ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga Mathematical Society Journal

Том / Vol. 24 № / No. 1

2022

Средне-Волжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Том 24, № 1. 2022

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации средства массовой информации:
ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.
Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны
Журнал публикует статьи на русском и английском языках.
Периодичность издания: 1 раз в квартал.

Middle Volga Mathematical Society

National Research Mordovia State University

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Vol. 24, no. 1. 2022

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.
Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

– «Математика»,

– «Прикладная математика и механика»,

– «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348). Журнал включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется через интернет-магазин периодических изданий «Пресса по подписке». Подписной индекс издания — Е94016.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68. Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: http://journal.svmo.ru

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348). The journal is included in DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is indexed in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscript to the journal through the online store of periodicals «Press by subscription». Subscription index of the journal is E94016.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.
PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.
EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.
Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: http://journal.svmo.ru

Редакционная коллегия

Editorial Board

Petr P. Matus — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Olga V. Pochinka — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Nikolay D. Morozkin — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Petr V. Senin — Full Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Full Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

Математика

Contents

Mathematics

Математика

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.11-20
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.96

Единственность решения одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода

А. Асанов, К. Б. Матанова, Э. Абсамат кызы

Кыргызско-Турецкий университет «Манас» (г. Бишкек, Кыргызстан)

Аннотация. В данной работе исследован вопрос единственности решения для одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода. Особую роль в исследовании играет понятие производной по возрастающей функции, которое было введено А. Асановым в 2001 г. Это понятие является обобщением обычного понятия производной функции и является обратным оператором для одного класса интеграла Стилтьеса. На основе производной по возрастающей функции, методом интегральных преобразований и методом неотрицательных квадратичных форм доказаны теоремы единственности решения для рассматриваемого класса интегральных уравнений. Построены примеры, удовлетворяющие условиям теорем единственности. Из приведенных примеров видно, что без использования понятия производной по возрастающей функции трудно исследовать линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса первого и третьего рода.

Ключевые слова: интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса, третий род, производная по возрастающей функции, единственность решения

Для цитирования: Асанов А., Матанова К. Б., Абсамат кызы Э. Единственность решения одного класса линейных интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 11–20. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.11-20

Об авторах:

Асанов Авыт, профессор, кафедра математики Кыргызско-Турецкого университета «Манас» (720044, Кыргызстан, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова, д. 56), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0608-0860, avyt.asanov@manas.edu.kg

Матанова Калыскан Базарбаевна, доцент, кафедра математики Кыргызско-Турецкого университета «Манас» (720044, Кыргызстан, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова, д. 56), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5350-5198, kalys.matanova@manas.edu.kg

Абсамат кызы Элиза, магистрант Института естественных наук, Кыргызско-Турецкий университет «Манас» (720044, Кыргызстан, г. Бишкек, пр. Ч. Айтматова, д. 56), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8470-7446, 2051y03002@manas.edu.kg

Original article

MSC2020 45A05

Uniqueness of the solution of one class of Volterra-Stieltjes linear integral equations of the third kind

A. Asanov, K. Matanova, E. Absamat kyzy

Kyrgyz-Turkish Manas University

Abstract. In this paper, the question of uniqueness of the solution for one class of Volterra-Stieltjes linear integral equations of the third kind is investigated. The notion of derivative with respect to an increasing function was introduced by A. Asanov in 2001 and plays special role in the study. This notion is a generalization of the usual concept of a derivative function and is an inverse operator for one class of the Stieltjes integral. Basing on idea of such derivative, using the method of integral transformations and the method of non-negative quadratic forms, the uniqueness theorems for the solution of the considered class of integral equations are proved. Examples satisfying the conditions of uniqueness theorems are also constructed in the paper. It becomes clear from these examples that it is difficult to study Volterra-Stieltjes linear integral equations of the first and third kind without using the notion of derivative with respect to increasing function.

Keywords: Volterra-Stieltjes integral equations, third kind, derivative with respect to an increasing function, uniqueness of solution

For citation: *A. Asanov, K. Matanova, E. Absamat kyzy.* Uniqueness of the solution of one class of Volterra-Stieltjes linear integral equations of the third kind. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 11–20. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.11-20

About the authors:

Avyt Asanov, Professor, Department of Mathematics, Kyrgyz-Turkish Manas University (56 Chyngyz Aitmatov Av., Bishkek 720044, Kyrgyzstan), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-0608-0860, avyt.asanov@manas.edu.kg

Kalyskan Matanova, Associate Professor, Department of Mathematics, Kyrgyz-Turkish Manas University (56 Chyngyz Aitmatov Av., Bishkek 720044, Kyrgyzstan), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-5350-5198, kalys.matanova@manas.edu.kg

Eliza Absamat kyzy, Master student, Graduate School of Natural And Applied Sciences, Kyrgyz-Turkish Manas University (56 Chyngyz Aitmatov Av., Bishkek 720044, Kyrgyzstan), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-8470-7446, 2051y03002@manas.edu.kg

1. Введение

Теоретическая часть и приложения интегральных уравнений исследовались во многих работах. В частности, в работе [1] приведен обзор результатов исследований интегральных уравнений Вольтерра второго рода. В работе [2] изучаются интегральные уравнения Вольтерра первого и третьего рода с гладкими ядрами, где приводится доказательство существования многопараметрического семейства решений. В работе [3] исследованы линейные интегральные уравнения Фредгольма первого рода, для которых построены регуляризирующие операторы по Лаврентьеву. В работе [4] приводится теория и используются численные методы решения неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода с дифференцируемыми и отличными от нуля ядрами на диагонали. В работах [4–7] описано применение неклассических интегральных уравнений Вольтерра первого рода к различным прикладным задачам. В работе [8] используется метод регуляризации М. М. Лаврентьева для интегральных уравнений Вольтерра первого рода с гладкими и отличными от нуля ядрами на диагонали дифференцируемыми решениями, для которых построено приближенное решение. В работах [9–10] получены достаточные условия единственности решений и исследованы вопросы регуляризации решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого и третьего рода. В работе [11] доказывается теорема единственности решений и находится регуляризирующий оператор для решения системы линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода. В работах [12–13] использован новый подход для исследования вопросов существования и единственности решений скалярных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями и их систем. В работе [14] исследованы интегральные уравнения Вольтерра первого рода. В [15] введено понятие производной по возрастающей функции, с помощью которого в работах [16–19] исследованы интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса и Фредгольма-Стильтьеса первого и второго рода.

2. Линейные интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса третьего рода

Будем рассматривать уравнение

$$m(t)u(t) + \int\limits_a^t K(t,s)u(s)d\varphi(s) = f(t), \quad t \in [a,b], \tag{2.1}$$

где $m(t), \varphi(t), K(t,s)$ и $f(t)$ – известные функции, $\varphi(t)$ – возрастающая непрерывная функция на $[a,b]$, $m(t) \in C[a,b]$, $0 \leq m(t)$ при всех $t \in [a,b]$ и $m(t)$ равна нулю хотя бы в одной точке сегмента $[a,b]$, $u(t)$ – неизвестная функция. Здесь интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Пусть

$$K(t,s) = P(t)H(t,s)P(s), \quad (t,s) \in G = \{(t,s) : a \leq t \leq s \leq b\}, \tag{2.2}$$

где $P(t)$ и $H(t,s)$ – известные непрерывные функции соответственно на $[a,b]$ и G.

Пусть справедливы следующие условия

а) $P(t) \in C[a,b], P(t) \neq 0$ при почти всех $t \in [a,b]$, $H'_{\varphi(t)}(t,s)$ и $H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s)$ – непрерывные функции в области G, $H'_{\varphi(t)}(t,a)$ и $H'_{\varphi(t)}(b,t)$ - непрерывные функции в $[a,b]$, где

$$H'_{\varphi(t)}(t,s) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{H(t+\Delta,s) - H(t,s)}{\varphi(t+\Delta) - \varphi(t)},$$

$$H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) = \lim_{\Delta\to 0} \frac{H'_{\varphi(t)}(t,s+\Delta) - H'_{\varphi(t)}(t,s)}{\varphi(s+\Delta) - \varphi(s)};$$

б) $m(t) \geq 0,\ H(t,a) \geq 0,\ H'_{\varphi(t)}(t,a) \leq 0, \forall t \in [a,b],\ H'_{\varphi(s)}(t,s) \geq 0,\ H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) \leq$ $\leq 0\ \ \forall (t,s) \in G$;

в) выполняется хотя бы одно из следующих условий:
1) $m(t) > 0$ при почти всех $t \in [a,b]$;
2) $H(t,a) > 0$ при почти всех $t \in [a,b]$;
3) $H'_{\varphi(t)}(t,a) < 0$ при почти всех $t \in [a,b]$;

г) выполняется хотя бы одно из следующих условий:
1) $H'_{\varphi(t)}(b,t) > 0$ при почти всех $t \in [a,b]$;
2) $H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) < 0$ при почти всех $(t,s) \in G$.

С учетом (2.2) уравнение (2.1) запишем в виде

$$m(t)u(t) + \int_a^t P(t)H(t,s)P(s)u(s)d\varphi(s) = f(t), \quad t \in [a,b]. \tag{2.3}$$

Умножив на $u(t)$ уравнение (2.3) и проинтегрировав по Стилтьесу на отрезке $[a,t]$, $t \in [a,b]$ получим

$$\int_a^t m(s)u^2(s)d\varphi(s) + \int_a^t \int_a^s P(s)H(s,\tau)P(\tau)u(\tau)u(s)d\varphi(\tau)d\varphi(s) = \int_a^t f(s)u(s)d\varphi(s).$$

Отсюда, используя обобщенную формулу Дирихле [16], запишем

$$\int_a^t m(s)u^2(s)d\varphi(s) + \int_a^t \left[\int_\tau^t H(s,\tau)P(s)u(s)d\varphi(s)\right] P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) = \int_a^t f(s)u(s)d\varphi(s). \tag{2.4}$$

Введем обозначения

$$Z(t,s) = \int_s^t P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau). \tag{2.5}$$

Тогда, согласно работе [16],

$$P(s)u(s)d\varphi(s) = -d_{\varphi(s)}Z(t,s), \tag{2.6}$$

$$P(t)u(t)d\varphi(t) = d_{\varphi(t)}Z(t,s), \tag{2.7}$$

$$Z(t,s)P(t)u(t)d\varphi(t) = \frac{1}{2}d_{\varphi(t)}Z^2(t,s), \tag{2.8}$$

$$Z(t,s)P(s)u(s)d\varphi(s) = -\frac{1}{2}d_{\varphi(s)}Z^2(t,s). \tag{2.9}$$

Учитывая соотношения (2.5)–(2.9) и применяя метод интегрирования по частям и обобщенную формулу Дирихле, для двойного интеграла из (2.4) имеем

$$\int\limits_a^t \int\limits_\tau^t H(s,\tau)P(s)u(s)d\varphi(s)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) = \int\limits_a^t \left[\int\limits_\tau^t H(s,\tau)d_{\varphi(s)}Z(s,\tau)\right] P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) =$$

$$= \int\limits_a^t \left[H(s,\tau)Z(s,\tau)\Big|_{s=\tau}^{s=t} - \int\limits_\tau^t H'_{\varphi(s)}(s,\tau)Z(s,\tau)d\varphi(s)\right] u(\tau)P(\tau)d\varphi(\tau) =$$

$$= \int\limits_a^t H(t,\tau)Z(t,\tau)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) - \int\limits_a^t \int\limits_a^s H'_{\varphi(s)}(s,\tau)Z(s,\tau)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau)d\varphi(s) =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_a^t H(t,\tau)d_{\varphi(\tau)}Z^2(t,\tau) + \frac{1}{2}\int\limits_a^t \int\limits_a^s H'_{\varphi(s)}(s,\tau)d_{\varphi(\tau)}Z^2(s,\tau)d\varphi(s) =$$

$$= \frac{1}{2}H(t,a)Z^2(t,a) + \frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(\tau)}(t,\tau)Z^2(t,\tau)d\varphi(\tau) - \frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(s)}(s,a)Z^2(s,a)d\varphi(s) -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_a^t \int\limits_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)Z^2(s,\tau)d_\varphi(\tau)d\varphi(s).$$

Отсюда в силу (2.5) получим

$$\int\limits_a^t \int\limits_\tau^t H(s,\tau)P(s)u(s)d\varphi(s)P(\tau)u(\tau)d\varphi(\tau) = \frac{1}{2}H(t,a)\left[\int\limits_a^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(\tau)}(t,\tau)\left[\int\limits_\tau^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau) -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(s)}(s,a)\left[\int\limits_a^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(s) -$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_a^t \int\limits_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)\left[\int\limits_\tau^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)d\varphi(s) \quad (2.10)$$

Учитывая (2.10), из (2.4) имеем

$$\int\limits_a^t m(s)u^2(s)d\varphi(s) + \frac{1}{2}H(t,a)\left[\int\limits_a^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(\tau)}(t,\tau)\left[\int\limits_\tau^t P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_a^t H'_{\varphi(s)}(s,a)\left[\int\limits_a^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_a^t\int\limits_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)\left[\int\limits_\tau^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)d\varphi(s)=\int\limits_a^t f(s)u(s)d\varphi(s). \quad (2.11)$$

Таким образом, если $f(t)=0$ при всех $t\in[a,b]$, то в силу условия а), б) и в) из (2.11) получим:

$$\int\limits_a^t P(s)u(s)d\varphi(s)\equiv 0$$

или

$$\int\limits_s^t P(\xi)u(\xi)d\varphi(\xi)\equiv 0,\ \ t,s\in[a,b],\ s<t.$$

Отсюда $u(t)=0$ при всех $t\in[a,b]$. Тем самым доказана следующая

Теорема 2.1. *Если условия а), б) и в) выполнены, то уравнение (2.1) в пространстве $C[a,b]$ имеет не более одного решения.*

Подставив $t=b$ из (2.11), получим

$$\int\limits_a^b m(s)u^2(s)d\varphi(s)+\frac{1}{2}H(b,a)\left[\int\limits_a^b P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2+$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_a^b H'_{\varphi(\tau)}(b,\tau)\left[\int\limits_\tau^b P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)-\frac{1}{2}\int\limits_a^b H'_{\varphi(s)}(s,a)\left[\int\limits_a^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(s)-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_a^b\int\limits_a^s H''_{\varphi(s)\varphi(\tau)}(s,\tau)\left[\int\limits_\tau^s P(s)u(s)d\varphi(s)\right]^2 d\varphi(\tau)d\varphi(s)=\int\limits_a^b f(s)u(s)d\varphi(s). \quad (2.12)$$

Из (2.12) вытекает справедливость следующей теоремы:

Теорема 2.2. *Если условия а), б) и г) выполнены, то уравнение (2.1) в пространстве $C[a,b]$ имеет не более одного решения.*

3. Примеры

Приведем примеры, которые будут удовлетворять условиям сформулированных теорем о единственности решения интегральных уравнений Вольтерра-Стилтьеса третьего рода.

П р и м е р 3.1. Рассмотрим уравнение (2.1) при $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(t) = \sqrt{t}$, $P(t) = \sqrt[4]{t}$, $m(t) = t$, $H(t,s) = \dfrac{s}{1+\sqrt{t}}$.

Так как

$$H(t,0) = 0,\ H'_{\varphi(t)}(t,0) = 0,\ H'_{\varphi(s)}(t,s) = \frac{2\sqrt{s}}{1+\sqrt{t}},\ H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) = -\frac{2\sqrt{s}}{(1+\sqrt{t})^2},\ (t,s) \in G,$$

то все условия теоремы 2.1 выполняются.

П р и м е р 3.2. Рассмотрим уравнение (2.1) при $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(t) = \sqrt[3]{t}$, $P(t) = \sqrt[8]{t}$, $H(t,s) = \dfrac{\sqrt[3]{s^2}+1}{2+\sqrt[3]{t}}$,

$$m(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right], \\ t - \dfrac{1}{2}, & t \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

Здесь

$$H(t,0) = \frac{1}{2+\sqrt[3]{t}},\ H'_{\varphi(t)}(t,0) = -\frac{1}{(2+\sqrt[3]{t})^2},\ H'_{\varphi(s)}(t,s) = \frac{2\sqrt[3]{s}}{2+\sqrt[3]{t}},$$

$$H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) = -\frac{2\sqrt[3]{s}}{(2+\sqrt[3]{t})^2},\ (t,s) \in G$$

и все условия теоремы 2.1 выполняются.

П р и м е р 3.3. Рассмотрим уравнение (2.1) при $a = 0$, $b = \dfrac{\pi}{2}$, $\varphi(t) = \sin\sqrt{t}$, $P(t) = \sin 2\sqrt{t}$, $H(t,s) = \dfrac{\sin\sqrt{s}}{3+\sin\sqrt{t}}$,

$$m(t) = \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right], \\ t - \dfrac{\pi}{4}, & t \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]. \end{cases}$$

Для этого случая

$$H(t,0) = 0,\ H'_{\varphi(t)}(t,0) = 0,\ t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],$$

$$H'_{\varphi(s)}(t,s) = \frac{1}{3+\sin\sqrt{t}},\ H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) = -\frac{1}{(3+\sin\sqrt{t})^2},\ (t,s) \in G.$$

и, соответственно, все условия теоремы 2.2 выполняются.

П р и м е р 3.4. Рассмотрим уравнение (2.1) при $a = 0$, $b = 1$, $\varphi(t) = \ln(1+\sqrt{t})$, $P(t) = \sqrt{t}$, $m(t) = t^2$, $H(t,s) = \ln^2(1+\sqrt{s})[1-\ln(1+\sqrt{t}]^2$. Так как

$$H(t,0) = 0,\ H'_{\varphi(t)}(t,0) = 0,\ H'_{\varphi(s)}(t,s) = 2\ln(1+\sqrt{s})[1-\ln(1+\sqrt{t}]^2,$$

$$H''_{\varphi(t)\varphi(s)}(t,s) = -4\ln(1+\sqrt{s})[1-\ln(1+\sqrt{t})],\ (t,s) \in G,$$

то все условия теоремы 2.1 выполняются.

Список литературы

1. Цалюк З. Б. Интегральные уравнения Вольтерра // Итоги науки и техники Сер. «Мат. анализ». 1977. Т. 15. С. 131–198. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01844490
2. Магницкий Н. А. Линейные интегральные уравнения Вольтерра I и III рода // Журнал вычислит. математики и мат. физики. 1979. Т. 19, № 4. С. 970–989.
3. Лаврентьев М. М. Об интегральных уравнениях первого рода // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127, № 1. С. 31–33.
4. Апарцин А.С. Неклассические уравнения Вольтерра I рода: теория и численные методы. Новосибирск: Наука, 1999. 1943 с.
5. Апарцин А.С., Караулова И.В., Маркова Е.В., Труфанов В.В. Применение интегральных уравнений Вольтерра для моделирования стратегий технического перевооружения электроэнергетики // Электричество. 2005. № 10. С. 69–75.
6. Апарцин А.С., Сидлер И.В. Исследование тестовых уравнений Вольтерра I рода в интегральных моделях развивающихся систем // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 2. С. 24–33. DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33
7. Глушков В.М., Иванов В.В., Яненко В.М. Моделирование развивающихся систем. М.: Наука, Физматлит, 1983. 351 с.
8. Денисов А.М. О приближенном решении уравнения Вольтерра I рода // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1975. Т. 15, № 4. С. 1053–1056.
9. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра первого рода // Доклады АН СССР. 1989. Т. 309, № 5. С. 1052–1055.
10. Иманалиев М.И., Асанов А. Регуляризация и единственность решений систем нелинейных интегральных уравнений Вольтерра третьего рода // Доклады РАН. 2007. Т. 415, № 1. С. 14–17.
11. Иманалиев М.И., Асанов А. О решениях систем линейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода // Доклады РАН. 2010. Т. 430, № 6. С. 1–4.
12. Иманалиев М.И., Асанов А., Асанов Р.А. Об одном классе систем линейных и нелинейных интегральных уравнений Фредгольма третьего рода с многоточечными особенностями // Дифференциальные уравнения. 2018. Т. 54, № 3. С.387–397
13. Asanov A., Matanova K., Asanov R. A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind // Kuwait J. Sci. 2017. Vol. 44, No. 1. pp. 17–28.
14. Lamm P.K. A survey of regularization methods for first-kind Volterra equations // Surveys on Solution Methods for Inverse Problems. Springer, Vienna, 2000. pp. 53–82. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6296-5_4

15. Асанов А. Производная функции по возрастающей функции // Табигый илимдер журналы. 2001. Т. 1, № 1. С. 18–67.

16. Асанов А. Интегральные уравнения Вольтерра-Стилтьеса второго и первого рода // Табигый илимдер журналы. 2002. № 2. С. 79–95.

17. Тойгонбаева А.К., Асанов А., Калимбетов Б. Об одном классе линейных интегральных уравнений Фредгольма-Стилтьеса первого рода // Вестник Карагандинского университета. Сер. «Математика». 2012. Т. 68, № 4. С. 3-6.

18. Тойгонбаева А.К., Асанов А. Об одном классе систем интегральных уравнений Фредгольма-Стильтьеса первого рода с разрывным ядром // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. 2012. Т. 45. С. 50-55.

19. Toigonbaeva A.K., Asanov A. The choice of regularization parameter of solutions of linear Fredgolm-Stieltjes integral equations of the first kind // Наука, новые технологии и инновации Кыргызстана. 2019. № 6. С. 3-8.

Поступила 5.12.2021; доработана после рецензирования 14.02.2022; принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. Z. B. Tsalyuk, "Volterra integral equations", *J. Soviet Math.*, **12**:6 (1979), 715–758. DOI: https://doi.org/10.1007/BF01844490

2. N. A. Magnitsky, "Linear Volterra integral equations of the first and third kinds", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **19**:4 (1979), 182–200. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(79)90166-6

3. M. M. Lavrentyev, "Integral equations of the first kind", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **127**:1 (1959), 31–33 (In Russ.).

4. A. S. Apartsyn, *[Non-classical Volterra equations of the first kind: theory and numerical methods]*, Nauka, Novosibirsk, 1999 (In Russ.), 1943 p.

5. A. S. Apartsyn, I. V. Karaulova, E. V. Markova, V. V. Trufanov, "Application of Volterra integral equations for modeling strategies of power industry technical re-equipment", *Elektrichestvo*, 2005, no. 10, 69–75 (In Russ.).

6. A. S. Apartsyn, I. V. Sidler, "Study of test Volterra equations of the first kind in integral models of developing systems", *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, **24**:2 (2018), 24–33 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.21538/0134-4889-2018-24-2-24-33

7. V. M. Glushkov, V. V. Ivanov, V. M. Yanenko, *[Modeling of developing systems]*, Nauka, Moscow, 1983 (In Russ.), 350 p.

8. A. M. Denisov, “On the approximate solution of the Volterra equation of the first kind”, *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **15**:4 (1975), 237–239. DOI: https://doi.org/10.1016/0041-5553(75)90185-8

9. M. I. Imanaliev, A. Asanov, “Solutions of system of nonlinear Volterra integral equations of the first kind”, *Soviet Math. Dokl.*, **309**:5 (1989), 1052–1055 (In Russ.).

10. M. I. Imanaliev, A. Asanov, “Regularization and uniqueness of solutions to systems of nonlinear Volterra integral equations of the third kind”, *Doklady Math.*, 2007, no. 76, 490–493. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562407040035

11. M. I. Imanaliev, A. Asanov, “Solutions to systems of linear Fredholm integral equations of the third kind”, *Doklady Math.*, 2010, no. 81, 115–118. DOI: https://doi.org/10.1134/S1064562410010321

12. M. I. Imanaliev, A. Asanov, R. A. Asanov, “On a class of systems of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind with multipoint singularities”, *Differential Equations*, 2018, no. 54, 381–391. DOI: https://doi.org/10.1134/S0012266118030096

13. A. Asanov, K. B. Matanova, R. A. Asanov, “A class of linear and nonlinear Fredholm integral equations of the third kind”, *Kuwait J. Sci.*, **44**:1 (2017), 17–28.

14. P. K. Lamm, “A survey of regularization methods for first-kind Volterra equations”, *Surveys on Solution Methods for Inverse Problems*, 2000, 53–82. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-7091-6296-5_4

15. A. Asanov, “The derivative of a function by means of an increasing function.”, *Manas Journal of Engineering*, **1**:1 (2001), 18–64 (In Russ.).

16. A. Asanov, “Volterra-Stieltjes integral equations of the second kind and the first kind”, *Manas Journal of Engineering*, **1**:2 (2002), 79–95 (In Russ.).

17. A. K. Toygonbaeva, A. Asanov, B. Kalimbetov, “On one class of Fredholm-Stiltjes linear integral equations of the first kind”, *Bulletin of Karaganda University: Mathematics Series*, **68**:4 (2012), 3–6 (In Russ.).

18. A. K. Toygonbaeva, A. Asanov, “On a class of systems of Fredholm-Stiltjes integral equations of the first kind with a discontinuous kernel”, *Studies on Integro-Differential Equations*, 2012, no. 45, 50–55 (In Russ.).

19. A. K. Toygonbaeva, A. Asanov, “The choice of regularization parameter of solutions of linear Fredgolm-Stieltjes integral equations of the first kind”, *New Technologies and Innovations of Kyrgyzstan*, 2019, no. 6, 3–8.

Submitted 5.12.2021; Revised 14.02.2022 Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.21-30 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

Динамичекие свойства прямых произведений дискретных динамических систем

М. К. Баринова, Е. К. Шустова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Естественным способом создания новых динамических систем является рассмотрение прямых произведений уже известных систем. Данная работа посвящена изучению некоторых динамических свойств прямых произведений гомеоморфизмов и диффеоморфизмов. В частности, доказывается, что цепно рекуррентное множество прямого произведения гомеоморфизмов является прямым произведением цепно рекуррентных множеств, а также, что прямое произведение диффеоморфизмов сохраняет гиперболическую структуру на прямом произведении гиперболических множеств. Известно, что если диффеоморфизм имеет гиперболическое цепно рекуррентное множество, то он является Ω-устройчивым. Таким образом, из результатов настоящей работы следует, что прямое произведение Ω-устойчивых диффеоморфизмов также является Ω-устойчивым. Еще один вопрос, затронутый в статье, касается существования энергетической функции – гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством системы. Этот вопрос решается для прямого произведения диффеоморфизмов, уже обладающих энергетическими функциями. Доказывается, что в этом случае функция может быть найдена в виде взвешенной суммы их энергетических функций.

Ключевые слова: прямое произведение, гомеоморфизм, диффеоморфизм, гиперболическое множество, цепно рекуррентное множество, энергетическая функция

Для цитирования: М. К. Баринова, Е. К. Шустова Динамичекие свойства прямых произведений дискретных динамических систем // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 21–30. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30

Об авторах:

Баринова Марина Константиновна, старший научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4406-583X, mkbarinova@yandex.ru

Шустова Евгения Константиновна, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4998-2186, ekshustova@gmail.com

Original article

MSC2020 37D20

Dynamical properties of direct products of discrete dynamical systems

M. K. Barinova, E. K. Shustova

National Research University «High School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. A natural way for creating new dynamical systems is to consider direct products of already known systems. The paper studies some dynamical properties of direct products of homeomorphisms and diffeomorphisms. In particular, authors prove that a chain-recurrent set of the direct product of homeomorphisms is a direct product of the chain-recurrent sets. Another result established in the paper is that the direct product of diffeomorphisms holds hyperbolic structure on the direct product of hyperbolic sets. It is known that if a diffeomorphism has a hyperbolic chain-recurrent set, then this mapping is Ω-stable. Therefore, it follows from the results of the paper that the direct product of Ω-stable diffeomorphisms is also Ω-stable. Another question which is raised in the article concerns the existence of an energy function for the direct product of diffeomorphisms which already have such functions (recall that energy function is a smooth Lyapunov function whose set of critical points coincides with the chain-recurrent set of the system). Authors show that in this case the function can be found as a weighted sum of energy functions of initial diffeomorphisms.

Keywords: direct product, homeomorphism, diffeomorphism, hyperbolic set, chain recurrent set, energy function

For citation: *M. K. Barinova, E. K. Shustova.* Dynamical properties of direct products of discrete dynamical systems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 21–30. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.21-30

About the authors:
Marina K. Barinova, Senior Research Fellow, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-4406-583X, mkbarinova@yandex.ru
Evgenia K. Shustova, student, Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/ 0000-0002-4998-2186, ekshustova@gmail.com

1. Введение

Согласно результатам Ч. Конли [1], энергетическая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название «Фундаментальная теорема динамических систем».

В 1961 г. С. Смейлом [2] был получен первый результат по построению энергетической функции. В своей работе он доказал существование энергетической функции Морса у градиентно-подобных потоков. Затем в 1968 г. К. Мейер [3] обобщил результат Смейла, построив энергетическую функцию Морса-Ботта для произвольного потока Морса-Смейла. Дж. Фрэнкс в 1985 г. [4] доказал, что у любого гладкого потока на компактном многообразии есть энергетическая функция. Кроме того, в 2020 г. была построена энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω-устойчивых потоков [5]. Таким образом, вопрос о существовании такой функции для непрерывных динамических систем был решен, однако открытым оставался вопрос, какие дискретные системы допускают энергетические функции. Первые результаты в этой области были получены Д. Пикстоном: в 1977 г. [6] он доказал существование энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса-Смейла на поверхности. Однако даже регулярные диффеоморфизмы на многообразиях размерности $n \geqslant 3$ не обязательно обладают такой функцией. Именно Пикстон в 1977 г. первым построил пример диффеоморфизма на 3-сфере, не имеющего энергетической функции. Этот эффект связан с диким вложением сепаратрис седловых точек в объемлющее многообразие. В. З. Гринес, Ф. Лауденбах и О. В. Починка в 2012 г. [7] нашли достаточные условия существования энергетической функции для 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла. Кроме того, в настоящее время активно изучается вопрос существования энергетических функций для Ω-устойчивых диффеоморфизмов с хаотической динамикой, заданных на 2- и 3-многообразиях. В работах В. З Гринеса, М. К Бариновой, О. В Починки были доказаны такие факты, как существование гладкой энергетической функции у поверхностных диффеоморфизмов с одномерными нетривиальными базисными множествами [8] и у некоторых классов трехмерных каскадов с гиперболической хаотической динамикой [9–11], а также отсутствие энергетической функции у поверхностных диффеоморфизмов с нульмерными базисными множествами без пар [12].

2. Формулировка основных результатов

Пусть M_1 и M_2 — метрические пространства с метриками d_1 и d_2 соответственно. Тогда $M = M_1 \times M_2$ с метрикой d, введенной следующим образом:

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{d_1^2(x_1, x_2) + d_2^2(y_1, y_2)}, \quad \text{где } (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M,$$

также является метрическим пространством. *Прямым произведением гомеоморфизмов* $f : M_1 \to M_1$ и $g : M_2 \to M_2$ называют гомеоморфизм $f \times g$, который действует на $M = M_1 \times M_2$ следующим образом: если $(x, y) \in M$, то $(f \times g)(x, y) = (f(x), g(y))$.

В теории динамических систем широко используется такой тип возвращаемости, как цепно рекуррентные точки, определяемый с помощью ε-цепей. *ε-цепью длины n*, соединяющей точку x с точкой y для каскада $f : M \to M$ называется последовательность $x = x_0, \dots, x_n = y$ точек в M, такая что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leqslant i \leqslant n$. Точка $x \in M$ называется *цепно рекуррентной* для каскада f, если для любого $\varepsilon > 0$ существует n, зависящее от ε, и ε-цепь длины n, соединяющая точку x с ней самой (см. Рис. 2.1).

На множестве R_f можно ввести отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует ε-цепь, соединяющая точку x с точкой y, и ε-цепь, соединяющая точку y с точкой x. Две такие точки называются *цепно эквивалентными*, класс эквивалентности – *цепной компонентой*, а множество всех цепно рекуррентных точек называется *цепно рекуррентным множеством* и обозначается R_f.

Первый результат данной работы касается структуры цепно рекуррентного множества прямого произведения гомеоморфизмов.

Теорема 2.1. *Цепно рекуррентное множество прямого произведения $f \times g$ гомеоморфизмов f и g совпадает с прямым произведением их цепно рекуррентных*

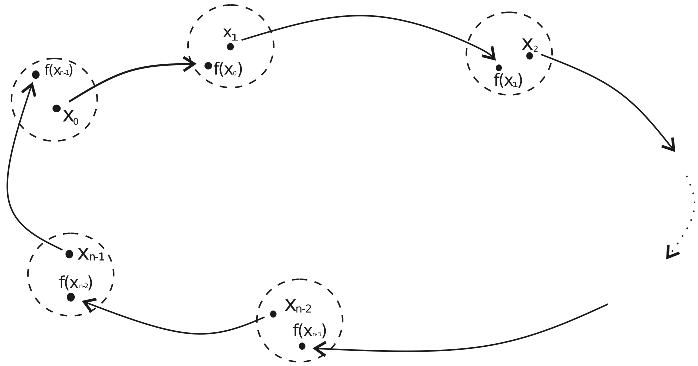


Рис. 2.1. Цепно рекуррентная точка
Fig 2.1. Chain recurrent point

множеств, причем каждая цепная компонента гомеоморфизма $f \times g$ является прямым произведением некоторых цепных компонент f и g.

