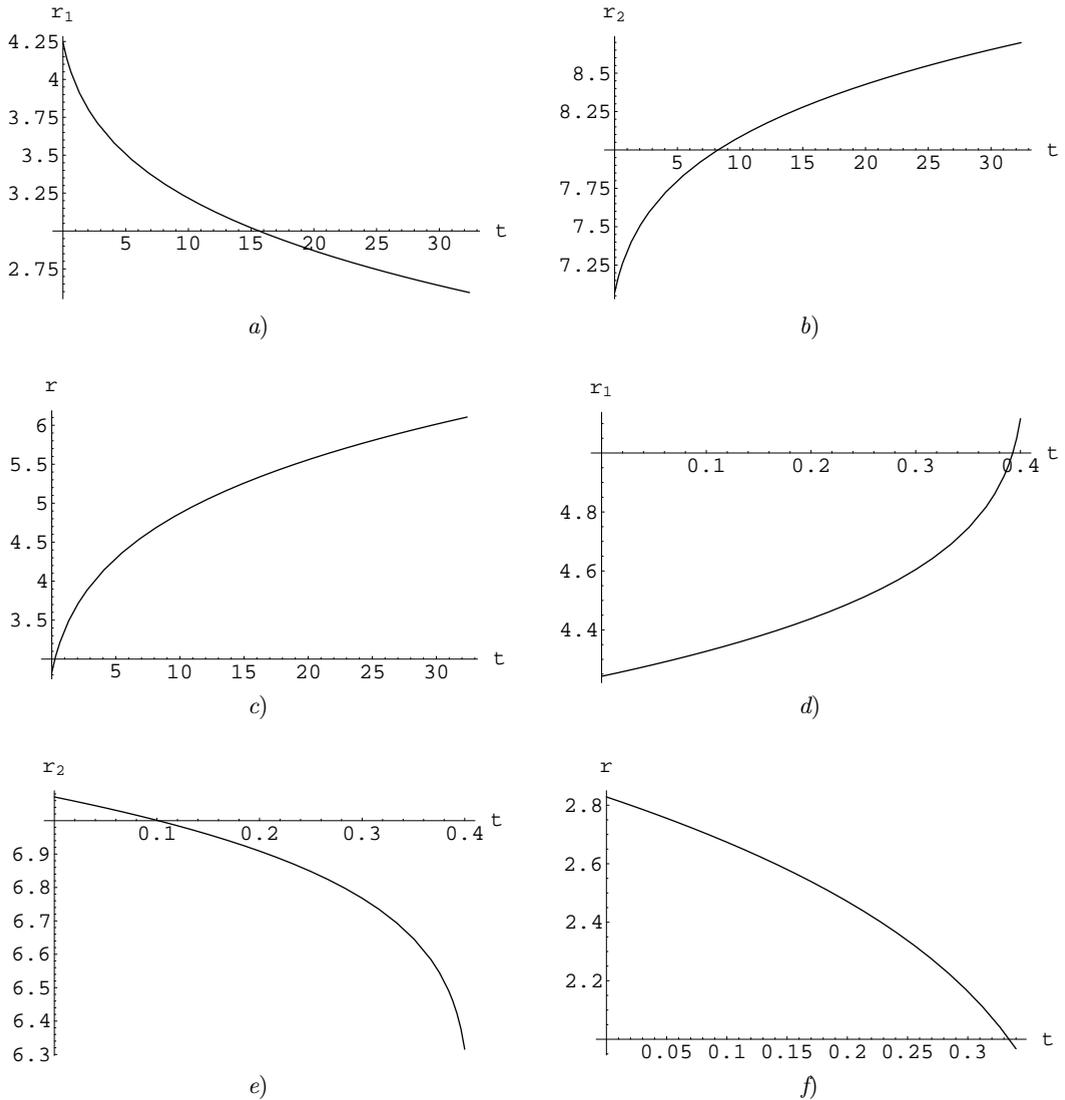
С учетом того, что скорости частиц определяются равенствами:

$$\mathbf{U}_1 = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}, \quad \mathbf{U}_2 = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt},$$

то после подстановки этих соотношений в выражения для гидродинамических сил (2.4), (2.5) получим из условия (2.1) систему дифференциальных уравнений для определения законов движения частиц  $\mathbf{r}_1(t)$ ,  $\mathbf{r}_2(t)$ .

### 3. Результаты моделирования

Для численного моделирования динамики частиц рассматривался случай, когда векторы  $\mathbf{E}_0$ ,  $\nabla T_0$  и  $\mathbf{r}$  лежат в одной плоскости. В системе координат  $XOY$ , выбранной в этой плоскости, вектор напряженности электрического поля представляется в виде  $bfE_0 = E_0(\cos\omega, \sin\omega)$ . Вектор градиента температуры имеет составляющие  $\nabla T_0 = (q, q)$ . В выбранной системе координат  $XOY$  каждый из векторов  $\mathbf{r}_1(t)$ ,  $\mathbf{r}_2(t)$  имеет две координаты. В итоге получаем систему из четырех нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка, которая решалась численно методом Рунге — Кутты. На рис. 3.1 приводятся результаты численного моделирования динамики частиц, показывающие наличие анизотропии перемещения частиц при различных ориентациях вектора напряженности электрического поля относительно градиента температуры.



**Рис. 3.1.** Численные расчеты перемещения частиц: а)  $r_1$ ; б)  $r_2$ ; в)  $r$  при ориентации вектора  $\mathbf{E}_0$  вдоль градиента температуры; д)  $r_1^*$ ; е)  $r_2^*$ ; ф)  $r^*$  при ориентации вектора  $\mathbf{E}_0$  перпендикулярно градиенту температуры

**Fig 3.1.** Numerical calculations of particle displacement: а)  $r_1$ ; б)  $r_2$ ; в)  $r$  when the vector  $\mathbf{E}_0$  is oriented along the temperature gradient; д)  $r_1^*$ ; е)  $r_2^*$ ; ф)  $r^*$  when the vector  $\mathbf{E}_0$  is oriented perpendicular to the temperature gradient

Здесь используются безразмерные величины: под  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r$  понимаются перемещения частиц, отнесенные к радиусу частиц  $a$ , а под  $t$  - время, отнесенное к характерной величине  $a^2\rho/\eta$ . Вычисления проводились при следующих значениях параметров в системе СГС (сантиметр, грамм, секунда):  $\varepsilon_f = 1$ ,  $\varepsilon_p = 3$ ,  $\chi_f = 2$ ,  $\chi_p = 5$ ,  $E_0 = 100$ ,  $\rho = 0.889$ ,  $\eta = 0.01$ ,  $a = 0.001$ ,  $q = 1.5$ . Рассматривались две ориентации вектора на-

пряженности электрического поля – вдоль и перпендикулярно градиенту температуры, что соответствует значениям  $\omega = \pi/4$ ,  $\omega = 3\pi/4$ . Начальное положение первой частицы определяется вектором  $\mathbf{r}_{10} = (3, 2)$ , а второй частицы – вектором  $\mathbf{r}_{20} = (5, 4)$ .

Как видно из приведенных расчетов на рис. 3.1, имеется существенная анизотропия в перемещении частиц в зависимости от ориентации вектора напряженности электрического поля относительно градиента температуры. В результате действия диэлектродиффузионной силы частицы могут как собираться вместе, так и отдаляться друг от друга. Аналогичный результат получается и при других начальных положениях частиц. Полученные результаты позволяют утверждать, что диэлектродиффузионная сила отвечает за анизотропное перемещение частиц, концентрируя их в нужном месте или, наоборот, разделяя их. Таким образом, предложенный механизм диэлектродиффузии позволяет управлять перемещением частиц в однородном электрическом поле за счет изменения направления вектора напряженности относительно градиента температуры.

#### 4. Заключение

Рассмотрен механизм действия диэлектродиффузионной силы, действующей на поляризующиеся частицы в неоднородно нагретой жидкости в однородном электрическом поле. Учитывается парное взаимодействие частиц. Считается, что несущая жидкость не поляризуется. Полученные результаты показывают анизотропию перемещение частиц в зависимости от взаимной ориентации векторов напряженности электрического поля и градиента температуры. Электрическое поле с вектором напряженности вдоль градиента температуры собирает частицы вместе, а в случае ориентации вектора напряженности электрического поля перпендикулярно градиенту температуры – удаляет частицы друг от друга. Предложенный механизм управления движением частиц может быть использован в микрофлюидных устройствах.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gharib G., Butun I., Munganli Z., Kozalak G., Namli I., Sarraf S., Ahmadi V., Toyran E., Van Wijnen A., Kosar A. Biomedical applications of microfluidic devices: a review // Biosensors. 2022. Vol. 12, No. 11. DOI: <https://doi.org/10.3390/bios12111023>
2. Pohl H. A. Dielectrophoresis: the behavior of neutral matter in nonuniform electric fields. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. 720 p.
3. Jones T. B. Electromechanics of particles. Cambridge: Cambridge University Press, 1995. 288 p.
4. Shi L., Zhong X., Ding H., Yu Zh., Jin J., Zhou T., Zhu Y., Liu Zh. Continuous separation of microparticles based on optically induced dielectrophoresis // Microfluidics and Nanofluidics. 2022. Vol. 26, No. 6. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10404-021-02512-0>
5. Valijam S., Salehi A., Andersson M. Design of a low-voltage dielectrophoresis lab-on-the chip to separate tumor and blood cells // Microfluidics and Nanofluidics. 2023. Vol. 27, No. 22. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10404-023-02632-9>

6. Bu Y., Wang J., Ni S., Guob Yu., Yobas L. Continuous-flow label-free size fractionation of extracellular vesicles through electrothermal fluid rolls and dielectrophoresis synergistically integrated in a microfluidic device // *Lab Chip*. 2023. Vol. 23. pp. 2421–2433. DOI: <https://doi.org/10.1039/D2LC01193J>
7. Мартынов С. И. Определение средней электро-термофоретической силы, действующей на систему поляризующихся частиц в неоднородно нагретой жидкости // *Журнал Средневожского математического общества*. 2022. Т. 24, № 2. С. 185–199. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.185-199>
8. Борискина И. П., Сыромьясов А. О. Парное магнитогидродинамическое взаимодействие твердых сфер в медленном продольном потоке вязкой жидкости // *Журнал Средневожского математического общества*. 2019. Т. 21, № 1. С. 78-88. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201901.78-88>
9. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // *Изв. РАН. Механ. жидкости и газа*. 1998. № 2. С. 112–119.

