

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 24 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 2

2022

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 24, № 2. 2022

DOI 10.15507/2079-6900.24.202202

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 24, NO. 2. 2022

DOI 10.15507/2079-6900.24.202202

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348). Журнал включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68. Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348). The journal is included in DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is indexed in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal through the online store of periodicals «Press by subscription». Subscription index of the journal is E94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.



FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, профессор филиала МГУ имени М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, профессор Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры цифровой экономики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией математической химии, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики ФГУП "РФЯЦ ВНИИЭФ" (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Золотых Николай Юрьевич — профессор, доктор физико-математических наук, директор Института информационных технологий, математики и механики ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (Нижний Новгород, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович – академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор отдела дифференциальных уравнений Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры информатики и компьютерных технологий ФГБОУ ВПО «Санкт-Петербургский горный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Кузнецов Михаил Иванович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики Института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (Нижний Новгород, Россия)

Малышев Дмитрий Сергеевич – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Мартынов Сергей Иванович – профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович – член-корреспондент НАН Беларуси, доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики Национальной академии наук Беларуси (Минск, Беларусь)

Морозкин Николай Данилович – профессор, доктор физико-математических наук, президент ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович – профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич – профессор, доктор технических наук, первый проректор ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сидоров Николай Александрович – профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений Института математики, экономики и информатики ФГБОУ ВО «Иркутский государственный университет» (Иркутск, Россия)

Старостин Николай Владимирович – профессор, доктор технических наук, начальник отделения, Институт теоретической и математической физики ФГУП «РФЯЦ-ВНИИЭФ», (Саров, Россия)

Сухарев Лев Александрович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математического анализа, алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна – профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), professor of the branch of Moscow State University named after M. V. Lomonosov in Tashkent, professor of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Aleksandr S. Andreev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director Institute of Mathematics named after V. I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Digital Economy, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Vyacheslav Z. Grines — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Laboratory of Mathematical Chemistry, Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Professor, Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Nikolay Yu. Zolotykh — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of the Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, National Research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Professor of the Department of Mathematics of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling of the Committee of Sciences of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan, Professor of the Department of Differential Equations of Al-Farabi Kazakh National University (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Informatics and Computer Technologies, Saint Petersburg Mining University (Saint Petersburg, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Mikhail I. Kuznetsov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lomonosov Nizhny Novgorod State University N. I. Lobachevsky (Nizhny Novgorod, Russia)

Dmitry S. Malyshev — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Sergey I. Martynov — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — corresponding member of the National Academy of Sciences of Belarus, Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Nikolay D. Morozkin — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Prezident of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Olga V. Pochinka — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Petr V. Senin — Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Mathematical Analysis, Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

- В. Д. Галкин, О. В. Починка**
Сферическая схема потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством 132
- В. З. Гринес, Д. И. Минц, Е. Е. Чилина**
О возмущениях алгебраических периодических автоморфизмов двумерного тора 141
- Л. С. Соловарова, Т. З. Фьонг**
О численном решении жестких линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка 151
- М. Э. Файрузов, Ф. В. Лубышев**
Об одном итерационном методе решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа 162
- Д. Х. Хусанов, А. А. Каххаров**
Устойчивость модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием 175
-

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

- С. И. Мартынов**
Определение средней электро-термофоретической силы, действующей на систему поляризующихся частиц в неоднородно нагретой жидкости . . . 185
- А. О. Сыромьясов, А. С. Шуршина, Д. В. Галкин**
Исследование диффузии лекарственного вещества из набухающей хитозановой пленки математическими методами 200
-

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

- В. Я. Гришаев, С. М. Мурюмин, Е. В. Никишин**
Численное исследование влияния поверхностной рекомбинации на нелинейные и фазовые искажения, возникающие при восстановлении формы оптического сигнала 215
-

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

- К 75-ЛЕТИЮ ЮРИЯ НИКОЛАЕВИЧА ДЕРЮГИНА 228
- К ЮБИЛЕЮ ОЛЬГИ ВИТАЛЬЕВНЫ ПОЧИНКИ 229
-
- Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 233
- Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 237
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) 241
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) 247

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.)	251
Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.)	252

Contents

MATHEMATICS

- V. D. Galkin, O. V. Pochinka**
Spherical flow diagram with finite hyperbolic chain-recurrent set 132
- V. Z. Grines, D. I. Mints, E. E. Chilina**
On perturbations of algebraic periodic automorphisms of a two-dimensional torus 141
- L. S. Solovarova, T. D. Phuong**
On the numerical solution of second-order stiff linear differential-algebraic equations 151
- M. E. Fairuzov, F. V. Lubyshch**
On an iterative method for solving optimal control problems for an elliptic type system 162
- J. Kh. Khusanov, A. E. Kaxxorov**
On the stability of Lotka-Volterra model with a delay 175
-

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

- S. I. Martynov**
Determination of the average electro-thermophoretic force acting on a system of polarizable particles in an inhomogeneously heated fluid 185
- A.O. Syromyayev, A.S. Shurshina, D.V. Galkin**
Mathematical study of medicine diffusion from swelling chitosan film 200
-

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

- V. Y. Grishaev, S. M. Muryumin, E. V. Nikishin**
Numerical study of the effect of surface recombination on nonlinear and phase distortions arising during the restoration of the optical signal shape 215
-

MATHEMATICAL LIFE

- TO THE 75TH ANNIVERSARY OF YURIJ NIKOLAEVICH DERYUGIN 228
- TO THE ANNIVERSARY OF OLGA VITALEVNA POCHINKA 229
-
- The rules of article design (in Russian) 233
- The rules of article design (in English) 237
- The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) 241
- The rules for article layout in the LaTeX system (in English) 247
-
- Author Index (In Russian) 251
- Author Index (in English) 252
-

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.132-140

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

Сферическая схема потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством**В. Д. Галкин, О. В. Починка***ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» – Нижегородский филиал (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены потоки с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством без гетероклинических пересечений на произвольных замкнутых n -многообразиях. Для таких потоков доказано существование дуального аттрактора и репеллера, разделенных $(n - 1)$ -мерной сферой, являющейся секущей для блуждающих траекторий в дополнении к аттрактору и репеллеру. Такое представление динамики рассмотренных потоков позволяет получить топологический инвариант, названный сферической схемой потока и состоящий из совокупности разноразмерных сфер, являющихся пересечениями секущей сферы с инвариантными седловыми многообразиями. Заметим, что для некоторых классов потоков сферическая схема является полным инвариантом. Так, из результатов Ж. Флейтас следует, что для полярных потоков (с единственным стоком и единственным источником) на поверхности именно сферическая схема является полным инвариантом эквивалентности.

Ключевые слова: потоки на n -многообразиях, цепно-рекуррентное множество, градиентно-подобный поток, секущая, сферическая схема

Для цитирования: Галкин В. Д., Починка О. В. Сферическая схема потоков с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством // Журнал Средневожского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 132–140. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.132-140>

Об авторах:

Починка Ольга Витальевна, профессор кафедры фундаментальной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» – Нижегородский филиал (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, opochinka@hse.ru

Галкин Владислав Дмитриевич, стажер-исследователь Международной лаборатории динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» – Нижегородский филиал (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6796-9228>, vgalkin@hse.ru

© В. Д. Галкин, О. В. Починка



MSC2020 37D15

Spherical flow diagram with finite hyperbolic chain-recurrent set

V. D. Galkin, O. V. Pochinka

National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In this paper, authors examine flows with a finite hyperbolic chain-recurrent set without heteroclinic intersections on arbitrary closed n -manifolds. For such flows, the existence of a dual attractor and a repeller is proved. These points are separated by a $(n-1)$ -dimensional sphere, which is secant for wandering trajectories in a complement to attractor and repeller. The study of the flow dynamics makes it possible to obtain a topological invariant, called a spherical flow scheme, consisting of multi-dimensional spheres that are the intersections of a secant sphere with invariant saddle manifolds. It is worth known that for some classes of flows spherical scheme is complete invariant. Thus, it follows from G. Fleitas results that for polar flows (with a single sink and a single source) on the surface, it is the spherical scheme that is complete equivalence invariant.

Keywords: flows on n -manifolds, chain-recurrent set, gradient-like flow, secant, spherical scheme

For citation: V. D. Galkin, O. V. Pochinka. Spherical flow diagram with finite hyperbolic chain-recurrent set. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:2(2022), 132–140. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.132-140>

About the authors:

Olga V. Pochinka, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4274-8215>, opochinka@hse.ru

Vladislav D. Galkin, Research Assistant of International laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6796-9228>, vgalkin@hse.ru

1. Введение и формулировка результатов

Пусть M^n , $n \geq 2$ — замкнутое связное n -многообразие с метрикой d .
Потоком на многообразии M^n называется непрерывное отображение

$$F: M^n \times \mathbb{R} \rightarrow M^n$$

с групповыми свойствами:

- 1) $F(x, 0) = x$, $\forall x \in M^n$;
- 2) $F(F(x, t), s) = F(x, t + s)$, $\forall x \in M^n$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $f^t(x) = F(x, t)$, $x \in M^n$, $t \in \mathbb{R}$. Заметим, что при фиксированном $t \in \mathbb{R}$ отображение $f^t : M^n \rightarrow M^n$ является гомеоморфизмом (см., например, [2]), поэтому поток также называют однопараметрической группой гомеоморфизмов, действующих на многообразии M^n .

Траекторией или орбитой точки $x \in M^n$ называется множество $\mathcal{O}_x = \{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$. Любая орбита потока либо состоит из одной точки, и в этом случае эта точка называется неподвижной, либо гомеоморфна окружности и в этом случае любая точка орбиты называется периодической, либо является инъективно иммерсированной прямой. Устойчивым и неустойчивым, соответственно, многообразиями неподвижной точки x называются множества

$$W_x^s = \{y \in M^n : d(x, f^t(y)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty\},$$

$$W_x^u = \{y \in M^n : d(x, f^t(y)) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow -\infty\}.$$

Полагают, что все траектории потока, отличные от неподвижной точки, ориентированы в соответствии с возрастанием параметра t . Два потока $f^t : M^n \rightarrow M^n$ и $f^{t'} : M^n \rightarrow M^n$ называются топологически эквивалентными если существует гомеоморфизм $h : M^n \rightarrow M^n$, переводящий траектории f^t в траектории $f^{t'}$ с сохранением ориентации. Если при этом гомеоморфизм h обладает свойством $h f^t(x) = f^{t'} h(x)$ для любого $t \in \mathbb{R}$, то потоки называются топологически сопряженными. ε -цепью длины T , соединяющей точку x с точкой y для потока f^t называется последовательность точек $x = x_0, \dots, x_n = y$, для которых существует последовательность времен t_1, \dots, t_n такая, что $d(f^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$, $t_i \geq 1$ для $1 \leq i \leq n$ и $t_1 + \dots + t_n = T$ (Рис. 1.1).

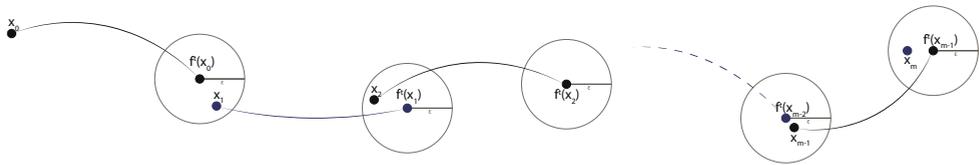


Рис. 1.1. ε -цепь длины T
 Fig 1.1. ε -chain length T

Точка $x \in M^n$ называется цепно-рекуррентной для потока f^t , если для любого $\varepsilon > 0$ существует $T > 0$, зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε -цепь длины T , соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно-рекуррентных точек называется цепно-рекуррентным множеством и обозначается \mathcal{R}_{f^t} . Если цепно-рекуррентное множество потока конечно, то оно состоит из неподвижных точек. Следуя работе [3], назовем неподвижную точку p потока f^t гиперболической, если существует ее окрестность $U_p \subset M^n$, число $\lambda_p \in \{0, 1, \dots, n\}$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, сопрягающий поток $f^t|_{U_p}$ с линейным потоком $a_{\lambda_p}^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, заданным формулой

$$a_{\lambda_p}^t(x_1, \dots, x_{\lambda_p}, x_{\lambda_p+1}, \dots, x_n) = (2^t x_1, \dots, 2^t x_{\lambda_p}, 2^{-t} x_{\lambda_p+1}, \dots, 2^{-t} x_n).$$

Число λ_p называется индексом Морса гиперболической точки p . Точки индексов n и 0 называются источниковыми и стоковыми соответственно, иначе точка p называется седловой (Рис. 1.2).

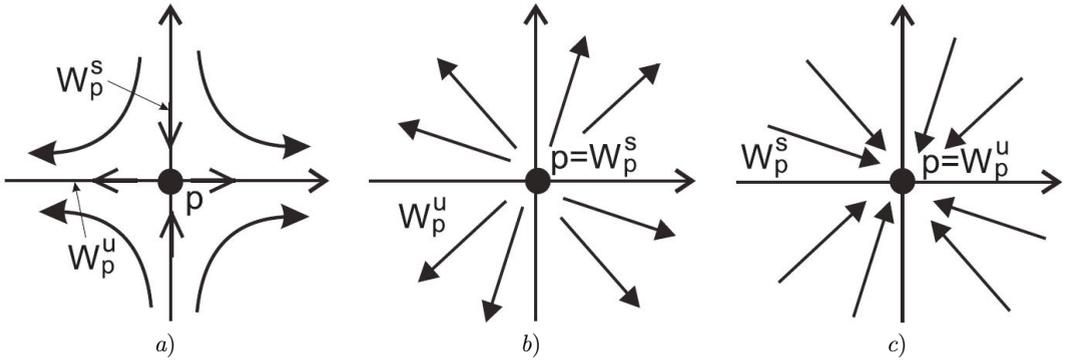


Рис. 1.2. Динамика в окрестности гиперболической неподвижной точки: а) седловая точка, б) источниковая точка, в) стоковая точка
Fig 1.2. Dynamics in the neighbourhood of a hyperbolic fixed point: a) saddle point, b) source point, c) sink point

Теорема 1.1. [4] Пусть $f^t : M^n \rightarrow M^n$ – поток с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством. Тогда

- 1) $M^n = \bigcup_{p \in \mathcal{R}_{f^t}} W_p^u = \bigcup_{p \in \mathcal{R}_{f^t}} W_p^s$;
- 2) неустойчивое W_p^u (устойчивое W_p^s) многообразие неподвижной точки p является топологическим подмногообразием многообразия M^n , гомеоморфным \mathbb{R}^{λ_p} ($\mathbb{R}^{n-\lambda_p}$);
- 3) $cl(W_p^u) \setminus W_p^u \subset \bigcup_{q \in \mathcal{R}_{f^t}: W_q^s \cap W_p^u \neq \emptyset} W_q^u$ ($cl(W_p^s) \setminus W_p^s \subset \bigcup_{q \in \mathcal{R}_{f^t}: W_q^u \cap W_p^s \neq \emptyset} W_q^s$).

Обозначим через G класс потоков $f^t : M^n \rightarrow M^n$ с конечным гиперболическим цепно-рекуррентным множеством, инвариантные (устойчивые и неустойчивые) многообразия различных седловых точек которых не пересекаются.

Везде далее $f^t \in G$. Обозначим через $\Omega_{f^t}^\lambda$, $\lambda \in \{0, \dots, n\}$ множество его неподвижных точек с индексом Морса λ . Непосредственно из утверждения 1.1 следует, что множества $\Omega_{f^t}^0$ и $\Omega_{f^t}^n$, стоковых и источниковых точек, соответственно, не являются пустыми для любого градиентно-подобного потока. Положим $\Delta_{f^t} = \Omega_{f^t}^1 \cup \dots \cup \Omega_{f^t}^{n-1}$. Для любого подмножества $P \subset \mathcal{R}_{f^t}$ будем полагать $W_P^s = \bigcup_{p \in P} W_p^s$, $W_P^u = \bigcup_{p \in P} W_p^u$. Для любого (возможно пустого) множества $\delta \subset \Delta_{f^t}$ положим

$$\Omega_\delta = \Omega_{f^t}^0 \cup \delta, \quad A_\delta = W_{\Omega_\delta}^u.$$

Напомним, что компактное f^t -инвариантное множество $A \subset M^n$ потока $f^t : M^n \rightarrow M^n$ называется его аттрактором, если оно обладает замкнутой окрестностью U_A , которая называется захватывающей, такой, что $f^t(U_A) \subset \text{int} U_A$ для $t > 0$ и $\bigcap_{t>0} f^t(U_A) = A$. Репеллером потока f^t называется аттрактор потока f^{-t} .

Лемма 1.1. Пусть $f^t \in G$. Тогда множество A_δ , $\forall \delta \subset \Delta_{f^t}$ является аттрактором потока f^t и обладает захватывающей окрестностью U_δ , граница которой

Σ_δ является $(n-1)$ -мерным подмногообразием, которое каждая траектория потока $f^t|_{W_{\Omega_\delta}^s \setminus \Omega_\delta}$ пересекает в точности в одной точке.

Для любой точки $p \in \delta$ положим $l_{p,\delta}^s = W_p^s \cap \Sigma_\delta$. Тогда множество $l_{p,\delta}^s$ является секущей для траекторий потока, лежащих в множестве $W_p^s \setminus p$. Из гиперболичности точки p следует, что множество $l_{p,\delta}^s$ гомеоморфно сфере $\mathbb{S}^{n-\lambda_p}$. Аналогично для любой точки $q \in (\Delta_{f^t} \setminus \delta)$ множество $l_{q,\delta}^u = W_q^u \cap \Sigma_\delta$ гомеоморфно сфере \mathbb{S}^{λ_q} .

Теорема 1.2. *Для любого потока $f^t \in G$ существует множество $\delta_* \subset \Omega_{f^t}^1$, такое что $\Sigma_{\delta_*} \cong \mathbb{S}^{n-1}$.*

Непосредственным следствием техники доказательства теоремы 1.2 является следующий результат.

Следствие 1.1. *Для любого потока $f^t \in G$ мощности $|\Omega_{f^t}^0|, |\Omega_{f^t}^1|$ множеств $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1$ удовлетворяют неравенству*

$$|\Omega_{f^t}^0| \leq |\Omega_{f^t}^1| + 1.$$

Положим $L_{\delta_*}^s = W_{\delta_*}^s \cap \Sigma_{\delta_*}$ и $L_{\delta_*}^u = W_{\Delta_{f^t} \setminus \delta_*}^u \cap \Sigma_{\delta_*}$. В силу леммы 1.1, множества $L_{\delta_*}^s, L_{\delta_*}^u$ состоят из разноразмерных сфер. Набор

$$S_{\delta_*} = (\Sigma_{\delta_*}, L_{\delta_*}^s, L_{\delta_*}^u)$$

назовем *сферической схемой* потока $f^t \in G$.

Сферические схемы $S_{\delta_*}, S_{\delta'_*}$ потоков $f^t, f^{t'} \in G$ назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\psi: \Sigma_{\delta_*} \rightarrow \Sigma_{\delta'_*}$, переводящий сферы множества $L_{\delta_*}^s$ в сферы множества $L_{\delta'_*}^s$ и сферы множества $L_{\delta_*}^u$ – в сферы множества $L_{\delta'_*}^u$.

Поскольку гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность потоков, переводит инвариантные многообразия неподвижных точек одного потока в инвариантные многообразия неподвижных точек другого потока с сохранением устойчивости и размерности, то непосредственным следствием теоремы 1.2 является следующий результат.

Следствие 1.2. *Топологически эквивалентные потоки $f^t, f^{t'} \in G$ обладают эквивалентными сферическими схемами.*

Заметим, что для некоторых классов поток сферическая схема является полным инвариантом. Так, для полярных потоков (с единственным стоком и единственным источником) на поверхности именно сферическая схема является полным инвариантом эквивалентности [1].

2. Построение захватывающей окрестности множества A_δ

В настоящем разделе мы докажем лемму 1.1а именно, докажем, что для любого потока $f^t \in G$ множество $A_\delta, \forall \delta \subset \Delta_{f^t}$ является аттрактором потока f^t и обладает захватывающей окрестностью U_δ , граница которой Σ_δ является $(n-1)$ -мерным подмногообразием, которое каждая траектория потока $f^t|_{V_\delta}$ пересекает в точности в одной точке.

Доказательство. Пусть $f^t \in G$. Обозначим через k_{f^t} число точек в множестве Δ_{f^t} . Из утверждения 1.1 и условий, наложенных на потоки класса G , следует, что множество A_δ компактно. Кроме того, оно f^t -инвариантно, как объединение

неустойчивых многообразий неподвижных точек. Индукцией по числу $i \in \{0, \dots, k_{f^t}\}$ точек в множестве δ покажем, что A_δ обладает захватывающей окрестностью U_δ с описанными в лемме свойствами.

Если $i = 0$, то $\delta = \emptyset$ и, следовательно, множество A_δ состоит из гиперболических стоков, т. е. $A_\delta = \Omega_{f^t}^0$. Из определения гиперболической точки следует, что у любой точки $p \in \Omega_{f^t}^0$ существует окрестность $U_p \subset M^n$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, сопрягающий поток $f^t|_{U_p}$ с линейным потоком $a_0^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Положим $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$, $B_p = h_p^{-1}(\mathbb{B}^n)$ и обозначим через O начало координат в \mathbb{R}^n . Тогда $\bigcap_{t>0} a_0^t(\mathbb{B}^n) = O$, $\bigcap_{t>0} f^t(B_p) = O$ и, следовательно, искомая захватывающая окрестность имеет вид $U_\delta = \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}^0} B_p$.

Пусть по предположению индукции захватывающая окрестность $U_{\tilde{\delta}}$ с описанными в лемме свойствами существует для любого аттрактора $A_{\tilde{\delta}}$, соответствующего множеству $\tilde{\delta} \subset \Delta_{f^t}$, состоящему из \tilde{i} точек. Положим $\delta = \tilde{\delta} \cup p$, $p \in (\Delta_{f^t} \setminus \tilde{\delta})$ и построим требуемую захватывающую окрестность U_δ аттрактора A_δ .

Пусть $p \in \Omega_f^\lambda$, $\lambda \in \{1, \dots, n-1\}$. Из определения гиперболической точки следует, что у точки p существует окрестность $U_p \subset M^n$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^n$, сопрягающий поток $f^t|_{U_p}$ с линейным потоком $a_\lambda^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Положим $\mathbb{D}_\lambda = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 \leq 1, x_{\lambda+1}^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$, $\mathbb{G}_\lambda^u = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{D}_\lambda : x_1^2 + \dots + x_\lambda^2 = 1\}$, $D_p = h_p^{-1}(\mathbb{D}_\lambda)$ и $G_p^u = h_p^{-1}(\mathbb{G}_\lambda^u)$. Не уменьшая общности, можно считать, что множества $U_{\tilde{\delta}}$ и G_p^u не пересекаются (в противном случае можно уменьшить множество \mathbb{D}_λ). Тогда траектории потока f^t , проходящие через точки множества G_p^u , пересекают множество $\partial U_{\tilde{\delta}}$, каждая траектория в единственной точке. Для каждой точки $r \in G_p^u$ обозначим через $t_r > 0$ время, такое что $f^{t_r}(r) \in \partial U_{\tilde{\delta}}$, и положим $t_* = \max_{r \in G_p^u} t_r$. Тогда искомая окрестность имеет вид (Рис. 2.1)

$$U_\delta = f^{-t_*}(U_{\tilde{\delta}}) \cup D_p.$$

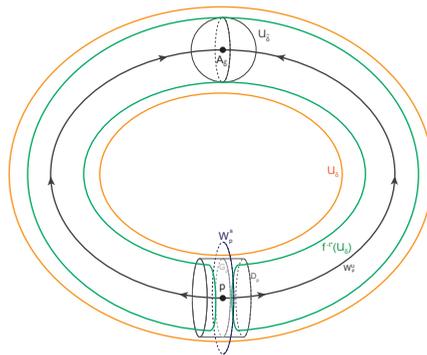


Рис. 2.1. Шаг индукции
Fig 2.1. Induction step

3. Построение секущей сферы

В настоящем разделе мы докажем теорему 1.2, а именно, докажем, что для любого потока $f^t \in G$ существует множество $\delta_* \subset \Omega_{f^t}^1$ такое, что $\Sigma_{\delta_*} \cong \mathbb{S}^{n-1}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала заметим, что для любого аттрактора A_δ с захватывающей окрестностью U_δ множество

$$R_\delta = W_{\Omega_{f^t}^s \cup \Delta_{f^t} \setminus \delta}$$

является репеллером с захватывающей окрестностью $V_\delta = M^n \setminus \text{int } U_\delta$. Кроме того, если $\delta = \Delta_{f^t}$, то $R_{\Delta_{f^t}} = \Omega_{f^t}^n$. В этом случае репеллер $R_{\Delta_{f^t}}$ является нульмерным множеством, откуда следует, что аттрактор $A_{\Delta_{f^t}}$ является связным (см., например, [5]) и имеет связную захватывающую окрестность $U_{\Delta_{f^t}}$. С другой стороны, если $\delta = \emptyset$, то аттрактор $A_\emptyset = \Omega_{f^t}^0$ состоит из всех стоков потока f^t . Если сток у потока f^t – единственный, то $\delta_* = \emptyset$, и теорема доказана, поскольку захватывающая окрестность U_{δ_*} в этом случае является n -шаром с границей Σ_{δ_*} являющейся искомой $(n-1)$ -сферой.

Рассмотрим случай, когда множество $\Omega_{f^t}^0$ состоит из $l > 1$ точек. В этом случае захватывающая окрестность U_\emptyset аттрактора A_\emptyset является дизъюнктивным объединением m штук n -шаров. При этом связная захватывающая окрестность $U_{\Delta_{f^t}}$ получается из несвязной окрестности U_\emptyset добавлением трубчатых окрестностей неустойчивых многообразий всех седловых точек. При этом если $\lambda_p > 1$ для седловой точки p , то множество $W_p^u \setminus p$ связно и целиком принадлежит устойчивому многообразию какого-либо одного стока. Таким образом, добавление к U_\emptyset трубчатых окрестностей неустойчивых многообразий размерности большей единицы, не уменьшает числа компонент связности аттрактора. Отсюда следует, что с точностью до перенумерации стоков $\omega_1, \dots, \omega_l$ существует последовательность седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}$ с индексом Морса 1, таких что компоненты связности множества $W_{\sigma_j}^u \setminus \sigma_j$ принадлежат $W_{\omega_j}^s, W_{\omega_{j+1}}^s$. Тогда множество $\Omega_{f^t}^0 \cup \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{l-1}$ связно и, следовательно, связан аттрактор A_{δ_*} для $\delta_* = \sigma_1 \cup \dots \cup \sigma_{l-1}$. Кроме того, захватывающая окрестность U_{δ_*} аттрактора A_{δ_*} является n -шаром, а его граница Σ_{δ_*} – искомой секущей сферой (Рис. 3.1).

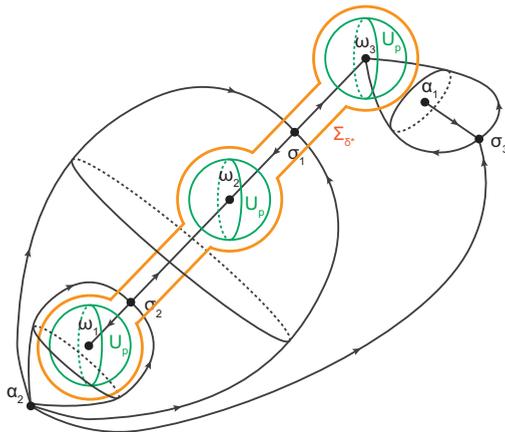


Рис. 3.1. Секущая сфера Σ_{δ_*}
Fig 3.1. Secant sphere Σ_{δ_*}

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 21-11-00010), кроме раздела 3, который выполнен при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fleitas G. Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática*. 1975. Vol. 19, No. 6 pp. 155-187.
2. Kosniowski C. *A first course in algebraic topology*. Cambridge: Cambridge University Press, 1980. DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511569296>
3. Medvedev T. V., Pochinka O. V., Zinina S. Kh. On existence of Morse energy function for topological flows // *Advances in Mathematics*. 2021. Vol. 378. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107518>
4. Pochinka O. V., Zinina S. Kh. Construction of the Morse-Bott energy function for regular topological flows // *Regular and Chaotic Dynamics*. 2021. Vol. 26, No. 4. pp. 350–369. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354721040031>
5. Гринес В. З., Медведев В. С., Починка О. В., Жужома Е. В. Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла // *Труды МИАН*. 2010. Т. 271. С. 111 –133.

*Поступила 2.04.2022; доработана после рецензирования 7.05.2022;
принята к публикации 25.05.2022*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows on dimensions two and three”, *Sociedade Brasileira de Matemática - Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, **19:6** (1975), 155-187.
2. C. Kosniowski, *A first course in algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1980 DOI: <https://doi.org/10.1017/CBO9780511569296>.
3. T. V. Medvedev, O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina, “On existence of Morse energy function for topological flows”, *Advances in Mathematics*, **378** (2021), 15 p. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.aim.2020.107518>
4. O. V. Pochinka, S. Kh. Zinina, “Construction of the Morse-Bott Energy Function for Regular Topological Flows”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **26:4** (2021), 350–369. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354721040031>

5. V. Z. Grines, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, E. V. Zhuzhoma, “Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms”, *Trudy MIAN*, **271** (2010), 111–133.

Submitted 2.04.2022; Revised 7.05.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.141-150

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938

О возмущениях алгебраических периодических автоморфизмов двумерного тора

В. З. Гринес, Д. И. Минц, Е. Е. Чилина

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Согласно результатам В. З. Гринеса и А. Н. Безденежных, для каждого градиентно-подобного диффеоморфизма замкнутой ориентируемой поверхности M^2 существуют градиентно-подобный поток и периодический диффеоморфизм этой поверхности, такие что исходный диффеоморфизм является суперпозицией диффеоморфизма, являющегося сдвигом на единицу времени потока, и периодического диффеоморфизма. В случае, когда M^2 является двумерным тором, имеется топологическая классификация периодических отображений. При этом известно, что существует лишь конечное число классов топологической сопряженности не гомотопных тождественному периодических диффеоморфизмов и каждый такой класс содержит представителя, являющегося периодическим алгебраическим автоморфизмом двумерного тора. Периодические автоморфизмы двумерного тора не являются структурно устойчивыми отображениями и предсказать динамику сколь угодно малых их возмущений невозможно. Однако в том случае, когда периодический диффеоморфизм является алгебраическим, в работе строится однопараметрическое семейство отображений, состоящее из исходного периодического алгебраического автоморфизма при нулевом значении параметра и градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерного тора при всех значениях параметра, не равных нулю. Каждый диффеоморфизм построенных однопараметрических семейств наследует, в определенном смысле, динамику возмущаемого периодического алгебраического автоморфизма.

Ключевые слова: двумерный тор, негиперболический алгебраический автоморфизм, однопараметрические семейства

Для цитирования: Гринес В. З., Минц Д. И., Чилина Е. Е. О возмущениях алгебраических периодических автоморфизмов двумерного тора // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 141–150. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.141-150>

Об авторах:

Гринес Вячеслав Зигмундович, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4709-6858>, vgrines@yandex.ru

Минц Дмитрий Ильич, стажер-исследователь Международной лаборатории динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0329-6946>, dmitriimints@gmail.com

Чилина Екатерина Евгеньевна, стажер-исследователь Международной лаборатории динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1298-9237>, k.chilina@yandex.ru

© В. З. Гринес, Д. И. Минц, Е. Е. Чилина



MSC2020 37C05

On perturbations of algebraic periodic automorphisms of a two-dimensional torus

V. Z. Grines, D. I. Mints, E. E. Chilina

Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. According to the results of V. Z. Grines and A. N. Bezdenezhnykh, for each gradient-like diffeomorphism of a closed orientable surface M^2 there exist a gradient-like flow and a periodic diffeomorphism of this surface such that the original diffeomorphism is a superposition of a diffeomorphism that is a shift per unit time of the flow and the periodic diffeomorphism. In the case when M^2 is a two-dimensional torus, there is a topological classification of periodic maps. Moreover, it is known that there is only a finite number of topological conjugacy classes of periodic diffeomorphisms that are not homotopic to identity one. Each such class contains a representative that is a periodic algebraic automorphism of a two-dimensional torus. Periodic automorphisms of a two-dimensional torus are not structurally stable maps, and, in general, it is impossible to predict the dynamics of their arbitrarily small perturbations. However, in the case when a periodic diffeomorphism is algebraic, we constructed a one-parameter family of maps consisting of the initial periodic algebraic automorphism at zero parameter value and gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional torus for all non-zero parameter values. Each diffeomorphism of the constructed one-parameter families inherits, in a certain sense, the dynamics of a periodic algebraic automorphism being perturbed.

Keywords: two-dimensional torus, nonhyperbolic algebraic automorphism, one-parameter families

For citation: V. Z. Grines, D. I. Mints, E. E. Chilina. On perturbations of algebraic periodic automorphisms of a two-dimensional torus. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:2(2022), 141–150. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.141-150>

About the authors:

Vyacheslav Z. Grines, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4709-6858>, vgrines@yandex.ru

Dmitrii I. Mints, Research Assistant, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0329-6946>, dmitriimints@gmail.com

Ekaterina E. Chilina, Research Assistant, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1298-9237>, k.chilina@yandex.ru

1. Введение и формулировка результатов

Пусть f – диффеоморфизм двумерного тора и p – его периодическая гиперболическая точка. Обозначим через W_p^s и W_p^u устойчивое и неустойчивое многообразия точки

V. Z. Grines, D. I. Mints, E. E. Chilina. On perturbations of algebraic periodic automorphisms of a...

p соответственно, а через Ω_f – неблуждающее множество f .

Напомним, что диффеоморфизм f называется диффеоморфизмом Морса-Смейла, если множество Ω_f конечно и гиперболично и многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых периодических точек $p, q \in \Omega_f$. Диффеоморфизм Морса-Смейла f называется градиентно-подобным, если из условия $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ для различных точек $p, q \in \Omega_f$ следует, что $\dim W_p^u < \dim W_q^u$ (под $\dim X$ подразумевается топологическая размерность множества X).

Обозначим через $W_p^{\nu,i}$ ($i \in \{1, 2\}$), $\nu \in \{u, s\}$, компоненту связности множества $W_p^\nu \setminus \{p\}$. Непосредственно проверяется, что диффеоморфизм Морса-Смейла f , заданный на двумерном торе, является градиентно-подобным тогда и только тогда, когда $W_p^{u,j} \cap W_q^{s,i} = \emptyset$ для каждой пары седловых периодических точек p, q и любых $i, j \in \{1, 2\}$.