Пусть $f : M^n \to M^n$ — диффеоморфизм, заданный на гладком замкнутом многообразии размерности n. Компактное f-инвариантное множество $\Lambda \subset int\ M^n$ называется *гиперболическим*, если для каждого $x \in \Lambda$ касательное пространство T_xM^n представляется в виде прямой суммы подпространств E^s_x, E^u_x, $T_xM^n = E^s_x \oplus E^u_x$, такой что

а) $Df(E^s_x) = E^s_{f(x)}$, $Df(E^u_x) = E^u_{f(x)}$;

б) для некоторых фиксированных $c > 0$ и $0 < \lambda < 1$

$$||Df^k(v)|| \leqslant c\lambda^k||v||,\ v \in E^s_x, \quad k > 0,$$

$$||Df^{-k}(v)|| \leqslant c\lambda^k||v||,\ v \in E^u_x, \quad k > 0;$$

в) E^s_x, E^u_x меняются непрерывно при изменении $x \in \Lambda$.

Следующая теорема касается гиперболичности прямого произведения гиперболических множеств.

Теорема 2.2. *Прямое произведение гиперболических множеств Λ_f и Λ_g диффеоморфизмов f и g является гиперболическим множеством диффеоморфизма $f\times\ g$.*

Условие гиперболичности цепно рекуррентного множества диффеоморфизма эквивалентно Ω-устойчивости системы (см., например, [13]). Тогда результат, сформулированный ниже, является непосредственным следствием теорем 2.1 и 2.2.

Следствие 2.1. *Если диффеоморфизмы f и g являются Ω-устойчивыми, то их прямое произведение $f \times g$ также будет Ω-устойчивым диффеоморфизмом.*

Функцией Ляпунова [1] для диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется непрерывная функция $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) если $x \notin R_f$, то $\varphi(f(x)) < \varphi(x)$;

2) если $x, y \in R_f$, то $\varphi(x) = \varphi(y)$ тогда и только тогда, когда x и y лежат в одной цепной компоненте;

3) $\varphi(R_f)$ — компактное нигде не плотное подмножество прямой R.

Гладкая функция Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы, называется *энергетической функцией* [3].

Сформулируем теорему о существовании энергетической функции для прямого произведения диффеоморфизмов.

Теорема 2.3. *Если Ω-устойчивые диффеоморфизмы f и g обладают энергетической функцией, то их прямое произведение $f \times g$ будет иметь энергетическую функцию в виде взвешенной суммы энергетических функций для диффеоморфизмов f и g.*

Доказательство этой теоремы будет проведено в п. 5.

3. Цепно рекуррентное множество прямого произведения гомеоморфизмов

Докажем теорему 2.1, а именно: цепно рекуррентное множество прямого произведения гомеоморфизмов совпадает с прямым произведением их цепно рекуррентных множеств.

Доказательство. Докажем, что $R_f \times R_g = R_{f\times g}$, где R_f, R_g, $R_{f\times g}$ — цепно рекуррентные множества гомеоморфизмов f, g и $f \times g$ соответственно. Для этого покажем включение в обе стороны.

1. $R_f \times R_g \subset R_{f\times g}$

Пусть точка $x \in R_f$, тогда $\forall\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/2$-цепь $x = x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n = x$ длины n, такая что $d_1(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon/2$ для всех $i = 1, \dots, n$.

Пусть точка $y \in R_g$, тогда $\forall\varepsilon > 0$ существует $\varepsilon/2$-цепь $y = y_0, y_1, \dots, y_{k-1}, y_k = y$ длины k, такая что $d_2(g(y_{i-1}), y_i) < \varepsilon/2$ для всех $i = 1, \dots, k$.

Очевидно, что последовательности $\underbrace{x_0, \dots, x_{n-1}, x_0, \dots, x_{n-1}, x_0, \dots, x_{n-1}}_{k \text{ раз}}, x_n$ и $\underbrace{y_0, \dots, y_{k-1}, y_0, \dots, y_{k-1}, y_0 \dots, y_{k-1}}_{n \text{ раз}}, y_k$ являются $\varepsilon/2$-цепями длины n и k гомеоморфизмов f и g соответственно, соединяющими точки x и y с собой. Докажем, что последовательность точек, составленная из этих двух цепей, является ε-цепью длины nk гомеоморфизма $f \times g$ для точки $(x, y) \in R_f \times R_g$, соединяющей её с собой, т. е. для последовательности $(x, y) = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0), (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1), \dots, (\tilde{x}_{nk}, \tilde{y}_{nk}) = (x, y)$, где $\tilde{x}_i = x_{i \ mod \ n}$ и $\tilde{y}_i = y_{i \ mod \ k}$, верны оценки $d((f(\tilde{x}_{i-1}), g(\tilde{y}_{i-1})), (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)) < \varepsilon$ для всех $i = 1, \dots, nk$. Из неравенства треугольника и определения метрики d получаем:

$$d((f(\tilde{x}_{i-1}), g(\tilde{y}_{i-1})), (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)) \leqslant d((f(\tilde{x}_{i-1}), g(\tilde{y}_{i-1})), (\tilde{x}_i, g(\tilde{y}_{i-1}))) + d((\tilde{x}_i, g(\tilde{y}_{i-1})), (\tilde{x}_i, \tilde{y}_i)) =$$

$$= d_1(f(\tilde{x}_{i-1}), \tilde{x}_i) + d_2(g(\tilde{y}_{i-1}), \tilde{y}_i) =$$

$$= d_1(f(x_{i-1}(mod\ n)), x_i(mod\ n)) + d_2(g(y_{i-1}(mod\ n)), y_{i\ mod\ n}) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Таким образом, точки $(x, y) \in R_f \times R_g$ являются цепно рекуррентными.

Следовательно, мы доказали, что прямое произведение цепно рекуррентных множеств гомеоморфизмов включено в цепно рекуррентное множество их прямого произведения.

2. $R_f \times R_g \supset R_{f\times g}$.

Пусть точка $(x,y) \in R_{f\times g}$, тогда $\forall\varepsilon > 0$ существует ε-цепь $(x,y) = (x_0,y_0),(x_1, y_1),\ldots,(x_{n-1},y_{n-1}),(x_n,y_n) = (x,y)$ длины n, такая что $d((f\times g)(x_{i-1},y_{i-1}),(x_i,y_i)) < \varepsilon$ для всех $i = 1,\ldots,n$. По определению метрики прямого произведения:

$$d((f(x_{i-1}),g(y_{i-1})),(x_i,y_i)) = \sqrt{d_1^2(f(x_{i-1}),x_i) + d_2^2(g(y_{i-1}),y_i)} < \varepsilon,$$

а значит

$$d_1(f(x_{i-1}),x_i) < \varepsilon \text{ и } d_2(g(y_{i-1}),y_i) < \varepsilon.$$

Таким образом, $\forall\varepsilon > 0$ последовательности $x_0,x_1,\ldots,x_n$ и $y_0,y_1,\ldots,y_n$ являются ε-цепями, соединяющими точки x и y с собой, т. е. $x \in R_f$, $y \in R_g$. Следовательно, обратное включение тоже доказано.

Аналогичным образом доказывается, что каждая цепная компонента гомеоморфизма $f \times g$ является прямым произведением некоторых цепных компонент f и g.

4. Прямое произведение гиперболических множеств

В данном разделе докажем теорему 2.2.

Доказательство. Пусть f и g — диффеоморфизмы, заданные на гладких замкнутых многообразиях M^n и M^k соответственно, с гиперболическими множествами Λ_f и Λ_g. Докажем, что множество $\Lambda = \Lambda_f \times \Lambda_g$ является гиперболическим для диффеоморфизма $f \times g$, заданного на многообразии $M = M^n \times M^k$, по определению.

Рассмотрим произвольную точку $(x,y) \in \Lambda$. По определению прямого произведения Римановых многообразий касательное пространство $T_{(x,y)}M = T_xM^n \times T_yM^k$. Докажем, что $T_{(x,y)}M$ представляется в виде прямой суммы подпространств $E^s_{(x,y)}$, $E^u_{(x,y)}$, $T_{(x,y)}M = E^s_{(x,y)} \oplus E^u_{(x,y)}$. Поскольку Λ_f и Λ_g — гиперболические, то $T_xM^n = E^s_x \oplus E^u_x$ и $T_yM^k = E^s_y \oplus E^u_y$. Для любого $(v,w) \in T_{(x,y)}M$: $v \in T_xM^n$, $w \in T_yM^k$ и по определению прямой суммы существуют единственные представления $v = v^s + v^u$, $v^s \in E^s_x$, $v^u \in E^u_x$, и $w = w^s + w^u$, $w^s \in E^s_y$, $w^u \in E^u_y$. Тогда справедлива цепочка равенств:

$$(v,w) = (v^s_x,0) + (v^u_x,0) + (0,w^s_y) + (0,w^u_y) = (v^s_x,w^s_y) + (w^u_x,w^u_y),$$

причем данное представление в виде суммы единственно. Таким образом, $E^s_{(x,y)} = E^s_x \times E^s_y$ и $E^u_{(x,y)} = E^u_x \times E^u_y$. Проверим выполнение остальных условий определения:

а) матрица, определяющая дифференциал $D(f\times g)$, имеет блочно-диагональный вид с блоками Df и Dg, поэтому $D(f \times g)(E^s_{(x,y)}) = E^s_{(f(x),g(y))}$, $D(f \times g)(E^u_{(x,y)}) = E^u_{(f(x),g(y))}$;

б) докажем оценки действия дифференциала $D(f \times g)$ на $E^s_{(x,y)}$ (для $E^u_{(x,y)}$ доказательство аналогично). Существуют константы $c_f, c_g > 0$ и $0 < \lambda_f, \lambda_g < 1$

$$||Df^m(v)|| \leqslant c_f\lambda_f^m||v||,\ v \in E^s_x, m > 0,$$

$$||Dg^m(w)|| \leqslant c_g\lambda_g^m||w||,\ w \in E^s_y, m > 0,$$

и

$$||D(f \times g)^m(v,w)|| = ||(Df^m(v),Dg^m(w))|| = \sqrt{(||Df^m(v)||^2 + ||Dg^m(w)||^2)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{(c_f\lambda_f^m||v||)^2 + (c_g\lambda_g^m||w||)^2} \leqslant c_{f\times g}\lambda_{f\times g}^m\sqrt{||v||^2 + ||w||^2} = c_{f\times g}\lambda_{f\times g}^m||(v,w)||,$$

где $c_{f\times g} = max\{c_f,c_g\}$, $\lambda_{f\times g} = max\{\lambda_f,\lambda_g\}$, $(v,w) \in E^s_{(x,y)}$ и $m > 0$;

в) непрерывность $E^s_{(x,y)}$, $E^u_{(x,y)}$ непосредственно следует из непрерывности E^s_x, E^u_x, E^s_y, E^u_y.

Таким образом, Λ – гиперболическое множество.

5. Энергетическая функция для прямого произведения

В данном разделе мы докажем теорему 2.3.

Доказательство. Пусть M^n и M^k — гладкие замкнутые многообразия и $\varphi_f : M^n \to \mathbb{R}$ и $\varphi_g : M^k \to \mathbb{R}$ — энергетические функции для Ω-устойчивых диффеоморфизмов $f : M^n \to M^n$ и $g : M^k \to M^k$ соответственно. В силу теоремы о спектральном разложении Смейла диффеоморфизмы f, g имеют конечное число цепных компонент, т. е. $R_f = C^1_f \cup \dots \cup C^l_f$ и $R_g = C^1_g \cup \dots \cup C^m_g$. Выберем положительные константы a и b таким образом, что a — это обратное к разности между максимальным и минимальным значением функции φ_f на цепных компонентах диффеоморфизма f, а $b/2$ — обратное к минимальной разности между значениями функции φ_g на различных цепных компонентах диффеоморфизма g, т. е.

$$a = \begin{cases} \dfrac{1}{\max\limits_{i \neq j} |\varphi_f(C^i_f) - \varphi_f(C^j_f)|}, & \text{если } l > 1, \\ 1, & \text{если } l = 1, \end{cases} \tag{5.1}$$

$$b = \begin{cases} \dfrac{2}{\min\limits_{i \neq j} |\varphi_g(C^i_g) - \varphi_g(C^j_g)|}, & \text{если } m > 1, \\ 1, & \text{если } m = 1. \end{cases} \tag{5.2}$$

Докажем, что $\varphi = a\varphi_f + b\varphi_g : M^n \times M^k \to \mathbb{R}$ — энергетическая функция для прямого произведения диффеоморфизмов f и g. Для этого проверим выполнение следующих условий:

1) φ — функция Ляпунова для $f \times g$;

2) φ — гладкая;

3) множество критических точек $Cr(\varphi)$ совпадает с $R_{f\times g}$.

1. Докажем сначала убывание вдоль траекторий вне цепно рекуррентного множества. Рассмотрим точку $(x, y) \notin R_{f\times g}$, такую что $x \in M^n$, $y \in M^k$. Из теоремы 2.1 следует, что

$$(x, y) \in R_{f\times g} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R_f, \\ y \in R_g. \end{cases}$$

Значит, если $(x, y) \notin R_{f\times g}$, то либо $x \notin R_f$ и $\varphi_f(f(x)) < \varphi_f(x)$, либо $y \notin R_g$ и $\varphi_g(g(y)) < \varphi_g(y)$. Тогда

$$\varphi((f \times g)(x, y)) = a\varphi_f(f(x)) + b\varphi_g(g(y)) < a\varphi_f(x) + b\varphi_g(y) = \varphi(x, y),$$

т. е. функция φ убывает вдоль блуждающих орбит.

Докажем, что если (x_1, y_1), $(x_2, y_2) \in R_{f\times g}$, то $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$ тогда и только тогда, когда (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат в одной цепной компоненте.

Пусть $\varphi(x_1, y_1) = \varphi(x_2, y_2)$, тогда

$$\varphi(x_1, y_1) = a\varphi_f(x_1)+b\varphi_g(y_1) = a(\varphi_f(x_1)-\varphi_f(x_2))+b(\varphi_g(y_1)-\varphi_g(y_2))+a\varphi_f(x_2)+a\varphi_g(y_2) =$$

$$= a(\varphi_f(x_1) - \varphi_f(x_2)) + b(\varphi_g(y_1) - \varphi_g(y_2)) + \varphi(x_2, y_2),$$

а значит

$$a(\varphi_f(x_1) - \varphi_f(x_2)) = -b(\varphi_g(y_1) - \varphi_g(y_2))$$

и

$$a|\varphi_f(x_1) - \varphi_f(x_2)| = b|\varphi_g(y_1) - \varphi_g(y_2)|. \tag{5.3}$$

Предположим, что (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат в разных цепных компонентах. Тогда из уравнения 5.3 и теоремы 2.1 следует, что y_1, y_2 лежат в разных цепных компонентах диффеоморфизма g. Из определения констант a и b следует верность следующих неравенств:

$$a|\varphi_f(x_1) - \varphi_f(x_2)| \leqslant a \max_{i\neq j} |\varphi_f(C^i_f) - \varphi_f(C^j_f)| = 1;$$

$$b|\varphi_g(y_1) - \varphi_g(y_2)| \geqslant b \min_{i\neq j} |\varphi_g(C^i_g) - \varphi_g(C^j_g)| = 2.$$

Таким образом, равенство 5.3 выполняется только когда (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат в одной цепной компоненте.

Пусть (x_1, y_1) и (x_2, y_2) лежат в одной цепной компоненте $C_{f\times g}$, тогда существуют цепные компоненты C^i_f, C^j_g диффеоморфизмов f и g соответственно, такие что $x_1, x_2 \in$ $\in C^i_f$, $y_1, y_2 \in C^j_g$. Следовательно, $\varphi_f(x_1) = \varphi_f(x_2)$ и $\varphi_g(y_1) = \varphi_g(y_2)$.

Тогда

$$\varphi(x_1, y_1) = a\varphi_f(x_1) + b\varphi_g(y_1) = a\varphi_f(x_2) + b\varphi_g(y_2) = \varphi(x_2, y_2).$$

2. Функция φ – гладкая как линейная комбинация гладких функций.

3. Покажем, что градиент функции φ обращается в ноль только в цепно рекуррентных точках.

$\forall (x, y) \in M$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in M^n$, $y = (y_1, \dots, y_k) \in M^k$;

$$grad\ \varphi = a((\varphi_f)'_{x_1}, \dots, (\varphi_f)'_{x_n}, 0, \dots, 0) + b(0, \dots, 0, (\varphi_g)'_{y_1}, \dots, (\varphi_g)'_{y_k}) =$$

$$= (a(\varphi_f)'_{x_1}, \dots, a(\varphi_f)'_{x_n}, b(\varphi_g)'_{y_1}, \dots, b(\varphi_g)'_{y_k}),$$

т. е.

$$grad\ \varphi = 0 \Leftrightarrow grad\ \varphi_f = 0 \text{ и } grad\ \varphi_g = 0.$$

Таким образом, $\varphi = a\varphi_f + b\varphi_g$ — энергетическая функция для диффеоморфизма $f \times g$.

Благодарности. Исследование динамики диффеоморфизмов рассматриваемого класса поддержано грантом РНФ (проект № 21-11-00010), построение энергетической функции поддержано Лабораторией ДСП, НИУ ВШЭ, грантом правительства РФ (договор № 075-15-2019-1931).

Список литературы

1. Conley C. Isolated Invariant Sets and Morse Index // Am. Math. Soc. 1978. Vol. 38. DOI: https://doi.org/10.1090/cbms/038
2. Smale S. On gradient dynamical systems //Annals Math. 1961. Vol. 74. pp. 199–206.
3. Meyer K. R. Energy functions for Morse–Smale systems // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. pp. 1031–1040.
4. Franks J. Nonsingular Smale flow on S3 // Topology. 1985. Vol. 24, No. 3. pp. 265–282.
5. Колобянина А. Е., Круглов В. Е. Энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω-устойчивых потоков // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, №. 4. С. 434–441. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202004.434-441
6. Pixton D. Wild unstable manifolds// Topology. 1977. Vol. 16. pp. 167–172.
7. Grines V. Z., Laudenbach F., Pochinka O. V. Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. 2012. Vol. 278. pp. 27–40. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543812060041
8. Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Энергетическая функция для А-диффеоморфизмов поверхностей с одномерными нетривиальными базисными множествами // Динамические системы. 2015. Vol. 5, No. 1–2. pp. 31–37.
9. Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B. Existence of an energy function for three-dimensional chaotic «sink-source» cascades // Chaos. 2021. Vol. 31, No. 6. DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.10457
10. Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором // Труды ММО. 2015. Vol. 76, No. 2. pp. 271–286.
11. Гринес В. З., Носкова М. К., Починка О. В. Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях // Труды СВМО. 2015.Vol. 17, No. 3. pp. 12–17.
12. Barinova M. On Existence of an Energy Function for Ω-stable Surface Diffeomorphisms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43, No. 2. pp. 257–263.
13. Robinson C. Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos //Studies in Adv. Math. 1999. 506 p.

Поступила 21.11.2021; доработана после рецензирования 16.01.2022; принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. C. Conley, "Isolated Invariant Sets and Morse Index", *Am. Math. Soc.*, **38** (1978). DOI: https://doi.org/10.1090/cbms/038

2. S. Smale, "On gradient dynamical systems", *Annals Math.*, **74** (1961), 199–206.

3. K. Meyer, "Energy functions for Morse-Smale systems", *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031–1040.

4. J. Franks, "Nonsingular Smale flow on S3", *Topology*, **24**:3 (1985), 265–282.

5. A. E. Kolobyanina, V. E. Kruglov, "Morse-Bott energy function for surface Ω-stable flows", *Zhurnal SVMO*, **22**:4 (2020), 434–441.

6. D. Pixton, "Wild unstable manifolds", *Topology*, **16** (1977), 167–172.

7. V. Z. Grines,F. Laudenbach, O. V. Pochinka, "Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds", *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **278** (2012), 27–40. DOI: https://doi.org/10.1134/S0081543812060041

8. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, "Construction of an energy function for A-diffeomorphisms of one-dimensional non-trivial basic sets", *Dynamic Systems*, **5**:1-2 (2015), 31–37.

9. M. Barinova, V. Grines, O. Pochinka, B. Yu, "Existence of an energy function for three-dimensional chaotic "sink-source"' cascades jour Chaos", **31**:6 (2021). DOI: https://doi.org/10.48550/arXiv.2009.10457

10. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, "The construction of an energy function for three-dimensional cascades with a two-dimensional expanding attractor", *Tr. Mosk. Mat. Obs.*, **76**:2 (2015), 271–286.

11. V. Z. Grines, M. K. Noskova, O. V. Pochinka, "Construction of an energy function for A-diffeomorphisms of two-dimensional non-wandering sets on 3-manifolds", *Zhurnal SVMO*, **17**:3 (2015), 12–17.

12. M. Barinova, "On existence of an energy function for Ω-stable surface diffeomorphisms", *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **43**:2 (2022), 257–263.

13. C. Robinson, "Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos", *Studies in Adv. Math.*, 1999.

Submitted 21.11.2021; Revised 16.01.2022; Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.31-39
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

О топологической классификации многомерных полярных потоков

Е. Я. Гуревич, Н. С. Денисова

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Работа посвящена решению задачи о топологической классификации структурно-устойчивых потоков, восходящей к классическим работам Андронова, Понтрягина, Леонтович и Майера. К настоящему времени имеются исчерпывающие классификационные результаты для потоков Морса-Смейла (структурно-устойчивых потоков, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических траекторий), заданных на многообразиях, размерность которые не превышает трех, и совсем небольшое число результатов для высших размерностях. Это объясняется возрастающей сложностью топологических задач, которые возникают при описании структуры разбиения многомерного фазового пространства на траектории. В настоящей работе рассматривается класс $G(M^n)$ потоков Морса-Смейла на замкнутом связном ориентируемом многообразии M^n, неблуждающее множество которых состоит в точности из четырех точек: источника, стока и двух седел. Для случая, когда размерность n несущего многообразия равна 4 и выше, дополнительно предполагается, что одно из инвариантных многообразий каждого седлового состояния равновесия одномерно. Для потоков из этого класса описана топология несущего многообразия, получена оценка минимального числа гетероклинических кривых, необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности, а также описан алгоритм реализации стандартного представителя каждого класса топологической эквивалентности. Один из удивительных результатов работы состоит в том, что если при $n = 3$ имеется счетное множество многообразий, допускающих потоки из рассматриваемого класса, то в размерности $n > 3$ несущее многообразие всего одно (с точностью до гомеоморфизма).

Ключевые слова: поток Морса-Смейла, полярный поток, топологическая классификация, топология несущего многообразия, гетероклиничкеская кривая

Для цитирования: Гуревич Е. Я., Денисова Н. С. О топологической классификации многомерных полярных потоков // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 31–39. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.31-39

Об авторах:

Гуревич Елена Яковлевна, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

Денисова Наталья Сергеевна, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8099-6594, nsdenisova@edu.hse.ru

Original article

MSC2020 37D15

On a topological classification of multidimensional polar flows

E. Ya. Gurevich, N. S. Denisova

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. The work solves the classification problem for structurally stable flows, which goes back to the classical works of Andronov, Pontryagin, Leontovich and Mayer. One of important examples of such flows is so-called Morse-Smale flow, whose non-wandering set consists of a finite number of fixed points and periodic trajectories. To date, there are exhaustive classification results for Morse-Smale flows given on manifolds whose dimension does not exceed three, and a very small number of results for higher dimensions. This is explained by increasing complexity of the topological problems that arise while describing the structure of the partition of a multidimensional phase space into trajectories. In this paper authors investigate the class $G(M^n)$ of Morse-Smale flows on a closed connected orientable manifold M^n whose non-wandering set consists of exactly four points: a source, a sink, and two saddles. For the case when the dimension n of the supporting manifold is greater or equal than four, it is additionally assumed that one of the invariant manifolds for each saddle equilibrium state is one-dimensional. For flows from this class, authors describe the topology of the supporting manifold, estimate minimum number of heteroclinic curves, and obtain necessary and sufficient conditions of topological equivalence. Authors also describe an algorithm that constructs standard representative in each class of topological equivalence. One of the surprising results of this paper is that while for $n = 3$ there is a countable set of manifolds that admit flows from class $G(M^3)$, there is only one supporting manifold (up to homeomorphism) for dimension $n > 3$.

Keywords: Morse-Smale flows, polar flow, topological classification, topology of ambient manifold, heteroclinic curve

For citation: *E. Ya. Gurevich, N. S. Denisova.* On a topological classification of multidimensional polar flows. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 31–39. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.31-39

About the authors:

Elena Ya. Gurevich, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1815-3120, egurevich@hse.ru

Natalya S. Denisova, student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-8099-6594, nsdenisova@edu.hse.ru

1. Введение и формулировка результатов

Напомним, что гладкий поток $f^t : M^n \to M^n$, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности n, называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия, а инвариантные многообразия состояний равновесия пересекаются трансверсально.

Число ind_p, равное размерности неустойчивого многообразия W^u_p гиперболического состояния равновесия p, называется его *индексом Морса.* Состояния равновесия, индекс Морса которого равен $n(0)$, называется *источником* (*стоком*); состояние равновесия, индекс Морса которого меньше n, но больше нуля, называется *седловым.*

Пусть p, q — седловые состояния равновесия градиентно-подобного потока, такие что $W^u_p \cap W^s_q \neq \emptyset$. Пересечение $W^u_p \cap W^s_q$ будем называть *гетероклиническим пересечением.* Если пересечение $W^u_p \cap W^s_q$ одномерно, то каждую его компоненту связности будем называть *гетероклинической кривой.*

Полярным потоком называется градиентно-подобный поток, неблуждающее множество которого содержит один источник, один сток и произвольное число седловых состояний равновесия.

Обозначим $G(M^n)$ класс полярных потоков на ориентируемом многообразии M^n размерности $n \geq 2$, такой что для любого $f^t \in G(M^n)$ множество седловых состояний равновесия состоит ровно из двух точек, при этом если $n \geq 3$, то седловые состояния равновесия имеют индексы Морса, равные 1 и $(n-1)$ соответственно. При $n = 2$ это условие выполняется автоматически для всех потоков; в предложении 2.1 будет показано, что при $n = 3$ этому требованию удовлетворяет любой полярный поток с двумя седловыми состояниями равновесия. Будем обозначать ω (α) стоковое (источниковое) состояние равновесия потока $f^t \in G(M^n)$, σ_1, σ_{n-1} — седловые состояния равновесия индексов $1, (n-1)$ соответственно.

Напомним, что *линзой* $L_{p,q}$ называется многообразие, полученное склейкой полноториев Π_1 и Π_2 по диффеоморфизму $\varphi : \partial\Pi_1 \to \partial\Pi_2$, переводящему меридиан Π_1 полнотория в кривую $l \in \partial\Pi_2$, гомотопический класс которой определяется парой (p, q), где (p, q) — взаимно простые числа, $p > q > 0$. При этом гомотопический класс $(0, 1)$ соответствует меридиану полнотория (кривой, не гомотопной нулю на граничном торе, но гомотопной нулю на полнотории), а класс $(1, 0)$ – параллели. Трехмерную сферу $\mathbb{S}^3$ и прямое произведение $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ двумерной сферы на окружность будем также считать линзами $L_{1,0}, L_{0,1}$ соответственно.

Топология многообразия M^n и гетероклинические пересечения потоков из рассматриваемого класса описывается следующим образом.

Теорема 1.1. *Пусть M^n — ориентируемое замкнутое многообразие, допускающее поток $f^t \in G(M^n)$. Тогда:*

1) *если $n = 2$, то многообразие M^n является тором и поток f^t не имеет гетероклинических пересечений;*

2) *если $n = 3$, то многообразие M^n является линзой $L_{p,q}$ и блуждающее множество потока f^t содержит не менее чем p гетероклинических кривых;*

3) *если $n \geq 4$, то многообразие M^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$, при этом $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_{n-1}} = \emptyset$, а пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ либо пусто, либо состоит из конечного числа компонент связности.*

Из классических результатов Пейшото [1] следует, что любые два потока $f^t, g^t \in G(M^2)$ топологически эквивалентны. Топологическая классификация потоков из класса $G(M^3)$ следует из работ [2–3]. Идея работы [2] используется для получения необходимых и достаточных условий топологической эквивалентности потоков из класса $G(M^n)$, $n \geq 4$.

Положим $A_{f^t} = W^u_{\sigma_1} \cup \omega$, $R_{f^t} = W^s_{\sigma_{n-1}} \cup \alpha$, $V_{f^t} = M^n \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$. В предложении 2.3 мы показываем, что существует гладкое замкнутое подмногообразие $\Sigma_{f^t} \in V_{f^t}$, дифеоморфное $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$ и пересекающееся трансверсально с каждой траекторией потока f^t, лежащей в V_{f^t}.

Положим $L^s_{f^t} = W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}, L^u_{f^t} = W^u_{\sigma_{n-1}} \cap \Sigma_{f^t}$.

Т е о р е м а 1.2. *Потоки $f^t, g^t \in G(M^n)$, $n \geq 2$, топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{g^t}$, такой что $h(L^s_{f^t}) = L^s_{g^t}, h(L^u_{f^t}) = L^u_{g^t}$.*

2. Топология несущего многообразия и гетероклинические пересечения

Этот раздел посвящен доказательству теоремы 1.1.

Положим $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x^1 + \dots x^n \leq 1\}$, $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x^1 + \dots x^n = 1\}$, $n \geq 1$.

Обозначим через c_i число состояний равновесия произвольного градиентно-подобного потока, индекс Морса которых равен $i \in \{0, 1, \dots, n\}$, и через $\chi(M^n)$ эйлерову характеристику несущего многообразия M^n. В силу [4] (Теорема 4.1) справедливо следующее равенство

$$c_0 - c_1 + \dots + (-1)^n c_n = \chi(M^n). \tag{2.1}$$

Доказательство п. 1 теоремы 1.1. В случае $n = 2$ из формулы (2.1) непосредственно следует, что если многообразие M^2 допускает поток из класса $G(M^2)$, то его эйлерова характеристика равна 0. Поскольку многообразие M^2 предполагается ориентируемым, то отсюда следует, что оно диффеоморфно тору. По условию, определяющему класс $G(M^n)$, инвариантные многообразия седловых состояний равновесия пересекаются трансверсально. В случае $n = 2$ размерность эти инвариантных многообразий равна единице, следовательно, их пересечение либо пусто, либо нульмерно (т. е. состоит из изолированных точек). Если пересечение непусто, то в силу его инвариантности вместе с каждой точкой в пересечении содержится орбита этой точки, следовательно, пересечение одномерно. Полученное противоречие доказывает, что в случае $n = 2$ поток $f^t \in G(M^n)$ не имеет гетероклинических пересечений. Таким образом, п. 1 теоремы 1.1 доказан. Отметим, что при доказательстве отсутствия гетероклинического пересечения использовалось только условие трансверсальности пересечения и двумерность объемлющего многообразия, так что эти рассуждения доказывают, что любой градиентно-подобный поток на поверхности не имеет гетероклинических пересечений. В отличие от потоков, градиентно-подобные диффеоморфизмы на поверхностях допускают гетероклинические пересечения (см. [5–6], где получена топологическая классификация содержательных классов градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей).

Для доказательства теоремы 1.1 при $n > 2$ приведем несколько вспомогательных предложений.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Множество седловых состояний равновесия потока $f^t \in G(M^3)$ состоит в точности из седел σ_1, σ_2, индексы Морса которых равны 1 и 2 соответственно.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Эйлерова характеристика любого трехмерного многообразия равна нулю, а из определения класса $G(M^3)$ следует, что $c_0 = c_n = 1$, $c_1^2 + c_2^2 > 0$. Тогда из формулы (2.1) получаем, что $c_1 = c_2 = 1$, что и требовалось доказать.

Напомним, что α, ω обозначают источниковое и стоковое состояния равновесия потока $f^t \in G(M^n)$; σ_i обозначает седловое состояние равновесия такое, что $dim\, W^u_{\sigma_i} = i$, $i \in \{1, (n-1)\}$, $n \geq 3$.