*Поступила 01.03.2023; доработана после рецензирования 12.05.2023;  
принята к публикации 25.05.2023*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. G. Gharib, I. Butun, Z. Muganli, G. Kozalak, I. Namli, S. Sarraf, V. Ahmadi, E. Toyran, A. Van Wijnen, A. Kosar, “Biomedical applications of microfluidic devices: a review”, *Biosensors*, **12**:11 (2022). DOI: <https://doi.org/10.3390/bios12111023>
2. H. A. Pohl, *Dielectrophoresis: the behavior of neutral matter in nonuniform electric fields*, Cambridge University Press, Cambridge, 1978, 720 p.
3. T. B. Jones, *Electromechanics of particles*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995, 288 p.
4. L. Shi, X. Zhong, H. Ding, Zh. Yu, J. Jin, T. Zhou, Y. Zhu, Zh. Liu, “Continuous separation of microparticles based on optically induced dielectrophoresis”, *Microfluidics and Nanofluidics*, **26**:6 (2022). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10404-021-02512-0>
5. S. Valijam, A. Salehi, M. Andersson, “Design of a low-voltage dielectrophoresis lab-on-the chip to separate tumor and blood cells”, *Microfluidics and Nanofluidics*, **27**:22 (2023). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10404-023-02632-9>
6. Y. Bu, J. Wang, S. Ni, Yu. Guob, L. Yobas, “Continuous-flow label-free size fractionation of extracellular vesicles through electrothermal fluid rolls and dielectrophoresis synergistically integrated in a microfluidic device”, *Lab Chip*, **23** (2023), 2421–2433. DOI: <https://doi.org/10.1039/D2LC01193J> 1-11

7. S. I. Martynov, “Determination of the average electro-thermophoretic force acting on a system of polarizable particles in an inhomogeneously heated fluid”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **24**:2 (2022), 185–199 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.185-199>
8. I. P. Boriskina, A. O. Syromyasov, “Pair-wise MHD-interaction of rigid spheres in longitudinal creeping flow”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **21**:1 (2019), 78–88 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201901.78-88>
9. S. I. Martynov, “Hydrodynamic interaction of particles”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 1998, no. 2, 112–119 (In Russ.).

*Submitted 01.03.2023; Revised 12.05.2023; Accepted 25.05.2023*

*The author have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

УДК 517.938

## О сведении проблемы топологической классификации градиентно-подобных потоков к классификации полярных потоков

И. А. Сараев

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»  
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В статье рассматривается класс  $G(M^n)$  градиентно-подобных потоков на связных замкнутых многообразиях размерности  $n \geq 4$ , такой что для любого потока  $f^t \in G(M^n)$  устойчивые и неустойчивые многообразия седловых состояний равновесия размерности  $(n - 1)$  не пересекаются с инвариантными многообразиями других седловых состояний равновесия. Известно, что несущее многообразие любого потока  $f^t$  из класса  $G(M^n)$  раскладывается в связную сумму сферы  $\mathbb{S}^n$ ,  $g_{f^t} \geq 0$  копий прямых произведений  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  и односвязного многообразия, отличного от сферы. Число  $g_{f^t}$  определяется только числом узловых состояний равновесия и числом седловых состояний равновесия, одно из инвариантных многообразий которых имеет размерность  $(n - 1)$  (такие состояния равновесия будем называть тривиальными седлами), а односвязное многообразие, отличное от сферы, присутствует в связной сумме тогда и только тогда, когда множество седловых состояний равновесия содержит точки, размерность неустойчивого многообразия которых принадлежит множеству  $\{2, \dots, n - 2\}$  (такие состояния равновесия будем называть нетривиальными седлами). Более того, для потоков из класса  $G(M^n)$  без нетривиальных седел имеется полная топологическая классификация. В настоящей работе доказывается, что для любого потока  $f^t \in G(M^n)$  разбиение несущего многообразия на связную сумму можно осуществить по попарно непересекающимся гладко вложенным сферам (разбивающим сферам), не содержащим состояний равновесия потока  $f^t$  и трансверсально пересекающим его траектории. Ограничение потока  $f^t$  на дополнения до этих сфер однозначно (с точностью до топологической эквивалентности и нумерации) определяет конечный набор потоков  $f_1^t, \dots, f_l^t$ , заданных на компонентах связной суммы. Более того, для любого  $j \in \{1, \dots, l\}$ , множество седловых состояний равновесия потока  $f_j^t$  либо состоит только из тривиальных седел, либо только из нетривиальных, и тогда поток  $f_j^t$  является полярным. Мы вводим понятие согласованной топологической эквивалентности для потоков  $f_1^t, \dots, f_l^t$  и показываем, что потоки  $f^t, f'^t \in G(M^n)$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда для каждого из этих потоков существуют наборы разбивающих сфер, определяющих согласованно топологически эквивалентные потоки на компонентах связной суммы.

**Ключевые слова:** градиентно-подобные потоки, многообразие, топологическая классификация, потоки Морса-Смейла, функция Морса

**Для цитирования:** Сараев И. А. О сведении проблемы топологической классификации градиентно-подобных потоков к классификации полярных потоков // Журнал Средневолжского математического общества. 2023. Т. 25, № 2. С. 62–75. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.62-75>

Об авторе:

**Сараев Илья Александрович**, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, стажер-исследователь лаборатории «Динамические системы и приложения», Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7608-2634>, [isaraev@hse.ru](mailto:isaraev@hse.ru)

*Original article*

MSC2020 37D15

## On the reduction of the topological classification of gradient-like flows problem to the classification of polar flows

I. A. Saraev

*Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** In this paper we consider a class  $G(M^n)$  of gradient-like flows on connected closed manifolds of dimension  $n \geq 4$  such that for any flow  $f^t \in G(M^n)$  stable and unstable invariant manifolds of saddle equilibria do not intersect invariant manifolds of other saddle equilibria. It is known that the ambient manifold of any flow from the class  $G(M^n)$  can be splitted into connected sum of the sphere  $S^n$ ,  $g_{f^t} \geq 0$  copies of direct products  $S^{n-1} \times S^1$ , and a simply connected manifold which is not homeomorphic to the sphere. The number  $g_{f^t}$  is determined only by the number of nodal equilibria and the number of saddle equilibria such that one of their invariant manifolds has the dimension  $(n-1)$  (we call such equilibria trivial saddles). A simply connected manifold which is not homeomorphic to the sphere presents in the splitting if and only if the set of saddle equilibria contains points with unstable manifolds of dimension  $i \in \{2, \dots, n-2\}$  (we call such equilibria non-trivial saddles). Moreover, the complete topological classification was obtained for flows from the class  $G(M^n)$  without non-trivial saddles. In this paper we prove that for any flow  $f^t \in G(M^n)$  the carrier manifold can be splitted into a connected sum along pairwise disjoint smoothly embedded spheres (separating spheres) that do not contain equilibrium states of the flow  $f^t$  and transversally intersect its trajectories. The restriction of the flow  $f^t$  to the complements to these spheres uniquely (up to topological equivalence and numbering) defines a finite set of flows  $f_1^t, \dots, f_l^t$  defined on the components of a connected sum. Moreover, for any  $j \in 1, \dots, l$ , the set of saddle equilibria of the flow  $f_j^t$  consists either only of trivial saddles or only of non-trivial ones and then the flow  $f_j^t$  is polar. We introduce the notion of consistent topological equivalence for flows  $f_1^t, \dots, f_j^t$  and show that flows  $f^t, f'^t \in G(M^n)$  are topologically equivalent if and only if for each of these flows the set of separating spheres exists that defines consistently topologically equivalent flows on the components of the connected sum.