Представим двумерный тор \mathbb{T}^2 как фактор-группу группы \mathbb{R}^2 по целочисленной решётке $\mathbb{Z}^2 : \mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z}^2$ с естественной проекцией $p_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ и обозначим через $[z]_{p_2}$ смежный класс группы \mathbb{R}^2 по группе \mathbb{Z}^2 , содержащий точку $z \in \mathbb{R}^2$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{Z})$, т. е. A – целочисленная квадратная матрица второго порядка и $\det A = \pm 1$. Тогда отображение $\hat{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное формулой $\hat{A}([x, y]_{p_2}) = [(ax + by, cx + dy)]_{p_2}$, является алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.

Согласно работе [1], алгебраический автоморфизм \hat{A} называется гиперболическим, если собственные значения матрицы $A \in GL(2, \mathbb{Z})$ не равны по модулю единице. В противном случае автоморфизм \hat{A} будем называть негиперболическим.

Хорошо известно (см. [2], Теорема 1), что гиперболические алгебраические автоморфизмы двумерного тора являются структурно устойчивыми отображениями. Негиперболические автоморфизмы двумерного тора не являются структурно устойчивыми отображениями, поэтому представляет интерес изучение возмущений таких автоморфизмов.

Согласно работам [3] (Лемма 3) и [4] (разделы 2–3), каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора посредством алгебраического автоморфизма задается в точности одной из следующих матриц:

$$A_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, A_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, A_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Напомним, что отличный от тождественного гомеоморфизм f замкнутой ориентируемой поверхности называется периодическим, если существует $n \in \mathbb{N}$, такое что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом f .

Матрица $A_1(0)$ индуцирует тождественное отображение двумерного тора. Матрицы $A_2(0), A_3, A_4, A_5, A_6, A_7$ индуцируют периодические автоморфизмы двумерного тора, а матрицы $A_1(m)$ и $A_2(m)$ при $m \neq 0$ индуцируют непериодические автоморфизмы двумерного тора.

Согласно результатам В. З. Гринеса и А. Н. Безденежных [5], любой градиентно-подобный диффеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности является суперпозицией сдвига на единицу времени некоторого градиентно-подобного потока и периодического гомеоморфизма.

Рассмотрим однопараметрические семейства M_ε , K_ε и J_ε диффеоморфизмов двумерного тора, такие что при $\varepsilon = 0$ они являются тождественными отображениями, а при $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ – сдвигами на единицу времени потоков с гиперболическими состояниями равновесия, фазовые портреты которых в фундаментальной области действия группы \mathbb{Z}^2 на \mathbb{R}^2 при $\varepsilon \in (-1, 0)$ представлены на Рис. 1.1. При $\varepsilon \in (0, 1)$ их фазовые портреты получаются из представленных на Рис. 1.1 обращением времени в обратную сторону. Построение таких семейств описано в разделе 3.

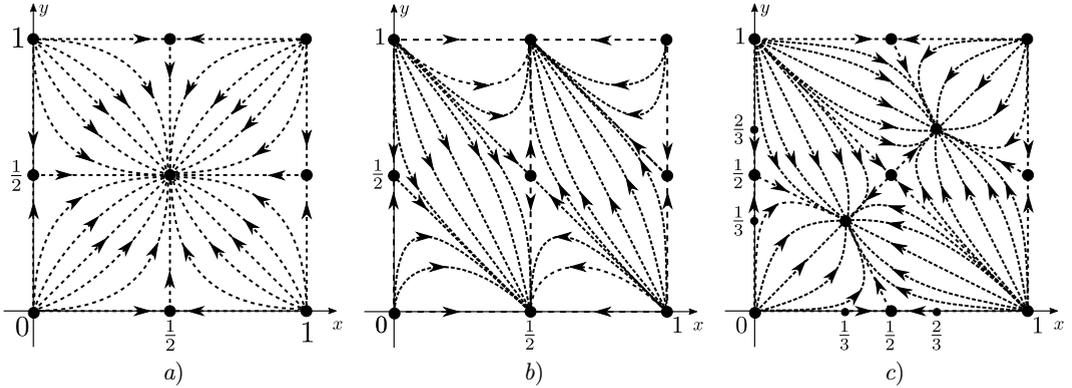


Рис. 1.1. Фазовые портреты потоков с гиперболическим состоянием равновесия: а) M_ε ; б) K_ε ; в) J_ε

Fig 1.1. Phase portraits of flows with hyperbolic equilibrium: а) M_ε ; б) K_ε ; в) J_ε

Введём однопараметрические семейства диффеоморфизмов следующими формулами: $M_{\varepsilon,A} = M_\varepsilon \circ \hat{A}$, $K_{\varepsilon,A} = K_\varepsilon \circ \hat{A}$ и $J_{\varepsilon,A} = J_\varepsilon \circ \hat{A}$, где \hat{A} – автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей $A \in GL(2, \mathbb{Z})$.

Теорема 1.1. Для любого $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ верны следующие утверждения:

- 1) отображения $M_{\varepsilon,A_2(0)}$, M_{ε,A_3} , K_{ε,A_4} , M_{ε,A_5} , J_{ε,A_6} , J_{ε,A_7} являются градиентно-подобными диффеоморфизмами;
- 2) любая периодическая точка каждого диффеоморфизма из пункта 1 является периодической точкой того же периода относительно возмущаемого алгебраического автоморфизма.

2. Динамика периодических алгебраических автоморфизмов двумерного тора

Пусть f – гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности M периода n . Обозначим через \mathcal{B}_f множество точек поверхности M , период которых строго меньше n . Если f сохраняет ориентацию, то, согласно работе [6], множество \mathcal{B}_f конечно.

Пусть $a \in [0, 1)$. Обозначим через $\mathbb{S}_{x=a}^1$ ($\mathbb{S}_{y=a}^1$) окружность на двумерном торе \mathbb{T}^2 , которая является образом прямой $x = a + k$ ($y = a + k$), где $k \in \mathbb{Z}$, относительно естественной проекции $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$.

Автоморфизм $\hat{A}_2(0)$ является сохраняющим ориентацию отображением периода 2. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$ состоит из неподвижных точек – $p_2(0, 0)$, $p_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$, $p_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ и

$p_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, где $p_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – естественная проекция.

Автоморфизм \hat{A}_3 является меняющим ориентацию отображением периода 2. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_3}$ состоит из двух окружностей: $\mathbb{S}_{y=0}^1$ и $\mathbb{S}_{y=\frac{1}{2}}^1$.

Автоморфизм \hat{A}_4 является меняющим ориентацию отображением периода 2. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_4}$ состоит из окружности $\mathbb{S}_{y=0}^1$.

Автоморфизм \hat{A}_5 является сохраняющим ориентацию отображением периода 4. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_5}$ состоит из неподвижных точек – $p_2(0, 0)$ и $p_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, и одной орбиты периода два – $\left\{ p_2 \left(0, \frac{1}{2} \right), p_2 \left(\frac{1}{2}, 0 \right) \right\}$.

Автоморфизм \hat{A}_6 является сохраняющим ориентацию отображением периода 3. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_6}$ состоит из неподвижных точек – $p_2(0, 0)$, $p_2 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$, $p_2 \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$.

Автоморфизм \hat{A}_7 является сохраняющим ориентацию отображением периода 6. Его множество $\mathcal{B}_{\hat{A}_7}$ состоит из неподвижной точки – $p_2(0, 0)$, 1 орбиты периода 2 – $\left\{ p_2 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right), p_2 \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right) \right\}$ и 1 орбиты периода 3 – $\left\{ p_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right), p_2 \left(\frac{1}{2}, 0 \right), p_2 \left(0, \frac{1}{2} \right) \right\}$.

3. Построение семейств M_ε , L_ε , K_ε и J_ε

Зададим функцию $h_\varepsilon(z): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ по следующему правилу:

$$h_\varepsilon(z) := \begin{cases} k + \frac{1}{\pi} \arctan \left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi z) \right), & z \in \left(k - \frac{1}{2}; k + \frac{1}{2} \right) \ (k \in \mathbb{Z}), \\ k + \frac{1}{2}, & z = k + \frac{1}{2} \ (k \in \mathbb{Z}), \end{cases}$$

где $\varepsilon \in (-1, 1)$.

При $\varepsilon = 0$ функция $h_\varepsilon(z)$ имеет вид $h_\varepsilon(z) = z$. График функции $h_\varepsilon(z)$ при $\varepsilon \neq 0$ изображён на Рис. 3.1.

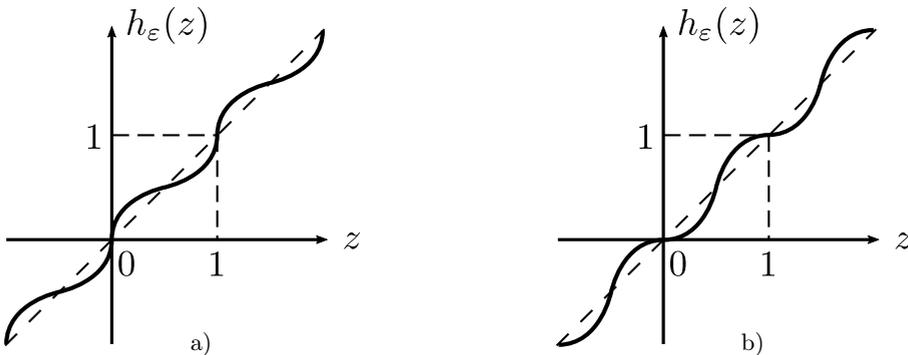


Рис. 3.1. График функции $h_\varepsilon(z)$: а) при $\varepsilon \in (-1, 0)$, б) при $\varepsilon \in (0, 1)$
Fig 3.1. Graph of the function $h_\varepsilon(z)$: а) for $\varepsilon \in (-1, 0)$, б) for $\varepsilon \in (0, 1)$

Представим окружность \mathbb{S}^1 как фактор-группу группы \mathbb{R} по группе $\mathbb{Z} : \mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с естественной проекцией $p_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ и обозначим через $[z]_{p_1}$ смежный класс группы \mathbb{R} по группе \mathbb{Z} , содержащий точку $z \in \mathbb{R}$.

Так как функция $h_\varepsilon(z)$ удовлетворяет условию $h_\varepsilon(z + k) = h_\varepsilon(z) + k$ ($k \in \mathbb{Z}$), то она индуцирует диффеоморфизм окружности $\varphi_\varepsilon : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, зависящий от параметра $\varepsilon \in (-1, 1)$ и заданный формулой: $\varphi_\varepsilon([z]_{p_1}) = [h_\varepsilon(z)]_{p_1}$.

При $\varepsilon = 0$ отображение φ_ε является тождественным. При $\varepsilon \in (-1, 0)$ ($\varepsilon \in (0, 1)$) непосредственно проверяется, что неблуждающее множество диффеоморфизма φ_ε гиперболично и состоит из стока $\omega = p_1\left(\frac{1}{2}\right)$ ($\omega = p_1(0)$) и источника $\alpha = p_1(0)$ ($\alpha = p_1\left(\frac{1}{2}\right)$), и φ_ε – градиентно-подобный диффеоморфизм. Фазовый портрет φ_ε при $\varepsilon \neq 0$ изображен на Рис. 3.2.

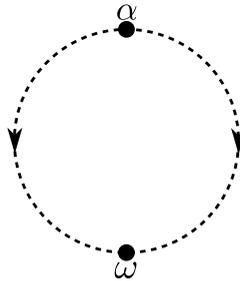


Рис. 3.2. Фазовый портрет φ_ε при $\varepsilon \neq 0$
Fig 3.2. Phase portrait of φ_ε for $\varepsilon \neq 0$

Определим диффеоморфизм двумерного тора M_ε как прямое произведение: $M_\varepsilon = \varphi_\varepsilon \times \varphi_\varepsilon$.

При $\varepsilon = 0$ отображение M_ε является тождественным. При $\varepsilon \in (-1, 0)$ ($\varepsilon \in (0, 1)$) диффеоморфизм M_ε по построению является градиентно-подобным диффеоморфизмом, неблуждающее множество Ω_{M_ε} которого состоит из источника $\alpha = p_2(0, 0)$ ($\alpha = p_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$), стока $\omega = p_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ($\omega = p_2(0, 0)$) и седел: $\sigma_1 = p_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\sigma_2 = p_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Определим диффеоморфизм двумерного тора K_ε по формуле $K_\varepsilon = \hat{K}^{-1} \circ M_\varepsilon \circ \hat{K}$, где \hat{K} – алгебраический автоморфизм двумерного тора, заданный формулой $\hat{K}\left([x, y]_{p_2}\right) = [(x, x + y)]_{p_2}$.

При $\varepsilon = 0$ отображение K_ε является тождественным. При $\varepsilon \in (-1, 0)$ ($\varepsilon \in (0, 1)$) диффеоморфизм K_ε по построению является градиентно-подобным диффеоморфизмом, неблуждающее множество Ω_{K_ε} которого состоит из источника $\alpha = p_2(0, 0)$ ($\alpha = p_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)$), стока $\omega = p_2\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ ($\omega = p_2(0, 0)$) и седел: $\sigma_1 = p_2\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $\sigma_2 = p_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Построим диффеоморфизм двумерного тора J_ε следующим образом. Разобьём квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ на плоскости xOy на 6 многоугольников $\bar{\mathcal{F}}^0, \bar{\mathcal{F}}^1, \bar{\mathcal{F}}^2, \bar{\mathcal{F}}^3, \bar{\mathcal{F}}^4, \bar{\mathcal{F}}^5$ так, как показано на Рис. 3.3.

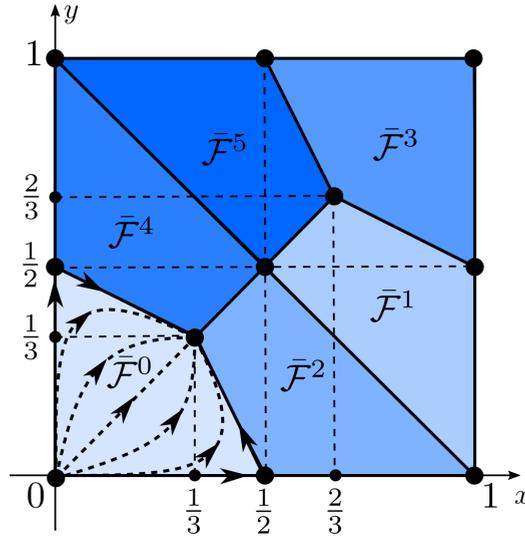


Рис. 3.3. Фазовый портрет потока, в который включается \bar{J}_ε^*
 Fig 3.3. Phase portrait of the flow, which embeds \bar{J}_ε^*

Определим гомеоморфизм $\bar{J}^* : [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \bar{\mathcal{F}}^0$ по правилу:

$$\bar{J}^*(x, y) = \begin{cases} (\frac{2}{3}x, y - \frac{1}{3}x), & y \geq x, \\ (x - \frac{1}{3}y, \frac{2}{3}y), & y < x. \end{cases}$$

Положим $\bar{M}_\varepsilon(x, y) = (h_\varepsilon(x), h_\varepsilon(y))$. Диффеоморфизм \bar{M}_ε является накрывающим отображением для M_ε . Рассмотрим отображение $\bar{J}_\varepsilon^* : \bar{\mathcal{F}}^0 \rightarrow \bar{\mathcal{F}}^0$, заданное формулой $\bar{J}_\varepsilon^*(x, y) = (\bar{J}^* \circ \bar{M}_\varepsilon \circ (\bar{J}^*)^{-1})(x, y)$. Непосредственно проверяется, что \bar{J}_ε^* является диффеоморфизмом. На Рис. 3.3 изображён фазовый портрет потока, в который включается \bar{J}_ε^* .

Обозначим через G_{p_2} группу скольжений накрытия p_2 двумерного тора, которая состоит из гомеоморфизмов вида $h_{a,b}(x, y) = (x + a, y + b)$ ($a, b \in \mathbb{Z}$). Определим отображение $\bar{J}_\varepsilon : \bigcup_{h_{a,b} \in G_{p_2}} h_{a,b}(\bar{\mathcal{F}}^0) \rightarrow \bigcup_{h_{a,b} \in G_{p_2}} h_{a,b}(\bar{\mathcal{F}}^0)$ по формуле $\bar{J}_\varepsilon(x, y) = (h_{a,b} \circ \bar{J}_\varepsilon^* \circ h_{a,b}^{-1})(x, y)$, где $(x, y) \in h_{a,b}(\bar{\mathcal{F}}^0)$.

Для точки $z \in p_2(\bar{\mathcal{F}}^0)$ определим отображение $J_\varepsilon^*(z) = p_2(\bar{J}_\varepsilon(p_2^{-1}(z)))$, где под $p_2^{-1}(z)$ подразумевается полный прообраз точки z .

Поскольку естественная проекция каждого из многоугольников $\bar{\mathcal{F}}^0, \bar{\mathcal{F}}^1, \bar{\mathcal{F}}^2, \bar{\mathcal{F}}^3, \bar{\mathcal{F}}^4, \bar{\mathcal{F}}^5$ на двумерный тор \mathbb{T}^2 является фундаментальной областью действия автоморфизма \hat{A}_7 , то можно определить диффеоморфизм $J_\varepsilon : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ формулой:

$$J_\varepsilon(z) = \begin{cases} J_\varepsilon^*(z), & z \in p_2(\bar{\mathcal{F}}^0), \\ (\hat{A}_7^i \circ J_\varepsilon^* \circ \hat{A}_7^{-i})(z), & z \in p_2(\bar{\mathcal{F}}^i) (i = \overline{1, 5}). \end{cases}$$

При $\varepsilon = 0$ отображение J_ε является тождественным. При $\varepsilon \in (-1, 0)$ ($\varepsilon \in (0, 1)$) диффеоморфизм J_ε по построению является градиентно-подобным диффеоморфизмом, неблуждающее множество Ω_{J_ε} которого состоит из источника $\alpha = p_2(0, 0)$ (источников:

$\alpha_1 = p_2 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$ и $\alpha_2 = p_2 \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$, стоков: $\omega_1 = p_2 \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$ и $\omega_2 = p_2 \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$ (одного стока $\omega = p_2(0, 0)$), и 3-х седел: $\sigma_1 = p_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, $\sigma_2 = p_2 \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ и $\sigma_3 = p_2 \left(0, \frac{1}{2} \right)$.

4. Доказательство Теоремы 1.1

Основная идея доказательства основывается на том, что при $\varepsilon \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ диффеоморфизмы семейств $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(0)}$, $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_3}$, $\mathcal{K}_{\varepsilon, A_4}$, $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_5}$, $\mathcal{J}_{\varepsilon, A_6}$, $\mathcal{J}_{\varepsilon, A_7}$ представляют собой суперпозицию периодического гомеоморфизма двумерного тора и градиентно-подобного диффеоморфизма, такого что периодический гомеоморфизм отображает инвариантные относительно градиентно-подобного диффеоморфизма области в инвариантные относительно него же области.

Докажем утверждения теоремы для диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(0)}$ при $\varepsilon \in (0, 1)$. Утверждения теоремы для остальных диффеоморфизмов доказываются аналогично.

Множество Ω_{M_ε} состоит из точек $p_2(0, 0)$, $p_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$, $p_2 \left(0, \frac{1}{2} \right)$, $p_2 \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$ и совпадает с множеством неподвижных точек $\mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$. Непосредственно проверяется, что все точки множества $\mathcal{B}_{\hat{A}_2(0)}$ являются неподвижными точками отображения $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(0)}$. Нахождение собственных значений матрицы Якоби в этих точках показывает, что эти точки являются гиперболическим источником $\alpha = p_2(0, 0)$, гиперболическим стоком $\omega = p_2 \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$ и гиперболическими седлами: $\sigma_1 = p_2 \left(0, \frac{1}{2} \right)$, $\sigma_2 = p_2 \left(\frac{1}{2}, 0 \right)$.

Докажем, что компоненты связности инвариантных многообразий седловых неподвижных точек σ_1 и σ_2 диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(0)}$ не пересекаются.

Обозначим через $\bar{A}_2(0)$ линейное отображение плоскости \mathbb{R}^2 , индуцированное матрицей $A_2(0)$, которое является накрывающим для автоморфизма $\hat{A}_2(0)$. Поскольку $(M_\varepsilon \circ \hat{A}_2(0))([(x_0, y_0)]_{p_2}) = [(\bar{M}_\varepsilon \circ \bar{A}_2(0))(x_0, y_0)]_{p_2} = [(-h_\varepsilon(x_0), -h_\varepsilon(y_0))]_{p_2} = [(\bar{A}_2(0) \circ \bar{M}_\varepsilon)(x_0, y_0)]_{p_2} = (\hat{A}_2(0) \circ M_\varepsilon)([(x_0, y_0)]_{p_2})$ для любых $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, то отображения M_ε и $\hat{A}_2(0)$ коммутируют.

Поскольку отображение $\bar{A}_2(0)$ является изометрией плоскости \mathbb{R}^2 , то непосредственно проверяется, что $d(\hat{A}_2(0)([P]_{p_2}), \hat{A}_2(0)([P']_{p_2})) = d([P]_{p_2}, [P']_{p_2})$ для любых $[P]_{p_2}, [P']_{p_2} \in \mathbb{T}^2$, где d – метрика на двумерном торе. В силу коммутативности M_ε и $\hat{A}_2(0)$ выполняется $d(\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(0)}^n([P]_{p_2}), \mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(0)}^n([P']_{p_2})) = d(\hat{A}_2^n(0)(M_\varepsilon^n([P]_{p_2})), \hat{A}_2^n(0)(M_\varepsilon^n([P']_{p_2}))) = d(M_\varepsilon^n([P]_{p_2}), M_\varepsilon^n([P']_{p_2}))$ для любых $[P]_{p_2}, [P']_{p_2} \in \mathbb{T}^2$. Отсюда следует, что инвариантные относительно диффеоморфизма $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(0)}$ многообразия седловых неподвижных точек σ_1 и σ_2 совпадают с их инвариантными многообразиями относительно диффеоморфизма M_ε и, как следствие, не пересекаются.

Докажем, что множество $\mathbb{T}^2 \setminus \Omega_{M_\varepsilon}$ состоит из блуждающих относительно $\mathcal{M}_{\varepsilon, A_2(0)}$ точек. Покроем множество $\mathbb{T}^2 \setminus \Omega_{M_\varepsilon}$ открытыми множествами $p_2 \left([0, 1] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \right)$, $p_2 \left([0, 1] \times \left(\frac{1}{2}, 1 \right) \right)$, $p_2 \left(\left(0, \frac{1}{2} \right) \times [0, 1] \right)$ и $p_2 \left(\left(\frac{1}{2}, 1 \right) \times [0, 1] \right)$. Докажем, что множество $p_2([0, 1] \times (0, \frac{1}{2}))$ состоит из блуждающих точек. Доказательство для остальных множеств аналогично.

Рассмотрим точку P из множества $p_2 \left([0, 1] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \right)$. Поскольку $P \notin \Omega_{M_\varepsilon}$ и множество $p_2 \left([0, 1] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \right)$ является открытым на двумерном торе, то существует окрестность $U_P \subset p_2 \left([0, 1] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \right)$ такая, что $M_\varepsilon^n(U_P) \cap U_P = \emptyset$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Поскольку $M_\varepsilon \circ \hat{A}_2(0) = \hat{A}_2(0) \circ M_\varepsilon$ и $\hat{A}_2(0)$ – автоморфизм периода 2, то для $n = 2k$ ($k \in \mathbb{N}$) выполняется $M_{\varepsilon, A_2(0)}^n(U_P) = M_\varepsilon^n(U_P)$. Тогда $M_{\varepsilon, A_2(0)}^n(U_P) \cap U_P = \emptyset$. Для $n = 2k - 1$ ($k \in \mathbb{N}$) выполняется $M_{\varepsilon, A_2(0)}^n(U_P) = M_\varepsilon^n(\hat{A}_2(0)(U_P))$. Под действием $\hat{A}_2(0)$ окрестность U_P отображается в множество $p_2 \left([-1, 0] \times \left(-\frac{1}{2}, 0 \right) \right)$ (см. Рис. 4.1), которое, в свою очередь, является инвариантным относительно действия M_ε и не пересекается с рассматриваемым множеством $p_2 \left([0, 1] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \right)$. Тогда $M_{\varepsilon, A_2(0)}^n(U_P) \cap U_P = \emptyset$. Следовательно, множество $p_2 \left([0, 1] \times \left(0, \frac{1}{2} \right) \right)$ состоит из блуждающих относительно $M_{\varepsilon, A_2(0)}$ точек.

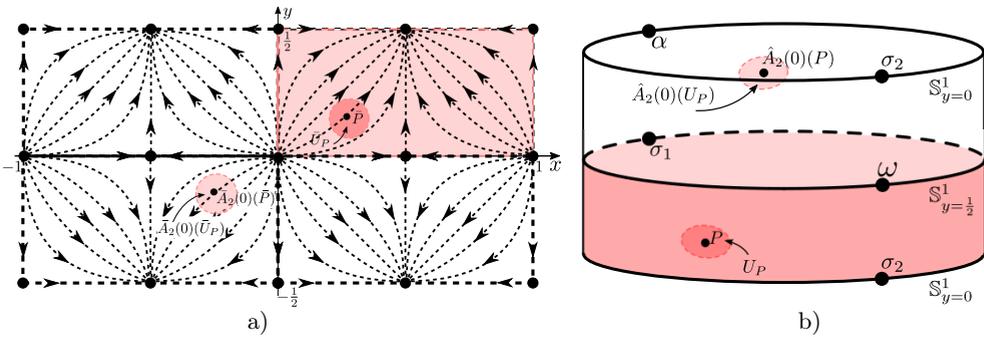


Рис. 4.1. Действие отображения $\hat{A}_2(0)$: а) действие $\bar{A}_2(0)$ на окрестность \bar{U}_P и точку \bar{P} , такие что $p_2(\bar{U}_P) = U_P$ и $p_2(\bar{P}) = P$; б) действие отображения $\hat{A}_2(0)$ на двумерном торе \mathbb{T}^2 , разрезанном по окружности $S^1_{y=0}$

Fig 4.1. The action of map $\hat{A}_2(0)$: а) the action of $\bar{A}_2(0)$ on the neighborhood of \bar{U}_P and the point \bar{P} such that $p_2(\bar{U}_P) = U_P$ and $p_2(\bar{P}) = P$; б) the action of map $\hat{A}_2(0)$ on a two-dimensional torus \mathbb{T}^2 cut along a circle $S^1_{y=0}$

Таким образом, неблуждающее множество $\Omega_{M_{\varepsilon, A_2(0)}}$ диффеоморфизма $M_{\varepsilon, A_2(0)}$ конечно и гиперболично и компоненты связности инвариантных многообразий седловых точек диффеоморфизма $M_{\varepsilon, A_2(0)}$ не пересекаются. Следовательно, отображение $M_{\varepsilon, A_2(0)}$ является градиентно-подобным диффеоморфизмом.

Благодарности. Публикация подготовлена в ходе исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021– 2022 гг, кроме раздела 3, который выполнен при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Минобрнауки России соглашение № 075-15-2019-1931.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем. М.: Факториал, 1999. 768 с.
2. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. 1967. Т. 90. С. 3–210.
3. Batterson S. The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus // Transactions of the American Mathematical Society. 1979. Vol. 256. pp. 395–403.
4. Сидоров С. В., Чилина Е. Е. О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора // Журнал СВМО. 2021. Т. 23, № 3. С. 295–307. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.295-307>
5. Bezdenezhykh A. N., Grines V. Z. Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds // Sel. Math. Sov. 1992. Vol. 11, No. 1. pp. 19–23.
6. Nielsen J. Die struktur periodischer transformationen von flachen. Kobenhavn: Levin & Munksgaard, 1937. Т. 15, No. 1. 78 p.

*Поступила 30.03.2022; доработана после рецензирования 2.05.2022;
принята к публикации 25.05.2022*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. A. B. Katok, B. Hasselblat., [*Introduction to the modern dynamical systems theory*], Factorial Publ., Moscow, 1999 (In Russ.), 768 с.
2. D. V. Anosov, “[Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature]”, *Trudy Mat. Inst. Steklov.*, **90** (1967), 3–210 (In Russ.).
3. S. Batterson, “The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **256** (1979), 395–403.
4. S. V. Sidorov, E. E. Chilina, “On non-hyperbolic algebraic automorphisms of a two-dimensional torus”, *Zhurnal SVMO*, **23**:3 (2021), 295–307 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.295-307>
5. A. N. Bezdenezhykh, V. Z. Grines, “Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds”, *Sel. Math. Sov.*, **11**:1 (1992), 19–23.
6. J. Nielsen, *Die struktur periodischer transformationen von flachen*, **15**, Levin & Munksgaard, Kobenhavn, 1937, 78 с.

Submitted 30.03.2021; Revised 2.05.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.151-161

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.62

О численном решении жестких линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка

Л. С. Соловарова¹, Т. З. Фьонг²

¹ ФГБУН «Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова» (г. Иркутск, Российская Федерация)

² Ханойский математический институт Вьетнамской академии наук и технологий (г. Ханой, Вьетнам)

Аннотация. В данной статье рассмотрены системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед главной частью. Такие постановки задач в отечественной и зарубежной литературе принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями. В настоящей работе внимание уделено задачам второго порядка. На основе фактов из теории матричных пучков и полиномов приведены достаточные условия существования и единственности решения данных уравнений. Для их численного решения исследуются многошаговый метод и его вариант, основанный на переформулированной записи исходной задачи. Такое представление позволяет строить методы, матрицы коэффициентов у которых могут рассчитываться в предыдущих точках. Данный подход хорошо зарекомендовал себя при численном решении дифференциально-алгебраических уравнений первого порядка, содержащих жесткие и быстроосциллирующие компоненты и обладающих сингулярным матричным пучком. Предлагаемый в настоящей работе численный алгоритм исследован на устойчивость для известного тестового уравнения. Показано, что данная разностная схема может иметь первый порядок сходимости. Приведены численные расчеты модельной задачи.

Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения второго порядка, жесткие системы, разностные схемы

Для цитирования: Соловарова Л. С., Фьонг Т. З. О численном решении жестких линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 151–161. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.151-161>

Об авторах:

Соловарова Любовь Степановна, старший научный сотрудник лаборатории 1.1, ФГБУН «Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова» (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3392-5232>, soleilu@mail.ru

Та Зуй Фьонг, доцент, Ханойский математический институт Вьетнамской академии наук и технологий (10307, Вьетнам, г. Ханой, ул. Хоанг Куок Виет Род, д. 18), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6955-1589>, tdphuong@math.ac.vn

© Л. С. Соловарова, Т. З. Фьонг



MSC2020 65L80

On the numerical solution of second-order stiff linear differential-algebraic equations

L. S. Solovarova¹, T. D. Phuong²

¹ *Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (Irkutsk, Russian Federation)*

² *Institute of Mathematics of the Vietnamese Academy of Science and Technology (Hanoi, Vietnam)*

Abstract. This article addresses systems of linear ordinary differential equations with an identically degenerate matrix in the main part. Such formulations of problems in literature are usually called differential-algebraic equations. In this work, attention is paid to the problems of the second order. Basing on the theory of matrix pencils and polynomials, sufficient conditions for existence and uniqueness of the equations' solution are given. To solve them numerically, authors investigate a multistep method and its version based on a reformulated notation of the original problem. This representation makes it possible to construct methods whose coefficient matrices can be calculated at previous points. This approach has delivered good results in numerical solution of first-order differential-algebraic equations that contain stiff and rapidly oscillating components and have singular matrix pencil. The stability of proposed numerical algorithm is investigated for the well-known test equation. It is shown that this difference scheme has the first order of convergence. Numerical calculations of the model problem are presented.

Keywords: differential algebraic equations of the second order, stiff systems, difference schemes

For citation: *L. S. Solovarova, T. D. Phuong. On the numerical solution of second-order stiff linear differential-algebraic equations. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 24:2(2022), 151–161. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.151-161>*

About the authors:

Liubov S. Solovarova, Senior Researcher, Laboratory 1.1, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of SB RAS (134 Lermontova s., Irkutsk 664033, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3392-5232>, soleilu@mail.ru

Ta Duy Phuong, Associate Professor, Institute of Mathematics of the Vietnamese Academy of Science and Technology, (18 Hoang Quoc Viet Road, Hanoi 10307, Vietnam), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6955-1589>, tdphuong@math.ac.vn

1. Введение

Многие технические и природные процессы можно описать взаимосвязанными обыкновенными дифференциальными и алгебраическими уравнениями. Эти системы принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ). И качественная теория, и теория численных методов для ДАУ развиваются с 1970–1980-х гг. В настоящее время существует огромное количество статей и монографий, посвященных различным аспектам исследования ДАУ (см., например, [1–7]). Несмотря на этот

факт, теория численного решения рассматриваемых задач далека до завершения, особенно это касается сложных случаев, например, ДАУ второго и большего порядков. Как правило, для решения таких задач вводят новую kn -мерную вектор-функцию, где k – порядок ДАУ, n – размерность исходной системы. Тогда ДАУ порядка k приводится к первому порядку. Такой подход обладает двумя недостатками: увеличение размерности получаемой задачи и ухудшение ее свойств. Кроме того, к настоящему времени опубликовано крайне ограниченное количество статей, посвященных численному решению ДАУ высокого порядка. Приведем некоторые из них: работа [8] посвящена применению неявного метода Эйлера для рассматриваемых задач, а в [9] для их исследования используется техника проекторов.

Поскольку ДАУ высокого порядка – интересный для изучения и востребованный в приложениях объект, но при этом теория его численного решения развита недостаточно, вполне естественно для разработки таких алгоритмов использовать результаты, полученные для рассматриваемых задач первого порядка. Для численного решения ДАУ первого порядка высокого индекса и задач, содержащих жесткие компоненты, зарекомендовал себя подход, основанный на иной записи исходной задачи [10]. Настоящая работа посвящена анализу данной техники для ДАУ второго порядка.

2. Постановка задачи и определения

Рассмотрим задачу

$$A(t)x''(t) + B(t)x'(t) + C(t)x(t) = f(t), \quad t \in [0, 1], \quad (2.1)$$

$$x(0) = x_0, \quad x'(t)|_{t=0} = x'_0, \quad (2.2)$$

где $A(t), B(t), C(t)$ – $(n \times n)$ -матрицы; $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n -мерные вектор-функции, соответственно; $x_0, x'_0 \in R^n$. Здесь и далее предполагается, что

$$\det A(t) \equiv 0. \quad (2.3)$$

Систему (2.1) с условием (2.3) принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями второго порядка (ДАУ2). Предполагается, что начальные условия (2.2) согласованы с правой частью (заданы корректно), то есть рассматриваемая задача имеет решение. Под решением мы понимаем любую дифференцируемую вектор-функцию, которая обращает (2.1) в тождество и удовлетворяет условиям (2.2).

Большую роль при исследовании ДАУ первого порядка играет теория регулярных матричных пучков [6], [11–12]. Для дальнейшего изложения нам потребуются определения и вспомогательные результаты.