П р е д л о ж е н и е 2.2. *Пусть $f^t \in G(M^n), n \geq 3$. Тогда:*

1) $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_{n-1}} = \emptyset, W^s_{\sigma_{n-1}} \cap W^u_{\sigma_1} = \emptyset$;

2) $cl\, W^u_{\sigma_1} = W^u_{\sigma_1} \cup \omega$, $cl\, W^s_{\sigma_{n-1}} = W^s_{\sigma_{n-1}} \cup \alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению многообразия $W^u_{\sigma_1}, W^s_{\sigma_{n-1}}$ одномерны, поэтому доказательство первого пункта утверждения аналогично доказательству отсутствия гетероклинических пересечений для случая $n = 2$. Докажем пункт 2. Пусть $x \in W^u_{\sigma_1}$. Так как многообразие M^n замкнуто, то орбита $O_x = \bigcup\limits_{t\in\mathbb{R}} f^t(x)$ точки x содержит последовательность, сходящуюся к некоторой точке $x_* \in M^n$. Тогда существует окрестность $U \in M^n$ точки x^* и возрастающая последовательность $n_1, \ldots, n_i, \ldots$, такая, что $f^{n_i}(x) \subset U$ для всех $i > 0$. Тогда для любого $i \in \mathbb{N}$ точка $f^{n_{i+1}-n_i}(f^{n_i}(x)) = f^{n_{i+1}}(x)$ лежит одновременно в U и в $f^{n_{i+1}-n_i}(U)$, поэтому $f^{n_{i+1}-n_i}(U) \cap U \neq \emptyset$, точка x_* является неблуждающей и $x \in W^s_{x_*}$. Так как $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_{n-1}} = \emptyset$, $W^u_{\sigma_1} \cap W^s_{\sigma_1} = \sigma_1$ и $W^s_\alpha = \alpha$, то единственный возможный вариант это $x_* = \omega$. Таким образом, $cl\, W^u_{\sigma_1} = W^u_{\sigma_1} \cup \omega$. Аналогично доказывается, что $cl\, W^s_{\sigma_{n-1}} = W^s_{\sigma_{n-1}} \cup \alpha$.

Следующее утверждение является непосредственным следствием [7] (Theorem B), [8] (Theorem 2).

У т в е р ж д е н и е 2.1. *Для любого градиентно-подобного потока f^t на гладком замкнутом многообразии M^n существует гладкая функция $\varphi : M^n \longrightarrow [0, n]$ такая, что:*

1) φ является функцией Морса;

2) Множество критических точек функции φ совпадает с Ω_{f^t} потока f^t;

3) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой точки $x \notin \Omega_{f^t}$ и любого $t > 0$.

4) Для любого состояния равновесия $\varphi(p) = dim\, W^u_p$;

5) для любого $c \in (0, n) \setminus \mathbb{N}$ множество $\varphi^{-1}(c)$ является гладким замкнутым подмногообразием, трансверсально пересекающим все траектории потока f^t.

Функция φ, описанная в утверждении 2.1, называется *самоиндексирующейся энергетической функцией* потока f^t.

П р е д л о ж е н и е 2.3. *Существует топологическое вложение $\eta : \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1 \to$ $\to M^n$, такое что:*

1) $A_{f^t} \subset int\, \eta(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$;

2) $R_{f^t} \subset M^n \setminus int\, \eta(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$;

3) $M^n \setminus int\, \eta(\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ гомеоморфно $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$;

4) $\Sigma_{f^t} = \eta(\partial\, \mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1)$ является гладким подмногообразием многообразия M^n и пересекает каждую траекторию, лежащую в V_{f^t}, трансверсально.

Доказательство. Пусть $\varphi : M^n \to [0, n]$ — самоиндексирующаяся энергетическая функция потока f^t. Положим $V_a = \varphi^{-1}([0, n/2])$. Из определения следует, что $A_{f^t} \subset V_a$, $R_{f^t} \subset M^n \setminus int\, V_a$ и множество $\Sigma_{f^t} = \partial\, V_a$пересекает каждую траекторию, лежащую в V_{f^t}, трансверсально. Покажем, что V_a диффеоморфно прямому произведению $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Положим $M_0 = \varphi^{-1}[0, 1-\varepsilon]$. В силу определения класса $G(M^n)$, M_0 лежит в устойчивом многообразии единственной стоковой точки W^s_ω. В локальных координатах функция φ около этой стоковой точки имеет вид $\varphi = x_1^2 + \cdots + x_n^2$, следовательно, множество M_0 диффеоморфно шару $x^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 - \varepsilon$.

Из теории Морса (см., например, [9]) следует, что множество V_a получается из M_0 следующим образом. Пусть $H^n_1 = \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$, $F = (\partial \mathbb{B}^1) \times \mathbb{B}^{n-1}$ и $\psi : F \to \partial M_0$ — гладкое вложение. Тогда V_a гомеоморфно фактор-пространству $M_0 \cup_\psi H^n_1$, полученному из объединения $M_0 \cup H^n_1$ отождествлением точек $x \in F$ и $\psi(x)$.

Пусть $\xi : M_0 \to \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$ — гомеоморфизм такой, что $\xi(\psi(F)) = \partial\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$. Тогда многообразие V_a гомеоморфно фактор-пространству $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1} \cup_{\xi\psi} \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$, полученному из объединения $\mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1} \cup \mathbb{B}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$ отождествлением точек $x \in F$ и $\xi\psi(x)$. Из конструкции следует, что это фактор-пространство гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$. Применением аналогичные рассуждения к функции $\tilde\varphi = n - \varphi$, являющейся самоиндексирующейся энергетической функцией потока f^{-t}, и получим, что многообразие $\tilde\varphi^{-1}([0, n/2])$ гомеоморфно $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{B}^{n-1}$.

Доказательство п. 2 теоремы 1.1. Докажем, что в случае $n = 3$ многообразие M^n является линзой $L_{p,q}$ и блуждающее множество потока f^t содержит не менее p гетероклинических кривых. Пусть $\eta : \mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1 \to M^3$ — топологическое вложение, удовлетворяющее заключению предложения 2.3. Положим $\Pi_\omega = \eta(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)$, $\Pi_\alpha = M^3 \setminus \eta(\mathbb{B}^2 \times \mathbb{S}^1)$, $L^s_{f^t} = W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}$, $L^u_{f^t} = W^u_{\sigma_2} \cap \Sigma_{f^t}$. Поскольку пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma$ трансверсально, то $L^s_{f^t}$ является замкнутым многообразием размерности 1, следовательно, гомеоморфно окружности. По определению многообразие M^3 является результатом склейки двух полноториев Π_ω, Π_α, следовательно, является линзой.

Поскольку $L^s_{f^t}$ является секущей для потока $f^t|_{W^s_{\sigma_1} \setminus \sigma_1}$, то $L^s_{f^t}$ ограничивает в $W^s_{\sigma_1}$ диск $D = \varphi^{-1}([1, 3/2]) \cap W^s_{\sigma_1}$, содержащий точку σ_1. Диск D принадлежит полноторию Π_ω и пересекается с его границей только по кривой $L^s_{f^t}$, поэтому $L^s_{f^t}$ является меридианом полнотория Π_ω. Аналогично доказывается, что $L^u_{f^t}$ является меридианом полнотория Π_α.

Из [10] (Глава 9B) следует, что топологический тип линзы M^3 зависит только от гомотопического класса кривой $L^s_{f^t}$ в полнотории Π_α. Возможны следующие варианты:

1) $L^s_{f^t}$ – параллель полнотория Π_α. Тогда M^3 есть сфера S^3, индекс пересечения $L^s_{f^t} \cap L^u_{f^t}$ равен единице, следовательно, минимальное число точек пересечения $L^s_{f^t} \cap$ $\cap L^u_{f^t}$ равно единице. Поскольку траектория каждой точки пересечения $L^s_{f^t} \cap L^u_{f^t}$ является гетероклинической, то минимальное число гетероклинических кривых в этом случае равно 1;

2) $L^s_{f^t}$ – меридиан полнотория Π_ω. Тогда M^3 гомеоморфно $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$, индекс пересечения $L^s_{f^t} \cap L^u_{f^t}$ равен нулю, и минимальное число гетероклинических кривых в этом случае равно 0;

3) $[L^s_{f^t}] = (p, q)$, $p^2 + q^2 \neq 0$. Тогда M^3 является линзой $L_{p,q}$, а минимальное число гетероклинических траекторий в этом случае равно p.

П. 2 доказан.

Для доказательства п. 3 теоремы 1.1 нам потребуется следующее утверждение, доказанное в [11].

Утверждение 2.2. *Пусть $\varphi : S^1 \times S^{n-2} \to S^1 \times S^{n-2}$ — гомеоморфизм. Тогда существует гомеоморфизм $\Phi : S^1 \times B^{n-1} \to S^1 \times B^{n-1}$ такой, что $\Phi|_{S^1 \times S^{n-2}} = \varphi$.*

Доказательство п. 3 теоремы 1.1. Покажем, что при $n \geq 4$ многообразие M^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ либо пусто, либо состоит из конечного числа компонент связности.

Конечность числа компонент пересечения $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ следует из наблюдения, что каждое из многообразий $W^s_{\sigma_1}, W^u_{\sigma_{n-1}}$ пересекает Σ_{f^t} по компактному подмножеству, следовательно, пересечения $W^s_{\sigma_1} \cap \Sigma_{f^t}, W^u_{\sigma_{n-1}} \cap \Sigma_{f^t}$ являются замкнутыми подмногообразиями Σ_{f^t}. Тогда пересечение $P = (W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}) \cap \Sigma_{f^t}$ также является замкнутым гладким подмногообразием и, следовательно, состоит из конечного числа компонент связности. Из утверждения 2.1 следует, что пересечение $W^s_{\sigma_1} \cap W^u_{\sigma_{n-1}}$ имеет структуру прямого произведения $P \times \mathbb{R}$, следовательно, также состоит из конечного числа компонент связности.

Для доказательства того, что многообразие M^n гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ определим некоторые модельные многообразия.

Введем на множестве $\mathbb{R}^n \setminus \{O\}$ отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $(x_1, \ldots, x_n) \sim (y_1, \ldots, y_n)$ тогда и только тогда, когда существует целое m такое, что $y_i = 2^m x_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, n\}$. Обозначим через $\hat{A} = (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})/_{\sim}$ фактор-пространство по этому отношению эквивалентности и через $p : \mathbb{R}^n \setminus \{O\} \to \hat{A}$ естественную проекцию. Внутренность шарового слоя $A = \left\{(x_1, ..., x_n) : 1 \leq \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \leq 4\right\}$ не содержит эквивалентных точек, а для любой точки, принадлежащей компоненте связности края $S^{n-1}_1 = \{(x_1, ..., x_n) : x_1^2 + ... + x_n^2 = 1\}$, $S^{n-1}_2 = \{(x_1, ..., x_n) : x_1^2 + ... + x_n^2 = 4\}$, найдется в точности одна эквивалентная ей точка. Поэтому пространство $\hat{A}$ гомеоморно многообразию, полученному из A отождествлением эквивалентных точек, принадлежащих сферам S^{n-1}_1, S^{n-1}_2. Из конструкции следует, что пространство $\hat{A}$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Положим $K = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\} | \, x_n = 0\}$, $R^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\} | \, x_n > 0\}$, $R^n_- = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{O\} | \, x_n < 0\}$. Аналогично рассуждениям выше доказывается, что множество $\widehat{K} = p(K)$ гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ и делит $\hat{A}$ на две компоненты связности $\widehat{R}^n_+ = p(R^n_+), \widehat{R}^n_- = p(R^n_-)$, замыкания которых гомеоморфны $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Из предложения 2.3 следует, что секущая Σ_{f^t} делит многообразие M^n на две компоненты связности, замыкания которых Π_ω, Π_α гомеоморфны $\mathbb{B}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Пусть $\psi_+ : \Pi_\omega \to cl\, \widehat{R}^n_+$ —произвольный гомеоморфизм. Из утверждения 2.2 следует, что ограничение гомеоморфизма ψ_+ на множество $\partial \Pi_\omega$ продолжается до гомеоморфизма $\psi_- : \Pi_\alpha \to cl, \widehat{R}^n_-$. Поэтому отображение $\Psi : M^n \to \hat{A}$, совпадающее с ψ_+ на множестве Π_ω и с ψ_- на множестве Π_α, является гомеоморфизмом. Таким образом, M^n гомеоморфно $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$. Теорема 1.1 доказана.

3. Топологическая классификация потоков из класса $G(M^n)$

Докажем теорему 1.2. Необходимость ее условий непосредственно следует из определения топологической эквивалентности потоков и свойств энергетической функции потока. Докажем достаточность. Предположим, что $f^t, g^t \in G(M^n)$ и существует гомеоморфизм $h : \Sigma_{f^t} \to \Sigma_{g^t}$, такой что $h(L^s_{f^t}) = L^s_{g^t}, h(L^u_{f^t}) = L^u_{g^t}$.

Построим гомеоморфизм $H : V_{f^t} \to V_{g^t}$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока g^t. Пусть $\varphi, \varphi' : M^n \to R$ — энергетические функции для потоков f^t, g^t соответственно. Для $c \in (0, n)$ положим $\Sigma_c = \varphi^{-1}(c)$, $\Sigma'_c = {\varphi'}^{-1}(c)$. Пусть $x \in V_{f^t}$. Тогда найдется единственное число c и единственная точка $y \in \Sigma_{f^t}$, такие что $x \in \varphi^{-1}(c)$ и x принадлежит траектории l_y точки y. Снабдим штрихом обозначения аналогичных объектов для потока g^t.

Определим гомеоморфизм $H : V_{f^t} \to V_{g^t}$ формулой $H(l_y \cap \Sigma_c) = l^{'}_{h(y)} \cap \ \Sigma^{'}_c$, где $y \in \Sigma_{f^t}, c \in (0, n)$.

Покажем, что гомеоморфизм H продолжается на множества A_{f^t} и R_{f^t}. При $c \in (0, 1)$ поверхности уровня Σ_c являются гладкими сферами размерности $(n-1)$. По построению гомеоморфизм H определен на множестве $\Sigma_c \setminus A_{f^t}$, являющемся сферой с двумя выколотыми точками (принадежащими A_{f^t}), поэтому его можно продолжить по непрерывности на всю сферу Σ_c и, следовательно, на множество $A_{f^t} \setminus \omega$. Аналогичным образом гомеоморфизм H продолжается на множество $R_{f^t} \setminus \alpha$ и далее по непрерывности на множество $\omega \cup \alpha$. Таким образом, построен гомеоморфизм $H : M^n \to M^n$, переводящий траектории потока f^t в траектории потока g^t с сохранением ориентации на траекториях. Теорема 1.2 доказана.

Благодарности. Публикация подготовлена в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021–2022 гг.

Список литературы

1. Peixoto M. M. On the classification of flows on 2-manifolds // Proceedings Symposium Dynamical Systems / ed. by M. M. Peixoto. 1973. pp. 389–419.

2. Fleitas G. Classification of gradient-like flows in dimension two and three // Bol. Soc. Mat. Brasil. 1975. No. 6. pp. 155–183.

3. Уманский Я. Л. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса-Смейла с конечным числом особых траекторий // Мат. сб. 1990. Т. 181, № 2. С. 212–239.

4. Smale S. Morse inequalities for a dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1960. Vol. 66. pp. 43–49.

5. Гринес В. З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // Матем. заметки. 1993. Т. 54, № 3. С. 3–17.

6. Морозов А. И., Починка О. В. Комбинаторный инвариант для поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 1. С. 71–80. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202001.71-80

7. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, No. 6. pp. 747–817.

E. Ya. Gurevich, N. S. Denisova. On a topological classification of multidimensional polar flows

8. Meyer K. R. Energy functions for Morse-Smale systems // Amer. J. Math., 1968. Vol. 90, No. 4. pp. 1031–1040.

9. Matsumoto Y. An introduction to Morse theory. Oxford University Press, 2001. 9 p.

10. Rolfsen D. Knots and links. AMS Chelsea Publishing, 2003. 439 p.

11. Max N. L. Homeomorphism of $S^n \times S^1$ / com. by S. Smale // Bulletin of the American Mathematical Society. 1967. Vol. 73, No. 6. pp. 939–942.

Поступила 18.12.2021; доработана после рецензирования 9.02.2022
принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. M. M. Peixoto, "On the classification of flows on 2-manifolds", *Proceedings Symposium Dynamical Systems*, 1973, 389–419.

2. G. Fleitas, "Classification of gradient-like flows in dimension two and three", *Bol. Soc. Mat. Brasil*, 1975, № 6, 155–183.

3. Ya. L. Umansky, "Necessary and sufficient conditions for topological equivalence of three-dimensional dynamical Morse-Smale systems with a finite number of singular trajectories", *Math. Col.*, **181**:2 (1990), 212–239 (In Russ.).

4. S. Smale, "Morse inequalities for a dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 43–49.

5. V. Z. Grines, "Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with a finite set of heteroclinic trajectories on surfaces", *Math. notes*, **54**:3 (1993), 3–17 (In Russ.).

6. A. I. Morozov, O. V. Pochinka, "Combinatorial invariant for Morse-Smale surface diffeomorphisms with orientable heteroclinic", *Journal of the Middle Volga Mathematical Society*, **22**:1 (2020), 71–80 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202001.71-80

7. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

8. K. R. Meyer, "Energy Functions for Morse–Smale Systems", *Amer. J. Math.*, **90**:4 (1968), 1031–1040.

9. Y. Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, Oxford University Press, 2001, 9 c.

10. D. Rolfsen, *Knots and links*, AMS Chelsea Publishing, 2003, 439 c.

11. N. L. Max, com. by S. Smale, "Homeomorphism of $S^n \times S^1$", *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**:6 (1967), 939–942.

Submitted 18.12.2021; Revised 9.02.2022; Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.40-53
Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

Топологическая сопряжённость неособых потоков с двумя замкнутыми траекториями на $S^2 \times S^1$

А. Л. Добролюбова, В. Е. Круглов

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей работе рассмотрены неособые потоки с двумя предельными циклами на многообразии $S^2 \times S^1$. Для таких потоков получена классификация с точностью до топологической сопряжённости, показано, что они имеют функциональный модуль устойчивости. Поскольку для каждого фиксированного аргумента функциональный модуль устойчивости принимает своё значение, из наличия функционального модуля следует наличие бесконечного числа числовых модулей устойчивости. Для получения данного результата была произведена линеаризация в окрестностях двух предельных циклов с помощью конструкции, построенной в работе М. Ирвина 1970 г. Был получен результат о наличии инвариантного с точностью до топологической сопряжённости двумерного слоения в окрестности предельного цикла, именно из наличия таких слоений и вытекает факт о функциональном модуле устойчивости. А именно, при рассмотрении области пересечения двух слоений и, соответственно, двух линеаризаций, которые действуют в бассейнах двух предельных циклов, функциональным модулем становится отображение, описывающее взаимное располодение слоя слоения в окрестности первого предельного цикла относительно слоя второго предельного цикла. Использованы результаты работы О. Починки и Д. Шубина 2022 г. о ровно двух классах топологической эквивалентности потоков в рассматриваемом классе и описании их отличий. В работе приведены рисунки, на которых показаны 2 класса топологической сопряжённости потоков из рассматриваемых классов. Также изображен процесс склейки $\mathbb{R}^3$ в многообразие с устойчивым предельным циклом. Показано построение образующей полнотория. Также проиллюстрирована согласованная и несогласованная ориентация предельных циклов, показаны инвариантные слоения, показан функциональный модуль.

Ключевые слова: топологическая классификация, модуль устойчивости, неособый поток, функциональный модуль, трёхмерное многообразие

Для цитирования: А. Л. Добролюбова, В. Е. Круглов Топологическая классификация в смысле топологической сопряжённости неособых потоков с двумя замкнутыми траекториями на многообразии вида $S^2 \times S^1$ // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 40–53. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.40-53

Об авторах:

Добролюбова Алиса Леонидовна, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603145, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7004-766X, alicedobrolub@mail.ru

Круглов Владислав Евгеньевич, научный сотрудник международной лаборатории динамических систем и приложений, аспирант, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603145, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4661-0288, kruglovslava21@mail.ru

Original article

MSC2020 37C15, 37C27

Topological conjugacy of non-singular flows with two limit cycles on $S^2 \times S^1$

A. L. Dobrolyubova, V. E. Kruglov

National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. In the paper, non-singular flows with two limit cycles on the manifold $S^2 \times S^1$ are considered. For such flows, a classification is obtained up to topological conjugacy, and it is shown that they have a functional modulus of stability. Since the functional modulus of stability takes on its own value for each fixed argument, the presence of such modulus implies the presence of an infinite number of numerical moduli of stability. To obtain this result, linearization is carried out in the neighbourhoods of two limit cycles using the construction from the work by M. Irwin. A result is obtained on the presence of a two-dimensional foliation in a neighborhood of the limit cycle; this foliation is invariant up to topological conjugacy. Existence of the functional modulus of stability follows from the presence of such foliations. Namely, when considering the intersection of two foliations and, accordingly, two linearizations acting in the basins of two limit cycles, the desired functional modulus is a map describing the relative position of the foliation layer in the neighborhood of the first limit cycle relative to the layer of the second limit cycle. The results are used from the work by Pochinka O. V. and Shubin D. D. on exactly two classes of topological equivalence of flows in the class under consideration and on description of their differences. The work includes figure which shows 2 classes of topological conjugacy of flows from the classes studied. Also there is a figure which shows the process of gluing $\mathbb{R}^3$ into a manifold with a stable limit cycle. Moreover, the construction of a solid torus is shown. The figures show consistent and inconsistent orientation of limit cycles, as well as invariant foliations. Also there is a figure which shows the functional modulus.

Keywords: topological conjugacy, modulus of stability, non-singular flow, limit cycle

For citation: *A. L. Dobrolyubova, V. E. Kruglov.* Topological conjugacy of non-singular flows with two limit cycles on $S^2 \times S^1$. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 40–53. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.40-53

About the authors:

Dobrolyubova Alisa Leonidovna, student, Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-7004-766X, alicedobrolub@mail.ru

Kruglov Vladislav Evgenyevich, Research Fellow, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Doctoral Student, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4661-0288, kruglovslava21@mail.ru

1. Введение

Потоки $f^t, f'^t\colon M \to M$ на многообразии M называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M \to M$, отображающий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением направления движения по траекториям. Два потока называются *топологически сопряжёнными*, если выполняется условие $h \circ f^t = f'^t \circ h$. Это означает, что h отображает траектории в траектории, сохраняя не только направление, но и время движения по траекториям. Найти инвариант, описывающий класс топологической эквивалентности или топологической сопряжённости потоков в некотором классе, означает получить *топологическую классификацию* класса потоков.

Понятие *грубых потоков* на плоскости были введено в статье А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1]. Неблуждающее множество таких потоков состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов, кроме того, седловые сепаратрисы пересекаются только трансверсально (для потоков на поверхности это означает, что отсутствуют *связки* – сепаратрисы, соединяющие седловые точки). Этот важный класс потоков был обобщён С. Смейлом в работе [2] на произвольные поверхности, назван классом *потоков Морса-Смейла* и классифицирован с точностью до топологической эквивалентности.

Конечность множества неблуждающих траекторий градиентно-подобного потока ведёт к идее сведения проблемы топологической классификации к комбинаторной проблеме. Впервые это было сделано Е. А. Леонтович и А. Г. Майером [3–4] для классификации потоков на двумерной сфере с конечным числом особых траекторий. Позже их результаты были расширены в исследованиях М. Пейшото [5], А. А. Ошемкова, В. В. Шарко [6], С. Ю. Пилюгина [7], А. О. Пришляка [8], где аналогичная проблема была решена для потоков Морса-Смейла на замкнутых многообразиях размерности 2, 3 и выше. Отдельно рассмотрена топологическая классификация неособых потоков с двумя предельными циклами на многообразиях произвольной размерности в работе О. В. Починки и Д. Д. Шубина [9].

Сделаны шаги и по классификации потоков Морса-Смейла в смысле топологической сопряжённости. В работе В. Е. Круглова, Д. С. Малышева, О. В. Починки и Д. Д. Шубина [10] построена классификация в смысле сопряжённости градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений на n-мерной сфере. В работе В. Е. Круглова и О. В. Починки [11] построена классификация в смысле сопряжённости для поверхностных потоков Морса-Смейла без траекторий, идущих из одного предельного цикла в другой, то есть с конечным числом модулей устойчивости. В работе [12] А. Е. Колобяниной и В.Е. Круглова обобщены результаты К. Мейера [13], и построена энергетическая функция для Ω-устойчивых потоков на поверхностях.

Ж. Палис в своей работе [14] указал, что наличие седловой связки у потока на поверхности приводит к тому, что класс топологической эквивалентности такого потока может содержать континуум классов топологической сопряжённости, описываемых параметрами, которые называются *модулями.* Он доказал, что каждая сепаратриса-связка даёт модуль, равный отношению собственных значений непересекающихся инвариантных многообразий седловых точек, соединённых связкой.

Цель настоящей работы – продолжить классификацию потоков Морса-Смейла в смысле топологической сопряжённости, и на этот раз рассмотреть случай предельных циклов. Для этого авторами обобщены результаты работы [9] на многообразии вида $S^2 \times S^1$ на случай сопряжённости. Рассмотрен класс неособых потоков с двумя предельными циклами на трёхмерных многообразиях и доказано, что потоки из такого класса имеют функциональный модуль, а также построена топологическая классификация в смысле сопряжённости.

2. Динамика рассматриваемого класса потоков

Поток называется неособым, если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических предельных циклов.

Введем класс $G_2(M)$ неособых потоков f^t на трёхмерном многообразии $M = S^2 \times S^1$ с двумя единственными предельными циклами c_1, c_2, где c_1 – устойчивый, c_2 – неустойчивый, с периодами T_1 и T_2 соответственно.

П р е д л о ж е н и е 2.1 ([9]). *Трёхмерное многообразие M допускает поток из класса $G_2(M)$. При этом, с точностью до топологической эквивалентности таких потоков существует ровно 2.*

На Рис. 2.1 схематически показаны два класса топологической эквивалентности потоков из класса $G_2(M)$.

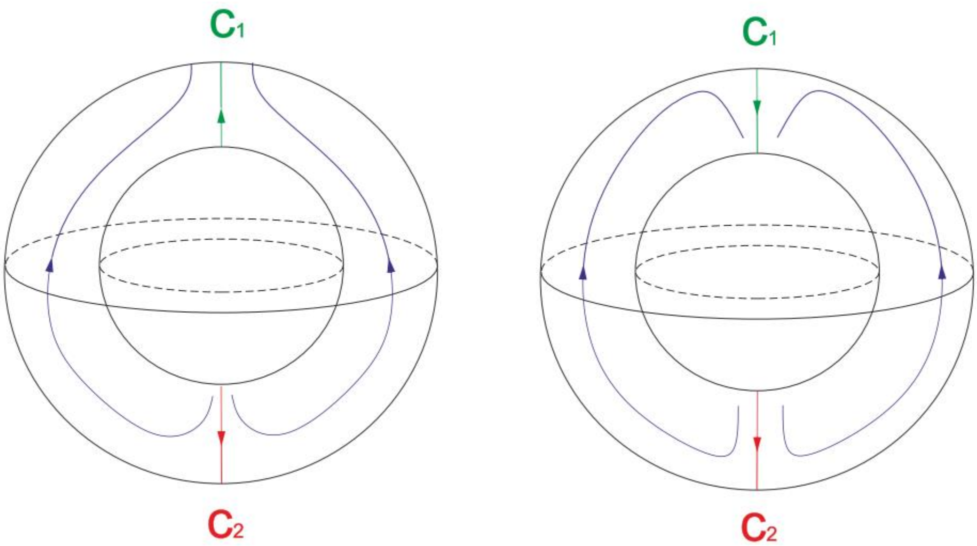


Рис. 2.1. Примеры топологически неэквивалентных потоков на $S^2 \times S^1$
Fig 2.1. The examples of topological non-equivalent flows on $S^2 \times S^1$

3. Линеаризация в окрестности предельного цикла

Определим поток A^t с помощью следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0, \\ \dot{y} = 0, \\ \dot{z} = 1. \end{cases}$$

Для $i = 1, 2$ зададим гомеоморфизм $g_i \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ формулой

$$g_i(x_i, y_i, z_i) = (2^{(-1)^i} x_i, 2^{(-1)^i} y_i, z_i - T_i)$$

и группу $G_i = \{{g_i}^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ (см. Рис. 3.1).

Положим $\Pi_i = \mathbb{R}^3/G_i$, а через $q_i\colon \mathbb{R}^3 \to \Pi_i$ обозначим естественную проекцию.

Обозначим через a_i^t поток, индуцированный на Π_i посредством A^t.

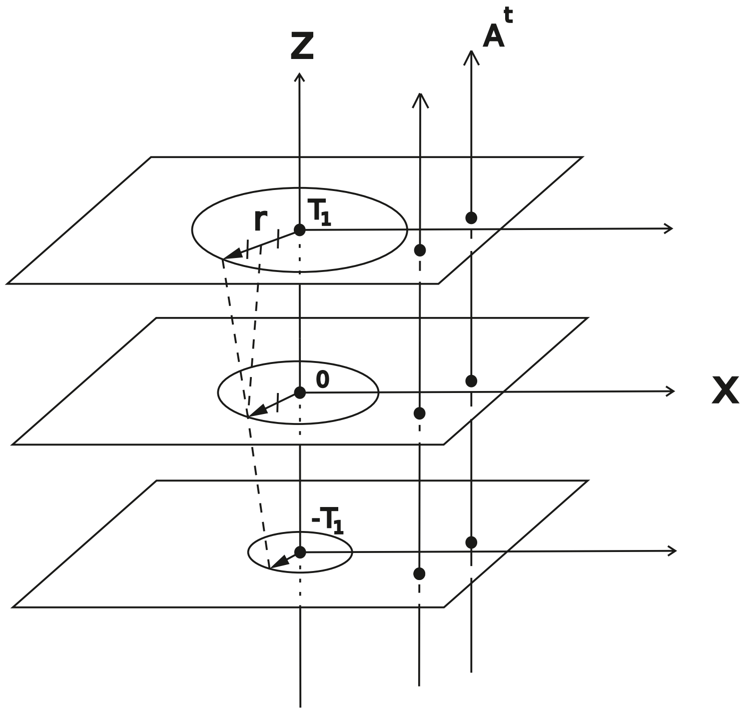


Рис. 3.1. Поток A^t, действие гомеоморфизма g_1
Fig 3.1. The flow A^t, the action of homeomorphism g_1

4. Два класса топологической эквивалентности: согласованная и несогласованная ориентация предельных циклов

Предложение 4.1 ([15]). *Неустойчивый предельный цикл c_2 потока $f^t\colon M \to M$ обладает неустойчивым многообразием $W^u_{c_2} = \{x \in M : \min\limits_{p\in c_2} d(p, f^t(x)) \to 0$ при $t \to -\infty\}$, таким что существует гомеоморфизм $\eta_2\colon W^u_{c_2} \to \Pi_2$, сопрягающий потоки $f|^t_{W^u_{c_2}}$ и a^t_2.*

Аналогичный факт имеет место для устойчивого многообразия предельного устойчивого цикла c_1, утверждающий, что поток f^t в устойчивом многообразии $W^s_{c_1} = \{x \in M : \min\limits_{p\in c_1} d(p, f^t(x)) \to 0$ при $t \to +\infty\}$ цикла c_1 сопряжен потоку a^t_1 посредством некоторого гомеоморфизма $\eta_1\colon W^s_{c_1} \to \Pi_1$.

Положим
$$V_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 2^{-z}\}, \mathbb{V}_2 = q_2(V_2).$$

Обозначим $\tilde{c}_i = q_i(Oz) = \eta_i(c_i)$. По построению факторпространство $\mathbb{V}_2$ гомеоморфно полноторию, а $U_2 = \eta_2^{-1}(\mathbb{V}_2)$ является замкнутой окрестностью цикла c_2. Зададим окрестность U_1 цикла c_1 как $U_1 = \mathrm{cl}(M \setminus U_2)$. Заметим, что U_1 является полноторием согласно [9]. Положим $\mathbb{V}_1 = \eta_1(U_1)$; при этом $\mathbb{V}_1$ – полноторий, являющийся подмножеством Π_1, содержащий внутри устойчивый предельный цикл $\tilde{c}_1$ потока a_1^t, траектории этого потока трансверсальны границе $\mathbb{V}_1$.

Положим, $\bar{\alpha}_2$ – компонента связности пересечения плоскости O_{yz} и $\mathrm{cl}(V_2)$, ориентированная в сторону возрастания координаты z (см. Рис. 4.1), а также $\alpha_2 = q_2(\bar{\alpha}_2)$ – образующая полнотория $\mathbb{V}_2$. По построению цикл $\tilde{c}_2$ и α_2 гомотопны. Положим $\alpha_1 = \eta_1(\eta_2^{-1}(\alpha_2))$ – образующая полнотория $\mathbb{V}_1$ по построению.

