

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 23 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 4

2021

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 23, № 4. 2021

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104

Издается с декабря 1998 года

Зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Территория распространения: Российская Федерация, зарубежные страны

Журнал публикует статьи на русском и английском языках.

Периодичность издания: 1 раз в квартал.

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 23, NO. 4. 2021

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104

Published since December 1998

The journal publishes articles in Russian and English.

Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные статьи и обзоры о новых значимых результатах научных исследований в области фундаментальной и прикладной математики, а также статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348). Журнал включен в DOAJ (Directory of Open Access Journals) и CrossRef.

Журнал индексируется в библиографической базе данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68. Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original papers and reviews on new significant results of scientific research in fundamental and applied mathematics. Articles about most significant events in mathematical life in Russia and abroad are also published here.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348). The journal is included in DOAJ (Directory of Open Access Journals) and CrossRef.

The journal is indexed in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.



FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya St., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малазийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, профессор, ведущий научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Каmachкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры моделирования динамических систем ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института, БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Ион Анка Вероника — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

Aleksandr S. Andreev — Full professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Vyacheslav Z. Grines — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Irek M. Gubaydullin — D. Sci. (Phys.-Math.), Leading Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Senior Researcher, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Chief Research Scientist, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Modeling of Dynamic Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Sergey I. Martynov — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Olga V. Pochinka — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Nikolay D. Morozkin — Full Professor, D. Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Petr V. Senin — Full Professor, D. Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph. D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Full Professor, D. Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Anca V. Ion — Ph. D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

Содержание

МАТЕМАТИКА

И. В. Бойков, А. И. Бойкова

Оптимальные по точности методы вычисления гиперсингулярных интегралов 360

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. И. Яковлев

О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные каскады с поверхностной динамикой, и росте числа некомпактных гетероклинических кривых 379

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Е. Ю. Киреичева, Е. А. Веселова, Ю. Н. Дерюгин, Т. Ф. Мамедова

Численное моделирование формирования сферического слоя D-T смеси в микроишняхх ЛТС 394

М. Е. Ладонкина, Ю. А. Повещенко, О. Р. Рагимли, Х. Чжан

Теоретический анализ полностью консервативных разностных схем с адаптивной вязкостью 412

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Н. Д. Кузьмичев, Е. В. Данилова, М. А. Васютин

Численный анализ нагрева токовым импульсом плёнки нитрида ниобия в её продольном сечении 424

А. А. Лытаев, И. Ю. Попов

Моделирование переключателей для CNOT-вентилей, основанных на взаимодействии между оптическими волноводами, с применением теории связанных волноводов 433

А. О. Сыромьясов, Ю. В. Понкратова, Т. В. Меньшакова

К вопросу о моделировании термодинамического взаимодействия частиц, взвешенных в двумерной среде 444

Ю. А. Тамарова, П. А. Вельмисов, Н. Д. Алексанин, Н. И. Нуруллин

Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред 461

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 75-ЛЕТИЮ ВЯЧЕСЛАВА ЗИГМУНДОВИЧА ГРИНЕСА 472

К 75-ЛЕТИЮ ЕВГЕНИЯ БОРИСОВИЧА КУЗНЕЦОВА 477

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 478

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 482

| | |
|--|-----|
| Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) | 486 |
| Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) | 492 |

| | |
|---|-----|
| Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) | 496 |
| Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) | 497 |

Contents

MATHEMATICS

I. V. Boykov, A. I. Boykova

Optimal with respect to accuracy methods for solving hypersingular integrals 360

V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. I. Yakovlev

On topology of manifolds admitting gradient-like cascades with surface dynamics and on growth of the number of non-compact heteroclinic curves . 379

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

E. Yu. Kireicheva, E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, T. F. Mamedova

Numerical modeling of the formation of a spherical layer of D-T mixture spherical layer in micro-targets of LTS 394

M. E. Ladonkina, Y. A. Poveshenko, O. R. Ragimli, H. Zhang

Theoretical Analysis of Fully Conservative Difference Schemes with Adaptive Viscosity 412

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

N. D. Kuzmichev, E. V. Danilova, M. A. Vasyutin

Numerical analysis of heating by a current pulse of a niobium nitride membrane in its longitudinal section 424

A. A. Lytaev, I. Yu. Popov

Simulation of switchers for CNOT-gates based on optical waveguide interaction with coupled mode theory 433

A. O. Syromyasov, Yu. V. Ponkratova, T. V. Menshakova

On modelling of thermodynamic interaction of particles suspended in two-dimensional medium 444

Yu. A. Tamarova, P. A. Velmisov, N. D. Aleksanin, N. I. Nurullin

Investigation of dynamic processes in pressure measurement systems for gas-liquid media 461

MATHEMATICAL LIFE

TO THE 75TH ANNIVERSARY OF VYACHESLAV ZIGMUNDOVICH GRINES ... 472

TO THE 75TH ANNIVERSARY OF EVGENIY BORISOVICH KUZNETSOV 477

The rules of article design (in Russian) 478

The rules of article design (in English) 482

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) 486

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) 492

Author Index (In Russian) 496

Author Index (in English) 497

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.360–378

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.392

Оптимальные по точности методы вычисления гиперсингулярных интегралов

И. В. Бойков, А. И. Бойкова

Пензенский государственный университет (г. Пенза, Российская Федерация)

Аннотация. Построены оптимальные по порядку квадратурные формулы вычисления одномерных и многомерных гиперсингулярных интегралов на классах функций $\Omega_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $\bar{\Omega}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots, M = \text{Const}$, γ – вещественное положительное число. Функции, принадлежащие классам $\Omega_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ и $\bar{\Omega}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, имеют ограниченные производные до r -го порядка в области Ω и производные до s -го порядка ($s = r + [\gamma]$) в области $\Omega \setminus \Gamma$, где $\Gamma = \partial\Omega$. Модули производных v -го порядка ($r < v \leq s$) являются степенными функциями от $d(x, \Gamma)^{-1}(1 + |\ln d(x, \Gamma)|)$, где $d(x, \Gamma)$ – расстояние от точки x до Γ . Интерес к этим классам функций обусловлен тем, что к ним принадлежат решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений и многие физические поля, в частности, гравитационные и электромагнитные поля. В работе даны определения оптимальных по точности методов вычисления гиперсингулярных интегралов. Построены оптимальные по порядку по точности квадратурные формулы вычисления одномерных и многомерных гиперсингулярных интегралов на классах функций $\Omega_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ и $\bar{\Omega}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл, квадратурная формула, оптимальный метод

Для цитирования: Бойков И. В., Бойкова А. И. Оптимальные по точности методы вычисления гиперсингулярных интегралов // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 360–378. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.360–378>

1. Введение

В настоящее время наблюдается активное развитие приближенных методов вычисления сингулярных интегралов (СИ) и гиперсингулярных интегралов (ГИ).

Это, в первую очередь, обусловлено той ролью, которую играют сингулярные интегральные уравнения (СИУ) и гиперсингулярные интегральные уравнения (ГИУ) при решении задач аэродинамики [1–4], электродинамики [5], ядерной физики [6], геофизики [7]. Особенно широкое применение сингулярные и гиперсингулярные интегральные уравнения находят в задачах анализа и синтеза антенн. Поскольку решения СИУ и ГИУ в аналитическом виде известны только для узкого класса уравнений [8; 9], то возникает задача разработки приближенных методов их решения и, следовательно, задача приближенного вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов.

Приближенному вычислению СИ и ГИ посвящено множество работ, обзоры которых имеются в книгах [10–16] и статьях [17–29].

Отметим, что большинство работ посвящено одномерным ГИ. В этих работах предложены различные вычислительные алгоритмы. В связи с этим возникает необходимость в построении методов, позволяющих сравнивать эти алгоритмы. Одним из таких

методов является сравнение алгоритмов по оптимальности (по точности, сложности, памяти и т. д.).

Подробное изложение вопросов построения оптимальных, асимптотически оптимальных, оптимальных по порядку (по точности и сложности) алгоритмов вычисления сингулярных, полисингулярных и многомерных сингулярных интегралов дано в [12]. Там же приведена достаточно подробная библиография работ, посвященных оптимальным методам вычисления сингулярных интегралов.

Оптимальные алгоритмы вычисления ГИ получили меньшее развитие. Ряд асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку по точности алгоритмов вычисления гиперсингулярных, полигиперсингулярных и многомерных гиперсингулярных интегралов построен в монографии [13].

В данной работе построен ряд оптимальных по порядку по точности алгоритмов вычисления ГИ на весовых пространствах Соболева. Интерес к их построению обусловлен тем, что многие физические поля, в частности гравитационные [7], электромагнитные, описываются весовыми пространствами Соболева, а при построении различных трансформаций геофизических полей используются ГИ [7].

2. Определения гиперсингулярных интегралов

Ж. Адамар ввел [30–31] определение гиперсингулярных интегралов, рассматривая, в одномерном случае, интегралы вида

$$\int_a^b \frac{A(x) dx}{(b-x)^{p+\alpha}}$$

при целом p и $0 < \alpha < 1$.

В данной работе используется определение ГИ в смысле главного значения Коши-Адамара.

О п р е д е л е н и е 2.1 [32]. *Интеграл*

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p}, \quad a < c < b,$$

определяется как предел:

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right],$$

где $\xi(v)$ – функция, выбранная так, чтобы предел существовал.

Первое определение многомерных ГИ дано Адамаром в монографиях [30–31]. В данной статье используются следующие определения многомерных ГИ.

Рассмотрим ГИ

$$L\varphi \equiv \int_G \int_G \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}},$$

где $t = (t_1, t_2) \in G \setminus \partial G$; p ($p > 2$) – натуральное число.

Приведем две регуляризации интеграла $L\varphi$.

Пусть $R(t, \varepsilon) = \{z : |z - t| \leq \varepsilon\}$, где $\varepsilon < \rho(t, \partial G)$ и $\rho(t, \partial G)$ – расстояние от t до ∂G .

О п р е д е л е н и е 2.2 Пусть p – натуральное число. Пусть $|\frac{\partial^{|v|}\varphi(t_1, t_2)}{\partial t_1^{v_1}\partial t_2^{v_2}}| \leq M$, $|v| = v_1 + v_2$, $0 \leq |v_i| \leq p - 2$, $i = 1, 2$.

Под интегралом $L\varphi$ при $p \geq 3$ понимается предел

$$L\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int \int_{G \setminus R(t, \varepsilon)} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \sum_{k=1}^{p-2} \frac{B_k(\varepsilon)}{\varepsilon^k} - C(\varepsilon) \ln \varepsilon \right),$$

где $B_k(x)$, $C(x)$ – функции, удовлетворяющие условиям:

- а) предел существует;
- б) $B_k(x) \in W^k$;
- в) $C(x)$ принадлежит классу функций Дини-Липшица.

З а м е ч а н и е 2.1 В работе [13] приведено эквивалентное и, в ряде случаев, более удобное определение.

О п р е д е л е н и е 2.3 Пусть p , $p > 2$ – нецелое число. Интеграл $L\varphi$ при $p = k + \alpha$, $k = 2, 3, \dots$, $0 < \alpha < 1$, определяется как предел

$$L\varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\int \int_{G \setminus R(t, \varepsilon)} \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} - \frac{B(\varepsilon)}{\varepsilon^{p-2}} \right),$$

где $B(\varepsilon)$ – удовлетворяет следующим условиям:

- а) предел существует;
- б) $B(\varepsilon) \in W^{p-2}$.

3. Классы функций

Через $H_\alpha(D, M)$, $H_{\alpha_1, \alpha_2}(D, M)$ обозначены гельдеровские классы функций.

Описания классов функций $W^{r,s}(D, M)$, $D = [a, b; c, d]$, $0 < M < \infty$, $C_l^r(\Omega, 1)$, $\Omega = [a_1, b_1; \dots; a_l, b_l]$ приведены в [12–13].

Пусть $x = (x_1, \dots, x_l)$, $v = (v_1, \dots, v_l)$, $|v| = v_1 + v_2 + \dots + v_l$, $0 \leq v_i \leq |v|$, $i = 1, 2, \dots, l$, $D^v = \partial^{|v|} / \partial^{v_1} x_1 \dots \partial^{v_l} x_l$.

О п р е д е л е н и е 3.1 [33] Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$. Функция $\varphi(x_1, \dots, x_l)$ входит в класс $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ при выполнении следующих условий:

$$\max_{x \in \Omega} |D^v \varphi(x)| \leq M, \quad \text{при } 0 \leq |v| \leq r,$$

$$|D^v \varphi(x)| \leq M / (d(x, \Gamma))^{|v| - r - \zeta}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad \text{при } r < |v| \leq s,$$

где $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$ при γ – нецелом, $s = r + \gamma$ при γ – целом.

Здесь $d(x, \Gamma) = \min_{1 \leq i \leq l} \min(|1 + x_i|, |1 - x_i|)$.

О п р е д е л е н и е 3.2 [34]. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$; γ , r и u — натуральные числа; $s = r + \gamma$. Класс $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ состоит из функций $\varphi(x)$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)$, для которых выполнены следующие условия:

$$\max_{x \in \Omega} |D^v \varphi(x)| \leq M, \quad \text{при } 0 \leq |v| \leq r-1,$$

$$|D^v \varphi(x)| \leq M(1 + |\ln^u d(x, \Gamma)|), \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad \text{при } |v| = r,$$

$$|D^v \varphi(x)| \leq M(1 + |\ln^{u-1} d(x, \Gamma)|)/(d(x, \Gamma))^{|v|-r}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad \text{при } r < |v| \leq s.$$

О п р е д е л е н и е 3.3 [34]. Пусть $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$, u — натуральное число; $\gamma > 0$, $\gamma -$ нецелое число. Множество $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ состоит из функций, для которых выполнены следующие условия:

$$\max_{x \in \Omega} |D^v \varphi(x)| \leq M, \quad \text{при } 0 \leq |v| \leq r;$$

$$|D^v \varphi(x)| \leq M(1 + |\ln^u d(x, \Gamma)|)/(d(x, \Gamma))^{|v|-r-\zeta}, \quad x \in \Omega \setminus \Gamma, \quad \text{при } r < |v| \leq s,$$

где $s = r + [\gamma] + 1$, $\gamma = [\gamma] + \mu$, $0 < \mu < 1$, $\zeta = 1 - \mu$.

З а м е ч а н и е 3.1 Классы функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ являются обобщением класса функций $Q_r(\Omega, M)$, введенного в [35].

4. Определения оптимальных алгоритмов вычисления ГИ

В этом разделе приведем, следуя работам [13; 36], определения оптимальных, асимптотически оптимальных и оптимальных по порядку квадратурных и кубатурных формул вычисления ГИ.

Рассмотрим ГИ

$$L\varphi = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \tau_2) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}}, \quad (t_1, t_2) \in \Omega = [-1, 1]^2, \quad p > 2.$$

Интеграл $L\varphi$ будем вычислять по кубатурной формуле

$$L\varphi = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{i=0}^{\rho_1} \sum_{j=0}^{\rho_2} p_{klij}(t_1, t_2) \varphi^{(i,j)}(x_k, y_l) + R_{mn}(t_1, t_2; x_k, y_l; p_{klij}; \varphi). \quad (4.1)$$

Кубатурные формулы (4.1) определены на классе функций Ψ .

Точность кубатурной формулы (4.1) определяется функционалом $R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}; \varphi) = \sup_{(t_1, t_2) \in \Omega} |R_{mn}(t_1, t_2; x_k, y_l; p_{klij}; \varphi)|$.

Введем функционалы $R_{mn}[\Psi] = \sup_{\varphi \in \Psi} R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}; \varphi)$;

$\zeta_{mn}[\Psi] = \inf_{x_k, y_l; p_{klij}} R_{mn}(x_k, y_l; p_{klij}; \Psi)$, где нижняя грань берется по всем узлам $(x_k, y_l) \in \Omega$ и всем коэффициентам p_{klij} .

Кубатурная формула вида (4.1) с коэффициентами p_{klij}^* и узлами (x_k^*, y_l^*) называется оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если $R_{mn}(x_k^*, y_l^*; p_{klij}^*; \Psi)/\zeta_{mn}[\Psi] = 1, \sim 1, \asymp 1$.

Наряду с кубатурной формулой (4.1) интеграл $L\varphi$ будем вычислять по формуле

$$L\varphi = \sum_{k=1}^N \sum_{i_1=0}^{\rho_1} \sum_{j_2=0}^{\rho_2} p_{kij}(t_1, t_2) \varphi^{(i,j)}(M_k) + R_N(t_1, t_2; M_k; p_{kij}; \varphi). \quad (4.2)$$

Обозначим через Ψ класс функций, на котором построены кубатурные формулы (4.2).

Введем функционалы $R_N(M_k, p_{kij}, \varphi) = \sup_{(t_1, t_2) \in \Omega} |R_N(t_1, t_2; M_k; p_{kij}; \varphi)|$;
 $R_N(M_k, p_{kij}, \Psi) = \sup_{\varphi \in \Psi} R_N(M_k; p_{kij}; \varphi)$; $\zeta_N[\Psi] = \inf_{M_k, p_{kij}} |R_N(M_k, p_{kij}, \Psi)|$.

Кубатурная формула вида (4.2) с коэффициентами p_{kij}^* и узлами (M_k^*) является оптимальной, асимптотически оптимальной, оптимальной по порядку, если $R_N(M_k^*, p_{kij}^*, \Psi)/\zeta_N[\Psi] = 1, \sim 1, \asymp 1$.

Замечание. Говорят, что $\alpha_n \sim \beta_n$, если $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n/\beta_n = 1$. Аналогично, $\alpha_n \asymp \beta_n$, если $0 < A \leq \alpha_n/\beta_n \leq B < \infty$, A, B – константы.

Ниже используется следующее утверждение, цитируемое по работе [36].

Л е м м а 4.1 (С. А. Смоляк). Пусть функционалы $L(f), L_1(f), \dots, L_N(f)$ – линейные и Ω – выпуклое центрально-симметричное множество с центром симметрии Q в линейном метрическом пространстве. Пусть $\sup_{f \in \Omega_0} L(f) < \infty$, где $\Omega_0 \equiv \{f; f \in \Omega, L_k(f) = 0, k = 1, 2, \dots, N\}$. Тогда существуют числа D_1, \dots, D_N , такие что $\sup_{f \in \Omega} |L(f) - \sum_{k=1}^N D_k L_k(f)| = R(T)$, т. е. среди наилучших методов есть линейный.

С л е д с т в и е 4.1 $R(T) = \sup_{f \in \Omega_0} Lf$.

5. Оптимальные по порядку методы вычисления ГИ в весовых пространствах Соболева

Будем рассматривать гиперсингулярные интегралы вида

$$F(\varphi) = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau - t)^p}, \quad (5.1)$$

которые будем вычислять по формулам

$$F(\varphi) = \sum_{k=1}^N \sum_{l=0}^{\rho} p_{k,l}(t) \varphi^{(l)}(t_k) + R_n(p_{k,l}, t_k, \varphi), \quad (5.2)$$

где $p_{k,l}, t_k$ – коэффициенты и узлы квадратурной формулы.

Наряду с узлами $t_k, k = 1, \dots, N$, введем узлы $t_k^1 = -1 + (k/N)^v, t_k^2 = 1 - (k/N)^v, k = 1, \dots, N, v = (s+1-p)/(s+1-p-\gamma)$. Обозначим через $\{\xi_k\}, k = 1, \dots, 3N+1$, объединение узлов $t_k, k = 1, \dots, N$, и $t_k^1 = -1 + (k/N)^v, t_k^2 = 1 - (k/N)^v, k = 0, 1, \dots, N$.

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 5.1 Пусть интеграл (5.1) вычисляется по кубатурной формуле (5.2), определенной на классе функций Ψ и использующей $n = (N(\rho + 1))^2$ значений подынтегральной функции и ее производных. Тогда

$$\zeta_n(\Psi) \geq An^{p-1} \inf_{\xi_k} \sup_{\varphi \in \Psi(\xi_k)} \int_{\Omega} \varphi(t) dt. \quad (5.3)$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным сеткам узлов $(\xi_k) \in \Omega, k = 1, \dots, N$; $\Psi(\xi_k), k = 1, \dots, N$, означает множество функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих условиям: 1) функции $\varphi(t)$ – неотрицательные; 2) функции $\varphi(t)$ обращаются в нуль вместе с производными $\varphi^{(i)}(t)$, $(0 \leq i \leq \rho)$ в узлах ξ_k .

Доказательство проводится по аналогии с доказательствами, приведенными в монографии [13], и поэтому опускается.

Частными случаями теоремы 5.1 являются следующие утверждения.

Т е о р е м а 5.2 [13]. Пусть $\varphi \in \Psi = W^r(1)$. Для квадратурных формул вида (5.2) справедлива оценка $\zeta_n[\Psi] \geq Cn^{-r-1+p}$.

Т е о р е м а 5.3 Пусть $\varphi \in \Psi = Q_{r,\gamma}([-1, 1], M)$. Для квадратурных формул вида (5.2) справедлива оценка $\zeta_n[\Psi] \geq Cn^{-s-1+p}, s = r + [\gamma]$.

Оптимальные по порядку по точности квадратурные формулы на классе $W^r([-1, 1], M)$ построены в [13].

Построим оптимальную по порядку по точности квадратурную формулу на классе $Q_{r,\gamma}([-1, 1], M)$.

Введем узлы $t_k = -1 + (k/N)^v, \tau = 1 - (k/N)^v, k = 0, 1, \dots, N$, и сегменты $\Delta_k^1 = [t_k, t_{k+1}], \Delta_k^2 = [\tau_{k+1}, \tau_k], k = 0, 1, \dots, N-1, v = (s-p+1)/(s-p+1-\gamma)$. Пусть $r \geq p-1$.

На сегменте $\Delta_k^i, k = 0, 1, \dots, N-1, i = 1, 2$, построим интерполяционный полином Эрмита порядка s в случае $s \geq 2p$ или порядка $2p > s$ в противоположном случае. Будем считать, что $s \geq 2p$.

На сегменте Δ_k^i (ниже для определенности рассматривается сегмент Δ_k^1 и верхний индекс опускается) построим интерполяционный полином Эрмита $H(\varphi, \Delta_k)$, удовлетворяющий следующим условиям: $H^{(q)}(t_k) = \varphi^{(q)}(t_k), H^{(q)}(t_{k+1}) = \varphi^{(q)}(t_{k+1}), q = 0, 1, \dots, p-1, H(t_{k,j}) = \varphi(t_{k,j}), t_{k,j} = t_k + (t_{k+1} - t_k)j/m_k, j = 1, 2, \dots, m_k - 1, m_k = s - 2p$.

Будем вычислять интеграл (5.1) по квадратурной формуле

$$(H\varphi)(t) = \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\Delta_l^1} \frac{H(\varphi, \Delta_l^1)}{(\tau - t)^p} d\tau + \sum_{l=0}^{N-1} \int_{\Delta_l^2} \frac{H(\varphi, \Delta_l^2)}{(\tau - t)^p} d\tau + R_N(\varphi). \quad (5.4)$$

Оценим погрешность формулы (5.4). Пусть $\psi(t, \Delta_k) = \varphi(t) - H(\varphi(t), \Delta_k), t \in \Delta_k$.

Тогда

$$|R_N(\varphi)| \leq \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k^1} \frac{\psi(\tau, \Delta_k^1)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| + \sum_{k=0}^{N-1} \left| \int_{\Delta_k^2} \frac{\psi(\tau, \Delta_k^2)}{(\tau - t)^p} d\tau \right|. \quad (5.5)$$

Пусть $t = t_k^1$. Оценим интеграл

$$J_1 = \left| \int_{\Delta_k^1} \frac{\psi(\tau, \Delta_k^1)}{(\tau - t_k^1)^p} d\tau \right|.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора с остаточным членом в интегральной форме. имеем

$$\psi(t, \Delta_k^1) = \frac{1}{(p-1)!} \int_{t_k^1}^t \psi^{(p)}(\tau, \Delta_k^1) (t-\tau)^{p-1} d\tau$$

и $J_1 \leq Ch_k \max_{t \in \Delta_k^1} |\psi^{(p)}(t, \Delta_k^1)|$, где $h_k = |t_{k+1}^1 - t_k^1|$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Воспользовавшись неравенством А. А. Маркова [38], имеем

$$J_1 \leq Ch_k^{(1-p)} \max_{t \in \Delta_k^1} |\psi(t, \Delta_k^1)|.$$

Рассмотрим отдельно два случая: 1) $k \neq 0$; 2) $k = 0$.

В первом случае $\max_{t \in \Delta_k^1} |\psi(t, \Delta_k^1)| \leq C\lambda_s \max_{t \in \Delta_k^1} |\varphi^{(s)}(t, \Delta_k^1)| h_k^s \leq C\lambda_s \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} h_k^s$, где λ_s — константа Лебега по узлам полинома Эрмита. Тогда

$$J_1 \leq C \left(\frac{N}{k}\right)^{v\gamma} h_k^{s+1-p} \leq \frac{1}{N^{s+1-p}}.$$

Во втором случае $\max_{t \in \Delta_k^1} |\psi(t, \Delta_k^1)| \leq C\lambda_s \max_{t \in \Delta_k^1} |\varphi^{(r)}(t, \Delta_k^1)| h_0^r$.

Пусть γ — целое число.

Тогда

$$J_1 \leq Ch_0^{r+1-p} \leq \frac{1}{N^{s+1-p}}.$$

При γ дробном получаем аналогичную оценку.

Следовательно, в обоих случаях

$$J_1 \leq \frac{1}{N^{s+1-p}}. \quad (5.6)$$

Рассмотрим теперь случай, когда $t \in \Delta_k^1$, $t \neq t_k^1, t_{k+1}^1$. Пусть $t \in [t_k^1, (t_k^1 + t_{k+1}^1)/2]$.

Оценим модуль интеграла:

$$J_2(t) = \int_{\Delta_k^1} \frac{\psi(\tau, \Delta_k^1)}{(\tau-t)^p} d\tau.$$

Интеграл J_2 можно представить в виде:

$$\begin{aligned} J_2(t) &= \\ &= \int_{\Delta_k^1} \frac{1}{(\tau-t)^p} \left[\psi(\tau, \Delta_k^1) - \left[\psi(t, \Delta_k^1) + \frac{\psi'(t, \Delta_k^1)}{1!}(\tau-t) + \dots + \frac{\psi^{(p-1)}(t, \Delta_k^1)}{(p-1)!}(\tau-t)^{p-1} \right] \right] d\tau + \\ &\quad + \psi(t, \Delta_k^1) \int_{\Delta_k^1} \frac{d\tau}{(\tau-t)^p} + \frac{\psi'(t, \Delta_k^1)}{1!} \int_{\Delta_k^1} \frac{d\tau}{(\tau-t)^{p-1}} + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\psi^{(p-1)}(t, \Delta_k^1)}{(p-1)!} \int_{\Delta_k^1} \frac{d\tau}{\tau-t} = J_2^*(t) + J_{2,0}(t) + J_{2,1}(t) + \dots + J_{2,p-1}(t). \end{aligned}$$

Оценим в отдельности каждое слагаемое.

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме, имеем

$$\begin{aligned} J_2^*(t) &\leq \left| \int_{\Delta_k^1} \frac{1}{(\tau-t)^p} \left[\frac{1}{(p-1)!} \int_t^\tau \psi^{(p)}(v, \Delta_k^1) (\tau-v)^{p-1} dv \right] d\tau \right| \leq \\ &\leq Ch_k \max_{v \in \Delta_k^1} |\psi^{(p)}(v, \Delta_k^1)| \leq Ch_k^{1-p} \max_{v \in \Delta_k^2} |\psi(v, \Delta_k^1)| \leq \\ &\leq Ch_k^{1-p} \left(\frac{N}{k} \right)^{v\gamma} h_k^s = Ch_k^{s+1-p} \left(\frac{N}{k} \right)^{v\gamma} \leq C \frac{1}{N^{s+1-p}}. \end{aligned}$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} J_{2,0} &= \left| \psi(t, \Delta_k^1) \int_{\Delta_k^1} \frac{d\tau}{(\tau-t)^p} \right| \leq C |\psi(t, \Delta_k^1)| \left[\left| \frac{1}{(t_{k+1}^1 - t)^{(p-1)}} \right| + \left| \frac{1}{(t_k^1 - t)^{(p-1)}} \right| \right] \leq \\ &\leq C |\psi_k(t, \Delta_k^1)| \frac{1}{(t - t_k^1)^{p-1}}. \end{aligned}$$

Разложим функцию $\psi_k(t, \Delta_k^1)$ по степеням $t - t_k$:

$$\psi_k(t, \Delta_k) = \frac{1}{(p-1)!} \int_{t_k}^t \psi_k^{(p)}(\tau, \Delta_k) (\tau - t_k)^{p-1} d\tau.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} |J_{2,0}(t)| &\leq C \max_{t \in \Delta_k^1} |\psi^{(p)}(t, \Delta_k^1) h_k| \leq Ch_k^{1-p} \max_{t \in \Delta_k^1} |\psi(t, \Delta_k^1)| \leq \\ &\leq Ch_k^{1-p} h_k^s \frac{1}{(d(t, \Gamma))^\gamma} \leq Ch_k^{s+1-p} \left(\frac{N}{k} \right)^{v\gamma} \leq C \frac{1}{N^{s+1-p}}. \end{aligned}$$

Аналогичным образом оцениваются функции $J_{2,1}, \dots, J_{2,p-1}$.

Таким образом, $|J_2(t)| \leq CN^{-(s+1-p)}$, и из этого неравенства и неравенства (5.6) следует, что при $t \in \Delta_k^1$:

$$\left| \int_{\Delta_k^1} \frac{\psi_k(\tau, \Delta_k^1)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| \leq \frac{C}{N^{s+1-p}}.$$

Аналогичным образом можно показать, что при $t \in \Delta_{k-1}^1$ и $t \in \Delta_{k+1}^1$:

$$\left| \int_{\Delta_k^1} \frac{\psi_k(\tau, \Delta_k^1)}{(\tau-t)^p} d\tau \right| \leq \frac{C}{N^{s+1-p}},$$

а при $t \in \Delta_l^i, l = 0, 1, \dots, N-1, l \neq k-1, k, k+1, i = 1, 2$:

$$\left| \int_{\Delta_k^1} \frac{\psi_k(\tau, \Delta_k^1)}{(\tau - t)^p} d\tau \right| \leq C h_k^{s+1} \left(\frac{N}{k} \right)^{v\gamma} \frac{N^{vp}}{|k^v - l^v|^p} \leq$$

$$\leq C \frac{k^{(v-1)(s+1) - \gamma v - \gamma p}}{N^{v(s+1-\gamma-p)}} \frac{1}{|1 - (\frac{l}{k})^v|^p} \leq C \frac{1}{N^{s+1-p}} \frac{1}{|1 - (\frac{l}{k})^v|^p} \frac{1}{k^p}.$$

Следовательно,

$$|R_N(\varphi)| \leq \frac{C}{N^{s+1-p}} \max_{1 \leq k \leq N-1} \frac{1}{k^p} \sum_{l=0}^{N-1} \frac{1}{|1 - (\frac{l}{k})^v|^p} \leq \frac{C}{N^{s-p+1}}.$$

Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 5.4 Среди квадратурных формул вида (5.2) на классе функций $\Psi = Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$, оптимальной по порядку по точности является формула (5.4) с погрешностью $|R_N[\Psi]| \asymp N^{-(s-p+1)}$.

6. Оптимальные по порядку методы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов в весовых пространствах Соболева

Будем рассматривать многомерные гиперсингулярные интегралы вида

$$H\varphi = \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\tau_1, \dots, \tau_l) d\tau_1 \cdots d\tau_l}{((\tau_1 - t_1)^2 + \cdots + (\tau_l - t_l)^2)^{p/2}}, \quad p > l. \quad (6.1)$$

Функция $\varphi(t_1, \dots, t_l)$ удовлетворяет условиям, достаточным для существования гиперсингулярного интеграла (6.1).

Для вычисления интеграла (6.1) будем использовать кубатурные формулы

$$H\varphi = \sum_{k_1=1}^{N_1} \cdots \sum_{k_l=1}^{N_l} \sum_{i_1=0}^{\rho_1} \cdots \sum_{i_l=0}^{\rho_l} p_{k_1 \cdots k_l i_1 \cdots i_l}(t_1, \dots, t_l) \varphi^{(i_1, \dots, i_l)}(x_{1,k_1}, \dots, x_{l,k_l}) +$$

$$+ R_N(t_1, \dots, t_l, x_{1,k_1}, \dots, x_{l,k_l}; p_{k_1 \cdots k_l i_1 \cdots i_l}; \varphi) \quad (6.2)$$

и

$$H\varphi = \sum_{k=1}^N p_k(t_1, \dots, t_l) \varphi(\mu_k) + R_N(t_1, \dots, t_l, \mu_k, p_k, \varphi). \quad (6.3)$$

Здесь $p_{k_1 \cdots k_l i_1 \cdots i_l}(t_1, \dots, t_l)$ и $\{x_{1,k_1}, \dots, x_{l,k_l}\}$, $(-1 \leq x_{k_i} \leq 1)$, $k_i = 1, 2, \dots, N_i$, $i = 1, 2, \dots, l$ — коэффициенты и узлы кубатурной формулы (6.2), а $p_k(t_1, \dots, t_l)$ и μ_k ($\mu_k \in \Omega = [-1, 1]^l$), $k = 1, 2, \dots, N$ — коэффициенты и узлы кубатурной формулы (6.3).

Пусть $\varphi(t_1, \dots, t_l) \in W^{\rho_1, \dots, \rho_l}$.

Через $\varphi^{(i_1, \dots, i_l)}(t_1, \dots, t_l)$ обозначены частные производные

$$\varphi^{(i_1, \dots, i_l)}(t_1, \dots, t_l) = \partial^{i_1 + \dots + i_l} \varphi(t_1, \dots, t_l) / \partial t_1^{i_1} \cdots \partial t_l^{i_l}, \quad 0 \leq i_j \leq \rho_j, \quad j = 1, \dots, l.$$

В формуле (6.2) положим $N_1 = N_2 = \dots = N_l = N$ и $\rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_l = \rho$, $l = 2$.

Т е о р е м а 6.1 [37]. Пусть интеграл (6.1) определен на классе функций Ψ и вычисляется по кубатурной формуле (6.2), использующей $n = ((N+1)(\rho+1))^2$ значений подынтегральной функции и ее производных. Тогда

$$\zeta_n(\Psi) \geq An^{(p-2)/2} \inf_{\xi_k, \kappa_l} \sup_{\varphi \in \Psi(\xi_k, \kappa_l)} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varphi(t_1, t_2) dt_1 dt_2.$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным сеткам узлов $\{\xi_k, \kappa_l\}, k, l = 0, 1, \dots, 2N+1$, таким что $(\xi_k, \kappa_l) \in \Omega, k, l = 0, 1, \dots, 2N+1$; $\Psi(\xi_k, \kappa_l), k, l = 0, 1, \dots, 2N+1$, означает множество функций $\varphi(t_1, t_2) \in \Psi$, удовлетворяющих условиям: 1) функции $\varphi(t_1, t_2) \geq 0$; 2) функции $\varphi(t_1, t_2)$ обращаются в нуль вместе с производными $\varphi^{(i,j)}(t_1, t_2), (0 \leq i \leq \rho_1, 0 \leq j \leq \rho_2)$ в узлах $(x_{1,k_1}, x_{2,k_2}), k_i = 0, \dots, N, i = 1, 2$.

В доказательстве теоремы 6.1 не был использован тот факт, что сетка узлов в формуле (6.2) является прямоугольной. Повторяя доказательство теоремы 6.1, приходим к

Т е о р е м а 6.2 Пусть гиперсингулярный интеграл (6.1) определен на классе функций Ψ и вычисляется по формуле (6.3). Тогда

$$\zeta_N(\Psi) \geq cN^{(p-2)/2} \inf_{\mu_k} \sup_{\varphi \in \Psi(\mu_k)} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varphi(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Здесь нижняя грань берется по всевозможным сеткам узлов $\{\mu_k\}, k, l = 0, 1, \dots, 2N+2$, таким что $(\mu_k) \in \Omega, k = 0, 1, \dots, 2N+1$; $\Psi(\mu_k)$ означает множество функций $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$, входящих в класс функций Ψ и удовлетворяющих условиям: 1) функции $\varphi(\sigma_1, \sigma_2) \geq 0$; 2) функции $\varphi(\sigma_1, \sigma_2)$ обращаются в нуль вместе с производными $\varphi^{(i,j)}(\sigma_1, \sigma_2)$ порядков $(0 \leq i, j \leq \rho)$ в узлах (μ_k) .

Оценки функционалов вида $\inf_{\xi_k, \kappa_l} \sup_{\varphi \in \Psi(\xi_k, \kappa_l)} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varphi(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$ известны для многих классов функций Ψ .

Известна основанная на лемме Смоляка связь между функционалами $\inf_{\xi_k, \kappa_l} \sup_{\varphi \in \Psi(\xi_k, \kappa_l)} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \varphi(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$ и оценками точности наилучших кубатурных формул вычисления интегралов вида $\int_{\Omega} \int_{\Omega} \varphi(\sigma_1, \sigma_2) d\sigma_1 d\sigma_2$.

Используя эти результаты, приходим к следующим оценкам.

Т е о р е м а 6.3 Пусть $\Psi \in W^{r,r}(1)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (6.2) справедлива оценка $\zeta_N[\Psi] \geq An^{-(r+2-p)/2}$, где n — число узлов кубатурной формулы (6.2).

Т е о р е м а 6.4 Пусть $\Psi = C_2^r(1)$. Для всевозможных кубатурных формул вида (6.2) справедлива оценка $\zeta_N[\Psi] \geq An^{-(r+2-p)/2}$, где n — число узлов кубатурной формулы (6.2).

Результаты [34; 39; 40] позволяют оценить снизу функционалы $\zeta_N[\Psi]$ на ряде классов функций.

Будем рассматривать интегралы (6.1) и кубатурные формулы (6.2) и (6.3) при $l \geq 2$.

Т е о р е м а 6.5 Пусть $\Psi = Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$. Пусть интеграл (6.1) вычисляется по кубатурной формуле (6.2). Тогда

$$\zeta_n(Q_{r,\gamma}(\Omega, M)) \geq An^{(p-l)/l} \begin{cases} n^{-(s+1-\gamma)/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1), \\ \frac{(\ln n)^{s+l-\gamma}}{n^{(s+1-\gamma)/(l-1)}} & v = l/(l-1), \end{cases}$$

где $v = s/(s-\gamma)$, n – число узлов кубатурной формулы.

Т е о р е м а 6.6 Пусть $\Psi = \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$. Пусть интеграл (6.1) вычисляется по кубатурной формуле (6.2). Тогда

$$\zeta_n(\bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)) \geq An^{(p-l)/l} \begin{cases} \frac{\ln^{u-1} n}{n^{(r+1)/(l-1)}}, & v > l/(l-1), \\ \frac{1}{n^{s/l}}, & v < l/(l-1), \\ \frac{\ln^{(l+s)u/(r+l)}}{n^{s/l}}, & v = l/(l-1), \frac{lu}{r+l} \geq 1 + \frac{l(u-1)}{s+l}, \\ \frac{\ln^{u+s/l}}{n^{s/l}}, & v = l/(l-1), \frac{lu}{r+l} \leq 1 + \frac{l(u-1)}{s+l}, \end{cases}$$

где $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$, n – число узлов кубатурной формулы.

Т е о р е м а 6.7 Пусть $\Psi = \bar{Q}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$. Пусть интеграл (6.1) вычисляется по кубатурной формуле (6.2). Тогда

$$\zeta_n(Q_{r,\gamma}^u(\Omega, M)) \geq An^{(p-l)/l} \begin{cases} \frac{\ln^{u-1} n}{n^{(r+1)/(l-1)}}, & v > l/(l-1), \\ \frac{1}{n^{s/l}}, & v < l/(l-1), \\ \frac{\ln^{(l+s)u/(r+l)}}{n^{s/l}}, & v = l/(l-1), \frac{lu}{r+l} \geq 1 + \frac{l(u-1)}{s+l}, \\ \frac{\ln^{u+s/l}}{n^{s/l}}, & v = l/(l-1), \frac{lu}{r+l} \leq 1 + \frac{l(u-1)}{s+l}, \end{cases}$$

где $v = (s+l)/(s+l-\gamma)$, n – число узлов кубатурной формулы.

В работе [37] построены оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления интегралов вида (6.1) на классах функций $W^{r,r}(\Omega, 1)$ и $C_2^r(\Omega, 1)$, $\Omega = [-1, 1]^2$.

Пусть $\Delta_{kl} = [v_k, v_{k+1}; v_l, v_{l+1}]$, $k, l = 0, 1, \dots, N-1$, $v_k = -1 + 2k/N$, $k = 0, 1, \dots, N$. Интерполяционный полином $P_{r,r}(\varphi, \Delta_{k,l})$ степени r по каждой переменной строится в области $\Delta_{k,l}$ по $r+1$ равноотстоящему узлу по переменным σ_i , $i = 1, 2$, причем вершины квадрата $\Delta_{k,l}$ входят в число узлов интерполяции.

Пусть $(t_1, t_2) \in \Delta_{ij}$, $i, j = 0, 1, \dots, N-1$. Интеграл (6.1) будем вычислять по кубатурной формуле

$$H\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} ' \int \int_{\Delta_{kl}} \frac{P_{rr}(\varphi, \Delta_{kl}) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} +$$

$$+ \int \int_{\Delta_{ij}^*} \frac{P_{rr}(\varphi, \Delta_{ij}^*) d\tau_1 d\tau_2}{((\tau_1 - t_1)^2 + (\tau_2 - t_2)^2)^{p/2}} + R_N(\varphi), \quad (6.4)$$

где $\Delta_{ij}^* = [v_{i-1}, v_{i+2}; v_{j-1}, v_{j+2}]$; $\sum \sum'$ означает суммирование по k и l , таким что мера пересечения квадратов Δ_{kl} с квадратом Δ_{ij}^* равна нулю.

Т е о р е м а 6.8 [37]. Пусть $\Psi = C_2^r(1)$. Среди всевозможных кубатурных формул вида (6.2) оптимальной по порядку на классе функций $\Psi = C_2^r(1)$ является формула (6.4) с погрешностью

$$R_N[\Psi] \asymp \frac{1}{n^{(r+2-p)/2}},$$

где n – число узлов кубатурной формулы.

Построим оптимальную по порядку кубатурную формулу для вычисления интеграла (6.1) на классе функций $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1; 1]^l$, $l = 2, 3, \dots$

Через Δ^0 обозначим множество точек t ($t = (t_1, \dots, t_l)$), для которых выполняются неравенства:

$$0 \leq d(t, \Gamma) \leq \left(\frac{1}{N}\right)^v.$$

Через Δ^k , $k = 1, 2, \dots, N-1$ обозначим множество точек, для которых выполняются неравенства:

$$\left(\frac{k}{N}\right)^v \leq d(t, \Gamma) \leq \left(\frac{k+1}{N}\right)^v.$$

Здесь $v = (s+1-p)/(s+1-p-\gamma)$.

Покроем куб Ω областями Δ^k , $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Каждую область Δ^k , $k = 0, 1, \dots, N-1$, покроем кубами и параллелепипедами с гранями, параллельными координатным плоскостям, и с ребрами, длины которых не меньше h_k и не больше $2h_k$, где $h_k = \left(\frac{k+1}{N}\right)^v - \left(\frac{k}{N}\right)^v$.

Полученные в результате области обозначим через $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$, $k = 0, 1, \dots, N-1$.

В каждой области $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ функцию $\varphi(t)$ будем аппроксимировать интерполяционным полиномом Эрмита $P_{s, \dots, s}(\varphi, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$, где $P_{s, \dots, s}[\varphi] = P_s^{t_1}[P_s^{t_2} \dots [P_s^{t_l}[\varphi(t)]] \dots]$. Здесь через $P_s^t[f, [a, b]]$ обозначен интерполяционный полином порядка s , интерполирующий функцию $f(t)$ на сегменте $[a, b]$ по $s+1$ равноотстоящему узлу, в число которых входят точки a и b . В вершинах областей $\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k$ значение полинома Эрмита $P_{s, \dots, s}(\varphi, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k)$ и его частных производных $l = 2, 3, \dots, (p-1)$ порядка совпадает со значениями функции φ и ее частных производных.