О п р е д е л е н и е 2.1. [11] *Выражение вида $\lambda A + B$, где λ – скалярный параметр, A и B – матрицы размера $(m \times n)$, называют матричным пучком. Если $m = n$ и $\det(\lambda A + B) \not\equiv 0$, где λ – скаляр, то пучок матриц $\lambda A + B$ называется регулярным. В противном случае ($m \neq n$ или $\det(\lambda A + B) \equiv 0, \forall \lambda$) пучок называется сингулярным.*

О п р е д е л е н и е 2.2. [6] *Пучок матриц $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию “ранг-степень” на отрезке $[0, 1]$, если $\text{rank } A(t) = k = \text{const}$, и*

$$\det(\lambda A(t) + B(t)) = a_0(t)\lambda^k + a_1(t)\lambda^{k-1} + \dots + a_k(t), \quad a_0(t) \neq 0 \quad \forall t \in [0, 1].$$

О п р е д е л е н и е 2.3. [13] Матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$, где λ, μ – скалярные параметры, имеет простую структуру на отрезке $[0, 1]$, если

- 1) $\text{rank}A(t) = k = \text{const} \forall t \in [0, 1]$;
- 2) $\text{rank}(A(t)|B(t)) = k + l = \text{const} \forall t \in [0, 1]$;
- 3) $\det(\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)) = a_0(t)\lambda^k \mu^l + \dots$, $a_0(t) \neq 0 \forall t \in [0, 1]$.

Относительно существования и единственности решения задачи (2.1) – (2.2) справедлива

Т е о р е м а 2.1. [13] Пусть для задачи (2.1) – (2.2) выполнены следующие условия:

- 1) матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ имеет простую структуру на $[0, 1]$;
- 2) элементы входных данных обладают достаточной гладкостью (из класса $C^2_{[0,1]}$);
- 3) начальные условия (2.2) согласованы с правой частью (2.1) (заданы корректно).

Тогда задача (2.1) – (2.2) имеет единственное решение из класса $C^2_{[0,1]}$.

В следующем параграфе приведем построение многошаговых методов для решения задачи (2.1) – (2.2).

3. Многошаговые схемы и их модификация

Зададим на отрезке интегрирования равномерную сетку

$$t_i = i h, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad h = 1/N$$

и обозначим

$$A_i = A(t_i), \quad B_i = B(t_i), \quad C_i = C(t_i), \quad f_i = f(t_i), \quad x_i \approx x(t_i).$$

Предполагается, что x_1, x_2, \dots, x_{k-1} заранее вычислены (x_0 задано из (2.2)).

Приведем простейшую неявную двухшаговую разностную схему

$$A_{i+1}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + h B_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + h^2 C_{i+1} x_{i+1} = h^2 f_{i+1}. \quad (3.1)$$

В работе [14] доказана сходимость данной схемы к точному решению со скоростью $O(h)$, если выполнены условия:

- 1) матрица $B(t) \equiv 0$;
- 2) пучок матриц $\lambda A(t) + C(t)$ удовлетворяет критерию „ранг-степень“;
- 3) элементы матриц $A(t)$, $B(t)$ и вектор-функции $f(t)$ принадлежат классу $C^2_{[0,1]}$;
- 4) стартовые значения x_0, x_1 удовлетворяют $\|x_0 - x(0)\| = O(h)$, $\|x_1 - x(h)\| = O(h)$.

Если у системы (2.1) матрица $A(t) \equiv 0$, то матричный полином $\lambda A(t) + \mu B(t) + C(t)$ простой структуры будет матричным пучком $\mu B(t) + C(t)$, который удовлетворяет «ранг – степень». Это следует из статьи [13]. В этом случае схема (3.1) после сокращения обеих частей на h станет неявной схемой Эйлера

$$B_{i+1}(x_{i+1} - x_i) + hC_{i+1}x_{i+1} = hf_{i+1}. \quad (3.2)$$

Данная схема для ДАУ первого порядка, у которой матричный пучок $\mu B(t) + C(t)$ удовлетворяет «ранг – степень», хорошо исследован (см., напр., [6],[15] и приведенную там библиографию) на предмет устойчивости и сходимости. Также данная схема неплохо зарекомендовала себя для жестких обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (см., напр., [3]).

Также перед ее анализом отметим следующий факт. Продолжительное время считалось, что для численного решения линейных ДАУ первого порядка

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \in [0, 1],$$

у которых матричный пучок $\lambda A(t) + B(t)$ удовлетворяет критерию «ранг – степень» можно с успехом применять неявные схемы, разработанные для численного решения жестких ОДУ.

Однако в 2002 г. [15] был построен пример жесткой линейной системы ДАУ, для которой применение неявной схемы Эйлера требовало существенного ограничения на шаг интегрирования. В противном случае данная схема становилась неустойчивой. Позже [16] были построены другие примеры жестких ДАУ индекса один, для численного решения которых A -устойчивые методы также требовали ограничения на шаг интегрирования.

Ниже мы приведем пример жесткой и (или) быстроосцилирующей задачи (2.1) – (2.2), для численного решения которой также простейшие неявные методы требуют ограничения на шаг интегрирования.

Рассмотрим тестовое уравнение

$$x'' + ax' + bx = 0, \quad x(0) = x_0, \quad x'(t)|_{t=0} = x'_0, \quad t \in [0, 1], \quad (3.3)$$

где a и b – вещественные скалярные параметры,

$$a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad a + b \gg 0, \quad (3.4)$$

и на нем проведем исследование на предмет устойчивости схемы (3.1).

Обозначим

$$z = ah, \quad y = bh^2.$$

Схема (3.1) для задачи (3.3) дает соотношения

$$(1 + z + y)x_{i+1} - (2 + z)x_i + x_{i-1} = 0, \quad (3.5)$$

которым соответствует характеристическое уравнение

$$(1 + z + y)p^2 - (2 + z)p + 1 = \alpha p^2 + \beta p + \delta = 0. \quad (3.6)$$

Оценим, при каких значениях z , y корни характеристического уравнения (3.6) лежат в единичном круге. Далее поступим стандартным образом [17]. Произведем замену переменной $p = \frac{q+1}{q-1}$, которая отображает круг единичного радиуса комплексной плоскости с центром в начале координат в левую полуплоскость, получим

$$(\alpha + \beta + \delta)q^2 + 2(\alpha - \delta)q + (\alpha - \beta + \delta) = 0. \quad (3.7)$$

Данный полином будет иметь корни, лежащие в левой полуплоскости (следовательно, корни (3.6) лежат в единичном круге), если коэффициенты (3.7) имеют одинаковый знак (критерий Рауса–Гурвица ([17])). В нашем случае

$$\begin{aligned}\alpha &= 1 + z + y, & \beta &= -(2 + z), & \delta &= 1, \\ \alpha + \beta + \delta &= y \geq 0, \\ \alpha - \delta &= z + y > 0, \\ \alpha - \beta + \delta &= 4 + 2z + y > 0,\end{aligned}$$

т. е. схема (3.1) будет устойчива для задачи (3.3) с параметрами (3.4).

Проанализируем поведение данной схемы на модельном примере. Рассмотрим ДАУ вида

$$\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}'' + \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}' + \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & t + \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

$$t \in [0, 1], \quad u(0) = u_0, \quad v(0) = v_0, \quad u'(t)|_{t=0} = u'_0, \quad v'(t)|_{t=0} = v'_0,$$

где c, d, ε — скалярные вещественные параметры; $(u(t), v(t))^T = x(t)$; начальные данные удовлетворяют третьему условию теоремы 2.1. Легко заметить, что при $\varepsilon \neq 0$ матричный полином $\lambda^2 A(t) + \lambda B(t) + C(t)$ имеет простую структуру, т. е. задача (3.8) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1. Из второго уравнения (3.8) имеем

$$u(t) = -(t + \varepsilon)v(t).$$

Подставив это выражение в первое уравнение (3.8), получим

$$-\varepsilon v''(t) + (c - 2)v'(t) + dv = 0.$$

Данное уравнение будет жестким и (или) быстроосцилирующим, если $c \leq 2$, $d < 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$. Применим для данного примера схему (3.1), которая является устойчивой для модельной задачи (3.3), полагая v_0, v_1 заданными и $u_0 = -\varepsilon v_0, u_1 = -(h + \varepsilon)v_1$. Получим

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & t_{i+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \end{pmatrix} + \\ + h^2 \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & t_{i+1} + \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.\end{aligned} \quad (3.9)$$

Из второго уравнения (3.9) имеем

$$u_{i+1} = -(t_{i+1} + \varepsilon)v_{i+1}, \quad i = 0, 1, \dots, N - 1.$$

Подставляя эти выражения в первое уравнение (3.9) и опуская элементарные выкладки, получим

$$(-\varepsilon + hc + h^2d)v_{i+1} + (2\varepsilon - 2h - hc)v_i + (2h - \varepsilon)v_{i-1} = 0.$$

По аналогии с исследованным характеристическим уравнением (3.6), выпишем характеристический полином для данного уравнения. Получим

$$h^2 d q^2 + (h^2 d + (c - 2)h)q + 2h(2 + c) + h^2 d - 4\varepsilon = 0,$$

$h^2 d \leq 0$ и $h^2 d + (c - 2)h < 0$ в силу постановки задачи, следовательно,

$$d h^2 + (4 + 2\varepsilon)h - 4\varepsilon \leq 0.$$

Таким образом, схема (3.1) для примера (3.9) будет устойчива только при ограничении на шаг интегрирования $h \in (0, h_1)$, где h_1 — положительный корень уравнения

$$d \bar{h}^2 + (4 + 2\varepsilon)\bar{h} - 4\varepsilon = 0.$$

Приведем модификацию схемы (3.1). Перепишем ДАУ (2.1) в виде

$$(A(t)x(t))'' + [(B(t) - 2A'(t))x(t)]' + (C(t) + A''(t) - B'(t))x(t) = f(t) \quad (3.10)$$

и уже для такой записи применим двушаговую схему типа (3.1):

$$\begin{aligned} (A_{i+1}x_{i+1} - 2A_i x_i + A_{i-1}x_{i-1}) + h(B_{i+1} - 2A'_{i+1})x_{i+1} - h(B_i - 2A'_i)x_i + \quad (3.11) \\ + h^2(C_{i+1} + A''_{i+1} - B'_{i+1})x_{i+1} = (A_{i+1} - 2hA'_{i+1} + h^2A''_{i+1})x_{i+1} + \\ + (-2A_i + 2hA'_i)x_i + A_{i-1}x_{i-1} + h(B_{i+1} - hB'_{i+1})x_{i+1} - hB_i x_i + h^2C_{i+1}x_{i+1} = \\ = h^2 f_{i+1}. \end{aligned}$$

В силу гладкости входных элементов имеем

$$\begin{aligned} A_{i+1} - 2hA'_{i+1} + h^2A''_{i+1} &= (A_{i+1} - hA'_{i+1}) - h(A'_{i+1} - hA''_{i+1}) \approx A_i - hA'_i \approx A_{i-1}, \\ -2A_i + 2hA'_i &= -2(A_i - hA'_i) \approx -2A_{i-1}, \\ B_{i+1} - hB'_{i+1} &\approx B_i. \end{aligned}$$

С учетом последних трех формул разностную схему (3.11) перепишем в виде

$$A_{i-1}(x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}) + h B_i(x_{i+1} - x_i) + h^2 C_{i+1}x_{i+1} = h^2 f_{i+1}. \quad (3.12)$$

Применим схему (3.12) для ДАУ (3.8). Имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & t_{i-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1} \\ v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1} \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} - u_i \\ v_{i+1} - v_i \end{pmatrix} + \\ + h^2 \begin{pmatrix} 0 & d \\ 1 & t_{i+1} + \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Выкладки, аналогичные выкладкам, проведенным для схемы (3.9), дают соотношения

$$u_{i+1} = -(t_{i+1} + \varepsilon)v_{i+1}, \quad (3.13)$$

$$(h(c - 2) - \varepsilon + h^2 d)v_{i+1} + (h(2 - c) + 2\varepsilon)v_i - \varepsilon v_{i-1} = \alpha v_{i+1} + \beta v_i + \delta v_{i-1}.$$

Выписывая для (3.13) характеристический полином (3.7) и опуская несложные выкладки, получим

$$h^2 d q^2 + 2(h(c - 2) + h^2 d)q + (h^2 d + 2h(c - 2) - 4\varepsilon) = 0. \quad (3.14)$$

В силу условий задачи ($c \leq 2$, $d < 0$, $0 < \varepsilon \ll 1$) коэффициенты полинома (3.14) будут отрицательными, следовательно, корни (3.14) лежат в левой полуплоскости, а это означает, что разностное соотношение (3.13) будет устойчивым, т. к. $p = \frac{q + 1}{q - 1}$.

4. Численные расчеты

Применим разностную схему (3.12) для уравнения (3.8) со значениями параметров $c = 1$, $d = -2$, $\epsilon = 0.0001$.

Точное решение уравнения (3.8) имеет вид

$$u(t) = -(t + 0.0001)(C_1 \exp^{-2t} + C_2 \exp^{-9998t}), \quad v(t) = C_1 \exp^{-2t} + C_2 \exp^{-9998t}.$$

Результаты расчетов представлены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Результаты применения разностной схемы (3.12) для задачи (3.8) с параметрами $c = 1$, $d = -2$, $\epsilon = 0.0001$

Table 4.1. Results of application of difference scheme (3.12) for problem (3.8) with parameters $c = 1$, $d = -2$, $\epsilon = 0.0001$

h	0.2	0.1	0.05	0.025	0.0125
err_u	0.03898	0.02309	0.012234	0.0058892	0.0021357
err_v	0.04215	0.02737	0.012233	0.0058886	0.0021355

$$\text{Здесь } err_u = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i - u(t_i)|, \quad err_v = \max_{1 \leq i \leq N} |v_i - v(t_i)|.$$

Из данных таблицы можно сделать вывод, что для рассматриваемой тестовой задачи при уменьшении шага в два раза, погрешность также уменьшается примерно в два раза. Таким образом, разностная схема (3.12), как и (3.1), может иметь первый порядок сходимости.

5. Заключение

В данной работе проанализированы многошаговые разностные схемы первого порядка для линейных дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка, содержащих жесткие компоненты. Первая из них основана на простейшей дискретизации, вторая – на иной записи (2.1). Применение таких алгоритмов позволяет избежать редукции рассматриваемой задачи к ДАУ первого порядка, которая приводит к потере информации об исходной системе и увеличению ее размерности. В дальнейшем планируется обосновать данные алгоритмы и рассмотреть другие варианты их построения.

Благодарности. Исследования выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов 20-51-54003, 20-51-S52003 и проекта сотрудничества Вьетнам-Россия QTRU 01.08/20-21.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Новосибирск: Наука, 1980. 222 с.
2. Brenan K.F., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of Initial-Value Problems in Differential-Algebraic Equations. Philadelphia: SIAM, 1996. 270 p.

3. Хайпер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений: Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. Москва: Мир, 1999. 688 с.
4. Lamour R., März R., Tischendorf C. Differential-algebraic equations: a projector based analysis. Berlin-Heidelberg: Springer-Verlag, 2013. 649 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-27555-5_7
5. Афанасьева М. Н., Кузнецов Е. Б. Метод непрерывного продолжения по параметру при решении краевых задач для нелинейных систем дифференциально-алгебраических уравнений с запаздыванием, имеющих особые точки // Итоги науки и техн. Серия «Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз.» 2021. Т. 192. С. 38–45. DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-38-45>
6. Чистяков В. Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. Новосибирск: Наука, 1996. 280 с.
7. Чистяков В. Ф. О сохранении типа устойчивости разностных схем при решении жестких дифференциально-алгебраических уравнений // Сиб. журн. вычисл. матем. 2011. Т.14, №4. С. 443–456. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995423911040082>
8. Sand J. On implicit Euler and related methods for high-order high-index DAEs // Applied Numerical Mathematics. 2002. No. 42. pp.411–424. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(01\)00164-7](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(01)00164-7)
9. Mehrmann V., Shi C. Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order // Numerical Algorithms. 2006. No. 42. pp.281–307. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11075-006-9030-x>
10. Булатов М. В., Ли Минг Гонг, Соловарова Л. С. О разностных схемах первого и второго порядков для дифференциально-алгебраических уравнений индекса не выше двух // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2010. Т. 50, №11. С. 1909–1918. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542510110047>
11. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1986. 581 с.
12. Бояринцев Ю. Е., Орлова И. В. Пучки матриц и алгебро-дифференциальные системы. Новосибирск: Наука, 2006. 124 с.
13. Булатов М. В., Минг-Гонг Ли. Применение матричных полиномов к исследованию линейных дифференциально-алгебраических уравнений высокого порядка // Дифференциальные уравнения. 2008. Т.44, № 10. С. 1299–1306. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266108100017>
14. Чистяков В. Ф. О расширении линейных систем, не разрешенных относительно производных. Препринт ИрВЦ СО АН СССР № 5. Иркутск, 1986.
15. März R. Differential-algebraic systems anew // Appl. Numer. Math. 2002. Vol. 42. pp. 315-335. DOI: <https://doi.org/10.18452/2660>
16. Kunkel P., Mehrmann V. Stability properties of differential-algebraic equations and spin-stabilized diskretizations // Electr. Trans. Numer. Analys. 2007. Vol. 26. pp. 385–420.

17. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990. 512 с.

*Поступила 27.03.2022; доработана после рецензирования 26.04.2022;
принята к публикации 25.05.2022*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. Yu. E. Boyarintsev, [*Regular and singular systems of ordinary differential equations*], Nauka Publ., Novosibirsk, 1980 (In Russ.), 222 p.
2. K. F. Brenan, S. L. Campbell, L. R. Petzold, *Numerical solution of initial-value problems in differential-algebraic equations*, SIAM, Philadelphia, 1996, 270 p.
3. E. Hairer, G. Wanner, *Solving ordinary differential equations II: stiff and differential-algebraic problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1996, 614 p.
4. R. Lamour, R. März, C. Tischendorf, *Differential-algebraic equations: A projector based analysis*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2013, 649 p.
5. M. N. Afanaseva, E. B. Kuznetsov, “The method of continuous continuation by a parameter for solving boundary-value problems for nonlinear systems of differential-algebraic equations with delay that have singular points”, *Itoqi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.*, **192** (2021), 38–45 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-192-38-45>
6. V. F. Chistyakov, [*Algebraic differential operators with a finite-dimensional kernel*], Nauka Publ., Novosibirsk, 1996 (In Russ.), 280 p.
7. V. F. Chistyakov, “Preservation of stability type of difference schemes when solving stiff differential algebraic equations”, *Numer. Analys. Appl.*, **4** (2011), 363–375. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995423911040082>
8. J. Sand, “On implicit Euler and related methods for high-order high-index DAEs”, *Applied Numerical Mathematics*, **42** (2002), 411–424. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0168-9274\(01\)00164-7](https://doi.org/10.1016/S0168-9274(01)00164-7)
9. V. Mehrmann, C. Shi, “Transformation of high order linear differential-algebraic systems to first order”, *Numerical Algorithms*, **42** (2006), 281–307. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11075-006-9030-x>
10. M. V. Bulatov, Ming-Gong Lee, L. S. Solovarova, “On first- and second-order difference schemes for differential-algebraic equations of index at most two”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **50** (2010), 1808–1817. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542510110047>
11. F. Gantmacher, *The theory of matrices*, Chelsea Publishing Company, New York, 1959, 337 p.

12. Yu. E. Boyarintsev, I. V. Orlova, [*Pencil matrix and algebraic-differential systems*], Nauka Publ., Novosibirsk, 2006, 124 p.
13. M. V. Bulatov, M.-G. Lee, “Applications of matrix polynomials to the analysis of linear differential-algebraic equations of higher order”, *Differential Equations*, **44** (2008), 1353–1360. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0012266108100017>
14. V. F. Chistyakov, [*On the extension of linear systems that are not resolved with respect to derivatives*], IRC SB AS USSR, Irkutsk, 1986 (In Russ.), 25 p.
15. R. Marz, “Differential-algebraic systems anew”, *Appl. Numer. Math.*, **42** (2002), 315–335. DOI: <https://doi.org/10.18452/2660>
16. P. Kunkel, V. Mehrmann, “Stability properties of differential-algebraic equations and spin-stabilized diskretizations”, *Electr. Trans. Numer. Analys.*, **26** (2007), 385–420.
17. E. Hairer, G. Wanner, S. P. Norsett, *Solving ordinary differential equations I: Nonstiff problems*, Springer-Verlag, Berlin, 1987, 539 p.

Submitted 27.03.2022; Revised 26.04.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.162-174

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.977.56

Об одном итерационном методе решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа

М. Э. Файрузов, Ф. В. Лубышев

ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. Важный класс прикладных проблем составляют задачи оптимального управления состоянием исследуемого объекта. Требуется подобрать управляющие воздействия так, чтобы достичь некоторого эффекта. Мы имеем дело с распределенными системами, т. к. состояние в них описывается уравнением с частными производными. В данной работе рассматривается итерационный процесс для решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа. Подобную задачу можно рассматривать как задачу управления тепловыми процессами. Качество управления состоянием системы оценивается заданным функционалом (функционалом качества), определенным на решении задачи Дирихле для эллиптического уравнения. В качестве одного из важнейших классов задач управления тепловыми процессами можно отметить задачи термостатирования. Необходимо за счет тех или иных тепловых воздействий удерживать заданную температуру в расчётной области. Здесь в качестве управления выступает распределенный внутренний источник тепла. В работе исследована корректность постановки задачи оптимального управления с регуляризованным функционалом. Сформулировано условие оптимальности в задаче оптимального управления системой, описываемой уравнением эллиптического типа, в виде системы уравнений для исходного и сопряженного состояния. Предложен итерационный метод для решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа. Исследованы вопросы сходимости итерационного процесса, установлены оценки скорости сходимости итераций.

Ключевые слова: оптимальное управление, эллиптическое уравнение, крайняя задача, итерационный метод, сходимость итерационного метода

Для цитирования: Файрузов М. Э., Лубышев Ф. В. Об одном итерационном методе решения задачи оптимального управления системой эллиптического типа // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 162–174. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.162-174>

Об авторах:

Файрузов Махмут Эрнстович, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, fairuzovme@mail.ru

Лубышев Федор Владимирович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru

© М. Э. Файрузов, Ф. В. Лубышев



MSC2020 93-08

On an iterative method for solving optimal control problems for an elliptic type system

M. E. Fairuzov, F. V. Lubyshev

Bashkir State University (Ufa, Russian Federation)

Abstract. An important class of applied problems is that of optimal control of some objects' state. It is required to select control actions in such a way as to achieve desired effect. We deal with distributed systems, since their state is described by a partial differential equation. In this paper we study an iterative process for solving the problem of optimal control for an elliptic type system. Similar problem arises during the control of thermal processes. The quality of system state control is estimated by a given quality functional defined on the solution of the Dirichlet problem for an elliptic equation. One of the most important classes of thermal process control problems is temperature control, which means maintaining given temperature in the computational domain due to certain thermal effects. Here, a distributed internal heat source acts as a control. In the paper, we study statement correctness of the optimal control problem with a regularized functional. More precisely, we examine control problem for a system described by an elliptic type equation and formulate its optimality condition in the form of a system of equations for initial and conjugate states. An iterative method is proposed for solving the optimal control problem of an elliptic type system. Convergence of the iterative process is studied, and the rate of convergence is estimated.

Keywords: optimal control, elliptic equations, boundary value problem, iterative method, convergence of the iterative method

For citation: M. E. Fairuzov, F. V. Lubyshev. On an iterative method for solving optimal control problems for an elliptic type system. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:2(2022), 162–174. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.162-174>

About the authors:

Mahmut E. Fairuzov, Associate Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, Bashkir State University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, fairuzovme@mail.ru

Fedor V. Lubyshev, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, Bashkir State University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru

1. Постановка задачи оптимального управления

Рассмотрим задачу оптимального управления, состоящую в том, чтобы найти такое управление $u = u_*(x) \in U = L_2(\Omega)$, которое минимизирует на множестве управлений U функционал цели

$$J(u) = \int_{\Omega} (T(x, u) - T_0(x))^2 d\Omega + \gamma \|u(x)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \gamma = const > 0, \quad (1.1)$$

причем связь управления $u = u(x)$ с состоянием процесса управления $T(x) = T(x, u)$, соответствующим управлению $u \in U$, определяется как решение задачи Дирихле в $\Omega \in \mathbb{R}^2$:

$$LT(x, u) = -\Delta T(x, u) = -\left[\frac{\partial^2 T(x, u)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T(x, u)}{\partial x_2^2} \right] = u(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$T(x, u) = 0, \quad x \in \Gamma; \quad (1.3)$$

здесь Ω – область в \mathbb{R}^2 с достаточно гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$.

Иначе говоря, задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти функцию (управление), такую что

$$u_* \in U = L_2(\Omega), \quad J(u_*) = \inf_{u \in U} J(u). \quad (1.4)$$

Элемент $u_* \in U$, удовлетворяющий условию (1.4), называется оптимальным управлением, а совокупность U_* всех элементов u_* , удовлетворяющих (1.4) называется множеством оптимальных управлений [1–4].

В функционале (1.1) функция $T_0(x)$ – заданный элемент пространства $L_2(\Omega)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Под решением задачи (1.2) – (1.3) при фиксированном управлении $u \in U = L_2(\Omega)$ понимается функция $T(x) = T(x, u) \in W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству*

$$Q(T, \eta) = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=0}^2 \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \eta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \int_{\Omega} u(x) \eta(x) d\Omega, \quad \forall \eta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega). \quad (1.5)$$

У т в е р ж д е н и е. Для любого управления $u(x) \in U = L_2(\Omega)$ существует единственное обобщенное решение $T(x) = T(x, u) \in W_{2,0}^1(\Omega)$ задачи (1.2) – (1.3). Справедлива оценка для любого $u \in U$:

$$\|T(x, u)\|_{W_{2,0}^1(\Omega)} \leq c_0 \|u(x)\|_{L_2(\Omega)}, \quad c_0 = \text{Const} > 0.$$

Обобщенное решение задачи (1.2) – (1.3) (из класса $W_{2,0}^1(\Omega)$) принадлежит также классу $W_{2,0}^2(\Omega)$ [1; 5; 6].

Справедлива следующая [1–4]

Т е о р е м а 1.1. *Задача оптимального управления (1.1) – (1.4) с регуляризованным функционалом (1.1) имеет единственное решение $u_*(x) \in U = L_2(\Omega)$, т. е. существует единственный элемент $u_*(x) \in L_2(\Omega)$, для которого*

$$J(u_*) = \inf_{u \in U} J(u).$$

Справедлива следующая [1]

Т е о р е м а 1.2. *Для того чтобы элемент $u_* \in U = L_2(\Omega)$ был оптимальным управлением задачи (1.1) – (1.4), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия оптимальности вида*

$$LT(x, u_*) = -\Delta T(x, u_*) = -\frac{1}{\gamma} \psi(x, u_*), \quad x \in \Omega, \quad (1.6)$$

$$T(x, u_*) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (1.7)$$

$$L\psi(x, u_*) = -\Delta\psi(x, u_*) = T(x, u_*) - T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (1.8)$$

$$\psi(x, u_*) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial\Omega, \quad (1.9)$$

$$\psi(x, u_*) + \gamma u_* = 0, \quad x \in \Omega. \quad (1.10)$$

Как было отмечено выше, оптимальное управление единственно, т. е. соотношениям (1.6) – (1.10) удовлетворяет единственный элемент

$$u_* \in U = L_2(\Omega).$$

Следовательно оптимальное управление $u_*(x)$ находится по следующему правилу:

1) Решить граничную задачу для системы уравнений с частными производными (1.6) – (1.9).

2) Найти оптимальное управление по формуле

$$u_*(x) = -\frac{1}{\gamma}\psi(x, u_*), \quad x \in \Omega. \quad (1.11)$$

О п р е д е л е н и е 1.2. Под решением задачи (1.6) – (1.9) будем понимать пару функций $(T(x), \psi(x)) \in W_{2,0}^1(\Omega) \times W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющих тождествам:

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial T}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = -\frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} \psi(x) \vartheta d\Omega, \quad x \in \Omega, \quad (1.12)$$

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \psi}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \int_{\Omega} (T(x) - T_0(x)) \vartheta d\Omega, \quad x \in \Omega, \quad \forall \vartheta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega). \quad (1.13)$$

З а м е ч а н и е 1.1. Решение граничной задачи (1.8) – (1.9) относительно функции $\psi(x)$, удовлетворяющее интегральному тождеству (1.13), таково, что $\psi(x) \in W_2^2(\Omega)$. Таким образом, в силу (1.11) оптимальное управление $u_*(x)$ принадлежит классу $W_2^2(\Omega)$ (тогда как мы его искали в пространстве $L_2(\Omega)$) [1].

2. Итерационный процесс

Рассмотрим последовательность управлений $\{u_*^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, определяемую формулой

$$u_*^{(n)}(x) = -\frac{1}{\gamma}\psi^{(n)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где последовательность $\{\psi^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$ определяется из итерационного процесса (приближенного решения системы уравнений в частных производных (1.6) – (1.9)):

$$-\Delta T^{(n+1)}(x) = -\Delta T^{(n)}(x) - \tau \left[LT^{(n)}(x) + \frac{1}{\gamma}\psi^{(n)}(x) \right], \quad x \in \Omega, \quad (2.2)$$

$$T^{(n+1)}(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

$$-\Delta\psi^{(n)}(x) = T^{(n)}(x) - T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.4)$$

$$\psi^{(n)}(x) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.5)$$

Здесь $\tau > 0$, $\gamma > 0$ – параметры, которыми следует распорядиться для достижения сходимости последовательности управлений $\{u_*^{(n)}(x)\}_{n=0}^{\infty}$.

Построение последовательности управлений $\{u_*^{(n)}(x)\}$ осуществляется по схеме:

$$\begin{aligned} T^{(0)}(x) \Rightarrow \psi^{(0)}(x) \Rightarrow u_*^{(0)}(x) \Rightarrow T^{(1)}(x) \Rightarrow \psi^{(1)}(x) \Rightarrow u_*^{(1)}(x) \Rightarrow \dots \\ \dots T^{(n)}(x) \Rightarrow \psi^{(n)}(x) \Rightarrow u_*^{(n)}(x) \Rightarrow \dots, \end{aligned}$$

здесь $T^{(0)}(x)$ – произвольная функция, принадлежащая $W_{2,0}^1(\Omega)$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Под решением задачи (2.2) – (2.5) будем понимать пару функций $(T^{(n)}(x), \psi^{(n)}(x)) \in W_{2,0}^1(\Omega) \times W_{2,0}^1(\Omega)$, удовлетворяющих интегральным тождествам:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial T^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial T^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega - \\ - \tau \left[\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial T^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega + \frac{1}{\gamma} \int_{\Omega} \psi^{(n)}(x) \vartheta d\Omega \right], \quad \forall \vartheta \in W_{2,0}^1(\Omega), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \int_{\Omega} (T^{(n)} - T_0(x)) \vartheta d\Omega, \quad \forall \vartheta \in W_{2,0}^1(\Omega), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.7)$$

Справедлива следующая

Т е о р е м а 2.1. Пусть $u_*(x)$ – оптимальное управление задачи (1.1) – (1.4). Пусть выполнено условие

$$0 < 1 - M < \tau < 1 + M, \quad M = \sqrt{\frac{2-c}{2(1+c)}}, \quad 0 < c < 2, \quad 0 < M < 1, \quad (2.8)$$

обеспечивающее справедливость неравенства

$$q = (1 - \tau)^2(1 + c) + \frac{c}{2} < 1,$$

где $c = \text{const} > 0$ в неравенстве Фридрикса [5–6]

$$\int_{\Omega} v^2(x) d\Omega \leq c \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega = c \|v\|_*^2, \quad v(x) \in W_{2,0}^1(\Omega).$$

Пусть, кроме того, параметры $\tau > 0$, $\gamma > 0$, $c > 0$ связаны соотношением

$$1 - \frac{c}{2} - c(1 + c) \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 = 0,$$

т. е. параметры τ, γ, c связаны соотношением

$$\tau = \sqrt{\frac{(2-c)\gamma^2}{2c(1+c)}} = M \frac{\gamma}{\sqrt{c}}, \quad 0 < c < 2,$$

причем выполнено условие

$$0 < \frac{1-M}{M} < \frac{\gamma}{\sqrt{c}} < \frac{1+M}{M},$$

следовательно справедлива оценка (2.8). Тогда последовательность управлений $\{u_*^{(n)}(x)\}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, определяемая соотношениями (2.1) – (2.5) сходится в $L_2(\Omega)$ норме к $u_*(x)$, при этом справедливы оценки

$$\|u_*^{(n+1)}(x) - u_*^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c\sqrt{c}}{\gamma} q^{n/2} \|T^1(x) - T^0(x)\|_*, \quad n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\|u_*^{(n+1)}(x) - u_*(x)\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c\sqrt{c}}{\gamma} q^{n/2} \|T^1(x) - T^0(x)\|_*, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Доказательство. Положим $z^{(n)} = T^{(n)}(x) - T^{(n-1)}(x)$. Из (2.6) найдем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega - \\ & - \tau \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega - \frac{\tau}{\gamma} \int_{\Omega} (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x)) \vartheta d\Omega, \quad \forall \vartheta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Полагая в (2.9) $\vartheta(x) = T^{(n+1)}(x) - T^{(n)}(x)$, найдем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} d\Omega - \\ & - \tau \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} d\Omega - \frac{\tau}{\gamma} \int_{\Omega} (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x)) \vartheta d\Omega, \quad \forall \vartheta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Из (2.10) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 (1-\tau) \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} d\Omega - \\ & - \frac{\tau}{\gamma} \int_{\Omega} (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x)) z^{(n+1)} d\Omega \leq \\ & \leq \left[\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 (1-\tau)^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 + \frac{\tau^2}{\gamma^2} \int_{\Omega} (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x))^2 d\Omega \right]^{1/2} \times \\ & \times \left[\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \int_{\Omega} (z^{(n+1)})^2 d\Omega \right]^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Принимая во внимание неравенство [5–6]

$$\int_{\Omega} (z^{(n+1)})^2 d\Omega \leq c \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2, \quad c = \text{const} > 0, \quad (2.12)$$

из (2.11) получим оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega &\leq \left[\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 (1-\tau)^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 \int_{\Omega} (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x))^2 d\Omega \right]^{1/2} \left[(1+c) \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Откуда получаем

$$\begin{aligned} \left[\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega \right]^{1/2} &\leq \left[\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 (1-\tau)^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 \int_{\Omega} (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x))^2 d\Omega \right]^{1/2} (1+c)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из (2.14) имеем оценку

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega &\leq (1+c) \left[\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 (1-\tau)^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \right. \\ &\left. + \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 \int_{\Omega} (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x))^2 d\Omega \right]. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Обратимся к тождеству (2.7)

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \psi^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \int_{\Omega} (T^{(n)} - T_0(x)) \vartheta d\Omega, \quad \forall \vartheta \in W_{2,0}^1(\Omega), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Вычитая друг из друга два последовательных равенства (2.7), получим

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial (\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})}{\partial x_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x_{\alpha}} d\Omega = \int_{\Omega} z^{(n)}(x) \vartheta d\Omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \forall \vartheta(x) \in W_{2,0}^1(\Omega). \quad (2.16)$$

Положим (2.16) $\vartheta(x) = \psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x)$. Тогда получим

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial (\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega = \int_{\Omega} z^{(n)}(x) (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x)) d\Omega. \quad (2.17)$$

Складывая тождество (2.17) с тождеством (2.15), найдем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega \leq \\ & \leq \int_{\Omega} z^{(n)}(x)(\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x)) d\Omega + (1+c) \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 (1-\tau)^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \\ & + (1+c) \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 \int_{\Omega} (\psi^{(n)}(x) - \psi^{(n-1)}(x))^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Далее имеем оценки правой части (2.18)

$$\int_{\Omega} z^{(n)}(x)(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)}) d\Omega \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} (z^{(n)}(x))^2 d\Omega + \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})^2 d\Omega, \quad (2.19)$$

$$\int_{\Omega} (z^{(n)}(x))^2 d\Omega \leq c \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega; \quad (2.20)$$

$$\int_{\Omega} (\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})^2 d\Omega \leq c \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega; \quad (2.21)$$

$$\int_{\Omega} z^{(n)}(x)(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})^2 d\Omega \leq \frac{c}{2} \int_{\Omega} (z^{(n)}(x))^2 d\Omega + \frac{c}{2} \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega, \quad (2.22)$$

$$(1+c) \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 (\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})^2 d\Omega \leq (1+c) \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 c \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega. \quad (2.23)$$

Следовательно, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} z^{(n)}(x)(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)}) d\Omega + (1+c) \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 (\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})^2 d\Omega \leq \\ & \leq \frac{c}{2} \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \left[\frac{c}{2} + (1+c) \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 c \right] \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из (2.18), (2.24) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega \leq \\ & \leq (1+c) \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 (1-\tau)^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \\ & + \frac{c}{2} \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \left[\frac{c}{2} + (1+c) \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 c \right] \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Таким образом, справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{c}{2} - c(1+c) \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 \right] \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n)} - \psi^{(n-1)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega + \\ & + \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega \leq \left[(1+c)(1-\tau)^2 + \frac{c}{2} \right] \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Нетрудно убедиться, что справедлива оценка

$$q = (1-\tau)^2(1+c) + \frac{c}{2} < 1, \quad (2.27)$$

если выполнено условие

$$0 < 1 - M < \tau < 1 + M, \quad M = \sqrt{\frac{2-c}{2(1+c)}}, \quad 0 < c < 2, \quad 0 < M < 1, \quad (2.28)$$

где $c > 0$ – константа в неравенстве Фридрикса [5–6]

$$\int_{\Omega} v^2(x) d\Omega \leq c \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega, \quad v(x) \in W_{2,0}^1(\Omega). \quad (2.29)$$

Пусть, кроме того, параметры $\tau > 0$, $\gamma > 0$, $c > 0$ связаны соотношением

$$1 - \frac{c}{2} - c(1+c) \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 = 0, \quad (2.30)$$

т. е. параметры τ , γ , c связаны соотношением

$$\tau = \sqrt{\frac{(2-c)\gamma^2}{2c(1+c)}} = M \frac{\gamma}{\sqrt{c}}, \quad 0 < c < 2, \quad (2.31)$$

причем выполнено условие

$$0 < \frac{1-M}{M} \leq \frac{\gamma}{\sqrt{c}} \leq \frac{1+M}{M}, \quad (2.32)$$

следовательно справедлива оценка (2.18)

$$1 - M < \tau < 1 + M.$$

Из (2.16) следует, что если выполняется (2.20)

$$1 - \frac{c}{2} - c(1+c) \left(\frac{\tau}{\gamma} \right)^2 = 0,$$

т. е. если параметры τ , γ , c связаны соотношением

$$\tau = \sqrt{\frac{(2-c)\gamma^2}{2c(1+c)}} = M \frac{\gamma}{\sqrt{c}}, \quad 0 < c < 2,$$

причем выполнено условие

$$0 < \frac{1 - M}{M} < \frac{\gamma}{\sqrt{c}} < \frac{1 + M}{M},$$

то имеем оценку

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega \leq \left[(1 + c)(1 - \tau)^2 + \frac{c}{2} \right] \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega. \quad (2.33)$$

Принимая во внимание (2.19), из (2.33) получим

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega \leq q \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega, \quad (2.34)$$

т. е.