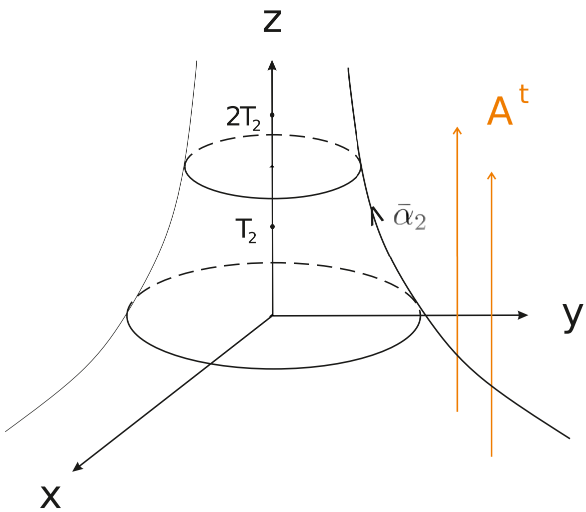


Рис. 4.1. Прообраз $\bar{\alpha}_2$ образующей α_2 полнотория $\mathbb{V}_2$

Fig 4.1. Preimage of $\bar{\alpha}_2$ of generator α_2 of solid torus $\mathbb{V}_2$

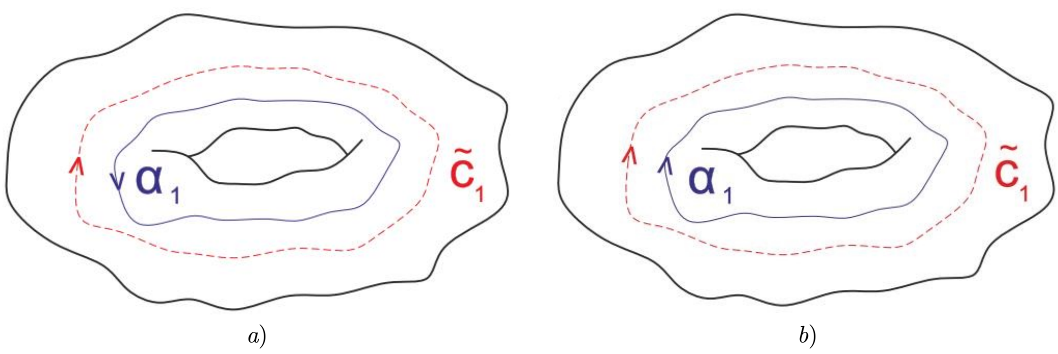


Рис. 4.2. a) несогласованная ориентация циклов c_1 и c_2; b) согласованная ориентация циклов c_1 и c_2

Fig 4.2. a) c_1 and c_2 with inconsistent orientation; b) c_1 and c_2 with consistent orientation

Введем понятие согласованности ориентаций предельных циклов. Будем говорить, что циклы c_1 и c_2 ориентированы согласованно, если гомотопны устойчивый цикл $\tilde{c}_1$ и α_1. В противном случае положим, что циклы c_1 и c_2 ориентированы несогласованно (см. Рис. 4.2). Присвоим потоку f^t значение $\nu = +1$ ($\nu = -1$) в первом (втором) случае.

5. Единственность инвариантного слоения в окрестности предельного цикла

Обозначим через $K_1 = M \setminus c_2$ и $K_2 = M \setminus c_1$. Согласно работе [15], существует гомеоморфизм $\eta_i\colon K_i \to \Pi_i$, сопрягающий поток $f^t|_{K_i}$ с потоком $\tilde{a}_i^t$.

Для точки $p \in K_i$ будем называть её локальными координатами (x_i, y_i, z_i) координаты некоторой точки $\hat{p} \in \mathbb{R}^3$, такой что $\eta_i(q_i(\hat{p})) = p$ и $0 \leq z_i \leq T_i$.

Обозначим через $\chi_i = \{z_i = c, c \in \mathbb{R}\}$ слоение на $\mathbb{R}^3$, представляющее из себя горизонтальные плоскости, $\tilde{\chi}_i = q_i(\chi_i)$, $\Xi_i = \eta_i^{-1}(\tilde{\chi}_i)$ (см. Рис. 5.1).

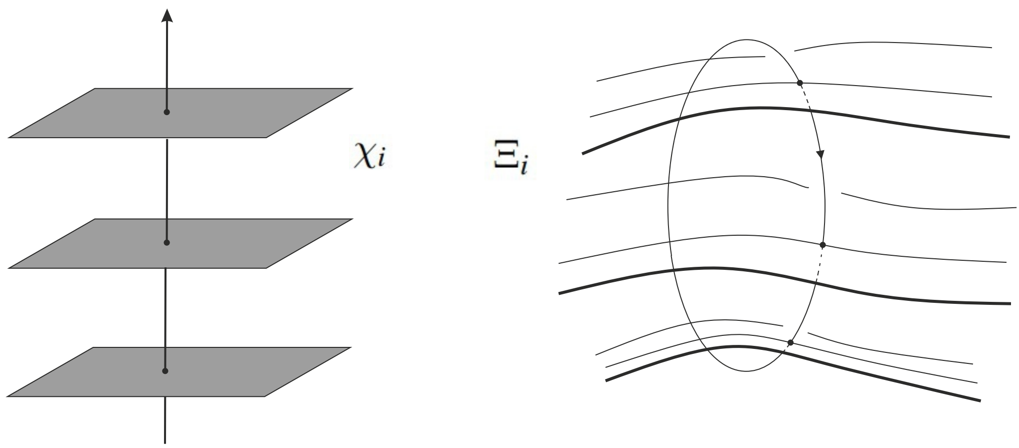


Рис. 5.1. Инвариантные слоения χ_i и Ξ_i
Fig 5.1. The invariant foliations Ξ and χ

Л е м м а 5.1. *Слоение Ξ_i единственно, т. е. оно не зависит от выбора сопрягающего гомеоморфизма η_i.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Вначале заметим, что существование хотя бы одного слоения Ξ_i с требуемыми свойствами следует из линеаризации. Действительно, пусть $\chi_i = \{y_i = c, c \in \mathbb{R}\}$ – слоение на $\mathbb{R}^2$, чьи слои являются горизонтальными прямыми, и пусть $\tilde{\chi}_i = q_i(\chi_i)$. Тогда

$$\Xi_i = \eta_i^{-1}(\tilde{\chi}_i).$$

Докажем единственность.

Положим, что Ξ_i и $\hat{\Xi}_i$ – два слоения с требуемыми свойствами, определённые на K_i. Покажем, что существует гомеоморфизм $\hat{\eta}_i\colon K_i \to \Pi_i$, сопрягающий $\phi^t|_{K_i}$ с a_i^t, и $\hat{\eta}_i(\hat{\Xi}_i) = \tilde{\chi}_i$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^3$ кольцо $\varpi = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$. Пусть $\tilde{\varpi} = \hat{\eta}_i^{-1}$ от $q_i(\varpi)$. Заметим, что для точки p_0, лежащей на внутренней границе $\tilde{\varpi}$, $\phi_i^T(p_0)$ лежит на внешней границе $\tilde{\varpi}$, таким образом, $\tilde{q}_i(\varpi)$ и $\tilde{\varpi}$ пересекают все траектории $K_i \backslash \Omega_i$ и $\Pi_i \backslash \tilde{c}_i$. Тогда пусть $\hat{\eta}_i(\phi^t(p)) = a_i^t(\hat{\eta}_i(p))$ для $z \in [\tilde{\varpi}]$. По непрерывности такой гомеоморфизм может быть продолжен на циклы.

Тогда гомеоморфизм $\tilde{\theta}_i = \hat{\eta}_i\eta_i^{-1} \colon \Pi_i \to \Pi_i$ сопрягает поток A^t с собой. Тогда существует поднятие

$$\theta_i = (\varphi_i^1(x_i, y_i, z_i), \varphi_i^2(x_i, y_i, z_i), \tilde{\psi}_i(x_i, y_i, z_i)) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

отображения $\tilde{\theta}_i$ ($q_i\theta_i = \tilde{\theta}_i q_i$), сопрягающее поток A^t с собой, где $\varphi_i^1(x_i, y_i, z_i)$,$\varphi_i^2(x_i, y_i, z_i)$, $\psi_i(x_i, y_i, z_i)$ – непрерывные отображения.

Гомеоморфизм θ_i переводит траектории в траектории, но траектории A^t являются вертикальными прямыми, поэтому

$$\varphi_i^1(x_i, y_i, z_i) = \varphi_i^1(x_i, y_i), \varphi_i^2(x_i, y_i, z_i) = \varphi_i^2(x_i, y_i).$$

По определению потока A^t:

$$A^t(x_i, y_i, z_i) = (x_i, y_i, z_i + t).$$

Тогда, в силу сопряжения,

$$\tilde{\psi}_i(x_i, y_i, z_i + t) = \tilde{\psi}_i(x_i, y_i, z_i) + t.$$

Перепишем $\tilde{\psi}_i(x_i, y_i, z_i)$ в виде $\tilde{\psi}_i(x_i, y_i, z_i) = z_i + \psi_i(x_i, y_i, z_i)$. Тогда

$$z_i + t + \psi_i(x_i, y_i, z_i + t) = z_i + \psi_i(x_i, y_i, z_i) + t$$

и, следовательно,

$$\psi_i(x_i, y_i, z_i + t) = \psi_i(x_i, y_i, z_i),\ t \in \mathbb{R}.$$

Это означает, что отображение ψ не зависит от z_i, положим

$$\psi_i(x_i, y_i, z_i) = \psi_i(x_i, y_i).$$

Таким образом, θ_i имеет форму

$$\theta_i(x_i, y_i, z_i) = (\varphi_i^1(x_i, y_i, z_i), \varphi_i^2(x_i, y_i, z_i), z_i + \psi_i(x_i, y_i)).$$

Поскольку $\Pi_i = \mathbb{R}^3/G_i$, где G_i – циклическая группа, порождённая гомеоморфизмом $g_i(x_i, y_i, z_i) = (\mu_i 2^{(-1)^i} x_i, \mu_i 2^{(-1)^i} y_i, z_i - T_i)$, и θ_i спроецировано с $\mathbb{R}^3$ на Π_i, тогда выполняется равенство $g_i\theta_i = \theta_i g_i$. Отсюда

$$\begin{aligned}((\varphi_i^1(x_i/2, y_i/2), \varphi_i^2(x_i/2, y_i/2), z_i + \psi_i(x_i/2, y_i/2) - T_i)) = \\ = ((\varphi_i^1(x_i)/2, \varphi_i^2(x_i)/2, (y_i)/2, z_i + \psi_i(x_i, y_i) - T_i))\end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\psi_i(x_i/2, y_i/2) = \psi_i(x_i, y_i).$$

Покажем, что в таком случае $\psi_i(x_i, y_i)$ является константой. Действительно, пусть $(x_i, y_i) \in X_iOY_i$ и $z_i^n = \psi_i(x_i/2^n, y_i/2^n), n \in \mathbb{N}$. Поскольку $\psi_i(x_i/2, (y_i/2) = \psi_i(x_i, y_i)$, имеем $z_i^n = \psi_i(x_i, y_i)$ для каждого натурального n. Поскольку ψ_i – непрерывное отображение, тогда последовательность констант $\psi_i(x_i/2^n, y_i/2^n)$ сходится к $\psi_i(0, 0)$ и $\psi_i(x_i, y_i) = \psi_i(0, 0)$ для каждого $(x_i, y_i) \in X_iOY_i$.

Таким образом, $\theta_i(x_i, y_i, z_i) = (\varphi_i^1(x_i, y_i), \varphi_i^2(x_i, y_i), z_i + b_i)$, где b_i является константой. Следовательно, θ_i сохраняет слоение χ_i. Тогда

$$\tilde{\chi}_i = \tilde{\theta}_i(\tilde{\chi}_i) = \hat{\eta}_i\eta_i^{-1}(\tilde{\chi}_i) = \hat{\eta}_i(\Xi_i),$$

и, поскольку $\tilde{\chi}_i = \hat{\eta}_i(\Xi_i)$, следовательно, $\Xi_i = \hat{\eta}_i^{-1}(\tilde{\chi}_i) = \hat{\Xi}_i$.

6. Функциональные модули

Зададим отображение $\phi\colon \Pi_1 \setminus \tilde{c}_1 \to \Pi_2 \setminus \tilde{c}_2$ формулой

$$\phi = \eta_2 \eta_1^{-1}.$$

Также зададим его поднятие $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \setminus Oz_1 \to \mathbb{R}^3 \setminus Oz_2$ $(q_2\Phi = \phi q_1)$. По определению гомеоморфизма Φ, заданного формулой

$$\Phi(x_1, y_1, z_1) = (\gamma(x_1, y_1, z_1), \tilde{\delta}(x_1, y_1, z_1)),$$

где $\gamma(x_1, y_1, z_1)\colon W_1 \to \mathbb{X}_2OY_2 \setminus \{(0,0,0)\}, \tilde{\delta}(x_1, y_1, z_1)\colon W_2 \to \mathbb{O}_{z_2}$ – непрерывные функции, $W_1, W_2 \subset \mathbb{X}_1OY_1 \backslash Oz_1$. Отображение Φ сопрягает поток A^t с потоком A^t, отправляя вертикальные траектории в вертикальные траектории, поэтому

$$\gamma(x_1, y_1, z_1) = \gamma(x_1, y_1),\ \tilde{\delta}(x_1, y_1, z_1 + t) = \tilde{\delta}(x_1, y_1, z_1) + t.$$

Положим $\delta(x_1, y_1, z_1) = \tilde{\delta}(x_1, y_1, z_1) - z_1$, из формулы выше следует, что $\delta(x_1, y_1, z_1) = = \delta(x_1, y_1)$, и Φ примет форму

$$\Phi(x_1, y_1, z_1) = (\gamma(x_1, y_1), z_1 + \delta(x_1, y_1)),$$

поэтому $W_1 = W_2 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0,0)\}$, и теперь $\gamma\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0,0)\}$. Напомним, что $g_i(x_i, y_i, z_1) = (2^{(-1)^i} x_i, 2^{(-1)^i} y_i, z_i - T_i)$, $G_i = \{g_i^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

Поскольку $\Pi_i = \mathbb{R}^3 / G_i$ и $\Phi\colon \mathbb{R}^3 \setminus Oz_1 \to \mathbb{R}^3 \setminus Oz_2$ проецируются на $\phi\colon \Pi_1 \setminus \tilde{c}_1 \to \Pi_2 \setminus \tilde{c}_2$, тогда $g_2\Phi = \Phi g_1$ в случае согласованной ориентации циклов и $g_2^{-1}\Phi = \Phi g_1$ в противном случае. Тогда

1) в случае согласованной ориентации предельных циклов:

$$(2\gamma_(x_1, y_1), z_1 + \delta(x_1, y_1) - T_2) = (\gamma(x_1/2, y_1/2), z_1 + \delta(x_1/2, y_1/2) - T_1)$$

и

$$\delta(x_1, y_1) = \delta(x_1/2, y_1/2) + (T_2 - T_1).$$

2) в случае несогласованной ориентации предельных циклов:

$$(2\gamma(x_1, y_1), z_1 + \delta(x_1, y_1) + T_2) = (\gamma(x_1/2, y_1/2), y_1 + \delta(x_1/2, y_1/2) - T_1)$$

и

$$\delta(x_1, y_1) = \delta(x_1/2, y_1/2) - (T_2 + T_1);$$

Действительно, отображение δ показывает меру смещения слоя ξ_1 слоения Ξ_1 от слоя ξ_2 слоения Ξ_2 в следующем смысле. Пусть $(x_1, y_1) \in X_1OY_1$, тогда $\gamma(x_1, y_1) \in X_2OY_2$ и $\eta_2^{-1}(q_2(\gamma(x_1, y_1))$ принадлежит слоению $\xi_2 \in \Xi_2$ для каждого $(x_1, y_1) \in X_1OY_1$. Из смещения δ следует, что

$$f^{\delta(x_1, y_1)}(\eta_2^{-1}(q_2(\gamma(x_1, y_1), 0)))$$

принадлежит слоению $\xi_1 \in \Xi_1$ для каждого $x, y \in X_1OY_1$ (см. Рис. 6.1).

Отображение $\delta\colon X_1OY_1 \to Oz_2$ может быть спроецировано в виде отображения $\hat{\delta}\colon \mathbb{T}^2 \to S^1$. Пусть $\beta\colon X_1OY_1 \to X_1OY_1$ задано формулой $\beta(x_1, y_1) = (x_1/2, y_1/2)$ и $B = \{\beta^n(x_1, y_1), n \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $\mathbb{T}^2 = X_1OY_1/B$, обозначим через $p_\beta\colon X_1OY_1 \to \mathbb{T}^2$ естественную проекцию. Пусть $e\colon Oz_2 \to Oz_2$ задано следующими формулами:

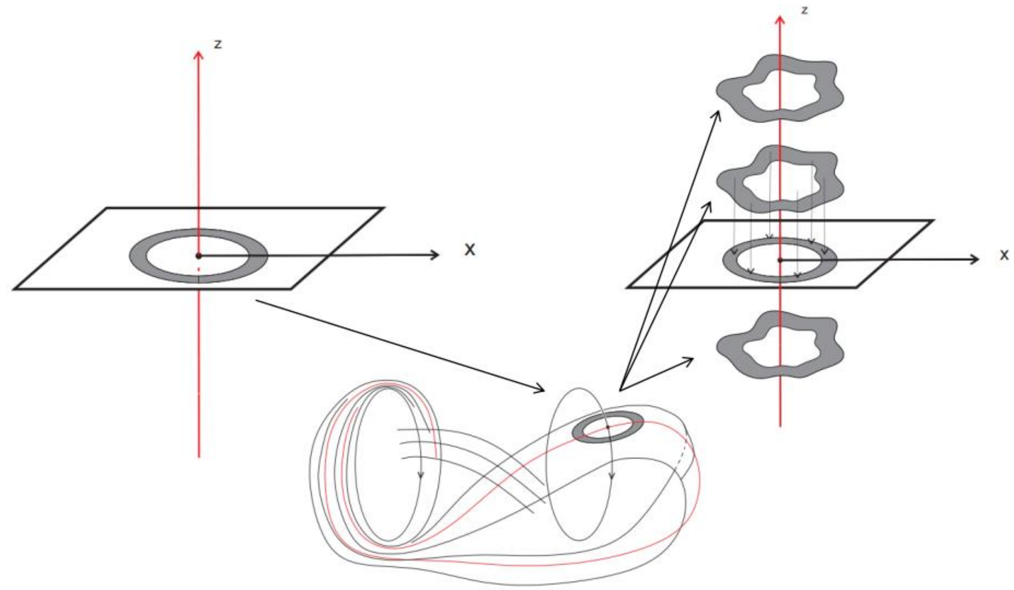


Рис. 6.1. Расположение слоя ξ_1 относительно слоя слоения ξ_2, $\eta_2(\eta_1^{-1}(\varpi))$ относительно ϖ

Fig 6.1. The location of an element of Ξ_1 relatively to an element of Ξ_2, $\eta_2(\eta_1^{-1}(\varpi))$ relatively to ϖ

1) $e(z_2) = z_2 + (T_2 - T_1)$, если $T_2 \neq T_1$, $e(z_2) = z_2 + 1$, если $T_2 = T_1$;

2) $e(z_2) = z_2 - (T_2 + T_1)$.

Пусть $E = \{e^n(z_2), n \in \mathbb{Z}\}$. Тогда $S^1 = \mathbb{R}/E$, обозначим через $p_e\colon Oz_2 \to S^1$ естественную проекцию. Таким образом, отображение $\hat{\delta}\colon \mathbb{T}^2 \to S^1$ определяется формулой

$$\hat{\delta}(\tau) = p_e(\delta(p_\beta^{-1}(\tau))),\ \tau \in \mathbb{T}^2.$$

Далее докажем, что класс эквивалентности данного отображения относительно следующего отношения эквивалентности является полным инвариантом потока $f^t\colon M \to M$ с точностью до топологической сопряженности, т. е. такой поток имеет функциональный модуль.

Назовем два отображения $\hat{\delta}, \hat{\delta}'$ *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\vartheta}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, сохраняющий ориентацию, и константа $s_0 \in S^1$, такая что

$$\hat{\delta}'(\hat{\vartheta}(\tau)) = \hat{\delta}(\tau) + s_0.$$

Обозначим все объекты на f'^t аналогично объектам на f^t.

Теорема 6.1. *Потоки $f^t, f'^t\colon M \to M$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда*

1) $T_i = T_i'$;

2) циклы c_1, c_2 и c_1', c_2' или попарно согласованно ориентированы, или попарно несогласованно ориентированы;

3) отображения $\hat{\delta}, \hat{\delta}'$ эквивалентны в смысле сопряженности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Необходимость.* Пусть $h\colon M \to M$ – гомеоморфизм, сопрягающий f^t с f'^t. Поскольку $h|_{c_i}$, $i = 1, 2$, тоже сопрягающий, имеем $T_i = T'_i$. Согласно предложению 2.1, у обоих потоков циклы имеют один класс согласованности ориентаций.

По предположению $hf^t = f'^t h$. Обозначим через $\theta_i\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ поднятие гомеоморфизма $h|_{K_i}$. Тогда θ_i топологически сопрягает A^t с собой. Аналогично доказательству леммы можно показать, что

$$\theta_i(x_i, y_i, z_i) = (\varphi_i(x_i, y_i), y_i + b_i),$$

где $\varphi_i(x_i, y_i)\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – непрерывное отображение; b_i – константа. Также имеем два отображения из $\mathbb{R}^3 \setminus Oz_1$ в $\mathbb{R}^3 \setminus Oz_2$, заданные формулами $\Phi(x_1, y_1, z_1) = (\gamma(x_1, y_1), z_1 + \delta(x_1, y_1))$, $\Phi'(x_1, y_1, z_1) = (\gamma'(x_1, y_1), z_1 + \delta'(x_1, y_1))$, где $\gamma(x_1, y_1)\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\}, \delta(x_1, y_1)\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R} \setminus \{(0,0,0)\}, \gamma'(x_1, y_1)\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\}, \delta'(x_1, y_1)\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0,0)\} \to \mathbb{R} \setminus \{(0,0,0)\}$ – непрерывные отображения. С другой стороны, имеем $\Phi' = \theta_2 \Phi \theta_1^{-1}$. Отсюда следует, что

$$\Phi'(x_1, y_1, z_1) = (\varphi_2(\gamma(\varphi_1^{-1}(x_1, y_1)), z_1 + b_2 + \delta(\varphi_1^{-1}(x_1, y_1)) - b_1).$$

Таким образом, $\delta'(x_1, y_1) = \delta(\varphi_1^{-1}(x_1, y_1)) + z_2^0$, где $z_2^0 = b_2 - b_1$ или, эквивалентно, $\delta'(\varphi_1(x_1, y_1)) = \delta(x_1, y_1) + z_2^0$. Положим $\vartheta = \varphi_1\colon X_1OY_1 \to X_1OY_1$ и $\hat{\vartheta} = p_\beta \vartheta p_\beta^{-1}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Тогда $\hat{\delta}'(\hat{\vartheta}(\tau)) = \hat{\delta}(\tau) + s_0$, где $s_0 = p_e(z_2^0)$ и $\tau = p_\beta(x_1, y_1)$.

Достаточность. Построим сопрягающий гомеоморфизм $h\colon M \to M$ для f^t и f'^t, что докажет теорему.

Во-первых, циклы c_1, c_2 и c'_1, c'_2 имеют одинаковые периоды соответственно и один знак согласованности ориентаций.

Во-вторых, существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\hat{\vartheta}\colon \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ и константа $s_0 \in S^1$ такая, что $\hat{\delta}'(\hat{\vartheta}(\tau)) = \hat{\delta}(\tau) + s_0$, $\tau \in \mathbb{T}^2$. Пусть $\vartheta\colon X_1OY_1$ – поднятие $\hat{\vartheta}$. Определим гомеоморфизм $\theta_1\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ формулой

$$\theta_1((x_1, y_1), z_1) = (\vartheta(x_1, y_1), z_1).$$

Тогда θ_1 сопрягает $\hat{A}^t$ с собой и может быть спроецировано на гомеоморфизм $h\colon K_1 \to K'_1$, сопрягающий $f^t|_{K_1}$ с $f'^t|_{K'_1}$ формулой

$$h|_{K_1} = \eta_1'^{-1} q_1 \theta_1 q_1^{-1} \eta_1.$$

Чтобы доказать, что гомеоморфизм h может быть продолжен на c_2 сопряжением $f^t|_{c_2}$ с $f'^t|_{c'_2}$ достаточно показать, что поднятие $\theta_2\colon \mathbb{R}^3 \setminus Oz_2 \to \mathbb{R}^3 \setminus Oz_2$ будет в форме

$$\theta_2(x_2, y_2, z_2) = (\varphi_2(x_2, y_2), z_2 + b_2),$$

где $\varphi_2(x_2, y_2)$ – непрерывное отображение; b_2 – константа. Действительно, пусть $\delta, \delta'\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – поднятия отображений $\hat{\delta}, \hat{\delta}'$ соответственно, такие что $\delta'(\vartheta(x_1, y_1)) = = \delta(x_1, y_1) + z_2^0$, где $p_e(z_2^0) = s_0$. По определению отображения Φ, Φ' имеем $\theta_2 = \Phi' \theta_1 \Phi^{-1}$, тогда

$$\theta_2(x_2, y_2, z_2) = (\gamma'(\vartheta(\gamma^{-1}(x_2, y_2)), z_2 - \delta(\gamma^{-1}(x_2, y_2) + \delta'(\vartheta(\gamma^{-1}(x_2, y_2)))).$$

Пусть $\varphi_2 = (\gamma' \vartheta \gamma^{-1})$, $(x_1, y_2) = \gamma^{-1}(x_2, y_2)$ и $b_2 = z_2^0$. Таким образом, $\theta_2(x_2, y_2, z_2) = = (\varphi_2(x_2, y_2), z_2 + b_2)$.

С л е д с т в и е 6.1. *Потоки из класса $G_2(M)$ имеют бесконечное число модулей устойчивости.*

Благодарности. Исследование выполнено при подержке гранта РНФ (проект № 17-11-01041), кроме леммы 5.1 о единственности слоения в окрестности предельного цикла, которая доказана при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90067. Авторы благодарят Починку Ольгу Витальевну за постановку задачи и внимательное прочтение рукописи.

Список литературы

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.
2. Smale S., Differentiable dynamical systems // Uspekhi Mat. Nauk. 1970. Vol. 25, No. 1. pp. 113–185.
3. Леонтович Е. А., Майер А. Г., О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Доклады Академии наук СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 251–257.
4. Леонтович Е. А., Майер А. Г., О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Доклады Академии наук СССР. 1955. Т. 103, № 4. С. 557–560.
5. Peixoto M. On the classification of flows on two manifolds// Dynamical systems Proc. 1971. pp. 389–419. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50033-3
6. Ошемков А. А., Шарко В. В., О классификации потоков Морса-Смейла на трёхмерном многообразии // Математический сборник. 1998. Т. 189, №. 8. С. 93–140.
7. Пилюгин С. Ю. Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса-Смейла без периодических траекторий на сферах // Дифференциальные уравнения. 1978. Т. 14, № 2. С. 245–254.
8. Пришляк А. О. Векторные поля Морса-Смейла без замкнутых траекторий на трёхмерных многообразиях // Математические заметки 2002. Т. 71, №. 2. С. 254–260.
9. Починка О. В., Шубин Д. Д. Неособые потоки с динамикой аттрактор-репеллер на n-многообразиях // Nonlinearity (принято в печать).
10. Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O., Shubin D. On Topological Classification of Gradient-like Flows on an n-sphere in the Sense of Topological Conjugacy // Regular and Chaotic Dynamics. 2020. Vol. 25, No. 6. pp. 716–728. DOI: https://doi.org/10.1134/S1560354720060143
11. Круглов В. Е., Починка О. В. Критерий и топологическая классификация потоков Морса-Смейла с конечным числом модулей устойчивости на поверхностях // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 6. С. 835–850.

12. Колобянина А. Е., Круглов В. Е. Энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω-устойчивых потоков // Журнал СВМО. 2020. Т. 22, № 4. С. 434—441. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202004.434-441

13. Meyer K. R. Energy functions for Morse-Smale systems // Amer. J. Math. 1968. Vol. 90. pp. 1031–1040.

14. Palis J. A differentiable invariant of topological conjugacy and moduli of stability // Asterisque. 1978. Vol. 51. pp.335–346.

15. Irwin M. C. A classification of elementary cycles // Topology. 1970. Vol. 9 No. 1, pp. 35–47. DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(70)90047-9

Поступила 01.12.2021; доработана после рецензирования 06.02.2022; принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, "Rough systems", *Doklady Akademii Nauk SSSR*, **14**:5 (1937), 247–250.

2. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Uspekhi Mat. Nauk.*, **25**:1 (1970), 113–185.

3. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, "About trajectories determining qualitative structure of sphere partition into trajectories", *Doklady Akademii nauk SSSR*, **14**:5 (1937), 251–257.

4. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, "On a scheme determining the topological structure of the separation of trajectories", *Doklady Akademii nauk SSSR*, **103**:4 (1955), 557–560.

5. M. Peixoto, "On the classification of flows on two manifolds", *Dynamical systems Proc.*, 1971, 389–419. DOI: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-550350-1.50033-3

6. A. A. Oshemkov, V. V. Sharko, "Classification of Morse–Smale flows on two-dimensional manifolds", *Matematicheskiy sbornik*, **189**:8 (1998), 93–140.

7. S. Yu. Pilyugin, "Phase diagrams that determine Morse–Smale systems without periodic trajectories on spheres", *Differential Equations*, **14**:2 (1978), 245–254.

8. A. O. Prishlyak, "Morse–Smale vector fields without closed trajectories on three-dimensional manifolds", *Mathematical Notes*, **71**:2 (2002), 254–260.

9. O. V. Pochinka, D. D. Shubin, "Vector Morse-Smale fields without closed trajectories on 3-dimensional manifolds", *Nonlinearity.*

10. V. Kruglov, D. Malyshev, O. Pochinka, D. Shubin, "On topological classification of gradient-like flows on an n-sphere in the sense of topological conjugacy", *Regular and Chaotic Dynamics*, **25**:6 (2020), 716–728. DOI: https://doi.org/10.1134/S1560354720060143

11. V. E. Kruglov, O. V. Pochinka, "Classification of the Morse - Smale flows on surfaces with a finite moduli of stability number in sense of topological conjugacy", *Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelineynaya dinamika*, **29**:6 (2021), 835–850.

12. A. E. Kolobyanina, V. E. Kruglov, "Morse-Bott energy function for surface Ω-stable flows", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **22**:4 (2020), 434–441. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202004.434-441

13. K. R. Meyer, "Energy functions for Morse-Smale systems", *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031–1040.

14. J. A. Palis, "A differentiable invariant of topological conjugacy and moduli of stability", *Asterisque*, **51** (1978), 335–346.

15. M. C. Irwin, "A classification of elementary cycles", *Topology*, **9**:1 (1970), 35–47. DOI: https://doi.org/10.1016/0040-9383(70)90047-9

Submitted 01.12.2021; Revised 06.02.2022; Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.54-65 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.163

Классификация надстроек над декартовыми произведениями меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности

С. Х. Зинина[1], П. И. Починка[2]

[1] ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)
[2] Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей статье вводится класс G декартовых произведений грубых преобразований окружности, меняющих ориентацию, и изучается их динамика. Как известно из работы А. Г. Майера, неблуждающее множество меняющего ориентацию диффеоморфизма окружности состоит из $2q$ периодических точек, где q – натуральное число. Поэтому декартово произведение двух таких диффеоморфизмов имеет $4q_1q_2$ периодических точек, где q_1 соответствует первому преобразованию, а q_2 – второму. Авторами описываются все возможные виды множества этих точек, состоящего из $2q_1q_2$ седловых точек, q_1q_2 стоков и q_1q_2 источников; при этом 4 точки являются неподвижными, а остальные имеют период 2. В теории гладких динамических систем весьма полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток на многообразии с размерностью на единицу большей; этот поток носит название надстройки над f. Авторами вводится понятие надстройки над диффеоморфизмами класса G, описываются всевозможные виды и число орбит надстройки. Кроме того, доказывается теорема о топологии многообразия, на котором задана надстройка: несущее многообразие рассматриваемых потоков гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Основной результат работы гласит, что для топологической эквивалентности надстроек над диффеоморфизмами класса G необходима и достаточна топологическая сопряженность диффеоморфизмов, над которыми берутся надстройки. Идея доказательства заключается в том чтобы показать, что из топологической эквивалентности двух надстроек ϕ^t и ϕ'^t следует топологическая сопряженность ϕ и ϕ'.