Интегралу (6.1) поставим в соответствие кубатурную формулу:

$$H\varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{i_1, \dots, i_l} \int_{\Delta_{i_1, \dots, i_l}^k} \dots \int \frac{P_{s, \dots, s}(\varphi, \Delta_{i_1, \dots, i_l}^k) d\tau_1, \dots, d\tau_l}{((\tau_1 - t_l)^2 + \dots + (\tau_l - t_l)^2)^{\frac{p}{2}}} + R_N(\varphi). \quad (6.5)$$

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 6.9 Пусть $\Psi = Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$. Среди квадратурных формул вида (6.2) оптимальной по порядку по точности на классе функций Ψ является формула (6.5). Ее погрешность равна

$$R_N[\Psi] \asymp n^{(p-l)/l} \begin{cases} n^{-(s+1-\gamma)/(l-1)}, & v > l/(l-1), \\ \frac{(\ln n)^{s+l-\gamma}}{n^{(s+1-\gamma)/(l-1)}}, & v = l/(l-1), \\ n^{-s/l}, & v < l/(l-1). \end{cases}$$

7. Заключение

В работе построены оптимальные по порядку (по точности) алгоритмы вычисления ГИ на весовых пространствах Соболева. В качестве весовой берется степенная функция расстояния от точки до границы области. К пространствам Соболева с подобными весовыми функциями принадлежат решения слабосингулярных, сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнений. Этими пространствами описывается ряд физических полей, в частности гравитационных, электромагнитных, акустических. Необходимость вычисления гиперсингулярных интегралов на весовых пространствах Соболева обусловлена необходимостью вычислять трансформации этих полей для выделения их особенностей.

Предложенные в работе методы построения оптимальных по порядку квадратурных и кубатурных формул вычисления ГИ могут быть распространены на другие виды особых интегралов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. – М.: Изд-во АН СССР, 1947. С. 3–65.
2. Бисплингхофф Р., Эшли Х., Халфмен Р. Аэроупругость. – М.: Иностран. лит., 1958. 283 с.
3. Эшли Х., Лэндал М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 129 с.
4. Вайникко Г. М., Лифанов Л. Н., Полтавский И. К. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001. 508 с.
5. Назарчук З. Т. Численное исследование дифракций на цилиндрических структурах. Киев: Наукова думка, 1989. 256 с.
6. Марчук Г. И., Лебедев В. И. Численные методы в теории переноса нейтронов. М.: Атомиздат. 1971. 496 с.
7. Бойков И. В., Бойкова А. И. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та. 2013. 510 с.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М.: Наука, 1977. 640 с.
9. Бойков И. В., Бойкова А. И. Аналитические методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. Математика. 2017. Т. 42, № 2. С. 63–78. DOI: <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-6>

10. Иванов В. В. Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений. Киев.: Наукова думка, 1968. 288 с.
11. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн. М.: ТОО «Янус». 1995. 520 с.
12. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 1. Сингулярные интегралы. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. 360 с.
13. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. 252 с.
14. Хубежты Ш. С. Квадратурные формулы для сингулярных интегралов и некоторые их применения : монография., Владикавказ: ЮМИ ВНЦ РАН и РСО-А, 2011. 236 с.
15. Frank S. Numerical Methods Based on Sinc and Analytic Functions. New York: Springer-Verlag, 1993. 565 p.
16. Frank S. Handbook of sink numerical methods. Boca Raton: CRC Press, 2011. 482 p.
17. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals // Applied Numerical Mathematics, 2009. Vol. 59, No. 6, pp. 1366–1385.
18. Бойков И. В., Сёмов М. А. Об одном методе вычисления гиперсингулярных интегралов // Известия вузов. 2016. № 3. С. 3–17.
19. Саакян А. В. Решение задачи для краевой трещины с гиперсингулярным определяющим уравнением методом механических квадратур // Известия Национальной академии наук Армении. Механика. 2020. Т. 73, № 2. С. 44–57. DOI: <http://doi.org/10.33018/73.2.4>
20. Саакян А. В. Квадратурная формула для гиперсингулярного интеграла, содержащего весовую функцию многочленов Якоби с комплексными показателями // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2020. № 2. С. 94–100. DOI: <http://doi.org/10.18522/1026-2237-2020-2-94-100>
21. De Bonis M. C., Occorsio D. Numerical methods for hypersingular integrals on the real line // Dolomites Research Notes on Approximation. 2017. Vol. 10. pp. 97–117.
22. Hu C., He X., Lu T. Euler-Maclaurin expansions and approximations of hypersingular integrals // Discrete. Continuous Dynamical Systems – B. 2015. Vol. 20, No. 5. pp. 1355–1375. DOI: <http://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.1355>
23. Lee Cheuk-Yu, Wang Hui, Qin, Qing-Hua. Efficient hypersingular line and surface integrals direct evaluation by complex variable differentiation method // Applied Mathematics and Computation. 2018. Vol. 316, No. C. pp. 256–281. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.027>

24. Korsunsky A. M. On the use of interpolative quadratures for hypersingular integrals in fracture mechanics // *Proceeding of the Royal Society. A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*. 2002. pp. 2721–2733.
25. Kolm P., Rokhlin V. Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals // *Computers and Mathematics with Applications*. 2001. Vol. 41. pp. 327–352.
26. Плиева Л. Ю. Квадратурные формулы интерполяционного типа для гиперсингулярных интегралов на отрезке интегрирования // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2016. Т. 19, № 4. С. 419–428.
27. Obaiys S. J., Ibrahim R. W., Ahmad A. F. Hypersingular Integrals in Integral Equations and Inequalities: Fundamental Review Study // *Differential and Integral Inequalities* / ed. by D. A. Themistocles. M. Rassias: Springer, 2019. pp. 687–717.
28. Zhang X., Wu J., Yu D. Superconvergence of the composite Simpson's rule for a certain finite-part integral and its applications // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2009. Vol. 223, Issue 2. pp. 598–613.
29. Бойков И. В., Айкашев П. В. Приближенные методы вычисления гиперсингулярных интегралов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2021. № 1. С. 66–84. DOI: <http://doi.org/10.21685/2072-3040-2021-1-6>
30. Hadamard J. *Lecons sur la Propagation des Ondes et les Equations de l'Hydrodynamique*. Herman-Paris, 1903. 320 p. (reprinted by Chelsea-New York, 1949).
31. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.
32. Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // *Уч. записки Казан. гос ун-та*. 1953. Т. 113, кн. 10. С. 57–105.
33. Бойков И. В. Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 1998. Т. 38, № 1. С. 25–33
34. Бойков И. В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. 236 с.
35. Бабенко К. И. О некоторых задачах теории приближений и численного анализа / К. И. Бабенко *Успехи математических наук*. 1985. Т. 40, № 1. С. 3–28.
36. Бахвалов Н. С. О свойствах оптимальных методов решения задач математической физики // *Вычислит. матем. и матем. физика*. 1970. Т. II, № 3. С. 555–568.
37. Бойков И. В., Захарова Ю. Ф. Оптимальные методы вычисления многомерных гиперсингулярных интегралов // *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*. 2012. Т. 21, № 1. С. 3–21.
38. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. М.; Л.: ГИФМЛ, 1949. 688 с.

39. Бойков И. В. Оптимальные кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов на классе $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ // Журнал вычисл. матем. и матем. физики, 1990. Т. 29, № 8. С. 1123–1132.
40. Бойков И. В. Оптимальные по порядку кубатурные формулы вычисления многомерных интегралов в весовых пространствах Соболева // Сибирский математический журнал. 2016. № 3. С. 543–561.

*Поступила 15.09.2021; доработана после рецензирования 10.11.2021;
принята к публикации 16.11.2021*

Информация об авторах:

Бойков Илья Владимирович, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (440000, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, boikov@pnzgu.ru

Бойкова Алла Ильинична, доцент кафедры высшей и прикладной математики, Пензенский государственный университет (440000, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0436-0460>, allaboikova@mail.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 65D32

Optimal with respect to accuracy methods for evaluating hypersingular integrals

I. V. Boykov, A. I. Boykova

Penza State University (Penza, Russian Federation)

Abstract. In this paper we constructed optimal with respect to order quadrature formulas for evaluating one- and multidimensional hypersingular integrals on classes of functions $\Omega_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $\bar{\Omega}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$, $\Omega = [-1, 1]^l$, $l = 1, 2, \dots$, $M = \text{Const}$, and γ is a real positive number. The functions that belong to classes $\Omega_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ and $\bar{\Omega}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ have bounded derivatives up to the r th order in domain Ω and derivatives up to the s th order ($s = r + [\gamma]$) in domain $\Omega \setminus \Gamma$, $\Gamma = \partial\Omega$. Moduli of derivatives of the v th order ($r < v \leq s$) are power functions of $d(x, \Gamma)^{-1}(1 + |\ln d(x, \Gamma)|)$, where $d(x, \Gamma)$ is a distance between point x and Γ . The interest in these classes of functions is due to the fact that solutions of singular and hypersingular integral equations are their members. Moreover various physical fields, in particular gravitational and electromagnetic fields belong to these classes as well. We give definitions of optimal with respect to accuracy methods for solving hypersingular integrals. We constructed optimal with respect to order of accuracy quadrature formulas for evaluating one- and multidimensional hypersingular integrals on classes of functions $\Omega_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$ and $\bar{\Omega}_{r,\gamma}^u(\Omega, M)$.

Key Words: hypersingular integrals, quadrature formulas, optimal methods

For citation: I. V. Boykov, A. I. Boykova. Optimal with respect to accuracy methods for evaluating hypersingular integrals. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:4(2021), 360–378. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.360-378>

REFERENCES

1. A. I. Neckrasov, *Wave theory in unsteady flow*, Moscow. USSR Science Academy Publ., 1947 (In Russ.).
2. R. Bisplinghoff, H. Ashley, R. Halfman, *Aeroelasticity*, Inostrannaya Literatura Publ., Moscow, 1958 (In Russ.), 283 p.
3. H. Ashlay, M. Landahl, *Aerodynamics of wings and bodies*, Mashinostroyeniye Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 129 p.
4. G. M. Vainikko, L. N. Lifanov, I. K. Poltavsky, *Numerical methods in hypersingular integral equarions and their applications*, Yanus-K,, Moscow, 2001 (In Russ.), 508 p.
5. Z. T. Nazarcyuk, *Numerical study of diffraction on cylynder structures*, Naukova dumka Publ., Kiev, 1989 (In Russ.), 256 p.
6. G. I. Marchuk, V. I. Lebedev, *Numerical methods in neutron transfer theory*, Atomizdat Publ., Moscow, 1971 (In Russ.), 496 p.
7. I. V. Boykov, A. I. Boykova, *Approximate methods for solving direct and inverce gravitation problems*, Penza State University Publ., Penza, 2013 (In Russ.), 510 p.
8. F. D. Gakhov, *Boundary problems*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russ.), 640 p.
9. I. V. Boykov, A. I. Boykova, “Analytical methods for solving singular and hypersingular integral equations”, *Izvestiya vuzov. Volga region. Mathematics*, 2017, no. 2, 63–78 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.21685/2072-3040-2017-2-6>
10. I. V. Ivanov, *Approximation theory and its application to numerical solution of singular integral equations*, Naukova dumka Publ., Kiev, 1968 (In Russ.), 288 p.
11. I. K. Lifanov, *Singular integral equations method and implementation in mathematical physics, aerodynamics, elasticity theory and wave diffraction*, Yanus Publ., Moscow, 1995 (In Russ.), 520 p.
12. I. V. Boykov, *Approximate methods for evaluating singular and hypersingular integrals. Part 1. Singular integrals*, Penza State University Publ., Penza, 2005 (In Russ.), 360 p.
13. I. V Boykov, *Approximate methods for evaluating singular and hypersingular integrals. Part 2. Hypersingular integrals*, Penza State University Publ., Penza, 2009 (In Russ.), 252 p.
14. Sh. C. Hubezhti, *Quadrature formulas for singular integrals and applications*, YUMI VNTS RAN I RSO-A Publ., Vladikavkaz, 2011 (In Russ.), 235 p.
15. S. Frank, *Numerical methods based on sinc and analytic functions*, Springer-Verlag, New York, 1993, 565 p.
16. S. Frank, *Handbook of sink numerical methods*, CRC Press, Boca Raton, 2011, 482 p.
17. I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova, “Accuracy optimal methods for evaluating hypersingular integrals”, *Applied Numerical Mathematics*, **59**:6 (2009), 1366–1385.

18. I. V. Boykov, M. A. Semov, “One method of calculating hypersingular integrals”, *Izvestiya vuzov*, 2016, no. 3, 3–17 (In Russ.).
19. A. V. Saakyan, “Solving the problem for a boundary crack with hypersingular equation by mechanical quadratures”, *Armenia National Academy of Science Proceedings. Mechanics*, **73**:2 (2020), 44–57 (In Russ.).
20. A. V. Saakyan, “Quadrature formula for hypersingular integral containing weight function of Jacobi polynomials with complex exponentials”, *Izvestiya vusov. Northen-Kavkaz. Natural Sciences*, 2020, no. 2, 94–100 (In Russ.). DOI: <http://doi.org/10.18522/1026-2237-2020-2-94-100>
21. M. C. De Bonis, D. Occorsio, “Numerical methods for hypersingular integrals on the real line”, *Dolomites Research Notes on Approximation*, **10** (2017), 97–117.
22. C. Hu, X. He, T. Lu, “Euler-Maclaurin expansions and approximations of hypersingular integrals”, *Discrete. Continuous Dynamical Systems – B*, **20**:5 (2015), 1355–1375. DOI: <http://doi.org/10.3934/dcdsb.2015.20.1355>
23. Cheuk-Yu Lee, Hui Wang, Qing-Hua Qin, “Efficient hypersingular line and surface integrals direct evaluation by complex variable differentiation method”, *Applied Mathematics and Computation*, **316**:C (2018), 256–281. DOI: <http://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.027>
24. A. M. Korsunsky, “On the use of interpolative quadratures for hypersingular integrals in fracture mechanics”, *Proceeding of the Royal Society. A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 2002, 2721–2733.
25. P. Kolm, V. Rokhlin, “Numerical quadratures for singular and hypersingular integrals”, *Computers and Mathematics with Applications*, **41** (2001), 327–352.
26. L. Yu. Plieva, “Quadrature interpolation type formulas for hypersingular integrals in the interval of integration”, *Siberian Journal of Numerical Mathematics*, **19**:4 (2016), 419–428 (In Russ.).
27. S. J. Obaiys, R. W. Ibrahim, A. F. Ahmad, “Hypersingular integrals in integral equations and inequalities: fundamental review study”, *Differential and Integral Inequalities*, Springer, 2019, 687–717.
28. X. Zhang, J. Wu, D. Yu, “Superconvergence of the composite Simpson’s rule for a certain finite-part integral and its applications”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **223**:2 (2009), 598–613.
29. I. V. Boykov, P. V. Aykashev, “Approximate methods for calculating hypersingular integrals”, *Izvestiya vuzov. Volga region. Mathematics*, 2021, no. 1, 66–84 (In Russ.).
30. J. Hadamard, *Lecons sur la propagation des ondes et les equations de l’hydrodynamique*, Herman, Paris, 1903, 320 p.
31. J. Hadamard, *Cauchy problem for linear equations with partial derivatives of hyperbolic type*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 351 p.
32. L. A. Chikin, “Special cases for Riemann boundary problem and singular integrals”, *Kazan State University Notes*, **113**:10 (1953), 57–105 (In Russ.).

33. I. V. Boykov, “Approximation of some function classes with local splines”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **38**:1 (1998), 25–33 (In Russ.).
34. I. V. Boykov, *Optimal methods for functions approximation and integrals calculation*, Penza State University Publ., Penza, 2007 (In Russ.), 236 p.
35. K. I. Babenko, “On some problems of approximation theory and numerical analysis”, *Russian Mathematical Surveys*, **40**:1 (1985), 3–28 (In Russ.).
36. N. S. Bahvalov, “On some optimal methods for mathematical physics problems solutions”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **11**:3 (1970), 555–568 (In Russ.).
37. I. V. Boykov, Yu. F. Zakharova, “Optimal methods for evaluating multidimensional hypersingular integrals”, *Izvestiya vuzov. Volga region. Mathematics*, **21**:1 (2012), 3–21 (In Russ.).
38. I. P. Natanson, *Constructive theory of functions*, GIFML Publ., Moscow, Leningrad, 1949 (In Russ.), 688 p.
39. I. V. Boykov, “Optimal cubature formulas for evaluating of multidimensional integrals on class $Q_{r,\gamma}(\Omega, M)$ ”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **29**:8 (1990), 1123–1132 (In Russ.).
40. I. V. Boykov, “Optimal with respect to order cubature formulas for calculating multidimensional integrals in weighted Sobolev spaces”, *Siberian Journal of Numerical Mathematics*, 2016, no. 3, 543–561 (In Russ.).

Submitted 15.09.2021; Revised 10.11.2021; Accepted 16.11.2021

Information about the authors:

Ilya V. Boykov, Head of Department of High and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440000, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, boikov@pnzgu.ru

Alla I. Boykova, Department of High and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440000, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0436-0460>, allaboikova@mail.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.379–393

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938

О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные каскады с поверхностной динамикой, и росте числа некомпактных гетероклинических кривых

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. И. Яковлев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
(г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. В работе рассматривается класс $GSD(M^3)$ градиентно-подобных диффеоморфизмов с поверхностной динамикой, заданных на замкнутом ориентированном многообразии M^3 размерности три. Ранее было доказано, что многообразия, допускающие такие диффеоморфизмы, являются локально-тривиальными расслоениями над окружностью со слоем, диффеоморфным замкнутой ориентируемой поверхности рода g , а число некомпактных гетероклинических кривых таких многообразий – не менее $12g$. В настоящей работе выделяется класс диффеоморфизмов $GSDR(M^3) \subset GSD(M^3)$, имеющих минимальное число гетероклинических кривых для данного числа периодических точек, и доказывается, что несущее многообразие таких диффеоморфизмов является зейфертовым. Сепаратрисы периодических точек диффеоморфизмов из класса $GSDR(M^3)$ обладают регулярным асимптотическим поведением, в частности, их замыкания являются ручно вложенными. Кроме того, приводятся достаточные условия (не связанные с динамикой) того, что локально-тривиальное расслоение над окружностью является зейфертовым. В то же время в работе устанавливается, что для любого фиксированного $g \geq 1$, фиксированного числа периодических точек и любого целого $n \geq 12g$ существует многообразие M^3 и диффеоморфизм $f \in GSD(M^3)$, имеющий в точности n некомпактных гетероклинических кривых.

Ключевые слова: градиентно-подобный каскад, поверхностная динамика, топологическая классификация, некомпактная гетероклиническая кривая, Зейфертово многообразие

Для цитирования: Гринес В.З., Гуревич Е. Я., Яковлев Е. И. О топологии многообразий, допускающих градиентно-подобные каскады с поверхностной динамикой и росте числа некомпактных гетероклинических кривых // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 379–393. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.379–393>

1. Введение и формулировка результатов

Будем говорить, что Ω -устойчивый диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$ имеет *поверхностную динамику* (является *SD-диффеоморфизмом*), если его неблуждающее множество Ω_f состоит из двух непересекающихся семейств Ω_+ , Ω_- базисных множеств, таких что множества $\mathcal{A}_f = W_{\Omega_+}^u$ и $\mathcal{R}_f = W_{\Omega_-}^s$ не пересекаются и каждая компонента связности множеств \mathcal{A}_f и \mathcal{R}_f является локально плоской ориентируемой поверхностью S_g некоторого рода g^1

¹ Пусть S_g — ориентируемая поверхность (замкнутое двумерное многообразие) рода g и $e : S_g \rightarrow M^3$ — топологическое вложение. Поверхность $S_g = e(S_g)$ называется *локально плоской*, если для каждой точки $p \in S_g$ существует окрестность $U_p \subset M^3$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^3$, такие что множество $h_p(S_g \cap U_p)$ является координатной плоскостью в \mathbb{R}^3 .

Впервые SD-диффеоморфизмы появились в работе [1]. Наиболее полные результаты, касающиеся SD-диффеоморфизмов с нерегулярной динамикой получены в [2]. В этой работе было доказано, что любой структурно-устойчивый диффеоморфизм, заданный на трехмерном замкнутом многообразии, неблуждающее множество которого состоит из двумерных базисных множеств, имеет поверхностную динамику. Более того, такой диффеоморфизм локально представляется как прямое произведение гиперболического автоморфизма тора и структурно устойчивого диффеоморфизма окружности.

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ замкнутого многообразия M^n называется *градиентно-подобным*, если выполняются следующие условия:

- 1) неблуждающее множество Ω_f диффеоморфизма f состоит из конечного числа гиперболических периодических точек;
- 2) инвариантные многообразия периодических точек пересекаются трансверсально;
- 3) из условия $W_p^s \cup W_q^u \neq \emptyset$ следует, что $\dim W_q^u > \dim W_p^u$.

Если пересечение $W_p^s \cup W_q^u$ инвариантных многообразий различных седловых периодических точек p, q непусто, то оно называется *гетероклиническим пересечением*. При этом если гетероклиническое пересечение одномерно, то каждая его компонента связности называется *гетероклинической кривой*.

Будем говорить, что сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ является *градиентно-подобным диффеоморфизмом с поверхностной динамикой* (принадлежит классу $GSD(M^3)$), если множество его седловых периодических точек распадается на два непересекающихся подмножества Σ_a, Σ_r , таких что множества $\mathcal{A}_{f^t} = W_{\Sigma_a}^u \cup \Omega^0$, $\mathcal{R}_{f^t} = W_{\Sigma_r}^s \cup \Omega^3$ не пересекаются и каждая компонента связности множеств \mathcal{A}_f и \mathcal{R}_f является локально плоской ориентируемой поверхностью.

В работе [3] показано, что для любого $f \in GSD(M^3)$ существует число $g_f \geq 0$ и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\tau_f : \mathbb{S}_{g_f} \rightarrow \mathbb{S}_{g_f}$ такие, что несущее многообразие M^3 диффеоморфно фактор-пространству M_{g_f, τ_f}^3 прямого произведения $\mathbb{S}_{g_f} \times [0, 1] / \sim$, по отношению эквивалентности $(z, 1) \sim (\tau_f(z), 0)$, $z \in \mathbb{S}_{g_f}$. Кроме того, число некомпактных гетероклинических кривых диффеоморфизма $f \in GSD(M_{g_f, \tau_f}^3)$ больше или равно $12g_f k_f$, где k_f — число компонент множества $\mathcal{A}_f(\mathcal{R}_f)$, и нижняя оценка достигается, например, для многообразий, диффеоморфных прямому произведению $\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1$.

В работах [4–5], был введен класс градиентно-подобных потоков с поверхностной динамикой и получены достаточные условия того, чтобы несущее многообразие такого потока являлось зейфертовым многообразием. Аналогично этим работам мы введем понятие регулярного асимптотического поведения сепаратрис диффеоморфизма $f \in GSD(M^3)$ и доказываем следующие факты.

Теорема 1.1 Пусть многообразие $M_{g, \tau}^3$ допускает диффеоморфизм из класса $GSD(M_{g, \tau}^3)$ с регулярным асимптотическим поведением сепаратрис. Тогда диффеоморфизм τ является периодическим, а многообразие $M_{g, \tau}^3$ — зейфертовым.

Следующая теорема, доказательство которой приводится в этой работе, доказывает, что достижимо любое (наперед заданное) число некомпактных гетероклинических кривых.

Теорема 1.2 Для любых фиксированных $g \geq 1, k \geq 1$ и любого $n \geq 12gk$ существует диффеоморфизм $\tau(n) : \mathbb{S}_g \rightarrow \mathbb{S}_g$ и GSD -диффеоморфизм на многообразии $M_{g, \tau(n)}^3$, число некомпактных гетероклинических кривых которого равно n при фиксированном числе периодических точек, равном $4k(1 + g)$.

2. SD-диффеоморфизмы с регулярным асимптотическим поведением сепаратрис

В этом разделе вводится понятие регулярного асимптотического поведения сепаратрис. В начале приведем некоторые вспомогательные факты, касающиеся динамики градиентно-подобных SD-каскадов.

Напомним, что инвариантное множество A называется *аттрактором* диффеоморфизма f , если существует замкнутая окрестность (которая называется захватывающей окрестностью) $V \subset M^3$, такая что $f(V) \subset \text{int } V$ и $A = \bigcap_{n>0} f^n(V)$. Множество R называется *репеллером* диффеоморфизма f если оно является аттрактором для f^{-t} .

Следующее утверждение доказано в [3] (см. теоремы 1–4 и следствие 2), [6] (см. лемма 1, теорема 1).

Предложение 2.1 Пусть $f^t \in \text{GSD}(M^3)$. Тогда существуют целые $k_{f^t}, g_{f^t} \geq 0$ и сохраняющий ориентацию диффеоморфизм τ_{f^t} ориентируемой поверхности $\mathbb{S}_{g_{f^t}}$ рода g_{f^t} , такие что:

- 1) множества A_{f^t}, R_{f^t} состоят из одного и того же числа k_{f^t} компонент связности, каждая из которых гомеоморфна $\mathbb{S}_{g_{f^t}}$.
- 2) каждая компонентна связности $A_{f^t}(R_{f^t})$ является аттрактором (репеллером);
- 3) замыкание каждой компоненты связности множества $M^3 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}_{g_{f^t}} \times [0, 1]$;
- 4) многообразие M^3 диффеоморфно фактор-пространству $M_{g_{f^t}, \tau_{f^t}} = \mathbb{S}_{g_{f^t}} \times [0, 1] / \sim$ по отношению эквивалентности $(z, 1) \sim (\tau_{f^t}(z), 0)$; 5) диффеоморфизм f имеет не менее $12g_f k_f$ некомпактных гетероклинических кривых, не менее $8g_f$ из которых принадлежит множеству $A_f \cup R_f$.

Обозначим через Ω_f^i множество всех периодических точек диффеоморфизма f , размерность неустойчивого многообразия которых равна $i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Пусть V — компонента связности множества $M^3 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$. Тогда в силу предложения 2.1 существуют компоненты связности A, R множеств A_f, R_f соответственно, такие что $\partial V = A \cup R$. Положим $\Omega_A = \Omega_f \cap A, \Omega_A^i = \Omega_f^i \cap A, i \in \{0, 1, 2\}$, $\Omega_R = \Omega_{f^t} \cap R, \Omega_R^j = \Omega_f^j \cap R, j \in \{1, 2, 3\}$. Тогда верны следующие равенства:

$$A = \bigcup_{p \in \Omega_A} W_p^u, R = \bigcup_{p \in \Omega_R} W_p^s.$$

Из [7] (теорема 2.3) и [3] (леммы 1, 2) вытекает справедливость следующего утверждения.

Предложение 2.2 Пусть $\sigma^1 \in \Omega_A^1, \omega \in \Omega_A^0$. Тогда

- 1) $W_{\sigma^1}^u \subset A$ и существуют точки $\omega_+, \omega_- \in \Omega_A^0$ (возможно, $\omega_+ = \omega_-$), такие что $\text{cl } W_{\sigma^1}^u \setminus W_{\sigma^1}^u = \omega_+ \cup \omega_-$;
- 2) существуют точки $\sigma_+^2, \sigma_-^2 \in \Omega_A^2$ (возможно, $\sigma_+^2 = \sigma_-^2$), такие что множество $W_{\sigma^1}^s \cap (W_{\sigma_+^2}^u \cup W_{\sigma_-^2}^u)$ состоит в точности из двух различных гетероклинических траекторий;
- 3) существует точка $\sigma_*^1 \in \Omega_R^1$, такая что $\omega \subset \text{cl } W_{\sigma_*^1}^u$.

Аналогичное утверждение верно для точек $\sigma^2 \in \Omega_R^2$ и $\alpha \in \Omega_R^3$ с формальной заменой символов $A, 0, 1, 2, s, u$ на $R, 3, 2, 1, u, s$ соответственно.

Обозначим через Γ_A (Γ_R) объединение всех периодических точек, одномерных сепаратрис и гетероклинических кривых диффеоморфизма f^t , принадлежащих множеству $A(R)$. Множество Γ_A – носитель графа, вершинами которого являются периодические точки, а ребрами – сепаратрисы и гетероклинические кривые. Обозначим $E(\Gamma_A)$ множество ребер этого графа.

Обозначим через f_A (f_R) ограничение диффеоморфизма f на $A(R)$ и через f_A (f_R) – ограничение диффеоморфизма f на $A(R)$.

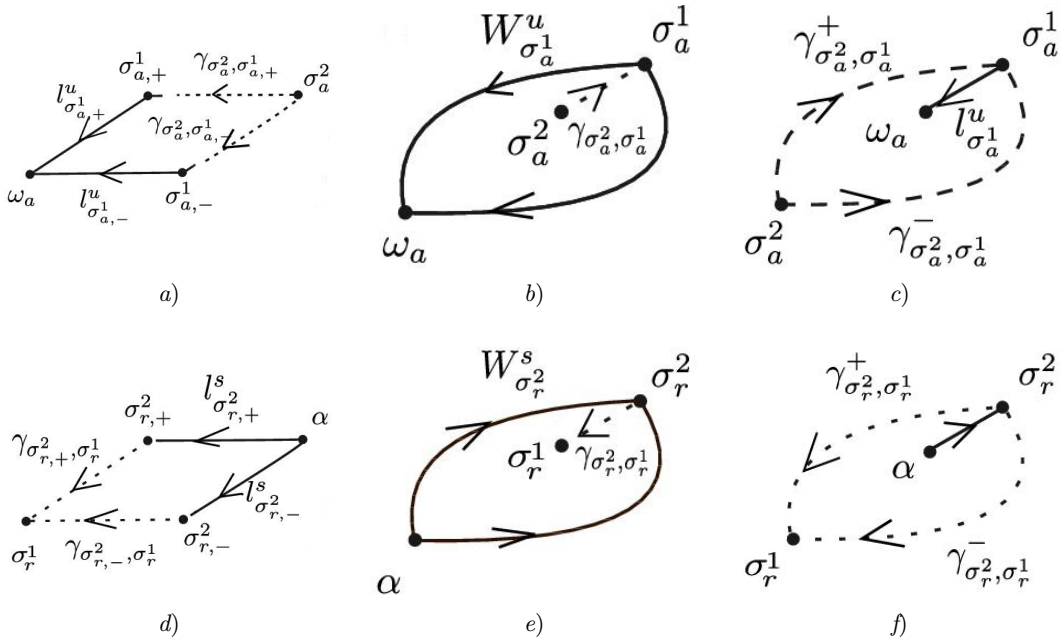


Рис. 2.1. Двумерные ячейки GSD -диффеоморфизмов:

a)–c) ячейки, принадлежащие аттрактору A ;

d)–f) ячейки, принадлежащие репеллеру R

Fig 2.1. Two-dimensional cells of GSD -diffeomorphisms

a)–c) cells belonging to an attractor A ; d)–f) cells belonging to a repeller R

Компоненту связности множества $A \setminus \Gamma_A$ ($R \setminus \Gamma_R$) будем называть *двумерной ячейкой* отображения f_A (f_R). Из предложения 2.2 следует, что все двумерные ячейки имеют один из шести типов, приведенных на Рис. 2.1, где l_p^u (l_p^s) обозначает одномерную неустойчивую (устойчивую) сепаратрису седловой периодической точки p , а $\gamma_{p,q}$ обозначает гетероклиническую кривую, лежащую в пересечении двумерных инвариантных многообразий седловых периодических точек p, q . Детальное описание двумерных ячеек приведено в аналогичной ситуации для потоков в [4] (предложение 3).

Определение 2.1 Будем говорить, что сепаратрисы диффеоморфизма $f \in GSD(M^3)$ обладают регулярным асимптотическим поведением, если для любой тройки $A \subset \mathcal{A}_{f^t}$, $R \subset \mathcal{R}_{f^t}$, $V \subset M^3 \setminus (\mathcal{A}_{f^t} \cup \mathcal{R}_{f^t})$, такой что $\partial V = A \cup R$ выполняются следующие условия:

- 1) для любых различных точек $\sigma_{r,1}^1, \sigma_{r,2}^1 \in \Omega_R^1$ замыкание сепаратрис $l_{\sigma_{r,1}^1}^u, l_{\sigma_{r,2}^1}^u \subset V$ содержат различные точки $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_A^0$ и являются локально плоскими дугами²;
- 2) для любых двух различных точек $\sigma_{a,1}^2, \sigma_{a,2}^2 \in \Omega_A^2$ замыкания сепаратрис $l_{\sigma_{a,1}^2}^s, l_{\sigma_{a,2}^2}^s \subset V$ содержат различные точки $\alpha_1, \alpha_2 \in \Omega_R^3$ и являются локально плоскими дугами;
- 3) для любой точки $\sigma_a^1 \in \Omega_A^1$ существует в точности одна точка $\sigma_r^2 \in \Omega_R^2$, такая что пересечение $W_{\sigma_a^1}^s \cap W_{\sigma_r^2}^u \cap V$ непусто; для любой точки $\sigma_r^2 \in \Omega_R^2$ существует в точности одна точка $\sigma_a^1 \in \Omega_A^1$, такая что пересечение $W_{\sigma_a^1}^s \cap W_{\sigma_r^2}^u \cap V$ непусто;
- 4) для любых точек $\sigma_a^1 \in \Omega_A^1, \sigma_r^2 \in \Omega_R^2$ пересечение $W_{\sigma_a^1}^s \cap W_{\sigma_r^2}^u \cap V$ либо пусто, либо состоит в точности из одной гетероклинической кривой.

Обозначим через $GSDR(M^3)$ класс диффеоморфизмов из $GSD(M^3)$, таких что все сепаратрисы любого диффеоморфизма $f \in GSDR(M^3)$ обладают регулярным асимптотическим поведением.

Для любого $f \in GSDR(M^3)$ будем называть компоненту связности множества $M^3 \setminus \bigcup_{p \in \Sigma} (cl W_p^u \cup cl W_p^s)$ трехмерной ячейкой диффеоморфизма f .

Из [7] (теорема 2.3) и определения класса $GSDR(M^3)$ непосредственно вытекает следующее предложение.

Предложение 2.3 Пусть $f \in GSDR(M^3)$. Тогда для любой трехмерной ячейки C^3 диффеоморфизма f найдутся множества A, R и двумерные ячейки $c_a^2 \subset A, c_r^2 \subset R$, такие что пересечение границы ∂C^3 ячейки C^3 с множеством $A(R)$ является замыканием ячейки $c_a^2(c_r^2)$. Более того, замыкание $cl C^3$ ячейки C^3 гомеоморфно прямому произведению $cl c_a^2 \times [0, 1]$ (и $cl c_r^2 \times [0, 1]$).

Типы трехмерных ячеек приведены на Рис. 2.2.

Для каждой тройки компонент связности $A \subset \mathcal{A}_{ft}, R \subset \mathcal{R}_{ft}, V \subset M^3 \setminus (\mathcal{A}_{ft} \cup \mathcal{R}_{ft})$ такой, что $\partial V = A \cup R$, обозначим через $\mathcal{C}_A^2, \mathcal{C}_R^2, \mathcal{C}_V^3$ множества всех ячеек размерности два и три, принадлежащих множествам A, R, V , соответственно.

Пусть $A \subset \mathcal{A}_{ft}$ — произвольная компонента связности. Обозначим через $V_1, \dots, V_{2k_{ft}}$ все попарно различные компоненты связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A}_{ft} \cup \mathcal{R}_{ft})$, предполагая, что индексы выбраны таким образом, что $cl(V_i) \cap cl(V_{i+1}) \neq \emptyset$ для любого $i \in \{1, \dots, 2k_{ft} - 1\}$ и $cl(V_{2k_{ft}}) \cap cl(V_1) \supset A$.

Из предложения 2.3 следует, что для любой двумерной ячейки $c^2 \subset A$ потока f^t существует последовательность трехмерных ячеек $C_1^3, \dots, C_{2k_{ft}}^3$, такая что $cl(C_1^3) \cap A = cl(c^2)$, $C_i^3 \subset V_i, i \in \{1, \dots, 2k_{ft}\}$, пересечения $cl(C_i^3) \cap cl(C_{i+1}^3) \setminus A, i \in \{1, \dots, 2k_{ft} - 1\}$, $cl(C_{2k_{ft}}^3) \cap A$ непусты и каждое из них состоит из замыкания двумерной ячейки. Эта последовательность индуцирует взаимно-однозначное отображение

$$\mu_A : \mathcal{C}_A^2 \rightarrow \mathcal{C}_A^2,$$

ставящее в соответствие каждой ячейке $c^2 \in \mathcal{C}_A^2$ ячейку \tilde{c}^2 , принадлежащую пересечению $cl(C_{2k_{ft}}^3) \cap A$.

²Замкнутая кривая $l \subset M^3$ называется локально-плоской, если для любой ее точки $x \in l$ существует окрестность $U_x \subset M^3$ и гомеоморфизм $\chi : U_x \rightarrow \mathbb{R}^3$, такие что $\chi(U_x \cap l) = Ox_1$, если $x \in \text{int} l$, и $\chi(U_x \cap l) = \{(x_1, x_2, x_3) \in Ox_1 \mid x_1 \geq 0\}$, если $x \in \partial l$. Примеры градиентно-подобных каскадов, замыкания одномерных сепаратрис которых не являются локально-плоскими дугами (в одной из граничных точек), приведены в работе [9].

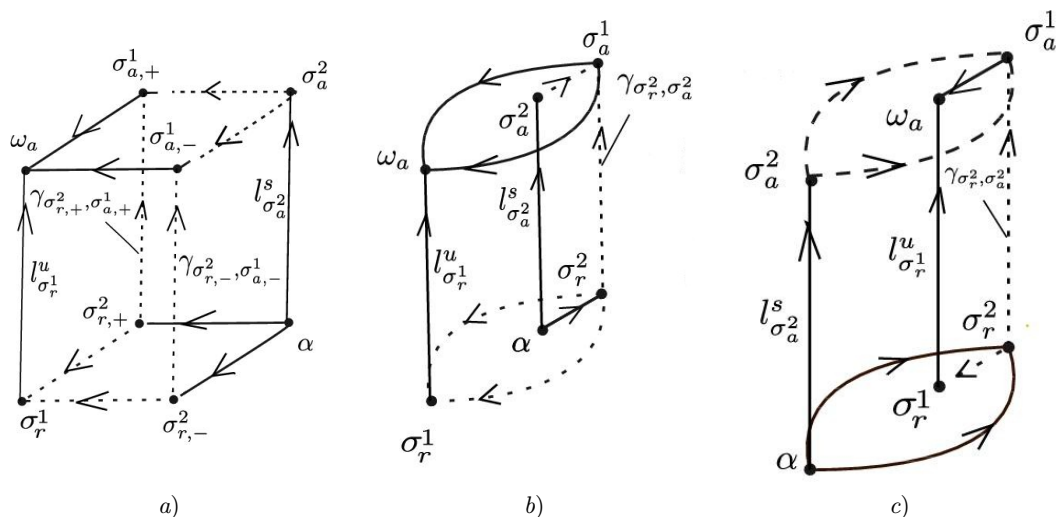


Рис. 2.2. Трехмерные ячейки *GSDR*-дiffeоморфизмов, в границу которых входят: а) три устойчивые, три неустойчивые одномерные сепаратрисы и шесть гетероклинических кривых; б) две устойчивые, три неустойчивые одномерные сепаратрисы и три гетероклинических кривые; в) три устойчивые, две неустойчивые одномерные сепаратрисы и три гетероклинических кривые

Fig 2.2. Three-dimensional cells of *GSDR*-diffeomorphisms with boundary containing: a) three stable, three unstable one-dimensional separatrices and six heteroclinic curves; b) two stable, three unstable one-dimensional separatrices and three heteroclinic curves; c) three stable, two unstable one-dimensional separatrices and three heteroclinic curves

Напомним, что гомеоморфизм $\tau : S_g \rightarrow S_g$ называется *периодическим гомеоморфизмом периода* $r > 1$, если $\tau^r(x) = x$ для любой точки $x \in S_g$, и $\tau^l \neq Id$, если $l \in (0, r)$. Число $\mu_x > 0$, такое что $\tau^{\mu_x}(x) = x$ и $\tau^l(x) \neq x$ для любого $l \in (0, \mu_x)$, называется периодом точки x . В силу [8] множество $X_\tau \subset S_g$, период которых меньше, чем r , конечно.

Следующая лемма доказывается аналогично леммам 1–2 работы [4].

Л е м м а 2.1 *Существует сохраняющий ориентацию периодический гомеоморфизм $\tau : A \rightarrow A$, такой что: 1) $\tau(\Omega_A^i) = \Omega_A^i$, $i \in \{0, 1, 2\}$;*

2) $\tau(cl\,c^2) = cl\,\mu_A(c^2)$ для любой ячейки $c^2 \in \mathcal{C}_A^2$.

Пусть ν, μ — взаимно простые числа, $0 \leq \nu < \mu$, и $\theta : \mathbb{B}^2 \rightarrow \mathbb{B}^2$ — поворот диска \mathbb{B}^2 на угол $2\pi \frac{\nu}{\mu}$. Обозначим через $N^3 = \mathbb{B}^2 \times [0, 1] / \sim$ фактор-пространство по отношению эквивалентности $(x, 1) \sim (\theta(x), 0)$, $x \in \mathbb{B}^2$.

Напомним, что многообразие M^3 называется *зейфертовым многообразием*, если M^3 расслоено на окружности и любой слой имеет окрестность в M^3 , послойно гомеоморфную N^3 .

2.1. Доказательство теоремы 1.1

Зейфертовость многообразия M^3 доказывается аналогично доказательству теоремы 1 работы [4]. Приведем идею доказательства. Выберем произвольно компоненту связности $A \subset A_f$ и ячейку $c^2 \subset A_f$. Пусть $C_1^3, \dots, C_{2k_{ft}}^3$ — последовательность трехмерных ячеек, такая что $cl(C_1^3) \cap A = cl(c^2)$, $C_i^3 \subset V_i$, $i \in \{1, \dots, 2k_{ft}\}$, пересечения $cl(C_i^3) \cap cl(C_{i+1}^3) \setminus A$, $i \in \{1, \dots, 2k_{ft} - 1\}$, $cl(C_{2k_{ft}}^3) \cap A$ непусты, и каждое из них состоит из замыкания двумерной ячейки. Обозначим через Q_{c^2} объединение всех замыканий трехмерных ячеек $C_1^3, \dots, C_{2k_{ft}}^3$. Поскольку замыкание каждой трехмерной ячейки гомеоморфно прямому произведению диска (или объединению диска и компактной кривой) на отрезок, то множество Q_{c^2} можно расслоить на дуги, трансверсальные к A и такие, что каждая дуга из этого расслоения соединяет некоторую точку $x \in A$ с точкой $\tau(x)$. Это расслоение продолжается непрерывным образом до расслоения \mathcal{F}_A всего многообразия M^3 . Поскольку гомеоморфизм τ — периодический, то полученное в результате расслоение будет расслоением на окружности, удовлетворяющим определению зейфертова многообразия.

Уточнение свойств склеивающего диффеоморфизма

Из существования расслоения, построенного в доказательстве теоремы 1.1, вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.4 *Многообразие M^3 , допускающее диффеоморфизм $f \in GSDR(M^3)$, гомеоморфно многообразию $M_{g,\tau}^3$, где τ — периодический гомеоморфизм, удовлетворяющий заключению леммы 2.1.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathbb{S}_g$ — произвольная точка; $M_{g,\tau}^3$ — факторпространство многообразия $\mathbb{S}_g \times [0, 1]$ по отношению эквивалентности $(x, 1) \sim (\tau(x), 0)$ и $p : \mathbb{S}_g \times [0, 1] \rightarrow M_{g,\tau}^3$ — естественная проекция. Пусть m — период гомеоморфизма τ . Тогда найдется целое положительное $i \leq m$, такое что $x = \tau^i(x)$ и $x \neq \tau^k(x)$ для любого $k \in (0, i)$. Поэтому множество $p(\{x\} \times [0, 1] \cup \tau(x) \times [0, 1] \cup \dots \cup \tau^{i-1}(x) \times [0, 1])$ является простой замкнутой дугой в $M_{g,\tau}^3$. Обозначим через l_x эту дугу и через $F = \{l_x, x \in \mathbb{S}_g\}$ расслоение $M_{g,\tau}^3$ на окружности, порождаемое всеми такими дугами.

Пусть A — компонента связности множества \mathcal{A}_f , $h : A \rightarrow \mathbb{S}_g$ — произвольный гомеоморфизм и \mathcal{F}_A — расслоение многообразия M^3 на окружности, построенное при доказательстве теоремы 1.1.

Продолжим гомеоморфизм h до гомеоморфизма $H : M^3 \rightarrow M_{g,\tau}^3$, используя слои слоений \mathcal{F}_A, F .

Обозначим через λ_z слой слоения \mathcal{F}_A , проходящий через точку $z \in A$. Выберем произвольно ориентацию на слоях l_x, λ_z . Поскольку многообразия $M^3 \rightarrow M_{g,\tau}^3$ ориентируемы, то эта ориентация однозначно продолжается до ориентации каждого слоя слоений F, \mathcal{F}_A .

Пусть $w \in \lambda_x$ — такая точка, что существует дуга $\hat{\lambda}_{z,w} \subset \lambda_z$, соединяющая точки x, w и такая, что движение вдоль этой дуги от z к w совпадает с ориентацией дуги λ_z , причем $\hat{\lambda}_{z,w} \cap A = z$. Обозначим через $|\hat{\lambda}_{z,w}|$ длину дуги $\hat{\lambda}_{z,w}$ и через $l_x, \hat{l}_{x,y}, |\hat{l}_{x,y}|$ аналогичные объекты для дуги $l_x \in F$.