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \frac{\partial z^{(n+1)}}{\partial x_{\alpha}} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 d\Omega \leq q \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right\|_{L_2(\Omega)}^2 d\Omega, \quad (2.35)$$

или

$$\begin{cases} \|z^{(n+1)}\|_*^2 \leq q \|z^{(n)}\|_*^2, & 0 < q < 1, \\ \|z^{(n)}\|_* = \left[\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial z^{(n)}}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega \right]^{1/2}, \end{cases} \quad (2.36)$$

где

$$q = (1 + c)(1 - \tau)^2 + \frac{c}{2} < 1. \quad (2.37)$$

Из (2.36) последовательно найдем

$$\|z^{(n+1)}\|_*^2 \leq q^n \|z^{(1)}\|_*^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.38)$$

Принимая во внимание, что

$$u_*^{(n)}(x) = -\frac{1}{\gamma} \psi^{(n)}(x), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

находим

$$\|u_*^{(n+1)}(x) - u_*^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \frac{1}{\gamma^2} \|\psi^{(n+1)}(x) - \psi^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.39)$$

Из тождества (2.17)

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega = \int_{\Omega} z^{(n+1)}(x) (\psi^{(n+1)}(x) - \psi^{(n)}(x)) d\Omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.40)$$

имеем оценку

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega \leq \|z^{(n+1)}(x)\|_{L_2(\Omega)} \|\psi^{(n+1)}(x) - \psi^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.41)$$

Далее имеем оценку

$$\begin{aligned} \|\psi^{(n+1)}(x) - \psi^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq c \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial(\psi^{(n+1)} - \psi^{(n)})}{\partial x_{\alpha}} \right)^2 d\Omega \leq \\ &\leq c \|z^{(n+1)}(x)\|_{L_2(\Omega)} \|\psi^{(n+1)}(x) - \psi^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\psi^{(n+1)}(x) - \psi^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c \|z^{(n+1)}(x)\|_{L_2(\Omega)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.42)$$

Из (2.39) и (2.42) получим

$$\|u_*^{(n+1)}(x) - u_*^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\gamma^2} c^2 \|z^{(n+1)}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.43)$$

В силу неравенства Фридрихса [5–6]

$$\|z^{(n+1)}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq c \|z^{(n+1)}(x)\|_*^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.44)$$

из (2.43) получим

$$\|u_*^{(n+1)}(x) - u_*^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\gamma^2} c^3 \|z^{(n+1)}(x)\|_*^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.45)$$

Принимая во внимание оценку (2.38), из (2.44) получим неравенство

$$\|u_*^{(n+1)}(x) - u_*^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{c^3}{\gamma^2} q^n \|z^{(1)}(x)\|_*^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.46)$$

Следовательно, имеем оценку

$$\|u_*^{(n+1)}(x) - u_*^{(n)}(x)\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \frac{c\sqrt{c}}{\gamma} q^{n/2} \|z^{(1)}(x)\|_*^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2.47)$$

формула (2.46) справедлива и при $n = 0$. Это следует из (2.43). Положив там $n = 0$, получим

$$\|u_*^{(1)} - u_*^{(0)}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c\sqrt{c}}{\gamma} \|z^{(1)}\|_*. \quad (2.48)$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\|u_*^{(n+1)} - u_*^{(n)}\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c\sqrt{c}}{\gamma} q^{n/2} \|z^{(1)}\|_*, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.49)$$

где $z^{(1)}(x) = T^{(1)}(x) - T^{(0)}(x)$.

Поскольку точное решение $(T(x), \psi(x))$ задачи (1.6) – (1.10) является неподвижной точкой процесса (2.2) – (2.5), т. е. пара $(T(x), \psi(x))$ является решением задачи (1.6) – (1.10), то совершенно аналогично получим оценку

$$\|u_*^{(n+1)} - u_*\|_{L_2(\Omega)} \leq \frac{c\sqrt{c}}{\gamma} q^{n/2} \|T^{(1)}(x) - T^{(0)}(x)\|_*, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (2.50)$$

где $u_*(x)$ – оптимальное управление исходной задачи оптимального управления (1.1) – (1.3).

Из соотношения (2.50) следует, что

$$u_*^{(n)}(x) \rightarrow u_*(x), \quad n \rightarrow \infty \text{ в } L_2(\Omega), \quad (2.51)$$

при этом справедливы оценки (2.49) – (2.50).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л. Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972. 414 с.
2. Литвинов В. Г. Оптимизация в эллиптических граничных задачах с приложениями к механике. М.: Наука, 1987. 368 с.
3. Васильев Ф. П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. 824 с.
4. Лубышев Ф. В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БашГУ, 1999. 244 с.
5. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
6. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.

*Поступила 22.03.2022; доработана после рецензирования 27.04.2022;
принята к публикации 25.05.2022*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. J. L. Lions, *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*, Dunod, Gauthier-Villars, Paris, 1968, 426 p.
2. V. G. Litvinov, [*Optimization in elliptic boundary value problems with applications to mechanics*], Nauka, Moscow, 1987 (In Russ.), 368 p.
3. F. P. Vasil'ev, [*Optimization methods*], Faktorial Press, Moscow, 2002 (In Russ.), 824 p.
4. F. V. Lubyshchev, [*Difference approximations of optimal control problems for systems described by partial differential equations*], BashGU, Ufa, 1999 (In Russ.).
5. V. P. Mikhaylov, [*Partial Differential Equations*], Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 391 p.

6. O. A. Ladyzhenskaya, [*Boundary value problems of mathematical physics*], Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 408 p.

Submitted 22.03.2021; Revised 27.04.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.175-184

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.929.4

Устойчивость модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием

Д. Х. Хусанов¹, А. Э. Каххаров²¹ Джизакский политехнический институт (г. Джизак, Узбекистан)² Академический лицей ТашГТУ имени И. Каримова (г. Ташкент, Узбекистан)

Аннотация. В работе рассматривается задача об устойчивости биологических, экономических и других процессов, моделируемых уравнениями Лотки-Вольтерра с запаздыванием. Отличие исследуемых уравнений от известных состоит в том, что входящие в них функции приспособленности и коэффициенты относительного изменения взаимодействующих субъектов или объектов, составляющих моделируемый процесс, являются нелинейными и учитывают переменное запаздывание в действии факторов, влияющих на количество субъектов или объектов. При этом данные функции допускают существование множества положений равновесия, конечного в ограниченной области. Исследование устойчивости трех типов положений равновесия проводится с помощью непосредственного анализа возмущенных уравнений и построения функционалов Ляпунова, удовлетворяющих условиям известных теорем. Выводятся соответствующие достаточные условия асимптотической устойчивости, в т. ч. глобальной, а также неустойчивости этих положений и их притяжения.

Ключевые слова: модель Лотки-Вольтерра, дифференциальные уравнения с запаздыванием, положение равновесия, устойчивость

Для цитирования: Хусанов Д. Х., Каххаров А. Э. Устойчивость модели Лотки-Вольтерра с запаздыванием // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 175–184. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.175-184>

Об авторах:

Хусанов Джуманазар Хусанович, профессор Джизакского политехнического института (130100, Узбекистан, г. Джизак, ул. И. Каримова, д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9444-9324>, d.khusanov1952@mail.ru

Каххаров Азизбек Эсанович, аспирант Академического лицея Ташкентского государственного технического университета имени И. Каримова (100095, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 2), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5723-8640>, azizqahhorov@gmail.com



MSC2020 34D20

On the stability of Lotka-Volterra model with a delay

J. Kh. Khusanov¹, A. E. Kaxxorov²¹ Jizzakh Polytechnic Institute (Jizakh, Uzbekistan)² I. Karimov Tashkent State Technical University (Tashkent, Uzbekistan)

Abstract. The paper examines the stability problem of biological, economic and other processes modeled by the Lotka-Volterra equations with delay. The difference between studied equations and the known ones is that the adaptability functions and the coefficients of the relative change of the interacting subjects or objects are non-linear and take into account variable delay in the action of factors affecting the number of subjects or objects. Moreover, these functions admit the existence of equilibrium positions' set that is finite in a bounded domain. The stability study of three types of equilibrium positions is carried out using direct analysis of perturbed equations and construction of Lyapunov functionals that satisfy conditions of well-known theorems. Corresponding sufficient conditions for asymptotic stability including global stability are derived, as well as instability and attraction conditions of these positions.

Keywords: Lotka-Volterra model, delay differential equations, equilibrium position, stability

For citation: J. Kh. Khusanov, A. E. Kaxxorov. On the stability of Lotka-Volterra model with a delay. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:2(2022), 175–184. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.175-184>

About the authors:

Jumanazar Kh. Khusanov, Professor, Jizzakh Polytechnic Institute (4 I. Karimov St., Jizakh 130100, Uzbekistan), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9444-9324>, d.khusanov1952@mail.ru

Azizbeck E. Kaxxorov, Graduate Student, Academic Lyceum I. Karimov Tashkent State Technical University (2 University St., Tashkent 100095, Uzbekistan), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5723-8640>, azizqahhorov@gmail.com

1. Введение

В работах В. Вольтерра и Дж. Лотки [1–3] впервые в наиболее полной форме были приведены обоснования модели взаимодействия биологических популяций посредством дифференциальных уравнений. Важной особенностью биологических и физических процессов, как отметил В. Вольтерра [1], является учет их «предыстории». Корректность математического описания таких процессов дают функционально-дифференциальные уравнения [1–2], [4]. К настоящему времени развитию качественной теории таких уравнений, их применимости для моделирования и анализа различных технических систем, биологических, экологических и экономических процессов посвящено огромное количество работы. Из них непосредственно по теме данной работы отметим фундаментальные публикации [5–7]. Однако несмотря на многочисленные исследования, ряд актуальных задач остаются неизученными. В частности, к таким задачам относится исследование устойчивости и предельного поведения систем и процессов при их существенно нелинейном моделировании, с учетом переменного запаздывания.

2. Постановка задачи

Пусть R^n – линейное вещественное пространство векторов x с нормой $|x|$, $|x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$, $R_+^n = \{x \in R^n : x_k \geq 0 \forall k \in Z, 1 \leq k \leq n\}$, $intR_+^n = \{x \in R^n : x_k > 0 \forall k \in Z, 1 \leq k \leq n\}$, $\partial R_+^n = R_+^n \setminus intR_+^n$, $h_0 > 0$ – некоторое число, C – банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h_0, 0] \rightarrow R^n$ с нормой $\|\varphi\| = \max(|\varphi(s)|, -h_0 \leq s \leq 0)$, $C_+ = \{\varphi \in C : \varphi : [-h_0, 0] \rightarrow R_+^n\}$, $intC_+ = \{\varphi \in C_+ : \varphi_k(0) \neq 0 \forall k \in Z, 1 \leq k \leq n\}$, $\partial C_+ = C_+ \setminus intC_+$.

Для непрерывной функции $x : [\alpha - h_0, \beta) \rightarrow R_+^n$ ($\alpha, \beta \in R^+, \alpha < \beta$) функцию $x_t \in C_+$ определим равенством $x_t(s) = x(t + s)$, $-h_0 \leq s \leq 0$. Под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассматривается следующее векторное уравнение типа Лотки-Вольтерра с запаздыванием

$$\dot{x}(t) = D(x(t))(A + BF(x(t)) + GF(x(t - h(t))), \tag{2.1}$$

где функции $D(x)$, $F(x)$ и $h(t)$, а также постоянные вектор A и матрицы B и G удовлетворяют условиям:

- 1) $D(x) = \text{diag}(d_1(x_1), d_2(x_2), \dots, d_n(x_n))$, $d_k \in C(R^+ \rightarrow R^+)$, $d_k(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$;
- 2) $F(x) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T$ (здесь и далее $(\cdot)^T$ – операция транспонирования), $f_k \in C(R^+ \rightarrow R^+)$, $f_k(x_k) = 0 \Leftrightarrow x_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$;
- 3) $A = \{a_k\}$, $A \in R^n$, $B = \{b_{jk}\}$, $B \in R^{n \times n}$, $G = \{g_{jk}\}$, $G \in R^{n \times n}$;
- 4) $h = (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))^T$, $h_k \in C^1(R^+ \rightarrow [0, h_0])$, $h_k(t)$ – функции, учитывающие наличие запаздывания в относительной скорости прироста x_k , $\mu_0 \leq \dot{h}_k(t) \leq 1 - \mu_1$ ($\mu_1 > 0$), $k = 1, 2, \dots, n$.

Компоненты и параметры модельного уравнения (2.1) имеют следующий смысл: x_k – численность k -й популяции в экологической системе или объем одноименной продукции k -й фирмы; a_k и $d_k(x_k)$ – составляющие скорости относительного прироста x_k в отсутствие конкуренции в зависимости от количества x_k ; $f_k(x_k)$ – функции относительного прироста при конкуренции; $h_k(t)$ – функции, учитывающие наличие запаздывания в относительной скорости прироста x_k ; B и G – матрицы взаимодействия при конкуренции численностей x_1, x_2, \dots, x_n .

Будем полагать, что функции $f_k(x_k)$ и $d_k(x_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) удовлетворяют условию Липшица

$$\begin{aligned} |f_k(x_k^{(2)}) - f_k(x_k^{(1)})| &\leq L_0(m)|x_k^{(2)} - x_k^{(1)}|, \\ |d_k(x_k^{(2)}) - d_k(x_k^{(1)})| &\leq L_0(m)|x_k^{(2)} - x_k^{(1)}|, \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\forall x^{(1)}, x^{(2)} \in E(m), E(m) = \{x \in R_+^n : |x| \leq m, m = \text{const} > 0\}.$$

Отсюда для каждой начальной точки $(\alpha, \varphi) \in R^+ \times C_+$ решение уравнения (2.1) $x(t, \alpha, \varphi)$, $x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi$ существует, является единственным, определенным на некотором интервале $[\alpha - h(\alpha), \beta)$ ($\beta > \alpha$).

В силу условий 1 и 2 множество ∂C_+ является полуинвариантным: каждое решение $x(t, \alpha, \varphi)$, $\varphi \in \partial C_+$ будет таким, что из $x_t(\alpha, \varphi) \in \partial C_+$, так что $\varphi_j(0) = 0$, следует $x_j(t, \alpha, \varphi) = 0$ при $t \in [\tau, \beta)$.

Система (2.1) имеет в области R_+^n следующие положения равновесия.

1. Тривиальное

$$x(t, \alpha, \varphi) = 0, t \geq \alpha - h. \tag{2.3}$$

2. Нетривиальное в области $intR_+^n$

$$x(t, \alpha, \varphi) = x_0^{(l)}, \quad t \geq \alpha - h, \quad l = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

в предположении, что система линейных уравнений

$$(B + G)y + A = 0 \quad (2.5)$$

имеет в области $\text{int}R_+^n$ единственное решение $y = y_0$.

При этом функциональное векторное уравнение

$$F(x) = y_0 \quad (2.6)$$

имеет в ограниченной области $E(m) \cap \text{int}R_+^n$ конечное число решений

$$x = x_0^{(l)}; \quad l = 1, 2, \dots, N; \quad N = N(m). \quad (2.7)$$

3. Кроме того, уравнение (2.1) может иметь в области ∂R_+^n в силу условия $d_k(0) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) положение равновесия, в котором одна или несколько координат равны нулю.

В качестве конкретного такого случая рассмотрим случай, в котором координата $x_n = 0$. Введем вектор $A^{(1)} = (a_1, a_2, \dots, a_{n-1})^T$ и матрицы $B^{(1)} = \{b_{jk}\}$, $G^{(1)} = \{g_{jk}\}$ ($j, k = 1, 2, \dots, n-1$).

Предположим, что система линейных уравнений

$$(B^{(1)} + G^{(1)})y^{(1)} + A^{(1)} = 0 \quad (2.8)$$

имеет в некоторой ограниченной области R_+^{n-1} решение $y^{(1)} = y_0^{(1)}$, $y_0^{(1)} \notin \partial R_+^{n-1}$, при этом векторное уравнение

$$F^{(1)}(x) = y_0^{(1)}, \quad F^{(1)} = (f_1, f_2, \dots, f_{n-1})^T$$

имеет решение $x = x_0^{(1)} \in R_+^{n-1}$.

Таким образом, система (2.1) будет иметь положение равновесия

$$\begin{aligned} x_1 = x_1^{(1)}(t, \alpha, \varphi) = x_{10}^{(1)}, \dots, x_{n-1} = x_{n-1}^{(1)}(t, \alpha, \varphi) = x_{(n-1)0}^{(1)} \\ x_n = x_n(t, \alpha, \varphi) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Целью работы является исследование устойчивости указанных положений равновесия.

3. Устойчивость положения равновесия (2.3)

Т е о р е м а 3.1. *При условии $a_k < 0 \forall k = 1, 2, \dots, n$ тривиальное положение равновесия (2.3) асимптотически устойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем Γ_0 – окрестность точки $\varphi = 0$ из условия

$$\begin{aligned} \Gamma_0 = \sup\{\varphi \in C_+ : | \sum_{j=1}^n b_{kj} f_j(\varphi_j(0)) + \sum_{j=1}^n g_{kj} f_j(\varphi_j(s)) | \leq -a_k/4, \\ -h_0 \leq s \leq 0; \quad k = 1, 2, \dots, n\} \end{aligned}$$

Для производной $\dot{x}(t)$ решения $x(t) = x(t, \alpha, \varphi)$, $\varphi \in \Gamma_0$ из условия (2.2) при $\alpha \leq t < \beta$ имеем

$$\dot{x}_k(t) \leq -\frac{a_k}{2} d_k(x_k(t)).$$

Отсюда следует, что $x_k(t) \leq \varphi_k(0) \forall t \geq \alpha$, $x(t) \searrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ ($k = 1, 2, \dots, n$).
 Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Т е о р е м а 3.2. *Если существует какое-либо a_k , такое что $a_k > 0$, то тривиальное положение равновесия (2.3) неустойчиво.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Найдем $\varepsilon_0 > 0$, при котором

$$|b_{kk}| \varphi_k(0) + \sum_{j=1}^n |g_{kj}| \|\varphi\| \leq \frac{1}{2} a_k, \tag{3.1}$$

$\forall \varphi \in \{\varphi \in C_+ : \|\varphi\| \leq \varepsilon_0\}$.

Для любого $\delta > 0$, $0 < \delta < \varepsilon_0$, в качестве начальной точки $\varphi_0 \in \{\varphi \in C_+ : \|\varphi\| < \delta\}$ выберем функцию φ , такую что

$$\varphi_{j0}(0) = 0 \ (j \neq k), \quad 2\varphi_{k0}(0) = \delta.$$

Определим $d_{k0} = \min(d_k(x_k), \frac{\delta}{4} \leq x_k \leq \varepsilon_0) > 0$.

Из полуинвариантности ∂C_+ следует, что соответствующее решение будет таким, что

$$x(t, \alpha, \varphi_0) \in \partial R_+^n, \quad x_j(t, \alpha, \varphi_0) = 0 \ (j \neq k) \ \forall t \in [\alpha, \beta]$$

Соответственно, для составляющей $x_k(t) = x_k(t, \alpha, \varphi_0)$ этого решения в силу (3.1) будем иметь при $t \in [\alpha, \beta]$

$$\frac{dx_k(t)}{dt} \geq \frac{1}{2} d_{k0} a_k > 0.$$

Из этого неравенства следует, что найдется $T > \alpha$, такое что

$$x_k(T, \alpha, \varphi_0) = \varepsilon_0,$$

что и означает неустойчивость $x = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

4. Устойчивость положения равновесия (2.4)

Из условия (2.2) находим, что коэффициенты $d_k(x_k)$ $k = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют неравенствам

$$d_k(x_k) \geq L(m)x_k \ \forall x \in E(m). \tag{4.1}$$

Пусть $x_0^{(1)}$ – какое-либо положение равновесия (2.4).

Введем возмущения и соответствующие функции

$$y = x - x_0^{(1)}, \quad \psi(s) = \varphi(s) - x_0^{(1)}, \quad f_k^{(l)}(y_k) = f_k(x_{k0}^{(l)} + y_k) - f_k(x_{k0}^{(l)}),$$

$$F^{(l)}(y) = (f_1^{(l)}(y_1), f_2^{(l)}(y_2), \dots, f_n^{(l)}(y_n))^T,$$

$$D^{(l)}(y) = \text{diag}(d_1^{(l)}(x_{10}^{(l)} + y_1), d_2^{(l)}(x_{20}^{(l)} + y_2), \dots, d_n^{(l)}(x_{n0}^{(l)} + y_n)).$$

Составим уравнение возмущенного движения для (2.1):

$$\frac{dy(t)}{dt} = D^{(l)}(y(t))(BF^{(l)}(y(t)) + GF^{(l)}(y(t-h(t))). \quad (4.2)$$

Введем функции

$$s_k(y_k) = \int_{x_{k0}^{(l)}}^{y_k} \frac{f_k^{(l)}(\tau) d\tau}{d_k(\tau)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad S(y) = (s_1(y_1), s_2(y_2), \dots, s_n(y_n))$$

Из свойств (4.1) функций $d_k(x_k)$ найдем

$$s_k(y_k) \rightarrow \infty \text{ при } y_k \rightarrow 0, \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3)$$

Выберем функционал Ляпунова в виде

$$V = V(t, \psi) = \sum_{k=1}^n p_k s_k(\psi_k(0)) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{-h_k(t)}^0 q_k(\tau) f_k^2(\psi_k(\tau)) d\tau, \quad (4.4)$$

где постоянные $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$ и функции $q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_n(\tau)$, $q_k \in C([-h_0, 0] \rightarrow R^+)$ подлежат определению.

Заметим, что в силу сделанных предположений для функционала $V(t, \psi)$ имеет место оценка

$$|V(t, \psi)| \leq b(\|\psi\|),$$

где $b \in \mathcal{K}$, $(b : R^+ \rightarrow R^+)$, \mathcal{K} – класс функций типа Хана [8].

Для производной функционала (4.4) в силу уравнений (4.2) находим

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \psi) = V_1(t, \psi) = & \frac{1}{2} (F^{(1)}(\psi(0)))^T (PA + A^T P) F^{(1)}(\psi(0)) + \\ & + (F^{(1)}(\psi(0)))^T P B F^{(1)}(\psi(-h(t))) + \\ & + \frac{1}{2} (F^{(1)}(\psi(0)))^T Q^{(0)} (F^{(1)}(\psi(0))) - \frac{1}{2} F^{(1)}(\psi(-h(t)))^T Q^{(1)}(t) F^{(1)}(\psi(-h(t))) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Q^{(0)} = & \text{diag}(q_1(0), q_2(0), \dots, q_n(0)), \\ Q^{(1)} = & \text{diag} \left(q_1(-h_1(t)) \left(1 - \frac{dh_1(t)}{dt} \right), q_2(-h_2(t)) \left(1 - \frac{dh_2(t)}{dt} \right), \dots \right. \\ & \left. \dots, q_n(-h_n(t)) \left(1 - \frac{dh_n(t)}{dt} \right) \right). \end{aligned}$$

Положим, что постоянные p_k и функции $q_k(\tau)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) могут быть подобраны так, что имеют место оценки

$$\begin{aligned} y^T Q^{(1)}(t) y \geq q_0 \|y\|^2, \quad (q_0 > 0), \quad y^T Q^{(2)} y \leq 0 \quad \forall (t, y) \in R^+ \times R^n, \\ Q^{(2)} = PA + A^T P + Q^{(0)} + q_0^{-1} P B B^T P. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Тогда для $\dot{V}(t, \psi)$ имеет место оценка

$$\dot{V}_1(t, \psi) \leq -W_1(\psi(0)) = (F^{(1)}(\psi(0)))^T Q^{(2)} F^{(1)}(\psi(0)) \leq 0.$$

Отсюда на основании классических теорем из [4; 9] получим следующие результаты.

Т е о р е м а 4.1. *Предположим, что:*

1) функции $s_k(y_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) при некотором $\delta > 0$ имеют оценки: $s_k(y_k) > 0$, $\forall y_k \in \{0 < |y_k| < \delta\}$;

2) выполняются неравенства (4.5).

Тогда положение равновесия (2.4) равномерно устойчиво.

Т е о р е м а 4.2. *При выполнении условия 1 Теоремы 4.1 и усилении второго неравенства (4.5) в виде*

$$y^T Q^{(2)} y \leq -q_0 \|y\|^2 \quad (4.6)$$

положение равновесия (2.4) является равномерно асимптотически устойчивым.

Т е о р е м а 4.3. *Если вместо условия 1 Теоремы 4.2 предположить, что существует хотя бы одна функция $s_k(y_k)$, принимающая в любой достаточно малой окрестности $y_k = 0$ отрицательные значения, то положение равновесия (2.4) является неустойчивым.*

Дополним предположения относительно функций $s_k(x_k)$ следующим образом:

$$s_k(y_k) \rightarrow \infty \text{ при } t_k \rightarrow \infty \quad \forall k = 1, 2, \dots, n. \quad (4.7)$$

Тогда для функционала $V = V(t, \psi)$ будем иметь соотношение: $V(t, \psi) \rightarrow \infty$ при $\psi(0) \rightarrow \partial R_+^n$ и $\psi_k(0) \rightarrow \infty$.

Соответственно имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 4.4. *Дополним условия Теоремы 4.2 указанным предположением и условием единственности положения равновесия (2.4) в области $\text{int}R_+^n$. Тогда это положение равновесия глобально равномерно асимптотически устойчиво.*

На основании теоремы о предельном поведении решений из [10; 11] получим также следующий результат.

Т е о р е м а 4.5. *Допустим, что существует функционал V вида (4.4), удовлетворяющий условиям:*

1) справедливы неравенства (4.5) и (4.6);

2) выполнено условие (4.7).

Тогда каждое решение $x(t, \alpha, \varphi)$, $\varphi \in \text{int}C_+$ неограниченно приближается к одному из положений равновесия (2.4) при $t \rightarrow \infty$, а именно, $\exists x = x_0^{(1)} \in \text{int}R_+^n$, такое что $x(t, \alpha, \varphi) \rightarrow x_0^{(1)}$ при $t \rightarrow \infty$.

5. Устойчивость положения равновесия (2.9)

Пусть $x_0^{(1)} = (x_{10}^{(1)}, x_{20}^{(1)}, \dots, x_{(n-1)0}^{(1)}, 0)^T$ – заданное положение равновесия.

Введем возмущения и функции

$$\begin{aligned} y &= x - x_0^{(1)}, \quad \psi^{(1)}(s) = \varphi(s) - x_0^{(1)}, \\ f_k^{(1)}(y_k) &= f_k(x_{k0}^{(1)} + y_k) - f_k(x_{k0}^{(1)}) \quad (k = 1, 2, \dots, n-1), \quad f_n^{(1)}(y_n) = f_n(y_n), \\ F^{(1)}(y) &= (f_1^{(1)}(y_1), f_2^{(1)}(y_2), \dots, f_n^{(1)}(y_n)), \\ D^{(1)}(y) &= \text{diag}(d_1(x_{10}^{(1)} + y_1), d_2(x_{20}^{(1)} + y_2), \dots, d_n(y_n)). \end{aligned}$$

Соответствующие первые $(n - 1)$ уравнений возмущенного движения будут совпадать с первыми $(n - 1)$ уравнениями (4.2). Последнее уравнение может быть представлено в виде

$$\frac{dy_n(t)}{dt} = d_n(y_n(t))(a_n^{(1)} + (B^{(1)})^T F^{(1)}(y^{(1)}(t)) + (G^{(1)})^T F^{(1)}(y^{(1)}(t - h^{(1)}(t))), \quad (5.1)$$

$$(B^{(1)})^T = (b_{n1}, b_{n2}, \dots, b_{nn}),$$

$$(G^{(1)})^T = (g_{n1}, g_{n2}, \dots, g_{nn}), \quad a_n^{(1)} = a_n + (B^{(1)})^T + (G^{(1)})^T F^{(1)}(x_0^{(1)}).$$

Аналогично Теореме 3.2 может быть доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 5.1. *Допустим, что $a_n^{(1)} > 0$. Тогда положение равновесия (2.9) неустойчиво.*

Для случая $a_n^{(1)} < 0$ введем функционал

$$V = \sum_{k=1}^{n-1} p_k s_k(\psi_k(0)) + p_n \psi_n(0) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{-h_k}^0 q_k(\tau) f_k^2(\psi_k(\tau)) d\tau,$$

где постоянные $p_1, p_2, \dots, p_n > 0$ и функции $q_1(\tau), q_2(\tau), \dots, q_n(\tau)$, $q_k \in C([-h_k, 0] \rightarrow R^+$ подлежат определению.

Для производной этого функционала в силу первых $(n - 1)$ уравнений (4.2) и уравнения (5.1) находим

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, \psi) &= V_2(t, \psi) = V_1(t, \psi) + p_n a_n^{(1)} d_n(\psi_n^{(1)}(0)) + \\ &+ p_n (d_n(\psi_n(0)) - f_n(\psi_n(0))((B^{(1)})^T F^{(1)}(\psi^{(1)}(0)) + (G^{(1)})^T F^{(1)}(\psi^{(1)}(-h(t)))). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Допустим, что постоянные p_1, p_2, \dots, p_n и функции $q_k(\tau)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) могут быть подобраны так, что

$$\begin{aligned} y^T (Q^{(1)}(t) - G^{(1)}(G^{(1)})^T) y &\geq q_0 \|y\|^2, \\ 2p_n a_n^{(1)} d_n(y_n) + 2p_n (d_n(y_n) - f_n(y_n)) &(B^{(1)})^T F^{(1)}(y) + \\ + y^T (PA + A^T P + Q^{(0)} + q_0^{-1} P B B^T P) y &+ \\ + p_n^2 (d_n(y_n) - f_n(y_n))^2 &\leq -W_2(y) \leq 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Тогда для производной (5.2) функционала V имеем оценку

$$V_2(t, \psi) \leq -W_2(\psi(0)) \leq 0$$

На основании теорем из [4; 9] получим следующие результаты.

Т е о р е м а 5.2. *Предположим, что:*

1) функции $s_k(y_k)$ ($k = 1, 2, \dots, n - 1$) при некотором $\delta > 0$ имеют оценки $s_k(y_k) > 0 \forall y_k \in \{0 < |y_k| < \delta\}$;

2) выполнены неравенства (5.3).

Тогда положение равновесия (2.9) равномерно устойчиво.