Ключевые слова: грубые системы дифференциальных уравнений, грубые преобразования окружности, меняющие ориентацию преобразования окружности, декартово произведение преобразований окружности, надстройка над диффеоморфизмом

Для цитирования: Зинина С. Х., Починка П. И. Классификация надстроек над декартовыми произведениями меняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 54–65. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.54-65

Об авторах:
Зинина Светлана Халиловна, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3002-281X, kapkaevasvetlana@yandex.ru
Починка Павел Ильич, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

(603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6377-747X, pavel-pochinka@yandex.ru

Original article

MSC2020 57N10

Classification of suspensions over cartesian products of orientation-reversing diffeomorphisms of a circle

S. Kh. Zinina[1], P. I. Pochinka[2]

[1] *National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)*
[2] *Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. This paper introduces class G containing Cartesian products of orientation-changing rough transformations of the circle and studies their dynamics. As it is known from the paper of A.G. Maier non-wandering set of orientation-changing diffeomorphism of the circle consists of $2q$ periodic points, where q is some natural number. So Cartesian products of two such diffeomorphisms has $4q_1q_2$ periodic points where q_1 corresponds to the first transformation and q_2 corresponds to the second one. The authors describe all possible types of the set of periodic points, which contains $2q_1q_2$ saddle points, q_1q_2 sinks, and q_1q_2 sources; 4 points from mentioned $4q_1q_2$ periodic ones are fixed, and the remaining $4q_1q_2 - 4$ points have period 2. In the theory of smooth dynamical systems, a very useful result is that, given a diffeomorphism f of a manifold, one can construct a flow on a manifold with dimension one greater; this flow is called the suspension over f. The authors introduce the concept of suspension over diffeomorphisms of class G, describe all possible types of suspension orbits and the number of these orbits. Besides that, the authors prove a theorem on the topology of the manifold on which the suspension is given. Namely, the carrier manifold of the flows under consideration is homeomorphic to the closed 3-manifold $\mathbb{T}^2\times[0,1]/\varphi$, where $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. The main result of the paper says that suspensions over diffeomorphisms of the class G are topologically equivalent if and only if corresponding diffeomorphisms are topologically conjugate. The idea of the proof is to show that the topological equivalence of the suspensions ϕ^t and ϕ'^t implies the topological conjugacy of ϕ and ϕ'.

Keywords: rough systems of differential equations, rough circle transformations, orientation-reversing circle transformations, Cartesian product of circle transformations, suspension over a diffeomorphism

For citation: *S. Kh. Zinina, P. I. Pochinka.* Classification of suspensions over cartesian products of orientation-reversing diffeomorphisms of a circle. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 54–65. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.54-65

About the authors:
Svetlana Kh. Zinina, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-3002-281X, kapkaevasvetlana@yandex.ru
Pavel I. Pochinka, Student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-6377-747X, pavel-pochinka@yandex.ru

1. Введение

В 1937 г. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин в работе [1] ввели понятие грубой системы дифференциальных уравнений на плоскости, которая имеет конечное число состояний равновесия и предельных циклов, причем все они являются гиперболическими и не существует траекторий, идущих из седла в седло. В 1939 г. А. Г. Майером [2] было введено понятие грубости для динамических систем с дискретным временем на окружности, в рамках доказательства грубости и типичности диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности были изучены грубые преобразования окружности, описана их динамика и получена топологическая классификация. В частности, им были рассмотрены меняющие ориентацию преобразования окружности и доказано, что они имеют четное число периодических точек, половина из которых является стоковыми, половина – источниковыми, при этом в точности две точки являются неподвижными, а все остальные имеют период 2. Класс топологической сопряженности такого диффеоморфизма полностью определяется числом периодических точек и типом неподвижных точек.

Из работы [3] известно, что произведения меняющих ориентацию грубых преобразований окружностей топологически сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены диффеоморфизмы на каждой компоненте декартового произведения. В работе [4] получена полная топологическая классификация n-мерных декартовых произведений грубых преобразований окружности.

В 1959 г. М. М. Пейшото [5] обобщил результаты А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина на произвольные замкнутые поверхности, отказавшись от требования близости к тождественному отображению для гомеоморфизма, сопрягающего динамику близких систем, ввел понятие «структурной устойчивости». После этих работ гиперболическая теория стала активно развиваться. Ч. Мане [6] и К. Робинсоном [7] получен критерий структурной устойчивости произвольных диффеоморфизмов на многообразиях. С. Смейлом, Дж. Палисом, В. ди Мелу в работах [8–11] построена теория простейших структурно устойчивых систем. В работе [12] представлено систематизированное изложения систем Морса-Смейла. Новый подход к классификации сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на ориентируемой поверхности изложен в работе [13].

В теории гладких динамических систем полезной является конструкция, позволяющая по данному диффеоморфизму f многообразия построить поток на многообразии с размерностью на единицу большей, этот поток носит название надстройки над f.

В работе [14] рассмотрены надстройки над диффеоморфизмами Морса–Смейла с тремя периодическими орбитами. Несложно показать, что надстройки над топологически сопряженными диффеоморфизмами являются топологически эквивалентными потоками. Обратное в общем случае неверно. Из работы [15] следует, что существуют эквивалентные потоки, являющиеся надстройками над топологически несопряженными грубыми сохраняющими ориентацию диффеоморфизмами. В то же время надстройки над меняющими ориентацию диффеоморфизмами окружностей эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены диффеоморфизмы окружностей. В настоящей работе авторами доказывается, что надстройки над декартовыми произведениями меняющих ориентацию грубых преобразований окружностей топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда сопряжены соответствующие диффеоморфизмы торов. Заметим, что несущее многообразие рассматриваемых потоков гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $(x, 1) \sim (\varphi(x), 0)$.

2. Меняющие ориентацию грубые преобразования окружности

А. Г. Майером в работе [2] были изучены грубые преобразования окружности в рамках доказательства грубости и типичности диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности, приведем лишь некоторые из его классификационных результатов, касающихся меняющих ориентацию грубых преобразований окружности. В работе [16] приведено современное изложение топологической классификации грубых преобразований окружности.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Пусть $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Множество $Per(f)$ состоит из $2q$ $(q \in \mathbb{N})$ периодических точек, две из которых являются неподвижными, а остальные имеют период 2.*

   Положим $\nu = -1$, если неподвижные точки f являются источниковыми; $\nu = 0$, если неподвижные точки f – стоковые и источниковые; $\nu = +1$, если неподвижные точки f – стоковые. При этом если $\nu = 0$, то q — нечетное, в остальных случаях q — четное (см. Рис. 2.1).

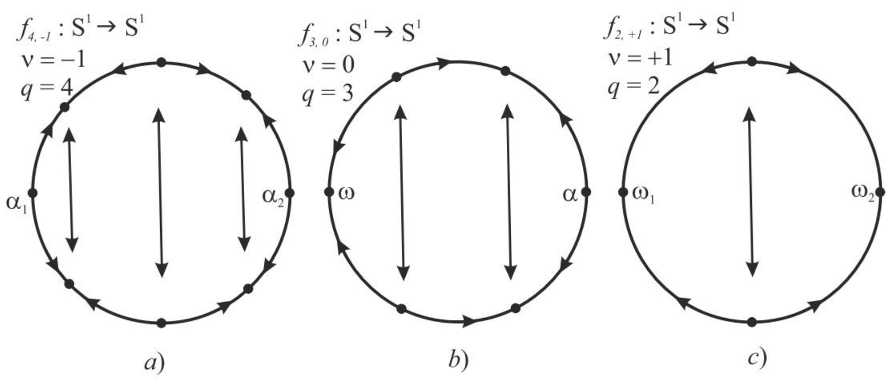


Рис. 2.1. Меняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности:
a) диффеоморфизм $f_{4,-1}$ с неподвижными точками α_1 и α_2;
b) диффеоморфизм $f_{3,0}$ с неподвижными точками α и ω; c) диффеоморфизм $f_{2,+1}$ с неподвижными точками ω_1 и ω_2

Fig 2.1. Orientation-reversing diffeomorphisms of the circle:
a) diffeomorphism $f_{4,-1}$ with fix points α_1 and α_2; b) diffeomorphism $f_{3,0}$ with fix points α and ω; c) diffeomorphism $f_{2,+1}$ with fix points ω_1 and ω_2

2. *Два диффеоморфизма f и f' с параметрами q, ν и q', ν' соответственно топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$ и $\nu = \nu'$.*

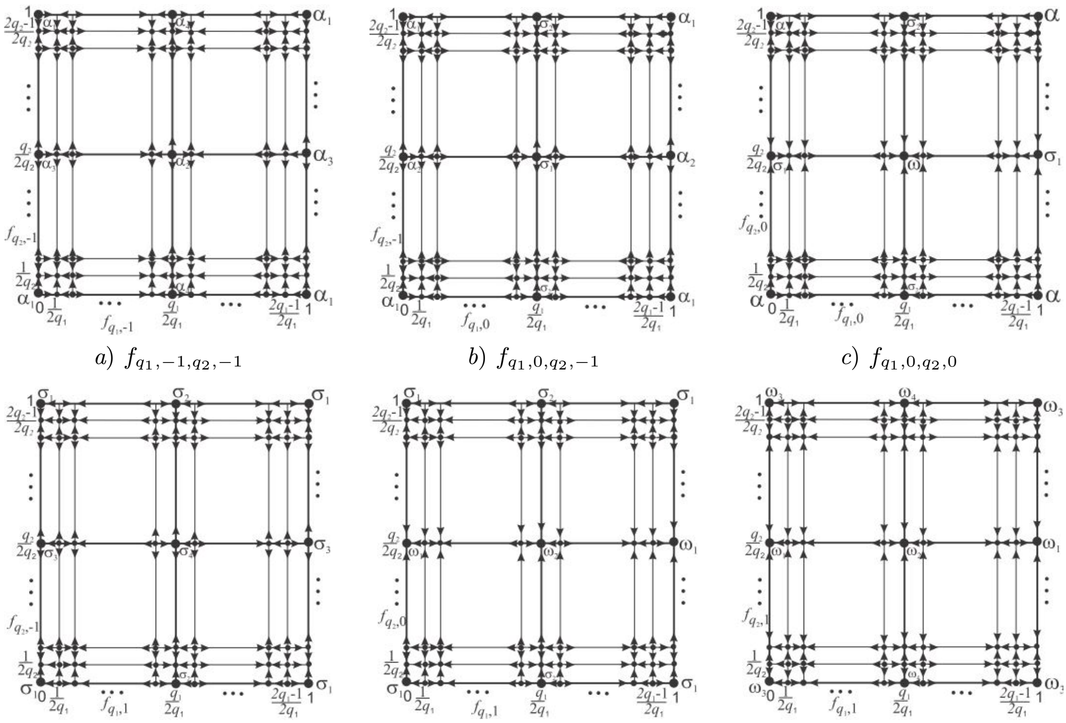
Обозначим через $f_{q,\nu} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с параметрами q и ν.

3. Декартово произведение меняющих ориентацию грубых преобразований окружностей

Рассмотрим класс G диффеоморфизмов двумерного тора следующего вида:

$$f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2} = f_{q_1,\nu_1} \times f_{q_2,\nu_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2.$$

Непосредственно из п. а) предложения 2.1 вытекают следующие свойства диффеоморфизмов данного класса.



a) $f_{q_1,-1,q_2,-1}$ *b)* $f_{q_1,0,q_2,-1}$ *c)* $f_{q_1,0,q_2,0}$

d) $f_{q_1,1,q_2,-1}$ *e)* $f_{q_1,1,q_2,0}$ *f)* $f_{q_1,1,q_2,1}$

Рис. 3.1. Фазовые портреты диффеоморфизмов класса G: a) $f_{q_1,-1,q_2,-1}$ с неподвижными источниками α_1, α_2, α_3, α_4; b) $f_{q_1,0,q_2,-1}$ с неподвижными точками α_1, α_2, σ_1, σ_2; c) $f_{q_1,0,q_2,0}$ с неподвижными точками α, ω, σ_1, σ_2; d) $f_{q_1,1,q_2,-1}$ с неподвижными седлами σ_1, σ_2, σ_3, σ_4; e) $f_{q_1,1,q_2,0}$ с неподвижными точками ω_1, ω_2, σ_1, σ_2; f) $f_{q_1,1,q_2,1}$ с неподвижными стоками ω_1, ω_2, ω_3, ω_4

Fig 3.1. Phase portraits of diffeomorphisms of class G: a) $f_{q_1,-1,q_2,-1}$ with fixed sources α_1, α_2, α_3, α_4; b) $f_{q_1,0,q_2,-1}$ with fixed points α_1, α_2, σ_1, σ_2; c) diffeomorphism $f_{q_1,0,q_2,0}$ with fixed points α, ω, σ_1, σ_2; d) $f_{q_1,1,q_2,-1}$ with fixed saddles σ_1, σ_2, σ_3, σ_4; e) $f_{q_1,1,q_2,0}$ with fixed points ω_1, ω_2, σ_1, σ_2; f) $f_{q_1,1,q_2,1}$ with fixed sinks ω_1, ω_2, ω_3, ω_4

Предложение 3.1. *Для любого диффеоморфизма* f_{q_1,ν_1,q_2,ν_2} *множество* $Per(f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2})$ *состоит из* $4q_1q_2$ *периодических точек, из которых* $2q_1q_2$ *седловых,* q_1q_2 *стоковых и* q_1q_2 *источниковых. Четыре точки из* $4q_1q_2$ *являются неподвижными, а остальные* $4q_1q_2 - 4$ *точки имеют период* 2. *При этом:*

1) *если* $\nu_1 + \nu_2 = -2$, *то все* 4 *неподвижные точки являются источниковыми (см. Рис. 3.1, a);*

2) *если* $\nu_1 + \nu_2 = -1$, *то две неподвижные точки являются источниковыми, две – седловыми (см. Рис. 3.1, b);*

3) *если* $\nu_1 = \nu_2 = 0$, *то одна неподвижная точка является источниковой, одна – стоковой и две – седловыми (см. Рис. 3.1, c);*

4) *если* $\nu_1\nu_2 = -1$, *то все неподвижные точки являются седловыми (см. Рис. 3.1, d);*

5) *если* $\nu_1 + \nu_2 = 1$, *то две неподвижные точки являются стоковыми, две – седловыми (см. Рис. 3.1, e);*

6) *если* $\nu_1 + \nu_2 = 2$, *то все* 4 *неподвижные точки являются стоковыми (см. Рис. 3.1, f).*

Предложение 3.2. *([3] теорема 1.1) Два диффеоморфизма* f_{q_1,ν_1,q_2,ν_2} *и* $f_{q'_1,\nu'_1,q'_2,\nu'_2}$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда либо* $q_1 = q'_1$, $q_2 = q'_2$, $\nu_1 = \nu'_1$, $\nu_2 = \nu'_2$, *либо* $q_1 = q'_2$, $q_2 = q'_1$, $\nu_1 = \nu'_2$, $\nu_2 = \nu'_1$.

4. Надстройки над грубыми преобразованиями окружности

Пусть дан диффеоморфизм $\phi : M^n \to M^n$ и ξ^t — поток на многообразии $M^n \times \mathbb{R}$, порожденный векторным полем, состоящим из единичных векторов, параллельных $\mathbb{R}$ и направленных в $+\infty$, такой что $\xi^t(x,r) = (x, r+t)$. Определим диффеоморфизм $g : M^n \times \mathbb{R} \to M^n \times \mathbb{R}$ формулой $g(x,r) = (\phi(x), r-1)$. Положим $G = \{g^k\ , k \in \mathbb{Z}\}$ и $M_\phi = (M^n \times \mathbb{R})/G$. Обозначим через $p_{_\phi} : M^n \times \mathbb{R} \to M_\phi$ естественную проекцию и через ϕ^t – поток на многообразии M_ϕ, заданный формулой $\phi^t(x) = p_{_\phi}(\xi^t(p_{_\phi}^{-1}(x)))$. Поток ϕ^t называется *надстройкой над диффеоморфизмом* ϕ (см., например, Рис. 4.1).

Несложно показать,что надстройки над топологически сопряженными диффеоморфизмами являются топологически эквивалентными потоками. Обратное в общем случае неверно. В силу результатов работы [15] надстройки над меняющими ориентацию грубыми диффеоморфизмами окружности эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены диффеоморфизмы окружностей.

Пусть $\phi = f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – диффеоморфизм тора и $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$ – надстройка над ним. Обозначим через n_{ϕ^t} число всех периодических орбит, через m_{ϕ^t} — число стоковых, через k_{ϕ^t} — источниковых, через l_{ϕ^t} — седловых орбит потока ϕ^t. Непосредственно из предложения 3.1 вытекают следующие свойства надстройки ϕ^t.

Предложение 4.1. *Число всех периодических орбит* n_{ϕ^t} *потока* $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$ *определяется по формуле:*

$$n_{\phi^t} = 2q_1q_2 + 2.$$

При этом:

1) *если* $\nu_1 + \nu_2 = -2$, *то* $l_{\phi^t} = q_1q_2$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + 2$;

2) *если* $\nu_1 + \nu_2 = -1$, *то* $l_{\phi^t} = q_1q_2 + 1$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + 1$;

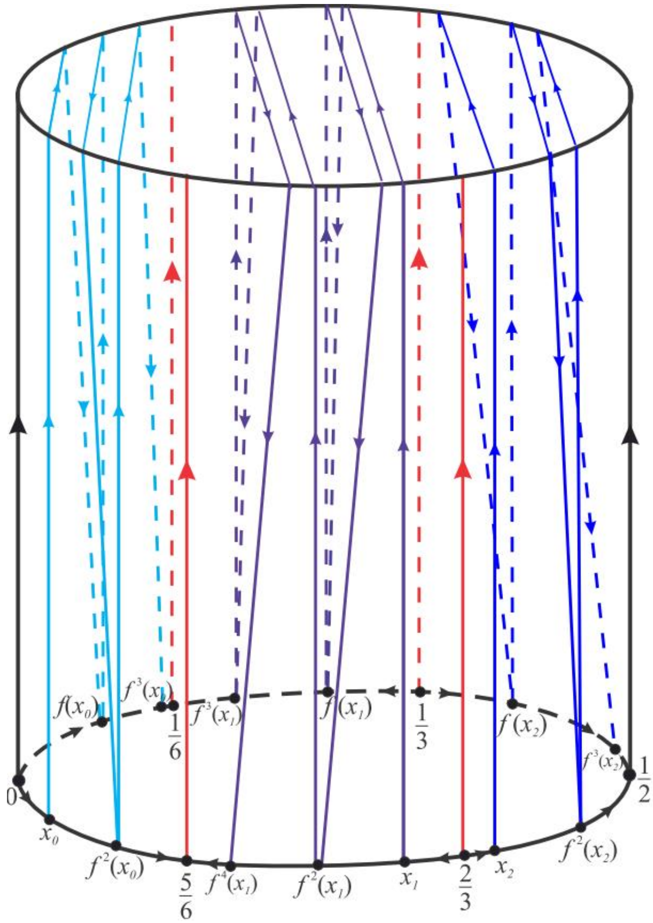


Рис. 4.1. Надстройка над диффеоморфизмом $f_{3,0}$
Fig 4.1. Suspension over a diffeomorphism $f_{3,0}$

3) если $\nu_1\nu_2 = -1$, то $l_{\phi^t} = q_1q_2 + 2$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$;

4) если $\nu_1 = \nu_2 = 0$, то $l_{\phi^t} = q_1q_2 + 1$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + \dfrac{1}{2}$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + \dfrac{1}{2}$;

5) если $\nu_1 + \nu_2 = 1$, то $l_{\phi^t} = q_1q_2 + 1$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + 1$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$;

6) если $\nu_1 + \nu_2 = 2$, то $l_{\phi^t} = q_1q_2$, $m_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2} + 2$, $k_{\phi^t} = \dfrac{q_1q_2}{2}$.

Рассмотрим декартово произведение периодической точки x меняющего ориентацию диффеоморфизма окружности f_{q_1,ν_1} на окружность $\mathbb{S}^1$. Положим $C_x = \{x\} \times \mathbb{S}^1$ и обозначим через C_x^t объединение всех орбит потока ϕ^t, проходящих через точки окружности C_x. Тогда если x – неподвижная точка, то C_x^t является бутылкой Клейна, если x – точка периода 2, то C_x^t – двумерный тор. Обозначим через Σ_x объединение седловых орбит, принадлежащих множеству C_x^t и через l_x – их число. Если $C_x^t = cl(W^s_{\Sigma_x})$, то положим $\delta_x = s$; если $C_x^t = cl(W^u_{\Sigma_x})$, то положим $\delta_x = u$. Введем аналогичные обозначения, связанные с периодической точкой y меняющего ориентацию диффеоморфизма окружности f_{q_2,ν_2}.

Пусть a_1, b_1 (a_2, b_2) – неподвижные точки отображения f_{q_1,ν_1} (f_{q_2,ν_2}). Положим

$$\Delta_{\phi^t,1} = \{(\delta_{a_1}, l_{a_1}), (\delta_{b_1}, l_{b_1})\},\ \Delta_{\phi^t,2} = \{(\delta_{a_2}, l_{a_2}), (\delta_{b_2}, l_{b_2})\}$$

$$\text{и } P_{\phi^t,1} = (q_1, \nu_1),\ P_{\phi^t,2} = (q_2, \nu_2).$$

П р е д л о ж е н и е 4.2. *Для потока $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$ реализуются следующие возможности:*

1. $P_{\phi^t,1} = (q_1, -1)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, -1)$

$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(s, \frac{q_2}{2}\right), \left(s, \frac{q_2}{2}\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(s, \frac{q_1}{2}\right), \left(s, \frac{q_1}{2}\right)\right\};$$

2. $P_{\phi^t,1} = (q_1, 0)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, -1)$

$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(u, \frac{q_2}{2} + 1\right), \left(s, \frac{q_2}{2}\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(s, \frac{q_1 + 1}{2}\right), \left(s, \frac{q_1 + 1}{2}\right)\right\};$$

3. $P_{\phi^t,1} = (q_1, 1)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, -1)$

$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(u, \frac{q_2}{2} + 1\right), \left(u, \frac{q_2}{2} + 1\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(s, \frac{q_1}{2} + 1\right), \left(s, \frac{q_1}{2} + 1\right)\right\};$$

4. $P_{\phi^t,1} = (q_1, 0)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, 0)$

$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(u, \frac{q_2 + 1}{2}\right), \left(s, \frac{q_2 + 1}{2}\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(u, \frac{q_1 + 1}{2}\right), \left(s, \frac{q_1 + 1}{2}\right)\right\};$$

5. $P_{\phi^t,1} = (q_1, 0)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, 1)$

$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(u, \frac{q_2}{2}\right), \left(s, \frac{q_2}{2} + 1\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(u, \frac{q_1 + 1}{2}\right), \left(u, \frac{q_1 + 1}{2}\right)\right\};$$

6. $P_{\phi^t,1} = (q_1, 1)$, $P_{\phi^t,2} = (q_2, 1)$

$$\text{и}\quad \Delta_{\phi^t,1} = \left\{\left(u, \frac{q_2}{2}\right), \left(u, \frac{q_2}{2}\right)\right\}, \Delta_{\phi^t,2} = \left\{\left(u, \frac{q_1}{2}\right), \left(u, \frac{q_1}{2}\right)\right\}.$$

Остальные случаи получаются «зеркально» перенумеровкой 1 и 2.

П р е д л о ж е н и е 4.3. *Для любого потока $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$ объемлющее многообразие гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $(x, 1) \sim (\varphi(x), 0)$.*

Доказательство. По построению диффеоморфизм ϕ индуцирует изоморфизм фундаментальной группы, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Тогда, в силу теоремы 2.6 работы [17], многообразие M_ϕ гомеоморфно замкнутому 3-многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]/\varphi$, где $\varphi : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ – алгебраический автоморфизм тора, заданный матрицей $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $(x,1) \sim (\varphi(x), 0)$.
Доказательство завершено.

Пусть $\phi = f_{q_1,\nu_1,q_2,\nu_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ и $\phi' = f_{q'_1,\nu'_1,q'_2,\nu'_2} : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ диффеоморфизмы торов и $\phi^t : M_\phi \to M_\phi$, $\phi'^t : M_{\phi'} \to M_{\phi'}$ – надстройки над данными диффеоморфизмами.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 4.1. *Надстройки ϕ^t и ϕ'^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда топологически сопряжены диффеоморфизмы ϕ и ϕ'.*

Для доказательства теоремы достаточно показать, что из топологической эквивалентности надстроек ϕ^t и ϕ'^t следует топологическая сопряженность ϕ и ϕ'. Другими словами, в силу предложения 4.2 достаточно показать, что из эквивалентности надстроек ϕ^t и ϕ'^t следует, что $q_1 = q'_1$, $\nu_1 = \nu'_1$, $q_2 = q'_2$, $\nu_2 = \nu'_2$ или $q_1 = q'_2$, $\nu_1 = \nu'_2$, $q_2 = q'_1$, $\nu_2 = \nu'_1$.

Доказательство. Предположим, что существует гомеоморфизм $h : M_\phi \to M_{\phi'}$, переводящий орбиты потока ϕ^t в орбиты потока ϕ'^t. Из определения эквивалентности следует, что гомеоморфизм h переводит замыкания инвариантных многообразий седловых орбит потока ϕ^t в аналогичные замыкания потока ϕ'^t с сохранением устойчивости. В силу предложения 4.2, все такие замыкания формируют два семейства попарно непересекающихся торов и бутылок Клейна так, что в каждом семействе в точности две бутылки Клейна. Тогда гомеоморфизм h переводит эти поверхности потока ϕ^t в аналогичные поверхности потока ϕ'^t. В частности, каждая пара непересекающихся бутылок Клейна переходит в аналогичную пару. Кроме того, эти бутылки Клейна должны содержать одинаковое количество седловых орбит.

Отсюда следует, что $\Delta_{\phi^t,1} = \Delta_{\phi'^t,1}$ и $\Delta_{\phi^t,2} = \Delta_{\phi'^t,2}$ или $\Delta_{\phi^t,1} = \Delta_{\phi'^t,2}$ и $\Delta_{\phi^t,2} = \Delta_{\phi'^t,1}$. Или, равносильно, $q_1 = q'_1$, $\nu_1 = \nu'_1$, $q_2 = q'_2$, $\nu_2 = \nu'_2$ или $q_1 = q'_2$, $\nu_1 = \nu'_2$, $q_2 = q'_1$, $\nu_2 = \nu'_1$.
Доказательство завершено.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 20-31-90069 и фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС» проект № 19-7-1-15-1. Авторы благодарят О. В. Починку за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

Список литературы

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Доклады АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247–250.

2. Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность // Ученые записки Горьк. гос. ун-та. 1939. Т. 12. С. 215–229.

3. Гуревич Е. Я., Зинина С. Х. О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локальными прямыми произведениями // Журнал Средневолжского математического общества. 2015. Т. 17, № 1. С. 37–47.

4. Голикова И. В., Зинина С. Х. Топологическая сопряженность n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности // Известия Высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, № 6. С. 851–862. DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862

5. Peixoto M. M. On structural stability // Ann. Math. 1959. Vol. 69. pp. 199–222.

6. Mane R. A proof of C^1-stability conjecture // Publ. Math. IHES. 1988. Vol. 66. pp. 161–210.

7. Robinson C. Structural stability of C^1 diffeomorphisms // J. Diff. Equat. 1976. Vol. 22, No 1. pp. 28–73.

8. Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. 1970. Т. 25. С. 113–185.

9. Palis J. On Morse-Smale dynamical systems / Topology. 1969. Vol. 8, No 4. pp. 385–404.

10. Palis J., Smale S. Structural stability theorems. Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. 1970. Vol. 14. pp. 223–231.

11. Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем: введение: пер. с англ. М.: Мир, 1986. 301 с.

12. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Switzerland: Springer, 2016. 313 p. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3

13. Морозов А. И., Починка О. В. Комбинаторный инвариант для поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 1. С. 71–80. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202001.71-80

14. Шубин Д. Д. Топология несущих многообразий несингулярных потоков с тремя нескрученными орбитами // Известия Высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29, вып. 6. С. 863–868. DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868

15. Голикова И. В., Починка О. В. Надстройки над грубыми преобразованиями окружности [Электронный ресурс] // Огарев-online. 2020. № 13. Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/nadstrojki-nad-grubymi-preobrazovaniyami-okruzhnosti

16. Колобянина А. Е., Ноздринова Е. В., Починка О. В. Современное изложение классификации грубых преобразований окружности // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20, № 4. С. 408–418. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201804.408-418

17. Hatcher A. Notes on basic 3-manifold topology. 2007. 60 p. Available at: https://pi.math.cornell.edu/hatcher/3M/3Mfds.pdf (accessed: 15.11.2021).

Поступила 01.12.2021; доработана после рецензирования 10.02.2022; принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

References

1. A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, "Rough systems", *Reports of the Academy of Sciences of the USSR*, **14**:5 (1937), 247–250 (In Russ.).

2. A. G. Maier, "A rough transformation of a circle into a circle", *Uch. Zap. Gorkovskogo Univ.*, **12** (1939), 215–229 (In Russ.).

3. E. Ya. Gurevich, S. Kh. Zinina, "On topological classification of gradient-like systems on surfaces, that are locally direct product", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **17**:1 (2015), 37–47 (In Russ.).

4. I. V. Golikova, S. Kh. Zinina, "Topological conjugacy of n-multiple Cartesian products of circle rough transformations", *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Applied Nonlinear Dynamics*, **29**:6 (2021), 851–862 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-851-862

5. M. M. Peixoto, "On structural stability", *Ann. Math.*, **69** (1959), 199–222.

6. R. Mane, "A proof of C^1 stability conjecture", *Publ. Math. IHES*, **66** (1988), 161–210.

7. C. Robinson, "Structural stability of C^1 diffeomorphisms", *J. Diff. Equat.*, **22**:1 (1976), 28–73.

8. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

9. J. Palis, "On Morse-Smale dynamical systems", *Topology*, **8**:5 (1969), 385–404.

10. J. Palis, S. Smale, "Structural stability theorems", *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 223–231.

11. J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems. An introduction*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982, 198 p.

12. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical systems on 2- and 3-manifolds.*, Springer, Switzerland, 2016 DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-44847-3, 313 p.

13. A. I. Morozov, O. V. Pochinka, "Combinatorial invariant of Morse-Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **22**:1 (2020), 71–80 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202001.71-80

14. D. D. Shubin, "Topology of ambient manifolds of non-singular Morse – Smale flows with three periodic orbits", *Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Applied Nonlinear Dynamics*, **29**:6 (2021), 863–868 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-6-863-868

15. I. V. Golikova, O. V. Pochinka, "Suspension over rough circle transformation", *Ogarev-Online*, 2020, no. 13 (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/nadstrojki-nad-grubymi-preobrazovaniyami-okruzhnosti.

16. A. E. Kolobyanina, E. V. Nozdrinova, O. V. Pochinka, "Classification of rough transformations of a circle from a modern point of view", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **20**:4 (2018), 408–418 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.20.201804.408-418

17. A. Hatcher, *Notes on basic 3-manifold topology*, 2007, 60 p., https://pi.math.cornell.edu/hatcher/3M/3M.pdf.

Submitted 01.12.2021; Revised 10.02.2022; Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.66-75 ISSN 2079-6900 (Print)
Original article ISSN 2587-7496 (Online)

MSC2020 34A05, 70E17, 70E40

On the Movement of Gyrostat under the Action of Potential and Gyroscopic Forces

A. A. Kosov, E. I. Semenov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation)

Abstract. A system of differential equations is considered that describes the motion of a gyrostat under the action of the moment of potential, gyroscopic and circular-gyroscopic forces. The form of the moment of forces is indicated for which the system has the three first integrals of a given form. An analog of V.I. Zubov's theorem for representing solutions of gyrostat equations by power series is given, and the possibility of using this approach to predict motions is shown. For an analogue of the Lagrange case, integration in quadratures is performed. Analogues of the case of full dynamical symmetry and the Hess case are also indicated. Based on the principle of optimal damping developed by V.I. Zubov, a design of the control moment created by circular-gyroscopic forces is proposed, which ensures that one of the coordinates reaches a constant (albeit unknown in advance) value or the transition of the state vector to the level surface of the particular Hess integral. A numerical example is given, for which a two-parameter family of exact almost periodic solutions, represented by trigonometric functions, is found.

Keywords: gyrostat, moment of potential and gyroscopic forces, first integrals, integrability, exact solutions, analogues of classical cases, control

For citation: *A. A. Kosov, E. I. Semenov.* On the Movement of Gyrostat under the Action of Potential and Gyroscopic Forces. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 66–75. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.66-75

About the authors:

Alexander A. Kosov, Leading researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134, Lermontov Str., Irkutsk, 664033, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-1352-1828, kosov_idstu@mail.ru

Eduard I. Semenov, Senior researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134, Lermontov Str., Irkutsk, 664033, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9768-9945, edwseiz@gmail.com

Оригинальная статья

УДК 517.9

О движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил

А. А. Косов, Э. И. Семенов

Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (г. Иркутск, Российская Федерация)

Аннотация. Рассмотрена система дифференциальных уравнений, описывающая движение гиростата под действием момента потенциальных, гироскопических и циркулярно-гироскопических сил. Указан вид момента сил, при котором система имеет три первых интеграла заданного вида. Приводится аналог теоремы В. И. Зубова для представления решений уравнений гиростата степенными рядами и показана возможность применения такого подхода для прогнозирования движений. Для аналога случая Лагранжа производится интегрирование в квадратурах. Также указаны аналоги случая полной динамической симметрии и случая Гесса. На основе принципа оптимального демпфирования, разработанного В. И. Зубовым, предложена конструкция управляющего момента, создаваемого циркулярно-гироскопическими силами, обеспечивающая выход одной из координат на постоянную (хотя и неизвестную заранее) величину или переход вектора состояния на поверхность уровня частного интеграла Гесса. Приведен числовой пример, для которого найдено двухпараметрическое семейство точных почти периодических решений, представленных тригонометрическими функциями.