Искомый гомеоморфизм H определим, положив $H(w) = y$, где $y \in l_{h(z)}$ — такая точка,

$$\text{что } \frac{|\hat{\lambda}_{z,w}|}{|\hat{\lambda}_{z,\tau(z)}|} = \frac{|\hat{l}_{h(z),y}|}{|\hat{l}_{h(z),\tau(h(z))}|}.$$

В силу предложения 2.4 зейфертовость многообразия M^3 будет также следовать из доказываемого в следующем разделе факта, что многообразие $M_{g,\tau}^3$ с периодическим гомеоморфизмом склейки является зейфертовым.

3. Достаточные условия зейфертовости для $M_{g,\tau}^3$

Положим $I = [0, 1]$ и $E_1 = \mathbb{S}_g \times I$. Напомним, что $M_{g,\tau}^3$ обозначает фактор-пространство E_1 / \sim по отношению эквивалентности $(x, 1) \sim (\tau(x), 0)$.

Л е м м а 3.1 *Если τ – периодический гомеоморфизм периода m , то пространство $M_{g,\tau}^3$ является многообразием Зейферта. При этом определена и точна последовательность*

$$1 \longrightarrow \pi_1(\mathbb{S}_g) \times \mathbb{Z} \xrightarrow{P^*} \pi_1(M_{g,\tau}^3) \longrightarrow \mathbb{Z}_m \longrightarrow 1. \quad (3.1)$$

Кроме того, $\pi_k(M_{g,\tau}^3) = 0$ для всех $k > 2$, $\pi_2(M_{g,\tau}^3) \cong \mathbb{Z}$ при $g = 0$ и $\pi_2(M_{g,\tau}^3) = 0$ в остальных случаях.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Фактор-пространство $T = \mathbb{R}/m\mathbb{Z}$ представляет собой гладкое многообразие, диффеоморфное окружности S^1 . Для любого числа $t \in \mathbb{R}$ символом $[t]$ будем обозначать смежный класс $t + m\mathbb{Z}$.

Положим $E = \mathbb{S}_g \times T$. Тогда E – замкнутое гладкое 3-многообразие. Определим гомеоморфизм $F : E \rightarrow E$ формулой $F(x, [t]) = (\tau(x), [t - 1])$. Имеем $F^m = id$ и $F^k \neq id$ для $k = 1, \dots, m - 1$. Следовательно, $G = \{id, F, F^2, \dots, F^{m-1}\}$ – циклическая группа автоморфизмов многообразия E . При этом справедливы следующие утверждения.

- (А) Факторотображение $p : E \rightarrow B$ на топологическое фактор-пространство $B = E/G$ является регулярным накрытием с группой накрывающих преобразований G . Поэтому B можно снабдить структурой гладкого 3-многообразия, относительно которой p – гладкое отображение. Многообразие B замкнуто.
- (В) Различные множества семейства $\{p(x \times T) | x \in \mathbb{S}_g\}$ образуют одномерное слоение \mathfrak{F} на B .
- (С) Каждый слой слоения \mathfrak{F} гомеоморфен окружности S^1 .
- (D) Многообразия B и $M_{g,\tau}^3$ гомеоморфны.

По теореме Эпштейна [10] из (А)–(С) следует, что B – многообразие Зейферта. Согласно (D) это верно и для $M_{g,\tau}^3$.

В силу (А) и (D) определена и точна последовательность (3.1). Кроме того, $\pi_k(M_{g,\tau}^3) \cong \pi_k(B) \cong \pi_k(E) \cong \pi_k(\mathbb{S}_g) \times \pi_k(T) \cong \pi_k(\mathbb{S}_g)$ для всех $k > 1$.

Подробное обоснование утверждений (А)–(D)

(А). Группа G конечна. Для любых $k \in \{1, \dots, m - 1\}$ и $(x, [t]) \in E$ имеем $F^k(x, [t]) = (\tau^k(x), [t - k]) \neq (x, [t])$. Согласно утверждению 6 из гл. 2, п. 6 книги [11] в такой ситуации G – вполне разрывная группа гомеоморфизмов многообразия E . Наконец, из связности многообразия E следует связность фактор-пространства $B = E/G$. По теореме 7 из [11] (гл. 2, п. 6) тогда $p : E \rightarrow B$ – регулярное накрытие с группой накрывающих преобразований G .

Накрытие $p : E \rightarrow B$ индуцирует на B структуру гладкого многообразия, относительно которой оно является гладким отображением. Из компактности E и равенства $\partial E = \emptyset$ следует, что $B = p(E)$ – замкнутое многообразие.

(В). Очевидно, орбиты действия группы G на E либо не пересекаются, либо совпадают. Кроме того, они образуют покрытие многообразия E . Отсюда следует, что семейство \mathfrak{F} представляет собой разбиение многообразия B .

Пусть $x \in \mathbb{S}_g$ и $t \in [0, m]$. Выберем карту (U, φ) многообразия \mathbb{S}_g , такую что $x \in U$ и $\varphi(U) = (0, 1)^2$. Положим $W = \{(y, [s]) | y \in U, s \in (t - 1/2, t + 1/2)\}$ и $\psi(y, [s]) = (\varphi(x), s - t + 1/2)$ для всех $(y, [s]) \in W$. Тогда (W, ψ) – расслоенная карта для тривиального слоения $\mathfrak{F}_0 = \{x \times T | x \in \mathbb{S}_g\}$ на E . Имеем $W \cap F^k(W) = \emptyset$ для всех $k = 1, \dots, m - 1$. Поэтому сужение $p|_W : W \rightarrow p(W)$ является диффеоморфизмом. Но тогда пара $(p(W), \psi \circ (p|_W)^{-1})$ представляет собой карту многообразия B . По построению она расслоена относительно разбиения \mathfrak{F} . Поскольку множествами вида $p(W)$ можно покрыть все B , то этим доказано, что \mathfrak{F} – гладкое слоение на B .

(С). Пусть $x \in \mathbb{S}_g$. По условию на гомеоморфизм $\tau : \mathbb{S}_g \rightarrow \mathbb{S}_g$ найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\tau^n(x) = x$, $\tau^k(x) \neq x$ для $k = 1, \dots, n - 1$ и $m/n = l \in \mathbb{N}$. Положим $G(x) = \{id, F^n, F^{2n}, \dots, F^{(l-1)n}\}$. Тогда элементы подгруппы $G(x) \subset G$ переводят слой $x \times T \in \mathfrak{F}_0$ в себя и только они.

Группа $G(x)$ действует на $x \times T$ посредством формулы $F^{kn}(x, [t]) = (x, [t - kn])$. Отсюда следует, что $(x \times T)/G(x) \approx S^1$. Однако $p(x \times T) = (x \times T)/G(x)$. Поэтому все слои слоения \mathfrak{F} диффеоморфны окружности.

(D). Допуская некоторую погрешность, можно считать, что $E_1 \subset E$. Рассмотрим произвольную точку $u = (x, [t]) \in E$. Пусть $t \in [i, i + 1]$, где $i \in \{0, \dots, m - 1\}$. Тогда $u_1 = F^j(u) \in E_1$ для $j = m - i$. При этом пересечение орбиты $G \cdot u$ с подмножеством $E_1 \subset E$ представляет собой класс эквивалентности $[u_1]$ (относительно отношения \sim) точки $u_1 \in E_1$. Последнее означает, что формула $h(G \cdot u) = [u_1]$ определяет биекцию $h : B \rightarrow M_{g,\tau}^3$.

Пусть $p_1 : E_1 \rightarrow M_{g,\tau}^3$ – фактор-отображение, $V \subset B$, $V_1 \subset M_{g,\tau}^3$ и $V_1 = h(V)$. Тогда $p^{-1}(V) = G \cdot (p_1^{-1}(V_1))$. Отсюда следует, что полный прообраз $p_1^{-1}(V_1)$ открыт в E_1 тогда и только тогда, когда в пространстве E открыт прообраз $p^{-1}(V)$. Таким образом, h – гомеоморфизм. В силу трехмерности многообразий B и $M_{g,\tau}^3$ из их гомеоморфности следует диффеоморфность [12].

4. Построение SD-диффеоморфизма с заданным числом гетероклинических кривых

4.1. Кручения Дэна

Пусть $c \in \mathbb{S}_g$ – простая гладкая замкнутая кривая. *Кручением Дэна вдоль кривой* c называется гомеоморфизм $\rho_c : S_g \rightarrow S_g$, определенный следующим образом. Рассмотрим окружность \mathbb{S}^1 как подмножество комплексной плоскости \mathbb{C} . Пусть $h : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow S_g$ – диффеоморфизм такой, что $h(S^1 \times \{0\}) = c$, и $g : S^1 \times [-1, 1] \rightarrow S^1 \times [-1, 1]$ – гомеоморфизм такой, что $g(z, r) = (z, r)$ для $z \in S^1, r \in [-1, 0]$, $g(z, r) = (ze^{2\pi r i}, r)$ для $r \in [0, 1]$. Тогда

$$\rho_c(p) = \begin{cases} p, p \in S_g \setminus h(S^1 \times [-1, 1]); \\ h(g(h^{-1}(p))), p \in h(S^1 \times [-1, 1]). \end{cases}$$

Для гладких замкнутых кривых $c, c' \in \mathbb{S}_g$, пересекающихся трансверсально, обозначим через $N(c, c')$ число точек пересечения $c \cap c'$.

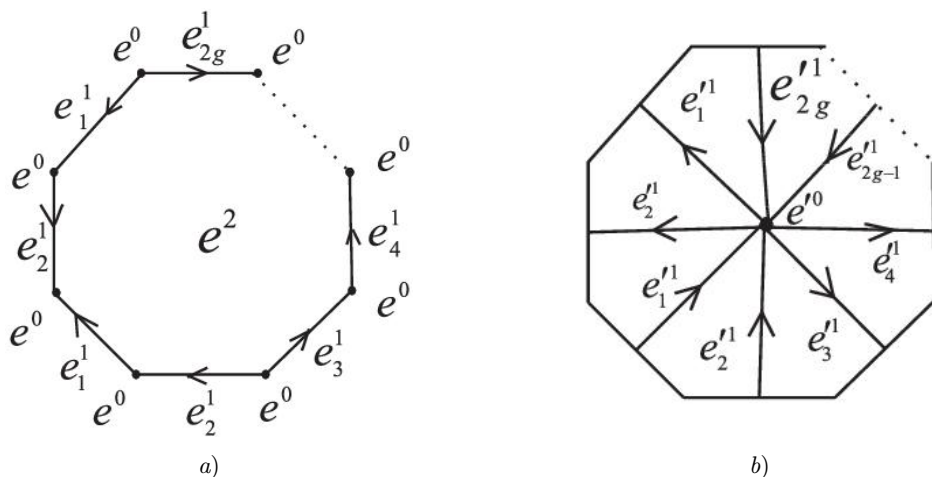


Рис. 4.1. Дуальные клеточные разбиения поверхности S_g :

а) разбиение K ; б) разбиение K'

Fig 4.1. Dual cellular partitions of a surface: а) partition K ; б) partition K'

Пусть K, K' — дуальные клеточные разбиения поверхности S_g , такие что одномерные клетки K совпадают с дугами e_1^1, \dots, e_{2g}^1 , а одномерные клетки K' совпадают с дугами $e_1'^1, \dots, e_{2g}'^1$, изображенными на рисунке 4.1, а–б соответственно. Заметим, что оба семейства дуг являются образующими группы $H_1(S_g, \mathbb{Z})$.

Кручение Дэна $\rho_{e_1^1}$ вдоль кривой e_1^1 сохраняет гомологические классы $[e_j^1]$ при $j \in \{3, \dots, 2g\}$ и действует в классах $[e_1^1], [e_2^1]$ следующим образом: $\rho_{e_1^1}([e_1^1]) = [e_1^1]$, $\rho_{e_1^1}([e_2^1]) = [e_1^1 \pm e_2^1]$. Это наблюдение непосредственно приводит к следующей лемме.

Л е м м а 4.1 *Справедливы равенства*

- 1) $N(e_1^1, \rho_{e_1^1}^m(e_2'^1)) = 0$;
- 2) $N(e_1^1, \rho_{e_1^1}^m(e_1'^1)) = 1$;
- 3) $N(e_2^1, \rho_{e_1^1}^m(e_2'^1)) = 1$;
- 4) $N(e_2^1, \rho_{e_1^1}^m(e_1'^1)) = m$;
- 5) $N(e_i^1, \rho_{e_1^1}^m(e_j'^1)) = 1$ если $i = j$ и 0 в противном случае, $i, j \in \{3, 4, \dots, 2g\}$.

4.2. Доказательство теоремы 1.2

Для доказательства теоремы 1.2 будем использовать идею построения GSD-диффеоморфизма для данных g, k и τ , предложенную в работе [3], но уточним определение склеивающего диффеоморфизма τ , чтобы получить требуемое число n некомпактных гетероклинических кривых.

Пусть $g \geq 0, k \geq 1, n \geq 12gk$ — произвольные целые числа. Определим на поверхности S^2 канонический градиентно-подобный диффеоморфизм φ_g с неблуждающим множеством, состоящим из минимального допустимого для этой поверхности числа точек,

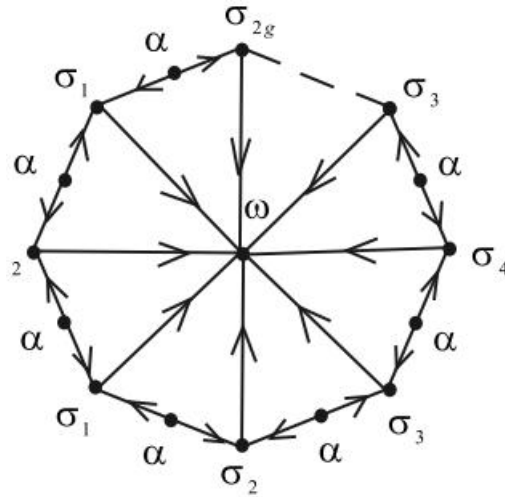


Рис. 4.2. Фазовый портрет диффеоморфизма φ_g на развертке поверхности рода g

Fig 4.2. Phase portrait of the diffeomorphism φ_g on the unfolding of the surface of genus g

а именно, единственной стоковой неподвижной точки ω , единственной источниковой неподвижной точки α и $2g$ седловых неподвижных точек $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}$. Фазовый портрет такого диффеоморфизма изображен на Рис. 4.2. Обозначим через $\psi_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени вдоль траекторий потока, задаваемого векторным полем

$$\dot{r} = \sin(2\pi kr), r \in [0, 1].$$

Положим $e_i^1 = W_{\sigma_i}^s$, $e_i^1 = W_{\sigma_i}^u$, $i \in \{1, \dots, 2g\}$. Множества $\Gamma^s = \{e_1^1, \dots, e_{2g}^1\}$, $\Gamma^u = \{e_1^1, \dots, e_{2g}^1\}$ совпадают с множествами всех одномерных клеток дуальных клеточных разбиений K, K' соответственно.

Положим $m = n - 12gk$, $\tau_m = \rho_{e_1^1}^m$, где $\rho_{e_1^1} : S_g \rightarrow S_g$ — кручение Дэна вдоль e_1^1 .

Положим $f_1 = \tau_m^{-1} \varphi_g \tau_m$.

Заметим, что

(*) дуги из множества Γ^u трансверсальны к дугам из множества $\tau_m(\Gamma^s)$;

(**) $\tau_m(\alpha) \notin (\Gamma^u \cup \omega)$ и $\omega \notin \tau_m(\Gamma^s \cup \alpha)$.

Выберем $r_0 \in (1 - \frac{1}{2k}, 1)$, положим $r_1 = \psi^{-1}(r_0)$, $r_2 = \psi^{-1}(r_1)$ ($r_0 < r_1 < r_2$) и определим диффеоморфизм $F : \mathbb{S}_g \times [0; 1] \rightarrow \mathbb{S}_g \times [0; 1]$ формулой

$$F(z, r) = \begin{cases} (\varphi_g(z), \psi_k(r)), & r \in [0; r_0]; \\ (\varphi_g^{\lfloor \frac{r_1 - r}{r_1 - r_0} \rfloor}(z), \psi(r)), & r \in [r_0; r_1]; \\ (\tau_m^{-1} \varphi_g^{\lfloor \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} \rfloor} \tau_m(z), \psi(r)), & r \in [r_1; r_2]; \\ (f_1(z), \psi(r)), & r \in [r_2; 1]. \end{cases}$$

Обозначим через $\pi_{\tau_m} : S_g \times [0, 1] \rightarrow M_{g,\tau}$ естественную проекцию и через $\tilde{F} : M_{g,\tau} \rightarrow M_{g,\tau}$ диффеоморфизм, такой что $\tilde{F} = \pi_{\tau_m} F \pi_{\tau_m}^{-1}$. По построению неблуждающее множество диффеоморфизма \tilde{F} конечно, гиперболично и принадлежит поверхностям $\pi_{\tau_m}((S_g \times \{\frac{i}{2k}\}))$, $i \in \{0, \dots, k\}$. Блуждающее множество диффеоморфизма F содержит:

- в точности $8gk$ некомпактных гетероклинических кривых, принадлежащих объединению поверхностей $\pi_{\tau}(S_g \times \{\frac{i}{2k}\})$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- в точности $4gk - 2g$ некомпактных гетероклинических кривых, лежащих в множестве $\pi_{\tau}((S_g \times [0, 1 - \frac{1}{2k}]) \setminus (S_g \times \{\frac{i}{2k}\}))$.

Для завершения доказательства теоремы покажем, что диффеоморфизм \tilde{F} является градиентно-подобным и его неблуждающее множество содержит в точности n некомпактных гетероклинических кривых. Для этого достаточно показать, что на множестве $S_g \times (1 - \frac{1}{2k}, 1)$ одномерные сепатрисы седловых неподвижных точек диффеоморфизма F не пересекаются с другими сепатрисами, а двумерные инвариантные многообразия седловых неподвижных точек имеют трансверсальное пересечение, состоящее в точности из $m + 2g$ компонент связности.

Для этого заметим, что множество $D = S_g \times [r_1; r_2]$ является фундаментальной областью ограничения $F|_{S_g \times (1 - \frac{1}{2k}, 1)}$. Из определения диффеоморфизма F следует, что

двумерные устойчивые сепатрисы пересекают D по множеству $\Gamma^s \times [r_1; r_2]$, двумерные неустойчивые сепатрисы – по множеству $\tau^{-1}(\Gamma^u) \times [r_1; r_2]$, одномерные устойчивые сепатрисы – по $\alpha \times [r_1; r_2]$ и одномерные неустойчивые сепатрисы – по $\tau^{-1}(\omega) \times [r_1; r_2]$. В силу (*) двумерные многообразия седловых неподвижных точек диффеоморфизма F пересекаются трансверсально в D и, следовательно, на множестве $S_g \times (1 - \frac{1}{2k}, 1)$. В силу леммы 4.1 число компонент связности этого пересечения равно $2g + m$. В силу (**) одномерные сепатрисы не имеют пересечения с другими сепатрисами в D , а следовательно, и в $S_g \times (1 - \frac{1}{2k}, 1)$.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ, грант 21-11-00010.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Grines V., Medvedev V., Zhuzhoma E. On surface attractors and repellers in 3-manifolds // Math. Notes. 2005. Vol. 78, No 6. pp. 757–767. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11006-005-0181-1>
2. Grines V., Pochinka O., Medvedev V., Levchenko Yu. The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // Nonlinearity. 2015. Vol. 28, No 11. pp. 4081–4102. DOI: <https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/11/4081>

3. Grines V., Gurevich E., Pochinka O. On the number of non-compact heteroclinic curves of diffeomorphisms with a surface dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. 2017. Vol. 22, No. 2. pp. 122–135. DOI: <https://doi.org/10.1134/S156035471702002>
4. Grines V., Gurevich E., Kevlia S. On gradient-like flows on seifert manifolds // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2021. Vol. 42, No. 5. pp. 901–910. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221050061>
5. Grines V., Gurevich E., Kurenkov E., Topological Classification of Gradient-Like Flows with Surface Dynamics on 3-Manifolds // Math. Notes. 2020 V. 107. No 1. P. 145–148.
6. Grines V., Gurevich E., Zhuzhoma E., Zinina S. Heteroclinic curves of Morse-Smale diffeomorphisms and separators in plasma magnetic field // Nelineynaya dynamika. 2014. Vol. 10, No. 4. pp. 427–438.
7. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 73, No. 6. pp. 747–817. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11798-1>
8. Nielsen J. Die struktur periodischer transformationen von flachen. K?benhavn: Levin&Munksgaard, 1937. Vol. 15. 78 p.
9. Pixton D. Wild unstable manifold // Topology. 1977. Vol. 16. pp. 167–172.
10. Epstein D. B. A., Periodic flows on 3-manifolds // Ann. Math. 1972. Vol. 95. pp. 66–82.
11. Спеньер Э. Алгебраическая топология. М.: Мир, 1971. 693 с.
12. Whitehead J. H. C., Manifolds with transverse fields in Euclidean space // Ann. Math. 1961. Vol. 73. pp. 154–212.

*Поступила 02.09.2021; доработана после рецензирования 28.10.2021;
принята к публикации 16.11.2021*

Информация об авторах:

Гринес Вячеслав Зигмундович, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4709-6858>, vggrines@hse.ru

Гуревич Елена Яковлевна, доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, egurevich@hse.ru

Яковлев Евгений Иванович, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6501-353X>, eyakovlev@hse.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 37B35

On topology of manifolds admitting gradient-like cascades with surface dynamics and on growth of the number of non-compact heteroclinic curves

V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. I. Yakovlev

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. We consider a class $GSD(M^3)$ of gradient-like diffeomorphisms with surface dynamics given on closed oriented manifold M^3 of dimension three. Earlier it was proved that manifolds admitting such diffeomorphisms are mapping tori under closed orientable surface of genus g , and the number of non-compact heteroclinic curves of such diffeomorphisms is not less than $12g$. In this paper, we determine a class of diffeomorphisms $GSDR(M^3) \subset GSD(M^3)$ that have the minimum number of heteroclinic curves for a given number of periodic points, and prove that the supporting manifold of such diffeomorphisms is a Seifert manifold. The separatrices of periodic points of diffeomorphisms from the class $GSDR(M^3)$ have regular asymptotic behavior, in particular, their closures are locally flat. We provide sufficient conditions (independent on dynamics) for mapping torus to be Seifert. At the same time, the paper establishes that for any fixed $g \geq 1$, fixed number of periodic points, and any integer $n \geq 12g$, there exists a manifold M^3 and a diffeomorphism $f \in GSD(M^3)$ having exactly n non-compact heteroclinic curves.

Key Words: gradient-like diffeomorphism, surface dynamics, topological classification, non-compact heteroclinic curve, Seifert manifolds

For citation: V. Z. Grines, E. Ya. Gurevich, E. I. Yakovlev. On topology of manifolds admitting gradient-like cascades with surface dynamics and on growth of the number of non-compact heteroclinic curves. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:4(2021), 379–393. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.379-393>

REFERENCES

1. V. Grines, V. Medvedev, E. Zhuzhoma, “On surface attractors and repellers in 3-manifolds”, *Math. Notes*, **78**:6 (2005), 757–767. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11006-005-0181-1>
2. V. Grines, O. Pochinka, V. Medvedev, Yu. Levchenko, “The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets”, *Nonlinearity*, **28**:11 (2015), 4081–4102. DOI: <https://doi.org/10.1088/0951-7715/28/11/4081>
3. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, “On the number of non-compact heteroclinic curves of diffeomorphisms with a surface dynamics”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **22**:2 (2017), 122–135. DOI: <https://doi.org/10.1134/S156035471702002>
4. V. Grines, E. Gurevich, S. Kevlia, “On gradient-like flows on seifert manifolds”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **42**:5 (2021), 901–910. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1995080221050061>

5. V. Grines, E. Gurevich, E. Kurenkov, “Topological classification of gradient-like flows with surface dynamics on 3-manifolds”, *Math. Notes*, **107**:1 (2020), 145–148. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0001434620010162>
6. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, T. V. Medvedev, “New relations for Morse-Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices”, *Sbornik: Mathematics*, **194**:7 (2003), 979–1007. DOI: <https://doi.org/10.1070/SM2003v194n07ABEH000751>
7. V. Grines, E. Gurevich, E. Zhuzhoma, S. Zinina, “Heteroclinic curves of Morse-Smale diffeomorphisms and separators in plasma magnetic field”, *Nelineynaya dynamika*, **10**:4 (2014), 427–438.
8. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817. DOI: <https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1967-11798-1>
9. J. Nielsen, *Die struktur periodischer transformationen von flachen*, **15**, Levin & Munksgaard, 1937, 78 p.
10. D. Pixton, “Wild unstable manifold”, *Topology*, **16** (1977), 167–172.
11. Epstein D. B. A., “Periodic flows on 3-manifolds”, *Ann. Math.*, **95** (1972), 66–82.
12. E. Spanier, *Algebraic Topology*, Mir Publ., Moscow, 1971 (In Russ.), 693 p.
13. J. H. C. Whitehead, “Manifolds with transverse fields in Euclidean space”, *Ann. Math.*, **73** (1961), 154–212.

Submitted 02.09.2021; Revised 28.10.2021; Accepted 16.11.2021

Information about the authors:

Vyacheslav Z. Grines, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4709-6858>, vgrines@yandex.ru

Elena Ya. Gurevich, Associate Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, egurevich@hse.ru

Evgenii Iv. Yakovlev, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University «High School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6501-353X>, eyakovlev@hse.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.394–411

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.63:536.4

Численное моделирование формирования сферического слоя D-T смеси в микромишенях ЛТС

Е. Ю. Киреичева¹, Е. А. Веселова¹, Ю. Н. Дерюгин¹, Т. Ф. Мамедова²¹ ФГУП «РФЯЦ – ВНИИЭФ» (г. Саров, Россия),² ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Россия)

Аннотация. В работе представлена двумерная экономичная расчетная модель процесса формирования криогенного слоя D-T смеси в сферической оболочке. Модель основана на описании движения газовой фазы в приближении Буссинеска. Тепловая задача представляет собой задачу Стефана с фазовым переходом газ-твердое тело. Методика построена на основе метода конечного объема, использования структурированной подвижной сетки, движение которой связано с выделением фазового фронта, неявных аппроксимаций и метода расщепления двумерных уравнений по направлениям на одномерные уравнения. Численно показано, что вследствие естественной радиоактивности происходит симметризация мишени. Проведена расчетная оценка времени симметризации для одной геометрии мишени с различными коэффициентами заполнения.

Ключевые слова: криогенная мишень, уравнение Навье-Стокса в приближении Буссинеска, метод конечного объема, структурированная подвижная сетка

Для цитирования: Киреичева Е.Ю., Веселова Е.А., Дерюгин Ю.Н., Мамедова Т.Ф. Численное моделирование формирования сферического слоя D-T смеси в микромишенях ЛТС // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 394–411. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.394–411>

1. Введение

Управляемый термоядерный синтез является многообещающей технологией для производства энергии. В инерциально-термоядерном реакторе [1] для осуществления условий реакций синтеза сферическая микромишень, содержащая твердый слой изотопов водорода дейтерия (D2) и трития (T2), обжимается под воздействием лазерного излучения. Достижения необходимых параметров для зажигания мишени во многом определяется сферичностью твердого слоя D-T смеси. В процессе производства микромишеней при замораживании газонаполненной микросферы в результате влияния силы тяжести происходит несимметричное охлаждение мишени. В работах [2–3] отмечается, что в следствии энерговыделения при распаде трития в D-T смеси может происходить естественная симметризация твердого слоя.

Для оценки времени формирования твердого слоя в работе [4] была создана одномерная расчетная модель процесса замораживания газонаполненной микросферы. Данная модель представляет собой задачу Стефана с двумя фазовыми переходами с учетом потенциального движения замораживаемого газа. С использованием созданной методики были вычислены пространственно-временные распределения температуры внутри и



вне сферы, скорость движения газа внутри сферы и время замораживания в широких пределах размеров микросфер, количества содержащегося в них газа и скорости охлаждения. Описание процесса естественной симметризации за счет внутренних источников энергии потребовало создание многомерной расчетной модели [2–3]. Использование здесь разработанных многомерных коммерческих кодов [2; 3; 5], в силу разномасштабности газодинамических и тепловых процессов не позволило численно прогнозировать процесс симметризации, который может длиться несколько часов.

Целью данной работы является разработка экономичной методики расчета формирования криогенного слоя D – T смеси в микросфере на основе двумерного подхода и уравнений движения газовой фазы в приближении Буссинеска. Тепловая задача представляет собой задачу Стефана с фазовым переходом газ–твердое тело с выделением фронта фазового перехода на подвижной эйлеровой сетке. Используемые термодинамические свойства веществ в рассматриваемом диапазоне температур заимствованы из [6]. Построенная методика основана на методе конечного объема и использовании структурированной подвижной сетки. Расчетный шаг расщепляется на три этапа. На первом этапе определяется скорость фазового фронта, и новое положение сетки. На втором этапе определяются компоненты вектора скорости в газовой фазе D – T смеси из решения уравнений Навье–Стокса методом типа SIMPLE [7]. В этом методе вначале определяются предварительные значения компонент вектора скорости без учета градиента давления. Затем определяются давление из условия выполнения уравнения неразрывности и новые значения компонент вектора скорости. Получающиеся системы разностных уравнений решаются методом расщепления по направлениям с использованием скалярных прогонок. На третьем этапе решается уравнение теплопереноса, которое аппроксимируется неявной разностной схемой относительно приращения температуры. Здесь система разностных уравнений также расщепляется по направлениям на одномерные уравнения, которые решаются методом прогонки.

2. Математическая модель

Расположение мишени в контейнере и типичное положение криогенного слоя внутри микросферы показаны на Рис. 2.1.

Внешней частью (0) является сферический контейнер, внутри которого располагается сферическая оболочка (3) из полистирола. Центры контейнера и оболочки совпадают. В области между ними (4) находится теплообменный газ (гелий). Внутри оболочки расположен неоднородный по толщине твердый слой (2) смеси дейтерий–третий (D – T), намороженный на внутреннюю поверхность оболочки. В центральной части находится насыщенный пар (1) изотопов водорода (D – T смеси). Микросфера подвешена на нити (5) к сферическому контейнеру–термостату. Диаметр контейнера составляет – 10–60 мм, внутренний диаметр оболочки – 1.5–3 мм, толщина оболочки – 0.1–0.3 мм.

При конденсации газообразного топлива газ движется к границе разделяющей твердую и газообразную фазы D – T смеси. Скорость этого движения практически во много раз меньше скорости звука. Поэтому давление внутри микросферы выравнивается очень быстро. Процесс конденсации происходит при давлении, равном давлению насыщенных паров при температуре, равной температуре внутренней стенки микросферы. Зависимости давления насыщения от температуры стенки аппроксимируются следующей формулой:

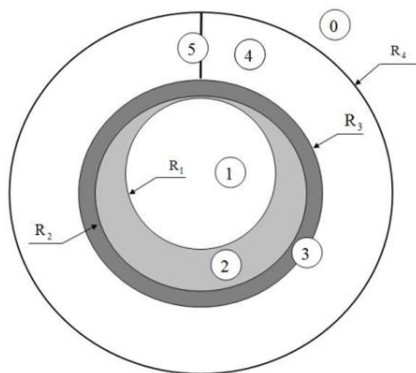


Рис. 2.1. Геометрия задачи: 0 – сферический контейнер; 1 – насыщенный пар; 2 – замороженный слой D-T смеси; 3 – сферическая оболочка; 4 – теплообменный газ гелий; 5 – нить подвески

Fig 2.1. Problem geometry: 0 – spherical container; 1 – saturated steam; 2 – frozen layer of D-T mixture; 3 – spherical shell; 4 – heat exchange gas helium; 5 – strand suspension

$$p = \exp\left(-\frac{138.3}{T_s} + 1.479 \cdot \ln T_s + 0.9255\right), \quad [\text{бар}] \quad (2.1)$$

где T_s – температура на границе газ-твёрдое тело.

Движения газовой фазы D-T смеси в области 1 описывается на основе уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска [8]. В этом приближении газ считается несжимаемым, а сила тяжести определяется перепадом температур. Исходные уравнения в цилиндрических координатах, в которых осевая координата x направлена вверх, имеют вид:

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{y \partial y} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial t} + \frac{\partial \rho u^2}{\partial x} + \frac{\partial \rho u v}{y \partial y} = -\frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{y \partial y} \left(y \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \rho g \beta (T - \bar{T}), \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho u v}{\partial x} + \frac{\partial \rho v^2}{y \partial y} = -\frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\mu \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{y \partial y} \left(y \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right). \quad (2.4)$$

Здесь ρ – плотность; u, v – компоненты вектора скорости; μ – коэффициент динамической вязкости; g – ускорение свободного падения; β – коэффициент теплового расширения; \bar{T} – среднее значение температуры в газовой области на текущий момент времени, определяемый по формуле:

$$\bar{T} = \frac{\int_0^{R_1} \rho C_P T dV}{\int_0^{R_1} \rho C_P dV}. \quad (2.5)$$

Изменение температуры в газовой фазе описывается уравнением сохранения энергии с учетом энерговыделения от поглощения нейтронов при распаде трития:

$$\rho C_{P1} \frac{\partial T}{\partial t} + u \rho C_{P1} \frac{\partial T}{\partial x} + \nu \rho C_{P1} \frac{\partial y T}{y \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{y \partial y} \left(y \chi_1 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_1. \quad (2.6)$$

Удельная теплоемкость газообразной фазы D - T смеси (область 1 на Рис. 2.1) в диапазоне характерного изменения температуры определяется как:

$$C_{P1}(T) = 3.96 \cdot (1 + 0.0114 \cdot T - 7.1 \cdot 10^{-5} T^2 + \rho \cdot \exp(1.091 - 0.166 \cdot T + 1.217 \cdot 10^{-3} T^2)), \quad \left[\frac{\text{Дж}}{\text{г} \cdot \text{К}} \right]. \quad (2.7)$$

Зависимости от температуры коэффициента теплопроводности и динамической молекулярной вязкости для газообразной фазы D - T смеси задаются выражениями:

$$\chi_1 = -2.485 \cdot 10^{-5} + 6.894 \cdot 10^{-6} T - 1.61 \cdot 10^{-8} T^2, \quad \left[\frac{\text{Вт}}{\text{см} \cdot \text{К}} \right]; \quad (2.8)$$

$$\mu = \frac{8.1 \cdot 10^{-7} \sqrt{T}}{1 + \frac{T}{27.89}}, \quad \left[\frac{\text{кг}}{\text{с} \cdot \text{м}} \right]. \quad (2.9)$$

Объемное тепловыделение в газе определяется формулой:

$$q_1 = 1.216 \cdot 10^{-2} \frac{P}{T}, \quad \left[\frac{\text{Вт}}{\text{см}^3} \right]. \quad (2.10)$$

В области (2), отвечающей твердой фазе D - T смеси, изменение температуры описывается уравнением теплопроводности с учетом тепловыделения от поглощения нейтронов при распаде трития:

$$\rho C_{P2} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\chi_2 \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{y \partial y} \left(y \chi_2 \frac{\partial T}{\partial y} \right) + q_2. \quad (2.11)$$

Термодинамические свойства твердой фазы D - T смеси следующие:

$$C_{P2} = 6 \cdot 10^{-4} \cdot T^3 - 1.44 \cdot 10^{-5} \cdot T^4, \quad (2.12)$$

$$\chi_2 = \frac{8342}{T^{4.49}} \cdot \exp \left\{ -\frac{33.13}{T} \right\}. \quad (2.13)$$

Энергия от поглощения нейтронов при распаде трития $q = 0.049$.

В сферической оболочке (область 3) изменение температуры описывается уравнением теплопроводности (2.11) с учетом возможного выделения энергии от поглощения нейтронов образующихся при распаде трития. Термодинамические свойства сферической оболочки из полистирола в диапазоне характерного изменения температуры описываются зависимостями:

$$C_{P3} = -0.040454 + 0.0063 \cdot T - 2.32 \cdot 10^{-5} \cdot T^2, \quad (2.14)$$

$$\chi_3 = 2.2 \cdot 10^{-4} + 9.79 \cdot 10^{-6} \cdot T - 4.51 \cdot 10^{-8} \cdot T^2. \quad (2.15)$$

Условие возникновения конвекции определяется величиной произведения чисел Прандтля ($Pr = C_P \mu / \chi$) и Грасгофа ($Gr = g \rho^2 l^3 \Delta T / \mu^2$) [8]. Практически единственным газом, который может быть применен в качестве теплообменного при криогенном замораживании D - T смеси, является гелий при низком давлении ($\rho < 1$ торр). Проведенная оценка чисел Прандтля и Грасгофа, для характерного размера полости $l = 1$ см привела к следующему диапазону изменения произведения этих чисел: $Pr \cdot Gr = 0.04 \div 4$. Согласно [8] условием возникновения конвекции между двумя параллельными твердыми плоскостями является условие: $Pr \cdot Gr > 1710$. В этих предположениях газ гелий считается неподвижным, а изменение температуры в полости (1) описывается уравнением теплопроводности (2.11). Удельная объемная теплоемкость и коэффициент теплопроводности $\chi(T)$ следующие:

$$C_{P4} = 0.256154 \cdot \frac{p}{T}, \quad (2.16)$$

$$\chi_4 = \frac{7.17 \cdot 10^{-7} \sqrt{T}}{\left(1 + \frac{3.43}{T}\right) \left(1 + \left(\frac{1 - 0.0067 \cdot (T - 4)}{1 + 0.0067 \cdot (T + 4)}\right) \frac{1.31466 \cdot 10^{-6}}{\left(1 + \frac{3.43}{T}\right)} \cdot \frac{T}{p}\right)}. \quad (2.17)$$

В начальный момент времени во всех зонах задано распределение температуры, в частности, задана одинаковая температура.

В области (1) D - T смесь имеет начальное давление p_1^0 , которой определяется по формуле (2.1) при температуре конденсации $T_s = T_1^0$. Начальная плотность ρ_1 D - T смеси определяется по уравнению состояния Ван-дер-Ваальса при начальных значениях температуры и давления.

На границе сферического контейнера R_4 ставится граничное условие первого рода, когда задана температура, либо второго рода, когда задан тепловой поток. На границе зон твердой и газовой фаз D - T смеси R_1 выставляются условия описывающие поглощение или выделение количества тепла при фазовом переходе:

$$\rho_2 \Delta h \left(\frac{d\vec{R}_1}{dt} \cdot \vec{n} \right) = \left(\chi_2 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{R_1^+} - \left(\chi_1 \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{R_1^-}, \quad (2.18)$$

где Δh – удельная энтальпия фазового перехода, определяемая по формуле:

$$\Delta h = 480 \left[1 + 7.96 \left(1 - \frac{T_s}{39.4} \right)^{0.443} \right]. \quad (2.19)$$

Из законов сохранения массы газовой и твердой фаз D - T смеси следует:

$$\int_{R_1(t)}^{R_2} \rho_2 dV + \int_0^{R_1(t)} \rho_1 dV = M_{TF} + M_{GF} = M^0, \quad (2.20)$$

где M^0 – полная масса твердой (M_{TF}) и газовой (M_{GF}) фаз D - T смеси.

Кинематическое условие на границе фазового перехода соответствует условию прилипания. При этом нормальная компонента вектора скорости в D - T газе определяется из условия

$$\rho_1(U_n - W_n) = -\rho_2 W_n = -\rho_2 \left(\frac{d\vec{R}_1}{dt} \cdot \vec{n} \right). \quad (2.21)$$

Из закона сохранения энергии следует энергетическое условие на границе фазового перехода:

$$\rho_1 h_1(U_n - W_n) = -\rho_2(h_2 + \Delta h)W_n. \quad (2.22)$$

Соотношение (2.22) отвечает связи энтальпий газовой и твердой фаз и скрытой теплоты фазового перехода:

$$h_1(T) = h_2(T) + \Delta h(T). \quad (2.23)$$

3. Численный метод

Для построения численного метода в расчетной области вводится структурированная неравномерная сетка. При построении сетки применяется сгущение узлов сетки по геометрической прогрессии, как по углу, так и по радиусу. Фрагменты сетки показаны на Рис. 3.1.

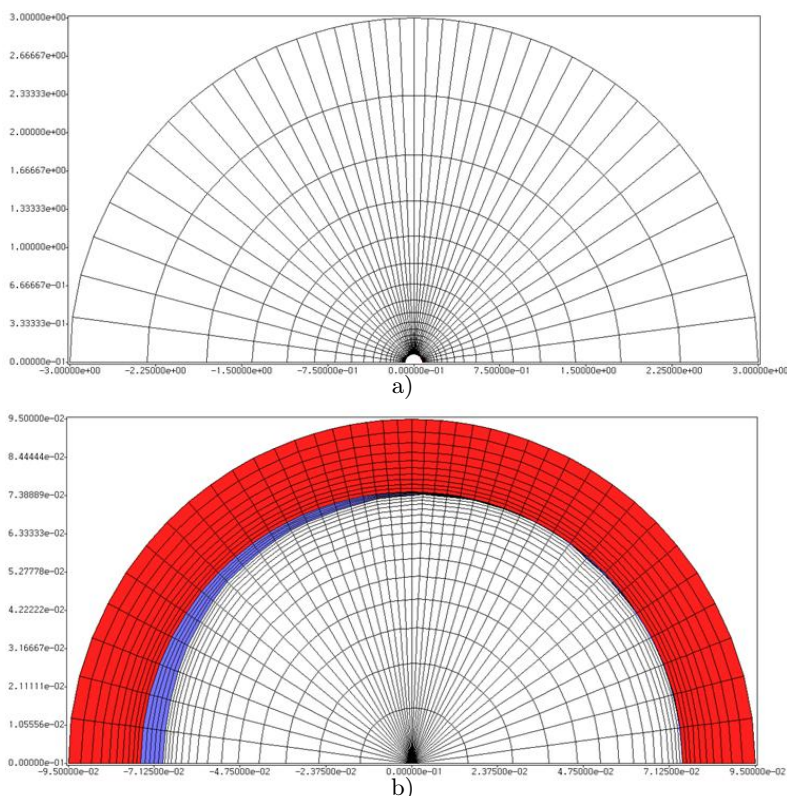


Рис. 3.1. Фрагменты сетки: а) в теплообменном газе б) в микромишени
Fig 3.1. Grid fragments: a) in heat-exchange gas b) in micro-target

Последовательность расчета на каждом временном шаге состоит из следующих вычислений. Вначале на гранях, разделяющих области твердой и газовой фаз, из уравнения (2.1) находится температура фазового перехода T_s . Затем с использованием явной аппроксимации уравнения (2.18) определяется скорость движения границы фазового перехода и ее новое положение. При этом если температура T_s фазового перехода не удовлетворяет принципу максимума $(T_2 - T_s)(T_s - T_1) \geq 0$, где T_2 и T_1 – температуры в твердой и газовой фазах в приграничных ячейках, то проводится корректировка температуры фазового перехода из условия отсутствия поверхностных источников энергии. После этого рассчитываются новые координаты узлов сетки в областях 1 и 2 и геометрические параметры ячеек и граней. Затем, из закона сохранения массы, определяется новое значение плотности в газовой фазе, отвечающее новому положению фазового фронта. В области газообразной фазы D – T смеси вычисляются компоненты вектора скорости и давление из решения уравнений Навье–Стокса. Решение уравнений (2.2)–(2.4) находится методом типа SIMPLE [7], в соответствии с которым вначале определяются предварительные значения $(\bar{u}, \bar{\nu})$ компонент вектора скорости без учета градиента давления. Для их определения уравнения (2.2–2.3) аппроксимируются неявной разностной схемой, которая для ячейки $P = (j + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2})$ в полудискретной форме имеет вид:

$$\begin{aligned} & \frac{\rho \Delta V_P^{n+1}}{\tau} \bar{u}_P + \left\{ \left(m\bar{u} - \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \Delta S \right)_{j+1} - \left(m\bar{u} - \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \Delta S \right)_i \right\} + \\ & + \left\{ \left(m\bar{u} - \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \Delta S \right)_{i+1} - \left(m\bar{u} - \mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial n} \Delta S \right)_i \right\} = \\ & = \frac{(u\rho \Delta V)_P^n}{\tau} - \rho g \beta (T - T_0)_P^n \Delta V_P^{n+\frac{1}{2}}, \\ & \frac{\rho \Delta V_P^{n+1}}{\tau} \bar{\nu}_P + \left\{ \left(m\bar{\nu} - \mu \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial n} \Delta S \right)_{j+1} - \left(m\bar{\nu} - \mu \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial n} \Delta S \right)_i \right\} + \\ & + \left\{ \left(m\bar{\nu} - \mu \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial n} \Delta S \right)_{i+1} - \left(m\bar{\nu} - \mu \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial n} \Delta S \right)_i \right\} = \frac{(\nu \rho \Delta V)_P^n}{\tau}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь используются следующие обозначения: ΔV – объем ячейки; $m = \rho(U_n - W_n)\Delta S$ – поток массы; $U_n = n_x + n_y \nu$ – нормальная компонента вектора скорости; W_n – нормальная скорость грани; ΔS – площадь грани; $\frac{\partial \varphi}{\partial n} = n_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + n_y \frac{\partial \varphi}{\partial y}$ – производная по нормали. Конвективные потоки в (3.1) аппроксимируются противопоточной схемой [7], а диффузионные потоки – центральными разностями. Для решения разностных уравнений, следуя [9], проводится пространственная факторизация, позволяющая свести решения двумерных уравнений к решению одномерных задач по каждому из сеточных направлений методом скалярной прогонки.