Т е о р е м а 5.3. *При выполнении условия 1 Теоремы 5.2 и условия $W(y) > 0 \forall y \in \{0 < \|y\| < \delta\}$ положение равновесия (2.9) равномерно асимптотически устойчиво.*

6. Заключение

В работе получены новые результаты о достаточных условиях устойчивости существенно нелинейных уравнений типа Лотки-Вольтерра с переменным запаздыванием. Доказанные теоремы позволяют расширить применение метода функционалов Ляпунова к исследованию более широкого класса прикладных задач, моделируемых указанными уравнениями.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Volterra V. Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie / Ed. by J. Gabay. Paris: Gauthier-Villars. 1990. 226p.
2. Volterra V. Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. New York: Dover Publications, 1959. 288 p.
3. Lotka A. J. Elements of physical biology. Baltimore: Williams and Wilkins Co., 1925. 460 p.
4. Hale J. Theory of Functional Differential Equations. New York: Springer-Verlag. 1977. 366 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2>
5. Свережев Ю. М., Логофет Д. О. Устойчивость биологических сообществ. М.: Наука, 1978. 352 с.
6. Кирьянен А. И. Устойчивость систем с последействием и их приложения. СПб.: Изд-во С. Пб. ун-та, 1994. 240 с.
7. Александров А. Ю., Платонов А. В., Старков В. Н., Степаненко Н. А. Математическое моделирование и исследование устойчивости биологических сообществ. СПб.: "Лань 2017. 270 с.
8. Rouche N., Habets P., Laloy M. Stability Theory by Lyapunov's Direct Method. New York: Springer, 1977. 396 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9362-7>
9. Krasovskii N. N. Stability of Motion. Standford: Standford University Press, 1963. 218 p.
10. Андреев А. С., Хусанов Д. Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифференциальные уравнения. 1998. Т. 34, № 7. С. 876–885.
11. Хусанов Д. Х. К конструктивной и качественной теории функционально-дифференциальных уравнений. Ташкент: Фан, 2002.

*Поступила 28.02.2022; доработана после рецензирования 1.04.2022;
принята к публикации 25.05.2022*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. V. Volterra, *Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour la vie*, Gauthier-Villars, Paris, 1990, 226 p.
2. V. Volterra, *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, Dover Publications, New York, 1959, 288 p.
3. A. J. Lotka, *Elements of physical biology*, Williams and Wilkins Co, Baltimore, 1925, 460 p.
4. J. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New York, 1977 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-9892-2>, 366 p.
5. Yu. M. Sverezhev, D. O. Logofet, *Stability of biological communities*, Nauka, Moscow, 1978 (In Russ.), 352 p.
6. A. I. Kiryanen, *Stability of systems with aftereffect and their applications*, St. Petersburg University Publ., St. Petersburg, 1994 (In Russ.), 240 p.
7. A. Yu. Alexandrov, A. V. Platonov, V. N. Starkov, N. A. Stepanenko, *Mathematical modeling and study of the stability of biological communities*, Lan Publ., St. Petersburg, 2017 (In Russ.), 270 p.
8. N. Rouche, P. Habets, M. Laloy, *Stability theory by Lyapunov's direct method*, Springer, New York, 1977 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9362-7>, 396 p.
9. N. N. Krasovskii, *Stability of motion*, Standford University Press, Standford, 1963, 218 p.
10. A. S. Andreev, D. Kh. Khusanov, "On the method of Lyapunov functionals in the problem of asymptotic stability and instability", *Differential Equations*, **34**:7 (1998), 876–885 (In Russ.).
11. D. Kh. Khusanov, *On the constructive and qualitative theory of functional differential equations*, Fan Publ., Tashkent, 2002 (In Russ.).

Submitted 28.02.2021; Revised 1.04.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.185-199

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 532.529:541.182

Определение средней электро-термофоретической силы, действующей на систему поляризующихся частиц в неоднородно нагретой жидкости

С. И. Мартынов

БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (г. Сургут, Российская Федерация)

Аннотация. Определяется средняя сила, действующая на систему поляризующихся частиц со стороны электрического поля в неоднородно нагретой диэлектрической жидкости. Рассматривается случай парных взаимодействий в системе. Для нахождения силы, действующей на частицы, решается задача о взаимодействии двух частиц в жидкости при наличии заданного градиента температуры и напряжённости электрического поля далеко от частиц. Учитывается зависимость диэлектрической проницаемости частиц от температуры. Полученное выражение для силы, действующей на две частицы, имеет такую степенную зависимость от расстояния между частицами, которое позволяет провести процедуру прямого усреднения для системы частиц, находящихся в бесконечном объёме жидкости. При определении средней силы, используется функция плотности вероятности непрерывной случайной величины, под которой понимается вектор, соединяющий центры частиц. Дифференциальное уравнение для нахождения функции плотности вероятности записывается из условия сохранения пар частиц в пространстве всех их возможных конфигураций и что каждая пара частиц движется как точка со скоростью, равной скорости их относительного движения. Полученное уравнение в рассматриваемом случае имеет множество решений. На основе физического анализа задачи предлагается выбор функции плотности вероятности, которая позволяет определить среднюю электро-термофоретическую силу, действующую в такой системе с точностью до слагаемых второй степени по объёмной концентрации частиц.

Ключевые слова: вязкая жидкость, диэлектрические частицы, электрическое поле, градиент температуры, взаимодействие частиц, усреднение, средняя сила

Для цитирования: Мартынов С. И. Определение средней электро-термофоретической силы, действующей на систему поляризующихся частиц в неоднородно нагретой жидкости // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 185–199. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.185-199>

Об авторе:

Мартынов Сергей Иванович, главный научный сотрудник, БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (628412 Россия, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1.), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

© С. И. Мартынов



MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

Determination of the average electro-thermophoretic force acting on a system of polarizable particles in an inhomogeneously heated fluid

S. I. Martynov

Surgut State University (Surgut, Russian Federation)

Abstract. The average force acting on the system of polarizing particles from the electric field in a non-uniformly heated dielectric liquid is determined. The case of pair interactions in the system is examined. To find the force acting on the particles, the interaction of two particles in a liquid is modelled in the presence of a given temperature gradient and the electric field strength far from the particles. The dependence of the particle permittivity on temperature is taken into account. The resulting expression for the force acting on two particles has such a power-law dependence on the distance between the particles, that allows to carry out the direct averaging procedure for a system of particles located in an infinite volume of liquid. When determining the average force, the probability density function of a continuous random variable is used, and the vector connecting the centers of particles plays the role of this variable. The differential equation for finding the probability density function is derived from two conditions. First, the pairs of particles are preserved in the space of all their possible configurations. Second, each pair of particles moves like a point with a speed equal to the speed of their relative motion. The resulting equation in the case under consideration has a set of solutions. Basing on the physical analysis of the problem, the choice of the probability density function is proposed, which allows one to determine the average electro-thermophoretic force acting in such a system with an accuracy up to the second degree of the volume concentration of particles.

Keywords: viscous fluid, dielectric particles, electric field, temperature gradient, interaction of particles, averaging, average force

For citation: *S. I. Martynov.* Determination of the average electro-thermophoretic force acting on a system of polarizable particles in an inhomogeneously heated fluid. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:2(2022), 185–199. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.185-199>

About the author:

Sergey I. Martynov, Chief Researcher, Surgut State University (1 Lenina Av., Surgut 628412, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

1. Введение

Современные технологии с использованием наночастиц для доставки терапевтической нагрузки в клетку [1–2] или в нефтегазовой индустрии с целью восстановления и увеличения добычи [3–6] предполагают возможность управления их динамикой с использованием внешних полей (электрических, магнитных, акустических, фотонных, химических и др.). При этом возникают задачи, связанные с управлением динамикой как

отдельных частиц (микро-/наномоторов), используемых для доставки, например, терапевтической нагрузки в клетку, так и с управлением коллективной динамикой большого числа таких частиц в вязкой жидкости. Решение такого рода задач требует учёта сил взаимодействия между частицами, причём, как непосредственно действующими между частицами, так и за счёт их гидродинамического взаимодействия через окружающую жидкость. Поскольку изучаемые системы находятся в неравновесном тепловом состоянии, то методы термодинамики и статистической физики, разработанные для равновесных систем, в большинстве случаев неприменимы. При моделировании динамики систем жидкость-частицы наиболее активно используются такие подходы, как метод прямого численного моделирования и методы построения феноменологических моделей. В первом случае рассматривается система N частиц в вязкой жидкости, для которой записываются уравнения движения каждой частицы и уравнения движения жидкости. Всего получается $(6N + 3)$ уравнений. Такой подход позволяет учитывать как внутренние силы, действующие между частицами, так и силы гидродинамического взаимодействия между ними и внешние силы. Сложность такого подхода состоит в том, что в реальных системах число частиц велико. Так, для объёмной концентрации порядка 4% число частиц размером 10^{-5} см представляет огромную величину 10^{13} . Современные вычислительные технологии не позволяют проводить эффективные расчёты для такого числа частиц. К тому же при достаточном сближении частиц возникает вопрос о корректности уравнений гидродинамики на малых расстояниях между ними. Вместе с тем такой подход даже на небольшом числе частиц (порядка нескольких сотен) демонстрирует преимущества по сравнению со вторым подходом, а именно позволяет моделировать динамику такой системы с корректным учётом гидродинамических сил взаимодействия. Так, в работе [7] показано, что феноменологический подход к описанию динамики частиц, часть из которых имеет положительный заряд, а другая часть – отрицательный, даёт некорректный результат по сравнению с первым подходом. Вместе с тем необходимо признать, что для систем, состоящих из $(10^{13} - 10^{16})$ частиц, в настоящее время только феноменологический подход позволяет учесть взаимодействие частиц, пусть и в сильно упрощённом виде, а именно в приближении среднего поля, т. е. на масштабах достаточно больших зёрен, на которые разбивается система. Такие континуальные крупнозернистые модели, полученные для макроскопических переменных (скорость, концентрация, поляризация или намагничивание и т.д.) позволяют более эффективно проводить вычисления на больших масштабах времени и координат, чем прямое численное моделирование. Однако и здесь имеются свои сложности, т. к. получение соответствующих крупнозернистых уравнений в рассматриваемых случаях является не простой задачей.

Одним из подходов к получению таких уравнений является метод усреднения. Получение усреднённых характеристик различных структур берет начало с XIX в. В работах [8–9] решена задача об эффективной теплопроводности тел с включениями, образующими случайную и кубическую структуры. Во второй половине XX в. методу усреднения было посвящено большое количество работ [10–11]. Суть метода заключается в том, что необходимо получить решение соответствующей задачи на масштабе частиц (микромасштабе), а затем провести усреднение полученного решения на макромасштабе, включающем в себя большое число частиц. Как показывают проведённые исследования, наибольшие сложности возникают при определении средних величин для случайно расположенных взаимодействующих частиц. Во-первых, получение решения задачи о взаимодействии большого числа частиц представляет собой весьма сложную проблему и фактически возможно только при использовании прямого численного моделирова-

ния. Во-вторых, даже упрощённый подход, связанный с представлением взаимодействия большого числа частиц в виде суммы всевозможных парных взаимодействий из заданной конфигурации частиц приводит к появлению расходящихся интегралов при применении процедуры усреднения. Это связано с тем, что парные взаимодействия дают выражения, имеющие зависимость от расстояния между частицами r в виде r^{-n} , где $n \leq 3$, которые при интегрировании по большому объёму среды дают расходящиеся интегралы. Это касается как кулоновского и диполь-дипольного, так и гидродинамического взаимодействия частиц. Для преодоления проблемы расходимости в работе [13] предложена процедура, позволяющая определить средние напряжения и эффективную вязкость в суспензии гидродинамически взаимодействующих сферических частиц с точностью до слагаемых второй степени по объёмной концентрации. Предложенная процедура определения средних величин основывается на решении задачи о парном взаимодействии частиц и позволяет обойти проблему расходимости для гидродинамического взаимодействия частиц при макроскопическом деформационном течении суспензии.

Для случая, когда взаимодействие частиц приводит к зависимости от расстояния между частицами с показателем $n > 3$, возможно проведения прямой процедуры усреднения. В настоящей работе на основе решения задачи о двух взаимодействующих сферах определяется средняя электро-термофоретическая сила, действующая на поляризующиеся частицы в неоднородно нагретой жидкости в электрическом поле с учётом зависимости диэлектрической проницаемости частиц от температуры. Выражение для средней силы определяется с точностью до членов второй степени по объёмной концентрации частиц.

2. Взаимодействие двух сферических частиц в неоднородно нагретой жидкости в электрическом поле

Рассмотрим две сферические частицы радиуса a , помещённые в жидкость с вязкостью η , постоянной диэлектрической проницаемостью ε_f и коэффициентом температуропроводности χ_f . Положение точки жидкости относительно первой частицы будем обозначать вектором \mathbf{x}_1 , а относительно второй – \mathbf{x}_2 . Для введённых векторов запишем соотношение:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1.$$

Здесь вектор \mathbf{r} соединяет центры частиц. В жидкости далеко от частиц приложено однородное электрическое поле напряжённости \mathbf{E}_0 и градиент температуры ∇T_0 . Перенос частиц в жидкости определяется силами, действующими на неё со стороны жидкости и поля. Причём эти силы зависят от распределения соответствующих параметров вблизи частиц. В однородном электрическом поле сила, действующая на частицы, равна нулю. Однако наличие частиц с другой диэлектрической проницаемостью ε_p и другим коэффициентом температуропроводности χ_p , чем у жидкости, приводит к возмущению однородного электрического поля и распределению температуры в жидкости. Поскольку считается, что диэлектрическая проницаемость частиц $\varepsilon_p(T)$ зависит от температуры, то неоднородное распределение температуры в частицах также приводит к искажению электрического поля вокруг них. Следовательно, возмущение электрического поля в жидкости вокруг частиц происходит как в результате различия диэлектрической проницаемости жидкости и частиц, так и за счёт неоднородности ди-

электрической проницаемости частиц из-за их неоднородного нагрева. Эти возмущения приводят к появлению силы, действующей на частицы со стороны электрического поля. Движение частиц изменяет распределение скорости \mathbf{u} и давления p в жидкости, что создаёт силы, действующие на них в результате гидродинамического взаимодействия.

Таким образом, для вычисления сил, действующих на частицы, необходимо знать распределение в жидкости скорости, давления, напряжённости электрического поля и температуры. Будем предполагать, что параметры течения жидкости соответствуют малым числам Рейнольдса $Re \ll 1$ и Пекле $Pe \ll 1$. Уравнения распределения давления p , скорости \mathbf{u} , температуры T_f в жидкости и частицах T_{p1} и во второй T_{p2} этом случае имеют вид:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (2.1)$$

Граничные условия скорости на поверхности частиц записываются следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{V}_\alpha + \boldsymbol{\Omega}_\alpha \times \mathbf{x}_\alpha, \quad |\mathbf{x}_\alpha| = a. \quad (2.2)$$

Здесь, векторы \mathbf{V}_α , $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$ обозначают, соответственно, линейную и угловую скорости частицы с номером α , где $\alpha = 1, 2$; χ_f и χ_p – коэффициенты температуропроводности жидкости и частицы, соответственно; \mathbf{n} – вектор единичной нормали к поверхности частицы.

На значительном расстоянии от частиц должны выполняться условия затухания возмущений для скорости и давления:

$$\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{U}_0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}_\alpha| \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

где \mathbf{U}_0 – скорость; p_0 – давление, заданные в жидкости на значительном расстоянии от частиц.

В приближении малых чисел Пекле $Pe \ll 1$ уравнения температуры T_f в жидкости и частицах $T_{p\alpha}$ записываются в виде:

$$\Delta T_f = 0, \quad \Delta T_{p\alpha} = 0. \quad (2.4)$$

Граничные условия для температуры на поверхности частиц имеют вид:

$$T_f = T_{p\alpha}, \quad \chi_f \nabla T_f \cdot \mathbf{n} = \chi_p \nabla T_{p\alpha} \cdot \mathbf{n}, \quad |\mathbf{x}_\alpha| = a. \quad (2.5)$$

Здесь χ_f и χ_p – коэффициенты температуропроводности жидкости и частиц соответственно. На значительном расстоянии от частиц должно выполняться условие:

$$\nabla T_f \rightarrow \nabla T_0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{x}_\alpha| \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

здесь ∇T_0 – заданный градиент температуры.

Поскольку жидкость и частицы взаимодействуют с электрическим полем, то необходимо записать уравнения для определения электрического поля в жидкости и частицах. Они имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \nabla(\varepsilon_f \mathbf{E}_f) &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_f = 0, \\ \nabla[\varepsilon_p(T) \mathbf{E}_{p\alpha}] &= 0, \quad \nabla \times \mathbf{E}_{p\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

Здесь $\varepsilon_p(T)$ - диэлектрическая проницаемость частиц, зависящая от температуры.

С учётом того, что электрическое поле потенциально $\mathbf{E} = \nabla\varphi$, уравнения и граничные условия для потенциалов φ_f в жидкости и частицах $\varphi_{p\alpha}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_f &= 0, \quad \Delta\varphi_{p\alpha} = 0, \\ \varphi_f &= \varphi_{p\alpha}, \quad \varepsilon_f \nabla\varphi_f \cdot \mathbf{n} = \nabla[\varepsilon_p(T)\varphi_{p\alpha}] \cdot \mathbf{n}, \quad \text{при } |\mathbf{x}_\alpha| = a. \end{aligned} \quad (2.7)$$

На значительном расстоянии от частицы в жидкости имеем следующие условия для электрического поля:

$$\mathbf{E}_f \rightarrow \mathbf{E}_0, \quad \text{при } |\mathbf{x}_\alpha| \rightarrow \infty, \quad (2.8)$$

здесь \mathbf{E}_0 – напряжённость электрического поля на значительном расстоянии от частиц. Решение приведённых выше уравнений позволяют определить силы, действующие на частицы со стороны жидкости и электрического поля. Линейные \mathbf{V}_α и угловые $\mathbf{\Omega}_\alpha$ скорости частиц определяются из уравнений динамики, которые в без инерционном приближении имеют вид:

$$\mathbf{F}_\alpha^{(e)} + \mathbf{F}_\alpha^{(h)} = 0, \quad \mathbf{T}_\alpha^{(e)} + \mathbf{T}_\alpha^{(h)} = 0. \quad (2.9)$$

Здесь $\mathbf{F}_\alpha^{(h)}$ и $\mathbf{T}_\alpha^{(h)}$, $\mathbf{F}_\alpha^{(e)}$ и $\mathbf{T}_\alpha^{(e)}$ – силы и моменты, действующие на частицу с номером α со стороны жидкости и электрического поля соответственно.

3. Метод решения задачи о парном взаимодействии частиц

Силы, действующие на каждую частицу со стороны жидкости и электрического поля, определяются следующим образом:

$$F_{\alpha i}^{(h)} = \oint [-p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)] n_j ds, \quad F_{\alpha i}^{(e)} = \frac{1}{4\pi} \oint \varepsilon_f (E_{fi} E_{fj} - \frac{E_f^2}{2} \delta_{ij}) n_j ds.$$

Необходимые для вычисления сил решения уравнений гидродинамики и электрического поля в указанной выше постановке задачи находятся независимо друг от друга. Методом, представленным в работе [14], находится как решение системы уравнений гидродинамики (2.1)–(2.3), так для температуры (2.4)–(2.6) и электрического поля (2.7)–(2.8). Метод применим к решению задач о взаимодействии большого числа частиц во внешних полях, удовлетворяющих уравнениям Пуассона и Лапласа. Решения этих уравнений представляются в виде мультиполей с неизвестными тензорными коэффициентами, содержащими скалярные функции от параметра $\epsilon = a/r$. Считая, что $\epsilon \ll 1$, скалярные функции находятся в виде разложения по этому малому параметру с любой точностью. В случае двух частиц решение задачи о распределении скорости, давления в жидкости и вычислении гидродинамической силы, действующей на частицы, представлено в работе [14].

Решение задачи о распределении электрического поля вокруг частиц с учётом зависимости диэлектрической проницаемости частиц от температуры ищется в линейном приближении по заданному градиенту температуры ∇T_0 с учётом решения уравнений для распределения температуры. При этом используется следующее представление для функции $\varepsilon_p(T)$:

$$\varepsilon_p(T) = \varepsilon_p(T_0) + \left(\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial T} \right)_0 (T - T_0).$$

Здесь и далее индексом «0» обозначены значения функций, соответствующие случаю однородного распределения температуры T_0 .

В нулевом по градиенту ∇T_0 приближении решение задачи о распределении температуры и потенциала электрического поля в жидкости и частицах имеют одинаковый вид. Решение задачи о взаимодействии двух частиц в магнитном поле представлено в работе [15]. Поскольку в отсутствии объёмных зарядов, что предполагается в настоящей статье, уравнения для определения электрического и магнитного поля в жидкости и частицах одни и те же, то полученный результат можно использовать в т. ч. для случая взаимодействия частиц в электрическом поле. Так, силы, действующие на частицы со стороны электрического поля, с точностью до ϵ^4 , согласно [15], равны:

$$\mathbf{F}_{10}^{(e)} = -\varepsilon_f k_\varepsilon^2 \left[6 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^5} \mathbf{E}_0 + 3 \frac{E_0^2}{r^5} \mathbf{r} - 15 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})^2}{r^7} \mathbf{r} \right], \quad \mathbf{F}_{20}^{(e)} = -\mathbf{F}_{10}^{(e)}. \quad (3.1)$$

Здесь введено следующее обозначение:

$$k_\varepsilon = -a^3 \frac{(\varepsilon_f - \varepsilon_p)}{\varepsilon_p + 2\varepsilon_f}. \quad (3.2)$$

Для определения сил, действующих на частицы в случае неоднородного распределения температуры, достаточно найти решение для распределения потенциала электрического поля в линейном по градиенту температуры приближении с точностью $\epsilon = 0$. Это связано с тем, что сила, действующая со стороны электрического поля на частицы, имеет квадратичную зависимость от напряжённости поля. Поэтому комбинация решений для электрического поля при постоянной температуре, учитывающее взаимодействие частиц с точностью ϵ^5 , и при учёте градиента температуры с точностью $\epsilon = 0$ даёт искомую силу. Решение системы уравнений для потенциала электрического поля в линейном приближении по вектору ∇T_0 вне и внутри частиц в этом случае имеет вид:

$$\begin{aligned} \varphi_f &= G_{ij}(L_{ij}(\mathbf{x}_1) - L_{ij}(\mathbf{x}_2)), \quad G_{ij} = E_{0i} \nabla_j T_0 G, \\ \varphi_{p1} &= K_{ij} x_{1i} x_{1j} + M_{ij} L_{ij}(\mathbf{x}_1) |\mathbf{x}_1|^5, \quad \varphi_{p2} = K_{ij} x_{2i} x_{2j} + M_{ij} L_{ij}(\mathbf{x}_2) |\mathbf{x}_2|^5, \\ K_{ij} &= E_{0i} \nabla_j T_0 K, \quad M_{ij} = E_{0i} \nabla_j T_0 M. \end{aligned}$$

Здесь L_{ij} – мультиполь, вычисляемый по правилу

$$L_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{x} \right).$$

С учётом распределения температуры в жидкости и частицах значения скалярных коэффициентов в решении уравнений для потенциала электрического поля, найденные из граничных условий, равны:

$$\begin{aligned} K &= -\frac{q_\varepsilon q_\chi}{\varepsilon_{p0}} \left(\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial T} \right)_0, \quad G = -\frac{2\varepsilon_{p0}}{3(2\varepsilon_{p0} + 3\varepsilon_f)} a^5 K, \quad M = \frac{\varepsilon_f}{(2\varepsilon_{p0} + 3\varepsilon_f)} K, \\ q_\varepsilon &= \frac{3\varepsilon_f}{\varepsilon_{p0} + 2\varepsilon_f}, \quad q_\chi = \frac{3\chi_f}{\chi_p + 2\chi_f}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Используя полученные выражения для потенциала в жидкости, найдём выражение для силы, действующей на каждую частицу со стороны электрического поля в линейном приближении по градиенту температуры. Для этого необходимо подставить найденное распределение в выражение для тензора напряжённости электрического поля и проинтегрировать по поверхности частицы. С точностью до слагаемых, имеющих порядок ϵ^5 , получим следующее выражение для сил, действующих на частицы:

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{1t}^{(e)} = & -\varepsilon_f k_\epsilon G \left[6 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \nabla T_0)}{r^5} \mathbf{E}_0 + 3 \frac{E_0^2}{r^5} \nabla T_0 - 15 \frac{(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})^2}{r^7} \nabla T_0 - 15 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{r}) E_0^2}{r^7} \mathbf{r} - \right. \\ & \left. - 30 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^7} \mathbf{E}_0 - 30 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{E}_0)(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})}{r^7} \mathbf{r} + 105 \frac{(\nabla T_0 \cdot \mathbf{r})(\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{r})^2}{r^9} \mathbf{r} \right], \quad (3.4) \\ \mathbf{F}_{2t}^{(e)} = & \mathbf{F}_{1t}^{(e)}. \end{aligned}$$

Здесь индексом « t » обозначена составляющая силы со стороны электрического поля, пропорциональная градиенту температуры. Как видно из полученного выражения (3.4), сила со стороны электрического поля при наличии градиента температуры имеет чётную степенную зависимость от вектора \mathbf{r} . Это качественно отличается от составляющей силы в случае однородной температуры (3.1), которая имеет нечётную степенную зависимость от вектора \mathbf{r} . Суммарная сила, действующая на частицы, находится как сумма найденных сил при постоянной температуре и при наличии градиента температуры. Причём в обоих случаях имеется зависимость величины силы от расстояния между частицами в виде r^{-n} ($n > 3$), что даёт возможность прямого усреднения полученных выражений с целью получения выражения для средней силы, действующей на частицы со стороны электрического поля. Необходимо отметить, что рассмотренный случай зависимости диэлектрической проницаемости частиц от температуры существенно отличается от рассмотренного в работе [12], где диэлектрическая проницаемость жидкости зависит от температуры. В этом случае средняя сила отлична от нуля даже без учёта взаимодействия частиц.

4. Определение средней электро-термофоретической силы с точностью до слагаемых второй степени по объёмной концентрации частиц

Процедура определения средних величин разработана в работе [13] для случая парных взаимодействий частиц. Предложенный подход позволил с точностью до членов второго порядка по объёмной концентрации частиц ϕ определить средние значения напряжения и вязкости в суспензии гидродинамически взаимодействующих сферических частиц и может быть использован и в рассматриваемом случае. Среднюю величину силы $\bar{\mathbf{F}}^{(e)}$ в суспензии одинаковых частиц определяем соотношением:

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \frac{N}{V} \int_V \mathbf{F}^{(e)} dV.$$

Здесь суммирование проводится по всем N частицам в объёме V ($n_0 = N/V$ – концентрация частиц в единице объёма). В работе [13] показано, что средняя величина, обусловленная парными взаимодействиями между частицами, может быть записана в виде

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \phi \int \frac{\mathbf{F}^{(e)}}{(4/3)\pi a^3} P(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r} | \mathbf{x}_0) d\mathbf{r} + o(\phi^2). \quad (4.1)$$

Здесь $P(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r} | \mathbf{x}_0)$ – вероятность того, что центр частицы лежит в элементе объёма $\delta\mathbf{r}$ вокруг точки $\mathbf{x}_0 + \mathbf{r}$ при условии, что имеется частица с центром в \mathbf{x}_0 , $\phi = n_0 4\pi a^3/3$ – объёмная концентрация частиц.

Рассмотрим функцию плотности вероятности для вектора \mathbf{r} , разделяющего центры двух частиц. Поскольку две частицы не могут занимать один и тот же объем, то можно записать

$$P(\mathbf{x}_0 + \mathbf{r} | \mathbf{x}_0) = \begin{cases} 0, & r < 2a, \\ n_0 q(\mathbf{r}, t), & r \geq 2a. \end{cases}$$

Дифференциальное уравнение для нахождения функции плотности вероятности $q(\mathbf{r}, t)$ записывается из условия сохранения пар частиц в пространстве всех их возможных конфигураций и что каждая пара частиц движется как точка со скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$, равной скорости их относительного движения. Оно имеет вид:

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla q = -q \nabla \cdot \mathbf{V}. \quad (4.2)$$

Скорости частиц $\mathbf{V}_1, \mathbf{V}_2$ находятся из уравнений (2.9), причём силы $\mathbf{F}_\alpha^{(h)}$ и моменты $\mathbf{T}_\alpha^{(h)}$, действующие на частицу с номером α со стороны жидкости, зависят от макроскопического деформационного течения. Следовательно, относительная скорость частиц $\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1$, и решение уравнения (4.2) зависят от реализуемого макроскопического деформационного течения жидкости с частицами. Зависимость функции плотности вероятности $q(\mathbf{r}, t)$ от параметров деформационного течения означает, что и средняя сила, определяемая из (4.1), то же зависит от этих параметров и будет разной при различных течениях.

Анализ выражений (3.1) и (3.4) для сил, действующих на частицы со стороны электрического поля, показывает, что при однородном распределении частиц по их относительной ориентации в жидкости усреднение даёт нулевое значение средней силы. Причём для силы (3.1) в этом случае среднее от каждого слагаемого равно нулю, в то время как для силы (3.4) среднее суммы всех слагаемых даёт нуль. Такого типа распределение было получено в работе [13] для деформационного течения растяжения суспензии сферических частиц. При наличии анизотропии в распределении частиц по их ориентации относительно друг друга усреднение силы (3.4) даёт значение, отличное от нуля. Примером такой анизотропии в случае учёта парных взаимодействий является образование цепочечных структур вдоль приложенного поля. Фактически это означает, что сила, действующая на частицы со стороны электрического поля, на макроскопическом масштабе проявляется в случае, когда механизм ориентации относительного положения частиц электрическим полем преобладает над дезориентирующим механизмом деформационного течения жидкости. Ниже рассматривается случай определения средней электро-термофоретической силы для однородного потока жидкости с постоянным вектором скорости \mathbf{U}_0 . Другими словами макроскопическое деформационное течение жидкости отсутствует, но гидродинамическое взаимодействие частиц учитывается и в этом случае. С учётом выражений (3.1), (3.4) и результатов работы [7] для гидродинамических сил из уравнений (2.9) получим:

$$-\mathbf{F}_{10}^{(e)} = 3\pi\eta a[\mathbf{V}^{\parallel}\zeta(\epsilon) + \mathbf{V}^{\perp}\xi(\epsilon)], \quad (4.3)$$

Где \mathbf{V}^{\parallel} и \mathbf{V}^{\perp} – составляющие относительной скорости вдоль и перпендикулярно вектору \mathbf{r} , а $\zeta(\epsilon)$, $\xi(\epsilon)$ следующие скалярные функции:

$$\begin{aligned} \zeta(\epsilon) &= 1 + \frac{3}{2}\epsilon + \frac{9}{4}\epsilon^2 + \frac{19}{8}\epsilon^3, \\ \xi(\epsilon) &= 1 + \frac{3}{4}\epsilon + \frac{9}{16}\epsilon^2 + \frac{59}{64}\epsilon^3. \end{aligned}$$

Необходимо отметить, что из (4.3) следует, что относительная скорость частиц не зависит от градиента температуры, поскольку найденная составляющая силы со стороны электрического поля (3.4) одинаковая для каждой частицы. При этом поскольку сила (3.1) вычислена с точностью до членов порядка ϵ^4 , то и относительная скорость частиц также должна вычисляться из (4.3) с той же точностью. В этом приближении вектор относительной скорости равен:

$$\mathbf{V} = -\frac{\mathbf{F}_{10}^{(e)}}{3\pi\eta a}.$$

Нетрудно проверить, что выполняется условие:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0.$$

Тогда в стационарном случае из (4.2) следует, что

$$\mathbf{V} \cdot \nabla q = 0. \quad (4.4)$$

Выберем сферическую систему координат с центром в первой частице таким образом, чтобы вектор ориентации $\mathbf{e} = \mathbf{r}/r$ определялся координатами:

$$e_1 = \sin\theta\cos\psi, \quad e_2 = \sin\theta\sin\psi, \quad e_3 = \cos\theta.$$

Здесь θ – угол между векторами \mathbf{E}_0 и \mathbf{r} . В выбранной системе координат уравнение (4.4) записывается в виде:

$$V_r \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0.$$

Подставляя компоненты относительной скорости V_r и V_θ – получим уравнение:

$$(1 - \cos^2\theta) \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{2\sin\theta\cos\theta}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} = 0.$$

Представляя функцию плотности вероятности в виде $q = f(r/a)g(\theta)$, получим решение с точностью до постоянной в виде:

$$f(r/a) = (r/a)^{-\lambda}, \quad g(\theta) = (\cos\theta - \cos^3\theta)^{\lambda/2}.$$

Здесь λ – любое вещественное число. Учитывая, что должно выполняться следующее условие нормировки для функции плотности вероятности с безразмерным параметром $\tilde{r} = r/a$:

$$\int_2^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi q(\tilde{r}, \theta) \tilde{r}^2 d\tilde{r} d\psi \sin\theta d\theta = 1,$$

получим наименьшее значение параметра при котором указанный интеграл абсолютно сходится $\lambda = 4$. В этом случае с учётом нормировки функция плотности вероятности имеет вид:

$$q(r/a, \theta) = \frac{105a^4 (\cos\theta - \cos^3\theta)^2}{16\pi r^4}. \quad (4.5)$$

Для значениях параметра $\lambda > 4$ были получены следующие результаты. Для нечётных и рациональных значениях параметра λ условие нормировки даёт комплексную величину интеграла, а для значений $\lambda \neq 4k$, где k – любое натуральное число, интеграл равен нулю. Для значений параметра $\lambda = 4k$ величина интеграла представляется в виде убывающего числового ряда, причём каждый последующий член ряда более чем на порядок меньше предыдущего. Таким образом, можно полагать, что найденное решение для функции плотности распределения является обоснованным. Можно добавить, что, как показано в работе [13], уравнение (4.2) допускает решение в виде функции, зависящей только от переменной r/a с граничными условиями на бесконечности. Однако, как объясняется в этой же работе, такое решение справедливо только случая, когда траектории частиц начинаются на бесконечности, например, в случае течения растяжения жидкости с частицами. В настоящей задаче частицы на бесконечности покоятся, что следует из выражений для сил, действующих на них. Это означает, что траектории частиц не могут идти из бесконечности и решение уравнения (4.2) в виде только функции от переменной r/a не имеет физического смысла.

Полученное выражение для функции плотности вероятности не зависит от величины приложенного поля и определяется только коэффициентами, учитывающими взаимодействие частиц. Это связано с тем, что, как было указано выше, рассматривается случай только одного механизма, отвечающего за распределение частиц, а именно приложенного поля. Если наложить на систему жидкость-частицы макроскопическое деформационное течение, то добавится ещё один механизм, связанный с распределением частиц в результате действия этого механизма. В этом случае функция плотности вероятности будет зависеть от отношения характерных параметров, отвечающих за эти два механизма.