Ключевые слова: гиростат, момент потенциальных и гироскопических сил, первые интегралы, интегрируемость, точные решения, аналоги классических случаев, управление

Для цитирования: Косов А. А., Семенов Э. И. О движении гиростата под действием потенциальных и гироскопических сил // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 66-75. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.66-75

Об авторах:

Косов Александр Аркадьевич, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (603950, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1352-1828, kosov_idstu@mail.ru

Семенов Эдуард Иванович, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук (603950, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-9768-9945, edwseiz@gmail.com

1. Introduction

The system of nonlinear differential equations describing the motion of a heavy solid body near a fixed point was obtained by L.Euler in the middle of the XVIII century and for a long time was an inspiring object for deep research of outstanding mathematicians and mechanics. Classical cases of integrability of this system have been found (cases of Euler, Lagrange and Kowalevski), for which there is an additional fourth algebraic first integral and it has been proved that if the conditions of these classical cases are not fulfilled, the additional integral does not exist even in the class of analytical functions (detailed history of research and overview of results can be found in monographs [1],[2],[3]), as well as in review article [4].

After the discovery of the Kowalevski integral, cases of existence of an additional particular integral were also found, when it is not possible to fully integrate equations, but it is possible to obtain separate private solutions [2]. Among them is the case of Hess, characterized by the existence of an additional linear particular integral, which was found for the equations of heavy solid motion in 1890 [1],[2]. Various issues related to the Hess case, its development and generalizations were examined in [5].

The classical Lagrange case for equations of motion of a heavy solid with a fixed point is highlighted by conditions of coincidence of two moments of inertia and linear dependence of a potential function on only one angle [1]. For the system discussed herein, it will also be necessary to impose additional conditions on the hyrostatic moment vector λ, the matrix S and the function $L(t, \gamma, \omega)$.

The classical case of full dynamic symmetry for the equations of motion of a heavy solid with a fixed point is highlighted by the conditions of coincidence of all three moments of inertia and linear dependence of the potential function on the angles of orientation, and the special choice of coordinate system is reduced to the Lagrange case [1]. For the system discussed in this article, which simulates the movement of hyrostate under the action of potential, gyroscopic and circular-gyroscopic forces, it will also be necessary to impose additional conditions on the vector of hyrostatic moment and parameters characterizing the moment created by gyroscopic and circular-gyroscopic forces. Therefore, a reduction to a case similar to the Lagrange case is not guaranteed by simply choosing a coordinate system here. Note that the case of complete dynamic symmetry is of interest and continues to be studied for the purpose of constructing solutions and integrals, for example in [6] for a solid with a spherical ellipsoid of inertia and constant moment, exact analytical solutions have been obtained.

2. Motion Equations and First Integrals

Consider the vector form of the equations of motion of a hyrostate with a fixed point under the influence of the moment of forces

$$I\dot{\omega} = (I\omega + \lambda) \times \omega + M, \tag{2.1}$$

$$\dot{\gamma} = \gamma \times \omega. \tag{2.2}$$

Here $\omega = \mathrm{col}(p, q, r)$ — the angular velocity vector, $\gamma = \mathrm{col}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ — the unit vector of the symmetry axis of the force field, given by projections on the axis of the associated coordinate system, $I = I^T > 0$ — the symmetric positive − definite matrix of the inertia tensor relative to a fixed point, $\lambda = \mathrm{col}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ — the gyrostatic moment vector, $M = M(t, \gamma, \omega)$ — the moment vector of forces acting on gyrostat. Following [7],[8],[9],[10], we will consider the following functions and relations as the first integrals

$$J_1 = J_1(\gamma, \omega) = \omega^T I\omega + 2U(\gamma) = d_1 = \mathrm{const}, \tag{2.3}$$

$$J_2 = J_2(\gamma, \omega) = \gamma^T (I\omega + \lambda) + \frac{1}{2}\,\gamma^T S\gamma = d_2 = \text{const}, \tag{2.4}$$

$$J_3 = J_3(\gamma) = \gamma^T \gamma = 1. \tag{2.5}$$

where $S = S^T$ is some symmetric matrix. The following assertion was proved in [11].

Theorem 2.1. *In order for the functions* (2.3)–(2.5) *to be the first integrals for the system* (2.1), (2.2) *it is necessary and sufficient for the moment* M *to be represented as*

$$M = \gamma \times \frac{\partial U}{\partial \gamma} - \omega \times S\gamma + L(t, \gamma, \omega)\omega \times \gamma, \tag{2.6}$$

where $L(t, \gamma, \omega)$ *is an arbitrary function.*

This statement shows that the first integrals (2.3) and (2.4) determine the moment M in the right part of (2.1) in a unique way up to the circular-gyroscopic component $L(t, \gamma, \omega)\omega \times \gamma$. The first term in formula (2.6) is the moment of potential forces, and the second is the moment of gyroscopic forces.

Next, we will consider the inertia matrix diagonal $I = \operatorname{diag}(A, B, C)$. Let's write the system (2.1), (2.2) and the first integrals in coordinate form

$$\begin{gathered} A\dot{p} = (B - C)qr + \lambda_2 r - \lambda_3 q + \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} - q(S\gamma)_3 + r(S\gamma)_2 + L(q\gamma_3 - r\gamma_2), \\ B\dot{q} = (C - A)pr + \lambda_3 p - \lambda_1 r + \gamma_3 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_3} - r(S\gamma)_1 + p(S\gamma)_3 + \\ + L(r\gamma_1 - p\gamma_3), \\ C\dot{r} = (A - B)pq + \lambda_1 q - \lambda_2 p + \gamma_1 \frac{\partial U}{\partial \gamma_2} - \gamma_2 \frac{\partial U}{\partial \gamma_1} - p(S\gamma)_2 + q(S\gamma)_1 + L(p\gamma_2 - q\gamma_1), \end{gathered} \tag{2.7}$$

$$\dot{\gamma_1} = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad \dot{\gamma_2} = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad \dot{\gamma_3} = q\gamma_1 - p\gamma_2, \tag{2.8}$$

$$J_1 = Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2U(\gamma) = d_1 = \text{const}, \tag{2.9}$$

$$\begin{gathered} J_2 = \gamma_1(Ap + \lambda_1) + \gamma_2(Bq + \lambda_2) + \gamma_3(Cr + \lambda_3) + \\ + \frac{1}{2}\left(s_{11}\gamma_1^2 + s_{22}\gamma_2^2 + s_{33}\gamma_3^2\right) + s_{12}\gamma_1\gamma_2 + s_{13}\gamma_1\gamma_3 + s_{23}\gamma_2\gamma_3 = d_2 = \text{const}, \end{gathered} \tag{2.10}$$

$$J_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1. \tag{2.11}$$

Here $(S\gamma)_i$ means the i-th component of the vector $S\gamma$. The right parts of the system (2.7), (2.8) are independent of those variables whose derivatives are present in the left parts, so Jacobi 's integration theory applies to this system. Where there is an additional independent of (2.9)–(2.11) the first integral, this system is integrable.

The main purpose of this article is to use an analogy with classical integrability cases for heavy solid equations to identify cases of the existence of an additional first integral and perform integration of the system (9), (10). This problem is considered and solved for the analog of the Lagrange case. Analogs for the case of complete dynamic symmetry and the Hess case are also identified, for which the conditions for the existence of General and partial integrals are obtained, respectively.

3. Analog of Zubov's theorem on analytical solutions

For the equations of motion of a heavy solid described by the system (2.7), (2.8) in the case of $S = 0$, $\lambda = 0$, $L(t, \gamma, \omega) \equiv 0$ and the linear function $U(\gamma)$, V. I. Zubov proved [3] the theorem that all real solutions are defined on the entire real axis and are represented by power series converging also on the entire real axis. The proof is essentially based on the properties of boundedness of all solutions and uniform analyticity of the right parts of the system of differential equations under consideration. Having provided these properties, we come to the validity of the analog of Zubov's theorem for the gyrostat equations.

Theorem 3.1. *If the functions $U(\gamma)$ and $L = L(\gamma, \omega)$ are uniformly analytic in each bounded region of the phase space (γ, ω), then all solutions of the system* (2.7), (2.8) *are defined and bounded on the entire real axis $t \in (-\infty, +\infty)$ and are represented by power series convergent for all $t \in (-\infty, +\infty)$*

$$p(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} p_k \psi^k, \quad q(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} q_k \psi^k, \quad r(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} r_k \psi^k,$$

$$\gamma_1(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{1k} \psi^k, \quad \gamma_2(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{2k} \psi^k, \quad \gamma_3(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \gamma_{3k} \psi^k.$$

Here $\psi = \dfrac{\exp(\mu t) - 1}{\exp(\mu t) + 1}$, $\mu = \pi/2h$, $h > 0$ *— is some constant.*

For practical construction of series representing solutions, analytical computing systems can be successfully used. For qualitative analysis of the properties of solutions (for example, stability) over infinite or sufficiently long time intervals, such series are not applicable. However, they can be very useful for predicting movement over short time intervals if it is possible to measure the current state vector $(\gamma(t), \omega(t))$. In this case, the depth of forecasting for the future $\xi \in (t, t + \tau)$, $\tau > 0$ can be estimated fairly accurately by comparing for the segment $\xi \in (t - \tau, t)$ of the constructed power series with the solution $(\gamma(\xi), \omega(\xi))$ already known at the moment $t \in (-\infty, +\infty)$.

4. Analog to the Lagrange case

The classical Lagrange case for equations of motion of a heavy solid body with a fixed point is distinguished by the conditions of coincidence of two moments of inertia $B = A$ and the linear dependence of the potential function on only one angle $U(\gamma) = k\gamma_3$ [1]. For the system (2.7), (2.8) considered here, it is also necessary to impose additional conditions on the gyrostatic moment vector λ, the matrix S, and the function $L(t, \gamma, \omega)$. The following statement is true.

Theorem 4.1. *Let the following conditions be met for the system* (2.7), (2.8)*:*

1. $B = A$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
2. *Function* $L(t, \gamma, \omega)$ *is constant, i.e.* $L(t, \gamma, \omega) = L = \mathrm{const}$.
3. *Matrix* S *is diagonal* $S = \mathrm{diag}(s_{11}, s_{22}, s_{33})$, *with* $s_{22} = s_{11}$.

4. *Function* $U(\gamma)$ *is an arbitrary continuously differentiable function of two arguments* $U(\gamma) = U(\sigma, \gamma_3)$, *where* $\sigma = \gamma_1^2 + \gamma_2^2$.

Then the system (2.7), (2.8) *has in addition to integrals* (2.9)–(2.11) *an additional first integral*

$$J_4 = Cr + (L - s_{11})\gamma_3 = d_4 = \mathrm{const} \tag{4.1}$$

and is integrated in quadratures.

R e m a r k 4.1. *If* $L = s_{11} + f(\gamma_3)$ *where* $f(\gamma_3)$ *is some continuous function and all other conditions of statement 4.1 are met, then the additional integral instead of (4.1) has the form* $J_4 = Cr + \int\limits_0^{\gamma_3} f(y)dy$ *and statement 4.1 remains valid.*

5. Analog of the case of complete dynamic symmetry

The classical case of complete dynamic symmetry for equations of motion of a heavy solid with a fixed point is distinguished by the conditions of coincidence of all three moments of inertia $A = B = C$ and the linear dependence of the potential function $U(\gamma)$ on the angles [1]. For the system(2.7), (2.8) considered here, it is also necessary to impose additional conditions on the gyrostatic moment vector λ, the matrix S, and the function $L(t, \gamma, \omega)$. The following assertion was proved in [11].

T h e o r e m 5.1. *Let the following conditions be met for the* (2.7), (2.8):

1. $A = B = C$.

2. *Function* $L(t, \gamma, \omega)$ *is constant, i.e.* $L(t, \gamma, \omega) = L = \mathrm{const}$.

3. *Matrix* S *has the form*
$$S = \zeta \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix},$$
where ζ, a, b, c *are arbitrary constants.*

4. *Function* $U(\gamma)$ *has the form* $U(\gamma) = F(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3)$, *where* $F(\theta)$ *an arbitrary continuously differentiable function of a single argument* $\theta = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$.

5. *The components of the gyrostatic moment vector* $\lambda = \mathrm{col}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ *satisfy the linear system*
$$\begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Then the system (2.7), (2.8) *has in addition to integrals* (2.9)–(2.11) *an additional first integral*

$$J_4 = A(ap + bq + cr) + L\,(a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3) = d_4 = \mathrm{const}$$

and is integrated in quadratures.

It should be noted that in the classical case of complete dynamic symmetry for the equations of motion of a heavy solid with a fixed point [1], we have $L = 0$, $\lambda = 0$, $S = 0$, $U = a\gamma_1 + b\gamma_2 + c\gamma_3$ and a special choice of the associated coordinate system reduces the problem to the Lagrange case. However, for non-zero λ, S, satisfying the conditions of statement 5.1, such a coordinate replacement does not, in general, guarantee the fulfillment of the conditions of statement 4.1 for the system in the new coordinates.

6. Analog to the Hess case

The Hess case, characterized by the existence of an additional fourth linear partial integral, was found for the equations of motion of a heavy solid in 1890 [1],[2]. Review of further research related to this case and its analogues, as well as new results, is given in [5]. Here we give the conditions for the existence of a partial integral for the system (2.7), (2.8). The following statement is true.

Theorem 6.1. *Let the system* (2.7), (2.8) *meet the conditions:*

1. *Matrix S has the form*

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & s_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ s_{13} & 0 & s_{33} \end{pmatrix}, \quad \textit{and besides} \quad s_{13}^2 = s_{11}s_{33} \neq 0.$$

2. $s_{13}^2 C(A - B) = s_{11}^2 A(B - C)$.

3. *Components of the gyrostatic moment vector $\lambda = \mathrm{col}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ satisfy the following equations $\lambda_2 = 0$, $s_{13}\lambda_1 - s_{11}\lambda_3 = 0$.*

4. *Function $U(\gamma)$ has the form $U(\gamma) = F(s_{11}\gamma_1 + s_{13}\gamma_3)$, where $F(\theta)$ an arbitrary continuously differentiable function of a single argument $\theta = s_{11}\gamma_1 + s_{13}\gamma_3$.*

5. *Function $L(t, \gamma, \omega)$ is represented as a product*

$$L = L_1\,(s_{11}Ap + s_{13}Cr)\,L_2(t, \gamma, \omega),$$

where $L_1(0) = 0$, and function $L_2(t, \gamma, \omega)$ is arbitrary.

Then the system (2.7), (2.8) *has in addition to the integrals* (2.9)–(2.11) *an linear partial integral*

$$J_4 = s_{11}Ap + s_{13}Cr = 0.$$

7. Case of the control moment created by circular-gyroscopic forces

V. I. Zubov successfully applied the principle of optimal damping to solve problems of rotational motion control, using kinetic energy as the damped function [3]. Following this principle, we will now consider in (2.7) the moment $L(t, \gamma, \omega)\omega \times \gamma$, created by circularly-gyroscopic forces, as a control, i.e. the function $L(t, \gamma, \omega)$ can be selected to achieve certain goals. Since, according to statement 2.1 , the system (2.7), (2.8) will have the three first integrals (2.9)–(2.11) , the control goals can only be very limited. For example, this control cannot provide asymptotic stability of any solution, or control from an arbitrary given initial state to an arbitrary final state. However, in some cases, by selecting the function $L(t, \gamma, \omega)$ it is possible to achieve local control goals, for example, to output one of the values of $\gamma_i(t)$ to a constant (although unknown in advance) value, or to transfer the state vector to the surface of the level of the Hess partial integral.

Let's assume that the control function can take bounded values $|L(t, \gamma, \omega)| \le L_0 < +\infty$ and choose it so as to provide optimal damping of the function $V_1(p, q) = A^2Bp^2 + B^2Aq^2$.

Theorem 7.1. *Let the system* (2.7), (2.8) *meet the conditions:*

1. *$B = A$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.*

2. *Matrix S is diagonal $S = \operatorname{diag}(s_{11}, s_{22}, s_{33})$, with $s_{22} = s_{11}$.*

3. *Function $U(\gamma) \equiv 0$.*

4. *Control moment in the system* (2.7), (2.8) *is selected as $L(t, \gamma, \omega)\omega \times \gamma$, where $L = -L_0|r|\operatorname{sign}(q\gamma_1 - p\gamma_2)$, with $L_0 > |s_{11}|$.*

Then for each solution of the system (2.7), (2.8)*, the function $V_1(p, q)$ decreases to a constant value, and the component of the solution $\gamma_3(t)$ reaches a constant value in a finite time.*

Now we will choose the control function $L(t, \gamma, \omega)$ so as to ensure optimal damping of the function $V_2(p, r) = s_{11}Ap + s_{13}Cr$ to zero.

Theorem 7.2. *Let the system* (2.7), (2.8) *meet the conditions* 1–4 *of statement 6.1, and the control moment in the system is chosen as $L(t, \gamma, \omega)\omega \times \gamma$, where*

$$L = -L_0\operatorname{sign}\left(s_{11}Ap + s_{13}Cr\right)\operatorname{sign}\left(s_{11}(q\gamma_3 - r\gamma_2) + s_{13}(p\gamma_2 - q\gamma_1)\right),$$

and $L_0 > 0$ is a sufficiently large number. Then each solution of the system (2.7), (2.8) *in a finite time reaches the set of the level of the Hess partial integral $V_2(p, r) = s_{11}Ap + s_{13}Cr = 0$.*

8. Example

Family of exact almost periodic solutions. Consider the following parameter values $A = B = 1$, $C = \dfrac{3}{2}$, $L = 1$, $s_{11} = s_{22} = s_{33} = 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = -1$ and a potential function $U = -\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2\right)$. Using statement 4.1, for the values of the first integrals $J_1 = 1$, $J_2 = -1$, $J_4 = -1$ we obtain a parametric family of almost periodic solutions

$$p(t) = \frac{\sqrt{21}}{3}\cos\varphi(t), \quad q(t) = \frac{\sqrt{21}}{3}\sin\varphi(t), \quad r(t) = -\frac{2}{3},$$

$$\gamma_1(t) = -\frac{7\sqrt{19}}{38}\sin\varphi(t)\cos\psi(t) - \frac{3\sqrt{21}}{38}\cos\varphi(t) + \frac{7\sqrt{3}}{19}\cos\varphi(t)\sin\psi(t),$$

$$\gamma_2(t) = \frac{7\sqrt{19}}{38}\cos\varphi(t)\cos\psi(t) - \frac{3\sqrt{21}}{38}\sin\varphi(t) + \frac{7\sqrt{3}}{19}\sin\varphi(t)\sin\psi(t),$$

$$\gamma_3(t) = \frac{\sqrt{7}}{266}\left(18\sqrt{7} + 49\sin\psi(t)\right),$$

where $\varphi(t) = C_2 - \dfrac{4}{3}t$, $\psi(t) = \dfrac{\sqrt{57}}{3}(C_1 - t)$. Here C_1, C_2 — arbitrary constants. Note that all solutions included in this family are combinations of harmonic oscillations with two incommensurable periods $T_1 = \dfrac{3\pi}{2}$, $T_2 = \dfrac{2\pi\sqrt{57}}{19}$.

Using the statement 3.1, using the Maple analytical computing system, we obtain a representation of solutions in the form of power series that coincide with the decompositions of the almost periodic solutions given above.

Acknowledgements. This work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 22-29-00819

References

1. V. V. Golubev, *Lectures on Integration of the Equations of Motion of a Rigid Body about a Fixed Point*, Israeli Program for Scientific Translations, Israeli, 1960, 287 p.

2. I. N. Gashenenko, G. V. Gorr, A. M. Kovalev, *Classical problems in the dynamics of rigid body*, Naukova Dumka Publ., Kiev, 2012, 441 p.

3. V. I. Zubov, *Analytical dynamics of the system of bodies*, LSU publishing house, Leningrad, 1983, 344 p.

4. S. Nikolov S., N Nedkova, "Dynamical Behavior of a Rigid Body with One Fixed Point (Gyroscope). Basic Concepts and Results. Open Problems: a Review", *Journal of Applied and Computational Mechanics*, **1**:4 (2015), 187–206.

5. A. V. Belyaev, "On the general solution of the problem of the motion of a heavy rigid body in the Hess case", *Sbornik: Mathematics*, **206**:5 (2015), 621-649.

6. M. Romano, "Exact analytic solution for the rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque", *Celestial Mech. Dyn. Astr.*, **100**:3 (2008), 181–189.

7. G. V. Gorr, A. V. Maznev, "On solutions of the equations of motion of a rigid body in the potential force field in the case of constant modulus of the kinetic moment", *Rigid Body Mechanics*, **47** (2017), 12–24.

8. G. V. Gorr, A. V. Maznev, "Precession and isoconic motions of a rigid body under the potential and gyroscopic forces", *Rigid Body Mechanics*, **45** (2015), 26–39.

9. H. M. Yehia, A. A. Elmandouh, "Regular Precession of a Rigid Body (Gyrostat) Acted upon by an Irreducible Combination of Three Classical Fields", *Journal of Physics A. Mathematical and Theoretical*, **46**:14 (2013), 142001.

10. H. M. Yehia, A. A. Elmandouh, "A new conditional integrable case in the dynamics of a rigid body-gyrostat", *Mech. Res. Commun*, **78** (2016), 25–27.

11. A. A. Kosov, E. I. Semenov, "On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **430** (2022), 133103.

12. V. I. Zubov, *Problem of stability of control processes*, Publishing house Sudostroenie, Leningrad, 1980, 253 p.

Submitted 10.11.2021; Revised 19.02.2022; Accepted 24.02.2022

The authors have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

Список литературы

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М., Гостехтеориздат, 1953. 287 с.

2. Gashenenko I.N., Gorr G.V., Kovalev A.M. Classical problems in the dynamics of rigid body. Naukova Dumka, Kiev. 2012. 401 p.

3. Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. Л.:Изд-во Ленинградского университета, 1983. 344 с.

4. Nikolov S., Nedkova N. Dynamical Behavior of a Rigid Body with One Fixed Point (Gyroscope). Basic Concepts and Results. Open Problems: a Review // Journal of Applied and Computational Mechanics. 2015. Vol. 1, issue 4. pp. 187–206.

5. Belyaev A. V. On the general solution of the problem of the motion of a heavy rigid body in the Hess case // Sbornik: Mathematics, 2015. Vol. 206, issue 5. pp. 621-649.

6. Romano M. Exact analytic solution for the rotation of a rigid body having spherical ellipsoid of inertia and subjected to a constant torque // Celestial Mech. Dyn. Astr. 2008. Vol. 100, issue 3, pp. 181–189.

7. Gorr G.V., Maznev A.V. On solutions of the equations of motion of a rigid body in the potential force field in the case of constant modulus of the kinetic moment // Rigid Body Mechanics. 2017. Vol. 47. pp. 12–24.

8. Gorr G.V., Maznev A.A. Precession and isoconic motions of a rigid body under the potential and gyroscopic forces // Rigid Body Mechanics. 2015. Vol. 45. pp. 26–39.

9. Yehia H.M., Elmandouh A.A. A new integrable problem with a quartic integral in the dynamics of a rigid body // Journal of Physics A. Mathematical and Theoretical. 2013. Vol. 46, No. 14. pp. 142001.

10. Yehia, H.M., Elmandouh A.A . A new conditional integrable case in the dynamics of a rigid body-gyrostats // Mech. Res. Commun. 2016. Vol. 78. pp. 25–227.

11. Kosov A.A., Semenov E.I. On first integrals and stability of stationary motions of gyrostat // Physica D: Nonlinear Phenomena. 2022. Vol. 430. pp. 133103.

12. Зубов В.И. Проблема устойчивости процессов управления. Л.: Судостроение. 1980. 253 с.

Поступила 10.11.2021; доработана после рецензирования 19.02.2022; принята к публикации 24.02.2022

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

DOI 10.15507/2079-6900.24.202201.76-95 ISSN 2079-6900 (Print)
Оригинальная статья ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 512.548.2

Эндоморфизмы и антиэндоморфизмы некоторых конечных группоидов

А. В. Литаврин

ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (г. Красноярск, Российская Федерация)

Аннотация. В настоящей работе изучаются антиэндоморфизмы некоторых конечных группоидов. Ранее были введены специальные группоиды $S(k,q)$ с порождающим множеством из k элементов и порядком $k(1+k)$. Ранее исследовались вопросы поэлементного описания моноида всех эндоморфизмов данного группоида (в частности, автоморфизмов). Было показано, что всякий конечный моноид изоморфно вложим в моноид всех эндоморфизмов подходящего группоида $S(k,q)$. В данной статье приводится поэлементное описание множества всех антиэндоморфизмов группоида $S(k,q)$. Установлено, что в зависимости от группоида $S(k,q)$ множество всех его антиэндоморфизмов может быть замкнутым или не замкнутым относительно композиции отображений. Для поэлементного описания антиэндоморфизмов изучается действие произвольного антиэндоморфизма на порождающих элементах группоида. При данном подходе антиэндоморфизм попадает в один из трех классов. Антиэндоморфизмы из двух полученных классов будут являться эндоморфизмами данного группоида. Оставшийся класс антиэндоморфизмов в зависимости от конкретного группоида $S(k,q)$ может состоять или не состоять из эндоморфизмов. В данной работе исследуются эндоморфизмы некоторых конечных группоидов G с порядком, удовлетворяющим некоторому неравенству. Построены некоторые эндоморфизмы таких группоидов и показано, что всякий конечный моноид изоморфно вкладывается в моноид всех эндоморфизмов подходящего группоида G. Для доказательства данного результата существенно используется обобщение теоремы Кэли на случай моноидов (полугрупп с единицей).

Ключевые слова: эндоморфизм, антиэндоморфизм, автоморфизм, антиавтоморфизм, конечный группоид, моноид

Для цитирования: Литаврин А. В. Эндоморфизмы и антиэндоморфизмы некоторых конечных группоидов // Журнал Средневолжского математического общества. 2022. Т. 24, № 1. С. 76–95. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.76-95

Об авторе:

Литаврин Андрей Викторович, доцент кафедры высшей математики № 2, ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» (660041, Россия, г. Красноярск, пр. Свободный, д. 82А), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/ 0000-0001-6285-0201, anm11@rambler.ru

Original article

MSC2020 20N02

Endomorphisms and anti-endomorphisms of some finite groupoids

A. V. Litavrin

Siberian Federal University (Krasnoyarsk, Russian Federation)

Abstract. In this paper, we study anti-endomorphisms of some finite groupoids. Previously, special groupoids $S(k, q)$ of order $k(1+k)$ with a generating set of k elements were introduced. Previously, the element-by-element description of the monoid of all endomorphisms (in particular, automorphisms) of a given groupoid was studied. It was shown that every finite monoid is isomorphically embeddable in the monoid of all endomorphisms of a suitable groupoid $S(k, q)$. In recent article, we give an element-by-element description for the set of all anti-endomorphisms of the groupoid $S(k, q)$. We establish that, depending on the groupoid $S(k, q)$, the set of all its anti-endomorphisms may be closed or not closed under the composition of mappings. For an element-by-element description of anti-endomorphisms, we study the action of an arbitrary anti-endomorphism on generating elements of a groupoid. With this approach, the anti-endomorphism will fall into one of three classes. Anti-endomorphisms from the two classes obtained will be endomorphisms of given groupoid. The remaining class of anti-endomorphisms, depending on the particular groupoid $S(k, q)$, may either consist or not consist of endomorphisms. In this paper, we study endomorphisms of some finite groupoids G whose order satisfies some inequality. We construct some endomorphisms of such groupoids and show that every finite monoid is isomorphically embedded in the monoid of all endomorphisms of a suitable groupoid G. To prove this result, we essentially use a generalization of Cayley's theorem to the case of monoids (semigroups with identity).

Keywords: endomorphism, anti-endomorphism, automorphism, anti-automorphism, finite groupoid, monoid

For citation: *A. V. Litavrin.* Endomorphisms and anti-endomorphisms of some finite groupoids. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva.* 24:1(2022), 76–95. DOI: https://doi.org/10.15507/2079-6900.24.202201.76-95

About the author:

Andrey V. Litavrin, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics No. 2, Siberian Federal University(82A Svobodny Ave., Krasnoyarsk 660041, Russia), PhD (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org / 0000-0001-6285-0201, anm11@rambler.ru

1. Введение

Пусть A – некоторое множество и $(*)$ – бинарная алгебраическая операция, определенная на множестве A. Тогда пару $\mathfrak{A} = (A, *)$ называем группоидом (также распространен термин *магма*). Для каждого группоида определены *эндоморфизмы* и *автоморфизмы*. Множество всех эндоморфизмов группоида $\mathfrak{A}$ традиционно обозначают символом $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$, а множество всех автоморфизмов – символом $\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$. Хорошо известно, что относительно композиции двух эндоморфизмов множество $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$ образует моноид ($\mathrm{Aut}(\mathfrak{A})$, образует подгруппу в моноиде $\mathrm{End}(\mathfrak{A})$). При этом следует упомянуть, что каждый эндоморфизм, например, моноида будет являться эндоморфизмом соответствующего группоида, обратное не всегда верно.

Данная работа посвящена изучению эндоморфизмов и антиэндоморфизмов некоторых конечных группоидов, которые в общем случае не являются полугруппой или квазигруппой. Основные результаты работы сформулированы в виде теоремы 1 и теоремы 2. Прежде чем перейти к формулировке и обсуждению основных результатов дадим необходимые определения и рассмотрим примеры работ, имеющих отношение к теме исследования.

Приведем определение антиэндоморфизма группоида.

Определение 1.1. *Пусть $\mathfrak{A} = (A, *)$ – некоторый группоид. Тогда антиэндоморфизмом группоида $\mathfrak{A}$ называем отображение $\phi: A \to A$, если для любых $x, y \in A$ выполняется равенство*

$$(x * y)^{\phi} = y^{\phi} * x^{\phi}. \tag{1.1}$$

Если антиэндоморфизм ϕ является биекцией множества A на множество A, то ϕ называют антиавтоморфизмом группоида $\mathfrak{A}$.

В данной работе множество всех антиэндоморфизмов группоида $\mathfrak{A}$ будем обозначать символом $\mathrm{Aend}(\mathfrak{A})$, а множество всех антиавтоморфизмов обозначим символом $\mathrm{Aaut}(\mathfrak{A})$. Данные обозначения получаются из сокращения английских терминов «Anti-automorphism» и «Anti-endomorphism», полученных стандартным образом (см., например, работы [1–3] и др.).

Эндоморфизмы различных группоидов часто становятся объектом исследований. Большое количество исследований посвящено случаем, когда группоид является квазигруппой или полугруппой. Активно изучаются эндоморфизмы полугрупп (например, см. [4–6] и др.) и квазигрупп (см. [7] и др.). В частности, в работе [4] получена классификация всех эндоморфизмов полугруппы $G_n(R)$ ($n \geq 3$), состоящей из матриц с неотрицательными коэффициентами из линейно упорядоченного кольца R с обратимой двойкой. Близкие объекты изучаются в работе [5]. Ранее в [8] изучались автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ ($n \geq 2$), когда R – линейно упорядоченное тело. Каждый автоморфизм там был разложен в произведения трех или четырех сомножителей специального вида.

Отметим, что результаты исследований неассоциативных группоидов могут быть использованы в криптографии (см., например, [9]). Автоморфизмы и антиавтоморфизмы различных систем (в т. ч., группоидов) часто используются в криптографии, в частности как техническое средство для проведения выкладок и построения новых алгебраических систем (с нужными свойствами). Антиэндоморфизмы различных объектов также используются в приложениях, например, в работе [10].

В работе [11] исследовались автоморфизмы конечноопределенных квазигрупп и было установлено, что всякая конечная группа изоморфна группе всех автоморфизмов подходящей конечноопределенной квазигруппы. Последний результат по структуре схож с результатами Г. Биркгофа и Д. Гроота, которые представили произвольную группу группами всех автоморфизмов некоторой алгебры (Г. Биркгоф, [12]) и некоторого кольца (Д. Гроот, [13]).

В работе [14] были введены группоиды $\mathfrak{S}(k, q)$ порядка $k + k^2$ и порождающим множеством из k элементов. Там же изучались автоморфизмы этих группоидов. В частности, было установлено, что всякая конечная группа G будет изоморфна некоторой подгруппе группы всех автоморфизмов подходящего группоида $\mathfrak{S}(|G|, q)$.