Найденные предварительные значения компоненты вектора скорости не удовлетворяют уравнению неразрывности. Поэтому на следующем шаге находятся поправки компонент вектора скорости

$$u^{n+1} = \bar{u} + u', \quad \nu^{n+1} = \bar{\nu} + \nu', \quad (3.2)$$

которые выражаются через давление следующим образом:

$$u' = -\frac{\tau}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \nu' = -\frac{\tau}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}. \quad (3.3)$$

При подстановке в уравнение неразрывности выражений (3.2)– (3.3) и с помощью метода искусственной сжимаемости [10] получается уравнение относительно давления:

$$\left(\frac{p}{a^2 \tau} \Delta V^{n+1} \right)_P - \tau \Sigma_f \left(\frac{\partial p}{\partial n} \right)_f \Delta S_f = - \left\{ \frac{(\bar{p} \Delta V)_P^{n+1} - (\bar{p} \Delta V)_P^n}{\tau} + \sum_f \bar{m}_f \right\}, \quad (3.4)$$

где a – эмпирически подбираемый параметр, имеющий смысл скорости звука; f – индекс грани. Суммирование в (3.4) проводится по граням ячейки P .

Граничное условие для уравнения (3.4) выставляется на границе фазового перехода. Для постановки граничного условия, используется тот факт, что скорость движения фазовой границы (W_n) и, соответственно, массовая скорость газовой фазы (U_n) известны. Поэтому на фазовой границе ставится условие

$$(m')_f = (\rho U'_n \Delta S)_f = - \left(\tau \frac{\partial p}{\partial n} \Delta S \right)_f = 0.$$

Для численного решения проводится пространственная факторизация уравнения (3.4). Получающиеся в результате этого одномерные уравнения решаются скалярными прогонами.

Для определения поправок компонент вектора скорости в центрах ячеек по формулам (3.3) градиент давления определяется в центрах ячеек методом Гаусса-Грина:

$$(grad p)_P = \frac{\sum_f p_f \vec{n}_f \Delta l_f}{\Delta \sigma_P},$$

где \vec{n}_f – вектор внешней нормали относительно ячейки P ; Δl_f – длина грани; $\Delta \sigma_P$ – площадь ячейки.

Заключительным моментом расчета шага является определение температуры. Для составления разностных аппроксимаций уравнение теплопереноса во всех областях приводится к общему виду:

$$\frac{\partial \rho h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho h u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho h v) = \frac{\partial}{\partial x}(\chi \frac{\partial \theta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\chi \frac{\partial \theta}{\partial y}) + \Phi(\vec{R}, t) + q(\vec{R}, t), \quad (3.5)$$

где $\theta = T - T^0$ – приращение температуры относительно начального состояния; $h(T) = \int_0^{T-T^0} C_p(T) d\theta$ – энтальпия, а функция Φ описывает диссипацию энергии за счет работы вязких сил. Уравнение теплопереноса (3.2) аппроксимируется неявной разностной схемой. Для решения нелинейных уравнений используется метод Ньютона, в соответствии с которым разностные уравнения составляются относительно приращений температуры. Для ячейки $P = (j + \frac{1}{2}, i + \frac{1}{2})$ полудискретная форма уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned}
& \frac{(\rho C_P)_P \Delta V_P^{n+1} \Delta \theta_P}{\tau} + \left(m C_P \Delta \theta - \left(\chi \frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{j+\frac{3}{2}} - \\
& - \left(m C_P \Delta \theta - \left(\chi \frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{j+\frac{1}{2}} + \left(m C_P \Delta \theta - \left(\chi \frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{i+\frac{3}{2}} - \\
& - \left(m C_P \Delta \theta - \left(\chi \frac{\partial \Delta \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{i+\frac{1}{2}} = H_P^n.
\end{aligned} \quad (3.6)$$

Правые части уравнений (3.6) являются невязками, т. е. явной аппроксимацией уравнения баланса энергии:

$$\begin{aligned}
H_P^n = & \frac{(\rho h)_P^n (\Delta V_P^{n+1} - \Delta V_P^n)}{\tau} - \left(m h - \left(\chi \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{j+\frac{3}{2}}^n + \\
& + \left(m h - \left(\chi \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{j+\frac{1}{2}}^n - \left(m h - \left(\chi \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{i+\frac{3}{2}}^n + \\
& + \left(m h - \left(\chi \frac{\partial \theta}{\partial n} \right) \Delta S \right)_{i+\frac{1}{2}}^n + \Phi_P^n \Delta V_P + q_P \Delta V_P.
\end{aligned} \quad (3.7)$$

Конвективные потоки здесь также аппроксимируются противопоточной схемой, а диффузионные потоки центральными разностями. Для решения разностных уравнений проводится пространственная факторизация, сводящая решение двумерного уравнения к решению одномерных уравнений каждому из сеточных направлений методом скалярной прогонки.

Данная схема консервативна, т. к. конвективный и тепловой потоки через смежную грань двух ячеек определяются одинаковым образом (равны по модулю и имеют противоположные знаки). Отметим также, что при балансе полной энергии во всей расчетной области с учетом фазового превращения, сумма потоков конвективной и тепловой энергий через границу фазового перехода определяется как

$$\begin{aligned}
& -(-\rho_2(W_n)h_2\Delta S)_f + \left(\chi_2 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_2 \Delta S \right)_f + (\rho_1(U_n - W_n)h_1\Delta S)_f - \\
& - \left(\chi_1 \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_1 \Delta S \right)_1 = -\rho_2\Delta h W_n + \left(\chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{TF} - \left(\chi \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{GF} = 0.
\end{aligned}$$

что обеспечивает консервативность разностной схемы с учетом фазового превращения.

4. Результаты расчетов

С использованием созданной расчетной методики было проведено моделирование вымораживания микромишени, которая находится в сферическом контейнере, имеющем радиус $R_4 = 3$ см (см. Рис. 2.1). Оболочка микромишени имеет толщину 0.02 см. Внутренний радиус оболочки $R_2 = 0.075$ см. Рассматривались микромишени имеющие различную степень заполнения оболочки $\frac{V_L}{V_C} = 0.056, 0.2$ и 0.6 . Результаты относятся к процессу охлаждения при температуре $T = 18^\circ K$.

Расчеты были проведены в четырех постановках. В первой постановке определялось установившееся поле температуры в контейнере без учета движения газовой фазы

D-T смеси только за счет энергосвечения и внешнего охлаждения для сферически слоя твердой фазы. На Рис. 4.1 показаны графики изменения максимальной температуры. В этой постановке, в зависимости от степени заполнения, решение выходит на стационарное распределение температуры за время 5 – 15 с.

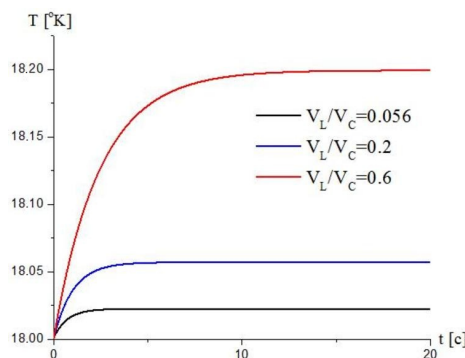


Рис. 4.1. Сферическая мишень, изменение максимального значения температуры в газовой фазе

Fig 4.1. Spherical target, change in the maximum temperature value in the gas phase

Во второй задаче моделировалось охлаждения со сферическим слоем твердой фазы с учетом фазового перехода. В этом случае происходит незначительная сублимация твердой фазы D-T смеси, которая приводит к повышению плотности и давления в газовой фазе. На рисунке 4.2 показаны типичные графики изменения максимальной температуры (T_{max}), средней температуры (T^0), температуры сублимации (T^*) и изменение плотности в газовой фазе D-T смеси. Стационарное состояние в этих расчетах достигается также за время от 5 до 15 с.

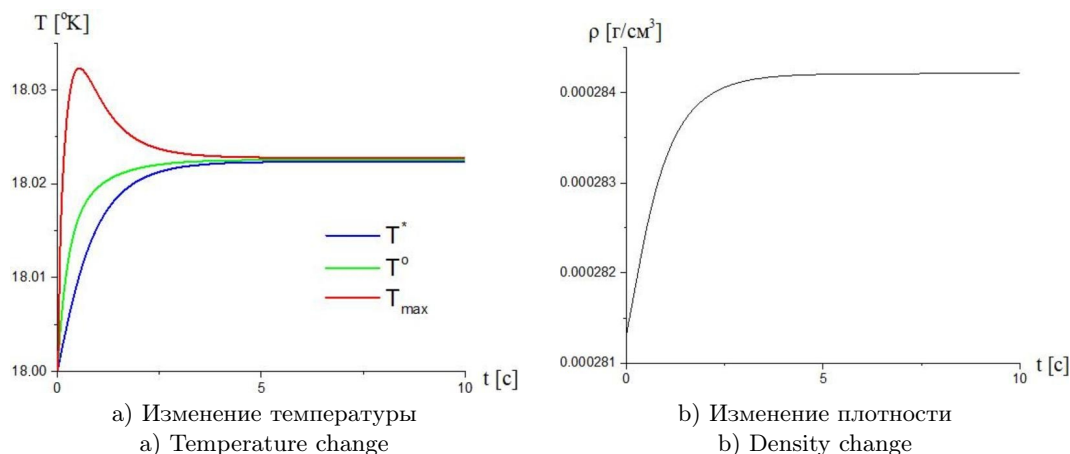


Рис. 4.2. Расчет вымораживание сферической мишени с заполнением оболочки $\frac{V_L}{V_C} = 0.056$

Fig 4.2. Calculation of freezing out a spherical target with shell filling $\frac{V_L}{V_C} = 0.056$

В третьей постановке определялось установившееся поле температуры в мишени с несферическим слоем твердой фазы. В этих расчетах учитывалось только энерговыделение и внешнее охлаждение. На Рис. 4.3 показаны графики изменения максимальной температуры в мишенях с различной степенью заполнения.

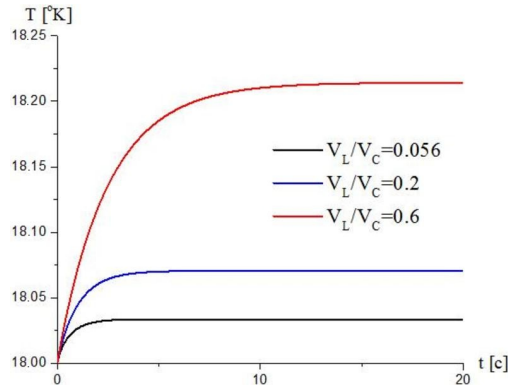
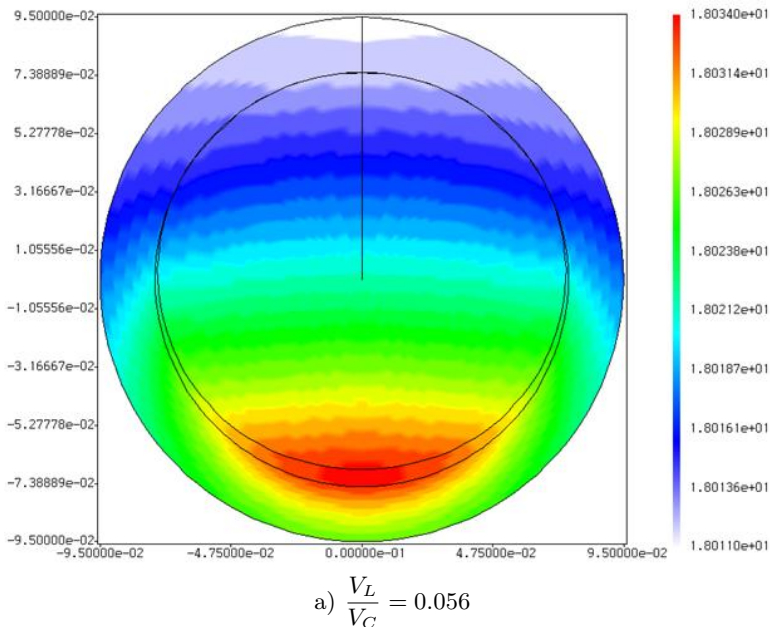


Рис. 4.3. Изменение максимального значения температуры в газовой фазе в задачах с несферическим слоем твердой фазы
Fig 4.3. Change in the maximum temperature value in the gas phase in problems with a non-spherical layer of a solid phase

На рисунке 4.4 для двух значений степени заполнения приведены поля температуры. Как видно из рисунков, в установившемся поле температуры максимальные значения достигаются в области наибольшей толщины твердого слоя D - T -смеси. Установившееся решение здесь также достигалось за время 5–15 с. Максимальное изменение температуры в зависимости от степени заполнения изменяется от $0.034^0 K$ до $0.214^0 K$.



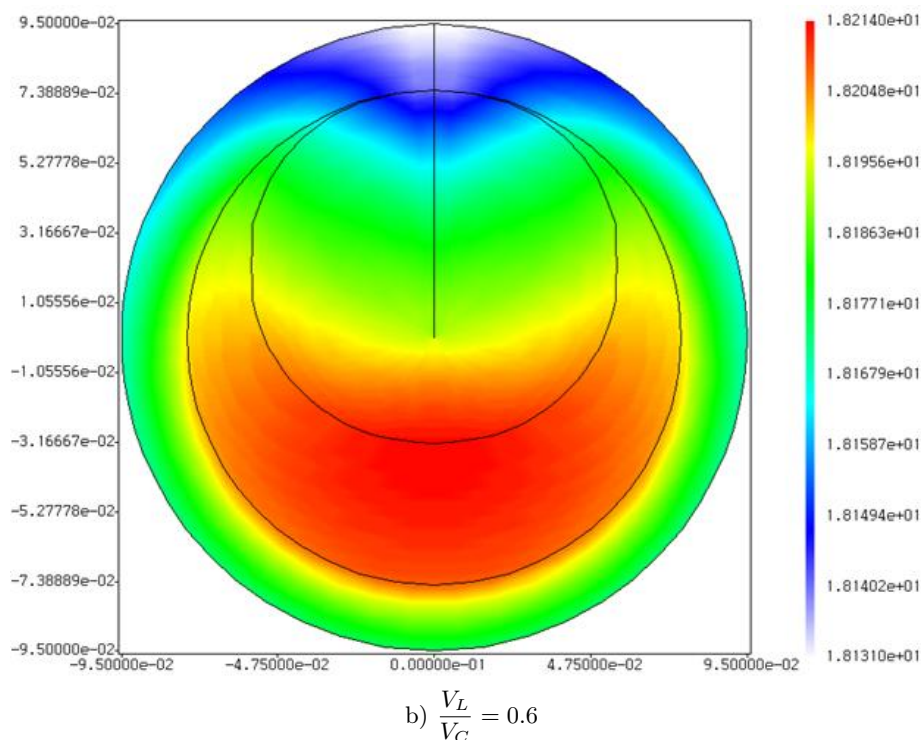


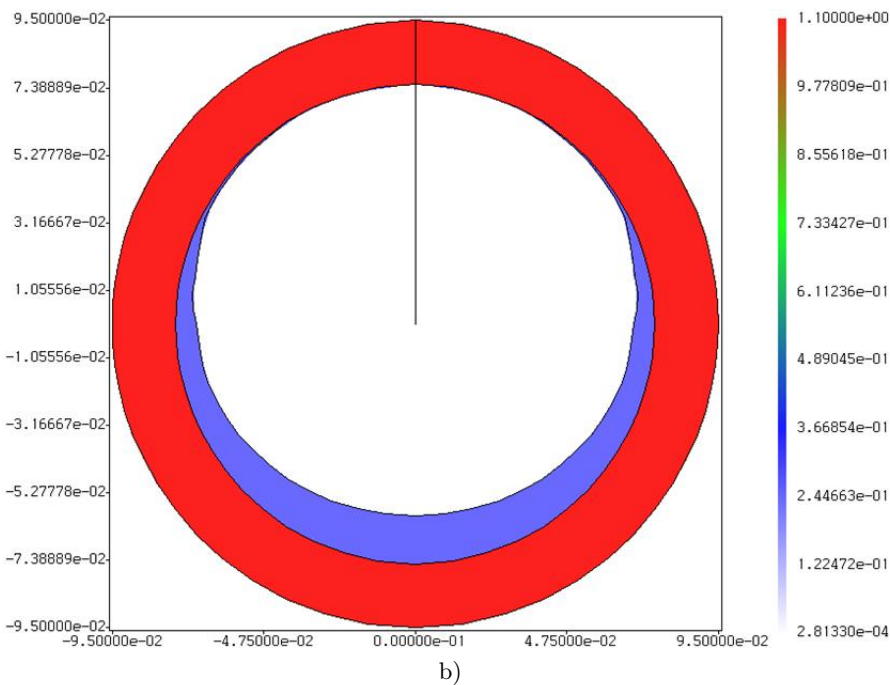
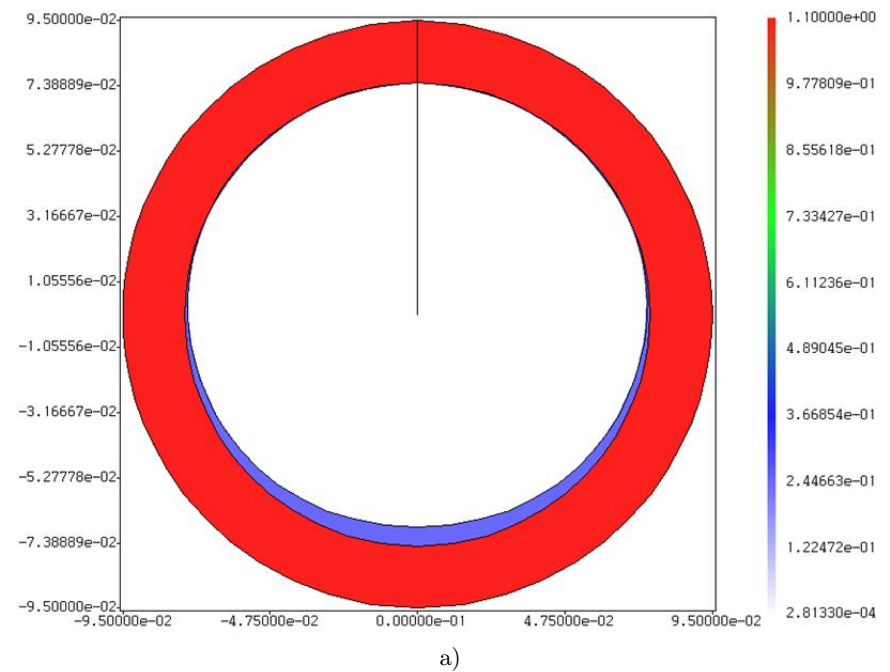
Рис. 4.4. Установившееся распределение температуры в задачах с несферическим слоем твердой фазы

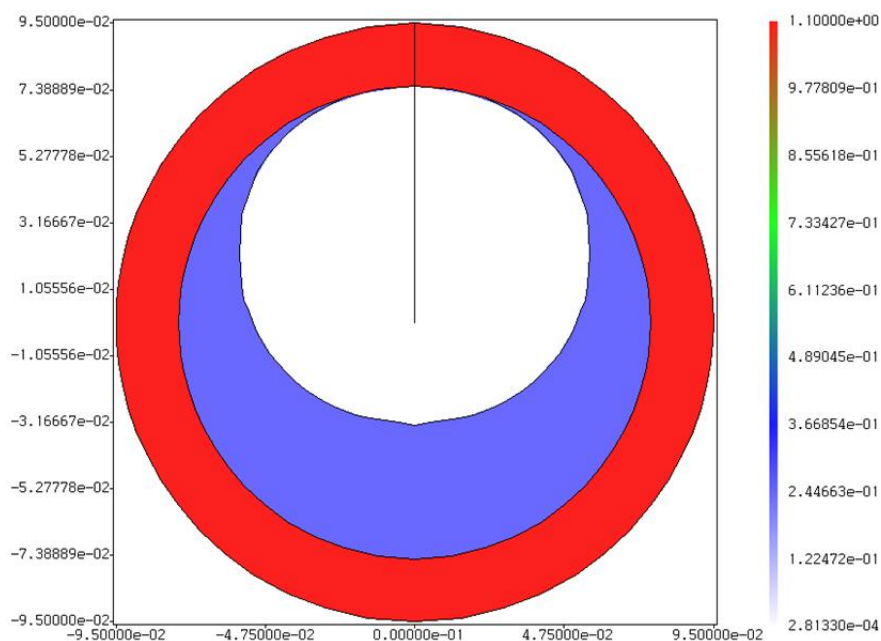
Fig 4.4. Steady-state temperature distribution in problems with a non-spherical solid phase layer

В четвертой постановке моделировался процесс самосимметризации твердого слоя D-T смеси за счет естественной радиоактивности. В расчетах оценивалась изменение степени сферичности мишени, которая определялась по формуле:

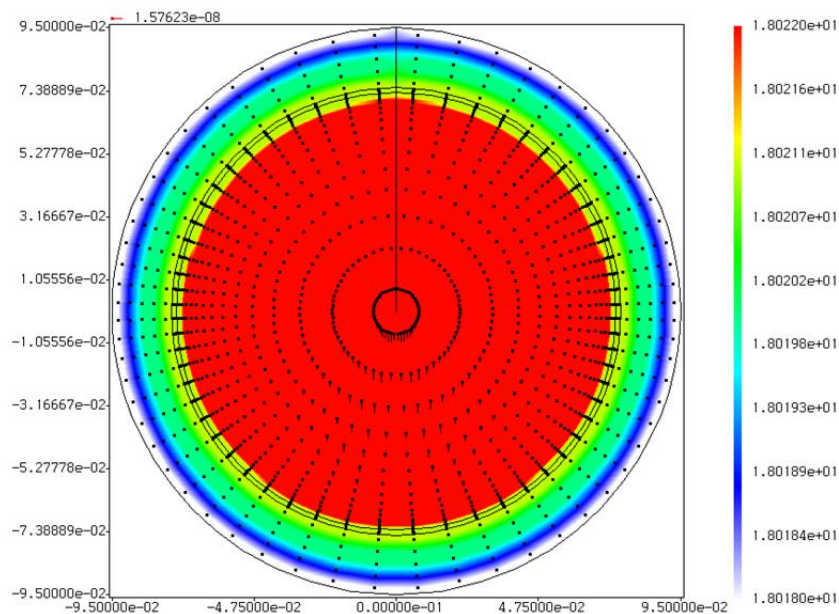
$$\partial R = 100 \cdot \frac{\max_j \{|R_j - R_{C\Phi}|\}}{R_{C\Phi}},$$

где R_j – радиус твердой фазы в j -той точке; $R_{C\Phi}$ – радиус сферического объема массы газовой фазы на текущий момент времени. На Рис. 4.5 для трех вариантов степени заполнения показаны начальная геометрия твердого слоя и распределение температуры, вектора скорости и конфигурация твердой фазы после 1 часа вымораживания. Степень несферичности менее 1 % в зависимости от степени заполнения достигалась соответственно за 50 м, 45 м и 33 м. Более быстрая симметризация с большей степенью заполнения определяется большими градиентами температуры на границе фазового перехода и, соответственно, большими скоростями конденсации и сублимации.





c)



d)

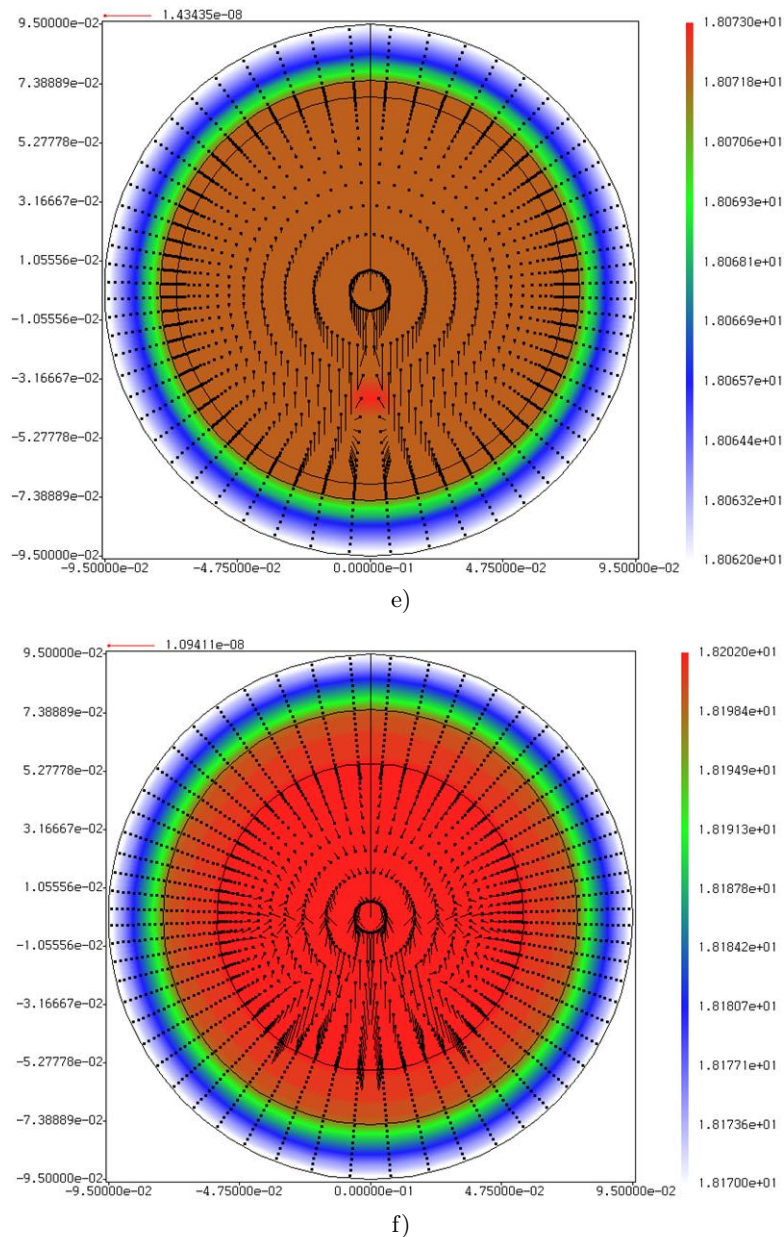


Рис. 4.5. а) Начальная форма твердой фазы слева, граница раздела газ – твердая фаза D-T смеси, поле температуры и вектор скорости справа после 1 ч вымораживания для микромишеней со следующими коэффициентами заполнения: а-б) 0.056; с-д) 0.2; е-ф) 0.6

Fig 4.5. The initial form of the solid phase on the left, the gas interface - the solid phase of the D-T mixture, the temperature field and the velocity vector on the right after 1 hour of freezing for micro-targets with their filling generators: а-б) 0.056; с-д) 0.2; д-ф) 0.6

5. Заключение

В результате выполненной работы разработана экономичная двумерная расчетная модель процесса формирования криогенного слоя D-T смеси в микросферте. Математическая модель представляет собой задачу Стефана с фазовым переходом газ-твердое тело с учетом движения замораживаемого газа в приближении решения уравнений Навье-Стокса в приближении Буссинеска. С помощью расчётов показано, что вследствие естественной радиоактивности происходит симметризация мишени. Численно определено время самосимметризации в зависимости от степени заполнения микромишеней.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Накколс Дж. Г. Осуществимость инерциально-термоядерного синтеза // УФН. 1984. Т. 143, № 7. С. 467–482. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0143.198407d.0467>
2. Hoffer J. K., Foreman L. R. Radioactively induced sublimation in solid tritium // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 60, No. 13. pp. 1310–1313. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.1310>
3. Modeling the temperature and ice-thickness profiles within OMEGA cryogenic targets // LLE Review. 1999. Vol. 81. pp. 12–20.
4. Deryugin Yu. N., Izgorodin V. M., Solomatina E. Yu. Numerical simulation of the freezing process of hydrogen isotopes in a spherical container // J. Moscow Phys. Soc. 1999. Vol. 9. pp. 165–172.
5. Козелков А. С., Дерюгин Ю. Н., Зеленский Д. К., Глазунов В. А., Голубев А. А., Денисова О. В., Лашкин С. В., Жучков Р. Н., Тарасова Н. В., Сизова М. А. Многофункциональный пакет программ ЛОГОС для расчета задач гидродинамики и тепломассопереноса на многопроцессорных ЭВМ: базовые технологии и алгоритмы // Супервычисления и математическое моделирование : тр. XII междунар. семинара. Саров, 2010. С. 215–230.
6. Справочник по физико-техническим основам криогеники / под ред. М. П. Малкова. М.: Энергоатомиздат, 1985. 432 с.
7. Ferziger J. H., Peric M. Computational methods for fluid dynamics. – 3rd ed. Berlin; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo: Springer, 2002. 431 p.
8. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
9. Яненко Н. Н. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967. 197 с.
10. Chorin A. J. A numerical method for solving incompressible viscous flow problems. J. of Comput. Phys. Vol. 2. pp. 12–26. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(67\)90037-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(67)90037-X)

*Поступила 17.06.2021; доработана после рецензирования 10.08.2021;
принята к публикации 25.08.2021*

Информация об авторах:

Кирейчева Екатерина Юрьевна, ведущий экономист ФОТ, РФЯЦ ВНИИЭФ (607181 Россия, г. Саров, пр. Дружбы, д. 24), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1614-3420>, kireycheva@gmail.com

Веселова Елена Александровна, старший научный сотрудник, РФЯЦ ВНИИЭФ (607182, Россия, г. Саров, ул. Чкалова д. 46б), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9042-3415>, sarov333@gmail.com

Дерюгин Юрий Николаевич, главный научный сотрудник, РФЯЦ ВНИИЭФ (607181, Россия, г. Саров, ул. Юности, д. 22), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

Мамедова Татьяна Фанадовна, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, МГУ им. Н. П. Огарёва (430019, Россия, г. Саранск, пр. 50 лет Октября, д. 30), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7582-216X>, mamedovatf@yandex.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 76D05, 76M12

Numerical modeling of the formation of D-T mixture spherical layer in micro-targets of LTS

E. Yu. Kireicheva¹, E. A. Veselova¹, Yu. N. Deryugin¹, T. F. Mamedova²

¹ *FSUE RFNC - VNIIEF (Sarov, Russia),*

² *National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)*

Abstract. The article presents a two-dimensional economical computational model of the formation of D-T mixture cryogenic layer in a spherical shell. The model is based on the description of the motion of the gas phase in the Boussinesq approximation. The thermal problem is a Stefan problem with a gas-solid phase transition. The technique is based on the finite volume method, the use of a structured mobile grid, whose movement is associated with the separation of the phase front, implicit approximations and the method of splitting two-dimensional equations in directions into one-dimensional equations. It is numerically shown that, due to natural radioactivity, the target is symmetrized. A calculated estimation of the symmetrization time for one geometry of the target with different filling coefficients is carried out.

Key Words: cryogenic target, Navier-Stokes equation in the Boussinesq approximation, finite volume method, structured mobile grid

For citation: E. Yu. Kireicheva, E. A. Veselova, Yu. N. Deryugin, T. F. Mamedova. Numerical modeling of the formation of D-T mixture spherical layer in micro-targets of LTS. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:4(2021), 394–411. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.394-411>

REFERENCES

1. J. H. Nuckolls, “The feasibility of inertial-confinement fusion”, *Phys. Today*, **35**:9 (1982), 24–31. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.2915258>
2. “Radioactively Induced Sublimation in Solid Tritium”, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:13 (1988), 1310–1313. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.60.1310>
3. “Modeling the temperature and ice-thickness profiles within OMEGA cryogenic targets”, *LLE Review*, **81** (1999), 12–20.
4. Yu. N. Deryugin, V. M. Izgorodin, E. Yu. Solomatina, “Numerical simulation of the freezing process of hydrogen isotopes in a spherical container”, *J. Moscow Phys. Soc.*, **9** (1999), 165–172.
5. A. S. Kozelkov, Yu. N. Deryugin, D. K. Zelenskiy, V. A. Glazunov, A. A. Golubev, O. V. Denisova, S. V. Lashkin, R. N. Zhuchkov, N. V. Tarasova, M. A. Sizova, “[Multi-functional software package LOGOS for calculating problems of hydrodynamics and heat and mass transfer on multiprocessor computers: basic technologies and algorithms]”, *[Supercomputing and Mathematical Modeling: Proceedings of the XII International Seminar]* (Sarov, 11–15 October), 2010, 215–230 (In Russ.).
6. M. P. Malkova, *[Handbook of the physical and technical foundations of cryogenics]*, Energoatomizdat Publ., Moscow, 1985 (In Russ.), 432 p.
7. J. H. Ferziger, M. Peric, *Computational methods for fluid dynamics*, Springer, Berlin; New York; Barcelona; Hong Kong; London; Milan; Paris; Tokyo, 2002, 431 p.
8. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford, 1986, 551 p.
9. N. N. Yanenko, *[Fractional steps method for solving multidimensional problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Novosibirsk, 1967 (In Russ.), 197 p.
10. A. J. Chorin, “A numerical method for solving incompressible viscous flow problems”, *J. of Comput. Phys.*, **2**, 12–26. DOI: [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(67\)90037-X](https://doi.org/10.1016/0021-9991(67)90037-X)

Submitted 17.06.2021; Revised 10.08.2021; Accepted 25.08.2021

Information about the authors:

Ekaterina Yu. Kireicheva, Leading Economist, Russian Federal Nuclear Center (24 Druzhby St., Sarov 607181, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1614-3420>, kireycheva@gmail.com

Elena A. Veselova, Senior Researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center (46b Chkalova St., Sarov 607182, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9042-3415>, sarov333@gmail.com

Yuriy N. Deryugin, Chief Researcher, Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center (22 Yunosti St., Sarov 607182, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3955-775X>, dyn1947@yandex.ru

Tatyana F. Mamedova, Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (50 years of October st., Saransk 430019, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7582-216X>, mamedovاتف@yandex.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.

Теоретический анализ полностью консервативных разностных схем с адаптивной вязкостью

М. Е. Ладонкина^{1, 2}, Ю. А. Повещенко^{1, 2}, О. Р. Рагимли¹, Х. Чжан^{1, 2}

¹ Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН (г. Москва, Российская Федерация)

² Московский физико-технический институт (г. Долгопрудный, Российская Федерация)

Аннотация. Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных построено семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами. Значительное внимание в работе уделено способам конструирования регуляризованных потоков массы, импульса и внутренней энергии, не нарушающих свойств полной консервативности разностных схем данного класса, анализу их амплитуды и возможности их использования на неравномерных сетках. Эффективное сохранение баланса внутренней энергии в данном типе дивергентных разностных схем обеспечивается отсутствием постоянно действующих источников разностного происхождения, производящих «вычислительную» энтропию (в т. ч. на сингулярных особенностях решения). Разработанные схемы несложно обобщить с целью расчета высокотемпературных течений в средах, неравновесных по температуре (например, в плазме при различии температур электронной и ионной компонент), когда при необходимом для описания течения наборе переменных недостаточно одного уравнения баланса полной энергии.

Ключевые слова: полностью консервативная разностная схема, метод опорных операторов, газовая динамика

Для цитирования: Ладонкина М. Е., Повещенко Ю. А., Рагимли О. Р., Чжан Х. Теоретический анализ полностью консервативных разностных схем с адаптивной вязкостью // Журнал Средневожского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 412–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412–423>

1. Введение

Как показала практика, принцип полной консервативности [1] является одним из весьма эффективных критериев качества разностных схем, возникающих при численном моделировании движений сплошной среды. Проблема построения двухслойных по времени разностных схем, удовлетворяющих этому принципу, была решена в [2] для случая лагранжева описания движения среды. Определенные трудности возникли при попытке построить такие схемы для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных. В [3] было рассмотрено весьма широкое семейство двухслойных разностных схем и показано, что оно не содержит полностью консервативной. В работе [4] была построена трехслойная полностью консервативная схема. На случай пространственных течений она была обобщена в [5].

Настоящая работа является естественным продолжением [6–8] с использованием операторного подхода [9–11] и конструированием регуляризирующих потоков массы, импульса и внутренней энергии, не нарушающих свойств полной консервативности системы. В ней работа сил термодинамического сжатия связана с дивергентным сжатием



вещества, интерполяция по времени скоростей движения которого использует технику профилирования временных весов по пространству.

Сами же интерполяционные веса связаны с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Такая нелинейная аппроксимация скоростей частиц в узлах разностной сетки (зависящая от массы этих частиц) обеспечивает одновременно две вещи. Во-первых, она сохраняет внутреннюю энергию в данном типе дивергентных разностных схем, что обеспечивается отсутствием постоянно действующих аппроксимационных источников разностного происхождения в уравнении внутренней энергии, производящих «вычислительную» энтропию, в т. ч. на сингулярных особенностях решения (например, на расходящихся центрированных волнах разрежения). Во-вторых, эта аппроксимация для узловых частиц переменной массы обеспечивает одновременный согласованный баланс их импульса и кинетической энергии с учетом массоперетоков в движущейся среде. Наконец она является простой в реализации и имеет второй порядок аппроксимации.

Также в работе предложена естественная регуляризация потоков массы, импульса и внутренней энергии системы, не нарушающая свойств полной консервативности разностных схем данного класса. Исследована амплитуда этих потоков на явном и неявном слоях по времени, а также допустимость их адаптивного использования на сетках переменной структуры. Адаптивное включение искусственной вязкости могут производиться, следуя, например, [12], но не для схемы Лакса-Вендрофа, а для данного класса двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем (ПКРС).

2. Постановка задачи

Рассмотрим течение газа в системе координат Эйлера. Пусть $\vec{\mu}$ – скорость течения. Плотность потока массы обозначим $\vec{\mu} = \rho \cdot \vec{u}$ (ρ – плотность среды). Тогда система уравнений Эйлера для течения среды имеет вид:

$$\frac{D}{Dt}(dM) = -dV \operatorname{div} \vec{\mu}, \quad (2.1)$$

$$\frac{D}{Dt}(\vec{u} dM) = -dV \operatorname{grad} P - dV \operatorname{div}(\vec{\mu} \vec{u}) + d\vec{f} \quad (2.2)$$

$$\frac{D}{Dt}(\varepsilon dM) = -PdV \operatorname{div} \vec{u} - dV \operatorname{div}(\vec{\mu} \varepsilon) + dQ, \quad (2.3)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{u}^2}{2} dM\right) = -\vec{u} dV \operatorname{grad} P - dV \operatorname{div}\left(\vec{\mu} \frac{\vec{u}^2}{2}\right) + \vec{u} d\vec{f}, \quad (2.4)$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\left(\varepsilon + \frac{\vec{u}^2}{2}\right) dM\right) = -dV \operatorname{div}(P \vec{u}) - dV \operatorname{div}\left(\vec{\mu} \left(\varepsilon + \frac{\vec{u}^2}{2}\right)\right) + \vec{u} d\vec{f} + dQ, \quad (2.5)$$

где P – давление; ε – удельная внутренняя энергия.

Здесь формула (2.3) представляет собой закон сохранения внутренней энергии; (2.4) – закон сохранения кинетической энергии; (2.5) – закон сохранения полной энергии.

Мы воспользовались очевидным тождеством:

$$\vec{u} \frac{D}{Dt}(\vec{u} dM) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{\vec{u}^2}{2} dM\right) + \frac{\vec{u}^2}{2} \frac{D}{Dt} dM.$$

Здесь считается, что частица среды массой dM , заключена в объем dV , через границы которого протекает поток массой $\vec{m} \vec{u}$, несущий импульс $\vec{m} \vec{u} \cdot \vec{u}$ и внутреннюю энергию $\vec{m} \vec{u} \vec{E}$.

3. Полностью консервативная дифференциально разностная схема (ПКРС)

Опуская исходную систему Эйлеровых уравнений для течения среды (см. [2; 13–14]), сразу запишем соответствующую двухслойную по времени ПКРС в переменных Эйлера. На Рис. 3.1 представлена разностная сетка, ω – узлы разностной сетки, Ω – её ячейки. Термодинамические величины ρ , ε , P будем относить к объёмам ячейки V и её массу $M = \rho v$ – к ячейкам Ω . Будем относить скорость \vec{u} , приузловые массу m и объём v к узлам ω .

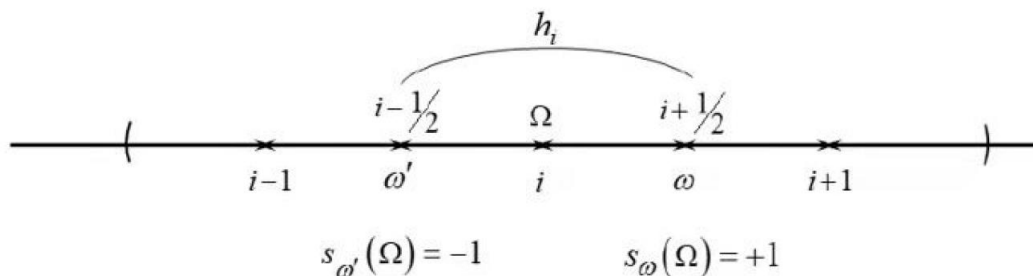


Рис. 3.1. Разностная сетка

Fig 3.1. Difference grid

Справедливы равенства:

$$m_{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} M_{\Omega}, \quad V_{\Omega} = h_i, \quad \nu_{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} V_{\Omega} = h_{i+0.5}, \quad \mu_D = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} \mu_{\omega}, \quad \rho_{\nu\omega} = \frac{m_{\omega}}{\nu_{\omega}} = \rho_{\nu i+\frac{1}{2}},$$

где μ_{ω} – введенный узловый поток массы; μ_D – введенный ячейечный поток массы. Под отнесенным к узлу импульсом будем понимать величину $I_{\omega} = \rho_{\nu\omega} u_{\omega}$.

Дальше для континуальных операций векторного анализа $\operatorname{div} \vec{u}$, $\operatorname{grad} P$, $\operatorname{div}(\vec{\mu} \cdot \vec{u})$, введем их разностные аналоги $DIV: (\omega) \rightarrow (\Omega)$, $GRAD: (\Omega) \rightarrow (\omega)$, и для аппроксимации процессов переноса $DIV_D: (\Omega) \rightarrow (\omega)$, $DIT_D: (\Omega) \rightarrow (\omega)$. Операция DIT_D используется для аппроксимации переноса импульса в уравнении (2.2) и является тензорной.

Соответственно найдём:

$$DIV \vec{u} = \frac{1}{V} \sum_{\omega(\Omega)} s_{\omega}(\Omega) \mu_D(\Omega), \quad GRAD P = \frac{\Delta P}{\nu}, \quad \text{где } \Delta P = - \sum_{\Omega(\omega)} s_{\omega}(\Omega) P_{\Omega} + S_{\partial\omega} P_{\partial\omega},$$

$$DIV_D \vec{\mu}_D = -\frac{1}{\nu} \sum_{\omega(\Omega)} s_{\omega}(\Omega) \mu_D(\Omega), \quad DIT_D(\vec{\mu}_D \cdot \vec{u}_D) = -\frac{1}{\nu} \sum_{\omega(\Omega)} s_{\omega}(\Omega) \mu_D(\Omega) \vec{u}_D(\Omega).$$

В выражении для ΔP , если узел $\omega = \partial\omega$ – граничный, добавлено слагаемое с величиной $P_{\partial\omega}$ на границе и знаковой функцией $S_{\partial\omega} = \pm 1$, в зависимости от направления граничной нормали.

Выпишем [2] в переменных Эйлера:

$$m_t = -\nu \text{DIV}_D \vec{\mu}_D^\sim, \quad (3.1)$$

$$(mu)_t = -\nu \text{GRAD } P^\sim - \nu \text{DIT}_D(\vec{\mu}_D^\sim \cdot \vec{u}_D^\sim), \quad (3.2)$$

$$(M\varepsilon)_t = -P^\sim V \text{DIV} \vec{u}^\sim - V \text{DIV}[(\rho\varepsilon \vec{u})^\sim_\omega], \quad (3.3)$$

$$(m \frac{\vec{u}^2}{2})_t = -\nu(u^\sim, \text{GRAD } P^\sim - \nu \text{DIV}_D(\vec{\mu}_D^\sim \frac{\vec{u}_D^2}{2})). \quad (3.4)$$

Под $\vec{\mu}_{E\omega} = (\rho\varepsilon \vec{u})_\omega$ понимаем некоторую аппроксимацию потока внутренней энергии в узле ω . Также в ячейке, обозначенной узлами ω и ω' , введём величины:

$$\vec{u}_D^\sim = \frac{1}{2}(\vec{u}_\omega^{\delta\omega} + \vec{u}_{\omega'}^{\delta\omega'}), \quad \vec{u}_D^{2\sim} = \frac{1}{2}(\vec{u}_\omega^{\delta\omega}, \vec{u}_{\omega'}^{\delta\omega'}).$$

На временных слоях t и $\hat{t} = t + \tau$ введём разностные производные по времени и пространственно-точечные (т. е. в узлах сетки ω) временные интерполяции: $a_t = (\hat{a} - a)/\tau$, $a^{(\delta)} = \delta\hat{a} + (1 - \delta)a$. Здесь интерполяционный вес δ может быть связан с узлом пространственной сетки ω , например, по закону $\delta = \sqrt{\hat{m}}/(\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m})$.