С учётом полученного выражения (4.5) для функции $q(r/a, \theta)$ из соотношения (4.1) определим усреднённую электро-термофоретическую силу, действующую на единицу объёма смеси:

$$\bar{\mathbf{F}}^{(e)} = \frac{\varepsilon_f k_\varepsilon G}{\pi^2 a^8} \left[\frac{3}{512} E_0^2 \nabla T_0 + \frac{1575}{16896} (\nabla T_0 \cdot \mathbf{E}_0) \mathbf{E}_0 \right] \phi^2. \quad (4.6)$$

Вклад в выражение для средней силы дают слагаемые чётной степени по вектору \mathbf{r} . При расчётах учитывались следующие отличные от нуля значения интегралов:

$$\int_0^\pi (\cos\theta - \cos^3\theta)^2 \sin\theta d\theta = \frac{16}{105},$$

$$\int_0^\pi (\cos\theta - \cos^3\theta)^2 \cos^2\theta \sin\theta d\theta = \frac{16}{315},$$

$$\int_0^\pi (\cos\theta - \cos^3\theta)^2 \cos^4\theta \sin\theta d\theta = \frac{16}{693}.$$

Полученные результаты можно рассматривать с точки зрения управления перемещением частиц в неоднородно нагретой жидкости электрическим полем. Как видно из (4.6), электрическое поле, перпендикулярное градиенту температуры, уменьшает силу, действующую на частицы. Само перемещение частиц зависит от диэлектрических свойств жидкости и частиц. Полагая, что диэлектрическая проницаемость частиц больше, чем жидкости $\varepsilon_p > \varepsilon_f$ и что $(\partial\varepsilon_p/\partial T) < 0$, с учётом выражений для коэффициентов (3.2) и (3.3) следует, что электрическое поле приводит к перемещению частиц в направлении, противоположном приложенному градиенту температуры. Для частиц, у которых $\varepsilon_p < \varepsilon_f$ и $(\partial\varepsilon_p/\partial T) < 0$, перемещение происходит по направлению градиента температуры.

5. Заключение

Предложена процедура получения средней по объёму электро-термофоретической силы, действующей на поляризующиеся частицы в неоднородно нагретой жидкости в однородном электрическом поле с точностью до членов второго порядка малости по объёмной концентрации частиц. При определении средней силы использовалось приближенное решение задачи о распределении температуры и электрического поля в жидкости и частицах с учётом зависимости диэлектрической проницаемости частиц от температуры. Полученное выражение показывает, что величина и направление средней электро-термофоретической силы зависит от взаимной ориентации векторов напряжённости электрического поля и градиента температуры, а также от разницы диэлектрических проницаемостей жидкости и частицы. Электрическое поле с вектором напряжённости, перпендикулярным градиенту температуры уменьшает величину силы. В случае, когда диэлектрическая проницаемость частиц больше, чем у жидкости, вектор средней силы направлен против градиента температуры. Для частиц с диэлектрической проницаемостью, меньшей, чем у жидкости, направление средней силы совпадает с направлением градиента температуры. Во всех случаях считалось, что диэлектрическая проницаемость частиц уменьшается с увеличением температуры.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-41-860002/18.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gao W., de Avila B. E.-F., Zhang L., Wang J. Targeting and Isolation of Cancer Cells Using Micro/Nanomotors // *Adv. Drug Deliv. Rev.* 2018. Vol. 125. pp. 94–101. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.addr.2017.09.002>

2. Medina-Sanchez M., Haifeng Xu H., Schmidt O.G. Micro- and nano-motors: the new generation of drug carriers // *Therapeutic Delivery*. 2018. Vol. 9. pp. 303-316. DOI: <https://doi.org/10.4155/tde-2017-0113>
3. Alsaba M.T., Al Dushaishi M. F., Abbas A.K. A comprehensive review of nanoparticles applications in the oil and gas industry // *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*. 2020. Vol.10. pp. 1389-1399. DOI:<https://doi.org/10.1007/s13202-019-00825-z>
4. Agista M. N., Guo K., Yu Z. A State-of-the-Art Review of Nanoparticles Application in Petroleum with a Focus on Enhanced Oil Recovery// *Appl. Sci*. 2018. Vol. 8, No. 6. DOI: <https://doi.org/10.3390/app8060871>
5. Rezk M. Y., Allam N. K. Impact of Nanotechnology on Enhanced Oil Recovery: A Mini-Review // *Ind. Eng. Chem. Res*. 2019. Vol. 58. pp. 16287-16295. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.9b03693>
6. Fakoya M. F., Shah S. N. Emergence of nanotechnology in the oil and gas industry: Emphasis on the application of silica nanoparticles // *Petroleum*. 2017. Vol. 3, No. 4. pp. 391-405. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petlm.2017.03.001>
7. Martynov S. I., Tkach L. Yu. Model of Hydrodynamic Mechanism of the Movement of Nanomotors // *Mathematical Models and Computer Simulations*. 2021. Vol. 13, No. 4. pp. 684-691. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048221040153>
8. Maxwell J.C. *Electricity and magnetism*. Oxford: Clarendon Press, 1892. 420 p.
9. Rayleigh J.W. On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium // *Phil. Mag*. 1892. Vol. 34, No. 241. pp. 481-491.
10. Бахвалов Н.С. Осреднённые характеристики тел с периодической структурой // *ДАН СССР*. 1974. Т. 218, № 5. С. 1046-1048.
11. Бердичевский А.Л. Пространственное осреднение периодических структур // *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*. 1975. Т. 222, № 3. С. 565-567.
12. Мартынов С.И. Моделирование перемещения частицы в неоднородно нагретой поляризующейся жидкости // *Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование»*. 2021. Т. 14, № 1. С. 42-51. DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp210104>
13. Batchelor G., Green J. The bulk stress in a suspension of spheres to order c^2 . // *Rheologica Acta*. 1974. Vol. 13. pp. 890-890. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01527090>
14. Мартынов С.И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*. 1998. № 2. С. 112-119.
15. Борискина И.П., Сыромьясов А.О. Парное магнитогидродинамическое взаимодействие твёрдых сфер в медленном продольном потоке вязкой жидкости // *Журнал Средневолжского математического общества*. 2019. Т. 21, № 1. С. 78-88. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201901.78-88>

Поступила 11.02.2022; доработана после рецензирования 3.05.2022;
принята к публикации 25.05.2022

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. W. Gao, B. E.-FY. de Avila, L. Zhang, J. Wang, “Targeting and isolation of cancer cells using micro/nanomotors”, *Adv. Drug Deliv. Rev.*, **125** (2018), 94–101. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.addr.2017.09.002>
2. M. Medina-Sanchez, H. Haifeng Xu, O. G. Schmidt, “Micro- and nano-motors: the new generation of drug carriers”, *Therapeutic Delivery*, **9** (2018), 303–316. DOI: <https://doi.org/10.4155/tde-2017-0113>
3. M. T. Alsaba, M. F. Al Dushaishi, A. K. Abbas, “A comprehensive review of nanoparticles applications in the oil and gas industry”, *Journal of Petroleum Exploration and Production Technology*, **10** (2020), 1389–1399. DOI: <https://doi.org/10.1007/s13202-019-00825-z>
4. M. N. Agista, K. Guo, Z. Yu, “A state-of-the-art review of nanoparticles application in petroleum with a focus on enhanced oil recovery”, *Appl. Sci.*, **8**:6 (2018). DOI: <https://doi.org/10.3390/app8060871>
5. M. Y. Rezk, N. K. Allam, “Impact of Nanotechnology on Enhanced Oil Recovery: A Mini-Review”, *Ind. Eng. Chem. Res.*, **58** (2019), 16287–16295. DOI: <https://doi.org/10.1021/acs.iecr.9b03693>
6. M. F. Fakoya, S. N. Shah, “Emergence of nanotechnology in the oil and gas industry: Emphasis on the application of silica nanoparticles”, *Petroleum*, **3**:34 (2017), 391–405. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.petlm.2017.03.001>
7. S. I. Martynov, L. Yu. Tkach, “Model of hydrodynamic mechanism of the movement of nanomotors”, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **1**:4 (2021), 684–691. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048221040153>
8. J. C. Maxwell, *Electricity and Magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1892, 420 p.
9. J. W. Rayleigh, “On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium”, *Phil. Mag.*, **34**:241 (1892), 481–491.
10. H. C. Bakhvalov, “The averaged characteristics of bodies with a periodic structure”, *Dokl. USSR Academy of Sciences*, **218**:5 (1974), 1046–1048 (In Russ.).
11. A. L. Berdichevsky, “Spatial averaging of periodic structures”, *Dokl. USSR Academy of Sciences*, 1975, № 3, 565–567 (In Russ.).
12. S. I. Martynov, “On the force acting on particles in an inhomogeneously heated polarizing liquid”, *Bulletin SUSU MMCS*, **14**:1 (2021.), 42–51 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.14529/mmp210104>

13. G. Batchelor, J. Green, “The bulk stress in a suspension of spheres to order c^2 ”, *Rheologica Acta*, **13** (1974), 890–890.
14. S. I. Martynov, “Hydrodynamic interaction of particles”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 1998, no. 2, 112–119 (In Russ.).
15. I. P. Boriskina, A. O. Syromyasov, “Pair-wise MHD-interaction of rigid spheres in longitudinal creeping flow”, *Zhuznal SVMO*, **21**:1 (2019), 78–88 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201901.78-88>

Submitted 11.02.2022; Revised 3.05.2022; Accepted 25.05.2022

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

УДК 51-72:517.958:544.034:615.011.4

Исследование диффузии лекарственного вещества из набухающей хитозановой пленки математическими методами

А. О. Сыромьясов¹, А. С. Шуршина², Д. В. Галкин³

¹ Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (г. Саранск, Российская Федерация)

² Башкирский государственный университет (г. Уфа, Российская Федерация)

³ ООО «Кодер» (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. Одним из современных типов лекарственных форм является высокомолекулярная органическая пленка, пропитанная лекарственным веществом: после нанесения пленки на кожу лекарство постепенно выделяется из нее, обеспечивая лечебный эффект. В данной статье рассматриваются пленки на основе хитозана, содержащие амикацин или цефазолин. Их важнейшей характеристикой служит скорость отдачи лекарственного вещества, характеризуемая коэффициентом диффузии. Для определения указанной величины проводится серия экспериментов, в ходе которой пленку помещают в воду, после чего измеряется средняя концентрация лекарства, остающегося в пленке к определенному моменту времени. Проблема заключается в том, что свойства пленки из-за ее набухания в воде могут меняться с течением времени, а диффузия не является единственным процессом, протекающим внутри пленки. Чтобы учесть перечисленные эффекты, авторы предлагают считать коэффициент диффузии переменным и дополняют математическую модель дифференциальным уравнением, описывающим отрыв молекул лекарственного вещества от высокомолекулярной матрицы. Решение этого уравнения, как и уравнения диффузии, может быть получено аналитически. Это позволяет выразить среднюю концентрацию вещества в функции времени. Таким образом, обратная задача диффузии сводится к определению неизвестных числовых параметров функций методом наименьших квадратов по экспериментальным данным. В связи со сложностью получаемых выражений при решении данной задачи наиболее эффективным является использование безградиентных методов оптимизации. Применение описанного подхода к реальным данным дает достаточную точность, а результаты имеют логичную физико-химическую интерпретацию. В частности, найдено, что набухание пленки практически не влияет на скорость отдачи вещества. Указанный феномен объясняется тем, что скорость диффузии в изучаемых пленках велика уже в начальные моменты времени, поэтому подавляющая часть вещества расходуется еще до существенного набухания пленки. Предложенные подходы и полученные результаты могут быть полезны при разработке лекарственных форм с контролируемой скоростью отдачи вещества.

Ключевые слова: уравнение диффузии, набухающая хитозановая пленка, обратная задача, численная оптимизация, метод Нелдера — Мида, метод наименьших квадратов, высокомолекулярное соединение

Для цитирования: Сыромьясов А. О., Шуршина А. С., Галкин Д. В. Исследование диффузии лекарственного вещества из набухающей хитозановой пленки математическими методами // Журнал Средневожского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 200–214. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.200-214>



Об авторах:

Сыромясов Алексей Олегович, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall@yandex.ru

Шуршина Анжела Саматовна, доцент кафедры высокомолекулярных соединений и общей химической технологии, Башкирский государственный университет (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат химических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6737-7265>, anzhela_murzagil@mail.ru

Галкин Дмитрий Васильевич, старший программист, ООО «Кодер» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Советская, д. 84В, оф. 302), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2174-6138>, dmgal13@gmail.com

Original article

MSC2020 35Q92, 35K05, 35R30, 65K05

Mathematical study of medicine diffusion from swelling chitosan film

A. O. Syromyasov¹, A. S. Shurshina², D. V. Galkin³

¹ *National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*

² *Bashkir State University (Ufa, Russian Federation)*

³ *«Coder» LLC (Saransk, Russian Federation)*

Abstract. One of modern dosage forms is a medicine-saturated organic film: after putting this film onto a skin the medicine releases thus providing healing effect. Present article concerns films based on chitosan and containing amikacinum or cefazolinum. The most important characteristic of such film is rate of medicine release described by diffusion coefficient. To find it the film is placed in water and the average medicine concentration in the film is measured at different time moments. Two problems arise here. First, the film properties change because of its swelling. Second, diffusion is not the only process that takes place inside the film. To deal with these effects, authors suppose diffusion coefficient to be time-variable and complete the mathematical model with ODE describing detachment of medicine molecules from high-molecular matrix. All the equations in the model are solved analytically, so average medicine concentration in the film is known function of time. Thus, to solve stated inverse problem it is sufficient to find unknown scalar parameters of known functions using least-squares framework. Expressions arising in the solution are complicated so non-gradient methods are preferable for optimization. Applying described procedure to experimental data leads to a good accuracy and the results may be explained from physicochemical point of view. In particular, the film swelling doesn't influence release rate. In fact, the diffusion rate during first hours of experiment is large, and the main part of the medicine is released before swelling starts to play important role.

Keywords: diffusion equation, swelling chitosan film, inverse problem, numerical optimization, Nelder–Mead method, least squares method, high-molecular compound

For citation: A. O. Syromyasov, A. S. Shurshina, D. V. Galkin. Mathematical study of medicine diffusion from swelling chitosan film. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:2(2022), 200–214. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.200-214>

About the authors:

Alexey O. Syromyasov, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syal1@yandex.ru

Anzhela S. Shurshina, Associate Professor, Department of High Molecular Compounds and General Chemical Technology, Bashkir State University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6737-7265>, Ph.D. (Chemistry), anzhela_murzagil@mail.ru

Dmitry V. Galkin, Senior Programmer, «Coder» LLC (84V Sovetskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2174-6138>, dmga13@gmail.com

1. Введение

В современном мире остро стоит проблема эффективного лечения ран различной этиологии, в т. ч. ожоговых ран, связанная с увеличивающимся количеством техногенных катастроф, военных конфликтов и т. д. Один из способов эффективного лечения заключается в использовании материалов, защищающих пораженный участок и облегчающих процесс лечения. На сегодняшний день известно достаточно много видов раневых покрытий, отличающихся по химическому составу [1–2]. В наибольшей степени всем медико-биологическим требованиям отвечают покрытия из полисахаридов. Общими свойствами биосовместимых материалов из полисахаридов, в т. ч. хитозана, являются их гидрофильность, обуславливающая высокую адсорбирующую способность, достаточная адгезия к ране, отсутствие токсичности и раздражающего действия, а также гемостатические свойства [3–4]. Отмечено их стимулирующее действие на процессы заживления ран и ожогов, что способствует более быстрому развитию грануляционной ткани, ускорению эпителизации [5].

В случае возникновения различных осложнений или для их предупреждения требуется использование лекарственных средств, обладающих бактерицидным, антисептическими, анестетическим действием, которые могут быть включены в полимерную матрицу (пленку). Эта пленка позволяет создать раневое покрытие, полностью и надежно закрывающее раневую поверхность, не требует повторного нанесения и т. д. Основная задача при создании такого раневого материала будет заключаться в пролонгировании высвобождения лекарственного вещества, которое может быть достигнуто за счет изменения полимерной матрицы, например, ее термической модификацией [6].

Превалирующим механизмом выделения лекарственного вещества из матрицы служит диффузия. Корректное и полное описание этого процесса требует учета многих факторов: формы и размеров пленки, изменения ее физических свойств с течением времени. Кроме того, необходимо учитывать и физико-химические процессы, происходящие внутри пленки. Диффузии лекарства из органических пленок посвящено большое количество научных работ. В них выдвигаются различные предположения касательно интенсивности протекания процесса: начиная от высвобождения вещества с постоянной скоростью [7] и заканчивая использованием уравнения Вейбулла для описания зависимости выделившейся фракции от времени [8]. Ряд статей, например, [9–10], посвящены изучению диффузии лекарства из матриц разной геометрической формы: пленок, цилиндров и сфер, причем во внимание принимается эрозия лекарственных форм и их набухание [11]. В целом известные кинетические модели диффузии либо являются полумпирическими (основанными на использовании достаточно простых «эталонных»

функций, зависящих от одного или нескольких параметров), либо выведены из максимально упрощенных гипотез относительно матрицы и содержащегося вещества: постоянный коэффициент диффузии, незначительное набухание или растворение матрицы и т. д. [12]. В известных работах данной тематики не строится подробная математическая модель диффузии, которая бы точно описывала процессы, происходящие внутри пленки, и учитывала их влияние на скорость высвобождения вещества.

В предлагаемой статье математическими методами исследуется разработанная ранее модель диффузии лекарства (амикацина или цефазолина) из хитозановой пленки, подвергнутой предварительной тепловой обработке и помещенной в воду [13–14]. Акцент в математической модели делается на физико-химические процессы, происходящие в пленке: увеличение коэффициента диффузии вследствие набухания матрицы в воде, первоначальное частичное связывание молекул лекарства с матрицей и их последующий отрыв от нее. Целью проводимых вычислений является нахождение характеристик пленки по результатам измерений концентрации лекарства, остающегося внутри нее к определенным моментам времени.

2. Математическая модель и методы ее исследования

Будем рассматривать пленку достаточно большой длины и ширины и малой толщины $2l$, помещенную в сосуд с водой. Объем сосуда предполагается многократно превышающим объем пленки. Отметим, что в реальных опытах предположения касательно размеров изучаемой лекарственной формы оправдываются с высокой точностью: так, ширина пленки в десятки раз превышает ее толщину.

В начальный момент времени t пленка содержит лекарственное вещество, концентрация которого составляет c_0 ; без ограничения общности далее считается, что $c_0 = 1$. С течением времени средняя концентрация лекарственного вещества $\langle c \rangle(t)$ в пленке уменьшается благодаря диффузии. Значения

$$c_k = \langle c \rangle(t_k), \quad k = 0, \dots, K - 1 \quad (2.1)$$

в моменты $t = t_k$ измерены в эксперименте и известны; при этом уже упомянутая величина c_0 равна $\langle c \rangle$ в момент $t_0 = 0$.

В экспериментах, проведенных группой уфимских химиков [6], наблюдения за хитозановыми пленками проводились в течение нескольких суток, а количество K измерений величины $\langle c \rangle(t)$ составляло от 13 до 20. Типичный набор экспериментальных данных выглядит следующим образом (см. Табл. 2.1).

Пленка, описанная в данной таблице, подвергнута 30-минутной предварительной термообработке, а начальное содержание цефазолина в ней равно $1 : 0.05$, то есть 0.05 моль/моль.

Требуется по данным (2.1) определить характеристики пленки, такие как коэффициент диффузии D .

Относительно описанного процесса выдвигаются две ключевые гипотезы, отличающие исследуемую модель от ранее известных.

Во-первых, некоторая часть внедренного в пленку лекарственного вещества оказывается связанной с матрицей благодаря химическим связям, и в диффузии участвуют лишь оставшиеся «свободными» молекулы. Запас таких молекул пополняется за счет постепенного отрыва связанных молекул от матрицы, при этом часть молекул все же задерживается в пленке. В свою очередь, скорость отрыва пропорциональна имеющемуся количеству связанных молекул, аналогично процессу радиоактивного распада.

Таблица 2.1. Средняя относительная концентрация цефазолина в пленке
Table 2.1. Average relative concentration of cefazolinum in the film

Время t_k , ч Момент t_k , hrs	Доля лекарства в пленке по сравнению с начальной Medicine fraction in the film relative to initial fraction
0	1.000
0.17	0.741
0.33	0.653
0.5	0.628
1	0.306
1.5	0.294
2	0.278
3	0.266
4	0.253
5	0.241
24	0.076
72	0.063
144	0.056
168	0.051
192	0.051

Далее обозначим через b и f концентрации связанного и «свободного» вещества соответственно. С математической точки зрения, эти предположения описываются так.

Относительно b известно, что она зависит только от времени и существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} b(t) = b_{\infty}; \quad (2.2)$$

кроме того, справедливо соотношение

$$\frac{db}{dt} = -\beta(b - b_{\infty}), \beta = \text{const}; b(0) = b_0. \quad (2.3)$$

Классическое уравнение диффузии для f дополняется источниковым членом, описывающим пополнение запасов диффундирующей субстанции:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \text{div}(D \text{grad} f) - \frac{db}{dt}.$$

Малая толщина пленки позволяет считать диффузию одномерной и упростить указанное уравнение. Если представить пленку в виде параллелепипеда с наименьшим ребром $2l$ и провести ось Ox вдоль этого ребра, то можно считать, что $f = f(t, x)$. Тогда

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial f}{\partial x} \right) - \frac{db}{dt}, \quad -l < x < l, \quad t > 0. \quad (2.4)$$

В начале опыта распределение лекарства в пленке является равномерным. Предположение о большом объеме сосуда, куда пленка помещена, позволяет считать, что внутри него (и на границе пленки) концентрация вещества нулевая:

$$f(0, x) = f_0, \quad -l < x < l; \quad f(t, \pm l) = 0, \quad t \geq 0. \quad (2.5)$$

При этом $b_0 + f_0 = c_0$.

Во-вторых, коэффициент диффузии изменяется с течением времени и главной причиной этого изменения служит набухание пленки в воде. Термообработанная пленка не растворяется в воде полностью: за бесконечное время коэффициент D изменяется с D_0 до D_∞ , и с приемлемой точностью можно положить

$$D(t) = D_\infty + (D_0 - D_\infty)e^{-t/t_0}, \quad (2.6)$$

где t_0 – время релаксации. При этом для функции $D(t)$ оказываются справедливыми уравнения, аналогичные (2.2) и (2.3).

Легко видеть, что функция $b(t)$ – решение (2.2)–(2.3), имеет вид

$$b(t) = b_\infty + (b_0 - b_\infty)e^{-\beta t}. \quad (2.7)$$

Решение задачи (2.4)–(2.5) может быть получено методом разделения переменных.

Наконец, наблюдаемая в опытах средняя концентрация лекарственного вещества вычисляется путем усреднения найденного решения по толщине пленки:

$$\langle c \rangle(t) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l [f(t, x) + b(t)] dx.$$

После упрощений окончательно получается

$$\langle c \rangle(t) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n T_n(t) + b(t), \quad (2.8)$$

где введены обозначения

$$u_n = \frac{2(-1)^n}{\lambda_n l}, \quad \lambda_n = \frac{1}{l} \left(\frac{\pi}{2} + \pi n \right),$$

$$T_n(t) = u_n e^{-\lambda_n^2 I_D(t)} \left[f_0 - \int_0^t \frac{db(s)}{ds} e^{\lambda_n^2 I_D(s)} ds \right], \quad I_D(t) = \int_0^t D(p) dp.$$

Итак, задача состоит в том, чтобы по известным данным (2.1) из соотношений (2.6)–(2.8) найти постоянные параметры b_0 , b_∞ , β , $f_0 = c_0 - b_0$, D_0 , D_∞ и t_0 . Таким образом, требуется решить обратную задачу диффузии.

В связи с широким применением уравнения теплопроводности (или диффузии) при математическом моделировании природных и технических процессов соответствующие обратные задачи также возникают весьма часто; например, см. [15]. Искомыми величинами в них могут быть как граничные условия, например, тепловой поток [16], так и собственные физические характеристики самой системы [17–18]. Характерной чертой большинства подобных работ служит использование данных, локальных в пространстве, но непрерывных по времени. Например, решение прямой задачи может быть известно в какой-либо точке расчетной области как функция времени. Кроме того, довольно часто выдвигается предположение о постоянстве искомой величины. Если же эта гипотеза не используется, то величина определяется численно для каждого конкретного набора известных параметров. Это затрудняет поиск общих закономерностей поведения исследуемой системы и снижает предсказательную ценность применяемых моделей и методов. В работе [19] предлагается общий метод, позволяющий численно

определить неизвестные коэффициенты параболического или гиперболического уравнения на основе известного в некоторые моменты времени осредненного по расчетной области решения этого уравнения.

В настоящей статье развивается подход, также основанный на дискретных по времени нелокальных данных вида (2.1), (2.8). Его главное отличие состоит в учете особенностей конкретной физико-химической системы, что позволяет использовать аналитические выражения для искомых функций и сводит задачу лишь к определению ряда параметров, от которых зависят эти функции.

Типичная черта полученных наборов экспериментальных данных – при росте k (соответственно, и t_k тоже) величина c_k перестает изменяться (см., например, табл. 2.1). Это позволяет сразу найти b_∞ в (2.2) как значение c_k с наибольшим номером:

$$b_\infty \approx c_{K-1}.$$

В дальнейшем этот параметр считается известным.

Для определения остальных величин применяется метод наименьших квадратов. Рассматривается функция

$$Q^2 = \sum_{k=0}^{K-1} [\langle c \rangle(t_k) - c_k]^2, \quad (2.9)$$

в которой c_k и t_k – это экспериментальные данные (2.1), а $\langle c \rangle(t)$ вычисляется согласно (2.8). Набор $(b_0, \beta, D_0, D_\infty, t_0)$ подбирается так, чтобы минимизировать Q^2 .

Тот факт, что функции $T_n(t)$ в (2.8) весьма быстро убывают с ростом n , позволяет заменить бесконечное суммирование на суммирование в небольших конечных пределах ($n \leq 20$). Тем не менее итоговое выражение для Q^2 весьма сложно, что затрудняет минимизацию этой функции, поэтому для решения задачи оптимизации требуется применять численные методы.

Известно много алгоритмов приближенного поиска экстремума функции многих переменных. Как правило, они классифицируются согласно порядку производных, вычисляемых в ходе их работы. Известны безградиентные методы, в которых не требуется находить производные (например, методы Нелдера – Мида и Розенброка), методы первого порядка (быстрейшего спуска, сопряженных градиентов, Левенберга – Марквардта) и второго порядка (например, Бройдена – Флетчера – Гольдфарба – Шанно). В связи со значительной сложностью нахождения производных функции (2.9) по искомым параметрам предпочтение в данном конкретном случае логично отдать одному из безградиентных алгоритмов. В конечном итоге в связи со своей достаточно высокой вычислительной эффективностью был выбран метод Нелдера – Мида, реализованный в основанной на языке Python экосистеме SciPy.

3. Тестирование модели

Перед тем как выбранный подход был реализован на действительных опытных данных, его работоспособность была проверена на ряде тестовых примеров.

При создании каждого из них выбирались определенные «эталонные» значения $b_0, b_\infty, \beta, D_0, D_\infty, t_0$; как и в реальных экспериментах, время измерялось в часах, а концентрации и длины считались безразмерными. Далее по ним согласно формулам (2.7) и (2.8) находились значения $c_k = \langle c \rangle(t_k)$ в моменты $t_0 = 0, t_1 = 0.17, t_3 = 0.33, \dots, t_{14} = 192$. Затем изначально задуманный набор данных «забывался», а по только что

сгенерированным данным вида (2.1) определялись сначала b_∞ , а затем, после минимизации Q^2 методом Нелдера — Мида, и остальные параметры модели. Наконец, полученные значения параметров сравнивались с эталонными.

Эталонные величины в тестовых примерах выбирались исходя из следующих соображений. Во-первых, b_∞ принимает значения порядка 0.05...0.1 (как показывают эксперименты), при этом $b_0 > b_\infty$. Во-вторых, наблюдения показывают, что характерное время набухания пленок составляет около 2 сут., а значит, $t_0 \sim 40$ ч. В третьих, характерные величины D_0 были взяты из решения простейшей обратной задачи диффузии, в которой предполагалось, что $D = \text{const}$, а слагаемое $b(t)$ в формулах не фигурировало. В четвертых, D_∞ должно превышать D_0 .

В итоге были выбраны следующие эталонные совокупности искомых величин (см. Табл. 3.1).

Таблица 3.1. Тестовые примеры для проверки эффективности алгоритма
Table 3.1. Model data to test algorithm effectiveness

№ п/п No.	b_∞	b_0	β	D_0	D_∞	t_0	Описание Description
1	0.05	0.76	1.27	3.40	7.78	40.50	«Типичный» набор данных
2	0.04	0.67	14.64	3.70	8.12	39.60	Быстрое изменение b ; большое β
3	0.06	0.69	0.12	3.50	7.92	40.10	Медленное изменение b ; малое β
4	0.06	0.09	1.23	3.30	7.65	41.10	Близкие b_0, b_∞
5	0.07	0.68	1.35	4.10	7.52	2.10	Быстрое изменение D ; малое t_0
6	0.04	0.65	1.34	3.30	4.50	42.40	Близкие D_0, D_∞
7	0.11	0.54	0.02	0.12	0.17	0.67	«Аномальные» свойства
8	0.11	0.54	0.19	0.26	0.41	0.92	«Аномальные» свойства

Последние два набора параметров были добавлены, чтобы проверить, как себя поведет алгоритм на значениях, которые не являются типичными для обсуждаемой физико-химической системы.

Ни в одном из перечисленных случаев восстановить весь набор эталонных параметров не удалось. Наибольшие расхождения наблюдались при определении D_∞ и t_0 ; остальные параметры в большинстве случаев находились достаточно точно. В связи с этим была рассмотрена более простая гипотеза: вместо (2.6) предполагалось, что коэффициент диффузии есть постоянная величина, $D = D_0$. Это упрощение позволило для всех тестовых примеров практически точно определить значения $b_\infty, b_0, \beta, D_0$; отличия найденных значений от эталонных составляли десятые доли процента.

С математической точки зрения описанная выше проблема означает, что минимум функции (2.9) выражен слабо. Действительно, в окрестности эталонных значений частные производные Q^2 близки к нулю. Однако свойства той или иной функции, входящей в математическую модель, служат отражением неких свойств моделируемой системы. Соответственно, невозможность определения D_∞ и t_0 требует физико-химической интерпретации.

Как уже говорилось, в пленке одновременно происходят два процесса: диффузия свободных молекул лекарства из матрицы и пополнение их запаса за счет отрыва связанных молекул от матрицы и их перехода в свободное состояние. Если бы этого отрыва

не было ($\beta = 0$), то при $D = D_0$ диффузия шла бы со скоростью

$$\langle f \rangle(t) \approx \frac{f_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} u_n^2 e^{-\lambda_n^2 D_0 t}.$$

Поскольку слагаемые этого ряда весьма быстро убывают с ростом n , скорость расхода лекарства в начальном приближении можно бы было оценить, предполагая, что $n = 0$:

$$\langle f \rangle(t) \approx \frac{8f_0}{\pi^2} \exp\left(-\frac{\pi^2 D_0 t}{4l^2}\right).$$

С другой стороны, пополнение запасов диффузанта описывается функцией $b(t)$. Чтобы выяснить, какой из двух процессов протекает быстрее, достаточно сравнить показатели экспонент в выражениях для $\langle f \rangle(t)$ и $b(t)$. Что то же самое, достаточно сравнить число

$$\delta_0 = \frac{4\beta l^2}{\pi^2 D_0} \quad (3.1)$$

с единицей. При $\delta_0 < 1$ расход диффузанта идет быстрее, чем его накопление, т. к. начальное приближение $\langle f \rangle(t)$ в этом случае изменяется быстрее, чем $b(t)$. Напротив, при $\delta_0 > 1$ более интенсивно протекает именно пополнение запасов свободного вещества.

С учетом того, что толщина пленки в примерах табл. 3.1 принята равной $2l = 1$, получается, что в них $\delta_0 < 1$. Это и объясняет трудности в определении D_∞ и t_0 . Уже в начале эксперимента отдача свободных молекул лекарства по интенсивности опережает их «подачу». Тем не менее, поскольку в пленке имеется запас свободного вещества, возможно отслеживать оба упомянутых процесса. С течением времени запасы свободного вещества иссякают, вследствие чего отделившиеся от матрицы молекулы моментально расходуются. В таких условиях не имеет значения, чему именно равен коэффициент диффузии; важно лишь, что он достаточно велик. Проводя неформальную аналогию, можно представить содержащий воду сосуд с двумя отверстиями — узким и широким, причем широкое продолжает увеличиваться в размерах. Через узкое отверстие в сосуд подается вода (это соответствует изменению $b(t)$), а через широкое (соответствует диффузии) она отводится из сосуда. Рано или поздно вся попадающая в сосуд вода станет мгновенно уходить из него, и определить диаметр широкого отверстия по результатам наблюдений будет невозможно: расход воды перестанет зависеть от него и будет определяться *только* интенсивностью подачи через узкое отверстие.

4. Применение разработанного подхода к реальным данным

В связи с вышеизложенным при обработке реальных опытных данных *a priori* принималась гипотеза о постоянстве коэффициента диффузии: $D = D_0$. Помимо этого, по-прежнему предполагалось, что толщина пленки равна 1.

Таким образом были обработаны данные наблюдений за поведением 11 различных хитозановых пленок. Результаты расчетов представлены в табл. 4.1.

Легко видеть, что значение критерия (3.1) для всех пленок меньше 1, а значит, применение упрощающей гипотезы о постоянстве D обоснованно.

Таблица 4.1. Характеристики термообработанных пленок на основе хитозана, содержащих лекарственное вещество (ЛВ). Единицы измерения величин аналогичны приведенным в табл. 3.1.

Table 4.1. Characteristics of chitosan-based films containing medicine (M). Measurement units are the same with table 3.1

№ п/п No.	Содержание ЛВ M and its content	Время термообработ. Time of thermomodif.	b_∞	b_0	β	D_0
1	Амикацин (0.01 : 1)	30 мин	0.058	0.741	0.027	5.715
2	Амикацин (0.01 : 1)	60 мин	0.098	0.734	0.019	5.751
3	Амикацин (0.01 : 1)	120 мин	0.146	0.747	0.027	5.686
4	Амикацин (0.05 : 1)	30 мин	0.193	0.723	0.034	5.787
5	Амикацин (0.1 : 1)	0 мин	0.134	0.656	0.019	0.111
6	Амикацин (0.1 : 1)	30 мин	0.301	0.719	0.019	5.823
7	Цефазолин (0.01 : 1)	30 мин	0.033	0.140	0.011	0.118
8	Цефазолин (0.01 : 1)	60 мин	0.067	0.640	0.383	0.518
9	Цефазолин (0.01 : 1)	120 мин	0.100	0.415	0.230	0.279
10	Цефазолин (0.05 : 1)	30 мин	0.051	0.280	0.069	0.154
11	Цефазолин (0.1 : 1)	30 мин	0.091	0.398	0.040	0.183

Результаты расчетов средней концентрации лекарства $\langle c \rangle(t)$ по формулам (2.7)–(2.8) с использованием данных табл. 4.1 согласуются с опытными данными. Так, на рис. 4.1 сравниваются результаты расчета $\langle c \rangle(t)$ для пленки, содержащей цефазолин (начальная концентрация 1 : 0.05, время термообработки пленки — 30 мин), с данными табл. 2.1.