Аналогичные результаты были получены в работе [15] для группоидов

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(k, m, M_1, ..., M_m) = (V, *),$$

порожденных n элементами и порядком $|V|$, удовлетворяющим неравенствам

$$n + 1 \leq |V| < n^2 + n.$$

В работе [16] исследовались эндоморфизмы группоидов $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(k, q)$. Было получено поэлементное описание множества $\mathrm{End}(\mathfrak{S})$, установлены некоторые структурные свойства моноида $\mathrm{End}(\mathfrak{S})$ и показано, что всякий конечный моноид может быть изоморфно вложен в моноид $\mathrm{End}(\mathfrak{S})$ для подходящего группоида $\mathfrak{S}$.

Основные задачи исследования. Таким образом, всякую конечную группу можно изоморфно вложить в группу всех автоморфизмов подходящих группоидов $\mathfrak{S}(k, q)$ и $\mathfrak{G}$, а произвольный конечный моноид изоморфно вложить в моноид всех эндоморфизмов группоида $\mathfrak{S}(k, q)$. В связи с этим и результатами работ [11–13] возникает интерес к следующей задаче.

Задача 1. *Выяснить, можно ли произвольный конечный моноид изоморфно вложить в моноид всех эндоморфизмов подходящего группоида* $\mathfrak{G}(k, 1, M_1)$*?*

Положительный ответ на вопрос из задачи 1 дает теорема 2.2 (см. следующий раздел). Данный результат представляет особый интерес, в частности, потому, что группоиды $\mathfrak{G}(k, 1, M_1)$ определяются явно (см. определение 3 в данной работе) и не зависят от контекста задачи 1. Следует отметить, что хорошо известно, что всякий моноид можно изоморфно вложить в моноид всех эндоморфизмов некоторой алгебраической системы. Однако вопросы изоморфного вложения произвольного моноида в моноид всех эндоморфизмов алгебраической системы из фиксированного класса алгебраических систем являются, в общем случае, нетривиальными. Нетривиальность связана с тем, что данные вопросы требуют в каждом конкретном случае рассматривать эндоморфизмы конкретных алгебраических систем.

Иногда вопросы о вложении бывают тривиальными. Так, вложение произвольного моноида в моноид всех эндоморфизмов некоторого подходящего группоида из класса всех группоидов не вызывает никаких проблем и является простым упражнением, которое можно встретить в учебной литературе.

В связи с результатами работ [14] и [16] возник интерес к вопросу о классификации всех антиэндоморфизмов группоида $\mathfrak{S}(k, q)$. В данной работе решается следующая

Задача 2. *Привести поэлементное описание множества* $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k, q))$.

Решение этой задачи изложено в виде теоремы 2.1 (см. следующий раздел).

Хорошо известно, что множество всех антиэндоморфизмов некоторого группоида не обязано быть замкнутым относительно операции композиции. Например, f^2 не обязано быть антиэндоморфизмом группы G, когда $f: \ x \to x^{-1}$ $(x \in G)$. Проведем рассуждения. Пусть $\mathfrak{A} = (G, *)$ – некоторый произвольный группоид. Справедлива цепочка равенств

$$(x * y)^{\phi_1 \cdot \phi_2} = (y^{\phi_2} * x^{\phi_2})^{\phi_1} = (x^{\phi_2})^{\phi_1} * (y^{\phi_2})^{\phi_1} = x^{\phi_1 \cdot \phi_2} * y^{\phi_1 \cdot \phi_2} \tag{1.2}$$

$$(x, y \in G, \ \phi_1, \phi_2 \in \mathrm{Aend}(\mathfrak{A})),$$

которая показывает, что произведение двух антиэндоморфизмов является эндоморфизмом.

При этом если для $\varphi \in \mathrm{Aend}(\mathfrak{A}) \cdot \mathrm{Aend}(\mathfrak{A})$ образ

$$G^{\varphi} := \{g^{\varphi} \mid g \in G\}$$

является коммутативным группоидом, то $\varphi \in \mathrm{Aend}(\mathfrak{A})$. Последнее утверждение тривиально следует из равенства (1.2).

Когда $\mathfrak{A} = \mathfrak{S}(k,q)$, множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ может содержать подмножество X, такое что $X \subseteq \mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q))$ и X – замкнуто относительно композиции двух антиэндоморфизмов (см. Пример 3.1).

При этом группоид $\mathfrak{S}(k,q)$ можно выбрать так, что множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ будет содержать антиэндоморфизм, который не является эндоморфизмом. Кроме того, в этом случае множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ будет не замкнутым относительно композиции двух отображений (см. Пример 3.2).

Естественно, возникает вопрос, может ли множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ быть замкнутым относительно композиции. Ответ положительный. Самый простой пример дает второй пункт теоремы 2.1. При $k=1$ выполняется равенство

$$\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(1,q)) = \mathrm{End}(\mathfrak{S}(1,q)).$$

В данном случае $q = (I,I)$. Данный пример не единственный.

Для $k=2$ можно построить кортеж q такой, что множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(2,q))$ будет замкнутым относительно композиции и состоять из эндоморфизмов группоида $\mathfrak{S}(2,q)$ (см. Пример 3.3).

В примерах 3.2 и 3.3 используется теорема 2.1.

2. Определения и формулировка основных результатов

Приведем определения и обозначения, необходимые для формулировки теорем 2.1 и 2.2.

Обозначения, связанные с симметрической полугруппой. Симметрическую полугруппу всех отображений множества $\{1,...,n\}$ в себя будем обозначать символом $\mathcal{I}_n$. Как обычно, символом S_n обозначаем *симметрическую группу* перестановок множества из n элементов. Композицию двух отображений из $\mathcal{I}_n$ будем обозначать $(\circ)$. Если x – произвольный элемент из $\{1,...,n\}$ и α – произвольное отображение из $\mathcal{I}_n$, то $\alpha(x)$ – образ элемента x под действием отображения α. Если $\alpha, \beta \in \mathcal{I}_n$ и $x \in \{1,...,n\}$, то полагаем $(\alpha \circ \beta)(x) := \alpha(\beta(x))$.

Группоиды $\mathfrak{S}(k,q)$ и теорема 2.1. Приведем определение 1 группоида $\mathfrak{S}(k,q)$ из [14].

Определение 2.1. *Пусть определены следующие объекты:*

1) k – некоторое натуральное число;

2) попарно различные символы $a_1,...,a_k$ и b_{ij} $(i,j=1,...,k)$;

3) множества

$$M := \{a_1,...,a_k\}, \quad V := M \cup \{b_{ij} \mid i,j \in \{1,...,k\}\},$$

$$S_k^m := \{(\varepsilon_1,...,\varepsilon_m) \mid \varepsilon_i \in S_k, \ i=1,...,m\};$$

4) кортеж $q = (\beta_1,...,\beta_k,\beta'_1,...,\beta'_k) \in S_k^{2k}$;

5) *бинарная алгебраическая операция* $(*)$ *на множестве* V, *такая что справедливы равенства:*

$$a_i * a_j = b_{ij}, \quad a_s * b_{ij} = b_{\beta_s(i),\beta_s(j)}, \tag{2.1}$$

$$b_{ij} * a_s = b_{\beta'_s(i),\beta'_s(j)}, \quad b_{mv} * b_{ij} = b_{mj} \quad (m, v, s, i, j \in \{1, ..., k\}).$$

Тогда через

$$\mathfrak{S}(k, q) = (V, *)$$

обозначим группоид с множеством носителем V *и бинарной алгебраической операцией* $(*)$, *которую задают равенства* (2.1).

В работе [16] вводятся отображения ϕ_γ, $\zeta[b_{uv}]$, $\rho[a_s, M']$ и доказывается (см. Теорема 1 из [16]), что они (при некоторых ограничениях на свои параметры) являются эндоморфизмами группоида $\mathfrak{S}(k, q)$. Для удобства читателя определим эти отображения ниже.

Полагаем, что определен группоид $\mathfrak{S}(k, q)$, следовательно, задан кортеж

$$q = (\beta_1, ..., \beta_k, \beta'_1, ..., \beta'_k).$$

В множестве $\mathcal{I}_k$ выделим подмножество $A_e(q)$ преобразований γ таких, что для любых $s, i \in \{1, ..., k\}$ выполняются равенства

$$\beta_{\gamma(s)}(\gamma(i)) = \gamma(\beta_s(i)), \quad \beta'_{\gamma(s)}(\gamma(i)) = \gamma(\beta'_s(i)). \tag{2.2}$$

Для каждого $\gamma \in A_e(q)$ введем отображение

$$\phi_\gamma : a_i \to a_{\gamma(i)}, \quad (a_i \in M); \;\; b_{ij} \to b_{\gamma(i),\gamma(j)} \;\; (b_{ij} \in M * M). \tag{2.3}$$

Для всякого элемента b_{uv} из $M * M$ вводится отображение $\zeta[b_{uv}]$, переводящее все элементы множества–носителя V в элемент b_{uv}:

$$\zeta[b_{uv}] : \quad a_i \to b_{uv}, \;\; (a_i \in M); \quad b_{ij} \to b_{uv}, \;\; (b_{ij} \in M * M). \tag{2.4}$$

Пусть $a_s \in M$, такой что $\beta_s(s) = \beta'_s(s) = s$ и M' – произвольное не пустое подмножество M, отличное от M. Тогда введем отображение

$$\rho[a_s, M'] : \quad a_i \to a_s \;\; (a_i \in M'), \;\; a_r \to b_{ss} \; (r \in M \setminus M'); \tag{2.5}$$

$$b_{ij} \to b_{ss}, \; (b_{ij} \in M * M).$$

Доказано (см. леммы 1, 5 и 6 из [16]), что отображения ϕ_γ, $\zeta[b_{uv}]$ и $\rho[a_s, M']$ являются эндоморфизмами группоида $\mathfrak{S}(k, q)$ при указанных ограничениях на свои параметры γ, b_{uv}, a_s и M'. Отметим, что отображения $\rho[a_s, M']$ определены не для всех группоидов $\mathfrak{S}(k, q)$.

В множестве $\mathrm{End}(\mathfrak{S}(k, q))$ выделим подмножества:

1. $E_1(\mathfrak{S}(k, q))$, состоящее из всевозможных эндоморфизмов ϕ_γ;
2. $E_2(\mathfrak{S}(k, q))$, состоящее из всевозможных эндоморфизмов $\zeta[b_{uv}]$ и тождественного эндоморфизма;
3. $E_3(\mathfrak{S}(k, q))$, состоящее из всевозможных эндоморфизмов $\rho[a_s, M']$ (если они существуют) и тождественного эндоморфизма.

Обозначения, связанные с действием эндоморфизмов и антиэндоморфизмов. Полагаем, что $x \in V$ и $\phi \in \mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q))$ (или $\phi \in \mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$). Тогда x^{ϕ} – образ элемента x под действием эндоморфизма (или антиэндоморфизма) ϕ. Композицию двух эндоморфизмов (антиэндоморфизмов) будем обозначать символом $(\cdot)$. Если $\phi_1, \phi_2 \in \mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q))$ (аналогично, $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$) и $x \in V$, то $x^{\phi_1 \cdot \phi_2} := (x^{\phi_2})^{\phi_1}$.

В работе [16] было установлено (см. теорема 1) равенство

$$\mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q)) = E_1(\mathfrak{S}(k,q)) \cdot E_2(\mathfrak{S}(k,q)) \cdot E_3(\mathfrak{S}(k,q)). \tag{2.6}$$

Ниже определим множества $AE_1(\mathfrak{S}(k,q))$, $AE_2(\mathfrak{S}(k,q))$ и $AE_3(\mathfrak{S}(k,q))$, которые необходимы для описания множества $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$.

Символом $A_{aend}(q)$ обозначим множество отображений $\alpha \in \mathcal{I}_k$, таких что для любых $s, u \in \{1, ..., k\}$ выполняются равенства

$$\alpha(\beta_s(u)) = \beta'_{\alpha(s)}(\alpha(u)), \quad \alpha(\beta'_s(u)) = \beta_{\alpha(s)}(\alpha(u)). \tag{2.7}$$

Для каждого $\gamma \in A_{aend}$ введем отображение

$$\phi'_\gamma : a_i \to a_{\gamma(i)}, \quad (a_i \in M); \quad b_{ij} \to b_{\gamma(j),\gamma(i)} \quad (b_{ij} \in M * M). \tag{2.8}$$

Множество всевозможных отображений ϕ'_γ обозначим символом $AE_1(\mathfrak{S}(k,q))$.

Единичный эндоморфизм будем обозначать символом I. Вводим множества

$$AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) := E_2(\mathfrak{S}(k,q)) \setminus \{I\}, \quad AE_3(\mathfrak{S}(k,q)) := E_3(\mathfrak{S}(k,q)) \setminus \{I\}.$$

В данной работе доказывается

Т е о р е м а 2.1. *Справедливы утверждения:*

1) для любого натурального $k > 1$ справедливо равенство

$$\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q)) = AE_1(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_3(\mathfrak{S}(k,q));$$

2) для $k = 1$ справедливы равенства

$$\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q)) = \mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q)) = \{I, \zeta[b_{11}]\};$$

3) справедливо включение $\mathrm{Aaut}(\mathfrak{S}(k,q)) \subset AE_1(\mathfrak{S}(k,q))$.

Доказательство этой теоремы приводится в разделе 2. Видно, что результат первого пункта из теоремы 2.1 напоминает равенство (2.6). При этом справедливы включения

$$AE_i(\mathfrak{S}(k,q)) \subset E_i(\mathfrak{S}(k,q)), \quad i = 2, 3.$$

В общем случае множества $AE_1(\mathfrak{S}(k,q))$ и $E_1(\mathfrak{S}(k,q))$ могут иметь непустое пересечение (например, при $k = 1$ их пересечение равно $\{I\}$, см. теорему 2.1), но отображения ϕ_γ и ϕ'_γ строятся различными способами (см. (2.3) и (2.8)), как и параметризирующие их множества отображений из $\mathcal{I}_k$ (см. (2.2) и (2.7)). Таким образом, это принципиально различные множества.

Группоиды $\mathfrak{G}$ и теорема 2.2. Далее сформулируем основные определения и результаты, касающиеся группоидов $\mathfrak{G}(k, m, M_1, ..., M_m)$ из работы [15].

Определение 2.2. *Полагаем, что определены следующие объекты:*

1) *k и m – натуральные числа, такие что k больше единицы и верно неравенство $2m \le k^2$;*
2) *попарно различные элементы $a_1, ..., a_k, c_1, ..., c_m, b_{ij}$ $(i, j = 1, ..., k)$;*
3) *множества*

$$U_{k,m} := \{a_1, ..., a_k, c_1, ..., c_m\} \cup \{b_{ij} \mid i, j = 1, ..., k\}, \quad M := \{a_1, ..., a_k\};$$

4) *кортеж $(M_1, M_2, ..., M_m)$, состоящий из m попарно непересекающихся подмножеств множества $M \times M$, мощности ≥ 2;*

Вводим обозначения:

$$D := (M \times M) \setminus \bigcup_{i=1}^{m} M_i, \quad B := \{b_{ij} \in U_{k,m} \mid (a_i, a_j) \in D\}.$$

Задаем множество $V := M \cup \{c_1, ..., c_m\} \cup B$. На множестве V вводим бинарную алгебраическую операцию $(*)$ такую, что справедливы равенства

$$a_i * a_j = c_q, \text{ если } (a_i, a_j) \in M_q; \quad a_i * a_j = b_{ij}, \quad \text{если } (a_i, a_j) \in D; \tag{2.9}$$

$$a_q * b_{ij} = b_{ij}, \ b_{ij} * a_q = b_{ij}, \ c_i * a_j = a_j * c_i = c_i;$$

$$b_{ij} * b_{vw} = b_{ij}; \quad c_i * c_j = c_i; \quad b_{ij} * c_w = b_{ij}; \quad c_w * b_{ij} = c_w.$$

Символами

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(k, m, M_1, ..., M_m) = (V, *)$$

обозначаем группоид с множеством носителем V и алгебраической операцией $(*)$, которую задают равенства (2.9).

Замечание 2.1. *Далее символы a_i, b_{uv}, M, V, k будут относиться к объекту $\mathfrak{G}$, введенному определением 3. Путаницы не возникнет. В самом деле, до конца этого раздела речь будет идти только о группоидах $\mathfrak{G}(k, m, M_1, ..., M_m)$, в разделе 3 речь идет только о группоидах $\mathfrak{G}(k, q)$, а в четвертом – только о группоидах $\mathfrak{G}(k, m, M_1, ..., M_m)$.*

В данной работе доказывается следующая ниже теорема.

Теорема 2.2. *Для любого конечного моноида G существует группоид $\mathfrak{G}(k, 1, M_1)$, такой что число $k > |G|$ и моноид G изоморфен некоторому подмоноиду моноида* $\mathrm{End}(\mathfrak{G}(k, 1, M_1))$.

Теорема 2.2 доказывается конструктивно. Для каждого конечного моноида строится подходящий группоид $\mathfrak{G}(k, 1, M_1)$. В работе строятся эндоморфизмы (в явном виде), которых достаточно для доказательства теоремы 2.2. Ниже приведем эти эндоморфизмы (см. (2.11)). Но вначале дадим необходимые определения.

Пусть X – некоторое подмножество множества $M \times M$. Тогда будем использовать следующее обозначение:

$$X^{\alpha} := \{(a_{\alpha(i)}, a_{\alpha(j)}) \mid (a_i, a_j) \in X\}.$$

О п р е д е л е н и е 2.3. *Полагаем, что задан группоид* $\mathfrak{G}(k,m,M_1,...,M_m)$. *В множестве* $\mathcal{I}_k$ *выделим множество* $Ae(M_1,...,M_m)$ *отображений* α, *таких что выполняется включение*

$$D^\alpha \subseteq D \tag{2.10}$$

и для каждого номера $q \in \{1,...,m\}$ *существует номер* $d \in \{1,...,m\}$, *такой что справедливо включение* $M_q^\alpha \subseteq M_d$.

Если $\alpha \in Ae(M_1,...,M_m)$, *то на множестве* $\{1,...,m\}$ *можно определить отображение* $l_\alpha : \{1,...,m\} \to \{1,...,m\}$, *такое что* $l_\alpha(i) = j$ *тогда и только тогда, когда* $M_i^\alpha \subseteq M_j$. *Отметим, что* l_α *– отображение из* $\mathcal{I}_m$.

Пусть α – отображение из $Ae(M_1,...,M_m)$. Тогда отображение

$$\mu_\alpha : \ a_i \to a_{\alpha(i)} \quad (1 \le i \le k), \qquad b_{uv} \to b_{\alpha(u),\alpha(v)} \quad ((a_u,a_v) \in D), \tag{2.11}$$

$$c_q \to c_{q'}, \quad q' = l_\alpha(q) \ \ (1 \le q \le m)$$

является эндоморфизмом системы $\mathfrak{G}$ (доказывается в лемме 4.2).

3. Доказательство теоремы 2.1

Для доказательства теоремы 2.1 докажем

Л е м м а 3.1. *Всякое отображение* ϕ *из множества*

$$AE_1(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_3(\mathfrak{S}(k,q)) \tag{3.1}$$

является антиэндоморфизмом группоида $\mathfrak{S}(k,q)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Далее будем показывать, что для любого ϕ из объединения (3.1) элементы $(x*y)^\phi$ и $y^\phi * x^\phi$ совпадают (т. е. показывать, что выполняется равенство (1.1)).

1. Пусть $\phi := \phi'_\alpha$ – некоторый произвольный антиэндоморфизм из $AE_1(\mathfrak{S}(k,q))$. Далее проводим вычисления

$$(a_i * a_j)^\phi = (b_{ij})^\phi = b_{\alpha(j),\alpha(i)}, \quad a_j^\phi * a_i^\phi = a_{\alpha(j)} * a_{\alpha(i)} = b_{\alpha(j),\alpha(i)};$$

$$(b_{ij} * b_{uv})^\phi = (b_{iv})^\phi = b_{\alpha(v),\alpha(i)}, \quad b_{uv}^\phi * b_{ij}^\phi = b_{\alpha(v),\alpha(u)} * b_{\alpha(j),\alpha(i)} = b_{\alpha(v),\alpha(i)};$$

$$(a_i * b_{uv})^\phi = (b_{\beta_i(u),\beta_i(v)})^\phi = b_{\alpha(\beta_i(v)),\alpha(\beta_i(u))},$$

$$b_{uv}^\phi * a_i^\phi = b_{\alpha(v),\alpha(u)} * a_{\alpha(i)} = b_{\beta'_{\alpha(i)}(\alpha(v)),\beta'_{\alpha(i)}(\alpha(u))}$$

В силу (2.7) получаем равенства

$$\beta'_{\alpha(i)}(\alpha(v)) = \alpha(\beta_i(v)), \quad \beta'_{\alpha(i)}(\alpha(u)) = \alpha(\beta_i(u)),$$

следовательно, выполняется равенство

$$b_{\beta'_{\alpha(i)}(\alpha(v)),\beta'_{\alpha(i)}(\alpha(u))} = b_{\beta'_{\alpha(i)}(\alpha(v)),\beta'_{\alpha(i)}(\alpha(u))}.$$

Равенство

$$(b_{uv} * a_i)^\phi = a_i^\phi * b_{uv}^\phi$$

проверяется аналогично.

Таким образом, мы показали, что множество $AE_1(\mathfrak{S}(k,q))$ состоит из антиэндоморфизмов.

2. Пусть $\phi := \zeta[b_{uv}]$ – произвольный эндоморфизм из $AE_2(\mathfrak{S}(k,q))$. Этот эндоморфизм переводит любой элемент в элемент b_{uv}. Пусть x, y – два произвольных элемента из V. Тогда справедливы равенства:

$$(x * y)^\phi = b_{uv}, \quad y^\phi * x^\phi = b_{uv} * b_{uv} = b_{uv}.$$

Таким образом, $AE_2(\mathfrak{S}(k,q))$ – подмножество множества всех антиэндоморфизмов.

3. Пусть $\phi := \rho[a_s, M']$ – произвольный эндоморфизм из $AE_3(\mathfrak{S}(k,q))$. Эндоморфизм ϕ действует на V следующим образом:

$$(M')^\phi = \{a_s\}, \quad (M * M)^\phi = \{b_{ss}\}, \quad (M \setminus M')^\phi = \{b_{ss}\}.$$

Полагаем, что

$$x_1, y_1 \in (M * M), \ \ x_2 \in M \setminus M', y_2 \in (M * M), \ \ x_3 \in M', y_3 \in (M * M),$$

$$x_4, y_4 \in M', \ \ x_5, y_5 \in M \setminus M'.$$

Тогда справедливы равенства

$$(x_1 * y_1)^\phi = b_{ss}, \quad y_1^\phi * x_1^\phi = b_{ss} * b_{ss} = b_{ss};$$

$$(x_2 * y_2)^\phi = b_{ss}, \quad y_2^\phi * x_2^\phi = b_{ss} * b_{ss} = b_{ss};$$

$$(y_2 * x_2)^\phi = b_{ss}, \quad x_2^\phi * y_2^\phi = b_{ss} * b_{ss} = b_{ss};$$

$$(y_3 * x_3)^\phi = b_{ss}, \quad x_3^\phi * y_3^\phi = a_s * b_{ss} = b_{\beta_s(s),\beta_s(s)} = b_{ss};$$

$$(x_3 * y_3)^\phi = b_{ss}, \quad y_3^\phi * x_3^\phi = b_{ss} * a_s = b_{\beta'_s(s),\beta'_s(s)} = b_{ss};$$

$$(x_2 * x_2)^\phi = b_{ss}, \quad x_2^\phi * x_2^\phi = b_{ss} * b_{ss} = b_{ss};$$

$$(x_3 * x_3)^\phi = b_{ss}, \quad x_3^\phi * x_3^\phi = a_s * a_s = b_{ss};$$

$$(x_2 * x_3)^\phi = b_{ss}, \quad x_3^\phi * x_2^\phi = a_s * b_{ss} = b_{\beta_s(s),\beta_s(s)} = b_{ss};$$

$$(x_3 * x_2)^\phi = b_{ss}, \quad x_2^\phi * x_3^\phi = b_{ss} * a_s = b_{\beta'_s(s),\beta'_s(s)} = b_{ss};$$

$$(x_4 * y_4)^\phi = b_{ss}, \quad y_4^\phi * x_4^\phi = a_s * a_s = b_{ss};$$

$$(x_5 * y_5)^\phi = b_{ss}, \quad y_5^\phi * x_5^\phi = b_{ss} * b_{ss} = b_{ss}.$$

Таким образом, $AE_3(\mathfrak{S}(k,q))$ – подмножество множества всех антиэндоморфизмов. Доказательство завершено.

Для упрощения восприятия доказательства теоремы 2.1 приведем общую схему доказательства.

Общая схема доказательства первого утверждения теоремы 2.1. Зафиксируем произвольный антиэндоморфизм ϕ и рассмотрим два случая (совокупность которых дает альтернативу)

$$M^\phi \subseteq M \text{ и } M^\phi \cap (M * M) \neq \varnothing.$$

В первом случае покажем, что ϕ – антиэндоморфизм из $AE_1(\mathfrak{S}(k,q))$. Во втором случае будет рассмотрена альтернатива:

$$M^\phi \cap (M * M) \neq \varnothing,\ M^\phi \cap M \neq \varnothing \text{ либо } M^\phi \cap (M * M) \neq \varnothing,\ M^\phi \cap M = \varnothing.$$

Получим, что если $M^\phi \cap (M * M) \neq \varnothing$, то ϕ – антиэндоморфизм из

$$AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_3(\mathfrak{S}(k,q)).$$

Рассмотрим более подробно.

Доказательство теоремы 2.1.

1. Полагаем, что $k > 1$. Случай $k = 1$ будет рассмотрен отдельно (в конце). Лемма 3.1 дает включение

$$AE_1(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_3(\mathfrak{S}(k,q)) \subseteq \mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q)). \tag{3.2}$$

Далее ϕ – произвольный антиэндоморфизм из $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$.

Рассмотрим случай, когда $M^\phi \subseteq M$. Поскольку $M^\phi \subseteq M$, то ϕ определяет отображение $\alpha:\ \{1,...,k\} \to \{1,...,k\}$, которое определяется эквиваленцией

$$\alpha(i) = j\ \Leftrightarrow\ a_i^\phi = a_j.$$

Полагаем, что b_{ij} – произвольный элемент из $M * M$. Вычислим его ϕ – образ

$$b_{ij}^\phi = (a_i * a_j)^\phi = a_j^\phi * a_i^\phi = a_{\alpha(j)} * a_{\alpha(i)} = b_{\alpha(j),\alpha(i)}. \tag{3.3}$$

Вычисляя левые и правые части в равенствах

$$(a_s * b_{ij})^\phi = b_{ij}^\phi * a_s^\phi,\quad (b_{ij} * a_s)^\phi = a_s^\phi * b_{ij}^\phi,$$

получаем, что для α выполняются условия (2.7), следовательно, $\alpha \in A_{aend}(q)$. Значит, ϕ – антиэндоморфизм из $AE_1(\mathfrak{S}(k,q))$.

2. Рассмотрим случай $M^\phi \cap (M * M) \neq \varnothing$. В этом случае существуют $a_i \in M$ и $b_{uv} \in M * M$, такие что $a_i^\phi = b_{uv}$.

Выполняется включение

$$(M * M)^\phi \subseteq M * M. \tag{3.4}$$

В самом деле, пусть b_{ij} – произвольный элемент из $M * M$. Тогда справедливы равенства и включение

$$b_{ij}^\phi = (a_i * a_j)^\phi = a_j^\phi * a_i^\phi \in M * M.$$

Мы воспользовались простотой элементов из M (это следует из определения операции $(*)$).

В силу включения (3.4) существуют преобразования δ_1 и δ_2 множества $\{1,...,k\}$, такие что для любого $b_{sd} \in M * M$ справедливы равенства

$$b_{sd}^\phi = b_{\delta_1(s,d),\delta_2(s,d)}.$$

Для любых $s, d \in \{1,...,k\}$ должно выполняться равенство

$$(a_i * b_{sd})^\phi = b_{sd}^\phi * a_i^\phi.$$

Вычисляем правую и левую часть этого равенства

$$b_{sd}^{\phi} * a_i^{\phi} = b_{\delta_1(s,d),\delta_2(s,d)} * b_{uv} = b_{\delta_1(s,d),v},$$

$$(a_i * b_{sd})^{\phi} = (b_{\beta_i(s),\beta_i(d)})^{\phi} = b_{\delta_1(\beta_i(s),\beta_i(d)),\delta_2(\beta_i(s),\beta_i(d))}.$$

Отсюда получаем

$$b_{\delta_1(\beta_i(s),\beta_i(d)),\delta_2(\beta_i(s),\beta_i(d))} = b_{\delta_1(s),v}.$$

Последнее равенство выполняется для любых $s, d \in \{1, ..., k\}$. Поскольку β_i является перестановкой, то

$$\{(\beta_i(s), \beta_i(d)) \mid s, d \in \{1, ..., k\}\} = \{1, ..., k\}^2.$$

Значит, $\delta_2(s, d) = v$ при любом $(s, d) \in \{1, ..., k\}^2$.

Проводя аналогичные рассуждения для равенства

$$(b_{sd} * a_i)^{\phi} = a_i^{\phi} * b_{sd}^{\phi},$$

можно показать, что $\delta_1(s, d) = u$ при любом $(s, d) \in \{1, ..., k\}$.

Таким образом, мы показали, что

$$(M * M)^{\phi} = \{b_{uv}\}. \tag{3.5}$$

Пусть $a_j \in M$, такой что $a_j^{\phi} \in M * M$. Тогда $a_j^{\phi} = b_{uv}$. Предположим противное $a_j^{\phi} = b_{gh}$, тогда по доказанному получаем

$$(M * M)^{\phi} = \{b_{uv}\}, \quad (M * M)^{\phi} = \{b_{gh}\},$$

что является противоречием. Таким образом, мы показали включение

$$M^{\phi} \cap (M * M) = \{b_{uv}\}. \tag{3.6}$$

3. Полагаем, что $M^{\phi} \cap (M * M) \neq \varnothing$, $M^{\phi} \cap M \neq \varnothing$. Далее b_{uv} – фиксированный элемент из п. 2 (т. е. $a_i^{\phi} = b_{uv}$). В этом случае в множестве M существует непустое подмножество $M' := \{a_{q_1}, ..., a_{q_d}\}$, такое что $(M')^{\phi} \subseteq M$. Пусть теперь a_s – произвольный элемент из M' и $(a_s)^{\phi} = a_{s'}$. Тогда справедливы равенства

$$b_{uv} = (b_{ss})^{\phi} = (a_s * a_s)^{\phi} = a_{s'} * a_{s'} = b_{s's'}.$$

Следовательно, $s' = u = v$. Поскольку $u = v$, то обозначим их индексом u. Из произвольности элемента a_s из M' получаем, что для любого элемента $a_s \in M'$ справедливо равенство $(a_s)^{\phi} = a_u$.

Равенства

$$b_{uu} = (a_s * b_{uu})^{\phi} = b_{uu}^{\phi} * a_s^{\phi} = b_{uu} * a_u = b_{\beta_u'(u),\beta_u'(u)},$$

$$b_{uu} = (b_{uu} * a_s)^{\phi} = a_s^{\phi} * b_{uu}^{\phi} = a_u * b_{uu} = b_{\beta_u(u),\beta_u(u)}$$

показывают, что $\beta_u(u) = \beta_u'(u) = u$.

Мы показали, что если ϕ – образ элемента a_s – лежит в M, то $(a_s)^{\phi} = a_u$, где a_u – фиксированный элемент, не зависящий от s, и справедливы равенства

$$b_{uu} = b_{uv}, \quad \beta_u(u) = \beta_u'(u) = u.$$

Учитывая равенство (3.6), получаем, что ϕ – это антиэндоморфизм $\rho[a_s, M']$ из $AE_3(\mathfrak{S}(k,q))$.

4. Полагаем, что $M^\phi \cap (M * M) \neq \varnothing$, $M^\phi \cap M = \varnothing$. В этом случае $M^\phi \subseteq M * M$. Тогда в силу (3.6) получаем, что антиэндоморфизм ϕ – это антиэндоморфизм $\zeta[b_{uv}]$ из $AE_2(\mathfrak{S}(k,q))$.

5. Если ϕ – такой, что выполняется неравенство $M^\phi \cap (M * M) \neq \varnothing$, то выполняются посылки либо пункта 3, либо 4. Поэтому справедливо включение

$$\phi \in AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_3(\mathfrak{S}(k,q)).$$

Учитывая, что обязательно выполнится один из случаев $M^\phi \subseteq M$ либо $M^\phi \cap (M * *M) \neq \varnothing$, получаем, что при $k > 1$ всякий $\phi \in \mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ будет лежать в объединении

$$AE_1(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_3(\mathfrak{S}(k,q)).$$

Мы показали, что

$$\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q)) = AE_1(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_3(\mathfrak{S}(k,q)) \quad (k > 1).$$

При $k = 1$ простой перебор показывает, что выполняются равенства

$$\mathrm{Aaut}(\mathfrak{S}(k,q)) = \mathrm{Aut}(\mathfrak{S}(k,q)) = \{I\}, \quad \mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q)) = \mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q)) = \{I, \zeta[b_{11}]\}.$$

Последнее утверждение данной теоремы следует из того, что отображения из множеств $AE_2(\mathfrak{S}(k,q))$ и $AE_3(\mathfrak{S}(k,q))$ не являются обратимыми.
Доказательство теоремы 2.1. завершено.