Также под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций a, \hat{a} между слоями t и \hat{t} будем обозначать сеточную величину a^\sim .

4. Аппроксимация и введение искусственной вязкости

Введем одномерную неравномерную сетку по ячейкам $\Omega_i \cup \partial\Omega$ и узлам $\omega_{i+0.5} \cup \partial\omega$ вдоль пространственной переменной $x_{i+0.5}$.

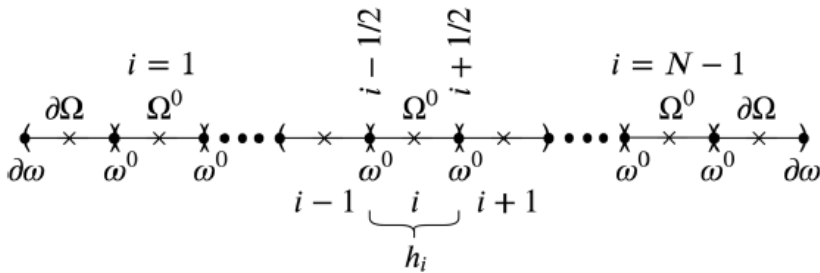


Рис. 4.1. Неравномерная сетка

Fig 4.1. Irregular mesh

Здесь символ ∂ идентифицирует граничные ячейки и узлы: $\omega^0 = \omega/\partial\omega$, $\Omega^0 = \Omega/\partial\Omega$. Уравнения для плотности ρ и внутренней энергии E можно привести к виду:

$$A_i y_{i-1} - C_i y_i + B_i y_{i+1} = -F_i, i = \overline{1, N-1},$$

$$y_0 = a_1 y_1 + b_1; \quad y_N = a_2 y_{N-1} + b_2$$

и далее решать модифицированным методом Ньютона в сочетании с алгоритмом прогонки. В уравнениях (2.1)–(2.4) в правой части неявность заложена в узловых и ячейочных массовых потоках. После применения метода Ньютона и вводя обозначения для приращений $\delta y_i = y_i^{s+1} - y_i^s$, опуская выкладки, сразу выпишем прогоночные коэффициенты (A, B, C, F) для ρ -, u - и E - итерационных групп. Верхним символом \approx

указываем, что зависимость величины на неявном слое по времени \hat{t} берётся на известной s -й итерации.

$$A_{\rho i} = \beta_{i-0.5} h_{i-0.5}, \quad B_{\rho i} = \beta_{i+0.5} h_{i+0.5}, \quad C_{\rho i} = h_i + A_{\rho i} + B_{\rho i}, \quad F_{\rho i} = -f_{\rho i}^{\approx}.$$

Аналогично для скорости u уравнения принимают вид:

$$A_{ui+0.5} \delta_{\Delta} u_{i-0.5} + B_{ui+0.5} \delta_{\Delta} u_{i+1.5} = -F_{ui+0.5},$$

где

$$\begin{aligned} A_{ui+0.5} &= \left\{ -\tau \left\{ -\left[-\beta_i \frac{h_i}{\tau} (-\rho_{\nu i-0.5}^{s+1}) \right] \right\} - \right. \\ &\quad \left. -\tau \left[-\frac{1}{2} \{ -[K_{i+0.5}(\rho_{i+1}^{s+1} - \rho_i^{s+1})] + [-K_{i-0.5}(\rho_i^{s+1} - \rho_{i-1}^{s+1})] \} \frac{1}{2} \{ \delta_{i-0.5}^{s+1} \} \right] \right\} / \rho_{\nu i-0.5}^{s+1}, \\ C_{ui+0.5} &= \left\{ m_{i+0.5}^{s+1} + \tau \left\{ \left[-\beta_{i+1} \frac{h_{i+1}}{\tau} (-\rho_{\nu i+0.5}^{s+1}) \right] - \left[-\beta_i \frac{h_i}{\tau} (\rho_{\nu i+0.5}^{s+1}) \right] \right\} + \right. \\ &\quad \left. +\tau \left[\left\{ \frac{1}{2} \{ [-K_{i+1.5}(\rho_{i+2}^{s+1} - \rho_{i+1}^{s+1})] + [-K_{i+0.5}(\rho_{i+1}^{s+1} - \rho_i^{s+1})] \} \frac{1}{2} \{ \delta_{i+0.5}^{s+1} \} \right\} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left\{ \frac{1}{2} \{ [-K_{i+0.5}(\rho_{i+1}^{s+1} - \rho_i^{s+1})] + [-K_{i-0.5}(\rho_i^{s+1} - \rho_{i-1}^{s+1})] \} \frac{1}{2} \{ \delta_{i+0.5}^{s+1} \} \right\} \right] \right\} / \rho_{\nu i+0.5}^{s+1}, \\ B_{ui+0.5} &= \left\{ -\tau \left\{ \left[-\beta_{i+1} \frac{h_{i+1}}{\tau} (-\rho_{\nu i+1.5}^{s+1}) \right] \right\} - \right. \\ &\quad \left. -\tau \left[\left\{ \frac{1}{2} \{ -[K_{i+1.5}(\rho_{i+2}^{s+1} - \rho_{i+1}^{s+1})] + [-K_{i+0.5}(\rho_{i+1}^{s+1} - \rho_i^{s+1})] \} \frac{1}{2} \{ \delta_{i+1.5}^{s+1} \} \right\} \right] \right\} / \rho_{\nu i+1.5}^{s+1}, \\ f_{ui+0.5} &= -f_{ui+0.5}^{\approx}, \quad K_{i+0.5} = \beta_{i+0.5} \frac{h_{i+0.5}}{\tau}. \end{aligned}$$

Для внутренней энергии E :

$$A_{Ei} = \beta_{Ei-0.5} h_{i-0.5}, \quad B_{Ei} = \beta_{Ei+0.5} h_{i+0.5}, \quad C_{Ei} = h_i + A_{Ei} + B_{Ei}, \quad F_{Ei} = -f_{Ei}^{\approx},$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} f_{\rho i} &= h_i(\hat{\rho}_i - \rho_i) + \tau(\mu_{i+0.5}^{\approx} - \mu_{i-0.5}^{\approx}), \\ f_{ui+0.5} &= (I_{i+0.5} - I_{i+0.5}) + \tau \left\{ (P_{i+1}^{\approx} - P_i^{\approx}) + [\mu_{\tilde{D}_{i+1}}^{\approx} u_{\tilde{D}_{i+1}}^{\approx} - \mu_{\tilde{D}_i}^{\approx} u_{\tilde{D}_i}^{\approx}] \right\}, \\ f_{Ei} &= h_i(\hat{E}_i - E_i) + \tau \left\{ [P_i^{\approx}(u_{i+0.5}^{\approx} - u_{i-0.5}^{\approx})] + [\mu_{E_{i+0.5}}^{\approx} - \mu_{E_{i-0.5}}^{\approx}] \right\}, \\ \delta_{\Delta} u_{i+0.5} &= \rho_{\nu i+0.5}^{s+1} \delta u_{i+0.5}, \quad \delta_{i+0.5}^{s+1} = \sqrt{m_{i+0.5}^{s+1}} / (\sqrt{m_{i+0.5}^{s+1}} + \sqrt{m_{i+0.5}}). \end{aligned}$$

Здесь β – коэффициент адаптивного вязкого накопления. В выражении $f_{ui+0.5}^{\approx}$ и для членов $p(\rho^{s+1}, E)$ и $\delta(\rho^{s+1})$ в скоростной группе на неявном слое по времени ρ берётся на $(s+1)$ -й итерации, а u и E – на s -й итерации. Также в блоке вычисления энергии для f_{Ei}^{\approx} , $p(\rho^{s+1}, E)$ и $\delta(\rho^{s+1})$ на неявном слое по времени, ρ берётся на $s+1$ итерации.

Адаптивная вязкость с коэффициентами $\{\nu, \nu_E, \nu_I\}$ представлена в уравнениях (2.1)–(2.4) в узловых массовых потоках $\mu_{\omega} = u_{\omega} \rho_{\omega} - (\nu \cdot \text{GRAD} \rho)_{\omega}$, где ρ_{ω} – узловая аппроксимация плотности, как добавка к переносимой внутренней энергии в узлах $\mu_{E\omega} = (\rho \varepsilon \vec{u})_{\omega} - (\nu_E \cdot \text{GRAD} E)_{\omega}$ и как добавка к давлению $P_{\Omega} - (\nu_I \text{DIV}(\rho_{\nu}^{s+1} \vec{u}))$. Эти вязкости пропорциональны $\{\nu, \nu_E, \nu_I\}$, берутся на неявном слое по времени \hat{t} , в то время, как другие слагаемые берутся с симметричной по времени аппроксимацией с весом 0.5.

Коэффициенты вязкой диффузии выбираются следующим образом:

$$\left(\frac{\nu}{h}\right)_\omega = \beta_\omega \frac{h_\omega}{\tau}, \quad \left(\frac{\nu_E}{h}\right)_\omega = \beta_{E\omega} \frac{h_\omega}{\tau}, \quad \left(\frac{\nu_I}{h}\right)_\Omega = \beta_\Omega \frac{h_\Omega}{\tau},$$

где $\beta_\omega = I_{\nu\omega}^{\approx} q_{\nu\omega}^n k r_\omega$, $\beta_\Omega = I_{\nu\Omega}^{\approx} q_{\nu\Omega}^n k r_\Omega$.

Здесь числа Куранта в узлах и ячейках введены как $k r_\omega = \frac{|u_\omega| + \varepsilon}{2} \frac{\tau}{h_\omega}$, $k r_\Omega = \frac{\|u_\Omega^s\| + \varepsilon}{2} \frac{\tau}{h_\Omega}$; ε – малая добавка к числу Куранта, существенная на близком к нулю скоростном фоне; u_Ω^s – ячеечная интерполяция скорости на известной s -й итерации. Понимая под вязким накоплением β в схеме величину $\{\beta_\omega, \beta_{E\omega}, \beta_\Omega\}$, а под коэффициентом вязкости ν – одну из величин $\{\nu, \nu_E, \nu_I\}$ и $I^{\approx} = \{I_\omega^{\approx}, I_{E\omega}^{\approx}, I_\Omega^{\approx}\}$, кратко можно записать так:

$$\frac{\nu}{h} = \beta \frac{h}{\tau}, \quad \beta = l^{\approx} q^n k r, \quad k r = \frac{|u| + \varepsilon}{2} \frac{\tau}{h}, \quad q > 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

В коэффициенты адаптивного вязкого накопления β входит шаблонный сеточный функционал I^{\approx} , равный 1 при наличии искусственной вязкости или 0 при отсутствии её, в зависимости от критерия монотонизации плотности ρ , внутренней энергии E и импульса $I = \rho_\nu u$ в соответствующих узлах ω и ячейках Ω .

При начальном локальном включении искусственной вязкости (из-за возникающей немонотонности) полагается $I^{\approx} = 1$, $n = 1$, что соответствует «вязкой» аппроксимации соответствующего процесса переноса. Далее, локально, вязкое накопление β может увеличиваться с возрастанием ν . Заметим, что величины h , β , I^{\approx} , n , $k r$ имеют пространственно-локальный смысл, в то время как величины q и значения лимитеров $\beta_0 = \{\beta_{\omega 0}, \beta_{E\omega 0}, \beta_{\Omega 0}\} (\beta < \beta_0)$ для плотности, внутренней энергии и импульса являются глобальными по всей сетке атрибутами задачи.

5. Об устройстве итерационного ПКРС алгоритма

В используемом итерационном алгоритме для вычисления приращений физических величин на неявном слое по времени, помимо нестационарных членов, в уравнениях (2.1) – (2.3) на неявной $(s + 1)$ -й итерации берутся только члены, пропорциональные вязкостям $\{\nu, \nu_E, \nu_I\}$. Поэтому сходимость итерационного алгоритма определяется числами Куранта $k r$, связанными с его явной итерационной частью. Корректность коэффициентов A , B , C в отдельных прогонках для приращений $\delta \rho$, $\delta_\Delta u$, δE определяется вязкими накоплениями $\{\beta_\omega, \beta_{E\omega}, \beta_\Omega\}$. Таким образом, на каждой s -й итерации алгоритм состоит из трех зависимых друг от друга групп. Дополнительно для каждой группы работают специальные блоки для монотонизации (сглаживания) решения. В каждой из групп должны выполняться необходимые условия неотрицательности ($A \geq 0$, $B \geq 0$, $C > 0$) и диагонального преобладания ($C - A - B > 0$) коэффициентов прогонки.

Перед начальной итерацией ($s = 0$) локально по сетке устанавливаются $l^{\approx} \equiv 0$, $k \equiv 1$. Здесь управляющий параметр $k = \{k_{\nu\omega}, k_{\nu E\omega}, k_{\nu\Omega}\}$ локально в соответствующем узле или ячейке может принимать три значения:

- 1) $k = 1$ – изменение соответствующего β разрешено;
- 2) $k = 0$ – возможно только уменьшать β ;
- 3) $k = -1$ – доступно только для чтения.

Перед последующими итерациями ($s > 0$), если локально $k \geq 0$, то устанавливается соответствующие $l^{\approx} \equiv 0$, $k \equiv 1$. Иначе (при $k = -1$) соответствующие величины l^{\approx} и β не изменяются.

Блок-схема s -й итерации состоит из групп:

$(\langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_\rho - \text{накопитель} \rangle), \langle \beta_{\rho u} - \text{корректор} \rangle,$

$((\langle u^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_{\rho u} - \text{накопитель} \rangle), (E^{s+1} - \text{расчет}), \langle \beta_E - \text{накопитель} \rangle).$

$\{ \langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle: \text{вычисление плотности } \rho \text{ на } (s+1)\text{-м слое} \}.$

$\{ \langle \beta_\rho - \text{накопитель} \rangle: \text{формируется адаптивное вязкое накопление } \beta_\omega, \text{ не превышающее лимитера } \beta_{\rho 0}, \text{ и управляющим параметром } k_{\nu\omega} \text{ при } \beta_\omega = \beta_{\rho 0} \text{ (с повторяющимися } \langle \rho^{s+1} - \text{расчетами} \rangle), \text{ так что в результате отсутствует немонотонность в профиле } \rho^{s+1} \}.$

$\{ \langle \beta_{\rho u} - \text{корректор} \rangle:$

<1. Обеспечивает выполнение диагонального преобладания $D_{ui+0.5} = C_{ui+0.5} - A_{ui+0.5} - B_{ui+0.5} > 0$ в узлах ω с возможным пропорциональным уменьшением шага по времени τ и всех вязких накоплений β . При уменьшении шага по времени в узлах ω , где было нарушено условие $D_{ui+0.5} > 0$ устанавливается $k_{\nu\omega} = -1$, величинам ρ, u и E на s -й итерации присваиваются значения с явного t слоя и выполняется возврат на $\langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle;$

<2. Если в ячейках $(\Omega(\omega^0))$ вокруг узлов ω^0 было $l^\approx = 0$, то в них выполняется $l^\approx \equiv 1, n_{\nu\Omega} = 0$;

<3. За счет выбора вязких накоплений β_ω и β_Ω обеспечивается неотрицательность прогоночных коэффициентов $A_{ui+0.5} \geq 0, B_{ui+0.5} \geq 0$ с возможным локальным достижением лимитеров $(\beta_\Omega = \beta_{\rho 0}, k_{\nu u\Omega} = 0)$ и пропорциональным уменьшением шага по времени τ с вязкими накоплениями $\{\beta_\omega, \beta_{E\omega}\}$. В узлах ω , значения β_ω в которых приводили к отрицательным, $A_u < 0, B_u < 0$ и устанавливается $k_{\nu\omega} = -1$. При уменьшении шага по времени τ величины ρ, u, E на s -й итерации присваивают значения с явного t - слоя и выполняется возврат $\langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle$

Итерационные блоки $(\langle u^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_u - \text{накопитель} \rangle)$ и $(\langle E^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_E - \text{накопитель} \rangle)$ с монотонизацией по импульсу $I = \rho_\nu u$ и по внутренней энергии E с формированием вязких накоплений β_Ω и $\beta_{E\Omega}$ аналогичны описанному выше блоку для плотности $(\langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle, \langle \beta_\rho - \text{накопитель} \rangle)$. Если по достижению максимально возможного числа итераций n_{smax} наблюдается итерационная расходимость, то происходит пропорциональное уменьшение шага по времени τ и соответственно, всех вязких накоплений β . Полагается $k = -1$, величинам ρ, u, E на известной s -й итерации присваиваются значения с явного t -слоя и выполняется возврат на $\langle \rho^{s+1} - \text{расчет} \rangle$. Если критерий сходимости $\{|\delta\rho| < \varepsilon_1|\rho^s| + \varepsilon_2, |\delta I| < \varepsilon_1|\rho^s| + \varepsilon_2, |\delta E| < \varepsilon_1|\rho^s| + \varepsilon_2\}$ выполняется, то итерации прекращаются и полагается $\{\hat{\rho} = \rho^{s+1}, \hat{I} = I^{s+1}, \hat{E} = E^{s+1}\}$.

6. Заключение

Проведен теоретический анализ с разработанным применительно к ПКРС с профилированными по пространству временными весами, связанными с переменными массами движущихся узловых частиц среды классом дивергентных адаптивных вязкостей. Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных с использованием операторного подхода и конструированием регуляризирующих потоков массы, импульса и внутренней энергии, не нарушающих свойств полной консервативности, построено семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами, связанными с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Предложенный алгоритм показал существенное улучшение качества численного решения задачи Эйнфельда. Эффективное сохранение

баланса внутренней энергии в данном типе дивергентных разностных схем обеспечивается отсутствием постоянно действующих источников разностного происхождения, производящих «вычислительную» энтропию (в т. ч. на сингулярных особенностях решения).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00578).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М., Наука, 1980.
2. Попов Ю. П., Самарский А. А. Полностью консервативные разностные схемы // ЖВМиМФ. 1969. Т. 9, № 4, С. 953-958.
3. Кузьмин А. В., Макаров В. Л. Об одном алгоритме построения полностью консервативных разностных схем // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22, № 1. С. 123-132.
4. Кузьмин А. В., Макаров В. Л., Меладзе Г. В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнения газовой динамики в переменных Эйлера // ЖВМиМФ. 1980. Т. 20, № 1, С. 171-181.
5. Головизнин В. М., Краюшкин И. Е., Рязанов М. А., Самарский А. А. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными скоростями // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша АН СССР. 1983. № 105. С. 1-32.
6. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // ЖВМиМФ, 1987. Т. 27. № 5. С. 779-784.
7. Колдоба А. В., Кузнецова О. А., Повещенко Ю. А., Попов Ю. П. Об одном подходе к расчету задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша АН СССР. 1985. № 57.
8. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша, АН СССР. 1982. № 160.
9. Самарский А. А., Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Тишкин В. Ф., Фаворский А. П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: Критерий, 1996. 275 с.
10. Колдоба А. В., Повещенко Ю. А., Гасилова И. В., Дорофеева Е. Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теорий упругости // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 86-96.
11. Повещенко Ю. А., Подрыга В. О., Шарова Ю. С. Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша РАН. 2018. № 160. 21 с. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2018-160>

12. Попов Ю. В., Фрязинов И. В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М., Красанд, 2014. 288 с.
13. Повешенко Ю. А., Ладонкина М. Е, Подрыга В. О., Рагимли О. Р., Шарова Ю. С. Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией // Препринты ИПМ им М. В. Келдыша РАН. 2019. № 14. 23 с. DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-14>
14. Rahimly O., Podryga V., Poveshchenko Y., Rahimly P., Sharova Y. Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution // Large-scale scientific computing. / ed. by I. Lirkov, S. Margenov. Springer, 2020. pp. 618–625. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-41032-2>

*Поступила 14.09.2021; доработана после рецензирования 12.11.2021;
принята к публикации 16.11.2021*

Информация об авторах:

Ладонкина Марина Евгеньевна, старший научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

Повешенко Юрий Андреевич, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

Рагимли Орхан Рагимович, аспирант, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7257-1660>, orxan@reximli.info

Чжан Хаочэнь, студент, Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет) (141701, Россия, г. Долгопрудный, Институтский пер., д. 9.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1378-1777>, chzhan.h@phystech.edu

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 65M22

Theoretical Analysis of Fully Conservative Difference Schemes with Adaptive Viscosity

M. E. Ladonkina^{1, 2}, Y. A. Poveshenko^{1, 2}, O. R. Ragimli¹, H. Zhang^{1, 2}

¹ *Keldysh Institute of Applied Mathematics (Moscow, Russian Federation)*

² *Moscow Institute of Physics and Technology (Dolgoprudny, Russian Federation)*

Abstract. For the equations of gas dynamics in Eulerian variables, a family of two-layer in time completely conservative difference schemes with space-profiled time weights is constructed. Considerable attention is paid to the methods of constructing regularized flows of mass, momentum, and internal energy that do not violate the properties of complete conservatism of difference schemes of this class, to the analysis of their amplitudes and the possibility of their use on non-uniform grids. Effective preservation of the balance of internal energy in this type of divergent difference schemes is ensured by the absence of constantly operating sources of difference origin that produce "computational" entropy (including those based on singular features of the solution). The developed schemes can be easily generalized in order to calculate high-temperature flows in media that are nonequilibrium in temperature (for example, in a plasma with a difference in the temperatures of the electronic and ionic components), when, with the set of variables necessary for describing the flow, it is not enough to equalize the total energy balance.

Key Words: completely conservative difference schemes, support operator method, gas dynamics

For citation: M. E. Ladonkina, Y. A. Poveshenko, O. R. Ragimli, H. Zhang. Theoretical Analysis of Fully Conservative Difference Schemes with Adaptive Viscosity. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:4(2021), 412–423. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.412-423>

REFERENCES

1. A. A. Samarskii, Y. P. Popov, *Difference methods for solving problems of gas dynamics.*, Nauka Publ., Moscow, 2016 (In Russ.), 424 p.
2. Y. P. Popov, A. A. Samarskii, "Completely Conservative Difference Schemes", *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **9**:4 (1969), 953–958 (In Russ.)
3. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, "On one construction algorithm completely conservative difference schemes", *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **22**:4 (1982), 123–132 (In Russ.)
4. A. V. Kuzmin, V. L. Makarov, G. V. Meladze, "On a completely conservative difference scheme for the equation of gas dynamics in Euler variables", *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20**:1 (1980), 171–181 (In Russ.)
5. V. M. Goloviznin, I. V. Krayushkin, M. A. Ryazanov, A. A. Samarskii, "Two-dimensional completely conservative difference schemes of gas dynamics with separated velocities", *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Academy of Sciences of SSSR*, **105** (1983), 1–32 (In Russ.)

6. A. V. Koldoba, Y. A. Poveschenko, Y. P. Popov, “Two-layer completely conservative difference schemes for gas dynamics equations in Euler variables”, *Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **27**:5 (1987), 779–784 (In Russ.)
7. A. V. Koldoba, O. A. Kuznetsov, Y. A. Poveschenko, “On one approach to the calculation of gas dynamics problems with a variable quasiparticle mass”, *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Academy of Sciences of SSSR*, 1985, № 57 (In Russ.)
8. A. V. Koldoba, Y. A. Poveschenko, “Completely conservative difference schemes for equations of gas dynamics in the presence of mass sources”, *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Academy of Sciences of SSSR*, 1982, № 160 (In Russ.)
9. A. A. Samarskiy, A. V. Koldoba, Y. A. Poveschenko, V. F. Tishkin, A. P. Favorskiy, *Difference schemes on irregular grids*, Kriteriy Publ., Minsk, 1996 (In Russ.), 275 p.
10. A. V. Koldoba, Y. A. Poveschenko, I. V. Gasilova, E. Y. Dorofeeva, “Difference schemes of the support operator method for equations of elasticity theories”, *Math. Modeling*, **24**:12 (2012), 86–96 (In Russ.)
11. Y. A. Poveschenko, V. O. Podryga, Y. S. Sharova, “Integrally-consistent methods for calculating self-gravitating and magnetohydrodynamic phenomena”, *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences*, 2018, № 160 (In Russ.)
12. Y. V. Popov, I. V. Fryazinov, *Method of adaptive artificial viscosity numerical solution of equations of gas dynamics*, Krasand Publ., Moscow, 2014 (In Russ.), 275 p.
13. Y. A. Poveschenko, M. E. Ladonkin, V. O. Podryga, O. R. Rahimli, Y. S. Sharova, “On one two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Euler variables with adaptive regularization”, *Preprints of the Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences*, 2019, № 14, 23 (In Russ.) DOI: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-14>
14. O. Rahimli, V. Podryga, Y. Poveschenko, P. Rahimli, Y. Sharova, *Two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in eulerian variables with adaptive regularization of solution*, Springer, 2020

Submitted 14.09.2021; Revised 12.11.2021; Accepted 16.11.2021

Information about the authors:

Marina E. Ladonkina, Senior Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7596-1672>, ladonkina@imamod.ru

Yuri A. Poveshenko, Leading Researcher, Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya sq., Moscow 125047, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9211-9057>, hecon@mail.ru

Orkhan R. Ragimli, Postgraduate Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy per., Dolgoprudny 141701, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7257-1660>, orxan@reximli.info

Haochen Zhang, Student, Moscow Institute of Physics and Technology (9 Institutskiy per., Dolgoprudny 141701, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1378-1777>, chzhan.h@phystech.edu

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.424-432

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.633.6;536.21;538.945

Численный анализ нагрева токовым импульсом плёнки нитрида ниобия в её продольном сечении

Н. Д. Кузьмичев, Е. В. Данилова, М. А. Васютин

ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. Выполнен численный расчет эволюции распределения температуры в продольном сечении плёнки нитрида ниобия при её нагреве импульсом электрического тока. Математическое моделирование осуществлялось на основе двумерной начально-краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности. В начально-краевой задаче учитывалось, что токовые и потенциальные контакты к плёнке служат одновременно и контактами для теплоотвода. Рассматривался случай для третьей слева и первой справа начально-краевой задачи. Анализ численного решения показал, что эффективный теплоотвод от плёнки могут обеспечить токоподводящие и потенциальные прижимные контакты, изготовленные, например, из бериллиевой бронзы. Это позволяет проводить исследование вольт-амперных характеристик сверхпроводящих плёнок вблизи критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние токами, плотностью близкими к критическим значениям, без значительного её нагрева.

Ключевые слова: неоднородное двумерное уравнение теплопроводности, численный анализ, эволюция распределения температуры, 1-я начально-краевая задача, 3-я начально-краевая задача, плёнка нитрида ниобия, токовый контакт, потенциальный контакт, импульсный нагрев током

Для цитирования: Кузьмичев Н. Д., Данилова Е. В., Васютин М. А. Численный анализ нагрева токовым импульсом плёнки нитрида ниобия в её продольном сечении // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 424–432. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.424-432>

1. Введение

Нитрид ниобия — бинарное неорганическое соединение металла ниобия и азота с формулой NbN, серые или чёрные кристаллы, не растворимые в воде. Обычно производится и хранится в виде порошка. Устойчив при нагреве в концентрированных соляной, серной кислотах. Окисление нитрида ниобия на воздухе происходит при 500–800 °С с образованием Nb_2O_5 . Температура плавления – 2 300 °С. На сегодняшний день наиболее широкое применение получили нитриды переходных металлов, нанесенные в виде тонких плёнок. Они используются в качестве твердых покрытий, коррозионно-абразивно- и износостойких слоёв, декоративных покрытий. Плёнки нитридов переходных металлов активно применяются в микроэлектронике, поскольку обладают изоляционными, полупроводниковыми, сверхпроводящими, оптическими и рядом других важных свойств.

Нитрид ниобия используется для изготовления сверхпроводниковых болометров, т. к. характерная для него температура перехода к сверхпроводимости достаточно велика



(14–17 К), чтобы можно было использовать для охлаждения жидкий водород. Такие приборы являются особо чувствительными по сравнению с другими известными тепловыми приемниками, а также обладают большей устойчивостью при работе с низкими температурами за счет свойств сверхпроводниковых материалов, таких как нитрид ниобия. Современный класс приборов *hot-electron bolometer* (НЕВ) реализует эффект электронного разогрева в сверхпроводниковой плёнке нитрида ниобия, находящейся в резистивном состоянии под воздействием электромагнитного излучения [1].

При исследовании вольт-амперных характеристик (ВАХ) плёнок NbN с целью определения её сверхпроводящих характеристик необходимо пропускать через плёнку ток, близкие к критическим. В результате этого исследуемая плёнка переходит в резистивное состояние, и выделяется значительное количество теплоты. В связи с этим требуется достаточный теплоотвод, который обеспечит чистоту эксперимента. Поэтому математическое моделирование теплоотдачи плёнок нитрида ниобия при пропускании через них тока высокой плотности является актуальной и практически важной задачей. В нашем более раннем исследовании была решена одномерная задача теплопроводности [2].

В настоящей работе выполнено математическое моделирование эволюции распределения температуры внутри плёнки нитрида ниобия на основе двумерного уравнения теплопроводности с учетом расположения теплоотводящих контактов на поверхности плёнки.

2. Математическая постановка задачи эволюции распределения температуры в продольном сечении плёнки

Математическое моделирование задачи эволюции распределения температуры в сечении плёнки осуществлялось на основе двумерного неоднородного уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t), \quad (2.1)$$

где $a^2 = \lambda / c_p \rho = 4.3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2 / \text{ s}$ – коэффициент температуропроводности кварцевой подложки и плёнки NbN (величины a^2 для кварца и NbN приблизительно равны); $c_p = 17 \text{ J} / (\text{ kg} \cdot \text{ K})$ удельная теплоёмкость подложки при 20 К [4]; $\rho = 2.2 \text{ g} / \text{ cm}^3$ – плотность подложки; $\lambda = 0.16 \text{ W} / (\text{ mK})$ – теплопроводность подложки при 20 К; u – температура плёнки; t – время; x – координата с началом на внешней от подложки плоскости плёнки, направленная перпендикулярно в сторону подложки, а y – координата – лежащая в плоскости пленки и направлена от одного контакта к другому контакту (Рис. 2.1).

Функция $f(x, y, t)$ имеет вид

$$f(x, y, t) = \frac{P(x, y, t)}{(c_{NbN} \cdot \rho_{NbN})}, \quad (2.2)$$

где $P(x, y, t)$ – объёмная плотность мощности источника тепла (плёнки), $c_{NbN} = 17 \text{ J} / (\text{ kg} \cdot \text{ K})$ – удельная теплоёмкость NbN плёнки при $T = 14 \text{ K}$ (сумма решёточной и электронной теплоёмкости), $\rho_{NbN} = 8.4 \text{ g} / \text{ cm}^3$ – плотность плёнки.

Учитывая, что сила тока линейно возрастает за время t_0 от 0 до $I_{max} = 1.12 \text{ A}$ (в нашем случае $t_0 = 0.25 \text{ ms}$), величина $P(x, y, t)$ определяется законом Джоуля-Ленца:

$$P(x, y, t) = P(t) = \begin{cases} \rho \cdot j_0^2 \cdot t^2, & \text{если } x \leq d, \ t \leq t_0; \\ 0, & \text{если } x > d, \ t > t_0. \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь $\rho \approx 440 \ \mu\Omega \cdot \text{cm}$ – удельное сопротивление плёнки в нормальном состоянии; $j_0 = I_{\max}/(d \cdot b \cdot t_0)$; $d = 400 \ \text{nm}$ толщина; $b = 9 \ \text{mm}$ ширина плёнки.

Начальным условием будет функция $u(x, y, 0) = T_0$ ($T_0 = 14 \ \text{K}$), которая определяет начальную температуру системы контакты-плёнка-подложка-термостат.

На левом конце задаем задачу третьего рода в силу того, что левая граница плёнки посредством тепловых контактов (токовых и потенциальных) находится в теплообмене со средой по закону Ньютона, имеющей температуру $T_0 = 14 \ \text{K}$ (рис. 2.1):

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{0,y,t} = H(y) \cdot [u(0, y, t) - T_0].$$

Коэффициент теплообмена H зависит от y , т. е. $H = H(y)$:

$$H(y) = \begin{cases} 0, & |y| \leq \frac{a}{2}; \\ H_0, & \frac{a}{2} < |y| \leq \frac{a}{2} + b; \\ 0, & \frac{a}{2} + b < |y| \leq \frac{3 \cdot a}{2} + b; \\ H_0, & \frac{3 \cdot a}{2} + b < |y|. \end{cases}$$

В межконтактной области $H = 0$ и в области контакта $H = H_0 = 50 \ \mu\text{m}^{-1}$.

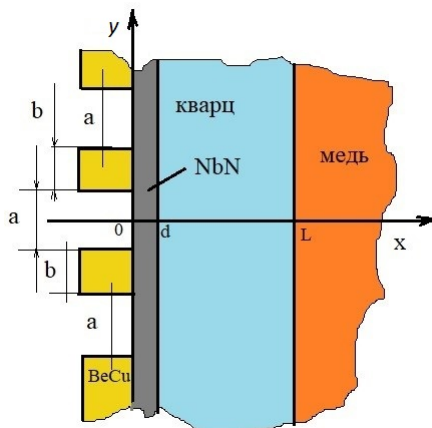


Рис. 2.1. Схема системы плёнка-подложка-термостат
Fig 2.1. Layout of the membrane-substrate-thermostat system

На правом конце будут граничные условия первого рода. В итоге начально-краевые условия для уравнения (2.1) примут вид:

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = T_0; \\ u'_x(0, y, t) = H(y)[u(0, y, t) - T_0]; \\ u(L, y, t) = T_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Решением уравнения (2.1) является распределение температуры в продольном сечении плёнки по координатам x и y в зависимости от времени t в системе контакты-плёнка-подложка-термостат.

3. Аппроксимация и численное решение двумерного неоднородного уравнения теплопроводности

Для аппроксимации дифференциального уравнения (2.1) конечно-разностными соотношениями введем пространственно – временную сетку с координатами $x_i = (i - 1) \cdot h_x$, $y_j = (j - 1) \cdot h_y$, $t_n = n \cdot \tau$, где h_x , h_y – шаги сетки по координатам x , y соответственно; ($0 < x < 0.4$ мкм, $0 < y < 9000$ мкм); τ – шаг по времени; $i = 1, 2, \dots, N_x$; $j = 1, 2, \dots, N_y$; $n = 0, 1, 2, \dots, K$.

Воспользуемся локальной одномерной схемой А. А. Самарского [3; 5], которая является абсолютно устойчивой и обладает свойством суммарной аппроксимации, имеющей первый порядок точности по времени и второй – по пространственным переменным: $O(\tau + h_x^2 + h_y^2)$. Получим

$$\rho \cdot c \cdot \frac{u_{i,j}^{n+1/2} - u_{i,j}^n}{\tau} = \lambda \cdot \frac{u_{i+1,j}^{n+1/2} - 2 \cdot u_{i,j}^{n+1/2} + u_{i-1,j}^{n+1/2}}{h_x^2} + f_{i,j}^{n+1/2}, \quad (3.1)$$

$$\rho \cdot c \cdot \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^{n+1/2}}{\tau} = \lambda \cdot \frac{u_{i,j+1}^{n+1} - 2 \cdot u_{i,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1}}{h_y^2} + f_{i,j}^{n+1}. \quad (3.2)$$

Аппроксимируя начально-краевые условия (2.4), получим

$$\begin{cases} u_{i,j}^0 = T_0; \\ \frac{u_{1,j}^n - u_{0,j}^n}{h_x} = H_j \cdot (u_{0,j}^n - T_0); \\ u_{N_x,j}^n = T_0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что погрешность аппроксимации левого граничного условия имеет 1-й порядок точности $O(h_x)$.

Решение уравнений (3.1)–(3.3) проводилось в два этапа. Первый этап – проводим дискретизацию только в направлении оси x на промежуточном временном шаге, решаем систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) (3.1). В уравнении (3.1) определяя значение $u_{N_x,j}^{n+1/2}$ из правого граничного условия находим поле температур $u_{i,j}^{n+1/2}$ на промежуточном временном слое. Второй этап – то же самое в направлении оси y , но уже на целом шаге по времени (3.2).

Каждое СЛАУ сводится к стандартному трехдиагональному виду и решается методом прогонки [6; 7].

В интегрированной среде разработки Microsoft Visual Studio был написан код программы, которая решает двумерное неоднородное уравнение теплопроводности на языке C++. Для расчета были взяты следующие значения параметров $N_x = 91$, $N_y = 401$, значение индекса K зависит от условий задачи. Написанная программа выдает результат в виде матрицы 91×401 элементов с шагом по времени $\tau = 100 \mu s$.

Результаты расчета представлены на Рис. 3.1, а-б и Рис. 3.2, а-б. Характерной особенностью этих рисунков, изображающих эволюцию распределения температуры, является неоднородность в виде «холодной тени контактов», которая практически исчезает спустя 5 ms . Импульс возрастает линейно в течении 300 μs . На Рис. 3.1, а показано распределение температуры внутри поперечного сечения пленки в момент времени 100 μs после начала импульса и на Рис. 3.1, б в конце импульса (300 μs).

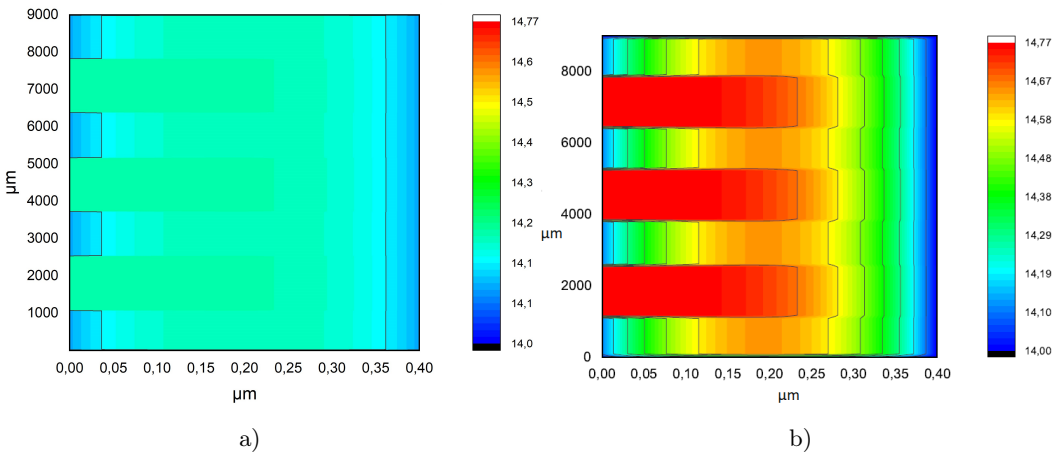


Рис. 3.1. Распределение тепла внутри пленки при $t = 100 \mu s$ (а) и $t = 300 \mu s$ (б)

Fig 3.1. Heat distribution inside the membrane at $t = 100 \mu s$ (a) and $t = 300 \mu s$ (b)

Из полученных результатов, приведенных на Рис. 3.1, а-б видно, что максимальная температура нагрева находится внутри плёнки и наибольшее ее значение достигается в конце импульса.

После прекращения подачи импульса можно наблюдать незначительное изменение относительно конечного момента подачи (Рис. 3.2, а). Далее уже на 3-й ms можно увидеть значительное охлаждение плёнки до 14.19 K (Рис. 3.2, б).

4. Обсуждение полученных результатов

Численный анализ распределения температуры внутри плёнки нитрида ниобия на основе двумерного уравнения теплопроводности показал, что импульс тока высокой плотности нагревает плёнку до малых температур, при которых незначительно изменяются сверхпроводящие свойства материала, например, критическая плотность тока. Это обеспечивается токовыми и потенциальными контактами благодаря хорошему теплоотводу. Из представленных на Рис. 3.1–3.2 результатов видно, что максимальная

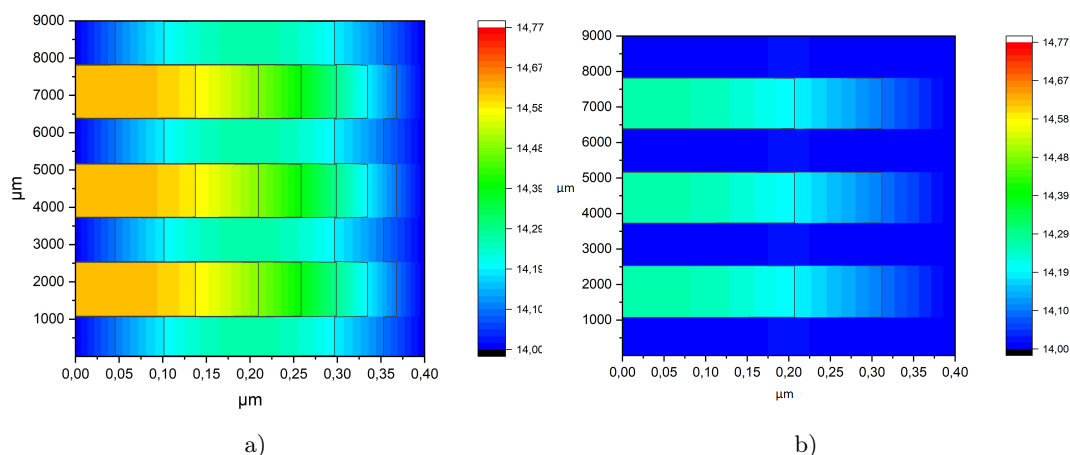


Рис. 3.2. Распределение тепла внутри пленки при $t = 400 \mu s$ (a) и $t = 3 ms$ (b)
Fig 3.2. Heat distribution inside the membrane at $t = 400 \mu s$ (a) and $t = 3 ms$ (b)

температура нагрева плёнки увеличивается незначительно на 0,8 К. В момент подачи импульса вся система имеет температуру окружающей среды, а именно 14 К. Линейный рост импульса тока способствует нагреванию плёнки нитрида ниобия до температуры 14.77 К. Для теплопроводящих контактов был выбран материал бериллиевая бронза, что было описано в предыдущей работе [2].

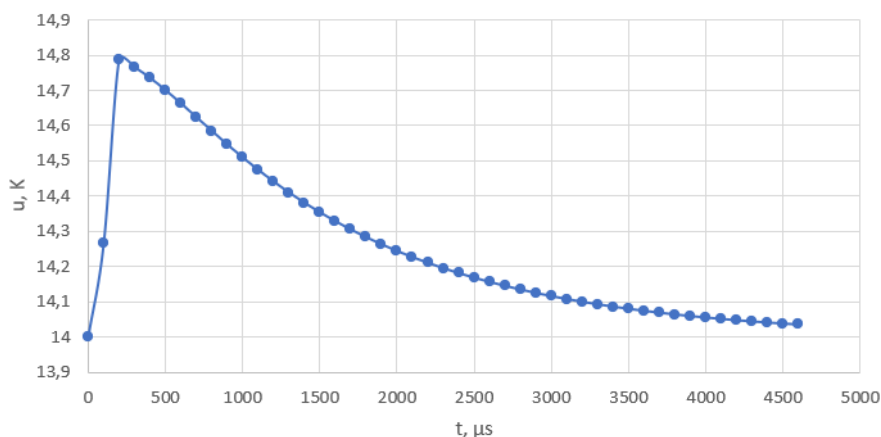


Рис. 4.1. Изменение максимальной температуры пленки NbN от времени
Fig 4.1. Change in the maximum temperature of the NbN membrane from time to time

На Рис. 4.1 представлено изменение максимальной температуры внутри плёнки нитрида ниобия в течении $20 ms$. Из графика видно, что своего максимума температура достигает, как и следовало ожидать, в момент завершения подачи импульса, а именно 14,8 К на $300 \mu s$.

5. Заключение

Из полученных результатов можно сделать вывод, что численный анализ процесса теплообмена плёнки нитрида ниобия при нагревании импульсом тока на основе двумерного уравнения теплопроводности уточняет результаты предыдущей работы [2] и дает более правильное представление об эволюции неоднородного распределения температуры в продольном сечении плёнки. Таким образом, применение прижимных контактов из бериллиевой бронзы позволяет проводить исследование ВАХ сверхпроводников с токами высокой плотности ($10^4 - 10^5 \text{ A/cm}^2$) без значительного локального нагрева образцов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shurakov A., Lobanov Y., Goltsman G. Superconducting hot-electron bolometer: from the discovery of hot-electron phenomena to practical applications. Superconductor Science and Technology. 2016. Vol. 19, No. 2. DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-2048/29/2/023001>
2. Кузьмичев Н. Д., Васютин М. А., Данилова Е. В., Лапшина Е. А. Математическое моделирование процесса теплоотдачи пленки нитрида ниобия при импульсном нагреве током // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 82-90. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.82-90>
3. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики: учеб. пособие. - 6-е изд., испр. и доп. - М.: Изд-во Моск. ун-та, 1999. 799 с.
4. Таблицы физических величин. Справочник. / под ред. акад. И.К. Кикоина. М., Атомиздат. 1976. 1008 с.
5. Кузнецов Г. В., Шеремет М. А. Разностные методы решения задач теплопроводности: учеб. пособие. Томск: Изд-во ТПУ, 2007. – 172 с.
6. Формалев В.Ф., Ревизников Д.Л. Численные методы. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. 406 с.
7. Турчак Л. И., Плотников П. В. Основы численных методов. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. 304 с.