**Keywords:** gradient-like flows, manifold, topological classification, Morse-Smale flows, Morse function.

**For citation:** I. A. Saraev. On the reduction of the topological classification of gradient-like flows problem to the classification of polar flows. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 25:2(2023), 62–75. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.25.202302.62-75>

*About the author:*

**Пуя А. Сараев**, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, Trainee Researcher, Laboratory “Dynamical Systems and Applications”, Higher School of Economics (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7608-2634>, [isaraev@hse.ru](mailto:isaraev@hse.ru)

## 1. Введение

Пусть  $M^n$  — замкнутое ориентируемое гладкое многообразие размерности  $n$ . Поток  $f^t$  на  $M^n$  называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество  $\Omega_{f^t}$  состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально. Обозначим  $G(M^n)$  класс градиентно-подобных потоков на  $M^n$ , таких что для любого потока  $f^t \in G(M^n)$  устойчивые и неустойчивые многообразия седловых состояний равновесия размерности  $(n-1)$  не пересекаются с инвариантными многообразиями других седловых состояний равновесия.

Пусть  $\Omega_{f^t}$  обозначает множество всех состояний равновесия потока  $f^t \in G(M^n)$ , а  $\Omega_{f^t}^i$  — множество состояний равновесия, размерность неустойчивого многообразия которых (индекс Морса) равна  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Положим

$$\mu_{f^t} = |\Omega_{f^t}^0 \cup \Omega_{f^t}^n|, \nu_{f^t} = |\Omega_{f^t}^1 \cup \Omega_{f^t}^{n-1}|, g_{f^t} = (\nu_{f^t} - \mu_{f^t} + 2)/2,$$

и обозначим через  $m_{f^t}$  число седловых состояний равновесия, индекс Морса которых больше единицы, но меньше  $(n-1)$  (если  $n=3$ , то  $m_{f^t}=0$ ). Седловые состояния равновесия, принадлежащие множеству  $\Omega_{f^t}^1 \cup \Omega_{f^t}^{n-1}$ , будем называть *тривиальными*, седловые состояния равновесия, отличные от тривиальных, будем называть *нетривиальными*.

Будем обозначать  $\mathcal{S}_g^n$  многообразие, гомеоморфное связной сумме сферы  $\mathbb{S}^n$  и  $g \geq 0$  копий прямых произведений  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ; и  $\mathcal{N}^n$  — односвязное многообразие, не гомеоморфное сфере, допускающее поток из класса  $G(M^n)$ , неблуждающее множество которого не содержит тривиальных седел (из того факта, что односвязное многообразие, допускающее градиентный поток без тривиальных седел, не гомеоморфно сфере, сразу следует, что неблуждающее множество такого потока содержит по крайней мере одно нетривиальное седло).

Из работ [1–3] вытекает следующий результат.

**У т в е р ж д е н и е 1.1.** Пусть  $f^t \in G(M^n)$ ,  $n \geq 3$ . Тогда

- 1)  $g_{f^t}$  является целым числом;
- 2) если  $m_{f^t} = 0$ , то  $M^n$  гомеоморфно  $\mathcal{S}_{g_{f^t}}^n$ ;
- 3) если  $m_{f^t} > 0$ , то  $M^n$  гомеоморфно  $\mathcal{S}_{g_{f^t}}^n \# \mathcal{N}^n$ ;
- 4) если  $m_{f^t} = 1$ , то  $n \in \{4, 8, 16\}$ , и при  $n = 4$  многообразие  $\mathcal{N}^n$  гомеоморфно комплексной проективной плоскости.

В работе [4] показано, что если несущее многообразие  $M^n$  потока  $f^t \in G(M^n)$  гомеоморфно  $\mathcal{S}_g^n$ , то множества  $\Omega_{f^t}^i$  пусты для  $i \in \{2, \dots, n-2\}$ , а в работе [5] (см. также [6]) решена проблема топологической классификации таких потоков. Эти результаты вместе со следующим вспомогательным утверждением послужили мотивировкой к получению результатов настоящей работы.

Пусть  $f^t$  — произвольный гладкий поток на  $M^n$  и  $S^{n-1} \subset M^n$  — гладко или локально плоско вложенная в  $M^n$  сфера, не содержащая его состояний равновесия и трансверсально пересекающая траектории потока. В случае локально плоской сферы трансверсальность пересечения означает, что пересечение любой траектории потока  $f^t$  со сферой  $S^{n-1}$  либо пусто, либо состоит из единственной точки. Будем говорить, что  $S^{n-1}$  является *сферой без контакта* для потока  $f^t$ . Если  $M^n \setminus S^{n-1}$  несвязно, то будем называть сферу  $S^{n-1}$  *разбивающей сферой без контакта*. Пусть  $T(S^{n-1})$  — трубчатая окрестность сферы  $S^{n-1}$ , не содержащая состояний равновесия потока  $f^t$  и такая, что ее граница  $\partial T(S^{n-1})$  состоит из двух сфер  $S_-^{n-1}, S_+^{n-1}$  без контакта для потока  $f^t$ . Обозначим через  $\eta : S_-^{n-1} \rightarrow S_+^{n-1}$  диффеоморфизм, определённый по правилу  $\eta(x) = \mathcal{O}_{f^t}(x) \cap S_+^{n-1}$ ,  $x \in S_-^{n-1}$ , где  $\mathcal{O}_{f^t}(x)$  — траектория потока  $f^t$ , проходящая через точку  $x$ .

Пусть кроме потока  $f^t$ , на многообразии  $M^n$  задан поток  $f^{t'}$ . Здесь и далее будем считать, что для потока  $f^{t'}$  введены те же объекты, что и для потока  $f^t$ , а обозначения этих объектов отличаются штрихами от обозначений аналогичных объектов для потока  $f^t$ .

**О п р е д е л е н и е 1.1.** *Гомеоморфизмы  $h_- : S_-^{n-1} \rightarrow S_-^{n-1}$ ,  $h_+ : S_+^{n-1} \rightarrow S_+^{n-1}$  называются согласованными, если выполняется равенство  $h_+ \eta = \eta' h_-$ .*

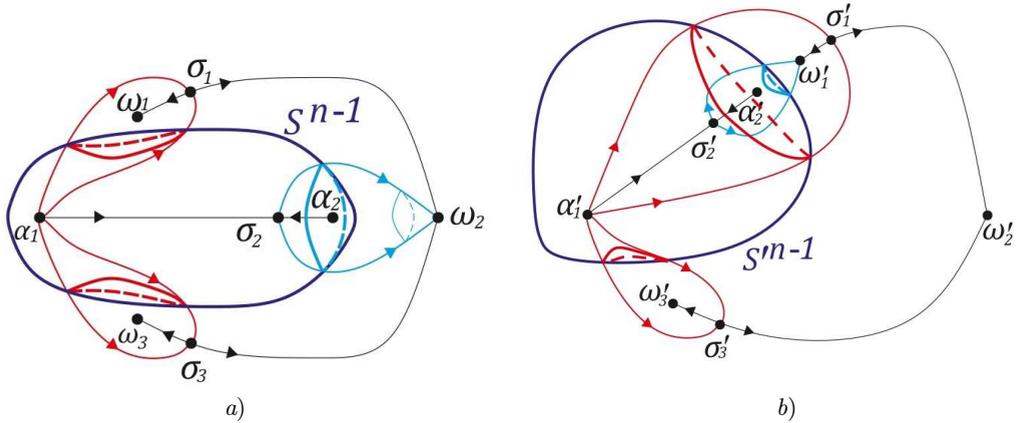
Пусть  $S^{n-1}$  — разбивающая сфера без контакта для потока  $f^t$ ;  $T(S^{n-1})$  — ее трубчатая окрестность и  $P_-, P_+$  — компоненты связности множества  $M^n \setminus \text{int } T(S^{n-1})$ . Обозначим через  $f_-^t, f_+^t$ , соответственно, ограничение потока  $f^t$  на  $P_-, P_+$ . Будем называть потоки  $f_-^t, f_+^t$  *составляющими потоками* для потока  $f^t$ .

**П р е д л о ж е н и е 1.1.** *Пусть для потоков  $f^t, f^{t'}$  существуют разбивающие сферы без контакта  $S^{n-1}, S'^{n-1}$ , такие что составляющие потоки  $f_-^t, f_+^t$  и  $f_-^{t'}, f_+^{t'}$  топологически эквивалентны посредством гомеоморфизмов  $h_- : P_- \rightarrow P'_-$ ,  $h_+ : P_+ \rightarrow P'_+$ , ограничения  $h_+|_{S_+^{n-1}}, h_-|_{S_-^{n-1}}$  которых на сферы  $S_+^{n-1}, S_-^{n-1}$ , соответственно, согласованны. Тогда  $f^t, f^{t'}$  топологически эквивалентны.*

**З а м е ч а н и е 1.1.** *Отметим, что если поток  $f^t$  имеет разбивающую сферу без контакта, то любой топологически эквивалентный ему поток  $f^{t'}$  имеет по крайней мере локально плоскую разбивающую сферу без контакта и составляющие пары потоков для  $f^t, f^{t'}$  топологически эквивалентны. На Рис. 1.1 видно, что условие согласованности гомеоморфизмов  $h_-, h_+$  в предложении 1.1 нельзя ослабить.*

В этой работе для произвольного потока  $f^t \in G(M^n)$  мы находим минимальный набор разбивающих сфер, таких что множество седловых состояний равновесия каждого составляющего потока для  $f^t$  состоит либо только из тривиальных седел, либо только из нетривиальных. Предложенная конструкция вместе с предложением 1.1 позволяет свести проблему топологической классификации потоков из класса  $G(M^n)$  к классификации полярных потоков на односвязных замкнутых многообразиях.