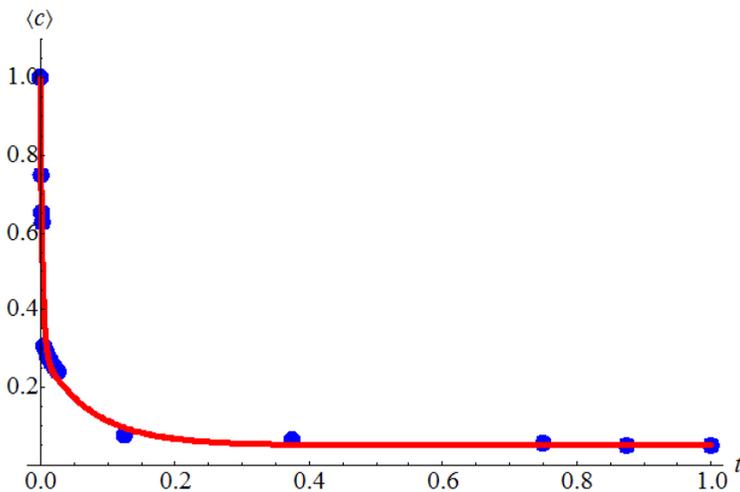


Рис. 4.1. Согласование экспериментальных данных с расчетными. Отдельные точки — результаты эксперимента, сплошная линия — расчет. Время нормировано так, что его максимальное значение равно 1.

Fig 4.1. Bullets represent experimental data, solid line depicts calculation results. The time is normalized so that its maximal value is 1

Аналогичная картина наблюдается и для других рассматриваемых физико-химических систем. Таким образом, предложенная модель достаточно точна.

Полученные результаты (см. табл. 4.1) имеют ряд особенностей, связанных в первую очередь с величиной b_∞ . Как следует из сравнения строк 1, 2 и 3, 5 и 6, а также 7, 8 и 9, с увеличением времени предварительной термообработки при прочих равных условиях доля молекул, остающихся в пленке, растет. Таким образом, термомодификация ведет к «закупорке» вещества внутри матрицы. Это объясняется тем, что во время тепловой обработки в пленке происходят процессы, отрицательно влияющие на ее растворимость в воде. В частности, помимо реакции ацилирования, происходит частичная деструкция полимера, увеличивающая содержание концевых альдегидных групп; реагируя с аминогруппами, они сшивают макромолекулы хитозана за счет образования азометиновых связей. В работе [20] факт образования поперечных сшивок в хитозане в процессе термомодификации подтвержден изучением временных периодов спин-решеточной релаксации.

Если сравнивать пленки с одним и тем же временем термообработки (строки 1, 4 и 6), то при увеличении начальной суммарной доли лекарственного вещества b_∞ также растет. Объяснение этого факта достаточно просто: в отсутствие иных влияющих факторов чем больше инородного вещества матрица содержала изначально, тем больший его объем в ней задержится.

Величины b_0 и D_0 для термообработанных пленок, содержащих амикацин, существенно больше, чем эти же величины для цефазолинсодержащих пленок с теми же временами термомодификации и начальным содержанием лекарства. Первый факт можно объяснить тем, что в условиях теплового воздействия амикацин становится более химически активным и интенсивнее связывается с хитозановой матрицей. Второй факт, возможно, связан с тем, что в силу особенностей химического строения подвижность свободных молекул цефазолина меньше, чем амикацина.

5. Заключение

Итак, в данной статье исследована математическая модель поведения инородного лекарственного вещества в пленке на основе хитозановой матрицы. Простая одномерная геометрия модели обусловлена соотношением линейных размеров реальных изучаемых объектов; это упрощение не ведет к сколько-нибудь заметному снижению точности дальнейших выводов. С физико-химической же точки зрения изучаемая модель весьма подробна. От ранее известных она отличается тем, что учитывает не только диффузию молекул лекарства в окружающую пленку воду, но и «производство» свободного вещества внутри матрицы, а также включает уравнение, описывающее набухание пленки и постепенное изменение ее свойств в воде.

Для определения неизвестных параметров пленки используется метод наименьших квадратов, причем оптимизация целевой функции (ввиду сложности последней) проведена методом Нелдера — Мида, не требующим вычисления производных, но достаточно эффективным в плане вычислений. Точность предложенного подхода подтверждена его применением на ряде тестовых примеров.

Проведенные расчеты показывают, что доля лекарственного вещества, которое задерживается в матрице и не участвует в диффузии, существенно зависит от продолжительности предварительной термообработки пленки. Такие характеристики системы, как коэффициент диффузии (отвечающий за скорость выделения вещества, а значит, за лечебный эффект пленки) определяются тем, какое именно вещество внедрено в хи-

тозановую матрицу. На этапе тестирования модели удалось также выяснить, что при достаточно большом начальном коэффициенте диффузии его дальнейшее увеличение не играет роли для описания «пропускных» свойств пленки.

Полученные результаты могут быть применены при разработке и производстве высокомолекулярных пленок и иных лекарственных форм с контролируемой скоростью выделения действующего вещества. При накоплении большего объема экспериментальных данных станет возможным подробное исследование зависимости свойств пленок от времени их термообработки, начального содержания и вида внедренного вещества.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Назаренко Г. И., Сугурова И. Ю., Глянецев С. П. Рана, повязка, больной: руководство для врачей и медсестер. М. : Медицина, 2002. 472 с.
2. Qin Y. M. Advanced wound dressings // J. of the Textile Institute. 2001. Vol. 92. № 1. P. 127–138. DOI: <https://doi.org/10.1080/00405000108659563>
3. Феофилова Е. П., Немцев Д. В., Терешина В. М., Козлов В. П. Полиаминосахариды мицелиальных грибов: новые биотехнологии и перспективы практического использования // Прикладная биохимия и микробиология. 1996. Т. 32. № 5. С. 483–492.
4. Горовой Л. В., Косяков В. Н. Сорбционные свойства хитина и его производных // Хитин и хитозан: получение, свойства и применение; под ред. К. Г. Скрыбина, Г. А. Вихоревой, В. П. Варламова М. : Наука, 2002. С. 217–246.
5. Алексеева Т. П., Рахметова А. А., Богословская О. А., Ольховская И. П., Левов А. Н., Ильина А. В., Варламов В. П., Байтукалов Т. А., Глуценко Н. Н. Ранозаживляющие свойства хитозана и его N-сульфосукциноилпроизводных // Известия РАН. Серия биологическая. 2010. № 4. С. 403–410.
6. Kulish E. I., Shurshina A. S., Kolesov S. V. Specific transport properties of medicinal chitosan films // Polymer Science. Series A. 2014. Vol. 56. № 3. pp. 289–295. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965545X14030080>
7. Conte U., Colombo P., Gazzaniga A., La Manna A. Swelling-activated drug delivery systems // Biomater. 1988. Vol. 9. pp. 489–493. DOI: [https://doi.org/10.1016/0142-9612\(88\)90043-9](https://doi.org/10.1016/0142-9612(88)90043-9)
8. Costa P., Sousa Lobo L. M. Modeling and comparison of dissolution profiles // Eur. J. Pharm. Sci. 2003. Vol. 13. pp. 123–133. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0928-0987\(01\)00095-1](https://doi.org/10.1016/s0928-0987(01)00095-1)
9. Katzhendler I., Hoffman A., Goldberger A., Grieman M. Modeling of drug release from erodible tablets // J. Pharm. Sci. 1997. Vol. 86. № 1. pp. 110–115. DOI: <https://doi.org/10.1021/js9600538>
10. Ritger P. L., Peppas N. A. A simple equation for description of solute release. I. Fickian and Non-Fickian release from non-swellable devices in the form of slabs, spheres, cylinders or discs // J. Control. Release. 1987. Vol. 5. pp. 23–26. DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-3659\(87\)90034-4](https://doi.org/10.1016/0168-3659(87)90034-4)

11. Ritger P. L., Peppas N. A. A simple equation for description of solute release. II. Fickian and anomalous release from swellable devices // J. Control. Release. 1987. Vol. 5. pp. 37–42. DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-3659\(87\)90035-6](https://doi.org/10.1016/0168-3659(87)90035-6)
12. Siepmann S., Peppas N. A. Modeling of drug release from delivery systems based on hydroxypropylmethylcellulose (HPMC) // Adv. Drug Delivery Rev. 2001. Vol. 48. pp. 139–157. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0169-409x\(01\)00112-0](https://doi.org/10.1016/s0169-409x(01)00112-0)
13. Сыромясов А. О., Шуршина А. С., Галкин Д. В. Модель диффузии лекарственного вещества с учетом его связывания в органической пленке // «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского: мат.-лы VIII Междунар. науч. молодеж. школы-семинара. Саранск, 2018. С. 150–155.
14. Сыромясов А. О., Шуршина А. С., Галкин Д. В. Подходы к описанию процесса диффузии лекарственного вещества из хитозановой пленки // Вестник Башкирского университета. 2018. Т. 23. № 4. С. 1100–1104.
15. Hömberg D., Lu S., Yamamoto M. Uniqueness for an inverse problem for a nonlinear parabolic system with an integral term by one-point Dirichlet data // J. Differ. Equations. 2019. Vol. 266. № 11. pp. 7525–7544. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.12.004>
16. Chen Y. Y., Frankel J. I., Keyhani M. A new front surface heat flux calibration for a 1-D nonlinear thermal system with a time-varying back boundary condition // J. Eng. Math. 2017. Vol. 105. pp. 157–187. DOI: <https://doi.org/10.1007/S10665-016-9888-0>
17. Албу А. Ф., Зубов В. И. О восстановлении коэффициента теплопроводности вещества по температурному полю // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 10. С. 1640–1655. DOI: <https://doi.org/10.31857/S004446690003584-3>
18. Бойков И. В., Рязанцев В. А. Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности // Журнал Средневожского математического общества. 2019. Т. 21. № 2. С. 149–161. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201902.149-163>
19. Кабанихин С. И., Шишленин М. А. Восстановление коэффициентов, зависящих от времени, в динамических обратных задачах по нелокальным данным // Марчуковские научные чтения–2017: тр. Междунар. науч. конф. Новосибирск, 2017. С. 364–369.
20. Смотрина Т. В. Состояние воды и релаксационные процессы в хитозановых пленках // Бутлеровские сообщения. 2012. Т. 29. № 2. С. 98–101.

*Поступила 25.02.2022; доработана после рецензирования 1.04.2022;
принята к публикации 25.05.2022*

REFERENCES

1. G. I. Nazarenko, I. Yu. Sugurova, S. P. Glyantsev, [*Wound, bandage, patient: a guide for doctors and nurses*], Meditsina Publ., Moscow, 2002 (In Russ.), 472 p.
2. Y. M. Qin, “Advanced wound dressings”, *Journal of the Textile Institute*, **92**:1 (2001), 127–138. DOI: <https://doi.org/10.1080/00405000108659563>
3. E. P. Feofilova, D. V. Nemtsev, V. M. Tereshina, V. P. Kozlov, “[Polyaminosaccharides of mycelial fungi: new biotechnological use and practical implications]”, *Applied Biochemistry and Microbiology*, **32**:5 (1996), 437–445 (In Russ.).
4. L. V. Gorovoi, V. N. Kosyakov, “[Sorptions properties of chitin and its derivatives]”, [*Chitin and chitosan: production, properties and application*], Moscow, 2002, 217–246 (In Russ.).
5. T. P. Alekseeva A. A. Rakhmetova, O. A. Bogoslovskaya, I. P. Olkhovskaya, A. N. Levov, A. V. Ilina, V. P. Varlamov, T. A. Baytukalov, N. N. Glushchenko, “Wound healing potential of chitosan and N-sulfosuccinoyl chitosan derivatives”, *Biology Bulletin*, **37**:4 (2010), 339–345. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1062359010040023>
6. E. I. Kulish, A. S. Shurshina, S. V. Kolesov, “Specific transport properties of medicinal chitosan films”, *Polymer Science. Series A*, **56**:3 (2014), 289–295. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965545X14030080>
7. U. Conte, P. Colombo, A. Gazzaniga, A. La Manna, “Swelling-activated drug delivery systems”, *Biomaterials*, **9** (1988), 489–493. DOI: [https://doi.org/10.1016/0142-9612\(88\)90043-9](https://doi.org/10.1016/0142-9612(88)90043-9)
8. P. Costa, L. M. Sousa Lobo, “Modeling and comparison of dissolution profiles”, *European Journal of Pharmaceutical Sciences*, **13** (2003), 123–133. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0928-0987\(01\)00095-1](https://doi.org/10.1016/s0928-0987(01)00095-1)
9. I. Katzhendler, A. Hoffman, A. Goldberger, M. Grieman M., “Modeling of drug release from erodible tablets”, *Journal of Pharmaceutical Sciences*, **86**:1 (1997), 110–115. DOI: <https://doi.org/10.1021/js9600538>
10. P. L. Ritger, N. A. Peppas, “A simple equation for description of solute release. I. Fickian and Non-Fickian release from non-swelling devices in the form of slabs, spheres, cylinders or discs”, *Journal of Controlled Release*, **5** (1987), 23–26. DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-3659\(87\)90034-4](https://doi.org/10.1016/0168-3659(87)90034-4)
11. P. L. Ritger, N. A. Peppas, “A simple equation for description of solute release. II. Fickian and anomalous release from swelling devices”, *Journal of Controlled Release*, **5** (1987), 37–42. DOI: [https://doi.org/10.1016/0168-3659\(87\)90035-6](https://doi.org/10.1016/0168-3659(87)90035-6)
12. S. Siepmann, N. A. Peppas, “Modeling of drug release from delivery systems based on hydroxypropylmethylcellulose (HPMC)”, *Advanced Drug Delivery Reviews*, **48** (2001), 139–157. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0169-409x\(01\)00112-0](https://doi.org/10.1016/s0169-409x(01)00112-0)

13. A. O. Syromyasov, A. S. Shurshina, D. V. Galkin, “[Model of diffusion of medicine that is bonded inside an organic film]”, [*Mathematical modeling, numerical methods and software complexes named after E. V. Voskresensky*], Proceedings of the VIII International Scientific Youth School-Seminar (Saransk, 2018), 150–155 (In Russ.).
14. A. O. Syromyasov, A. S. Shurshina, D. V. Galkin, “[Diffusion of partly bonded medium from chitosan film with constant characteristics]”, *Vestnik Bashkirskogo universiteta*, **23**:4 (2018), 1100–1104 (In Russ.).
15. D. Hömberg, S. Lu, M. Yamamoto, “Uniqueness for an inverse problem for a nonlinear parabolic system with an integral term by one-point Dirichlet data”, *Journal of Differential Equations*, **266**:11 (2019), 7525–7544. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jde.2018.12.004>
16. Y. Y. Chen, J. I. Frankel, M. Keyhani, “A new front surface heat flux calibration for a 1-D nonlinear thermal system with a time-varying back boundary condition”, *Journal of Engineering Mathematics*, **105** (2017), 157–187. DOI: <https://doi.org/10.1007/S10665-016-9888-0>
17. A. F. Albu, V. I. Zubov, “Identification of thermal conductivity coefficient using a given temperature field”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **58**:10 (2018), 1585–1599. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542518100032>
18. I. V. Boikov, V. A. Ryazantsev, “[On the approximate method for determination of heat conduction coefficient]”, *Zhurnal SVMO*, **21**:2 (2019), 149–161 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201902.149-163>
19. S. I. Kabanikhin, M. A. Shishlenin, “[Recovering time-dependent coefficients in dynamical inverse problems from nonlocal data]”, *Marchukovskiye Nauchnyye Chteniya – 2017*], Proceedings of International Scientific Conference, Novosibirsk, 2017, 364–369 (in Russ.).
20. T. V. Smotrina, “[State of water and relaxation processes in chitosan films]”, *Butlerovskiye Soobshcheniya*, **29**:2 (2012), 98–101 (In Russ.).

Submitted 25.02.2022; Revised 1.04.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.24.202202.215-227

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.633, 51-73

Численное исследование влияния поверхностной рекомбинации на нелинейные и фазовые искажения, возникающие при восстановлении формы оптического сигнала**В. Я. Гришаев, С. М. Мурюмин, Е. В. Никишин***ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)*

Аннотация. В работе проведено численное исследование кинетики фотопроводимости резистора при однородной генерации электронов и дырок по толщине. Расчеты проведены для полупроводника n -типа. Рассмотрены случаи линейной и квадратичной объемной рекомбинации. Математическая модель представлена в виде нелинейного уравнения параболического типа. К нелинейности уравнения приводит квадратичная рекомбинация. Использование граничных условий 3-го рода позволяет учесть поверхностную рекомбинацию неравновесных носителей заряда. Это явление приводит к необходимости учета диффузионного члена при записи кинетических уравнений, описывающих распределение электронов и дырок. Модель пренебрегает объемным зарядом. Показана возможность использования операции интегрирования фототока, протекающего через резистор, для получения зависимости интенсивности света от времени при малых длительностях оптического импульса: $T < \max(\tau_n, \tau_p)$. Здесь T – длительность импульса, τ_n и τ_p – время жизни электронов и дырок соответственно. Нелинейные искажения в этом случае связаны в основном с появлением второй и третьей гармоник разложения в ряд Фурье функции, определяющей зависимость фототока от времени. Для «восстановления» оптического импульса также можно использовать операцию дифференцирования фототока. Нелинейные и фазовые искажения малы при выполнении условия $T < \max(\tau_n, \tau_p)$. Предложенные способы позволяют расширить область длительностей оптического импульса (T), в которой возможно его «восстановление». В окрестности области, определяемой равенством $T \approx \max(\tau_n, \tau_p)$, существенны нелинейные и фазовые искажения.

Ключевые слова: математическая модель, нелинейное уравнение параболического типа, механизмы рекомбинации, кинетика фотопроводимости, нелинейные искажения, частотные искажения, фазовые искажения, восстановление импульса

Для цитирования: Гришаев В. Я., Мурюмин С. М., Никишин Е. В. Численное исследование влияния поверхностной рекомбинации на нелинейные и фазовые искажения, возникающие при восстановлении формы оптического сигнала // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 2. С. 215–227. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.215-227>

© В. Я. Гришаев, С. М. Мурюмин, Е. В. Никишин



Об авторах:

Гришаев Владимир Яковлевич, доцент кафедры экспериментальной и теоретической физики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5009-0222>, grishaev53@mail.ru
Мурюмин Сергей Михайлович, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2965-7500>, muryuminsm@yandex.ru

Никишин Евгений Васильевич, доцент кафедры экспериментальной и теоретической физики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8370-1790>, nikishin57@mail.ru

Original article

MSC2020 35K20

Numerical study of the effect of surface recombination on nonlinear and phase distortions arising during the restoration of the optical signal shape

V. Y. Grishaev, S. M. Muryumin, E. V. Nikishin

Ogarev Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. The photoconductivity kinetics of a resistor with homogeneous generation of electrons and holes in thickness is investigated. Calculations are carried out for an n -type semiconductor. The cases of linear and quadratic volumetric recombination are considered. The mathematical model of the process includes a non-linear parabolic partial differential equation. The cause of its non-linearity is quadratic recombination. Boundary conditions of the 3rd kind are used, thus allowing to examine the surface recombination of nonequilibrium charge carriers. This latter phenomenon makes it necessary to take into account the diffusion term when writing kinetic equations describing the distribution of electrons and holes. The model neglects the volumetric charge. In described circumstances it is possible to use the integration of the photocurrent flowing through the resistor to obtain the dependence of the light intensity on time for small optical pulse durations: $T < \max(\tau_n, \tau_p)$. Here T is the pulse duration, τ_n and τ_p are the lifetimes of electrons and holes, respectively. Nonlinear distortions in this case are mainly associated with the appearance of the second and the third harmonics of the Fourier series expansion of the function that determines the photocurrent dependence on time. To "restore" the optical pulse, the operation of differentiating the photocurrent can be used. Nonlinear and phase distortions are small when the condition $T < \max(\tau_n, \tau_p)$ is met. Proposed methods make it possible to expand the range of optical pulse durations (T) in which its "recovery" is possible. In the vicinity of the region defined by the equality $T \approx \max(\tau_n, \tau_p)$, nonlinear and phase distortions are significant.

Keywords: mathematical model, non-linear parabolic equation, recombination mechanisms, kinetics of photoconductivity, nonlinear distortions, frequency distortions, phase distortions, pulse recovery

For citation: V. Y. Grishaev, S. M. Muryumina, E. V. Nikishin. Numerical study of the effect of surface recombination on nonlinear and phase distortions arising during the restoration of the optical signal shape. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 24:2 (2022), 215–227. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202202.215-227>

About the authors:

Vladimir Y. Grishaev, Associate Professor, Department of Experimental and Theoretical Physics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5009-0222>, grishaev53@mail.ru

Sergey M. Muryumina, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2965-7500>, muryuminsm@yandex.ru

Evgeny V. Nikishin, Associate Professor, Department of Experimental and Theoretical Physics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8370-1790>, nikishin57@mail.ru

1. Введение

Наличие инерционности у фоторезисторов приводит к тому, что зависимость интенсивности возбуждающего света от времени $I(t)$ может существенно отличаться от временной зависимости фототока $j(t)$. Теряется информация, заложенная в оптическом импульсе. Если длительность импульса (T) порядка или меньше времени жизни основных носителей заряда, то ток, протекающий в резисторе в момент времени t , пропорционален энергии излучения, поглощенной им за это время [1]. Это обусловлено тем, что темп генерации неравновесных носителей заряда в этом случае значительно больше скорости рекомбинации. В работах [2–3] предложен метод, позволяющий «восстановить» временную зависимость интенсивности оптических импульсов $I(\omega t)$, периодически изменяющейся с частотой ω , по временной зависимости фототока путем дифференцирования последнего. Показана справедливость формулы $I(\omega t) \approx C_0 + Cdj(\omega t)/dt$, где $C_0 = const$, $C = const$. Приведенное соотношение справедливо, если выполняется неравенство $\omega > 1/\max(\tau_n, \tau_p)$. Здесь τ_n, τ_p – время жизни электронов и дырок соответственно.

Использование полупроводниковых пластин малой толщины при изготовлении резисторов, приводит к необходимости учитывать вклад поверхностной рекомбинации в фотопроводимость. Различного рода неоднородности кристалла, например, градиенты концентраций рекомбинационных центров и адсорбированных атомов вблизи поверхностей, дискретные уровни Тамма приводят к появлению диффузионных потоков неравновесных носителей заряда к границам фоторезистора с их последующей рекомбинацией на этих неоднородностях [4–8]. Дополнительный канал рекомбинации изменит функцию, описывающую скорость рекомбинации неравновесных носителей заряда, что приведет к уменьшению времени их жизни. В предложенной работе теоретически исследована возможность использования фоторезистора для получения зависимости интенсивности импульса света, от времени, по электрическому отклику при наличии диффузии носителей заряда и поверхностной рекомбинации. Входная величина – интенсивность света, выходная – фототок. Определены условия, при которых зависимость

интенсивности света от времени пропорциональна зависимости фототока от времени

$$I(t) \propto j(t) \quad (1.1)$$

и условия, где справедливо соотношение:

$$I(t) \propto \frac{dj(t)}{dt}. \quad (1.2)$$

Возможность использования соотношений (1.1) или (1.2) определяется величиной нелинейных и фазовых искажений, которые в свою очередь зависят от длительности импульса, механизмов рекомбинации носителей заряда в объеме полупроводника и поверхностной рекомбинацией. Также исследован способ восстановления, основанный на нахождении коэффициентов, полученных при разложении фототока в ряд Фурье.

2. Математическая модель и вычислительный алгоритм

В основе проведенного анализа лежит общепринятая модель фотопроводимости в монокристаллах, представленная системой нелинейных дифференциальных уравнений [5]. При составлении уравнений, описывающих кинетику фотопроводимости, учитывались линейные размеры фоторезистора, диффузия к поверхностям, темп генерации и темп рекомбинации носителей заряда. Расчеты проведены для полупроводника n -типа.

Изменение концентрации электронов n по толщине полупроводника с течением времени в отсутствие объемного заряда описывается уравнениями непрерывности:

$$\frac{\partial n(x, t)}{\partial t} = g_n(x, t) - R_n(x, t) + D_n \frac{\partial^2 n(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq d, \quad t > 0. \quad (2.1)$$

Здесь g_n – темп генерации электронов; D_n – коэффициент диффузии электронов; R_n – скорость рекомбинации электронов; d – толщина фоточувствительного слоя. В общем случае уравнение (2.1) – нелинейное уравнение параболического типа в частных производных. Оно включает в себя тот же диффузионный член, что и уравнение теплопроводности, но также включает член роста $g_n(x, t)$ и член распада $R_n(x, t)$. Нами рассмотрены случаи линейного $R_n = (n - n_0)/\tau_n$ и нелинейного члена распада $R_n = \alpha(n - n_0)^2$. При расчетах использовалось значение коэффициента диффузии электронов, характерное для кристаллического кремния ($32 \text{ см}^2/\text{с}$).

Исследован случай межзонной генерации неравновесных носителей заряда светом в объеме полупроводника. Темп генерации основных носителей заряда связан с плотностью потока световых квантов Φ_0 соотношением $g_n = g_p = \alpha\beta(1 - R)\Phi_0 e^{-\alpha x}$. Здесь α – коэффициент поглощения; β – квантовый выход; R – коэффициент отражения. Для случая однородной генерации, когда $\alpha d \ll 1$, $e^{-\alpha x} \approx 1$. Интенсивность пропорциональна плотности потока световых квантов. Следовательно, темп генерации пропорционален интенсивности падающего света. В частности, для монохроматического света $g_n = g_p = k\beta(1 - R)I/h\nu$.

Поскольку поверхность полупроводника является дополнительным источником рекомбинации носителей заряда, то краевые условия записывались через коэффициенты поверхностной рекомбинации S_0 и S_d и диффузию электронов к границам [4], т. е. используются граничные условия третьего рода:

$$D_n \frac{dn(0,t)}{dx} = S_0 n(0,t), \quad x=0, \quad t>0, \quad (2.2)$$

$$D_n \frac{dn(d,t)}{dx} = -S_d n(d,t), \quad x=d, \quad t>0. \quad (2.3)$$

Запишем начальные условия, используя равновесное значение концентрации электронов n_0 :

$$n(x,0) = n_0. \quad (2.4)$$

Зависимости фототока от времени рассчитывались по формуле:

$$j(t) = \frac{e}{d} \int_0^d \mu_n n(x,t) E dx. \quad (2.5)$$

Вкладом дырочной проводимости в величину фототока для полупроводника n -типа можно пренебречь.

Зависимость интенсивности одиночного импульса света от времени, падающего на фоторезистор, записывалась в виде:

$$I(t) = I_0 \left(1 - \cos \left(2\pi \frac{t}{T} \right) \right) \quad \text{при } 0 \leq t \leq T; \quad I(t) = 0 \quad \text{при } t > T. \quad (2.6)$$

При численном моделировании для определения зависимости $n = n(x,t)$ используется явная конечно-разностная схема [9]:

$$\frac{n_j^{k+1} - n_j^k}{\tau} = g_j^k - R_n(n_j^k) + a^2 \frac{n_{j+1}^k - 2n_j^k + n_{j-1}^k}{h^2} + O(\tau + h^2), \quad (2.7)$$

$$g_j^k = g(x_j, t^k), \quad a^2 = D_n, \quad j = 1, \dots, N-1, \quad k = 0, \dots, K-1. \quad (2.8)$$

Для аппроксимации граничных условий вторым порядком без увеличения граничных узлов используется представленная ниже конечно-разностная схема:

$$a^2 \frac{n_1^{k+1} - n_0^{k+1}}{h} = S_0 n_0^{k+1} + \frac{h S_0}{2} n_0^{k+1} + O(h^2),$$

$$a^2 \frac{n_N^{k+1} - n_{N-1}^{k+1}}{h} = -S_d n_N^{k+1} - \frac{h S_d}{2} n_N^{k+1} + O(h^2).$$

Начальные условия

$$n_0^{k+1} = n_0.$$

Использованы значения $N = 100$, шаг сетки по переменной x равен $h = d/N$. Шаг по времени при толщине фоточувствительного слоя, толщина которого d , рассчитывался по формуле $\tau = h^2/6a^2$. Тогда $K = T/\tau$.

Численные значения n_j^k позволили получить значения плотности тока $j^k = j(t^k)$, где $t^k = \tau k$. Для интегрирования уравнения (2.5) использовался метод трапеций. В следующих разделах приведены результаты расчетов нелинейных и фазовых искажений, возникающих при восстановлении формы оптического импульса.

3. Влияние величины поверхностной рекомбинации на нелинейные искажения

Ниже рассмотрен случай линейной рекомбинации электронов. На Рис. 3.1 представлены результаты численных расчетов коэффициента нелинейных искажений импульса тока, протекающего через фоторезистор при освещении импульсом света, переменная составляющая интенсивности которого меняется по гармоническому закону (2.6).

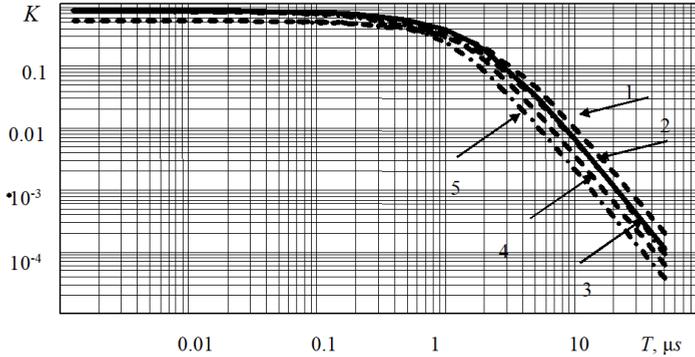


Рис. 3.1. Зависимость коэффициента нелинейных искажений от длительности импульса: $d = 100$ мкм, $\tau_n = 0.40$ мкс; 1) $S_{01} = S_{d1} = 0$ см/с; 2) $S_{02} = S_{d2} = 10^3$ см/с; 3) $S_{03} = S_{d3} = 3 \cdot 10^3$ см/с; 4) $S_{04} = S_{d4} = 1.5 \cdot 10^4$ см/с; 5) $S_{05} = S_{d5} = 5 \cdot 10^4$ см/с

Fig 3.1. Dependence of the coefficient of nonlinear distortion on the pulse duration: $d = 100$ μm , $\tau_n = 0.40$ μs ; 1) $S_{01} = S_{d1} = 0$ cm/s; 2) $S_{02} = S_{d2} = 10^3$ cm/s; 3) $S_{03} = S_{d3} = 3 \cdot 10^3$ cm/s; 4) $S_{04} = S_{d4} = 1.5 \cdot 10^4$ cm/s; 5) $S_{05} = S_{d5} = 5 \cdot 10^4$ cm/s

Коэффициент нелинейных искажений позволяет количественно оценить отклонение зависимости фототока от гармонического закона. Он рассчитывался по формулам:

$$K = \frac{1}{|c_1|} \sqrt{\sum_m |c_m|^2}, \quad c_m = \frac{1}{T} \int_0^T j(\tau) e^{-im\omega\tau} d\tau. \quad (3.1)$$

Здесь $m = 2, 3, \dots$ – номер гармоник. При расчетах использовались зависимости $j = j(t)$ ($j^k = j(t^k)$), полученные при решении уравнения (2.1).

При выполнении неравенства $T \gg \tau_n$ искажения малы. Фототок отслеживает изменение интенсивности света от времени. Справедливо соотношение (1.1). Фоторезистор в этом случае можно использовать для определения зависимости интенсивности света от времени. Искажения велики при длительностях импульсов сравнимых и меньших времени жизни основных носителей заряда. При этом функции, описывающие зависимости $I = I(t)$ и $j = j(t)$, существенно отличаются. Увеличение коэффициента поверхностной рекомбинации S сдвигает кривую зависимости $K = K(T)$ в сторону меньших длительностей.

На Рис. 3.2 – 3.3 приведены кривые зависимости коэффициента нелинейных искажений, от длительности возбуждающего фоторезистор импульса при различных значениях коэффициентов поверхностной рекомбинации.

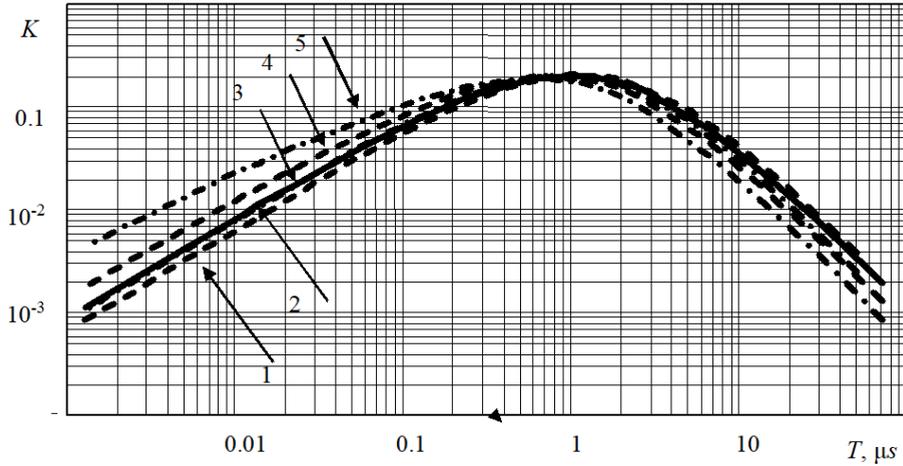


Рис. 3.2. Зависимость коэффициента нелинейных искажений от длительности импульса: $d = 100 \text{ мкм}$, $\tau_n = 0.40 \text{ мкс}$; 1) $S_{01} = S_{d1} = 0 \text{ см/с}$; 2) $S_{02} = S_{d2} = 10^3 \text{ см/с}$; 3) $S_{03} = S_{d3} = 3 \cdot 10^3 \text{ см/с}$; 4) $S_{04} = S_{d4} = 1.5 \cdot 10^4 \text{ см/с}$; 5) $S_{05} = S_{d5} = 5 \cdot 10^4 \text{ см/с}$

Fig 3.2. Dependence of the coefficient of nonlinear distortion on the pulse duration: $d = 100 \text{ }\mu\text{m}$, $\tau_n = 0.40 \text{ }\mu\text{s}$; 1) $S_{01} = S_{d1} = 0 \text{ cm/s}$; 2) $S_{02} = S_{d2} = 10^3 \text{ cm/s}$; 3) $S_{03} = S_{d3} = 3 \cdot 10^3 \text{ cm/s}$; 4) $S_{04} = S_{d4} = 1.5 \cdot 10^4 \text{ cm/s}$; 5) $S_{05} = S_{d5} = 5 \cdot 10^4 \text{ cm/s}$

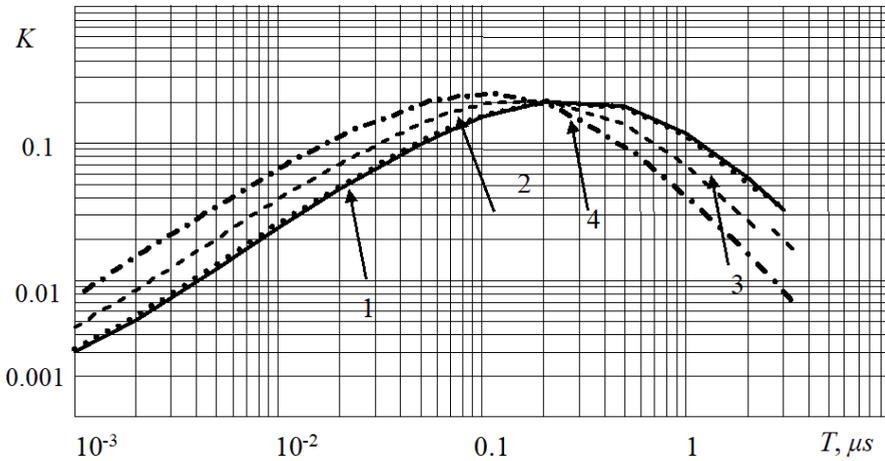


Рис. 3.3. Зависимость коэффициента нелинейных искажений от длительности импульса возбуждения: $d = 10 \text{ мкм}$, $\tau_n = 0.40 \text{ мкс}$; 1) $S_{01} = S_{d1} = 30 \text{ см/с}$; 2) $S_{02} = S_{d2} = 300 \text{ см/с}$; 3) $S_{03} = S_{d3} = 3000 \text{ см/с}$; 4) $S_{04} = S_{d4} = 9000 \text{ см/с}$

Fig 3.3. Dependence of the coefficient of nonlinear distortion on the pulse duration: $d = 10 \text{ }\mu\text{m}$, $\tau_n = 0.40 \text{ }\mu\text{s}$; 1) $S_{01} = S_{d1} = 30 \text{ cm/s}$; 2) $S_{02} = S_{d2} = 300 \text{ cm/s}$; 3) $S_{03} = S_{d3} = 3000 \text{ cm/s}$; 4) $S_{04} = S_{d4} = 9000 \text{ cm/s}$

Расчеты проведены для импульса, «восстановленного» по соотношению (1.2). Коэффициент нелинейных искажений определялся по формулам [3]:

$$K = \frac{1}{|c_1|} \sqrt{\sum_m |c_m|^2}, \quad c_m = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{dj(t)}{dt} e^{-im\omega\tau} d\tau. \quad (3.2)$$

При расчетах производной использовались зависимости $j = j(t)$ ($j^k = j(t^k)$), полученные при решении уравнения (2.1). При интегрировании использовался метод трапеций.