Пример 3.1. Далее в множестве $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ выделим подмножества X_1 и X_2, такие что X_1 и X_2 – подполугруппы в моноиде всех эндоморфизмов группоида $\mathfrak{S}(k,q)$.

1. Построим X_1. Пусть $G = (G, *)$ – некоторый группоид, содержащий идемпотенты, и $I(G)$ – множество всех идемпотентов в группоиде G. Тогда для каждого $a \in I(G)$ можно определить отображение f_a, которое все элементы группоида G переводит в элемент a. Отображения f_a $(a \in I(G))$ являются эндоморфизмами (эндоморфизмами в смысле группоида) и антиэндоморфизмами. Это следует из равенств

$$(g_1 * g_2)^{f_a} = a, \quad g_1^{f_a} * g_2^{f_a} = a * a = a;$$

$$(g_1 * g_2)^{f_a} = a, \quad g_2^{f_a} * g_1^{f_a} = a * a = a.$$

В этом случае множество $\{f_a \mid a \in I(G)\}$ образует сингулярную по первому аргументу полугруппу в множествах $\mathrm{End}(G)$ и $\mathrm{Aend}(G)$. Действительно,

$$g^{f_a \cdot f_b} = (g^{f_b})^{f_a} = b^{f_a} = a = g^{f_a}, \quad (a, b \in I(G)),$$

где g – произвольный элемент из G.

Если $G = \mathfrak{S}(k,q)$, то $I(G) = M * M$ и $f_a = \zeta[b_{uv}]$, где $a = b_{uv}$. Таким образом,

$$X_1 = \{f_a \mid a \in I(G)\} = AE_2(\mathfrak{S}(k,q)).$$

2. Полагаем, что $X_2 = AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) \cup AE_3(\mathfrak{S}(k,q))$. По определению множества $AE_2(\mathfrak{S}(k,q))$ и $AE_3(\mathfrak{S}(k,q))$ состоят из эндоморфизмов. Замкнутость в X_2 следует из

теоремы 1 в работе [16]. Также из теоремы 1 в [16] следует, что $AE_2(\mathfrak{S}(k,q))$ – двухсторонний идеал в моноиде всех эндоморфизмов. Поэтому

$$AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) \cdot AE_3(\mathfrak{S}(k,q)),\ AE_3(\mathfrak{S}(k,q)) \cdot AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) \subseteq AE_2(\mathfrak{S}(k,q)).$$

Таким образом, X_2 – замкнуто.

П р и м е р 3.2. Группоид $\mathfrak{S}(k,q)$ можно выбрать так, что множество всех антиэндоморфизмов будет содержать антиэндоморфизм, который не является эндоморфизмом. В самом деле, пусть $k > 1$ и q – кортеж, составленный из единичных перестановок. Определим отображение

$$\phi:\ a_i \to a_i; \quad b_{ij} \to b_{ji} \quad (i,j \in \{1,...,k\}).$$

Несложно увидеть, что данное отображение является антиавтоморфизмом, но не является автоморфизмом. Действительно, последнее утверждение следует из равенств

$$a_i^{\phi} = a_i, \quad a_j^{\phi} = a_j, \quad (a_i * a_j)^{\phi} = b_{ij}^{\phi} = b_{ji}, \quad a_j^{\phi} * a_i^{\phi} = a_j * a_i = b_{ji}.$$

Произведение $\phi \cdot \phi$ равно тождественному отображению I множества V. Из теоремы 2.1 следует, что $I \notin \mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$, следовательно, в этом случае множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ не является замкнутым относительно композиции двух отображений. В самом деле, поскольку I – биекция V, то I не может попасть в множества $AE_2(\mathfrak{S}(k,q))$ и $AE_3(\mathfrak{S}(k,q))$ (отсутствует биекция). Однако и в множество $AE_1(\mathfrak{S}(k,q))$ при $k > 1$ оно тоже не попадает (см. (2.8) – общий вид отображений из множества $AE_1(\mathfrak{S}(k,q))$).

П р и м е р 3.3. Построим пример группоида $\mathfrak{S}(k,q)$, такого что множество $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q))$ замкнуто относительно композиции двух антиэндоморфизмов и $\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q)) \subseteq \mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q))$. Через I обозначим тождественное преобразование из $\mathcal{I}_k$.

1. Из теоремы 2.1 следует, что при $k = 1$ будет выполняться равенство

$$\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q)) = \mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q)).$$

2. Пусть $k = 2$ и $q = (\beta_1, \beta_2, \beta_1', \beta_2')$, где

$$\beta_1 = \beta_2 = I, \quad \beta_1' = \beta_2' = (1,2).$$

В данном случае $AE_3(\mathfrak{S}(k,q)) = \varnothing$. В самом деле, нет $a_s \in M$, такого что $\beta_s(s) = s$ и $\beta_s'(s) = s$.

В данном случае $\mathcal{I}_2 = \{I, (2,1), \alpha_1, \alpha_2\}$, где $\alpha_1(x) = 1$ и $\alpha_2(x) = 2$ (константы) для любого $x \in \{1,2\}$.

Прямая проверка показывает, что условия (2.7) не выполняются ни при каком отображении из $\mathcal{I}_2$. Поэтому множество $AE_1(\mathfrak{S}(k,q)) = \varnothing$. Таким образом, в силу теоремы 2.1 получаем равенства

$$\mathrm{Aend}(\mathfrak{S}(k,q)) = AE_2(\mathfrak{S}(k,q)) = \{\zeta[b_{11}], \zeta[b_{22}], \zeta[b_{12}], \zeta[b_{21}]\} \subset \mathrm{End}(\mathfrak{S}(k,q)).$$

4. Доказательство теоремы 2.2

Для доказательства теоремы 2.2 докажем леммы 4.1 и 4.2.

Лемма 4.1. *Пусть* $\alpha_1, \alpha_2 \in Ae(M_1, ..., M_m)$. *Тогда* $\alpha_1 \circ \alpha_2 \in Ae(M_1, ..., M_m)$ *и справедливо равенство*

$$l_{\alpha_1 \cdot \alpha_2}(i) = l_{\alpha_1}(l_{\alpha_2}(i)) \quad (i \in \{1, ..., m\}). \tag{4.1}$$

Доказательство. В самом деле, пусть $\alpha_1, \alpha_2 \in Ae(M_1, ..., M_m)$. Покажем, что композиция $\alpha_1 \circ \alpha_2$ лежит в $Ae(M_1, ..., M_m)$. Справедливы равенства и включения

$$j = l_{\alpha_2}(i), \quad s = l_{\alpha_1}(j), \quad M_i^{\alpha_1 \circ \alpha_2} = (M_i^{\alpha_2})^{\alpha_1} \subseteq M_j^{\alpha_1} \subseteq M_s.$$

Поскольку $D^{\alpha_2} \subseteq D$ и $D^{\alpha_1} \subseteq D$, то $D^{\alpha_1 \circ \alpha_2} \subseteq D$. Таким образом, мы показали включение $\alpha_1 \circ \alpha_2 \in Ae(M_1, ..., M_m)$.

Далее пусть q – произвольный индекс из $\{1, ..., m\}$. Тогда выполняются условия

$$M_q^{\alpha_2} \subseteq M_u \ \Rightarrow \ l_{\alpha_2}(q) = u;$$

$$M_u^{\alpha_1} \subseteq M_v \ \Rightarrow \ l_{\alpha_1}(u) = v;$$

$$M_q^{\alpha_1 \circ \alpha_2} = (M_q^{\alpha_2})^{\alpha_1} \subseteq (M_u)^{\alpha_1} \subseteq M_v \ \Rightarrow \ l_{\alpha_1 \circ \alpha_2}(q) = v.$$

Наконец, равенства $l_{\alpha_2}(q) = u$ и $l_{\alpha_1}(u) = v$ приводят к равенствам

$$l_{\alpha_1 \circ \alpha_2}(q) = v = l_{\alpha_1}(u) = l_{\alpha_1}(l_{\alpha_2}(q)),$$

которые выполняются для любого $q \in \{1, ..., m\}$.
Доказательство завершено.

Лемма 4.2. *Пусть* α *– отображение из* $Ae(M_1, ..., M_m)$. *Тогда отображение* μ_α, *заданное правилом* (2.11), *является эндоморфизмом системы* $\mathfrak{G}$. *Отображения вида* (2.11) *существуют.*

Доказательство. Единичное отображение является частным случаем отображения (2.11).

Вводим обозначение $\phi := \mu_\alpha$. Далее покажем, что для любых $x, y \in V$ выполняется равенство

$$(x * y)^\phi = x^\phi * y^\phi. \tag{4.2}$$

1. Полагаем, что $(a_i, a_j) \in M_q$, где $q \in \{1, ..., m\}$. Тогда для $q' = l_\alpha(q)$ выполняется равенство $(a_i^\phi, a_j^\phi) = (a_{\alpha(i)}, a_{\alpha(j)}) \in M_{q'}$. Вычисления показывают, что справедливы равенства

$$(a_i * a_j)^\phi = (c_q)^\phi = c_{q'}, \quad a_i^\phi * a_j^\phi = a_{\alpha(i)} * a_{\alpha(j)} = c_{q'},$$

которые показывают, что $(a_i * a_j)^\phi = a_i^\phi * a_j^\phi$.

2. Отображение α удовлетворяет условиям (2.10). Значит, если $(a_i, a_j) \in D$, то $(a_{\alpha(i)}, a_{\alpha(j)}) \in D$. Пусть $(a_i, a_j) \in D$. Тогда справедливы равенства

$$(a_i * a_j)^\phi = (b_{ij})^\phi = b_{\alpha(i),\alpha(j)}, \quad a_i^\phi * a_j^\phi = a_{\alpha(i)} * a_{\alpha(j)} = b_{\alpha(i),\alpha(j)},$$

которые показывают справедливость равенства (4.2) для всех пар $(x, y) \in D$.

3. Пусть $a_q \in M,\ b_{ij} \in B$. Тогда $(a_i, a_j) \in D$ и равенства

$$(a_q * b_{ij})^\phi = (b_{ij} * a_q)^\phi = (b_{ij})^\phi = b_{\alpha(i),\alpha(j)},$$

$$a_q^\phi * b_{ij}^\phi = a_{\alpha(q)} * b_{\alpha(i),\alpha(j)} = b_{\alpha(i),\alpha(j)},$$

$$b_{ij}^\phi * a_q^\phi = b_{\alpha(i),\alpha(j)} * a_{\alpha(q)} = b_{\alpha(i),\alpha(j)}$$

показывают, что $(a_q * b_{ij})^\phi = a_q^\phi * b_{ij}^\phi$, $(b_{ij} * a_q)^\phi = b_{ij}^\phi * a_q^\phi$.

Далее из соотношений

$$(c_i)^\phi = c_{i'},\ \ (c_i)^\phi = (c_i * a_q)^\phi = (a_q * c_i)^\phi,$$

$$a_q^\phi * c_i^\phi = a_{\alpha(q)} * c_{i'} = c_{i'},\ \ c_i^\phi * a_q^\phi = c_{i'} * a_{\alpha(q)} = c_{i'}$$

получаем справедливость равенств $(c_i * a_q)^\phi = c_i^\phi * a_q^\phi$, $(a_q * c_i)^\phi = a_q^\phi * c_i^\phi$.

4. Покажем, что $(x * y)^\phi = x^\phi * y^\phi$, когда $x, y \in M * M$. Равенства

$$(b_{ij})^\phi = b_{\alpha(i),\alpha(j)},\ \ (c_i)^\phi = c_{i'},\ \ (c_w)^\phi = c_{w'},$$

$$(b_{ij})^\phi = (b_{ij} * b_{uv})^\phi,\ \ (c_i)^\phi = (c_i * c_j)^\phi,\ \ (b_{ij})^\phi = (b_{ij} * c_w)^\phi,\ \ (c_w)^\phi = (c_w * b_{ij})^\phi,$$

$$b_{ij}^\phi * b_{uv}^\phi = b_{\alpha(i),\alpha(j)} * b_{\alpha(u),\alpha(v)} = b_{\alpha(i),\alpha(i)},\ \ c_i^\phi * c_j^\phi = c_{i'} * c_{j'} = c_{i'},$$

$$b_{ij}^\phi * c_w^\phi = b_{\alpha(i),\alpha(j)} * c_{w'} = b_{\alpha(i),\alpha(j)},\ \ c_w^\phi * b_{ij}^\phi = c_{w'} * b_{\alpha(i),\alpha(j)} = c_{w'}$$

показывают, что

$$(b_{ij} * b_{uv})^\phi = b_{ij}^\phi * b_{uv}^\phi,\ \ (c_i * c_j)^\phi = c_i^\phi * c_j^\phi,\ \ (b_{ij} * c_w)^\phi = b_{ij}^\phi * c_w^\phi$$

$$(c_w * b_{ij})^\phi = c_w^\phi * b_{ij}^\phi.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

В множестве всех эндоморфизмов $\mathrm{End}(\mathfrak{G}(k, 1, M_1))$ группоида $\mathfrak{G}(k, 1, M_1)$ выделим подмножество

$$E := \{\mu_\alpha \mid \alpha \in Ae(M_1, ..., M_m)\}.$$

Для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in Ae(M_1, ..., M_m)$ выполняется равенство

$$\mu_{\alpha_1} \cdot \mu_{\alpha_2} = \mu_{\alpha_1 \circ \alpha_2}. \tag{4.3}$$

В самом деле, проведем вычисления

$$a_i^{\mu_{\alpha_1} \cdot \mu_{\alpha_2}} = (a_i^{\mu_{\alpha_2}})^{\mu_{\alpha_1}} = a_{\alpha_2(i)}^{\mu_{\alpha_1}} = a_{\alpha_1(\alpha_2(i))} = a_{(\alpha_1 \circ \alpha_2)(i)} = a_i^{\mu_{\alpha_1 \circ \alpha_2}}. \tag{4.4}$$

$$c_q^{\mu_{\alpha_1} \cdot \mu_{\alpha_2}} = (c_{l_{\alpha_2}(q)})^{\mu_{\alpha_1}} = c_{l_{\alpha_1}(l_{\alpha_2}(q))} = c_{l_{\alpha_1 \circ \alpha_2}(q)} = c_q^{\mu_{\alpha_1 \circ \alpha_2}}. \tag{4.5}$$

$$b_{uv}^{\mu_{\alpha_1} \cdot \mu_{\alpha_2}} = (b_{uv}^{\mu_{\alpha_2}})^{\mu_{\alpha_1}} = b_{\alpha_2(u),\alpha_2(v)}^{\mu_{\alpha_1}} = b_{\alpha_1(\alpha_2(u)),\alpha_1(\alpha_2(v))} = b_{uv}^{\mu_{\alpha_1 \circ \alpha_2}}. \tag{4.6}$$

Равенства (4.4), (4.5) и (4.6) показывают справедливость равенства (4.3).

Множество E является замкнутым относительно композиции двух эндоморфизмов. Это следует из леммы 4.1 и равенства (4.3).

Кроме того, имеет место изоморфизм

$$Ae(M_1, ..., M_m) \cong E. \tag{4.7}$$

Изоморфизм будет осуществлять отображение $\xi : \ Ae(M_1, ..., M_m) \to E$, заданное правилом

$$\xi(\alpha) = \mu_\alpha \quad (\alpha \in Ae(M_1, ..., M_m), \quad \mu_\alpha \in E).$$

Доказательство теоремы 2.2. Пусть G – некоторый конечный моноид и k – натуральное число больше $|G|$. Пусть $m := |G|$ и I'_m – множество отображений α из $\mathcal{I}_k$, таких что α переводит множество $\{1, ..., m\}$ в себя, а на $\{m+1, ..., k\}$ отображения α действуют как тождественное отображение. Множество I'_m – замкнуто относительно композиции двух отображений и содержит тождественное отображение (тривиально проверяется). Очевидно, что $I'_m \cong \mathcal{I}_m$.

Далее вводим множество M_1 с помощью равенства

$$M_1 := \{(a_{\alpha_1(1)}, a_{\alpha_2(1)}) \in M \times M \mid \alpha_1, \alpha_2 \in I'_m\}.$$

Несложно увидеть, что выполняется равенство

$$M_1 = \{(a_i, a_j) \in M \times M \mid i, j = 1, ..., m\}.$$

Теорема $1'$ на стр. 419 из [17] утверждает: *всякая конечная полугруппа с единицей G изоморфно вкладывается в симметрическую полугруппу на множестве G.*

Поскольку $m = |G|$, то получаем, что G – изоморфен $H_1(G)$, где $H_1(G)$ – некоторый подмоноид в $\mathcal{I}_m$. Поскольку $I'_m \cong \mathcal{I}_m$, то $H_1(G)$ будет изоморфен некоторому подмоноиду I'_m, который обозначим $H_2(G)$. Следовательно, моноид G изоморфен $H_2(G)$, где $H_2(G)$ – некоторый подмоноид в I'_m.

При этом $H_2(G)$ является подмоноидом в $\mathcal{I}_k$. В силу определений множеств I'_m и M_1 получаем, что для любого отображения $\alpha \in H_2(G)$ выполняется включение

$$M_1^\alpha \subseteq M_1.$$

Зная множество M_1, мы можем вычислить множество D:

$$D = (M \times M) \setminus M_1 = \{(a_i, a_j) \mid i, j \in \{m+1, ..., k\}\}.$$

Далее вычисляем множество D^α:

$$D^\alpha = \{(a_{\alpha(i)}, a_{\alpha(j)}) \mid i, j \in \{m+1, ..., k\}\} = \{(a_i, a_j) \mid i, j \in \{m+1, ..., k\}\} = D.$$

Таким образом, мы получаем, что $\alpha \in Ae(M_1)$. Следовательно,

$$H_2(G) \subseteq Ae(M_1).$$

Учитывая изоморфизм $Ae(M_1) \cong E$ (в силу (4.7)), получаем, что $H_2(G)$ изоморфен некоторому подмоноиду $H_3(G)$ моноида E. Таким образом, получаем

$$G \cong H_1(G) \cong H_2(G) \cong H_3(G) \subset E \subset \mathrm{End}(\mathfrak{G}(k, 1, M_1)).$$

Доказательство завершено.

Благодарности. Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ (Соглашение 075-02-2022-876).

Список литературы

1. Gewirtzman L. Anti-isomorphisms of the endomorphism rings of a class of free module // Math. Ann., 1965. Vol. 159. pp. 278–284.

2. Gewirtzman L. Anti-isomorphisms of endomorphism rings of torsion-free module // Math. Z. 1967. Vol. 98. pp. 391–400.

3. Balaba I. N., Mikhalev A. V. Anti-isomorphisms of graded endomorphism rings of graded modules close to free ones // J. Math. Sci. 2010. Vol. 164, No 2. pp. 168–177. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-009-9747-x

4. Semenov P. P. Endomorphisms of semigroups of invertible nonnegative matrices over ordered rings // Journal of Mathematical Sciences. 2013. Vol. 193, No. 4. pp. 591–600. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-013-1486-3

5. Tsarkov O. I. Endomorphisms of the Semigroup $G_2(r)$ Over Partially Ordered Commutative Rings Without Zero Divisors and with 1/2 // Journal of Mathematical Sciences. 2014. Vol. 201, No. 4. pp. 534–551. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-014-2010-0

6. Zhuchok Yu. V. Endomorphism semigroups of some free products // Journal of Mathematical Sciences. 2012. Vol. 187, No. 2. pp. 146–152. DOI: http://dx.doi.org/1072-3374/12/1872-0146

7. Tabarov A. Kh. Homomorphisms and endomorphisms of linear and alinear quasigroups // Discrete Mathematics and Applications. 2007. Vol. 17, No. 3. pp. 253–260. DOI: https://doi.org/10.4213/dm21

8. Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы, полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Матем. сб. 1970. Т. 81, № 4. С. 600–609.

9. Katyshev S. YU., Markov V. T., Nechayev A. A. Application of non-associative groupoids to the realization of an open key distribution procedure // Discrete Mathematics and Applications. 2015. Vol. 25, No. 1. pp. 9–24. DOI: https://doi.org/10.4213/dm1289

10. Горнова М. Н., Кукина Е. Г., Романьков В. А. Криптографический анализ протокола аутентификации Ушакова–Шпильрайна, основанного на проблеме бинарно скрученной сопряжённости // Прикладная дискретная математика. 2015. Т. 28, № 2. С. 46–53. DOI: https://doi.org/10.17223/20710410/28/5

11. Тимофеенко Г. В., Глухов М. М. Группа автоморфизмов конечно-определенных квазигрупп // Матем. заметки. 1985. Т. 37, № 5. С. 617–626.

12. Birkhoff G.O. Automorphism groups // Revista de la Union Math. 1946. Vol. 4. pp. 155–157.

13. Groot J. Automorphism groups of rings // Int. Congr. of Mathematicians. 1958. P. 18.

14. Литаврин А. В. Автоморфизмы некоторых магм порядка $k + k^2$ // Известия Иркутского государственного университета. Серия Математика. 2018. Т. 26. С. 47–61. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.47

15. Литаврин А. В. Автоморфизмы некоторых конечных магм с порядком строго меньше числа N(N+1) и порождающим множеством из N элементов // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2019. № 2. С. 70–87. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.47

16. Litavrin A. V. Endomorphisms of Some Groupoids of Order $k + k^2$ // Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics. 2020. Vol. 32. pp. 64–78. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.64

17. Курош А. Г. Лекции по общей алгебре. М.: ИД «Лань», 2007. 560 с.

Поступила 23.11.2021; доработана после рецензирования 16.02.2021; принята к публикации 24.02.2022

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.
Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

References

1. L. Gewirtzman, "Anti-isomorphisms of the endomorphism rings of a class of free module", *Math. Ann.*, **159** (1965), 278–284.

2. L. Gewirtzman, "Anti-isomorphisms of endomorphism rings of torsion-free module", *Math. Z.*, **98** (1967), 391–400.

3. I. N. Balaba, A. V. Mikhalev, "Anti-isomorphisms of graded endomorphism rings of graded modules close to free ones", *J. Math. Sci.*, **164**:2 (2010), 168–177. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-009-9747-x

4. P. P. Semenov, "Endomorphisms of semigroups of invertible nonnegative matrices over ordered rings", *Journal of Mathematical Sciences*, **193**:4 (2013), 591–600. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-013-1486-3

5. O. I. Tsarkov, "Endomorphisms of the semigroup $G_2(r)$ over partially ordered commutative rings without zero divisors and with 1/2", *Journal of Mathematical Sciences*, **201**:4 (2014), 534–551. DOI: https://doi.org/10.1007/s10958-014-2010-0

6. Yu. V. Zhuchok, "Endomorphism semigroups of some free products", *Journal of Mathematical Sciences*, **187**:2 (2012), 146–152. DOI: http://dx.doi.org/1072-3374/12/1872-0146

7. A. Kh. Tabarov, "Homomorphisms and endomorphisms of linear and alinear quasigroups", *Discrete Mathematics and Applications*, **17**:3 (2007), 253–260. DOI: https://doi.org/10.4213/dm21

8. A. V. Mikhalev, M. A. Shatalova, “Automorphisms and anti-automorphisms of a semigroup of invertible matrices with nonnegative elements”, *Mat. Sb.*, **81**:4 (1970), 600–609 (In Russ.).

9. S. Yu. Katyshev, V. T. Markov, A. A. Nechayev, “Application of non-associative groupoids to the realization of an open key distribution procedure”, *Discrete Mathematics and Applications*, **25**:1 (2015), 9–24. DOI: https://doi.org/10.4213/dm1289

10. M. N. Gornova, E. G. Kukina, V. A. Roman’kov, “Cryptographic analysis of the Ushakov-Shpilrain authentication protocol based on the binary twisted conjugacy problem”, *Applied Discrete Mathematics*, **28**:2 (2015), 46–53 (In Russ). DOI: https://doi.org/10.17223/20710410/28/5

11. G. V. Timofeenko, M. M. Glukhov, “Groups of automorphisms of finitely presented quasigroups”, *Math. Notes*, **37**:5 (1985), 617–626 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.1007/BF01157961

12. G. O. Birkhoff, “Automorphism groups”, *Revista de la Union Math.*, **4** (1946), 155–157.

13. J. Groot, “Automorphism groups of rings”, *Int. Congr. of Mathematicians*, 1958, 18.

14. A. V. Litavrin, “Automorphisms of some magmas of order $k + k^2$”, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **26** (2018), 47–61 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.47

15. A. V. Litavrin, “Automorphisms of some finite magmas with order strictly less than N(N+1) and a generating set of N elements”, *Vestnik TVGU. Series: Applied Mathematics*, **2** (2019), 70–87 (In Russ.). DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2018.26.47

16. A. V. Litavrin, “Endomorphisms of Some Groupoids of Order $k + k^2$”, *Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics*, **32** (2020), 64–78. DOI: https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.64

17. A. G. Kurosh, *Lektsii po obshchey algebre [Lectures on general algebra]*, Publishing House «Lan», Moscow, 2007, 560 p.

Submitted 23.11.2021; Revised 16.02.2021; Accepted 24.02.2022

The author have read and approved the final manuscript.
Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

– УДК (только на русском);
– MSC2020 (только на английском);
– название статьи;
– аффиляция автора(-ов);
– информация об авторе(-ах);
– аннотация;
– ключевые слова;
– текст статьи (на русском или английском);
– список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффиляция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);

б) должность, подразделение (указывается при наличие);

в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;

г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);

д) ученая степень (указывается при наличие);

е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте https://orcid.org/;

ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов**.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

The rules of article design

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными"(написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы – не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка.* Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментиронном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом* (*American Mathematical Society*) и *Европейским математическим обществом* (*European Mathematical Society*). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmobib.sty. Этот пакет разработан на основе пакета amsbib.sty.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

– Автор(ы) (транслитерация);

– Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];

– Название русскоязычного источника (транслитерация);

– [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];

– Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);

– Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

– Автор(ы) (транслитерация);

– [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];

– Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);

– Количество страниц в издании;

– Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом *https://translit.ru/ru/bgn/*. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

The rules of article design

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.

Статьи в журналах на русском языке.

а) отсутсвует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, "The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay", Zhurnal SVMO, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations", Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction", Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]", Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, "[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]", Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTex**.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

– UDC (only in Russian);
– MSC2020 (only in English);
– article title;
– affiliation of the author(s);
– information about every author(s);
– abstract;
– keywords;
– text of the article (in English);
– references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);

b) Position, Department (indicated if available);

c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;

d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);

e) academic degree (indicated if available);

f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at https://orcid.org/.

g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

– it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;

– do not include non-essential details;

– use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;

– the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;

– it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

— *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

— *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

— *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

— *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

— *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

- *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmobib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

– Author(s) (transliteration);

- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];

– The name of the Russian-language source (transliteration);

– [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];

– Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);

– An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

Books (monographs and collections) in Russian:

– Author(s) (transliteration);

– title of the book (transliteration);

– [Translation of the book's name in square brackets];

– Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;

– The number of pages in the book;

– Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website *https://translit.ru/ru/bgn/* you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, "The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay", Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations", Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]", Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, "[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]", Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTex system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTex

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – *http://www.miktex.org*.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: *http://www.journal.svmo.ru/page/rules*. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой **\input** в файл-преамбулу. Например, **\input{shamanaev.tex}**

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды **\headerRus** и **\headerEn**, соответственно.

Команда **\headerRus** имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда **\headerEn** имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда **\headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **\headerEn**.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **\sect** с одним параметром: **\sect{Заголовок}**

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение **table** с вложенным окружением **tabular**:

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \\ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
**Название первого столбца & Название второго столбца **
**Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца на английском языке **
\hline
**1 & 2 **
\hline
**3 & 4 **
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {подпись_под_рисунком_на_английском_языке}

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {подпись_под_рисунком_на_английском_языке}

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись под_рис_на_английском_языке} {имя файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая подпись_на_английском_языке}

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под рис\\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень сжатия} {имя файла.eps} {подпись_под_рис\\подпись_на_английском_языке} {степень сжатия} {общая подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжа-тия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжа-тия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

\RBibitem{метка для ссылки на источник},

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

\Bibitem{метка для ссылки на источник}.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmobib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: **\cite**, **\citetwo**, **\citethree**, **\citefour**, **\citetire**, **\pgcite** (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных бибилиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных бибилиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета svmobib.sty

Статьи в журналах на русском языке

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib1}
\by П. А. Шаманаев
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
\jour Труды Средневолжского математического общества
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

Статьи в электронном журнале на русском языке

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Статьи в сборниках на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибиков
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Высш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib6}

\by В. Г. Малинов
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

The rules for article layout in the LaTex system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – *http://www.miktex.org.*

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: *http://www.journal.svmo.ru/page/rules.* The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command **input** in the preamble file. For example, **input{shamanaev.tex}**

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English **headerRus** and **headerEn**, respectively.

The command **headerRus** has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command **headerEn** has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command **headerFirstEn** *with the same parameters as for the command* **headerEn**.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command **sect** with one parameter:**sect{Header}**

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands **subsection**, **subsubsection** and **paragraph**.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands **label{label}** and **eqref{label}**, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked **label{ivanov14}**, Theorem 5 of this articles — **label{ivanovt5}**, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command **ref{label}**).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands \ **proof** and **proofend** (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

begin{table}[h!]

caption{Table name \\ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English} **label{shamanaevtable1}**

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption of_the_figure_in_English}

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression} {caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English} {file name.eps} {caption_of_the figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common caption_in_English}

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the figure \\ caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file name.eps} {caption_of_the_figure \\ caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

e) insert two pictures with common caption only

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file name.eps} {common_caption} {common_caption_in_English}

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {common_caption} {common_caption_in_English}

g) insert of three pictures with common caption only

\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps} {common_caption} {common_caption_in_English}

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of compression} {file name.eps} {degree_of_compression} {file name.eps} {degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

\RBibitem{label for a link to the source },

and every English reference – by a command

\Bibitem{label for a link to the source }.

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmobib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands **\cite**, **\citetwo**, **\citethree**, **\citefour**, **\citetire**, **\pgcite** (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmobib.sty package

Journal articles in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

Articles in the electronic journals in Russian

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

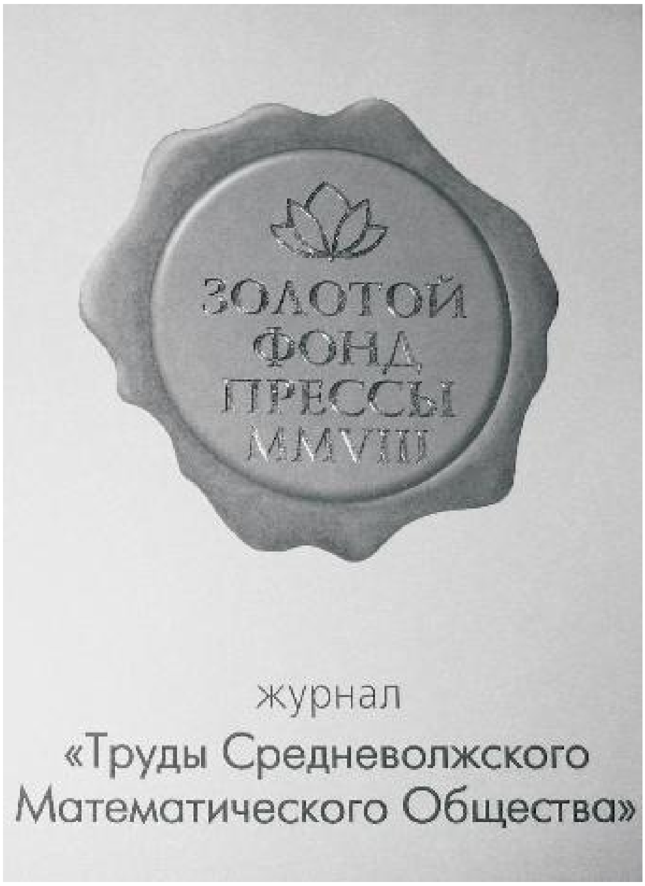
Conference proceedings in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

Алфавитный указатель авторов

Author Index

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*
Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Подписано в печать 11.03.2022. Дата выхода в свет 31.03.2022. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 10,5 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 271.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»
Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*
Translation: *A. O. Syromyasov*
Desktop publishing: *V. A. Atryahin*

Signed to print 11.03.2022. Date of publishing 31.03.2022. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 10,5.

Number of copies 100. Order no. 271.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

Для заметок

Для заметок

CBMO