Сформулируем результаты более точно. Пусть  $L_{f^t}$  — объединение всех замыканий устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий седловых состояний равновесия размерности  $(n-1)$ . Обозначим через  $m_{f^t}^0$  число компонент связности множества  $M^n \setminus L_{f^t}$ , таких что ограничение потока  $f^t$  на эти компоненты имеет нетривиальные седловые состояния равновесия.



**Рис. 1.1.** Фазовые портреты топологически неэквивалентных потоков  $f^t$  (a) и  $f'^t$  (b), имеющих топологически эквивалентные ограничения на компонентах дополнения к секущим сферам

**Fig 1.1.** Phase portraits of topologically nonequivalent flows  $f^t$  (a) and  $f'^t$  (b) having topologically equivalent constraints on the components of the complement to the secant spheres

**Л е м м а 1.1.** Пусть  $f^t \in G(M^n)$ ,  $m_{f^t} > 0, \nu_{f^t} > 0$ . Тогда существует набор попарно непересекающихся гладко вложенных сфер  $S_1^{n-1}, \dots, S_{k_{f^t}}^{n-1} \subset M^n$ ,  $m_{f^t}^0 \leq k_{f^t} \leq \leq 2m_{f^t}^0$ , таких что:

1. сфера  $S_i^{n-1}$  является сферой без контакта для потока  $f^t$ ,  $i \in \{1, \dots, k_{f^t}\}$ ;
2. многообразие  $M^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_{f^t}} \text{int } T(S_i^{n-1})$  состоит из  $l_{f^t} \leq k_{f^t} + 1$  компонент связности  $P_1, \dots, P_{l_{f^t}}$ ;
3. все состояния равновесия потока  $f^t$  лежат в объединении  $\bigcup_{j=1}^{l_{f^t}} P_j$ , при этом все нетривиальные седловые состояния равновесия принадлежат ровно  $m_{f^t}^0$  компонентам множества  $\{P_j\}$ , не содержащим состояний равновесия, отличных от этих седел (см. Рис. 1.2).

Совокупность сфер  $S_1^{n-1}, \dots, S_{k_{f^t}}^{n-1} \subset M^n$ , удовлетворяющих заключению леммы 1.1, будем называть *минимальным набором разбивающих сфер*.

Обозначим через  $f_j^t$  ограничение потока  $f^t$  на множество  $P_j$ , введенное в лемме 1.1. Как и ранее, будем называть набор потоков  $\{f_j^t\}$  *составляющими потоками* для  $f^t$ .

Пусть для компонент  $P_i, P_j$  (возможно,  $i = j$ ) существует разбивающая сфера  $S_{ij}^{n-1}$  и ее трубчатая окрестность  $T(S_{ij}^{n-1})$ , ограниченная сферами без контакта  $S_{ij,-}^{n-1}, S_{ij,+}^{n-1}$ , такие что  $S_{ij,-}^{n-1} \subset \text{cl } P_i, S_{ij,+}^{n-1} \subset \text{cl } P_j$ . Будем называть компоненты  $P_i, P_j$  *связанными сферой  $S_{ij}^{n-1}$* .

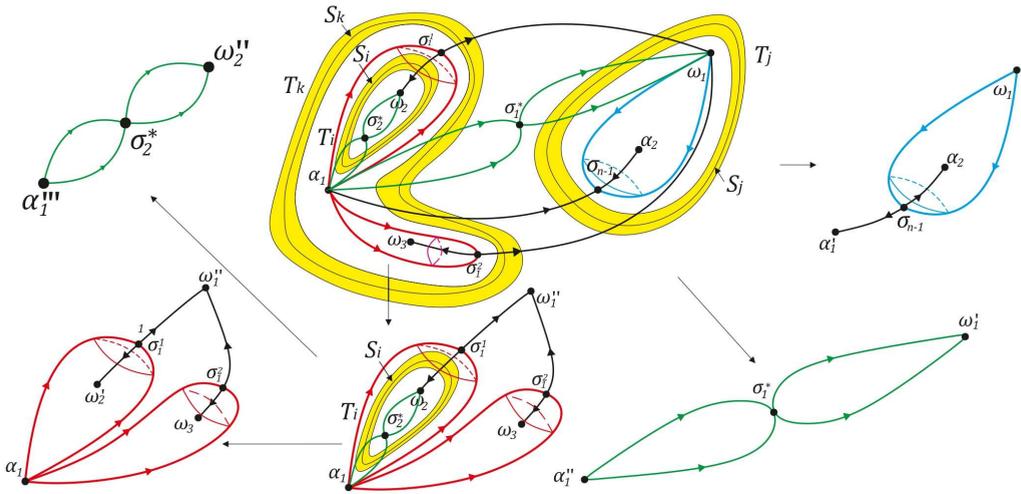


Рис. 1.2. Минимальный набор разбивающих сфер

Fig. 1.2. Minimal set of splitting spheres

**Теорема 1.1.** *Потоки  $f^t, f^{t'} \in G(M^n)$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда для них существуют минимальные наборы разбивающих сфер  $\{S_i^{n-1}\}_{i=1}^{k_{f^t}}, \{S_i^{n-1}\}_{i=1}^{k_{f^{t'}}}$ , соответственно, такие что  $k_{f^t} = k_{f^{t'}} = k, l_{f^t} = l_{f^{t'}} = l$  и для каждого  $j \in \{1, \dots, l_{f^t}\}$  потоки  $f_j^t, f_j^{t'}$  топологически эквивалентны при помощи гомеоморфизма  $h_j : P_j \rightarrow P'_j$ , при этом для каждой пары компонент  $P_i, P'_j$ , связанных разбивающей сферой  $S_{ij}^{n-1}$ , ограничения гомеоморфизмов  $h_i, h_j$  на сферы  $S_{ij,-}^{n-1}, S_{ij,+}^{n-1}$  согласованы в смысле определения 1.1.*

Следующая конструкция показывает, что проверка условий теоремы 1.1 связана с проблемой топологической классификации полярных потоков.

Пусть  $\{S_i^{n-1}\}_{i=1}^{k_{f^t}}$  — минимальный набор разбивающих сфер для потока  $f^t \in G(M^n)$  и  $P_1, \dots, P_{l_{f^t}}$  — компоненты связности многообразия  $M^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_{f^t}} \text{int } T(S_i^{n-1})$ . Приклеим к каждой компоненте  $S^{n-1}$  связности края многообразия  $P_j$  по копии шара  $B^n$ , на которой задан линейный поток  $a_{\pm}^t$  с единственным состоянием равновесия — отталкивающим или притягивающим, в зависимости от направления траекторий потока  $f^t$  на граничной сфере  $S^{n-1}$ . Обозначим через  $M_j$  полученное многообразие, через  $q_j : P_j \sqcup (\bigcup_i B_i^n) \rightarrow M_j$  — естественную проекцию и через  $\hat{f}_j^t$  — поток на многообразии  $M_j$ , совпадающий с потоком  $q_j f_j^t$  на множестве  $q_j(P_j)$  и с потоком  $q_j a_{\pm}^t$  на образе каждого шара  $B_i^n$ . По построению поток  $\hat{f}_j^t$  принадлежит классу  $G(M^n)$ .

**Предложение 1.2.** *Для любого множества  $P_j$ , несущего нетривиальные седловые состояния равновесия, многообразие  $M_j$  является односвязным, а поток  $\hat{f}_j^t$  — полярным.*

## 2. Вспомогательные определения, конструкции и факты

### 2.1. Склейка многообразий

Пусть  $M, N$  —  $n$ -мерные замкнутые гладкие многообразия с краем,  $n \geq 1$ ,  $X \subset \partial M, Y \subset \partial N$  — замкнутые гомеоморфные подмножества и  $g : X \rightarrow Y$  — обра- щающий естественную ориентацию края диффеоморфизм (гомеоморфизм). Введем на дизъюнктном объединении  $M \sqcup N$  следующее отношение эквивалентности: если  $x \in M \cup N \setminus (X \cup Y)$ , то  $x \sim x$ , если  $x \in X, y \in Y$ , то  $x \sim g(x), y \sim g^{-1}(y)$ . Фактор- пространство

$$M \cup_g N = (M \sqcup N) / \sim$$

по этому отношению эквивалентности является гладким (топологическим) многообра- зием. Будем говорить, что это многообразие получено *склежкой многообразий*  $M, N$  по отображению  $g : X \rightarrow Y$ . Пусть  $p : M \sqcup N \rightarrow M \cup_g N$  — естественная проекция. Далее по тексту образы  $p(M), p(N)$  обозначаются также, как и оригиналы.