Нелинейными искажениями можно пренебречь как в области малых длительностей, когда $T < \tau_n$, так и в области больших длительностей импульса света, когда $T > \tau_n$.

Малые значения нелинейных искажений при выполнении условия $T < \tau_n$ связаны с малыми скоростями рекомбинации электронов, как в объеме, так и на поверхности полупроводника по сравнению с темпом их генерации. Концентрация электронов и, следовательно, фототок растут пропорционально интегралу от скорости генерации. В этом случае производная от фототока с точностью до постоянного множителя равна темпу генерации, а значит, и интенсивности света. Выше было показано, что при выполнении неравенства $T > \tau_n$, зависимость фототока от времени совпадает с зависимостью интенсивности света от времени. Поскольку переменная составляющая интенсивности света и, следовательно, фототока описывается гармонической функцией, производная от фототока также будет гармонической функцией. Этим объясняется малость коэффициента нелинейных искажений в области больших ($T > \tau_n$) длительностей светового импульса при линейном законе рекомбинации. При взятии производной появится фазовый сдвиг, равный $\pi/2$, между фототоком и «восстановленным» импульсом интенсивности, для которого введем обозначение $I^*(t)$. Расчеты показывают, что поверхностную рекомбинацию можно интерпретировать как дополнительный канал с линейным законом рекомбинации.

На кривых $K = K(T)$ наблюдается область длительностей импульсов, где нелинейные искажения значительны. Максимум находится вблизи $T \approx \tau_n$. Увеличение коэффициентов поверхностной рекомбинации приводит к сдвигу максимума функции $K = K(T)$ в сторону меньших длительностей импульсов, т. к. дополнительный рекомбинационный канал уменьшает эффективное время жизни электронов. При линейном законе рекомбинации коэффициент нелинейных искажений не зависит от интенсивности падающего света.

4. Влияние величины поверхностной рекомбинации на фазовые искажения

На Рис. 4.1 приведены зависимости сдвига фаз ϕ между оптическим гармоническим импульсом $I(t)$ и импульсом, восстановленным путем дифференцирования фототока $I^*(t)$. Величина ϕ определялась по соотношению $\phi = 2\pi(t_{max}^* - t_{max})/T$. Здесь t_{max}^* и t_{max} – моменты времени, когда восстановленный импульс $I^*(t)$ и импульс интенсивности $I(t)$ принимают максимальные значения. Для функции $I(t)$, представленной уравнением (2.6), $t_{max} = T/2$. Для определения t_{max}^* в массиве производной по времени $\left. \frac{dj}{dt} \right|_k$ находился максимум и соответствующее ему значение $k = s$. Тогда $t_{max}^* = s\tau$.

Восстановленные импульсы опережают по фазе импульсы интенсивности света. Сдвиг фаз ϕ зависит от длительности оптического импульса, изменяющегося по гармоническому закону $\phi = \phi(T)$. Из-за неодинакового сдвига фаз отдельных гармонических

составляющих оптического импульса произвольной формы и соответствующих им составляющих импульса, полученного путем дифференцирования фототока, последний будет отличаться от импульса интенсивности. Возникнут фазовые искажения.

При больших длительностях импульса ($T > \tau_n$) фазовые искажения «восстановленных» импульсов значительны и приближаются к $\phi = \pi/2$. При $T \ll \tau_n$ величина ϕ мала (Рис. 4.1).

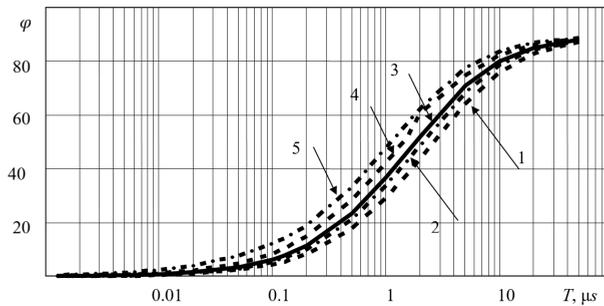


Рис. 4.1. Зависимость фазовых искажений от длительности импульса:
 $d = 100 \text{ мкм}$, $\tau_n = 0.40 \text{ мкс}$; 1) $S_{01} = S_{d1} = 0 \text{ см/с}$; 2) $S_{02} = S_{d2} = 10^3 \text{ см/с}$;
 3) $S_{03} = S_{d3} = 3 \cdot 10^3 \text{ см/с}$; 4) $S_{04} = S_{d4} = 1.5 \cdot 10^4 \text{ см/с}$; 5) $S_{05} = S_{d5} = 5 \cdot 10^4 \text{ см/с}$
Fig 4.1. Dependence of the coefficient of nonlinear distortion on the pulse duration:
 $d = 100 \text{ }\mu\text{m}$, $\tau_n = 0.40 \text{ }\mu\text{s}$; 1) $S_{01} = S_{d1} = 0 \text{ cm/s}$; 2) $S_{02} = S_{d2} = 10^3 \text{ cm/s}$;
 3) $S_{03} = S_{d3} = 3 \cdot 10^3 \text{ cm/s}$; 4) $S_{04} = S_{d4} = 1.5 \cdot 10^4 \text{ cm/s}$;
 5) $S_{05} = S_{d5} = 5 \cdot 10^4 \text{ cm/s}$

Уменьшение длительности импульса приводит к монотонному уменьшению сдвига фаз. Если для первой гармоники разложения в ряд Фурье импульса произвольной формы сдвиг фаз между оптическим гармоническим импульсом $I(t)$ и восстановленным импульсом $I^*(t)$ мал, то фазовыми искажениями при восстановлении импульса можно пренебречь. Анализ полученных результатов позволяет утверждать, что уменьшение толщины образцов и/или увеличение поверхностной рекомбинации приводит к увеличению фазовых искажений при прочих равных условиях.

5. Использование метода интегрирования для «восстановления» формы оптического импульса

Операция дифференцирования может приводить к существенным искажениям, если переменная составляющая зависимости интенсивности от времени описывается быстро изменяющейся или быстро осциллирующей функцией. Примерами таких функций являются интегральная показательная функция, интегральный синус, интегральный логарифм, гамма-функция и др. [10]. Для получения зависимости интенсивности света от времени в этом случае можно использовать метод интегрирования, основанный на получении коэффициентов разложения функции $j(t)$ в ряд Фурье. Способы интегрирования таких функций хорошо разработаны.

Функция $j(t)$ определена в области $0 \leq t \leq T$. Доопределим ее на отрезке $-T \leq t \leq 0$ четным образом. В этом случае ряд Фурье функции $j(t)$ на интервале $-T \leq t \leq T$ имеет вид:

$$j(t) = c_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [a_k \cos(k\pi t/T)]. \quad (5.1)$$

Коэффициенты разложения:

$$c_0 = \frac{2}{T} \int_0^T j(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T j(t) \cos(k\pi t/T) dt. \quad (5.2)$$

Производная тока по времени при $T < \tau_n$ дает зависимость интенсивности от времени с точностью до постоянного множителя (соотношение 2). Для $I^*(t)$ будет справедливо соотношение:

$$I^*(t) = C \frac{dj(t)}{dt} = C \sum_{k=0}^{\infty} b_k^* \sin(k\pi t/T). \quad (5.3)$$

Здесь введено обозначение:

$$b_k^*(t) = -\frac{2\pi k}{T^2} \int_0^T j(t) \cos(k\pi t/T) dt. \quad (5.4)$$

Выражения (5.3) – (5.4) позволяют найти функцию $I^*(t)$ на интервале $0 \leq t \leq T$. Функция представлена рядом Фурье, полученным на основе имеющейся функции $j(t)$, заданной на интервале $0 \leq t \leq T$ и доопределенной четным образом.

Для нахождения нелинейных искажений используем соотношение:

$$K = \frac{1}{|b_1^*|} \sqrt{\sum_i |b_k^*|^2}. \quad (5.5)$$

В таблице 5.1 представлены результаты расчетов амплитуд гармоник b_k^* и c_k восстановленного импульса при линейном законе рекомбинации $R_n = \Delta n / \tau_n$ ($\tau_n = 0.40$ мкс).

Таблица 5.1. Коэффициенты Фурье при линейном законе рекомбинации
Table 5.1. Fourier coefficients for a linear recombination law

	T , мкс	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
Метод дифференцирования	0.20	0.918	0.067	0.045	0.033	0.027	0.022	0.019
	0.04	0.973	0.018	0.012	0.009	0.007	0.006	0.005
		b_1^*	b_2^*	b_3^*	b_4^*	b_5^*	b_6^*	b_7^*
Метод интегрирования	0.20	0.782	0.071	-0.084	0.010	-0.012	0.005	-0.005
	0.04	0.830	0.015	-0.062	0.002	-0.006	0.001	-0.002

Толщина фоточувствительной области резистора $d = 10$ мкм, коэффициенты поверхностной рекомбинации $S_0 = S_d = 3000$ см/с. При численных расчетах гармоник восстановленная функция $I^*(t)$ была нормирована на 1, т. е. $\max I^*(t) = 1$. При выполнении условия $T < \tau_n$ восстановленный по соотношению (5.3) импульс содержит три первые, ярко выраженные гармоники (таблица 5.1). Величины второй и третьей гармоник, следовательно, и коэффициент нелинейных искажений, уменьшаются с уменьшением T . При $T = 0.2$ мкс и учете как 50, так и 5 гармоник $K = 0.142$. При $T = 0.04$ мкс

и учете 50 гармоник $K = 0.078$, при учете 5 гармоник $K = 0.077$. Для сравнения величин коэффициента нелинейных искажений в таблице 5.1 представлены амплитуды гармоник c_k импульса, восстановленного путем дифференцирования. Коэффициенты Фурье c_k и коэффициент нелинейных искажений K рассчитывались по формулам (3.2). При $T = 0.2$ мкс и учете 50 гармоник $K = 0.115$, при учете 5 гармоник $K = 0.099$. При $T = 0.04$ мкс и учете 50 гармоник $K = 0.03$, при учете 5 гармоник $K = 0.026$.

Для квадратичного закона рекомбинации $R_n = \alpha \Delta n^2$ при выполнении условия $T < \tau_n$ для восстановления зависимости интенсивности света от времени также можно использовать и метод дифференцирования, и метод интегрирования. Результаты расчета представлены в таблице 5.2.

Таблица 5.2. Коэффициенты Фурье при квадратичном законе рекомбинации
Table 5.2. Fourier coefficients for the quadratic recombination law

	T , мкс	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
Метод дифференцирования	0.20	0.924	0.067	0.047	0.035	0.028	0.023	0.020
	0.04	0.987	0.009	0.006	0.004	0.004	0.003	0.002
		b_1^*	b_2^*	b_3^*	b_4^*	b_5^*	b_6^*	b_7^*
Метод интегрирования	0.20	0.755	0.088	-0.09	0.010	-0.012	0.005	-0.005
	0.04	0.837	0.007	-0.059	0.001	-0.005	0.0004	-0.001

При расчетах использовано значение $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ см}^3 \text{ с}^{-1}$. Восстановленный методом интегрирования импульс, как и при линейном законе рекомбинации, содержит три первых ярко выраженных гармоники. При $T = 0.2$ мкс и учете 50 гармоник $K = 0.169$, при учете 5 гармоник $K = 0.168$. При $T = 0.04$ мкс и учете 50 гармоник $K = 0.071$, при учете 5 гармоник $K = 0.071$. Для импульса, восстановленного путем дифференцирования, при $T = 0.2$ мкс и учете 50 гармоник $K = 0.118$, при учете 5 гармоник $K = 0.10$. При $T = 0.04$ мкс и учете 50 гармоник $K = 0.014$, при учете 5 гармоник $K = 0.012$. Таким образом, для определения формы оптического импульса операцию дифференцирования можно заменить операцией интегрирования. Операция интегрирования предъявляет менее жесткие требования к определению экспериментальной зависимости фототока от времени. Искажения связаны в основном с появлением в восстановленном импульсе второй и третьей гармоник.

6. Заключение

В настоящей работе построен вычислительный алгоритм и проведено исследование на основе построенного алгоритма кинетики фотопроводимости резистора при однородной генерации электронов и дырок по толщине. В результате исследования было выявлено, что зависимость интенсивности возбуждающего света от времени и фототока от времени существенно отличаются, если длительность импульса меньше времени жизни основных носителей заряда $T < \max(\tau_n, \tau_p)$. В области малых длительностей импульсов $T < \max(\tau_n, \tau_p)$ можно восстановить временную форму оптического импульса, применяя как операцию дифференцирования, так и операцию интегрирования. В обоих случаях необходимо знать зависимость фототока от времени. Вблизи области, определяемой равенством $T \approx \max(\tau_n, \tau_p)$, существенны нелинейные искажения. Теоретические результаты можно отнести к фоторезисторам с толщиной фоточувствительного

слоя 10 – 100 мкм. Влияние диффузии носителей заряда к поверхностям фоторезистора, с последующей их рекомбинацией, можно интерпретировать как дополнительный канал с линейным законом рекомбинации, приводящий к уменьшению времен жизни электронов и дырок. Следствие этого – смещение максимума функции $K = K(T)$ в сторону меньших значений T .

Предложенные способы можно применять для восстановления зависимости от времени функции $\phi(t)$, воздействующей на систему по отклику системы, который описывается некоторой изменяющейся переменной $f_j(t)$, характеризующей систему. Методы восстановления справедливы для импульсов малой длительности $T < \tau_s$ (τ_s – время релаксации).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мхитарян В. М., Партамян Х. В. Скоростные фотоприемники импульсного излучения на основе «инерционных» фоторезисторов и фотодиодов // Журнал технической физики. 1982. Т. 52. № 9. С. 1900–1902.
2. Никишин Е. В., Пескова Е. Е. Нелинейные искажения, возникающие при восстановлении высокочастотных оптических импульсов // Журнал радиоэлектроники: электронный журнал. 2015. № 9. С. 1–11.
3. Никишин Е. В., Гришаев В. Я., Мурюмин С. М. О влиянии интенсивности света на границы применимости способа восстановления модулированных оптических сигналов // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21. № 3. С. 363–372. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201903.363-371>
4. Блекмор Дж. Статистика электронов в полупроводниках. М.: Мир, 1964. 346 с.
5. Милнс А. Примеси с глубокими уровнями в полупроводниках. М.: Мир, 1977. 568 с.
6. Холоднов В. А. Влияние концентрации рекомбинационных центров на фотоэлектрический отклик полупроводников // Успехи прикладной физики. 2015. Т. 3, №3. С. 254–280.
7. Яшин А. Н. Применимость упрощенной модели Шокли - Рида - Холла для полупроводников с различными видами дефектов // Физика и техника полупроводников. 2005. Т. 35, № 11. С. 1332–1335.
8. Lang D. V., Grimmeiss H. G., Meijer E., Jaros M. Complex nature of goldrelated deep levels in silicon // Phys. Rev. 1980. Vol. 22. pp. 3917–3925.
9. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1983. 616 с.
10. Корн Г. К., Корн Т. К. Справочник по математике. М.: Наука, 2014. 832 с.

*Поступила 14.02.2022; доработана после рецензирования 1.04.2022;
принята к публикации 25.05.2022*

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

REFERENCES

1. V. M. Mekhitarian, H. V. Partamyan, “High-speed photodetectors of pulsed radiation based on "inertial" photoresistors and photodiodes”, *Soviet Physics: Technical Physics*, **52**:9 (1982), 1900–1902.
2. E. V. Nikishin, E. E. Peskova, “Nonlinear distortion arising from the restoration of high-frequency optical excitation”, *Journal of Radio Electronics*, **9** (2015), 1–11 (In Russ.).
3. E. V. Nikishin, V. Y. Grishaev, S. M. Muryumin, “On the influence of light intensity on the limits of applicability of modulated optical signals recovery method”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **21**:3 (2019), 363–372 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201903.363-371>
4. J. S. Blakemore, [*Semiconductor Statistics*], Honeywell Research Center, Hopkins, Minnesota, 1962, 392 p.
5. A. Milnes, [*Deep Impurities in Semiconductors*], Wiley-Interscience, New York, 1973, 568 p.
6. V. A. Kholodnov, “Character of the influence of the concentration of recombination centers on the photoelectric response of semiconductors at interband photogeneration of carriers and their recombination through impurities”, *Advances in Applied Physics*, **3**:3 (2015), 254–280 (In Russ.).
7. A. N. Yashin, “Applikability of a simplified Shokli-Ried-Hall model to semiconductors with various types of defects”, *Semiconductors*, **39**:11 (2005), 1285–1289.
8. D. V. Lang, H. G. Grimmeiss, E. Meijer, M. Jaros, “Complex nature of goldrelated deep levels in silicon”, *Phys. Rev.*, **22** (1980), 3917–3925.
9. A. A. Samarsky, *Theory of difference schemes*, Nauka Publ, Moscow, 1987, 616 p.
10. G. A. Korn, T. M. Korn, *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*, Dover, New York, 2000, 1152 p.

Submitted 14.02.2022; Revised 1.04.2022; Accepted 25.05.2022

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 75-ЛЕТИЮ
ЮРИЯ НИКОЛАЕВИЧА ДЕРЮГИНА

Поздравляем члена редакционной коллегии журнала – доктора физико-математических наук, профессора, главного научного сотрудника Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (г. Саров, Россия) Юрия Николаевича Дерюгина с юбилеем. Желаем Юрию Николаевичу крепкого здоровья, семейного счастья и дальнейших творческих успехов!

*Редколлегия журнала,
Средне-Волжское математическое общество,
Коллектив Национального исследовательского
Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва*

К ЮБИЛЕЮ ОЛЬГИ ВИТАЛЬЕВНЫ ПОЧИНКИ



14 мая 2022 г. исполнилось 50 лет доктору физико-математических наук, известному специалисту в теории динамических систем Ольге Витальевне Починке.

Ольга Витальевна Починка (Кирсенко) родилась в 1972 г. в г. Горьком (в н. в. – Нижний Новгород). После окончания физико-математической школы (ныне лицей) № 40 в сентябре 1989 г. планировала поступать в Педагогический институт, но в последний момент подала документы в Горьковский (Нижегородский) госуниверситет им. Н. И. Лобачевского на механико-математический факультет по специальности «Математика» – единственную в тот период образовательную программу в университете, сочетающую математику и педагогическую.

Лекции по математическому анализу ей читал Н. И. Авдонин, а по дифференциальным уравнениям – М. В. Долов. О. В. Починка всегда интересовалась топологией больше, чем анализом, и её любимым преподавателем топологии была и остается – Н. И. Жукова. Специализировалась Ольга Витальевна на кафедре теории функций под руководством А. А. Рябинина; после окончания университета и до своего ухода в ВШЭ – Нижний Новгород работала в разных должностях в ННГУ им. Н. И. Лобачевского на кафедре теории функций, вела занятия по ТФКП, функциональному и математическому анализу.

В 1999 г. она случайно познакомилась с профессором В. З. Гринесом, одним из ярких представителей Нижегородской школы динамических систем, учеником Л. П. Шильникова и С. Х. Арансона, заинтересовалась тематикой его исследований, и случилось так, что в результате этой встречи началась ее основная научная деятельность. С тех пор В. З. Гринес стал ее научным руководителем и, как говорит сама Ольга Витальевна, Учителем.

В то время вокруг В. З. Гринеса, работавшего тогда зав. кафедрой высшей математики и теоретической механики Нижегородского сельскохозяйственного института (НГСХА), сформировалась группа математиков (А. Н. Сахаров, О. В. Починка, Е. Я. Гуревич, Е. А. Таланова, Е. В. Круглов, Т. М. Митрякова и др.) и впоследствии был организован семинар, проводимый на базе кафедры математики НГСХА и кафедры теории функций ННГУ (и к которому часто присоединялись такие известные специалисты, как С. Х. Арансон, Л. М. Лерман, Е. В. Жужома, М. И. Малкин, В. С. Медведев). В начале работы семинара Ольга Витальевна в течение года рассказывала книгу Ч. Коснёвского по алгебраической топологии. Подготовка к семинарам была весьма трудоёмкой, но и материал в её исполнении звучал очень интересно.

В 1999 г. В. З. Гринес в рамках научной командировки предпринял поездку в Бургундский университет (г. Дижон), куда его пригласил Р. Ланжевен и где он познако-

мился с Х. Бонатти. Научное сотрудничество с французскими математиками оказалось очень продуктивным, и продолжается по сей день. В этом сотрудничестве Ольга Витальевна очень быстро стала равноправным исследователем и соавтором совместных работ. Одним из результатов сотрудничества стала публикация около 20 статей в престижных изданиях. Основным направлением исследований явилась классификация 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла, для которых к тому времени уже был известен эффект дикого вложения сепаратрис седловых точек. Постепенное понимание динамики таких систем в различных частных случаях позволило получить исчерпывающее решение для общего случая. Результат почти двадцатилетних исследований был изложен в научной статье¹.

Параллельно с задачей классификации, русско-французским коллективом (куда, кроме Х. Бонатти, В. З. Гринеса и О. В. Починки, входят такие российские коллеги, как Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, и такие французские коллеги, как Ф. Лауденбах и Е. Пеку) изучались бифуркационные сценарии, позволяющие менять тип вложения седловых сепаратрис с ручного на дикий. Целый цикл работ посвящен построению энергетических функций для диффеоморфизмов, как с регулярной, так и с хаотической динамикой. Проблема существования таких функций для каскадов восходит к работам Ч. Конли, доказавшего «фундаментальную теорему динамических систем» о существовании непрерывной глобальной функции Ляпунова для любого потока или каскада.

17 июня 2004 г. О. В. Починка защитила кандидатскую диссертацию на тему «Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях». Кроме этого, В. З. Гринес привлек Ольгу Витальевну в качестве соавтора к написанию монографии «Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три», которая вышла в Ижевске в 2011 г., а впоследствии, в 2016 г., была издана на английском языке (в переводе Т. В. Медведева) издательством Springer. 22 декабря 2011 г. Ольга Витальевна защитила докторскую диссертацию на тему «Глобальная динамика диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях».

В настоящее время Ольга Витальевна является одним из ведущих математиков в области теории динамических систем, автором более 140 публикаций. Помимо этого, Ольга Витальевна не только руководит кафедрой фундаментальной математики в нижегородской «Вышке», но и является заведующей Международной лабораторией динамических систем и приложений.

В 2019 году Международная лаборатория топологических методов в динамике в нижегородском кампусе НИУ ВШЭ, которой руководит также Ольга Витальевна, получила первый в регионе мегагрант по математике. В 2021 г. Ольга Витальевна Починка была включена в обновленный состав экспертов Российской академии наук, в 2022 г. избрана президентом Нижегородского математического общества.

Ольга Витальевна – член редколлегий журналов «Динамические системы», «Regular and chaotic dynamics», «Журнал Средневожского математического общества». Она постоянно участвует (в качестве руководителя или исполнителя) в исследованиях по грантам РФФИ, Фонда развития теоретической физики и математики «Базис», Центра фундаментальных исследований НИУ ВШЭ. Сейчас у Ольги Витальевны много учеников, и недавно её первые аспиранты Е. В. Ноздринова и М. К. Барина (Носкова) защитили кандидатские диссертации. Готовятся к защите диссертации С. Х. Зининой

¹Bonatti C., Grines V., Pochinka O. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Duke Mathematical Journal. 2019. Vol. 168, No. 13. pp. 2507-2558.

(Капкаевой) и В. Е. Круглова.

С 2014 г. Ольга Витальевна, В. З. Гринес и М. К. Баринава посвятили свое внимание исследованию вопроса существования энергетических функций для A -диффеоморфизмов с гиперболической хаотической динамикой. Учеными было доказано существование таких функций для некоторых классов 2- и 3-диффеоморфизмов с базисными множествами коразмерности 1. Также был найден класс Ω -устойчивых диффеоморфизмов, имеющих нульмерные нетривиальные базисные множества без пар сопряженных точек и не обладающих энергетическими функциями.

В 2017–2021 гг. О. В. Починка и Е. В. Ноздринова получили классификацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности относительно отношения устойчивой изотопической связности, а именно, конструктивно доказали, что все грубые меняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности лежат в одной компоненте изотопической связности, тогда как компонента сохраняющего ориентацию преобразования полностью определяется числом вращения Пуанкаре. Также учеными было установлено, что сохраняющие ориентацию градиентно-подобные диффеоморфизмы двумерной сферы разбиваются на счетное множество компонент устойчивой изотопической связности, и было доказано, что любые диффеоморфизмы Палиса соединяются устойчивой дугой с конечным числом некритических седло-узловых бифуркаций, протекающих на дуге общим образом.

В совместных работах Ольги Витальевны и С. Х. Зининой введено понятие регулярных гомеоморфизмов и топологических потоков на топологических многообразиях. Для таких систем получено исчерпывающее описание поведения инвариантных многообразий цепных компонент. Также доказано, что для регулярного потока без периодических орбит, заданного на топологическом многообразии любой размерности, существует (непрерывная) энергетическая функция Морса. Этот результат получен в рамках построения непрерывной энергетической функции Морса-Ботта для произвольного непрерывного регулярного потока на топологическом многообразии. Установленные глобальные свойства регулярных гомеоморфизмов позволили получить полную топологическую классификацию некоторых классов таких гомеоморфизмов, имеющих классические гладкие аналоги, изученные в работах Е. А. Леонтович, А. Г. Майера, М. М. Пейшото, а именно, на языке трёхцветного графа с периодической подстановкой был описан полный топологический инвариант градиентно-подобных гомеоморфизмов поверхностей. При этом получено исчерпывающее описание множества допустимых графов и решена проблема реализации. Классифицированы также n -мерные декартовы произведения регулярных гомеоморфизмов окружности.

В совместных работах Ольги Витальевны и В. Е. Круглова установлен критерий конечности числа модулей для потоков Морса-Смейла на поверхностях и получена топологическая классификация этих потоков с точностью до топологической сопряженности на языке оснащённых графов (молекул), использовавшихся А. А. Ошемковым и В. В. Шарко для классификации потоков Морса-Смейла на поверхностях с точностью до топологической эквивалентности.

Ольга Витальевна поражает своей неутомимостью. Она буквально живет математикой, готова ответить на звонок и в 7 утра, и в 11 вечера, если дело касается обсуждения той или иной задачи. Нередко Ольга Витальевна занимается со своими учениками прямо у себя дома, у учеников, по их собственному признанию, при этом возникает чувство, что они приходят в какое-то очень родное место, где их понимают и всячески стараются помочь.

Когда Ольга Витальевна стала ученицей В. З. Гринеса, у неё уже были двое ма-

леньких сыновей, а впоследствии к ним добавилась ещё и дочка. Это обстоятельство не помешало научной работе, наоборот: Ольга Витальевна спокойно берёт в аспирантки студенток с маленькими детьми или в ожидании таковых.

На кафедре и в лабораториях, которыми руководит Ольга Витальевна, сложился дружный коллектив студентов, аспирантов и преподавателей, которые на равных участвуют в различных научных мероприятиях.

От всей души желаем Ольге Витальевне отличного настроения, творческой энергии, прекрасных учеников и большого счастья!

Ученики и коллеги

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов**.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются переносом основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы — не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

– *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

– *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р.А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р.А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

В. Ф. Былов, Р. Е. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

Р. А. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе *LaTeX***.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX , дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты `svmo.sty` и `svmobib.sty`. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем `<ФамилияИО>.tex`. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: `{УДК}` `{Название статьи}` `{Автор(ы)}` `{Автор(ы) со сносками на организации}` `{Организации (название, город, страна) со сносками на авторов}` `{Аннотация}` `{Ключевые слова}` `{Название статьи на английском языке}` `{Автор(ы) на английском языке}`

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: `{MSC 2020}` `{Название статьи}` `{Автор(ы)}` `{Автор(ы) со сносками на организации}` `{Организации (название, город, страна) со сносками на авторов}` `{Аннотация}` `{Ключевые слова}`

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: `'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'`. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк `'Доказательство.'` и `'Доказательство закончено.'` соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmbib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\page О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmiso, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибииков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Выш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib6}

```

```
\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article is **not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010} {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in
English} \label{shamanaevtable1}
```

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmbib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmbib.sty package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

```
\lang In Russ.
```

Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
```

```
\by M. J. Berger, J. Olinger
```

```
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
```

```
\jour Journal of Computational Physics
```

```
\yr 1984
```

```
\vol 53
```

```
\pages 484–512
```

Articles in the electronic journals in Russian

`\Bibitem{shamanaevBib3En}`
`\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,`
`\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]`
`\jour Ogarev-online`
`\vol 20`
`\yr 2016`
`\lang In Russ.`
`\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii`

Articles in collections in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib4En}`
`\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev`
`\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]`
`\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]`
`\publaddr Ulyanovsk`
`\publ UIGTU Publ.`
`\yr 2014`
`\issue 10`
`\pages 4–13`
`\lang In Russ.`

Books (monographs and collections) in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib5En}`
`\by Yu. N. Bibikov`
`\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]`
`\publaddr Moscow`
`\publ Visshay shkola Publ.`
`\yr 1991`
`\totalpages 303`
`\lang In Russ.`

Conference proceedings in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib6En}`
`\by V. G. Malinov`
`\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator`
`\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings`
`\bookvol II`
`\procinfo Moscow, October 17-22, 2016`
`\yr 2016`
`\pages 48–50`
`\publ FRC CSC RAS Publ.`
`\publaddr Moscow`

Алфавитный указатель авторов

Галкин В. Д.	132	Мурюмин С. М.	215
Галкин Д. В.	200	Никишин Е. В.	215
Гринес В. З.	141	Починка О. В.	132, 229
Гришаев В. Я.	215	Соловарова Л. С.	151
Дерюгин Ю. Н.	228	Сыромясов А. О.	200
Каххаров А. Э.	175	Файрузов М. Э.	162
Лубышев Ф. В.	162	Фьюнг Т. З.	151
Мартынов С. И.	185	Хусанов Д. Х.	175
Минц Д. И.	141	Чилина Е. Е.	141

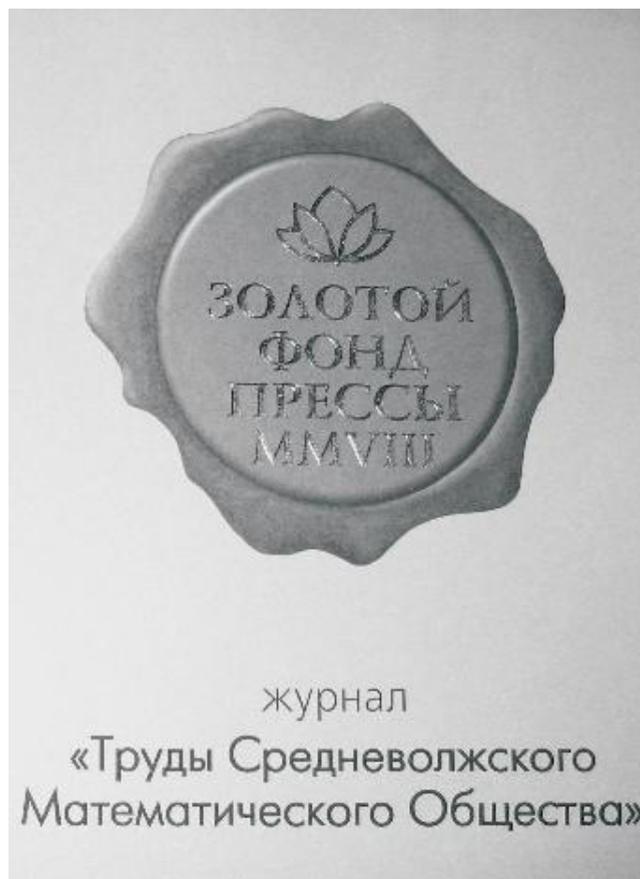
Шуршина А. С. 200

Author Index

Chilina E. E.	141	Lubyshev F. V.	162
Deryugin Y. N.	228	Martynov S. I.	185
Fairuzov M. E.	162	Mints D. I.	141
Galkin D. V.	200	Muryumin S. M.	215
Galkin V. D.	132	Nikishin E. V.	215
Grines V. Z.	141	Pochinka O. V.	132, 229
Grishaev V. Y.	215	Phuong T. D.	151
Kaxxorov A. E.	175	Shurshina A. S.	200
Khusanov J. Kh.	175	Solovarova L. S.	151

Syromyasov A. O. 200

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*
Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Подписано в печать 14.06.2022. Дата выхода в свет 30.06.2022. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 10,5 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 638.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*
Translation: *A. O. Syromyasov*
Desktop publishing: *V. A. Atryahin*

Signed to print 14.06.2022. Date of publishing 30.06.2022. Free price.

Sheet size $70 \times 108 \frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 10,5.

Number of copies 100. Order no. 638.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

Для заметок