*Поступила 29.09.2021; доработана после рецензирования 13.10.2021
принята к публикации 16.11.2021*

Информация об авторах:

Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва», (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

Данилова Екатерина Витальевна, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва», (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0554-3795>, danilova29-94@mail.ru

Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва», (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 35K200

Numerical analysis of heating by a current pulse of a niobium nitride membrane in its longitudinal section

N. D. Kuzmichev, E. V. Danilova, M. A. Vasyutin

National Research Ogarev Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. A numerical calculation of the evolution of the temperature distribution in the longitudinal section of a niobium nitride membrane when it is heated by an electric current pulse is performed. Mathematical modeling was carried out on the basis of a two-dimensional initial-boundary value problem for an inhomogeneous heat equation. In the initial boundary value problem, it was taken into account that current and potential contacts to the membrane serve simultaneously as contacts for heat removal. The case was considered for the third from the left and the first from the right initial-boundary value problem. Analysis of the numerical solution showed that effective heat removal from the membrane can be provided by current-carrying and potential clamping contacts made, for example, of beryllium bronze. This makes it possible to study the current-voltage characteristics of superconducting membranes near the critical temperature of the transition to the superconducting state by currents close to the critical density without significant heating.

Key Words: inhomogeneous two-dimensional heat conduction equation, numerical analysis, evolution of temperature distribution, 1st and 3rd initial-boundary value problems, cross section, niobium nitride membrane, current contact, potential contact, pulsed heating by current

For citation: N. D. Kuzmichev, E. V. Danilova, M. A. Vasyutin. Numerical analysis of heating by a current pulse of a niobium nitride membrane in its longitudinal section. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:4(2021), 424–432. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.424-432>

REFERENCES

1. A. Shurakov, Y. Lobanov, G. Goltsman, “Superconducting hot-electron bolometer: from the discovery of hot-electron phenomena to practical applications”, *Superconductor Science and Technology*, **29**:2 (2016) (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1088/0953-2048/29/2/023001>

2. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, E. V. Danilova, E. A. Lapshina, “Mathematical modeling of heat transfer in the film-substrate-thermostat system during heating of an electrically conductive film by a high-density pulse current”, *Zhurnal SVMO*, **23**:1 (2021), 82–90 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.82-90>
3. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskij, *Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical physics]*, Moscow University Publ., 1999 (In Russ.), 799 p.
4. *Tablicy fizicheskikh velichin. Spravochnik [Tables of physical quantities. Reference book]*, ed. I. K. Kikoina, Atomizdat Publ., 1976 (In Russ.), 1008 p.
5. G. V. Kuznetsov, M. A. Sheremet, *Raznostnye metody resheniya zadach teploprovodnosti [Difference Methods for Solving Heat Conduction Problems]*, Tomsk State University Publ., Tomsk, 2007 (In Russ.), 172 p.
6. V. F. Formalev, D. L. Reviznikov, *Chislennyye metody [Numerical Methods]*, Fizmatlit Publ., 2006 (In Russ.), 406 p.
7. L. I. Tyrchak, P. V. Plotnikov, *Osnovy chislennykh metodov [Numerical Basics]*, Fizmatlit Publ., 2005 (In Russ.), 304 p.

Submitted 29.09.2021; revised 13.10.2021; accepted 16.11.2021

Information about the author:

Nikolay D. Kuzmichev, Professor, Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), D. Sci. (Mathematics and Physics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

Ekaterina V. Danilova, Post-Graduate Student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0554-3795>, danilova29-94@mail.ru

Mikhael A. Vasyutin, Associate Professor, Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Mathematics and Physics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.433–443

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

Моделирование переключателей для CNOT-вентилей, основанных на взаимодействии между оптическими волноводами, с применением теории связанных волноводов

А. А. Лытаев, И. Ю. Попов

Национальный исследовательский университет ИТМО (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)

Аннотация. Данная работа посвящена моделированию взаимодействий в системе связанных плоских оптических волноводов, поддерживающих распространение двух направленных мод, с целью её использования в качестве переключателя для CNOT-вентилей волноводной квантовой подобной оптической модели вычислений. Для решения системы уравнений Максвелла, описывающих данную систему, используется теория связанных волноводов. Полученная система дифференциальных уравнений на амплитудные коэффициенты упрощается с использованием асимптотического анализа до уравнений, имеющих аналитическое решение. Полученное решение используется для реализации быстрого алгоритма подбора параметров системы связанных оптических волноводов, при которых обмен энергии осуществляется так, чтобы система корректно выполняла функцию переключателя. Помимо этого, производится численное решение более полной системы уравнений, учитывающей взаимодействие между модами различных порядков с целью оценки влияния этого явления на вычислительную точность этого устройства. Было установлено, что подобное устройство может быть изготовлено в размере, не превышающем 1 мм при вычислительной ошибке, не превышающей 3 %.

Ключевые слова: оптические квантовые вычисления, CNOT-вентиль, уравнения Максвелла, оптические волноводы, теория связанных волноводов, метод конечных разностей

Для цитирования: Лытаев А. А., Попов И. Ю. Моделирование переключателей для CNOT-вентилей, основанных на взаимодействии между оптическими волноводами, с применением теории связанных волноводов // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 433–443. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.433–443>

1. Введение

Задача о создании квантового компьютера имеет достаточно важное значение. Достижение успеха в этой области позволят решить ряд вычислительных задач с экспоненциальным или квадратичным ускорением по времени по сравнению с классическим компьютером. Современная наука изучает множество возможностей создания квантового компьютера с помощью таких явлений как ионные ловушки [1], сверхпроводники [2], ЯМР [3] и т. д. Существенным препятствием является быстрота декогеренции, т. е. потери системой квантовых свойств, из-за взаимодействия с окружающей средой. Модель оптических квантовых вычислений представляет собой одно из возможных решений благодаря слабости взаимодействия между фотонами, что, однако, является и её недостатком, поскольку приводит к необходимости использования нелинейного взаимодействия между фотонами. В линейной модели оптических вычислений нелинейные эффекты достигаются за счёт применения постселекции после линейных элементов,



таких как фазовращатели, светоделители и поляризационные светоделители [4–5]. Однако двукубитные вентили, получаемые в такой модели вычислений либо являются вероятностными с вероятностью успеха, не превышающей $1/9$, либо требуют дополнительных бит анцилл для увеличения этой вероятности, что в обоих случаях приводит к слабой масштабируемости данной схемы. Альтернативный подход заключается в том, чтобы использовать нелинейное оптическое взаимодействие, такое как эффект Керра напрямую, что увеличивает вероятность правильного срабатывания вентиля, но ценой увеличения длины оптических путей из-за его слабого характера, что является потенциальным источником высоких вычислительных ошибок [6].

Данная работа посвящена развитию идей, изложенных в статье [7], где предлагается использовать в качестве квантового бита двумодовый плоский волновод, а также приведена возможная схема реализации операции CNOT, основанной на нелинейных эффектах. Модель плоского волновода является некоторым приближением более активно используемых на практике оптических волокон, демонстрируя общий характер происходящих в этой среде явлений. Преимуществом реализации квантовых битов с помощью двумодовых волноводов является увеличение интенсивности нелинейного оптического взаимодействия, используемого для вычислительных операций, благодаря более высокой концентрации излучения внутри волновода. Важной частью этой схемы является переключатель, основанный на значительном сближении двух волноводов, геометрические параметры которого определяют его поведение. Задачей данного исследования являлся подбор параметров данной системы, при котором она корректно выполняет функцию переключателя. В работе [7] были представлены результаты моделирования CNOT-вентиля с помощью метода распространения лучей, однако такой метод не подходит для подбора параметров направленного ответвителя, поскольку требует многократного исполнения довольно объёмного вычислительного алгоритма. В данной работе осуществляется моделирование системы из двух волноводов с помощью теории связанных волноводов, которая в некотором приближении позволяет получить выражения, аналитически описывающие обмен энергиями в системе.

Можно отметить, что идея кодирования кубитов модами применима не только в волноводах, но и в квантовых каналах в свободном пространстве, где используются моды гауссова пучка [8].

2. Волноводная модель оптических квантовых вычислений

Рассмотрим плоский оптический волновод поддерживающей распространение двух направленных поперечных мод. Используем его TE_0 моду для представления $|0\rangle$ состояния квантового бита, а TE_1 – для $|1\rangle$. Необходимое условие, которое накладывается на его параметры – полутолщину d , длину волны λ и коэффициенты преломления сердцевин n_{core} и оболочки n_{clad} :

$$\frac{\lambda}{4\sqrt{n_{core}^2 - n_{clad}^2}} < d < \frac{\lambda}{2\sqrt{n_{core}^2 - n_{clad}^2}}. \quad (2.1)$$

В этом случае постоянные распространения поперечных мод χ_i могут быть найдены как решения трансцендентных уравнений

$$TE_0 : tg(\chi_0 d) = \sqrt{(n_{core}^2 - n_{clad}^2) \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right)^2 \frac{d^2}{(\chi_0 d)^2} - 1}; \quad (2.2)$$

$$TE_1 : tg(\chi_1 d) = - \sqrt{\frac{1}{(n_{core}^2 - n_{clad}^2) \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{d^2}{(\chi_1 d)^2} - 1}}. \quad (2.3)$$

Для того чтобы сопоставить классическому электромагнитному излучению, распространяющемуся по волноводу, волновую функцию состояния квантового бита, можно использовать теорию квантовых лучей, описанную в работе [9], которая основана на построении аналогии между принципом наименьшего действия классической механики и принципом Ферма классической оптики. В этой аналогии механическое действие заменяется на длину оптического пути луча, вводятся операторы импульса и координаты, строится соответствующий гамильтониан, записывается соответствующее уравнение Шрёдингера, которое в параксиальном приближении имеет вид

$$\frac{\lambda^2}{8\pi^2 n_{clad}} \frac{\partial^2 \psi(x, z)}{\partial x^2} - n(x, z) \psi(x, z) = i \frac{\lambda}{2\pi} \frac{\partial \psi(x, z)}{\partial z}. \quad (2.4)$$

Пространственное распределение комплексной амплитуды электромагнитного поля ψ в данной аналогии называется волновой функцией, которая при соответствующей нормировке задаёт функцию состояния квантового бита, представленного с помощью рассматриваемого волновода. Эта функция является суперпозицией базисных состояний $|TE_0\rangle$ и $|TE_1\rangle$ [10]

$$|\psi\rangle = C_0 e^{-i\beta_0 z} |TE_0\rangle + C_1 \exp^{-i\beta_1 z} |TE_1\rangle. \quad (2.5)$$

Постоянные распространения β_i выражаются через постоянные распространения χ_i через соотношения

$$\beta_i^2 = \left(\frac{2\pi n_{core}}{\lambda}\right)^2 - \chi_i^2. \quad (2.6)$$

Для такой физической реализации квантовых битов в статье [7] была предложена

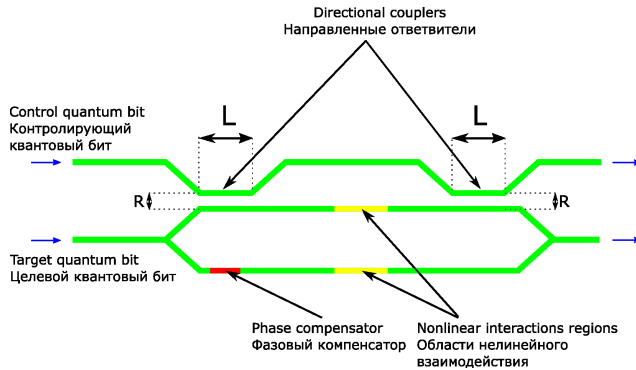


Рис. 2.1. Схема CNOT-вентили

Fig 2.1. CNOT-gate scheme

схема реализации, которая приведена на Рис. 2.1. Принцип работы данной схемы заключается в том, что чем большей оказывается интенсивность излучения в TE_1 моде контролирующего квантового бита, тем большее излучение передаётся через направленный ответвитель в верхнее плечо волноводного интерферометра, в котором распространяется TE_0 -компонента сигнала целевого квантового бита, тем больше в нём интенсивность и выше коэффициент преломления в верхнем плече нелинейной области.

Это приводит к фазовому сдвигу в целевом квантовом бите, который тем выше, чем ближе состояние контролирующего квантового бита к $|1\rangle$, что и определяет квантовую операцию CNOT.

В данной схеме важным элементом являются сближения волноводов, называемые направленными ответвителями. Благодаря тому, что часть интенсивности поля волновода распределена за его пределами, достаточно близко расположенные волноводы обмениваются между собой энергиями, причём скорость обмена для направляемых мод различных порядков оказывается различной. Таким образом, оказывается возможным подобрать параметры направленного ответвителя – длину сближения L и расстояние между волноводами R таким образом, что эта система будет выполнять описанную выше функцию переключателя для CNOT-вентилля.

Данная физическая система описывается системой уравнений Максвелла, решению которой с целью подбора оптимальных параметров L и R посвящена данная работа.

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \times \vec{H} = i\omega\varepsilon_0 n(x, z)^2 \vec{E}, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -i\omega\mu_0 \vec{H}. \end{cases} \quad (2.7)$$

3. Теория связанных волноводов

Для решения системы (2.7) используется предложенное в работе [11] приближение теории связанных волноводов. Поля в системе двух связанных волноводов представляются в виде суммы полей отдельных волноводов и направляемых мод

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \sum_{\nu, m=0,1} A_{\nu m}(z) \vec{E}_{\nu m}; \\ \vec{H} &= \sum_{\nu, m=0,1} A_{\nu m}(z) \vec{H}_{\nu m}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где индекс ν определяет порядковый номер волновода, а индекс m – порядковый номер направляемой поперечной моды. Подстановка разложения (3.1) приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \sum_{\nu, m=0,1} \frac{\partial A_{\nu m}}{\partial z} (\vec{e}_z \times \vec{H}_{\nu m}) - i\omega\varepsilon_0 (n_{core}^2 - n_{clad}^2)_{(\nu+1)mod\ 2} A_{\nu m} \vec{E}_{\nu m} = 0; \\ \sum_{\nu, m=0,1} \frac{\partial A_{\nu m}}{\partial z} (\vec{e}_z \times \vec{E}_{\nu m}) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Величина $(n_{core}^2 - n_{clad}^2)_{(\nu+1)mod\ 2}$ принимает значение $(n_{core}^2 - n_{clad}^2)$ внутри волновода, противоположного волноводу с индексом ν , и 0 во всём остальном поперечном сечении. Умножением полученных уравнений на комплексно сопряженные поля с индексами ν' и m' , суммированием первого и второго уравнения и интегрированием по поперечному сечению получим систему из четырёх уравнений

$$\begin{aligned} \sum_{\nu, m=0,1} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial A_{\nu m}}{\partial z} \vec{e}_z (\vec{H}_{\nu m} \times \vec{E}_{\nu' m'}^-) + \frac{\partial A_{\nu m}}{\partial z} \vec{e}_z (\vec{E}_{\nu m} \times \vec{H}_{\nu' m'}^-) \right. \\ \left. - i\omega\varepsilon_0 (n_{core}^2 - n_{clad}^2)_{(\nu+1)mod\ 2} A_{\nu m} \vec{E}_{\nu m} \vec{E}_{\nu' m'}^- \right) dx = 0, \end{aligned} \quad \nu', m' = 0, 1. \quad (3.3)$$

В качестве функции напряженности поля в волноводе берутся выражения [11]:

$$TE_0 : \begin{cases} E_y = \begin{cases} A \cos(\chi_0 x), |x| < d; \\ A \cos(\chi_0 d) e^{-\gamma_0(|x|-d)}, |x| \geq d; \end{cases} \\ H_x = \begin{cases} A \frac{\beta_0}{\omega\mu} \cos(\chi_0 x), |x| < d; \\ A \frac{\beta_0}{\omega\mu} \cos(\chi_0 d) e^{-\gamma_0(|x|-d)}, |x| \geq d; \end{cases} \end{cases} \quad (3.4)$$

$$TE_1 : \begin{cases} E_y = \begin{cases} A \sin(\chi_1 x), |x| < d; \\ A \operatorname{sign}(x) \sin(\chi_1 d) e^{-\gamma_1(|x|-d)}, |x| \geq d; \end{cases} \\ H_x = \begin{cases} A \frac{\beta_1}{\omega\mu} \sin(\chi_1 x), |x| < d; \\ A \frac{\beta_1}{\omega\mu} \operatorname{sign}(x) \sin(\chi_1 d) e^{-\gamma_1(|x|-d)}, |x| \geq d. \end{cases} \end{cases} \quad (3.5)$$

Система (3.3) может быть упрощена с применением асимптотического анализа. Заметим, что произведение напряженностей полей, распространяющихся в волноводах с различными индексами ν является величиной первого порядка малости. Из этого следует, что величина $\frac{\partial A_{\nu m}}{\partial z}$ должна иметь тот же порядок малости. Отбрасывая слагаемые малого порядка, возможно получить эту систему в упрощенном виде. Для сокращения записи можно ввести числовые параметры, называемые коэффициентами связи.

$$\begin{aligned} c_{\nu_0 m_0}^{\nu_1 m_1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\hat{H}_{x\nu_0 m_0} \hat{E}_{y\nu_1 m_1} + \hat{H}_{x\nu_1 m_1} \hat{E}_{y\nu_0 m_0}) dx; \\ D_{\nu_0 m_0}^{\nu_1 m_1} &= \int_{-\infty}^{+\infty} (\omega \varepsilon_0 (n_{clad}^2 - n_{core}^2) \hat{E}_{\nu_0 m_0} \hat{E}_{\nu_1 m_1}) dx. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В описанном выше приближении

$$\begin{aligned} D_{0m_0}^{1m_1} &= D_{1m_0}^{0m_1} = D_{m_0}^{m_1}; \\ c_{0m}^{0m} &= c_{1m}^{1m} = c_m. \end{aligned} \quad (3.7)$$

С учётом этого система (3.3) принимает вид

$$\begin{cases} \frac{\partial A_{00}}{\partial z} c_0 + A_{10} i D_0^0 + A_{11} i D_1^0 e^{i\Delta\beta z} = 0; \\ \frac{\partial A_{01}}{\partial z} c_1 + A_{10} i D_0^1 e^{-i\Delta\beta z} + A_{11} i D_1^1 = 0; \\ \frac{\partial A_{10}}{\partial z} c_0 + A_{00} i D_0^0 + A_{01} i D_1^0 e^{i\Delta\beta z} = 0; \\ \frac{\partial A_{11}}{\partial z} c_1 + A_{00} i D_0^1 e^{-i\Delta\beta z} + A_{01} i D_1^1 = 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

В системе (3.8) можно дополнительно пренебречь слагаемыми, отвечающими за взаимодействие между модами различных порядков. В этом случае система разбивается на

две подсистемы, определяющие обмен энергиями между модами одного порядка

$$\begin{cases} \frac{\partial A_{0m}}{\partial z} c_m + A_{1m} i D_m^m = 0; \\ \frac{\partial A_{1m}}{\partial z} c_m + A_{0m} i D_m^m = 0; \end{cases} \quad m = 0, 1. \quad (3.9)$$

Упрощённые системы имеют аналитическое решение

$$\begin{cases} A_{0m}(z) = A_{0m}(0) \cos\left(\frac{D_m^m}{c_m} z\right) - i A_{1m}(0) \sin\left(\frac{D_m^m}{c_m} z\right); \\ A_{1m}(z) = A_{1m}(0) \cos\left(\frac{D_m^m}{c_m} z\right) - i A_{0m}(0) \sin\left(\frac{D_m^m}{c_m} z\right); \end{cases} \quad m = 0, 1. \quad (3.10)$$

На основе решения (3.10) возможно заключить, что рассматриваемая модель физической системы будет вести себя, как переключатель для CNOT-вентиля, при выполнении следующих целочисленных условий на коэффициенты связи

$$\frac{D_m^1/c_1}{D_m^0/c_0} = \frac{4i_1 + 1}{4i_0 + 1}. \quad (3.11)$$

С учётом того, что явный вид отношения (3.11) имеет явную зависимость от R

$$\frac{D_m^1/c_1}{D_m^0/c_0} \sim e^{(R(\gamma_0 - \gamma_1))}. \quad (3.12)$$

Оказывается возможным осуществить подбор параметров системы, при которых удовлетворяется условие (3.11) с помощью увеличения расстояния R между волноводами. В этом случае длина сближения волноводов задаётся соотношением

$$L = \frac{c_1(4i_1 + 1)}{2D_1^1}. \quad (3.13)$$

4. Результаты

На основе (3.12) был реализован алгоритм подбора параметров системы сближения волноводов, при которых рассматриваемая физическая система осуществляет функцию переключателя CNOT. Помимо удовлетворения соотношению (3.11), дополнительным требованием к параметрам системы является минимизация длины сближения L , что позволит минимизировать возможные вычислительные ошибки в устройстве, которые будут возникать из-за неровностей на границах волноводов. Для этого осуществляется перебор различных значений i_0 и i_1 , для каждого из них осуществляется вычисление L , среди них выбирается наименьшее. Результаты работы данного алгоритма для определённого набора параметров системы при различных значениях d приведены на Рис. 4.1. При этом диапазон возможных значений d определяется соотношением (2.1), которое обеспечивает в волноводе распространение ровно двух направляемых мод. Скачкообразный характер полученной зависимости объясняется скачкообразностью величины, на которую увеличивается параметр R для удовлетворения соотношению (3.12). Анализ данной зависимости позволяет заключить, что наилучшим выбором полутолщины волновода d является значение вблизи исчезновения второй направляемой моды.

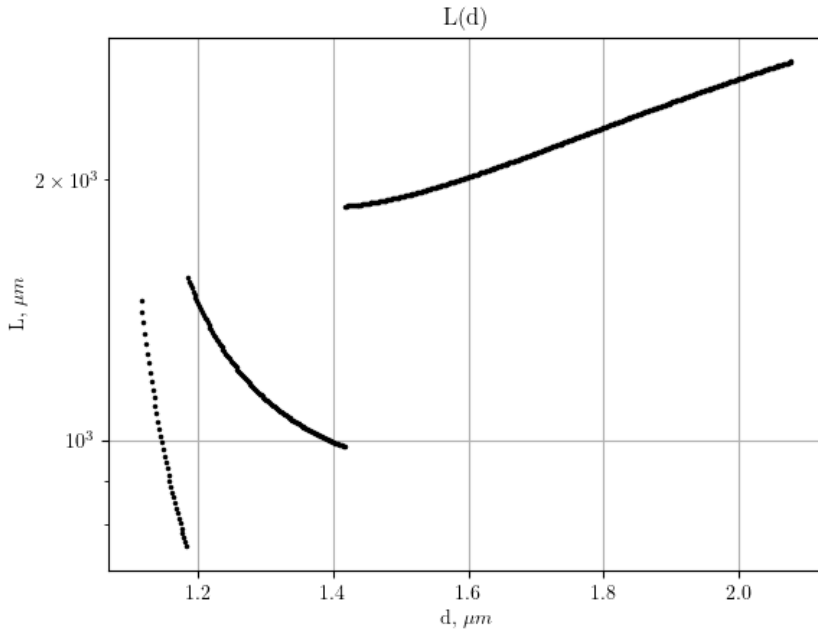


Рис. 4.1. Зависимость минимальной длины сближения волноводов L от полутолщины d при $\lambda = 1064$ нм, $n_{core} = 1.57$, $n_{clad} = 1.55$

Fig 4.1. Coupling length L of waveguide halfwidth d for $\lambda = 1064$ nm, $n_{core} = 1.57$, $n_{clad} = 1.55$

Система (3.8), учитывающая взаимодействие между модами различных порядков не имеет аналитического решения. С целью оценки погрешности вычислительного устройства, которая может возникать вследствие взаимодействия между модами различных порядков, было осуществлено численное решение этой системы с применением метода конечных разностей.

Анализ полученных решений позволяет оценить влияние взаимодействия между модами на качество работы исследуемой системы. Отметим, что в целевом волноводе сумма модулей амплитудных коэффициентов может быть меньше единицы, поскольку он является частью верхнего плеча волноводного интерферометра и в нём распространяется только TE_0 -компонента исходного квантового бита общей схемы. На Рис. 4.2 и Рис. 4.3 изображено поведение полученного решения для некоторых входных состояний квантовых битов. Данное решение в некотором приближении отражает в себе черты гармонического решения (3.10), однако учёт межмодового взаимодействия приводит к заметным искажениям, приводящим к ошибкам на выходе устройства.

В качестве меры ошибки работы переключателя использовалась сумма разностей модулей амплитудных коэффициентов для каждой моды и волновода, отнесенная к общей сумме модулей амплитудных коэффициентов. В результате измерения ошибки для различных входных параметров было получено, что она не превышает 3% для $n_{clad} = 1.57$, $n_{core} = 1.55$, $\lambda = 1064$ нм и $d = 1.19$ мкм.

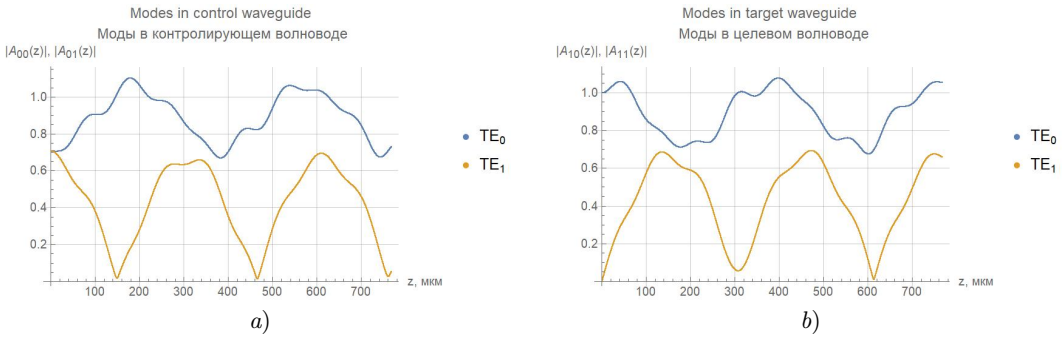


Рис. 4.2. Пространственное распределение модулей амплитудных коэффициентов при распространении излучения в системе для входного состояния $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ контролирующего волновода и $|0\rangle$ целевого волновода (а) в контролирующем волноводе (б) в целевом волноводе

Fig 4.2. Spatial distribution of amplitude coefficients absolute values for the light propogation in the system for input states $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$ of control waveguide and $|0\rangle$ of target waveguide (a) in control waveguide (b) in target waveguide

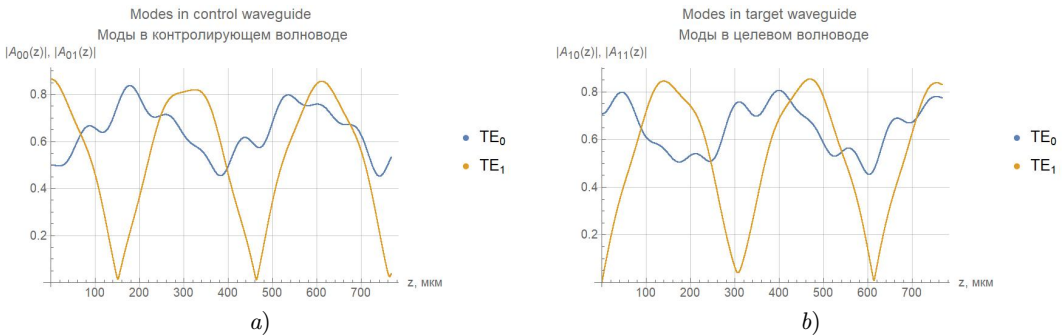


Рис. 4.3. Пространственное распределение модулей амплитудных коэффициентов при распространении излучения в системе для входного состояния $\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$ контролирующего волновода и $|0\rangle$ целевого волновода (а) в контролирующем волноводе (б) в целевом волноводе

Fig 4.3. Spatial distribution of amplitude coefficients absolute values for the light propogation in the system for input states $\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle$ of control waveguide and $|0\rangle$ of target waveguide (a) in control waveguide (b) in target waveguide

5. Заключение

С помощью теории связанных волноводов была получена система, описывающая поведение пары сближенных плоских оптических волноводов, называемой направленным ответвителем. Проведение асимптотического анализа позволило упростить систему уравнений с целью получения приближенного решения в явном виде, которое было положено в основу алгоритма перебора параметров системы – длины сближения L и расстояния между волноводами R . Результаты работы данного алгоритма были допол-

нительно проанализированы в зависимости от величины полутолщины волноводов d ; проведённый анализ показал наиболее оптимальное значение d с точки зрения минимизации линейного размера устройства. Помимо этого, было осуществлено численное решение более полной системы уравнений, дополнительно учитывающих взаимодействия между модами различных порядков, что позволило предварительно оценить ошибку использованного в алгоритме подбора параметров решения.

Результаты данной работы могут быть использованы в качестве основы для моделирования с применением более полной модели, которая будет учитывать искажения сигналов, возникающих из-за изгибов волноводов и неровностей волноводных стенок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Cirac J., Zoller P. Quantum computations with cold trapped ions // Physical Review Letters. 1995. Vol. 74, No. 20. pp. 4091–4094. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4091>
2. Blais A., Huang R.S., Wallraff A. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation // Physical Review A. 2004. Vol. 69, No. 6. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.062320>
3. Cory D.G., Fahmy A.F., Havel T.F. Ensemble quantum computing by NMR-spectroscopy // Proceedings of the National Academy of Sciences 1997. Vol. 94, No. 5. pp. 1634–1639. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.94.5.1634>
4. Knill E., Laflamme R., Milburn G. J. A scheme for efficient quantum computation with linear optics // Nature. 2001. Vol. 409, No. 6816. pp. 46–52.
5. Мирошниченко Г. П. Линейные оптические квантовые вычисления // Наносистемы: физика, химия, математика. 2012. Т. 3, № 4. С. 36–53.
6. Milburn G. J. Quantum optical Fredkin gate // Physical Review Letters. 1989. Vol. 62, No. 18. pp. 2124–2127. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.62.2124>
7. Fu J., Shaofang T. Quantum Computations with Transverse Modes of an Optical Field Propagating in Waveguides // Chinese Physics Letters. 2003. Vol. 20, No. 9. pp. 1426–1429. DOI: <https://doi.org/10.1088/0256-307X/20/9/305>
8. Faleeva M. P., Popov I. Y. On quantum bit coding by Gaussian beam modes for the quantum key distribution // Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics. 2020. Vol. 11, No. 6. pp. 651–658. DOI: <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2020-11-6-651-658>
9. Gloge D., Marcuse D. Formal Quantum Theory of Light Rays // Journal of the Optical Society of America. 1969. Vol. 59, No. 12. pp. 1629–1631. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSA.59.001629>
10. Fu J., Shaofang T., Deng J. Classical simulation of quantum entanglement using optical transverse modes in multimode waveguides // Physical Review A. 2005. Vol. 70, No. 4. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.042313>

11. Marcuse D. Light transmission optics. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982. 534 p.

*Поступила 05.07.2021; доработана после рецензирования 07.08.2021;
принята к публикации 25.08.2021*

Информация об авторах:

Лытаев Александр Алексеевич, магистрант, факультет систем управления и робототехники, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет ИТМО» (197101, Россия, г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д. 49), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9881-8817>, sas-lyt@ya.ru

Попов Игорь Юрьевич, ведущий профессор, факультет систем управления и робототехники ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет ИТМО» (197101, Россия, г. Санкт-Петербург, Кронверкский пр., д. 49), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5251-5327>, popov1955@gmail.com

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 78M35 78M20

Simulation of switchers for CNOT-gates based on optical waveguide interaction with coupled mode theory

A. A. Lytaev, I. Yu. Popov

National Research University ITMO (Saint Petersburg, Russian Federation)

Abstract. The paper is devoted to simulation of interactions in the system of two symmetrical slab optical waveguides, that guide exactly two guided modes with the aim to use the directional coupler as a switcher for CNOT gate in the waveguide model of quantum-like computations. The coupling mode theory is used to solve the system of Maxwell equations. The asymptotic analysis is applied to simplify the system of differential equations, so an approximate analytic solution can be found. The solution obtained is used for the quick directional coupler parameters adjusting algorithm, so the power exchange in the system occurs as that of correctly working CNOT-gate switcher. Moreover, the finite difference method is used to solve the stricter system of equations, that additionally takes into account the process of power exchange between different order guided modes, so the computational error of the device can be estimated. It was obtained, that the possible size of the device may not exceed 1 mm in the largest dimension, while the computational error does not exceed 3 %.

Key Words: optical quantum computations, CNOT-gate, Maxwell equations, optical waveguides, theory of coupled modes, finite difference method

For citation: A. A. Lytaev, I. Yu. Popov. Simulation of switchers for CNOT-gates based on optical waveguide interaction with coupled mode theory. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:4(2021), 433–443. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.433-443>

REFERENCES

1. J. Cirac, P. Zoller, “Quantum computations with cold trapped ions”, *Physical Review Letters*, **74**:20 (1995), 4091–4094. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.74.4091>

A. A. Lytaev, I. Yu. Popov. Simulation of switchers for CNOT-gates based on optical waveguide...

2. A. Blais, R. S. Huang, A. Wallraff, “Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation”, *Physical Review A*, **69**:6 (2004). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.69.062320>
3. D. G. Cory, A. F. Fahmy, T. F. Havel, “Ensemble quantum computing by NMR-spectroscopy”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **94**:5 (1997), 1634–1639. DOI: <https://doi.org/10.1073/pnas.94.5.1634>
4. E. Knill, R. Laflamme, G. J. Milburn, “A scheme for efficient quantum computation with linear optics”, *Nature*, **409**:6816 (2001), 249–257. DOI: <https://doi.org/10.1038/35051009>
5. G. P. Miroshnichenko, “Linear optical quantum computing”, *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, **3**:4 (2012), 36–53 (In Russ.).
6. G. J. Milburn, “Quantum optical Fredkin gate”, *Physical Review Letters*, **62**:18 (1989), 2124–2127. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.62.2124>
7. J. Fu, T. Shaofang, “Quantum Computations with Transverse Modes of an Optical Field Propagating in Waveguides”, *Chinese Physics Letters*, **20**:9 (2003), 1426–1429. DOI: <https://doi.org/10.1088/0256-307X/20/9/305>
8. M. P. Faleeva, I. Y. Popov, “On quantum bit coding by Gaussian beam modes for the quantum key distribution”, *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, **11**:6 (2020), 651–658. DOI: <https://doi.org/10.17586/2220-8054-2020-11-6-651-658>
9. D. Gloge, D. Marcuse, “Formal Quantum Theory of Light Rays”, *Journal of the Optical Society of America*, **59**:12 (1969), 1629–1631. DOI: <https://doi.org/10.1364/JOSA.59.001629>
10. J. Fu, T. Shaofang, J. Deng, “Classical simulation of quantum entanglement using optical transverse modes in multimode waveguides”, *Physical Review A*, **70**:4 (2005). DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.70.042313>
11. D. Marcuse, *Light transmission optics*, Van Nostrand Reinhold, New-York, 1982, 534 p.

Submitted 05.07.2021; revised 07.08.2021; accepted 25.08.2021

Information about the authors:

Aleksandr A. Lytaev, Graduate Student, National Research University ITMO (49 Kronverskiy Av., Saint Petersburg 197101, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1976-3350>, sas-lyt@ya.ru

Igor Yu. Popov, leading professor, National Research University ITMO (49 Kronverskiy Av., Saint Petersburg 197101, Russia), D. Sci. (Mathematics and Physics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5251-5327>, popov1955@gmail.com

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.444–460

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 51-72:519.632

К вопросу о моделировании термодинамического взаимодействия частиц, взвешенных в двумерной среде

А. О. Сыромясов, Ю. В. Понкратова, Т. В. Меньшакова

*Национальный исследовательский Мордовский государственный университет
(г. Саранск, Российская Федерация)*

Аннотация. Аналитическое решение задачи о распределении температуры в среде с инородными включениями затруднено в связи со сложностью ее геометрии, поэтому для моделирования термодинамических процессов на микроуровне в дисперсных системах применяются асимптотические или численные методы. Для ответа на вопрос о сходимости и сравнительной точности этих методов авторы рассматривают модельную задачу о двух идентичных круглых частицах в безграничной плоской среде с постоянным на бесконечности перепадом температуры. Полученное ранее мультипольное разложение решения в статье доведено до высоких степеней малого параметра, представляющего собой безразмерный радиус термодинамически взаимодействующих частиц. Описан подход к численному моделированию термодинамического взаимодействия частиц в пакете ANSYS; в частности, изучена проблема выбора приближенных граничных условий. Выявлено, что одним из основных источников погрешности метода конечных элементов является замена безграничной среды расчетной областью конечных размеров. Для определения границ области в задаче со множественными включениями авторами разработан метод фиктивной частицы, согласно которому совокупность инородных тел на больших расстояниях от центра области, занятой ими, может быть приближенно заменена одним эквивалентным телом большего радиуса. На конкретных числовых данных исследована зависимость размеров расчетной области, обеспечивающих приемлемую точность, от сравнительных характеристик несущей среды и инородных тел. Авторами проведен ряд численных экспериментов, в ходе которых подтверждена сходимость методов мультипольного разложения и конечных элементов и близость результатов их работы.

Ключевые слова: термодинамическое взаимодействие, дисперсная среда, уравнение теплопроводности, мультиполь, асимптотическое разложение, метод конечных элементов

Для цитирования: Сыромясов А. О., Понкратова Ю. В., Меньшакова Т. В. К вопросу о моделировании термодинамического взаимодействия частиц, взвешенных в двумерной среде // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 444–460. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.444–460>

1. Введение

Одной из актуальных задач механики гетерогенных сред является нахождение распределения температуры в веществе, содержащем множественные инородные включения. Эта задача может иметь самостоятельное значение: так, осреднение температурного поля позволяет найти эффективные характеристики дисперсных сред [1]. С другой стороны, ее решение может выступать этапом при рассмотрении более сложных проблем. Примером служит моделирование течения жидкости со свойствами, зависящими от температуры, в случае, когда температура среды не постоянна, а сама среда содержит инородные примеси [2; 3]. При некоторых условиях удастся отделить термодинамическую задачу от гидродинамической, найти распределение температуры в “неподвижной” среде и использовать его при описании течения жидкости [4; 5].



Если интерес в задаче представляют коллективные эффекты (иначе говоря, термодинамическое взаимодействие инородных тел), то следует выяснить, как невозмущенное распределение температуры искажается двумя, тремя и т.д. частицами. Для этого предполагается, что в среде находится группа инородных включений, а вдалеке от них температура есть известная функция координат и, быть может, времени. Аналогичный подход развивается, например, в [6; 7; 8] при моделировании гидродинамического взаимодействия частиц и определения эффективных характеристик суспензии твердых сфер в вязкой жидкости.

Аналитическое решение задачи об одном шарообразном включении в безграничной среде с постоянным на бесконечности градиентом температуры хорошо известно и имеет простой вид [9]. При рассмотрении инородных тел менее элементарной формы вид решения усложняется. Так, аналогичное с математической точки зрения описание электрического поля в среде с проводящим эллипсоидом требует введения специфической системы координат и привлечения эллиптических интегралов [10]. При моделировании гидродинамического взаимодействия шарообразных частиц взвеси в жидкости может вводиться бисферическая система координат [11].

В целом необходимо отметить, что аналитическое решение уравнения Лапласа при описании систем из нескольких частиц (или даже одной частицы, но несферической формы) в среде с иными свойствами весьма затруднено. Использование специально подобранных систем координат приводит к весьма громоздким выражениям для искомых функций. Кроме того, если требуется описать взаимодействие более чем двух частиц, то подобрать систему координат, в которой бы переменные в уравнении Лапласа разделялись, невозможно. В связи с этим применяются асимптотические разложения решений указанного уравнения по малому параметру [8]. Проблема заключается в том, что асимптотические ряды могут не быть сходящимися, и не всегда удастся заранее гарантировать, что они хорошо приближают искомые величины [12].

Альтернативой асимптотическим разложениям служит использование численных методов, например, метода конечных элементов [13]. Однако их применение сталкивается со следующей трудностью: расчетная область имеет конечные размеры, в то время как расчет следует произвести для группы тел в безграничном пространстве. Поэтому возникает вопрос: какими должны быть размеры конечной области, заменяющей исходную бесконечную среду, чтобы возникающая от такой замены погрешность не оказала существенного влияния на результат вычислений.

Соответственно вышеизложенному, авторы статьи ставили перед собой следующие задачи. Во-первых, убедиться в сходимости асимптотических мультипольных разложений, получаемых при моделировании распределения температуры в сплошной среде с включениями. Во-вторых, предложить метод оценки размеров расчетной области при решении указанной задачи методом конечных элементов. В-третьих, сравнить решения этой задачи, полученные асимптотическим и численным методами.

Расчеты производятся на модельном примере: в безграничную плоскую среду помещены две идентичные круглые частицы, причем градиент температуры на бесконечном удалении от них является постоянным вектором.

2. Постановка задачи о термодинамическом взаимодействии двух частиц в плоской безграничной среде

Предположим, что в неподвижную безграничную плоскую среду с постоянной теплопроводностью κ_f помещены две одинаковые круглые частицы 1 и 2, имеющие радиус

a и теплопроводность κ_p так, что расстояние между их центрами равно r . Распределение температуры в среде и частицах стационарно. Бесконечно далеко от обеих частиц градиент температуры есть известный постоянный вектор, произвольно ориентированный по отношению к прямой, соединяющей центры инородных частиц. На границе этих включений температура и тепловой поток не должны претерпевать разрыв; кроме того, внутри частиц температура должна оставаться конечной.

Введем систему координат Ox_1x_2 , начало O которой находится в центре круга 1. Ось Ox_1 направим так, что центр круга 2 окажется в точке, имеющей радиус-вектор $\vec{r} = (r; 0)$. Координатную ось Ox_2 направим перпендикулярно Ox_1 (рис. 2.1).

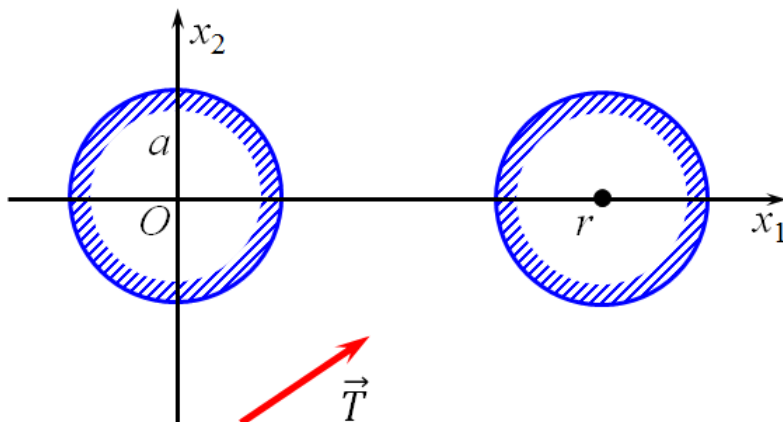


Рис. 2.1. Геометрия задачи
Fig 2.1. Geometry of the problem

Условимся, что вектор $\vec{x} = (x_1, x_2)$ задает положение произвольной точки относительно начала координат, а вектор \vec{y} – от центра того или иного включения.

Тогда стационарность температуры можно записать в форме

$$\Delta_{\vec{x}} T_f = 0, \quad (2.1)$$

$$\Delta_{\vec{y}} T_p(N) = 0, \quad N = 1, 2, \quad (2.2)$$

где $T_f = T_f(\vec{x})$ – температура вне частиц, $T_p(N) = T_p(N, \vec{y})$ – температура внутри N -й частицы; $\Delta_{\vec{x}}$ и $\Delta_{\vec{y}}$ суть операторы Лапласа, в которых частные производные берутся по компонентам векторов \vec{x} и \vec{y} , соответственно. Далее при возможности векторные индексы у лапласианов будут опускаться.

Условие на удалении от инородных тел имеет вид

$$\text{grad}_{\vec{x}} T_f(\vec{x}) \rightarrow \vec{T}, \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty, \quad (2.3)$$

где $\vec{T} = (T_1, T_2)$ – постоянный вектор.