### 2.2. Связная сумма многообразий

Пусть  $M, N$  — два компактных  $n$ -многообразия;  $B_1^n \subset M, B_2^n \subset N$  — подпро- странства, гомеоморфные  $\mathbb{B}^n$ ,  $h_1 : \mathbb{B}^n \rightarrow B_1^n$  и  $h_2 : \mathbb{B}^n \rightarrow B_2^n$  — соответствующие гомеоморфизмы. Пусть  $\varphi : \partial B_1^n \rightarrow \partial B_2^n$  — гомеоморфизм, такой что отображение  $h_2^{-1} \varphi h_1|_{\partial \mathbb{B}^n} : \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1}$  является меняющим ориентацию. Пространство

$$M \sharp N = (M \setminus \text{int } B_1^n) \cup_{\varphi} (N \setminus \text{int } B_2^n)$$

называется *связной суммой многообразий*  $M, N$ .

Из конструкции следует, что связной суммой замкнутых многообразий является за- мкнутое многообразие, ориентируемое тогда и только тогда, когда ориентируемы оба слагаемые. В силу [7, Lemma 2.1] это многообразие единственно с точностью до гомео- морфизма. В силу [8, Theorem 1] справедлив следующий факт, получивший название «Теорема Милнора-Кнезера»: любое компактное ориентируемое трехмерное многооб- разие, отличное от сферы  $S^3$ , единственным образом (с точностью до гомеоморфизма) представляется в виде связной суммы конечного числа простых многообразий, каждое из которых либо гомеоморфно  $S^2 \times S^1$ , либо является неприводимым (т. е. таким, что любая локально плоская сфера  $S^{n-1}$  в нем ограничивает шар  $B^n$ ). Теорема Милнора- Кнезера, не может быть обобщена на случай размерности  $n > 3$ , см., например, [9, § 3.1, Пример 3].

### 2.3. Перестройка многообразия вдоль сферы размерности $(n - 1)$

Будем называть  *$n$ -кольцом* многообразие, гомеоморфное прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-1} \times [0, 1]$  стандартной сферы на отрезок  $[0, 1]$ .

Пусть  $M^n$  — связное замкнутое многообразие;  $e : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow M^n$  — то-пологическое вложение, такое что  $e(\mathbb{S}^{n-1} \times \{-1\}), e(\mathbb{S}^{n-1} \times \{1\})$  — локально плос-кие сферы. Положим  $S^{n-1} = e(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}), K^n = e(\mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1])$ . Многообразие  $M^n \setminus \text{int } K^n$  является многообразием с краем, имеющим две компонентны связности, гомеоморфные сфере размерности  $(n - 1)$ . Пусть  $\mathbb{B}_+^n, \mathbb{B}_-^n$  — два шара размерности  $n$  и  $\varphi : \partial(M^n \setminus \text{int } K^n) \rightarrow \partial \mathbb{B}_+^n \cup \partial \mathbb{B}_-^n$  — гомеоморфизм, обра- щающий естественную ориен- тацию края. Обозначим через  $M_*^n$  многообразие, полученное склейкой многообразия

$M^n \setminus \text{int } K^n$  и объединения  $\mathbb{B}_+^n \cup \mathbb{B}_-^n$  по гомеоморфизму  $\varphi$ . Будем говорить, что многообразии  $M_*^n$  получено из  $M^n$  перестройкой вдоль сферы  $S^{n-1}$ .

Следующий факт доказан в [10].

**Утверждение 2.1.** *Если  $M_*^n$  имеет две компоненты связности  $M_+^n, M_-^n$ , то  $M^n$  гомеоморфно связной сумме многообразий  $M_+^n$  и  $M_-^n$ . Если  $M_*^n$  связно, то  $M^n$  гомеоморфно связной сумме  $M_*^n$  и  $S^{n-1} \times S^1$ .*

### 3. Построение минимального набора разбивающих сфер

В этом разделе доказывается теорема 1.1. Напомним, что  $\mu_{ft}$  обозначает число узловых состояний равновесия,  $\nu_{ft}$  – число седловых состояний равновесия, индекс Морса которых равен 1 или  $(n - 1)$ , и  $m_{ft}$  – число седловых состояний равновесия, индекс Морса которых принадлежит множеству  $\{2, \dots, (n - 2)\}$ . Пусть  $\nu_{ft} > 0$ . Тогда одно из множеств  $\Omega_{ft}^{n-1}, \Omega_{ft}^1$  непусто. Предположим для определенности, что  $\Omega_{ft}^{n-1} \neq \emptyset$  (если это не так, то перейдем к  $f^{-t}$ ).

**Предложение 3.1.** *Для любой седловой точки  $\sigma_{n-1} \in \Omega_{ft}^{n-1}$  потока  $f^t \in G(M^n)$  существует единственная стоковая точка  $\omega$ , такая что  $\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u = W_{\sigma_{n-1}}^u \cup \omega$ . Множество  $\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u$  является сферой размерности  $(n - 1)$ , гладко вложенной в  $M^n$  во всех точках, кроме, возможно, точки  $\omega$ .*

**Доказательство.** Из работы [11, Теорема 2.3] следует, что для любого седлового состояния равновесия  $\sigma \in \Omega_{ft}^i$  потока  $f^t \in G(M^n)$  инвариантные многообразия  $W_\sigma^u, W_\sigma^s$  являются гладко вложенными открытыми шарами размерности  $i, n - i$  соответственно. Кроме того, если  $W_\sigma^u \cap W_p^s = \emptyset$  для любой седловой точки  $p$ , отличной от  $\sigma$ , то существует единственное стоковое состояние равновесия  $\omega$  такое, что  $\text{cl } W_\sigma^u = W_\sigma^u \cup \omega$ . По определению класса  $G(M^n)$  это условие выполняется для точки  $\sigma_{n-1} \in \Omega_{ft}^{n-1}$ , откуда непосредственно вытекает справедливость предложения.

**Доказательство завершено.**

В силу [12–13] для любого градиентно-подобного потока на замкнутом многообразии существует энергетическая функция – функция Морса, строго убывающая вдоль траекторий потока, отличных от состояний равновесия, а в каждом состоянии равновесия имеющая критическую точку. Этот факт позволяет усилить предложение 3.1 следующим образом.

**Лемма 3.1.** *Пусть  $\omega$  – стоковое состояние равновесия, принадлежащее замыканию многообразия  $W_{\sigma_{n-1}}^u, \sigma_{n-1} \in \Omega_{ft}^{n-1}$ .*

1. *Существует гладкая сфера  $\Sigma_\omega^{n-1} \in W_\omega^s$ , пересекающая трансверсально все траектории потока  $f^t|_{W_\omega^s \setminus \omega}$  и такая, что пересечение  $\Sigma_\omega^{n-1} \cap W_{\sigma_{n-1}}^u$  является гладко вложенной в  $\Sigma_\omega^{n-1}$  сферой размерности  $(n - 2)$ .*
2. *Сфера  $\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u$  является локально плоской.*
3. *Для любой окрестности  $U(\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u) \subset M^n$  сферы  $\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u$  существует топологическое вложение  $e : S^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow U(\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u)$  такое, что  $e(S^{n-1} \times \{0\}) = \text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u$ , а сферы  $S^{n-1} \times \{-1\}, S^{n-1} \times \{1\}$  являются гладкими, при этом траектории потока  $f^t$  пересекают эти сферы трансверсально в направлении «внутрь» окрестности  $e(S^{n-1} \times [-1, 1])$ .*

**Доказательство.** Пусть  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  — энергетическая функция потока  $f^t$ . Не уменьшая общности, предположим, что  $\varphi(\omega) = 0$ . Пусть  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\varphi^{-1}([0, \varepsilon]) \subset W_\omega^s \cap U(\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u)$ . Поскольку энергетическая функция убывает на множестве  $W_\omega^s \setminus \omega$ , то  $\omega$  — точка минимума. Из леммы Морса следует, что множество  $B_\omega = \varphi^{-1}([0, \varepsilon])$  является шаром размерности  $n$ , ограниченным гладкой сферой  $\Sigma_\omega^{n-1}$ , трансверсальной к траекториям потока  $f^t|_{W_\omega^s \setminus \omega}$ . В [14, Предложение 3.1] доказано, что множество  $W_{\sigma_{n-1}}^u \cap \partial B_\omega$  является гладко вложенной в  $\partial B_\omega$  сферой размерности  $(n-2)$ , и сфера  $\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u$  является локально плоской в точке  $\omega$ . Так как во всех точках, кроме  $\omega$ , сфера  $\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u$  является гладкой, то  $\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u$  — локально плоская в каждой точке. Таким образом, утверждения 1, 2 доказаны.

Докажем утверждение 3. Поскольку множество  $W_{\sigma_{n-1}}^u$  диффеоморфно  $\mathbb{R}^{n-1}$ , а в силу обобщенной теоремы Шенфлиса любая локально плоская сфера размерности  $(n-2)$  ограничивает в  $\mathbb{R}^{n-1}$  замкнутый шар, то множество  $W_\sigma^u \setminus B_\omega$  является шаром размерности  $(n-1)$ . Из  $\lambda$ -леммы следует, что существует компактная окрестность  $V_{\sigma_{n-1}} \subset M^n$  точки  $\sigma_{n-1}$ , оснащенная двумя непрерывными отображениями  $\pi_s : V_{\sigma_{n-1}} \rightarrow B_{\sigma_{n-1}}^s, \pi_u : V_{\sigma_{n-1}} \rightarrow B_{\sigma_{n-1}}^u$ , где  $B_{\sigma_{n-1}}^s = V_{\sigma_{n-1}} \cap W_{\sigma_{n-1}}^s, B_{\sigma_{n-1}}^u = V_{\sigma_{n-1}} \cap W_{\sigma_{n-1}}^u$  — шары размерности 1,  $(n-1)$  соответственно, содержащие точку  $\sigma_{n-1}$ , определяющие в окрестности  $V_{\sigma_{n-1}}$  структуру прямого произведения  $B_{\sigma_{n-1}}^s \times B_{\sigma_{n-1}}^u$  с гладкими слоями, трансверсальными траекториям потока  $f^t$ , отличным от состояния равновесия  $\sigma_{n-1}$  (см., например, [15, Лемма 7.2, Лемма 7.3, § 7, Глава 2]). Более того, для любого  $\delta > 0$  существует  $T > 0$  такое, что для любого  $t > T$  пара шаров  $f^t(\partial B_{\sigma_{n-1}}^s \times B_{\sigma_{n-1}}^u)$  является  $\delta$ - $C^1$  близкой к шару  $W_\sigma^u \setminus B_\omega$ . Отсюда следует, что найдется такое  $t > T$ , что  $f^t(V_{\sigma_{n-1}}) \subset U(\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u)$  и пересечение множества  $f^t(\partial B_{\sigma_{n-1}}^s \times B_{\sigma_{n-1}}^u)$  с  $\partial B_\omega$  является парой гладко вложенных непесекающихся сфер размерности  $(n-2)$ . Тогда множество  $B_\omega \cup f^t(V_{\sigma_{n-1}})$  есть результат приклейки к шару  $B_\omega$  ручки индекса  $(n-1)$ , следовательно, гомеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1]$  при помощи гомеоморфизма  $e : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow B_\omega \cup f^t(V_{\sigma_{n-1}})$  такого, что  $e(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = \text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u$  (см., например, [14, Предложение 12.4]). Применение канонической процедуры сглаживания (см. [16, Замечание 1.3.3], [17, Теорема 12.9]) позволяет считать граничные сферы гладко вложенными.

**Доказательство завершено.**

Обозначим через  $L_{f^t}$  объединение всех сфер, являющихся замыканиями устойчивых и неустойчивых инвариантных многообразий седловых состояний равновесия размерности  $(n-1)$  и через  $D_{f^t}$  — множество компонент связности  $M^n \setminus L_{f^t}$ .

**Предложение 3.2.** *Замыкание  $\text{cl } D$  каждой компоненты связности  $D \in D_{f^t}$  содержит ровно один источник и ровно один сток, при этом хотя бы одно из этих состояний равновесия принадлежит  $\text{cl } D \setminus D$ .*

**Доказательство.** В силу [11, Theorem 3.2]  $M^n = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^s = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}} W_p^u$ .

Следовательно,  $D \subset \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}, i \neq 1} W_p^s$ . Поскольку  $D$  связно и имеет размерность  $n$  (а до-

бавление или удаление подмножеств размерности, меньшей  $(n-1)$ , не меняет числа компонент связности), то существует ровно один сток  $\omega$ , такой что  $D \cap W_\omega^s \neq \emptyset$ . Аналогично, существует ровно один источник  $\alpha$ , такой что  $D \cap W_\alpha^u \neq \emptyset$ . Поскольку граница множества  $D$  образована сферами из множества  $L_{f^t}$ , и каждая из этих сфер в силу предложения 3.1 содержит либо стоковое либо источниковое состояние равновесия, то хотя бы одно из состояний равновесия  $\alpha, \omega$  принадлежит границе множества  $D$ . Пусть  $\omega \in \partial D$ . Тогда возможны два случая. Случай 1)  $\alpha \in D$ , тогда предложение доказано.

Случай 2)  $\alpha \notin \partial D$ . Покажем, что в случае 2  $\alpha \in D$ . Поскольку  $\omega$  — единственная узловая точка, принадлежащая границе множества  $D$ , граница  $D$  состоит из  $\omega$  и объединения  $(n - 1)$ -мерных неустойчивых многообразий седловых состояний равновесия, замыкания которых содержат точку  $\omega$ .

Предположим противное,  $\alpha \notin \text{cl } D$ . Поскольку пересечение  $W_\alpha^u \cap D$  непусто,  $W_\alpha^u$  линейно связно, а по предположению  $\alpha \notin D$ , то найдется точка  $x \in W_\alpha^u \cap \partial D$ . Следовательно, найдется такое тривиальное седловое состояние равновесия  $\sigma_{n-1} \in \Omega_{ft}^{n-1}$ , что  $\text{cl } W_{\sigma_{n-1}}^u \subset \partial D$  и  $W_\alpha^u \cap W_{\sigma_{n-1}}^u \neq \emptyset$ , что противоречит определению неустойчивого многообразия гиперболического состояния равновесия потока. Таким образом,  $\alpha \in D \subset \text{cl } D$ .  
**Доказательство завершено.**

**Следствие 3.1.** Для любого  $D \in D_{ft}$  пересечение  $D \cap \Omega_{ft}$  состоит либо ровно из одного узлового состояния равновесия, либо из нескольких нетривиальных седловых состояний равновесия, либо из нескольких нетривиальных седловых состояний равновесия и в точности одного узлового состояния равновесия. Граница множества  $D$  образована либо одним, либо двумя букетами сфер из множества  $L_{ft}$ .

**Лемма 3.2.** Пусть компонента связности  $D \in D_{ft}$  содержит нетривиальные седловые состояния равновесия потока  $ft \in G(M^n)$ , сток  $\omega$  принадлежит границе множества  $D$  и  $\sigma_{n-1}^1, \dots, \sigma_{n-1}^\gamma \in \Omega_{ft}^{n-1}$  — седловые состояния равновесия, такие что  $\omega \in \text{cl } W_{\sigma_{n-1}^i}^u$  для любого  $i \in \{1, \dots, \gamma\}$ ,  $\gamma \geq 1$ , и букет  $\bigcup_{i=1}^\gamma \text{cl } W_{\sigma_i}^u$  образует компоненту связности границы множества  $D$ . Тогда для любой окрестности  $U$  множества  $\bigcup_{i=1}^\gamma \text{cl } W_{\sigma_i}^u$  существует гладко вложенная сфера без контакта  $S^{n-1} \subset U \cap D$ .

**Доказательство.** Пусть  $B_\omega \subset U \cap W_\omega^s$  — шар размерности  $n$ , ограниченный сферой без контакта и такой, что  $\omega \in \text{int } B_\omega$ . Поскольку сферы из объединения  $\{\text{cl } W_{\sigma_{n-1}^i}^u\}$  пересекаются только в точке  $\omega$ , то существуют окрестности  $\{U_i\}$  этих сфер, такие что для любых  $i, j$  пересечение  $U_i \cap U_j$  лежит внутри  $B_\omega$ . В силу леммы 3.1 для каждого  $i \in \{1, \dots, \gamma\}$  существует гладкая сфера без контакта  $S_i \subset U_i \cap D$ . Тогда пересечение  $\partial B_\omega \cap S_i$  является гладко вложенной в  $\partial B_\omega$  сферой размерности  $(n - 2)$ , ограничивающей открытый  $(n - 1)$ -шар  $D_i \subset \partial B_\omega$ , имеющий непустое пересечение с  $W_{\sigma_{n-1}^i}^u$ .

Поскольку букет  $\bigcup_{i=1}^\gamma \text{cl } W_{\sigma_i}^u$  образует компоненту связности границы множества  $D$ , то для любых  $i \neq j$  шары  $D_i, D_j$  не пересекаются,  $i, j \in \{1, \dots, \gamma\}$ . Из определения следует, что сфера  $\partial B_\omega \cap S_i$  ограничивает открытый шар  $\widehat{D}_i \subset S_i$ , лежащий вне шара  $B_\omega$ . Положим  $\widehat{S} = (\partial B_\omega \setminus \bigcup_{i=1}^\gamma D_i) \cup \bigcup_{i=1}^\gamma \widehat{D}_i$ . Сгладив сферу  $\widehat{S}$ , получим искомую сферу без контакта.

**Доказательство завершено.**

**Доказательство леммы 1.1 и предложения 1.2.**

Рассмотрим случаи  $g = 0, g \neq 0$  по отдельности. Пусть  $g = 0$ . В этом случае  $M^n$  односвязно и аналогично [18, Предложение 6] доказывается, что каждая локально плоская сфера  $S^{n-1}$  делит его на две компоненты связности. Пусть компонента связности  $D \in D_{ft}$  содержит нетривиальные седловые состояния равновесия. В силу следствия 3.1 ее граница  $\partial D$  состоит либо из одного, либо из двух букетов сфер из множества  $L_{ft}$ . В первом случае в силу леммы 3.2 найдется сфера без контакта  $S_D \subset D$  такая, что  $M^n \setminus \text{int } T(S_D)$  состоит из двух компонент связности  $D_+, D_-$ , таких что  $D_- \subset D$

и неблуждающее множество ограничения потока  $f^t$  на  $D_-$  состоит из нетривиальных седел и единственного узла. Во втором случае в силу леммы 3.2 найдутся две сферы без контакта  $S_{D,\omega}, S_{D,\alpha}, \subset D$ , такие что  $M^n \setminus (\text{int } T(S_{D,\omega}) \cup \text{int } T(S_{D,\alpha}))$  состоит из трёх компонент связности  $D_1, D_2, D_3$ , таких что  $D_3 \subset D$  и неблуждающее множество ограничения потока  $f^t$  на  $D_3$  состоит из нетривиальных седел. Найдем аналогичные сферы для каждой из компонент связности  $D \in D_{f^t}$ , содержащей нетривиальные седловые состояния равновесия, совокупность этих сфер и будет искомым минимальным разбивающим набором сфер. Поскольку каждая из разбивающих сфер делит многообразие  $M^n$  на две части, то множество  $M^n \setminus \bigcup_{i=1}^{k_{f^t}} \text{int } T(S_i^{n-1})$  состоит из  $l_{f^t} = k_{f^t} + 1$  компоненты связности.