Непрерывность температуры и теплового потока на границе каждого из кругов выражается равенствами (\vec{n} – единичная внешняя нормаль)

$$T_f = T_p(1), \quad \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = \kappa_p \frac{\partial T_p(1)}{\partial n}, \quad |\vec{x}| = a, \quad (2.4)$$

$$T_f = T_p(2), \quad \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n} = \kappa_p \frac{\partial T_p(2)}{\partial n}, \quad |\vec{x} - \vec{r}| = a. \quad (2.5)$$

Наконец, обозначим через $T_0 < \infty$ невозмущенную температуру в центре первого включения. Это позволяет записать поле температуры, не искаженное инородными частицами, в виде

$$T_\infty(\vec{x}) = T_0 + \vec{T} \cdot \vec{x} = T_0 + T_1 x_1 + T_2 x_2. \quad (2.6)$$

Соответственно, величина T' , равная $T_f - T_\infty$ вне инородных тел и $T_p - T_\infty$ внутри них, есть возмущение, вносимое ими в исходное распределение температуры.

Далее величина T_0 не играет существенной роли и потому считается равной нулю.

Суммируя вышеизложенное, получим, что необходимо найти функции T_f , $T_p(1)$ и $T_p(2)$, удовлетворяющие уравнениям (2.1), (2.2), условию на бесконечности (2.3) и граничным условиям (2.4), (2.5).

3. Мультипольное решение задачи

3.1. Описание метода

Применительно к плоской задаче о термодинамическом взаимодействии частиц метод мультипольного разложения был описан в [14] и вкратце заключается в следующем.

Поскольку искомые T_f и $T_p(N)$, $N = 1, 2$, суть гармонические функции, они записываются в виде рядов мультиполей – частных производных фундаментального решения L_0 уравнения Лапласа на плоскости:

$$L_0(\vec{x}) = \ln |\vec{x}|, \quad L_{j\dots k}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \dots \frac{\partial}{\partial x_k} L_0(\vec{x}).$$

Индексы j , k и прочие могут принимать значение 1 или 2. Т.о., поле температуры вне частиц задается общей формулой

$$\begin{aligned} T_f(\vec{x}) = & T_\infty(\vec{x}) + [A_0^{\text{ext}}(1)L_0(\vec{x}) + H_j^{\text{ext}}(1)L_j(\vec{x}) + F_{jk}^{\text{ext}}(1)(\vec{x}) + \\ & + G_{jkl}^{\text{ext}}(1)L_{jkl}(\vec{x}) + D_{jklm}^{\text{ext}}(1)L_{jklm}(\vec{x}) + \dots] + \\ & + [A_0^{\text{ext}}(2)L_0(\vec{x} - \vec{r}) + H_j^{\text{ext}}(2)L_j(\vec{x} - \vec{r}) + F_{jk}^{\text{ext}}(2)(\vec{x} - \vec{r}) + \\ & + G_{jkl}^{\text{ext}}(2)L_{jkl}(\vec{x} - \vec{r}) + D_{jklm}^{\text{ext}}(2)L_{jklm}(\vec{x} - \vec{r}) + \dots], \end{aligned} \quad (3.1)$$

где T_∞ определена в (2.6). Коэффициенты $A_0^{\text{ext}}(N)$, $H_j^{\text{ext}}(N)$, $F_{jk}^{\text{ext}}(N)$ и т.п. имеют тензорную природу и не зависят от \vec{x} . По всем повторяющимся коэффициентам выполняется суммирование, в ходе которого они “пробегают” оба своих допустимых значения.

Температурные поля внутри включений записываются аналогично, однако мультиполи модифицируются, дабы не иметь неопределенности в центрах частиц:

$$\begin{aligned} T_p(N, \vec{y}) = & T_\infty(\vec{r}_N) + A_0^{\text{int}}(N) + H_j^{\text{int}}(N)L_j(\vec{y})|\vec{y}|^2 + F_{jk}^{\text{int}}(N)L_{jk}(\vec{y})|\vec{y}|^4 + \\ & + G_{jkl}^{\text{int}}(N)L_{jkl}(\vec{y})|\vec{y}|^6 + D_{jklm}^{\text{int}}(N)L_{jklm}(\vec{y})|\vec{y}|^8 + \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь r_N – один из двух радиус-векторов $\vec{r}_1 = (0, 0)$ и $\vec{r}_2 = (r, 0)$, которые соответствуют центрам инородных включений. Верхние индексы “ext” (external) и “int” (internal) позволяют различать тензоры, относящиеся к температуре вне и внутри частиц.

В принципе, разложения (3.1) и (3.2) по мультиполям можно продолжать и далее. Однако в рамках данной работы мы ограничимся мультиполями четвертого ранга и коэффициентами вида D_{jklm} , соответственно.

Для произвольной функции вида (3.1) выполнены уравнение (2.1) и условие (2.3), а для любой функции вида (3.2) справедливо (2.2). Тем самым, остается лишь удовлетворить (2.4) и (2.5) подбором подходящих тензорных коэффициентов.

Указанные величины должны быть линейны относительно вектора \vec{T} ; кроме того, в тензорный базис входит единичный вектор \vec{b} , направленный вдоль Ox_1 . Опуская верхние индексы, получим, что при любом $N = 1, 2$ тензорные коэффициенты имеют следующую структуру:

$$\begin{aligned} A_0(N) &= AA(N)T_1, \\ H_j(N) &= [HA(N) - HB(N)]T_s b_s b_j + HB(N)T_j, \\ F_{jk}(N) &= [FA(N) - 2FB(N)]T_s b_s b_j b_k + FB(N)(T_j b_k + T_k b_j), \\ G_{jkl}(N) &= [GA(N) - 3GB(N)]T_s b_s b_j b_k b_l + GB(N)(T_j b_k b_l + T_k b_j b_l + T_l b_j b_k), \\ D_{jklm}(N) &= [DA(N) - 4DB(N)]T_s b_s b_j b_k b_l b_m + DB(N)(T_j b_k b_l b_m + T_k b_j b_l b_m + \\ &\quad + T_l b_j b_k b_m + T_m b_j b_k b_l). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Чтобы найти $AA^{\text{ext}}(1), \dots, DB^{\text{int}}(2)$, выражения (3.1)–(3.3) подставляются в (2.4) и (2.5), а полученные равенства раскладываются в ряд по малому параметру $\varepsilon = a/r$.

3.2. Асимптотическое разложение искомых величин

Учет мультиполей четвертого ранга позволяет найти распределение температуры с точностью до ε^5 (отметим, что в [14] асимптотические разложения “оборваны” на слагаемых порядка ε^2). Итоговое решение задачи таково:

$$\begin{aligned} AA^{\text{ext}}(1) &\equiv 0, \quad AA^{\text{int}}(1) = aK_1 \left[-\varepsilon + K_1 \varepsilon^3 + 2(K_2 - K_1)K_1 \varepsilon^5 \right], \\ HA^{\text{ext}}(1) &= a^2 K_1 \left(1 - K_1 \varepsilon^2 + K_1^2 \varepsilon^4 \right), \quad HB^{\text{ext}}(1) = a^2 K_1 \left(1 + K_1 \varepsilon^2 + K_1^2 \varepsilon^4 \right), \\ HA^{\text{int}}(1) &= 2K_2 \left(1 - K_1 \varepsilon^2 + K_1 K_2 \varepsilon^4 \right), \quad HB^{\text{int}}(1) = 2K_2 \left(1 + K_1 \varepsilon^2 + K_1 K_2 \varepsilon^4 \right), \\ FA^{\text{ext}}(1) &= a^3 K_1^2 \left(\varepsilon^3 - K_1 \varepsilon^5 \right), \quad FB^{\text{ext}}(1) = a^3 K_1^2 \left(-\frac{1}{2} \varepsilon^3 - \frac{1}{2} K_1 \varepsilon^5 \right), \\ FA^{\text{int}}(1) &= \frac{K_1 K_2}{a} \left(2\varepsilon^3 - 2K_1 \varepsilon^5 \right), \quad FB^{\text{int}}(1) = \frac{K_1 K_2}{a} \left(-\varepsilon^3 - K_1 \varepsilon^5 \right), \\ GA^{\text{ext}}(1) &= -\frac{1}{2} a^4 K_1^2 \varepsilon^4, \quad GB^{\text{ext}}(1) = \frac{1}{6} a^4 K_1^2 \varepsilon^4, \quad GA^{\text{int}}(1) = -\frac{K_1 K_2}{a^2} \varepsilon^4, \\ GB^{\text{int}}(1) &= \frac{K_1 K_2}{3a^2} \varepsilon^4, \quad DA^{\text{ext}}(1) = \frac{1}{6} a^5 K_1^2 \varepsilon^5, \quad DB^{\text{ext}}(1) = -\frac{1}{24} a^5 K_1^2 \varepsilon^5, \\ DA^{\text{int}}(1) &= \frac{K_1 K_2}{3a^3} \varepsilon^5, \quad DB^{\text{int}}(1) = -\frac{K_1 K_2}{12a^3} \varepsilon^5, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где введены обозначения

$$K_1 = \frac{\kappa_f - \kappa_p}{\kappa_f + \kappa_p}, \quad K_2 = \frac{\kappa_f}{\kappa_f + \kappa_p}.$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ отсюда получается решение задачи об одиночной круглой частице:

$$T_f(\vec{x}) = T_\infty(\vec{x}) + K_1 T_j x_j \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^2, \quad T_p(\vec{x}) = T_0 + 2K_2 T_j x_j. \quad (3.5)$$

Для тензоров, относящихся ко второй частице (неважно, имеют они верхний индекс “ext” или “int”), справедливы соотношения

$$\begin{aligned} A_0(2) &= -A_0(1), & H_j(2) &= H_1(1), & F_{jk}(2) &= -F_{jk}(1), \\ G_{jkl}(2) &= G_{jkl}(1), & D_{jklm}(2) &= -D_{jklm}(1). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Аналогичные равенства имеют место и при решении пространственной задачи о парном термодинамическом взаимодействии одинаковых частиц [15].

Равенства (3.4), (3.6) завершают решение исходной задачи методом мультипольного разложения.

3.3. Пример сходимости асимптотических разложений

Введем полярную систему координат с углом θ так, что $x_1 = |\vec{x}| \cos \theta$, $x_2 = |\vec{x}| \sin \theta$.

Обозначим через $T'_{(K)}$ асимптотическое разложение величины T' в задаче о двух частицах с точностью до ε^K . Для иллюстрации сходимости этих разложений протабулируем их с некоторым шагом $\Delta\theta$ по углу θ вдоль концентрических окружностей с центром в начале координат и изучим поведение величины $\max |T'_{(K+1)} - T'_{(K)}|$.

Выполним расчеты при таких параметрах: $a = 1$, $\kappa_p/\kappa_f \in \{2, 5, 10\}$, $\varepsilon \in \{1/5, 1/3\}$, $|\vec{T}| = 5$. При этом отдельно рассмотрим случаи, в которых \vec{T} сонаправлен с \vec{r} и перпендикулярен ему. Окружности, на которых берутся пробные точки, имеют радиус $a/2$ (внутри первой частицы), a (на ее границе), $2a$ и $10a$ (вне обеих частиц), а шаг изменения полярного угла составляет $\Delta\theta = 2\pi/200$.

Как показывают результаты вычислений, последовательность $\{T'_{(K)}\}$ фундаментальна: разница между соседними ее членами довольно быстро стремится к нулю при любых комбинациях перечисленных выше параметров. Так, при $\vec{T}||\vec{r}$, $\varepsilon = 1/3$, $\kappa_p/\kappa_f = 2$ и $|\vec{x}| = 2$ значение $\max |T'_{(2)} - T'_{(1)}| = 4.3 \cdot 10^{-2}$, а $\max |T'_{(5)} - T'_{(4)}| = 2.7 \cdot 10^{-3}$. При $|\vec{x}| = 10a$ величина $\max |T'_{(5)} - T'_{(4)}|$, как правило, имеет порядок $10^{-5} \div 10^{-6}$.

Легко объяснить такие свойства $T'_{(K)}$, наблюдаемые в расчетах. Во-первых, очевидно, скорость сходимости падает с увеличением ε . Во-вторых, при прочих равных условиях сходимость ускоряется с увеличением $|\vec{x}|$. Это связано с тем, что мультиполи, входящие в разложение T_f , суть однородные функции отрицательных степеней по $|\vec{x}|$.

4. Решение задачи об одиночной частице методом конечных элементов

Как было отмечено во Введении, аналитический подход не является панацеей; большую важность приобретают численные методы решения задачи, в первую очередь – метод конечных элементов (МКЭ). В свою очередь, для применения МКЭ необходимо уметь оценивать погрешность метода, знать основные факторы, влияющие на нее, а также корректно выбирать форму и размеры расчетной области, параметры расчетной сетки и задавать условия на границе этой области.

В связи с этим аналитическое решение задачи об одиночной частице (3.5) является эталонным. Оно известно точно и поэтому, сравнивая с ним результаты приближенных расчетов, можно оценить их погрешность.

4.1. Общий подход к численному решению задачи

Сначала предположим, что в среде находится одна частица радиуса a с центром в начале координат. Тогда без ограничения общности можно считать, что градиент температуры на бесконечности направлен вдоль оси Ox_1 : $\vec{T} = (T_1, 0)$. Расчетную область здесь и далее будем выбирать в форме квадрата, симметричного относительно начала координат; сторону квадрата обозначим через H и будем считать большой: $H \gg 2a$.

Поскольку известно, что $T_f(\vec{x}) \rightarrow T_\infty(\vec{x})$ при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$, а границы выбранного квадрата являются изотермами T_∞ , то значения T_f на левой и правой сторонах квадрата логично считать заранее заданными постоянными:

$$T_{\text{left}} = T_\infty \Big|_{x_1 = -H/2}, \quad T_{\text{right}} = T_\infty \Big|_{x_1 = H/2}. \quad (4.1)$$

Относительная разница этих значений должна приближенно представлять собой невозмущенный градиент температуры:

$$T_1 \approx \frac{T_{\text{right}} - T_{\text{left}}}{H}.$$

На двух горизонтальных сторонах квадрата, которые также расположены далеко от частицы, температура зависит только от x_1 , а в направлении Ox_2 (по нормали к этим сторонам) не изменяется. Соответственно, на них выполнено условие теплоизоляции

$$\frac{\partial T_f}{\partial n} = 0. \quad (4.2)$$

В пакете ANSYS, в котором выполнялись приближенные вычисления с использованием МКЭ, теплоизоляция является граничным условием по умолчанию.

Тепловой контакт между инородной частицей и средой, согласно (2.4), является идеальным – потерь тепла на границе раздела не происходит. Соответствующие ограничения в ANSYS также выполняются по умолчанию.

Итак, при численном расчете граничные условия (2.3) должны быть заменены на (4.1), (4.2) при том, что расчетная область велика по размерам. Условия на поверхности частицы остаются неизменными. Геометрия приближенных граничных условий изображена на рис. 4.1.

Помимо геометрических параметров области, перед численным расчетом необходимо задать и теплопроводности среды и включения. При этом можно воспользоваться следующими упрощениями.

Во-первых, Распределение температуры зависит, фактически, не от κ_f и κ_p самих по себе, а от их отношения. В этом можно убедиться, например, по значениям параметров K_1 и K_2 в формулах (3.4). Поэтому теплопроводность среды можно считать равной единице и в дальнейших исследованиях варьировать только κ_p .

Во-вторых, из (3.5) следует, что T_p не зависит от ее радиуса a , а T_f зависит от отношения $a/|\vec{x}|$. Поэтому можно считать, что $a = 1$.

4.2. Источники погрешности расчетов и метод ее оценки

Основных источников погрешности при конечно-элементных расчетах два. Во-первых, это погрешность самого МКЭ, связанная как с качеством сетки, так и с тем, что метод в принципе является приближенным. Во-вторых, это погрешность от замены бесконечной области на конечную. Дело в том, что условия (2.3) и (4.1) с постоянными

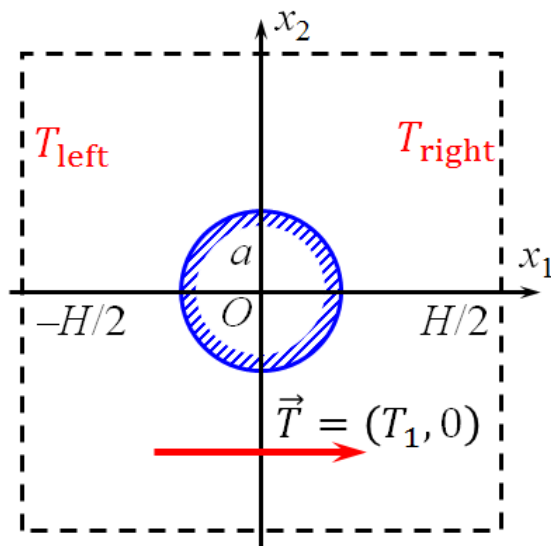


Рис. 4.1. Геометрия приближенных граничных условий

Fig 4.1. Geometry of approximate boundary conditions

T_{left} и T_{right} , строго говоря, не равносильны: из-за присутствия в среде включения с иной теплопроводностью поле температуры искажается, так что при $x_1 = \pm H/2$ равенство $T_f = T_0 \pm T_1 H/2$ не выполняется.

Далее установим, какую роль играет каждая из этих погрешностей. Для этого реализуем следующий план действий.

1. Выберем некую расчетную область, на границе которой в качестве граничных условий укажем *точные* значения $T_f(\vec{x})$ из эталонного решения (3.5), например,

$$T_{\text{right}} = T_0 + T_1 \cdot \frac{H}{2} \cdot \left[1 + K_1 \frac{a^2}{(H/2)^2 + x_2^2} \right]. \quad (4.3)$$

При этом подходе погрешность, связанная с заменой бесконечной области на конечную, исчезает, и можно исследовать погрешность непосредственно МКЭ.

2. При описанных граничных условиях будем пробовать различные варианты улучшений расчетной сетки до тех пор, пока не достигнем приемлемого уровня погрешности вычислений.
3. Сетка, выбранная в итоге, считается оптимальной. Именно ее настройки в дальнейшем используются при увеличении размеров расчетной области и исследовании погрешности, связанной с неточными граничными условиями.

Фактическая цель расчетов – найти упомянутое выше возмущение температуры T' , поэтому мерой неточности вычислений будем считать относительную погрешность нахождения этой величины:

$$\delta_T = \frac{|T'_{\text{analytic}} - T'_{\text{ANSYS}}|}{|T'_{\text{analytic}}|},$$

где индексы “analytic” и “ANSYS” отвечают значениям T' , найденным аналитически и приближенно – в пакете ANSYS Workbench.

При фиксированном κ_f погрешность δ_T может зависеть как от $|\vec{T}| = T_1$, так и от κ_p . В дальнейших численных экспериментах будем считать, что $T_1 = 5$, а κ_p принимает одно из значений 0.1, 0.2, 0.5, 2, 5 и 10. Наиболее интересны варианты, в которых $\kappa_p/\kappa_f > 1$, т.к. они чаще встречаются на практике [5].

Для сравнения приближенного решения с эталонным будем выводить результаты расчетов в ANSYS вдоль концентрических окружностей различного радиуса с центрами в начале координат: эти линии повторяют геометрию инородного включения. Всего рассматривается 5 окружностей: $|\vec{x}| = a/2$, $|\vec{x}| = a$, $|\vec{x}| = 2a$, $|\vec{x}| = 5a$ и $|\vec{x}| = 10a$. На каждой из них значения T' вычисляются в 200 точках, соответствующих полярным углам θ , кратным $2\pi/200$.

В качестве интегральной меры погрешности логично вычислять среднее значение δ_T вдоль той или иной окружности. Но при $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, т.е. в точках на оси Ox_2 , величина $T'_{\text{analytic}} = 0$, поэтому погрешность становится бесконечной. В точках, близких к $\theta = \pi/2$ и $\theta = 3\pi/2$, погрешность также (и по той же причине) очень велика. Чтобы отбросить такие “оторванные” значения δ_T , используется критерий вариационного размаха [16]. Итоговой величиной, характеризующей ошибку вычислений, служит $\langle \delta_T \rangle$ – среднее значение δ_T после отбрасывания “оторванных” значений.

4.3. Погрешность МКЭ

Глобальное измельчение сетки ресурсоемко, поэтому для улучшения ее свойств используется инструмент Inflation – измельчение шага сетки вблизи линии раздела “среда – частица”. Это позволяет более адекватно моделировать температурный пограничный слой, возникающий из-за скачка теплопроводностей. В ходе численных экспериментов было установлено, что оптимальной является сетка с 10 инфляционными слоями, причем каждый следующий слой (считая от границы раздела) должен быть вдвое шире предыдущего. При этом средняя погрешность принимает достаточно малые значения, а производительность вычислений практически не понижается.

Вычисления с *точными* граничными условиями типа (4.3) велись при $H = 20a$. В итоге были установлены следующие характерные черты поведения $\langle \delta_T \rangle$.

Во-первых, при прочих равных условиях $\langle \delta_T \rangle$ возрастает при увеличении радиуса окружности, вдоль которой выводится решение. Так, при $\kappa_p = 10$ и $|\vec{x}| = 2a$ значение $\langle \delta_T \rangle = 1.50 \cdot 10^{-3}$, а при $|\vec{x}| = 10a$ погрешность составляет $2.22 \cdot 10^{-2}$. Это объясняется тем, что исправление свойств сетки с помощью инструмента Inflation является локальным. Кроме того, при удалении от частицы T'_{analytic} уменьшается, что также увеличивает погрешность.

Во-вторых, $\langle \delta_T \rangle$ увеличивается при приближении κ_p к 1. Так, при $|\vec{x}| = 5a$ и $\kappa_p = 10$ величина $\langle \delta_T \rangle = 5.00 \cdot 10^{-3}$, а при $\kappa_p = 2$ она достигает значения $1.31 \cdot 10^{-2}$. Причиной такого поведения служит то, что при $\kappa_p \rightarrow \kappa_f$ значение $T'_{\text{analytic}} \rightarrow 0$.

Подытоживая, отметим, что погрешность МКЭ “самого по себе” в точках вдали от инородного включения имеет порядок 10^{-2} , а вблизи него может быть существенно улучшена с помощью инфляции сетки. Описанные параметры этого улучшения далее применяются и к расчетам с неточными граничными условиями типа (4.1).

4.4. Погрешность от замены бесконечной области на конечную

Решая задачу с условиями (4.1), (4.2) на границе расчетной области, будем исследовать зависимость $\langle \delta_T \rangle$ от размера области H и от отношения κ_p/κ_f . Характерные черты этой зависимости таковы.

Аналогично расчетам с точными граничными условиями, при фиксированных κ_p и H значение $\langle \delta_T \rangle$ растет с увеличением $|\vec{x}|$.

Далее, при фиксированном $|\vec{x}| \geq a$ (вне частицы) погрешность падает при увеличении H . Так, при $\kappa_p = 10$ и $|\vec{x}| = 2a$ значение $\langle \delta_T \rangle = 0.028$ при $H = 20$ и 0.004 при $H = 80$. Такое поведение связано с тем, что при увеличении H улучшается приближение бесконечной области с помощью конечной при неточных граничных условиях.

Достичь предельного значения $\langle \delta_T \rangle$, т.е. ее величины при $H = 20a$ и точных граничных условиях (ранее эта величина была принята за погрешность собственно МКЭ), не удастся. Однако при $H = 80a$ и произвольных $|\vec{x}|$ и κ_p она имеет приемлемые значения – не более 0.1 .

Наконец, при $\kappa_p/\kappa_f > 1$ погрешность растет с убыванием κ_p . Это также объясняется тем, что с уменьшением больших κ_p и с их приближением к κ_f величина T'_{analytic} стремится к нулю.

Резюмируя, отметим, что для обеспечения приемлемой точности вычислений ($\langle \delta_T \rangle \leq 0.1$) требуется брать размеры расчетной области в 4–5 раз больше, чем размеры той области, в которой нас интересует распределение температуры. Так, максимальному $|\vec{x}| = 10a$ соответствует $H/2 = 40a$.

5. Численное моделирование парного термодинамического взаимодействия на плоскости

Применим полученные выводы к расчету температуры вблизи двух круглых частиц на плоскости. Ограничимся случаем, когда центры включений расположены на расстоянии $r = 5a$ один от другого (см. рис. 2.1), а величина невозмущенного градиента температуры $|\vec{T}| = 5$. Температурные пограничные слои вблизи частиц будем учитывать с помощью инфляции сетки с найденными ранее параметрами. Значения T' вычислим вдоль концентрических окружностей радиусов $a/2$, a , $2a$ и $10a$ (окружность радиуса $5a$, проходящая как внутри среды, так и внутри частицы 2, исключена).

По сравнению с задачей об одиночном включении в данном случае возникают следующие дополнительные проблемы.

Необходимо учесть, что градиент температуры \vec{T} может быть по-разному ориентирован относительно \vec{r} и, соответственно, относительно оси Ox_1 . В силу линейности исходной задачи достаточно вместо одного расчета с произвольным $\vec{T} = (T_1, T_2)$ выполнить два, в которых $\vec{T} = (T_1, 0)$ и $\vec{T} = (0, T_2)$, соответственно.

Кроме того, следует изменить размер расчетной области. Наиболее очевидным решением представляется увеличить сторону квадрата (при прочих равных условиях) с H на $H + 2r$, так что $|x_{1,2}| \leq H/2 + r$. Возникает вопрос, достаточен ли такой размер области для обеспечения приемлемой погрешности?

Ниже подробно обсуждается вторая из обозначенных проблем.

5.1. Проблема определения размеров области в случае двух частиц

Для более корректной оценки размеров расчетной области сведем задачу о двух частицах к задаче об одиночном включении, которая была рассмотрена выше.

Из (3.4) следует, что в начальном приближении вне обеих идентичных частиц возмущение температуры имеет вид $T'(\vec{x}) = K_1 a^2 T_j [L_j(\vec{x}) + L_j(\vec{x} - \vec{r})]$. Если $|\vec{x}| \gg r$, то $L_j(\vec{x} - \vec{r}) \approx L_j(\vec{x})$, поэтому на большом расстоянии от обеих частиц

$$T'(\vec{x}) = 2K_1 T_j x_j \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^2.$$

Сравнивая это выражение с (3.5), получим, что система из двух одинаковых включений при больших $|\vec{x}|$ эквивалентна одному “фиктивному” включению с той же теплопроводностью и радиусом $a\sqrt{2}$. Аналогично можно показать, что облако из N идентичных частиц на плоскости можно приближенно заменить одной частицей радиуса $a\sqrt{N}$.

Отметим, что при выводе этой оценки мы пренебрегли поправками к (3.5), которые, согласно (3.4), имеют порядок ε^2 . Поэтому дополнительным условием, при котором замена системы инородных включений на единственную частицу будет адекватной, является $a^2 \ll r^2$.

Теперь ответим на следующий вопрос. Пусть радиус включения изменился в $\alpha > 1$ раз. Во сколько раз надо изменить размеры квадратной расчетной области для поддержания прежнего значения $\langle \delta_T \rangle$ при тех же $|\vec{T}|$ и κ_p/κ_f ?

Для этого вернемся к задаче об одиночной частице при \vec{T} , направленном вдоль Ox_1 . Напомним, что значения $H = 80$ при $T_1 = 5$ и $a = 1$ достаточно, чтобы погрешность вычислений была достаточно мала. Поэтому вычислим $\langle \delta_T \rangle$ при $\kappa_p = 10$, $T_1 = 5$ вдоль окружностей радиусами $2a$, $5a$ и $10a$. При этом радиус включения будем брать равным αa , где α принимает значение 1, $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$, а в качестве нового размера области рассмотрим H , αH и $\alpha^2 H$. В результате численного эксперимента выяснилось, что хотя при увеличении H значение $\langle \delta_T \rangle$ ожидаемо падает, но прежнего $H = 80$ даже при увеличенных радиусах частицы достаточно, чтобы обеспечить прежнюю точность. Возможно, это связано с тем, что при росте a увеличивается и T'_{analytic} , что приводит к снижению относительной погрешности.

В качестве иллюстрации приведем графики T'_{ANSYS} , вычисленных вдоль окружности $|\vec{x}| = 20$ внутри расчетной области с одной и той же стороной $H = 80$. На рис. 5.1 по оси абсцисс откладываются номера точек на окружности, причем номер 1 соответствует точке с $\theta = 0$. Более симметричная синяя линия изображает T'_{ANSYS} , рассчитанную для одной частицы радиуса $\sqrt{2}$, а менее симметричная оранжевая – для двух частиц радиуса 1, расположенных на расстоянии $r = 5$ друг от друга.

Как видно, несмотря на некоторые отличия, графики достаточно хорошо накладываются друг на друга, что подтверждает правильность предлагаемого подхода.

Тем самым, нами показано, что при оценке размеров расчетной области H несколько частиц могут быть заменены на одну “фиктивную” большего радиуса. При этом, если прежнее значение H много больше радиуса новой частицы, а расстояние между прежними частицами больше их радиуса, то увеличивать H не имеет смысла.

5.2. Сходимость асимптотических разложений к численному результату

Наконец, сравним значения T' в задаче о двух включениях, найденные двумя разными способами: методом мультипольных разложений и рассчитанные в пакете ANSYS.

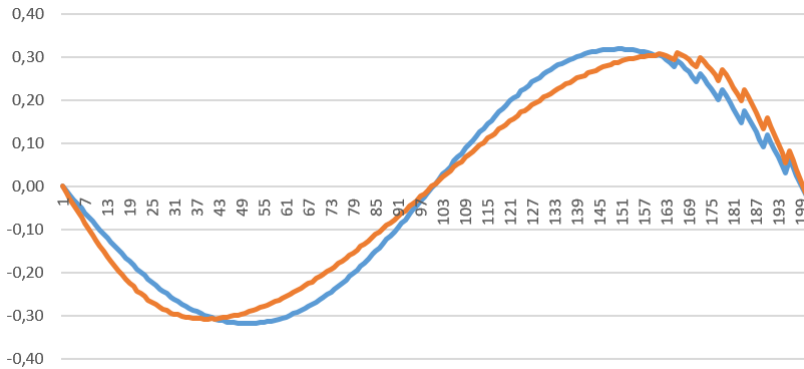


Рис. 5.1. Эффект замены двух частиц одной фиктивной
Fig 5.1. Effect of replacement of two particles by single “fictitious” one

Для этого воспользуемся результатами раздела 3.3. Будем сравнивать $T'_{(K)}$ с величинами T'_{ANSYS} для двух частиц, вычисленными вдоль тех же окружностей. При этом ограничимся значением $\varepsilon = 1/5$. Сторону H квадрата, включающего обе частицы, возьмем равной 90: к найденному ранее значению $H = 80$ прибавим удвоенное расстояние между центрами частиц.

Находя $\max |T'_{(5)} - T'_{\text{ANSYS}}|$, получим, что разница между аналитическим и численным решениями невелика: при всех сочетаниях испытываемых параметров она имеет порядок 10^{-2} . Тем самым, можно утверждать, что оба подхода к расчету поля температуры дают сходные результаты, а следовательно, оба они корректны. С другой стороны, $\max |T'_{(5)} - T'_{(4)}|$ принимает гораздо меньшие значения – порядка 10^{-5} . Это позволяет считать асимптотическое разложение практически точным при заданных параметрах.

6. Заключение

В статье исследована модельная задача о парном термодинамическом взаимодействии одинаковых круглых частиц на плоскости в присутствии постоянного на бесконечности градиента температуры. Целью исследования является сравнение двух подходов к решению аналогичных задач. Первый из этих подходов – аналитический, основанный на мультипольном представлении искомых функций и асимптотическом разложении коэффициентов этого представления. Второй подход, численный, использует в качестве инструмента МКЭ.

С помощью аналитического метода разложение полей температуры вне и внутри включений было найдено с точностью до ε^5 , где $\varepsilon < 1$ – это безразмерный радиус частиц. На конкретном примере было показано, что последовательность асимптотических приближений является фундаментальной и сходится достаточно быстро.

При отыскании распределения температуры с помощью МКЭ был решен ряд подзадач. Во-первых, были выявлены источники ошибок метода, в частности, замена бесконечной области на конечную и, как следствие, неточность условий на границе области. Во-вторых, для задачи об одиночной частице была предложена методика оценки погрешности в зависимости от геометрических и физических параметров задачи, а также управления этой погрешностью. В-третьих, в задаче о нескольких частицах предложен

способ оценки параметров расчетной области с помощью замены исходных частиц на одну, имеющую ту же теплопроводность, но больший радиус. Была показана эффективность такой замены на значительных расстояниях от центров инородных включений.

Наконец, было проведено сравнение возмущений, вносимых частицами в распределение температуры, рассчитанных разными методами. В итоге было получено, что оба подхода дают близкие результаты, что подтверждает их корректность.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бердичевский В. Л. Вариационные принципы механики сплошной среды. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. 448 с.
2. Александров В. Ю. Сопротивление сильно нагретой сферы при малых числах Рейнольдса // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 2011. № 5. С. 142–156.
3. Padrino J. C., Sprittles J. E., Lockerby J. E. Thermophoresis of a spherical particle: modelling through moment-based, macroscopic transport equations // Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 862. P. 312–347. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.907>
4. Глушак А. В., Малай Н. В., Миронова Н. Н. Решение краевой задачи для линеаризованных по скорости уравнений Навье – Стокса в случае неизотермического обтекания нагретого сфероида газообразной средой // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2012. Т. 52. № 5. С. 946–959.
5. Глушак А. В., Малай Н. В., Щукин Е. Р. Решение краевой задачи для линеаризованных по скорости уравнений Навье – Стокса в случае седиментации нагретой твердой гидрозольной частицы сферической формы // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2018. Т. 58. № 7. С. 1178–1188.
6. Batchelor G. K., Green J. T. The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field // Journal of Fluid Mechanics. 1972. Vol. 56. Pt. 2. P. 375–400. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112072002927>
7. Batchelor G. K., Green J. T. The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 // Journal of Fluid Mechanics. 1972. Vol. 56. Pt. 3. P. 401–427. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112072002435>
8. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 112–119.
9. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. 736 с.
10. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Электродинамика сплошных сред. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1959. 532 с.
11. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 632 с.
12. Де Брейн Н. Асимптотические методы в анализе. М.: Иностранная литература, 1961. 248 с.

13. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
14. Меньшакова Т. В., Сыромясов А. О. Термодинамическое взаимодействие двух круглых частиц на плоскости // Математическое и компьютерное моделирование естественно-научных и социальных проблем. Материалы XIII Международной научно-технической конференции молодых специалистов, аспирантов и студентов. – Пенза, 2019. – С. 167–171.
15. Сыромясов А. О. Термодинамическое взаимодействие сферических частиц в среде с постоянным градиентом температуры // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. 2011. № 4, ч. 3. С. 1158–1160.
16. Третьяк Л. Н. Обработка результатов наблюдений. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004. 171 с.

*Поступила 03.09.2021; доработана после рецензирования 28.10.2021;
принята к публикации 16.11.2021*

Информация об авторах:

Сыромясов Алексей Олегович, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall@yandex.ru

Понкратова Юлия Владимировна, магистрант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0741-1262>, ponkratova-yuliya@mail.ru

Меньшакова Татьяна Вячеславовна, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7728-7674>, menshakova_94@mail.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 80A19, 80M10, 80M35, 35Q79

On modelling of thermodynamic interaction of particles suspended in two-dimensional medium

A. O. Syromyasov, Yu. V. Ponkratova, T. V. Menshakova

Ogarev Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. Analytical description of temperature distribution in a medium with foreign inclusions is difficult due to the complicated geometry of the problem, so asymptotic and numerical methods are usually used to model thermodynamic processes in heterogeneous media. To be convinced in convergence of these methods the authors consider model problem about two identical round particles in infinite planar medium with temperature gradient which is constant at infinity. Authors refine multipole expansion of the solution obtained earlier by continuing it up to higher powers of small parameter, that is nondimensional radius of thermodynamically interacting particles. Numerical approach to the problem using ANSYS software is described; in particular, appropriate choice of approximate boundary conditions is discussed. Authors ascertain that replacement of infinite medium by finite-sized domain is important source of error in FEM. To find domain boundaries in multiple inclusions' problem the authors develop "fictitious particle" method; according to it the cloud of particles far from the center of the cloud acts approximately as a single equivalent particle of greater size and so may be replaced by it. Basing on particular quantitative data the dependence of domain size that provides acceptable accuracy on thermal conductivities of medium and of particles is explored. Authors establish series of numerical experiments confirming convergence of multipole expansions method and FEM as well; proximity of their results is illustrated, too.

Key Words: thermodynamic interaction, disperse medium, heat equation, multipole, asymptotic expansion, finite element method

For citation: A. O. Syromyasov, Yu. V. Ponkratova, T. V. Menshakova. On modelling of thermodynamic interaction of particles suspended in two-dimensional medium. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:4(2021), 444–460. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.444-460>

REFERENCES

1. V. L. Berdichevsky, [*Variational principles of continuum mechanics*], Nauka, Moscow, 1983 (In Russ.), 448 p.
2. V. Yu. Alexandrov, "Drag of a strongly heated sphere at small Reynolds numbers", *Fluid Dynamics*, **46**:5 (2011). DOI: <https://doi.org/10.1134/S0015462811050139>
3. J. C. Padrino, J. E. Sprittles, J. E. Lockerby, "Thermophoresis of a spherical particle: modelling through moment-based, macroscopic transport equations", *Journal of Fluid Mechanics*, **862** (2019), 312–347. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2018.907>
4. A. V. Glushak, N. V. Malay, N. N. Mironova, "[Boundary value problem for the Navier–Stokes equations linearized in rate in the case of non-isothermal flow of heated gaseous medium spheroid]", *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, **52**:5 (2012), 946–959 (In Russ.).
5. N. V. Malai, A. V. Glushak, E. R. Shchukin, "Solution of a Boundary Value Problem for Velocity-Linearized Navier–Stokes Equations in the Case of a Heated Spherical Solid

- Particle Settling in Fluid”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **58**:7 (2018), 1132–1141. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0965542518070114>
6. G.K. Batchelor, J.T. Green, “The hydrodynamic interaction of two small freely-moving spheres in a linear flow field”, *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:2 (1972), 375–400. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112072002927>
 7. G.K. Batchelor, J.T. Green, “The determination of the bulk stress in a suspension of spherical particles to order c^2 ”, *Journal of Fluid Mechanics*, **56**:3 (1972), 401–427. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112072002435>
 8. S.I. Martynov, “Hydrodynamic interaction of particles”, *Fluid Dynamics*, **33**:2 (1998), 245–251. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02698709>
 9. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics*, Butterworth–Heinemann, 1987, 539 p.
 10. L.D. Landau, E.M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press, 1960, 417 p.
 11. J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Springer Netherlands, 1983, xii, 553 p.
 12. N. de Bruijn, *Asymptotic methods in analysis*, North-Holland, Amsterdam, 1958.
 13. L.J. Segerlind, *Applied Finite Element Analysis*, John Wiley and Sons, New York / London / Sydney / Toronto, 1976.
 14. T.V. Menshakova, A.O. Syromyasov, “[Thermodynamic interaction of two round particles on a plane]”, *Mathematical and Computer Modelling of Natural Science and Social Problems (MCM-2019)*, Proc. XIII Int. Scientific-Technical Conference of young scientists, PhD students and students (Penza, 3–6 June, 2019), 167–171.
 15. A.O. Syromyasov, “[Thermodynamic interaction of spherical particles in a medium with constant temperature gradient]”, *Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod*, 2011, no. 4, 1158–1160 (In Russ.).
 16. L.N. Tretyak, *[Processing of observation results]*, Orenburg State University, 2004 (in Russ.), 171 p.

Submitted 03.09.2021; Revised 28.10.2021; Accepted 16.11.2021

Information about the authors:

Aleksei O. Syromyasov, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University (68/1, Bolshevistskaya str., Saransk 430005, Russia), Ph.D (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall@yandex.ru

Yulia V. Ponkratova, Master student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University (68/1, Bolshevistskaya str., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0741-1262>, ponkratova-yuliya@mail.ru

Tatyana V. Menshakova, Ph.D. student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University (68/1,

Bolshevistskaya str., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7728-7674>,
menshakova_94@mail.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202104.461–471

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9:532.5:539.3

Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред

Ю. А. Тамарова, П. А. Вельмисов, Н. Д. Алексанин, Н. И. Нуруллин

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»
(г. Ульяновск, Российская Федерация)

Аннотация. Рассматриваются начально-краевые задачи для систем дифференциальных уравнений, представляющие собой математические модели механической системы «трубопровод – датчик давления». В такой системе для ослабления воздействия виброускорений и высоких температур датчик с помощью трубопровода соединен с двигателем и располагается на некотором расстоянии от него. Механическая система «трубопровод – датчик давления» предназначена для измерения давления в газожидкостных средах, например, для контроля давления рабочей среды в камерах сгорания двигателей. На основе указанных моделей изучается совместная динамика упругого чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе. Движение рабочей среды описывается линейными моделями механики жидкости и газа, для описания динамики упругого чувствительного элемента применяются линейные модели механики твердого деформируемого тела. Представлены аналитические и численные методы решения исследуемых начально-краевых задач. Численное исследование начально-краевой задачи проведено на основе метода Галеркина. При аналитическом исследовании с помощью введения усредненных характеристик решение исходной двумерной задачи сведено к исследованию одномерной модели, дальнейшее исследование которой позволило свести решение одномерной задачи к изучению дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Также проведен численный эксперимент и представлен пример расчета отклонения подвижного элемента датчика.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, аэроупругость, упругий элемент, датчик давления, динамический процесс, трубопровод

Для цитирования: Тамарова Ю. А., Вельмисов П. А., Алексанин Н. Д., Нуруллин Н. И. Исследование динамических процессов в системах измерения давления газожидкостных сред // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 4. С. 461–471. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.461–471>

1. Введение

В связи с постоянным развитием техники необходимо улучшать и разрабатывать новые типы первичных преобразователей, а именно датчики давления [1–6], которые характеризуются в т. ч. аварийными режимами работы. Для получения максимально точных данных датчики рекомендуется размещать непосредственно на двигателе, но при этом на них воздействуют повышенные виброускорения и широкие диапазоны температур. Это приводит к ошибочным измерениям датчика и, в некоторых случаях, к поломке его упругого чувствительного элемента. Работа [7] посвящена влиянию на погрешность измерения датчика нестационарной температуры измеряемой среды. В работе [8] рассматриваются проблемы повышения устойчивости датчиков к вибрациям, выбора конструкционных и функциональных материалов.

Ввиду вышесказанного возникает важная проблема проектирования механической системы «трубопровод – датчик давления». Задача заключается в получении системы дифференциальных уравнений, которая связывает закон изменения давления рабочей



среды на входе в трубопровод (на выходе из камеры сгорания двигателя) и деформацию упругого чувствительного элемента датчика (размещенного на выходе из трубопровода). Эти уравнения предназначены для расчета изменения давления в двигателе по величине деформации упругого элемента. В работах [9–10] представлены некоторые модели и методы исследования механической системы «трубопровод – датчик давления». В случае несжимаемости рабочей среды такие модели рассматривались в работах [11–15]. Некоторые двумерные и трехмерные модели механической системы «трубопровод – датчик давления» и методы их исследования указаны в работе [16].

В данной статье на основе двумерной плоской модели, представляющей собой начально-краевую задачу для системы дифференциальных уравнений, исследуется совместная динамика упругого чувствительного элемента датчика давления и рабочей среды в трубопроводе в предположении, что среда идеальная и сжимаемая. Динамика чувствительного элемента описывается линейными моделями механики твердого деформируемого тела. Для описания движения рабочей среды применяются линейные модели механики жидкости и газа. Исследование предложенной начально-краевой задачи с помощью приближенного метода решения, основанного на введении усредненных характеристик, сведено к исследованию одномерной модели. Для полученной одномерной задачи проведено аналитическое исследование, позволяющее свести решение задачи к исследованию дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом, связывающего между собой величину перемещения чувствительного элемента датчика с законом изменения давления рабочей среды в двигателе.

Также предложена математическая постановка задачи для давления и проведено ее исследование на основе метода Галеркина.

2. Двумерная модель системы «трубопровод–датчик давления»

Рассмотрим математическую постановку начально-краевой задачи, описывающей двумерную плоскую модель механической системы «трубопровод–датчик давления»

$$\varphi_{tt} = a_0^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad x \in (0, l), \quad y \in (0, h), \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \varphi_y(x, h, t) = 0, \quad x \in (0, l), \quad (2.2)$$

$$\varphi_x(l, y, t) = \dot{w}(y, t), \quad y \in (0, h), \quad (2.3)$$

$$-\rho_0 \varphi_t(0, y, t) = P(y, t), \quad y \in (0, h), \quad (2.4)$$

$$P_0 - \rho_0 \varphi_t(l, y, t) - P_* = L(w(y, t)), \quad y \in (0, h). \quad (2.5)$$

В уравнении (2.5) дифференциальный (или интегро-дифференциальный) оператор $L(w(y, t))$ задается в зависимости от выбранной модели твердого деформируемого тела, например,

$$L(w(y, t)) = L^*(w(y, t)) \equiv m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}''' + f(\dot{w}, w). \quad (2.6)$$

В (2.1)–(2.6) $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости, описывающий движение сжимаемой рабочей среды в трубопроводе с прямолинейными стенками $y = 0$, $y = h$; $w(y, t)$ – деформация упругого элемента датчика, расположенного в конце трубопровода $x = l$; P_0 , a_0 , ρ_0 – давление, скорость звука, плотность, соответствующие состоянию покоя рабочей среды; P_* – внешнее воздействие на упругий элемент; $P(y, t)$ – заданный закон изменения давления рабочей среды на входе в трубопровод $x = 0$; D и m – изгибная

жесткость и погонная масса упругого элемента; β - коэффициент внутреннего демпфирования; N - сжимающее (растягивающее) элемент усилие; $f(\dot{w}, w)$ - некоторая линейная или нелинейная функция, зависящая от деформации упругого элемента $w(y, t)$ и скорости деформации $\dot{w}(y, t)$; индексами x, y, t снизу обозначены частные производные по координатам x, y и времени t , точка сверху обозначает частную производную по t , штрих - частную производную по y .

Уравнение (2.1) описывает движение идеального газа в трубопроводе; условия (2.2)–(2.3) – условия непротекания стенок трубопровода и поверхности упругого элемента; условие (2.4) определяет закон изменения давления на входе в трубопровод; уравнение (2.5) описывает динамику упругого элемента. Необходимо задать начальные условия для функций $\varphi(x, y, t)$ и $w(y, t)$, а также граничные условия для функции деформации $w(y, t)$ при $y = 0, y = h$, соответствующие типу закрепления концов упругого элемента (например, $w = w_{yy} = 0$ для шарнирного закрепления, $w = w_y = 0$ для жесткого защемления). Таким образом, имеем связанную краевую задачу для функций $\varphi(x, y, t)$ и $w(y, t)$, которую следует дополнить начальными условиями.

Для решения задачи (2.1)–(2.5) введем усредненные характеристики основных величин системы

$$\begin{aligned}\Phi(x, t) &= \int_0^h \varphi(x, y, t) dy, \quad \xi(t) = \int_0^h w(y, t) dy, \\ G(t) &= \int_0^h P(y, t) dy, \quad Q(w) = \int_0^h L(w(y, t)) dy.\end{aligned}\tag{2.7}$$

Интегрируя (2.1)–(2.5) по y в пределах от 0 до h , с учетом обозначений (2.7) и граничных условий (2.2), получим:

$$\Phi_{tt} - a_0^2 \Phi_{xx} = 0,\tag{2.8}$$

$$\Phi_x(l, t) = \dot{\xi}(t),\tag{2.9}$$

$$-\rho_0 \Phi_t(0, t) = G(t),\tag{2.10}$$

$$(P_0 - P_*)h - \rho_0 \Phi_t(l, t) = Q(w).\tag{2.11}$$

Пусть $w(y, t) = g(y)\theta(t)$, $w_0 = \int_0^h g(y) dy$, где функция $g(y)$ удовлетворяет граничным условиям в соответствии с типом закрепления концов упругого элемента (в частности, при шарнирном закреплении обоих концов элемента можно задать $g(y) = \sin \frac{\pi y}{h}$). При этом $\xi(t) = \theta(t) \cdot \int_0^h g(y) dy = w_0 \theta(t)$.

В линейной модели оператор (2.6) принимает вид $L(w(y, t)) = m\ddot{w} + Dw'''' + Nw'' + \beta\dot{w}''' + \alpha\dot{w} + \gamma w$, где α, γ - коэффициенты демпфирования и жесткости упругой связи. В этом случае

$$Q(w) = m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t),\tag{2.12}$$

где $m_0 = m \int_0^h g(y) dy$; $\alpha_0 = \alpha \int_0^h g(y) dy + \beta \int_0^h g'''(y) dy$,

$$\gamma_0 = D \int_0^h g''''(y) dy + N \int_0^h g''(y) dy + \gamma \int_0^h g(y) dy.$$

В результате решение плоской двумерной задачи (2.1)–(2.5) сведено к изучению одномерной задачи (2.8)–(2.11) для функций $\Phi(x, t)$, $\theta(t)$, в которой $\dot{\xi}(t) = w_0\dot{\theta}(t)$, а $Q(w)$ имеет вид (2.12).

3. Сведение решения задачи к исследованию уравнения с отклоняющимся аргументом

Общее решение волнового уравнения (2.8) записывается в виде

$$\Phi(x, t) = A\left(t - \frac{x}{a_0}\right) + B\left(t + \frac{x}{a_0}\right), \quad (3.1)$$

где $A\left(t - \frac{x}{a_0}\right)$, $B\left(t + \frac{x}{a_0}\right)$ – произвольные функции своих аргументов.

Удовлетворяя условиям (2.9) – (2.11), с учетом (3.1), получим

$$-\rho_0 [A'(t) + B'(t)] = G(t), \quad (3.2)$$

$$-A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right) = a_0 w_0 \dot{\theta}(t), \quad (3.3)$$

$$(P_0 - P_*)h - \rho_0 \left[A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = Q(w). \quad (3.4)$$

Из (3.3)–(3.4) найдем

$$A'\left(t - \frac{l}{a_0}\right) = -\frac{1}{2\rho_0} [(P_* - P_0)h + Q(w)] - \frac{a_0 w_0}{2} \dot{\theta}(t), \quad (3.5)$$

$$B'\left(t + \frac{l}{a_0}\right) = -\frac{1}{2\rho_0} [(P_* - P_0)h + Q(w)] + \frac{a_0 w_0}{2} \dot{\theta}(t). \quad (3.6)$$

Согласно (3.5)–(3.6)

$$A'(t) = -\frac{1}{2\rho_0} \left[(P_* - P_0)h + Q\left(\theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right) \right] - \frac{a_0 w_0}{2} \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right), \quad (3.7)$$

$$B'(t) = -\frac{1}{2\rho_0} \left[(P_* - P_0)h + Q\left(\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right)\right) \right] + \frac{a_0 w_0}{2} \dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right). \quad (3.8)$$

Подставляя (3.7)–(3.8) в (3.2), получим уравнение с отклоняющимся аргументом, связывающее величину отклонения $\theta(t)$ чувствительного элемента датчика с законом изменения давления $G(t)$ рабочей среды в двигателе:

$$\begin{aligned} Q\left(\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right)\right) + Q\left(\theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right)\right) - \rho_0 a_0 w_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = \\ = 2[G(t) + (P_0 - P_*)h]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

С учетом (2.12) уравнение (3.9) принимает вид

$$\begin{aligned} m_0 \left[\ddot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \ddot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \alpha_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] + \\ + \gamma_0 \left[\theta\left(t - \frac{l}{a_0}\right) + \theta\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] - \rho_0 a_0 w_0 \left[\dot{\theta}\left(t - \frac{l}{a_0}\right) - \dot{\theta}\left(t + \frac{l}{a_0}\right) \right] = \\ = 2[G(t) + (P_0 - P_*)h]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Если $l/a_0 = \varepsilon$ – малый параметр (например, для воздуха $a_0 \approx 330$ м/с), то, проводя в (3.10) разложение по степеням ε и отбрасывая старшие по порядку члены, можно получить приближенное уравнение (без отклонения аргумента t), связывающее $\theta(t)$ и $G(t)$:

$$(m_0 + \rho_0 w_0 l) \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t) + \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\left(m + \frac{\rho_0 w_0 l}{3} \right) \theta^{(4)}(t) + \right. \\ \left. + \alpha_0 \ddot{\theta}(t) + \gamma_0 \dot{\theta}(t) \right] + O(\varepsilon^4) = G(t) + (P_0 - P_*)h. \quad (3.11)$$

Решение этого линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно как искать классическими методами, так и исследовать численно.

4. Математическая постановка и решение задачи для давления

Введем функцию $z(x, t) = \Phi_t(x, t)$, которая является представителем давления ($P = P_0 - \rho_0 \Phi_t(x, t)$). Тогда система уравнений (2.8)–(2.12) примет вид

$$z_{tt} - a_0^2 z_{xx} = 0, \quad (4.1)$$

$$-\rho_0 z(0, t) = G(t), \quad (4.2)$$

$$z_x(l, t) = w_0 \ddot{\theta}(t), \quad (4.3)$$

$$Q(w) \equiv m_0 \ddot{\theta}(t) + \alpha_0 \dot{\theta}(t) + \gamma_0 \theta(t) = (P_0 - P_*)h - \rho_0 z(l, t). \quad (4.4)$$

Проведем численно-аналитическое исследование задачи (4.1)–(4.4) на основе метода Галеркина.

а) Функцию $z(x, t)$ представим в виде ряда по полной на отрезке $[0, l]$ системе функций $s_n(x) = \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = \frac{n\pi}{l}$, удовлетворяющих однородным граничным условиям $s_n(0) = 0$, $s_n(l) = 0$:

$$z(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{n=1}^{n_0} z_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}. \quad (4.5)$$

Удовлетворяя условиям (4.2), (4.4), найдем:

$$a(t) = -\frac{1}{\rho_0} G(t), \quad b(t) = -\frac{1}{\rho_0 l} [Q(w) - (P_0 + P_*)h - G(t)]. \quad (4.6)$$

После подстановки (4.5)–(4.6) в (4.3) получим

$$Q(w) + \rho_0 l w_0 \ddot{\theta}(t) - \rho_0 l \sum_{n=1}^{n_0} \lambda_n z_n(t) \cos \lambda_n l = (P_0 - P_*)h + G(t). \quad (4.7)$$

Подставив (4.5)–(4.6) в уравнение (4.1) запишем:

$$(\ddot{Q}(w) - \ddot{G}(t))x + l\ddot{G}(t) - \rho_0 l \sum_{n=1}^{n_0} (\ddot{z}_n(t) + a_0^2 \lambda_n^2 z_n(t)) \sin \lambda_n x = 0. \quad (4.8)$$

Согласно методу Галеркина, проецируя уравнения (4.8) на систему базисных функций $\{\sin \lambda_n x\}_{n=1}^{n_0}$, получим:

$$\ddot{z}_n(t) + a_0^2 \lambda_n^2 z_n(t) = \frac{2}{\rho_0 l} \ddot{G}(t) \int_0^l \sin \lambda_n x dx + \frac{2}{\rho_0 l^2} [\ddot{Q}(w) - \ddot{P}(t)] \int_0^l x \sin \lambda_n x dx, \quad (4.9)$$

$$n = 1 \div n_0.$$

Таким образом, получена система обыкновенных дифференциальных уравнений (4.7), (4.9) для неизвестных функций $\theta(t)$ и $z_n(t)$, дополняя которую начальными условиями, имеем задачу Коши.

б) Функцию $z(x, t)$ представим в виде ряда по полной на отрезке $[0, l]$ системе функций $s_n(x) = \sin \lambda_n x$, $\lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}$, удовлетворяющих однородным граничным условиям $s_n(0) = 0$, $s_n'(l) = 0$:

$$z(x, t) = a(t) + b(t)x + \sum_{n=1}^{n_0} z_n(t) \sin \lambda_n x, \quad \lambda_n = \frac{(2n-1)\pi}{2l}. \quad (4.10)$$

Удовлетворяя условиям (4.2)–(4.3), найдем:

$$a(t) = -\frac{1}{\rho_0} P(t), \quad b(t) = \ddot{w}(t). \quad (4.11)$$

Тогда, подставив (4.10)–(4.11) в уравнение (4.4), получим

$$\rho_0 w_0 l \ddot{\theta}(t) + \rho_0 \sum_{n=1}^{n_0} z_n(t) \sin \lambda_n l - (P_0 - P_*)h + Q(w) - G(t) = 0. \quad (4.12)$$

Подставив (4.10)–(4.11) в уравнение (4.1) и спроецировав невязку полученного уравнения на систему базисных функций $\{\sin \lambda_n x\}_{n=1}^{n_0}$, запишем:

$$\ddot{z}_n(t) + a_0^2 \lambda_n^2 z_n(t) + \frac{2w_0}{l} \ddot{\theta}(t) \int_0^l x \sin \lambda_n x dx = \frac{2}{\rho_0 l} \ddot{G}(t) \int_0^l \sin \lambda_n x dx, \quad n = 1 \div n_0. \quad (4.13)$$

В результате имеем систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4.12)–(4.13) для неизвестных функций $\theta(t)$ и $z_n(t)$, дополнив которую начальными условиями, получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

5. Численный эксперимент

В качестве примера рассмотрим механическую систему. Рабочая среда – воздух ($\rho_0 = 1$). Пластина (упругий элемент) изготовлена из алюминия. Параметры системы: $P_0 = P_* = 10^5$, $a_0 = 331$, $l = 5$, $h = 0,05$, толщина пластины $h_{pl} = 0,001$, $m = 2,7$, $D = 6,596$, $N = 1000$, $\beta = 0,5$, $\alpha = 0,3$, $\gamma = 0,2$ (все значения приведены в системе СИ); $G(t) = 10^4(1 + \cos(2t))$.

С помощью системы Mathematica численно получены решение уравнения (3.11), решение системы (4.7)–(4.9) и решение системы (4.12)–(4.13). При решении уравнения (3.11) начальные условия заданы в виде: $\theta(0) = \frac{G(0)}{\gamma_0}$, $\dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = 0$. Пример

расчета представлен на рисунке 5.1 а). Для расчета систем (4.7), (4.9) и (4.12), (4.13) начальные условия заданы в следующем виде: $z_n(0) = \dot{z}_n(0) = 0, k = 1, 2, \dots, n_0, \theta(0) = \frac{G(0)}{\gamma_0}, \dot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = \ddot{\theta}(0) = 0$. На рисунке 5.1,б) представлены примеры расчетов только для системы (4.7), (4.9) при $n_0 = 10$, т. к. численные расчеты для системы (4.12)–(4.13) полностью идентичны.

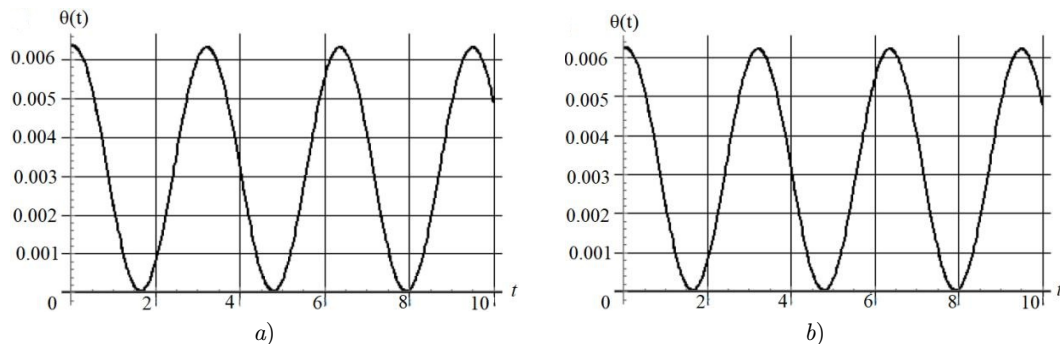


Рис. 5.1. График деформации подвижного элемента датчика: а) решение уравнения (3.11); б) решение методом Галеркина

Fig 5.1. The graph of the deflection of the moving element of the sensor: a) the solution of equation (3.11); b) the solution by the Galerkin method.

Из Рис. 5.1 а)-б) видно, что решение задачи для давления (4.1)–(4.4), построенное с помощью метода Галеркина (Рис. 5.1 б), достаточно точно согласуется с численным решением уравнения (3.11) (Рис. 5.1 а).

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проект № 18-41-730015).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Эткин Л. Г. Виброчастотные датчики. Теория и практика. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. 408 с.
2. Казарян А. А., Грошев Г. П. Универсальный датчик давления // Измерительная техника. 2008. №3. С. 26–30.
3. Датчики измерительных систем: в 2-х кн. / Ж. Аш [и др.] ; пер. с фр. М.: Мир, 1992.
4. Агейкин Д. И., Костина Е. Н., Кузнецова Н. Н. Датчики контроля и регулирования. М.: Н. Машиностроение, 1965. 928 с.
5. Корсунов В. П. Упругие чувствительные элементы. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1980. 264 с.
6. Андреева Л. Е. Упругие элементы приборов. 2-е изд. М.: Машиностроение, 1981. 392 с.

7. Белозубов Е. М., Мокров Е. А., Тихомиров Д. В. Минимизация погрешности тонкопленочных тензорезисторных датчиков давления при воздействии нестационарной температуры // Датчики и системы. 2004. №1. С.26–29.
8. О конструктивно-технологическом совершенствовании тензорезисторных тонкопленочных датчиков давлений / Е. А. Мокров [и др.] // Датчики и системы. 2008. № 6. С.2–7.
9. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления» / А. В. Анкилов [и др.]. Ульяновск: УлГТУ, 2008. 188 с.
10. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В. Исследование динамики деформируемых элементов некоторых аэрогидроупругих систем. Ульяновск: УлГТУ. 2018. 152 с.
11. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическая модель системы «трубопровод – датчик давления» // Механика и процессы управления: сб. науч. тр. Ульяновск: УлГТУ, 2002. С. 9–15.
12. Вельмисов П. А., Горбоконенко В. Д., Решетников Ю. А. Математическое моделирование механической системы «трубопровод – датчик давления» // Датчики и системы. 2003. № 6(49). С. 12–15.
13. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., Серебрянникова Е. С. Математическое моделирование системы «трубопровод - датчик давления» // Журнал Средневожского математического общества. 2010. Т. 12, №4. С.85–93.
14. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V. Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1353, 012085, pp.1–6. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>.
15. Velmisov P. A., Pokladova Yu. V., Mizher U. J. Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor” // AIP Conference Proceedings 2172, 030006 (2019). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5133495>.
16. Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А. Математическое моделирование систем измерения давления в газожидкостных средах // Журнал Средневожского математического общества. 2020. Т. 22, №3. С.352–367. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>

*Поступила 9.09.2021; доработана после рецензирования 25.11.2021
принята к публикации 16.11.2021*

Информация об авторах:

Тамарова Юлия Александровна, соискатель кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovau@mail.ru

Вельмисов Петр Александрович, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Алексанин Николай Дмитриевич, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9586-6506>, nickx73@yandex.ru

Нуруллин Наиль Ильдарович, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7095-426X>, yehekkbyy@mail.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 35Q35, 35Q74, 65M06

Investigation of dynamic processes in pressure measurement systems for gas-liquid media

Yu. A. Tamarova, P. A. Velmisov, N. D. Aleksanin, N. I. Nurullin

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. Initial-boundary value problems for systems of differential equations are considered, which are mathematical models of the mechanical system "pipeline - pressure sensor". In such a system, to mitigate the effects of vibration accelerations and high temperatures, the sensor is located at a certain distance from the engine and is connected to it via a pipeline. The "pipeline - pressure sensor" system is designed to measure pressure in gas-liquid media, for example, to control the pressure of the working medium in the combustion chambers of engines. On the basis of the proposed models, the joint dynamics of the sensitive element of the pressure sensor and the working medium in the pipeline is studied. To describe the motion of the working medium, linear models of fluid and gas mechanics are used, to describe the dynamics of a sensitive element, linear models of the mechanics of a deformable solid are applied. Analytical and numerical methods for solving initial-boundary value problems under study are presented. The numerical study of the initial-boundary value problem was carried out on the basis of the Galerkin method. In analytical study using the introduction of averaged characteristics, the solution of the original two-dimensional problem is reduced to the study of a one-dimensional model, whose further study made it possible to reduce the solution of the problem to the study of a differential equation with a deviating argument. Also, a numerical experiment is carried out and an example of calculating the deflection of the sensor's moving element is presented.

Key Words: differential equations, aeroelasticity, elastic element, pressure sensor, dynamics, pipeline

For citation: Yu. A. Tamarova, P. A. Velmisov, N. D. Aleksanin, N. I. Nurullin. Investigation of dynamic processes in pressure measurement systems for gas-liquid media. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:4(2021), 461–471. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202104.461-471>

REFERENCES

1. L. G. Etkin, [*Vibration sensors. Theory and practice*], Publishing House of Moscow State Technical University. N.E. Bauman, Moscow, 2004 (In Russ.), 408 p.
2. A. A. Kazaryan, G. P. Groshev, "[Universal pressure sensor]", *Measuring Equipment*, **3** (2008), 26–30 (In Russ.).

3. J. Ash et al, *[Sensors of measuring systems: in 2 books. Book 2.]*, Mir Publ., Moscow, 1992 (In Russ.).
4. D. I. Agejkin, E. N. Kostina, N. N. Kuznecova, *[Sensors of control and regulation]*, Mashinostroyeniye Publ., M., 1965 (In Russ.), 928 p.
5. V. P. Korsunov, *[Elastic sensitive elements]*, Publishing House of the Saratov University, Saratov, 1980 (In Russ.), 264 p.
6. L. E. Andreeva, *[Elastic elements of devices. 2nd ed.]*, Mashinostroyeniye Publ., Moscow, 1981 (In Russ.), 392 p.
7. E. M. Belozubov, E. A. Mokrov, D. V. Tihomirov, “[Minimizing the error of thin-film strain gauge pressure sensors when exposed to non-stationary temperature]”, *Sensors and systems*, **1** (2004), 26–29 (In Russ.).
8. E. A. Mokrov, D. V. Lebedev, V. P. Bazaev, E. V. Efremov, I. A. Semina, P. A. Kolchin, “[On the design and technological improvement of strain gauge thin-film pressure sensors]”, *Sensors and Systems*, **6** (2008), 2–7 (In Russ.).
9. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, Yu. V. Pokladova, *[Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”]*, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2008 (In Russ.), 188 p.
10. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, *[Study of the dynamics of deformable elements of some aerohydroelastic systems]*, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2018 (In Russ.), 152 p.
11. P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, Yu. A. Reshetnikov, “[Mathematical model of the “pipeline - pressure sensor” system]”, *Mechanics and control processes: collection of scientific papers*, 2002, 9–15.
12. P. A. Velmisov, V. D. Gorbokonenko, Yu. A. Reshetnikov, “[Mathematical modeling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor”]”, *Sensors and Systems*, **6**:49 (2003), 12–15 (In Russ.).
13. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, E. S. Serebryannikova, “[Mathematical modeling of the system “pipeline - pressure sensor”]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **12**:4 (2010), 85–93 (In Russ.).
14. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, “Mathematical modelling of the “pipeline – pressure sensor” system”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1353** (2019), 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1353/1/012085>
15. P. A. Velmisov, Yu. V. Pokladova, U. J. Mizher, “Mathematical modelling of the mechanical system “pipeline – pressure sensor””, *AIP Conference Proceedings*, **2172** (2019). DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5133495>
16. P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, “[Mathematical modeling of pressure measurement systems in gas-liquid media]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **22**:3 (2020), 352–367 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202003.352-367>

Submitted 9.09.2021; Revised 25.11.2021; Accepted 16.11.2021

Information about the authors:

Yuliya A. Tamarova, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovaua@mail.ru

Petr A. Velmisov, Head of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Nikolai D. Aleksanin, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9586-6506>, nickx73@yandex.ru

Nail I. Nurullin, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7095-426X>, yehekkbyy@mail.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the author declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 75-ЛЕТИЮ

ВЯЧЕСЛАВА ЗИГМУНДОВИЧА ГРИНЕСА



13 декабря 2021 г. исполняется 75 лет известному специалисту по теории динамических систем, профессору, доктору физико-математических наук Вячеславу Зигмундовичу Гринесу.

Отец В. З. Гринеса, Зигмунд Яковлевич, родом из Польши. До четвертого курса он учился на юридическом факультете Варшавского университета, но после оккупации Польши фашистской Германией вынужден был бежать из страны. Зигмунд Яковлевич попал в г. Львов, где продолжил учебу на юридическом факультете Львовского университета, после окончания которого был направлен на работу в адвокатуру г. Коканда Узбекской ССР. Здесь он познакомился с Беллой Павловной Дайн, которой было поручено учить Зигмунда русскому языку. Впоследствии Белла Павловна стала его женой и мамой Вячеслава Зигмундовича. После войны семья переехала на короткий срок в г. Изяславль Украинской ССР, где и родился маленький Слава. Вскоре семья переехала в г. Муром Владимирской области, где В. З. Гринес закончил среднюю школу № 13.

В 1964 г. В. З. Гринес поступил на радиофизический факультет Горьковского (в н. в. – Нижегородского) государственного университета им. Н. И. Лобачевского. После первого курса он перевелся на факультет вычислительной математики и кибернетики, где слушал лекции Е. А. Леонтович-Андроновой и Л. П. Шильникова по качественной теории дифференциальных уравнений. На старших курсах он начал посещать семинары отдела дифференциальных уравнений НИИ прикладной математики и кибернетики, который тогда возглавляла Е. А. Леонтович-Андропова.

В 1969 г. с отличием окончил университет (руководителем дипломной работы был Л. П. Шильников) и был приглашен на работу в тот же отдел, в котором тогда работали Л. П. Шильников, С. Х. Арансон, Л. А. Беляков, В. В. Быков, Н. К. Гаврилов и несколько недавно закончивших университет молодых математиков (В. Афраймович, Л. Лерман, В. Медведев, А. Морозов и др.). Годом позже, после окончания университета, в отдел пришел Григорий Полотовский. Атмосферу сотрудничества и научного энтузиазма, царившую в отделе в те годы, Вячеслав Зигмундович и по сей день воссоздает в процессе общения с коллегами и учениками.

С конца 60-х – начала 70-х гг. прошлого века в теории динамических систем активно развивалось направление, которое позже получило название «гиперболическая

революция». В центре внимания научного сообщества были динамические системы с гиперболической структурой на неблуждающем множестве, которые были введены в работах Аносова и Смейла. Напомним, что пример «подковы» был построен С. Смейлом в 1961 г., а Д. В. Аносов ввел гиперболические системы в 1962 г. Особый интерес вызывали системы, имеющие бесконечное множество седловых периодических орбит.

В качестве исследовательской задачи Л. П. Шильников предложил В. З. Гринесу классифицировать одномерные базисные множества диффеоморфизмов поверхностей, удовлетворяющих аксиоме С. Смейла. Однако быстро стало понятно, что сначала нужно изучить потоки на таких поверхностях, и В. З. Гринес был отправлен «под крыло» С. Х. Арансона, специалиста по потокам на двумерных поверхностях, с которым они начали решать задачу классификации транзитивных потоков на замкнутых ориентируемых поверхностях отрицательной кривизны. За 75 лет до этого близкая задача была решена А. Пуанкаре для транзитивных потоков без состояний равновесия на двумерном торе – ориентируемой поверхности рода один – с помощью введенного им числа вращения. Переход к классификации потоков на поверхностях большего рода имеет принципиальные трудности, связанные с тем, что потоки на таких поверхностях всегда обладают седловыми состояниями равновесия и поведение траекторий около них существенно усложняет задачу.

В 1973 г. С. Х. Арансон и В. З. Гринес опубликовали работу, в которой было получено необходимое и достаточное условие топологической эквивалентности транзитивных потоков на замкнутой ориентируемой поверхности рода большего единицы. Этот результат стал важным шагом в изучении потоков на поверхностях и принес авторам работы широкую известность. Дальнейшее развитие полученных В. З. Гринесом, С. Х. Арансоном и Е. В. Жужомой результатов привело к установлению глубоких взаимосвязей между асимптотическим поведением траекторий на универсальном накрытии поверхности плоскостью Лобачевского и свойствами потоков, слоений и ламинаций на самой поверхности. Этот результат стал значительным вкладом в теорию, которая позднее стала называться теорией Аносова-Вейля, о взаимосвязях между асимптотическим поведением кривых, возникающих в динамических системах, и асимптотическим поведением соответствующих геодезических кривых. Д. В. Аносов проявлял постоянное внимание к результатам, полученным В. З. Гринесом с его коллегами и учениками. Обо всех этих результатах делались доклады на семинарах, руководимых Д. В. Аносовым, либо в математическом институте им. В. А. Стеклова, либо в МГУ имени М. В. Ломоносова.

В. З. Гринес обобщил метод изучения транзитивных потоков и с его помощью классифицировал ориентируемые одномерные базисные множества диффеоморфизмов на замкнутых поверхностях, вернувшись тем самым к тематике, предложенной ему ранее Л. П. Шильниковым. Полученные результаты вместе с топологической классификацией транзитивных потоков составили содержание кандидатской диссертации В. З. Гринеса, защищенной в 1976 г. (руководитель – С. Х. Арансон). Его дальнейшие научные интересы были связаны с исследованиями структурно устойчивых динамических систем с регулярной и хаотической динамикой.

В 1977 г., после защиты диссертации, В. З. Гринес перешел на работу в Горьковский сельскохозяйственный институт (ГСХИ) (в н. в. – Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия) на кафедру высшей математики и теоретической механики (заведовал этой кафедрой с 1994 по 2013 гг.). С 2006 по 2015 год он работал на кафедре численного и функционального анализа ННГУ в должности профессора, а с 2015 г. по настоящее время является главным научным сотрудником и ординарным

профессором НИУ ВШЭ.

В восьмидесятые и девяностые годы прошлого века В. З. Гринесом, совместно с его учениками А. Н. Безденежных и Х. Х. Калаем (в тот период – сотрудниками кафедры высшей математики и теоретической механики ГСХИ), были получены условия топологической сопряженности структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с нетривиальными одномерными и нульмерными базисными множествами без пар сопряженных точек, а также диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий. Эти результаты легли в основу докторской диссертации В. З. Гринеса на тему «Топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов на поверхностях», защищенной в 1997 г., из которой, с учетом результатов Р. В. Плыкина и Ю. А. Жирова, следует топологическая классификация произвольных одномерных аттракторов диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме С. Смейла, на замкнутых поверхностях. В процессе работы над диссертацией была обнаружена тесная взаимосвязь между ограничениями диффеоморфизмов на аттракторы и теорией Нильсена-Терстона.

Особым стилем, выделяющим работы Вячеслава Зигмундовича, является сочетание глубоких топологических методов и результатов с методами собственно теории динамических систем. Этот стиль позволил ему получить (в сотрудничестве с коллегами и учениками) ряд фундаментальных результатов в теории динамических систем. В 2000 г. в совместной работе В. З. Гринеса и Х. Бонатти был обнаружен новый топологический инвариант структурно устойчивых диффеоморфизмов Морса-Смейла на замкнутых ориентируемых трехмерных многообразиях, описывающий вложение (вообще говоря, дикое) инвариантных многообразий седловых периодических точек в несущее многообразие. Развитие методов этой работы в серии дальнейших совместных публикаций с Х. Бонатти, В. С. Медведевым, Э. Пеку и О. В. Починкой привело к полной топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных замкнутых многообразиях. Полученные результаты составили основное содержание докторской диссертации О. В. Починки (2011 г.), научным консультантом которой был В. З. Гринес. Развитые в этих исследованиях топологические методы были применены в совместных работах В. З. Гринеса, О. В. Починки и Ф. Лауденбаха в 2005–2012 гг. к решению проблемы существования энергетической функции для трехмерных диффеоморфизмов Морса-Смейла. В это же время вместе с О. В. Починкой и Е. Я. Гуревич была решена проблема Дж. Палиса о нахождении условий вложения каскада Морса-Смейла в топологический поток на трехмерных многообразиях. Параллельно в кандидатской диссертации Т. М. Митряковой, защищенной под руководством Вячеслава Зигмундовича, были получены результаты по топологической классификации негрубых систем на поверхностях с конечным гиперболическим неблуждающим множеством и с конечным числом модулей топологической сопряженности.

В рамках исследования систем с хаотической динамикой (начиная с 2002 г. по н. в.) В. З. Гринесом совместно с Е. В. Жужомой, В. С. Медведевым, О. В. Починкой и Ю. А. Левченко была получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов трехмерных многообразий с хаотической динамикой, неблуждающие множества которых лежат на двумерных поверхностях. Было доказано, что единственным замкнутым трехмерным многообразием, допускающим структурно устойчивый диффеоморфизм с растягивающим двумерным аттрактором, является трехмерный тор. Кроме этого, была получена классификация многообразий, допускающих структурно устойчивые диффеоморфизмы, неблуждающие множества которых целиком состоят из двумерных предельных множеств.

Примерно в это же время В. З. Гринесом совместно с О. В. Починкой и С. ван Стрином получена топологическая классификация омега-устойчивых систем с одномерными аттракторами и репеллерами и конечным числом модулей устойчивости на поверхностях. Обнаруженные в работах В. З. Гринеса глубокие взаимосвязи между динамикой трехмерных систем с регулярной динамикой и топологией несущего многообразия нашли применение при изучении топологии магнитных полей в короне Солнца. В 2015 г. В. З. Гринесом совместно с Е. В. Жужомой, Т. В. Медведевым и О. В. Починкой были получены условия существования сепараторов в магнитном поле хорошо проводящей среды.

Начиная с 2001 г. и по н. в. В. З. Гринес уделяет большое внимание изучению регулярных и хаотических структурно устойчивых диффеоморфизмов на многообразиях размерности большей трех. Совместно с Е. В. Жужомой им было доказано, что несущее многообразие структурно устойчивого диффеоморфизма, который имеет ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности 1, является многомерным тором. В кандидатской диссертации Е. Я. Гуревич, защищенной в 2009 г. под руководством В. З. Гринеса, была получена топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере размерности 4 и выше при условии отсутствия гетероклинических пересечений. В совместных работах с Е. Я. Гуревич, В. С. Жужомой, О. В. Починкой и В. С. Медведевым изучена топология ориентируемых многообразий размерности 4 и выше, допускающих потоки и диффеоморфизмы Морса-Смейла; получена топологическая классификация содержательных классов таких систем и достаточные условия включения диффеоморфизмов Морса-Смейла в топологические потоки.

В последнее время В. З. Гринес уделяет особое внимание теории эндоморфизмов (необратимых отображений). Совместно с Е. В. Жужомой и Е. Д. Куренковым им построена т. н. хирургическая операция Смейла для двумерного эндоморфизма Аносова и доказано, что такая операция приводит к появлению одномерного сжимающегося репеллера, но не может привести к появлению одномерного растягивающегося аттрактора (что контрастирует с ситуацией для диффеоморфизмов Аносова).

В 2011 г. В. З. Гринесом и О. В. Починкой была опубликована монография «Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три», переработанный вариант которой в соавторстве с Т. В. Медведевым и О. В. Починкой опубликован в издательстве Springer в 2016 г.

В 2021 г. вышла монография В. З. Гринеса и Е. В. Жужомы «Surface Lamination and Chaotic Dynamical Systems», в которой изложены основы теории Аносова-Вейля и применения этой теории к проблемам классификации динамических систем на поверхностях со сложными инвариантными множествами.

Известно, что многие математики увлекаются музыкой. Вячеслав Зигмундович не является исключением. Он закончил музыкальную школу по классу баяна, участвовал в студенческой самодеятельности во время учебы в университете. До сих пор на многих дружеских ужинах во время конференций он является душой компании, поддерживая пение участников аккомпанементом на своем баяне, которым владеет виртуозно. Шестьдесят лет назад юного Славу пригласили в пионерский лагерь помочь подготовить концерт для родителей (в лагере не было баяниста). Он успешно справился с задачей, а заодно познакомился с Таней Голубевой, которая участвовала в танцевальном коллективе, а через восемь лет стала его женой. Музыкальные гены передались его дочкам, Ольге и Наташе, которые работают в Нижегородской консерватории. Внук Павел и внучка Лиза уже сейчас в юные годы являются лауреатами престижных музыкальных конкурсов в России и за рубежом.

В. З. Гринес является членом редколлегий журналов «Russian Journal of Non-Linear Dynamics», «Журнал Средневолжского математического общества» и «Динамические системы». Он неоднократно являлся и является участником и руководителем престижных грантов, таких как грант Президента России ведущим научным школам, гранты РФФИ и РНФ, грант ИНТАС и фонда Сороса, гранты CNRS (Франция), совместный грант РФФИ и Королевского математического общества (Великобритания).

В. З. Гринес является членом диссертационных советов Нижегородского и Владимирского государственных университетов, а также членом экспертного совета РФФИ. Вячеслав Зигмундович много времени и энергии посвящает подготовке научных кадров. В разные годы он читал лекции по курсам «Современная теория динамических систем», «Современные проблемы непрерывной математики», «История математики», «Топологическая классификация структурно устойчивых систем в размерности 2 и 3», «Математический анализ», «Введение в динамические системы», руководил и продолжает руководить научным семинаром по топологическим методам в динамике. Под его руководством защищены шесть кандидатских диссертаций, четыре из которых – за последние годы (О. В. Починка, 2004; Е. Я. Гуревич, 2009; Т. М. Митрякова, 2011; Ю. А. Левченко, 2014). Он награжден знаком «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации».

Свой юбилей Вячеслав Зигмундович встречает в расцвете творческих сил. От всей души желаем ему крепкого здоровья, новых научных достижений, ярких учеников, счастья и успехов!

О. В. Анашкин, П. М. Ахметьев, Д. В. Баландин, М. К. Барина, И. В. Бойков, А. Н. Безденежных, В. Н. Бельх, П. А. Вельмисов, И. Ю. Власенко, О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина, В. К. Горбунов, С. Д. Глызин, С. В. Гонченко, А. С. Городецкий, Е. В. Губина, Е. Я. Гуревич, А. А. Давыдов, Л. С. Ефремова, Р. В. Жалнин, А. Ю. Жиров, Е. В. Жужома, Н. И. Жукова, С. Х. Зинина, Ю. С. Ильяшенко, Н. В. Исаенкова, А. О. Казаков, А. В. Клименко, С. А. Комеч, Ю. А. Кордюков, В. Е. Круглов, Е. В. Круглов, Е. Б. Кузнецов, С. К. Ландо, Ю. А. Левченко, Л. М. Лерман, С. И. Максименко, М. И. Малкин, Д. С. Мальшев, В. К. Мамаев, Т. Ф. Мамедова, В. С. Медведев, Т. В. Медведев, Д. И. Минц, Т. М. Митрякова, А. Д. Морозов, А. И. Морозов, Е. В. Ноздринова, Е. Н. Пелиновский, Я. Б. Песин, А. С. Пиковский, С. Ю. Пилюгин, Г. М. Полотовский, О. В. Починка, И. Д. Ремизов, П. Е. Рябов, А. С. Скрипченко, А. В. Слюняев, С. В. Соколов, Л. А. Сухарев, Е. А. Таланова, В. А. Тиморин, С. Б. Тихомиров, В. Ф. Тишкин, Д. В. Трещев, Д. В. Тураев, Н. Г. Чебочко, Е. Е. Чилина, П. А. Шаманаев, Д. Д. Шубин, Е. И. Яковлев

К 75-ЛЕТИЮ ЕВГЕНИЯ БОРИСОВИЧА КУЗНЕЦОВА



Поздравляем члена редакционной коллегии журнала – доктора физико-математических наук, профессора кафедры моделирования динамических систем Московского авиационного института (г. Москва, Россия) Евгения Борисовича Кузнецова с юбилеем. Желаем Евгению Борисовичу крепкого здоровья, семейного счастья и дальнейших творческих успехов!

Редколлегия журнала

Средне-Волжское математическое общество

*Коллектив факультета математики
и информационных технологий*

*Национального исследовательского
Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва*

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы – не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

— *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом* (*American Mathematical Society*) и *Европейским математическим обществом* (*European Mathematical Society*). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmobib.sty. Этот пакет разработан на основе пакета amsbib.sty.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английский язык (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английский, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р. А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р. А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nyh uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

— *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

— *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

— *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

— *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

— *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukci>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение **table** с вложенным окружением **tabular**:


```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \\\ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \\\
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \\\
\hline
1 & 2 \\\
\hline
3 & 4 \\\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```
\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}
```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```
\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}
```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```
\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая под-
пись_на_английском_языке}
```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```
\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_фай-
ла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_под-
пись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжа-тия}
{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжа-тия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmobib.sty. Основой этого пакета является стилизованный файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета svmobib.sty

Статьи в журналах на русском языке

В разделе thebibliography:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в
виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневожского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными
ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибилов
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Высш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib6}
\by В. Г. Малинов

```

\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package `svmo.sty` and `svmobib.sty`. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named `<LastName>.tex`. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

`\begin{table}[h!]`

`\caption{Table name} \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English \label{shamanaevtable1}`

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file name.eps} {degree_of_compression} {file name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmobib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmobib.sty package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

```
\lang In Russ.
```

Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
```

```
\by M. J. Berger, J. Oliger
```

```
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
```

```
\jour Journal of Computational Physics
```

```
\yr 1984
```

```
\vol 53
```

```
\pages 484–512
```


Articles in the electronic journals in Russian

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticznogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

Conference proceedings in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

Алфавитный указатель авторов

| | | | |
|-----------------|-----|------------------|-----|
| Алексанин Н. Д. | 461 | Ладонкина М. Е. | 412 |
| Бойков И. В. | 360 | Лытаев А. А. | 433 |
| Бойкова А. И. | 360 | Мамедова Т. Ф. | 393 |
| Васютин М. А. | 424 | Меньшакова Т. В. | 444 |
| Вельмисов П. А. | 461 | Нуруллин Н. И. | 461 |
| Веселова Е. А. | 394 | Повещенко Ю. А. | 412 |
| Гринес В. З. | 379 | Понкратова Ю. В. | 444 |
| Гуревич Е. Я. | 379 | Попов И. Ю. | 433 |
| Данилова Е. В. | 424 | Рагимли О. Р. | 412 |
| Дерюгин Ю. Н. | 394 | Сюромясов А. О. | 444 |
| Киреичева Е. Ю. | 394 | Тамарова Ю. А. | 461 |
| Кузьмичев Н. Д. | 424 | Чжан Х. | 412 |

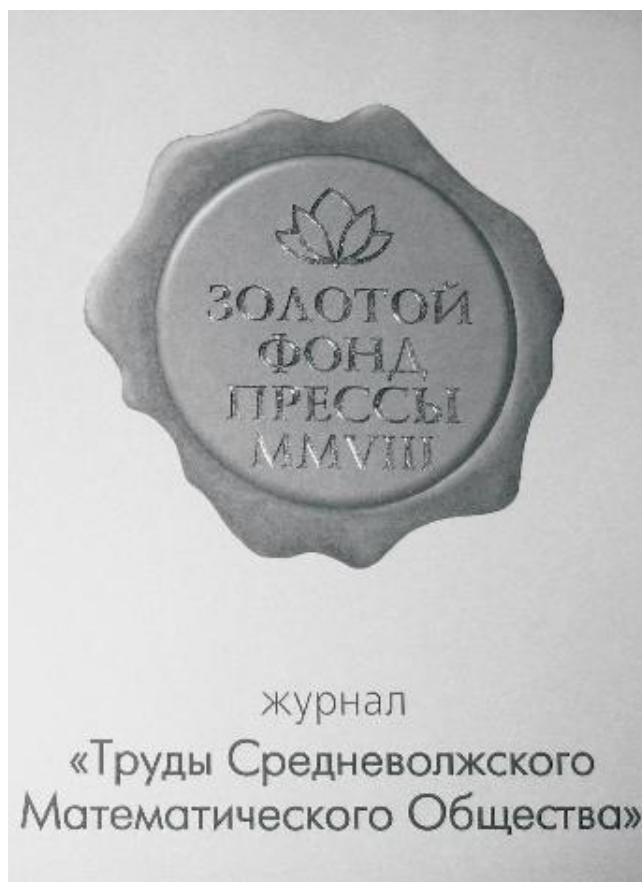
Яковлев Е. И. 379

Author Index

| | | | |
|-------------------|-----|-------------------|-----|
| Aleksanin N. D. | 471 | Menshakova T. V. | 444 |
| Boykov I. V. | 360 | Nurullin N. I. | 461 |
| Boykova A. I. | 360 | Ponkratova Yu. V. | 444 |
| Danilova E. V. | 424 | Popov I. Yu. | 433 |
| Deryugin Yu. N. | 394 | Poveshenko Y. A. | 412 |
| Grines V. Z. | 379 | Ragimli O. R. | 412 |
| Gurevich E. Ya. | 379 | Syromyasov A. O. | 444 |
| Kireicheva E. Yu. | 394 | Tamarova Yu. A. | 461 |
| Kuzmichev N. D. | 424 | Vasyutin M. A. | 424 |
| Ladonkina M. E. | 412 | Velmisov P. A. | 461 |
| Lytaev A. A. | 433 | Veselova E. A. | 394 |
| Mamedova T. F. | 394 | Yakovlev E. I. | 379 |

Zhang H. 412

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Редактор: *Зинина С. Х.*
Перевод: *Сыромясов А. О.*
Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Подписано в печать 14.12.2021. Дата выхода в свет 30.12.2021. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 13,3 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1977.

Типография: Издательство федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования «Национальный
исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва»

Адрес типографии: 430005, Россия, Республика Мордовия,
г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Editor: *S. Kh. Zinina*
Translation: *A. O. Syromyasov*
Desktop publishing: *V. A. Atryahin*

Signed to print 14.12.2021. Date of publishing 30.12.2021. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 13,3.

Number of copies 100. Order no. 1977.

Printing House: Publishing House of National Research Mordovia State University
Address of Printing House: 24 Sovetskay St., Saransk 430005,
Republic of Mordovia, Russia