Пусть теперь  $g > 0$  и компонента  $D \in D_{f^t}$  содержит нетривиальные седловые состояния равновесия. Снова применим следствие 3.1. Если граница  $\partial D$  состоит из одного букета сфер, то аналогично случаю  $g = 0$  найдем разбивающую сферу, делящую  $M^n$  на две компоненты связности, одна из которых содержится в  $D$ . Если граница  $\partial D$  состоит из двух букетов сфер, то найдутся две две сферы без контакта  $S_{D,\omega}, S_{D,\alpha}, \subset D$ , отделяющие компоненту связности  $D_- \subset D$ , несущую нетривиальные седла. При этом возможны два случая: 1) множество  $M^n \setminus D_-$  несвязно, 2)  $M^n \setminus D_-$  связно. Найдем аналогичные сферы для каждой компоненты связности  $D \in D_{f^t}$ , в итоге получим искомым минимальный набор разбивающих сфер, которые разобьют многообразие  $M^n$  на  $l_{f^t} \in [m_{f^t}^0 + 1, k_{f^t} + 1]$  компонент связности.

Из построения следует, что многообразие  $M^n$  является связной суммой многообразий, полученных из  $M^n$  перестройками вдоль сфер  $S_1^{n-1}, \dots, S_{k_{f^t}}^{n-1}$ ,  $k_{f^t} \in [m_{f^t}^0, 2m_{f^t}^0]$ , при этом ровно  $m_{f^t}^0$  слагаемых в связной сумме несут нетривиальные седловые состояния равновесия. Теперь справедливость предложения 1.2 непосредственно вытекает из построения минимального разбивающего набора, предложения 3.2 и следствия 3.1.  
Доказательство завершено.

#### 4. Условие эквивалентности гладких потоков при наличии глобальной секущей

Докажем предложение 1.1, тогда теорема 1.1 будет непосредственным следствием из этого предложения и леммы 1.1. Пусть для потоков  $f^t, f'^t$  существуют сферы без контакта  $S^{n-1}, S'^{n-1}$ , такие что потоки  $f_-^t, f_-'^t$  и потоки  $f_+^t, f_+'^t$  топологически эквивалентны посредством гомеоморфизмов  $h_- : P_- \rightarrow P'_-, h_+ : P_+ \rightarrow P'_+$ , таких что ограничение  $h_+|_{S_+^{n-1}}$  гомеоморфизма  $h_-$  на сферу  $S_+^{n-1}$  согласовано с гомеоморфизмом  $h_-|_{S_-^{n-1}}$ . Покажем, что  $f^t, f'^t$  топологически эквивалентны.

Для любой точки  $x \in S_-^{n-1}$  положим  $y = \mathcal{O}_{f^t}(x) \cap S_+^{n-1}$ ,  $x' = h_-(x)$ ,  $y' = h_+(y)$ . Для любой точки  $z \in \mathcal{O}_{f^t}(x) \cap T(S^{n-1})$  обозначим через  $\rho(z, x)$  длину отрезка траектории  $\mathcal{O}_{f^t}(x)$ , заключенного между точками  $z$  и  $x$ . Пусть  $z' \in T(S'^{n-1})$  — точка, лежащая на траектории  $\mathcal{O}_{f'^t}(x')$  потока  $f'^t$ ;  $\rho'(z', x')$  — длина отрезка траектории  $\mathcal{O}_{f'^t}(x')$ , заключенного между точками  $z'$  и  $x'$ . Определим гомеоморфизм  $H : M^n \rightarrow M^n$  следующим

образом:

$$H(z) = \begin{cases} h_-(z), x \in P_-; \\ h_+(z), x \in P_+; \\ z', x \in \text{int } T(S^{n-1}), \frac{\rho(x, z)}{\rho(x, y)} = \frac{\rho'(x', z')}{\rho'(x', y')}. \end{cases}$$

Доказательство завершено.

**Благодарности.** Автор благодарит Е. Я. Гуревич за постановку задачи и плодотворные обсуждения. Публикация подготовлена в ходе проведения исследования (№ 23-00-028) в рамках программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2023–2024 гг.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonatti C., Grines V. Z., Medvedev V. S., Pecou E. Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves // *Topology and Its Applications*. 2002. Vol. 117, No. 2. pp. 335–344. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(01\)00028-1](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(01)00028-1)
2. Grines V. Z., Gurevich E. Y., Pochinka O. V. Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections // *Journal of Mathematical Sciences*. 2015. Vol. 208, No. 1. pp. 81–90. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2425-2>
3. Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С. О структуре несущего многообразия для систем Морса–Смейла без гетероклинических пересечений // *Труды МИАН*. 2017. Т. 297, № 1. С. 201–210. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0371968517020108>
4. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Индекс Морса седловых состояний равновесия градиентно-подобных потоков на связной сумме  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  // *Математические заметки*. 2022. Т. 111, № 4. С. 616–619. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm13351>
5. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Комбинаторный инвариант градиентно-подобных потоков на связной сумме  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  // *Математический сборник*. 2023. *в печати*
6. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Топологическая классификация потоков без гетероклинических траекторий на связной сумме многообразий  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  // *Успехи математических наук*. 2022. Т. 77, № 4. С. 201–202. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm10047e>
7. Kervaire M. A., Milnor J. W. Groups of homotopy spheres: I // *Ann. of Math.* 1963. Vol. 77, No 3. pp. 504–537. DOI: <https://doi.org/10.2307/1970128>
8. Milnor J. W. A unique decomposition theorem for 3-manifolds // *Amer. J. Math.* 1962. Vol. 84, No. 1. pp. 1–7. DOI: <https://doi.org/10.2307/2372800>
9. Мандельбаум Р. Четырехмерная топология / пер. с англ. О. Я. Виро. М.: Мир, 1981. 278 с.

10. Медведев В. С., Уманский Я. Л. О разложении  $n$ -многообразий на простые многообразия // Известия вузов. 1979. Т. 1. С. 46–50.
11. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25, № 1. С. 113–185.
12. Smale S. On gradient dynamical systems // Annals of Mathematics. 1961. Vol. 74, No. 1. pp. 199–206. DOI: <https://doi.org/10.2307/1970311>
13. Meyer K. R. Energy functions for Morse-Smale systems // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90, No. 4. pp. 1031–1040. DOI: <https://doi.org/10.2307/2373287>
14. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. Проблемы топологической классификации многомерных систем Морса–Смейла. М.–Ижевск: Изд-во ИКИ. 2022. 292 с.
15. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем. Введение. М.: Мир, 1986. 304 с.
16. Гомпф Р., Штипшиц А. Четырехмерные многообразия и исчисление Кирби. М.: Изд-во МЦНМО, 2013. 622 с.
17. Новиков С. П., Тайманов И. А. Современные геометрические структуры и поля – 2-е изд., испр. М.: Изд-во МЦНМО, 2014. 584 с.
18. Гринес В. З., Гуревич Е. Я. О классификации потоков Морса–Смейла на проективно-подобных многообразиях // Известия РАН. Серия математическая. 2022. Т. 86, № 5. С. 43–72. DOI: <https://doi.org/10.4213/im9197>

*Поступила 12.02.2023; доработана после рецензирования 10.04.2023;  
принята к публикации 25.05.2023*

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.*

## REFERENCES

1. C. Bonatti, V. Z. Grines, V. S. Medvedev, E. Pecou, “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and Its Applications*, **117**:2 (2002), 335–344. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0166-8641\(01\)00028-1](https://doi.org/10.1016/S0166-8641(01)00028-1)
2. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, O. V. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections”, *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:1 (2015), 81–90. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-015-2425-2>
3. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “On the structure of the ambient manifold for Morse-Smale systems without heteroclinic intersections”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **297**:1 (2017), 201–210. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0371968517020108>

4. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “Morse index of saddle states of equilibrium of gradient-like flows on the connected sum of  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ”, *Mathematical Notes*, **111**:4 (2022), 624–627. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434622030312>
5. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “Combinatorial invariant of gradient-like flows on the connected sum of  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  [In Print]”, *Matematicheskii sbornik*, 2023 (In Russ.).
6. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “Topological classification of flows without heteroclinic intersections on a connected sum of manifolds  $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ ”, *Russian Mathematical Surveys*, **77**:4 (2022), 759–761. DOI: <https://doi.org/10.4213/rm10047e>
7. M. A. Kervaire, J. W. Milnor, “Groups of homotopy spheres: I”, *Ann. of Math.*, **77**:3 (1963.), 504–537. DOI: <https://doi.org/10.2307/1970128>
8. Milnor J.W., “A unique decomposition theorem for 3-manifolds”, *Amer. J. Math*, **84**:1 (1962), 1–7. DOI: <https://doi.org/10.2307/2372800>
9. R. Mandelbaum, “Four-dimensional topology”, 1978, 278 p.
10. V. S. Medvedev, Y. L. Umanskiy, “On the splitting of  $n$ -manifolds into simple manifolds”, *Izvestiya vuzov*, **1** (1979), 46–50 (In Russ.).
11. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
12. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Annals of Mathematics*, **74**:1 (1961), 199–206. DOI: <https://doi.org/10.2307/1970311>
13. K. R. Meyer, “Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040. DOI: <https://doi.org/10.2307/2373287>
14. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “Problems of topological classification of multidimensional Morse-Smale systems”, 2022 (In Russ.), 292 p.
15. J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982, 198 p.
16. R. E. Gompf, A. I. Stipsicz, *4-Manifolds and Kirby calculus*, **20**, American Mathematical Society, Providence, 1999, 558 p.
17. S. Novikov, I. Taimanov, *Modern geometric structures and fields*, MTSNMO Publ., Moscow, 2014 (In Russ.), 584 p.
18. V. Z. Grines, E. Y. Gurevich, “On classification of Morse-Smale flows on projective-like manifolds”, *Izvestiya: Mathematics*, **86**:5 (2022), 876–902. DOI: <https://doi.org/10.4213/im9197e>

*Submitted 12.02.2023; Revised 10.04.2023; Accepted 25.05.2023*

*The author have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 75-ЛЕТИЮ  
ПЕТРА АЛЕКСАНДРОВИЧА ВЕЛЬМИСОВА

Сердечно поздравляем члена редакционной коллегии журнала – доктора физико-математических наук, профессора кафедры «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета (г. Ульяновск, Россия) Петра Александровича Вельмисова с юбилеем. От всей души желаем ему крепкого здоровья, новых научных достижений, ярких учеников, счастья и успехов!

*Редколлегия журнала,  
Средне-Волжское математическое общество,  
Коллектив Национального исследовательского  
Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва*

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

**УДК.** Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

**MSC2020.** Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аффилиция автора(-ов):** название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

**Информация об авторе(-ах).** Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

**Объем аннотаций** на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

**Ключевые слова.** Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

– *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

– *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

**Список литературы на русском языке** оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

**Список литературы на английском языке** оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

#### **Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.****Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р.А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р.А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Статьи в журналах на английском языке.**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Статьи в электронном журнале на русском языке.**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке.**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Книги (монографии и сборники) на русском языке.**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Статьи в материалах конференций на русском языке.**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

**UDC.** The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

**MSC2020 codes** The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

**Affiliate author(s):** the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

**Information about the author(s).** The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

**Keywords.** The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

**References** formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

*Books (monographs and collections) in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

**Examples of bibliographic references for the section *References*.**

**Journal articles in Russian.**

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Journal articles in English:**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Articles in the electronic journals in Russian:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Articles in collections in Russian:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

## Правила верстки рукописей в системе $\text{LaTeX}$

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета  $\text{MiKTeX}$ , дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты `svmo.sty` и `svmobib.sty`. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем `<ФамилияИО>.tex`. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: `{УДК}` `{Название статьи}` `{Автор(ы)}` `{Автор(ы) со сносками на организации}` `{Организации (название, город, страна) со сносками на авторов}` `{Аннотация}` `{Ключевые слова}` `{Название статьи на английском языке}` `{Автор(ы) на английском языке}`

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: `{MSC 2020}` `{Название статьи}` `{Автор(ы)}` `{Автор(ы) со сносками на организации}` `{Организации (название, город, страна) со сносками на авторов}` `{Аннотация}` `{Ключевые слова}`

*Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.*

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: `'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'`. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк `'Доказательство.'` и `'Доказательство закончено.'` соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmbib.sty`**

### Статьи в журналах на русском языке

**В разделе `thebibliography`:**

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paref О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

**Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):**

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

**Статьи в электронном журнале на русском языке****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**Статьи в сборниках на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Выш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

**Статьи в материалах конференций на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib6}

```

`\by В. Г. Малинов`  
`\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике`  
`\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды`  
`\bookvol II`  
`\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.`  
`\yr 2016`  
`\pages 48–50`  
`\publ ФИЦ ИУ РАН`  
`\publaddr М.`

**В разделе `thebibliographyEn`:**

`\Bibitem{shamanaevBib6En}`  
`\by V. G. Malinov`  
`\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator`  
`\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings`  
`\bookvol II`  
`\procinfo Moscow, October 17-22, 2016`  
`\yr 2016`  
`\pages 48–50`  
`\publ FRC CSC RAS Publ.`  
`\publaddr Moscow`

## The rules for article layout in the LaTeX system

*Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.*

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

*If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.*

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation\*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
```

```
\caption{Table name \ \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} \label{shamanaevtable1}
```

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
\hline
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Design of pictures.** To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmbib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

**Examples of bibliographic references' using commands from the svmbib.sty package**

#### Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

#### Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oligier
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

**Articles in the electronic journals in Russian**

`\Bibitem{shamanaevBib3En}`  
`\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,`  
`\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]`  
`\jour Ogarev-online`  
`\vol 20`  
`\yr 2016`  
`\lang In Russ.`  
`\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii`

**Articles in collections in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib4En}`  
`\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev`  
`\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]`  
`\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]`  
`\publaddr Ulyanovsk`  
`\publ UIGTU Publ.`  
`\yr 2014`  
`\issue 10`  
`\pages 4–13`  
`\lang In Russ.`

**Books (monographs and collections) in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib5En}`  
`\by Yu. N. Bibikov`  
`\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]`  
`\publaddr Moscow`  
`\publ Visshay shkola Publ.`  
`\yr 1991`  
`\totalpages 303`  
`\lang In Russ.`

**Conference proceedings in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib6En}`  
`\by V. G. Malinov`  
`\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator`  
`\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings`  
`\bookvol II`  
`\procinfo Moscow, October 17-22, 2016`  
`\yr 2016`  
`\pages 48–50`  
`\publ FRC CSC RAS Publ.`  
`\publaddr Moscow`

---

---

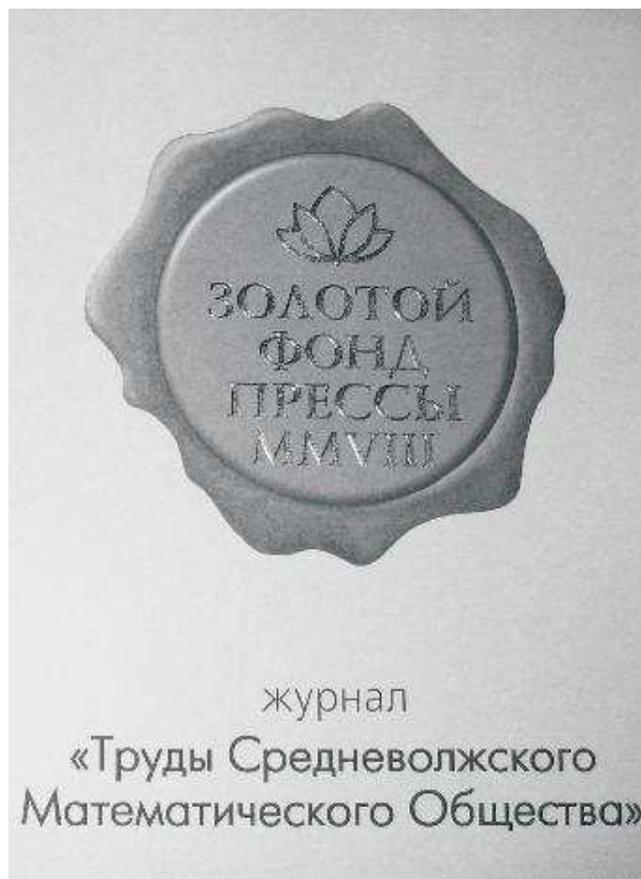
## Алфавитный указатель авторов

Барина М. К.	11
Галкин О. Е.	22
Галкина С. Ю.	22
Гуревич Е. Я.	37
Мартынов С. И.	53
Родионова Е. К.	37
Сараев И. А.	62
Тронов А. А.	22
Шустова Е. К.	11

## Author Index

M. K. Barinova	11
O. E. Galkin	22
S. Yu. Galkina	22
E. Ya. Gurevich	37
S. I. Martynov	53
E. K. Rodionova	37
I. A. Saraev	62
E. K. Shustova	11
A. A. Tronov	22

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*  
Перевод: *Сыромясов А. О.*  
Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*

Подписано в печать 14.06.2023. Дата выхода в свет 31.06.2023. Цена свободная.

Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 8,75 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 502.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования «Национальный  
исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»  
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,  
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*  
Translation: *A. O. Syromyasov*  
Desktop publishing: *P. A. Shamanaev*

Signed to print 14.06.2023. Date of publishing 31.06.2023. Free price.

Sheet size 70x108  $\frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 8,75.

Number of copies 100. Order no. 502.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University  
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,  
Republic of Mordovia, Russia





