

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

**ЖУРНАЛ
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА**

**Middle Volga
Mathematical Society Journal**

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ **23** $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ **3**

2021

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 23, № 3. 2021

DOI 10.15507/2079-6900.23.202103

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 1 раз в квартал

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 23, NO. 3. 2021

DOI 10.15507/2079-6900.23.202103

Published since December 1998

Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.



FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малайзийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института, БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Ион Анка Вероника — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

Aleksandr S. Andreev — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Vyacheslav Z. Grines — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Chief Research Scientist, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Sergey I. Martynov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Olga V. Pochinka — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Nikolay D. Morozkin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Petr V. Senin — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Anca V. Ion — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

Содержание

МАТЕМАТИКА

- И. В. Бойков, В. А. Руднев, А. И. Бойкова, Н. С. Степанов**
 Применение непрерывного операторного метода к решению прямых и обратных задач рассеяния 247
- Ж. И. Буранов, Д. Х. Хусанов**
 Об устойчивости по части переменных неавтономной системы в цилиндрическом фазовом пространстве 273
- А. А. Косов**
 О сохранении устойчивости равновесия нелинейных осцилляторов при консервативных возмущениях 285
- С. В. Сидоров, Е. Е. Чилина**
 О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора 295

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

- У. Д. Мизхер, В. Н. Ковальногов, П. А. Вельмисов**
 Математическое моделирование закрученной струи в приложениях к малоэмиссионному сжиганию низкосортных топлив 308

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

- К 80-ЛЕТИЮ ИЛЬИ ВЛАДИМИРОВИЧА БОЙКОВА 318
- ПОЗДРАВЛЯЕМ ШАВКАТА АБДУЛЛАЕВИЧА АЮПОВА 322
-
- Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 323
- Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 327
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) 331
- Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) 337
-
- Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) 341
- Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) 342
-

Contents

MATHEMATICS

- I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, N. S. Stepanov**
 Continuous operator method application for direct and inverse scattering problems 247
- J. I. Buranov, D. Kh. Khusanov**
 On stability with respect to the part of variables of a non-autonomous system in a cylindrical phase space 273
- A. A. Kosov**
 On maintaining the stability of the equilibrium of nonlinear oscillators under conservative perturbations 285
- S. V. Sidorov, E. E. Chilina**
 On non-hyperbolic algebraic automorphisms of a two-dimensional torus . . . 295

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

- U. J. Mizher, V. N. Kovalnogov, P. A. Velmisov**
 Mathematical modeling of a swirling jet in applications to low-emission combustion of low-grade fuels 308

MATHEMATICAL LIFE

- TO THE 80TH ANNIVERSARY OF ILYA VLADIMIROVICH BOYKOV 318
- CONGRATULATIONS TO SHAVKAT ABDULLAEVICH AYUPOV 322
-
- The rules of article design (in Russian) 323
- The rules of article design (in English) 327
- The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) 331
- The rules for article layout in the LaTeX system (in English) 337
-
- Author Index (In Russian) 341
- Author Index (in English) 342
-

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202103.247-272

Original article

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

MSC2020 65M12, 65N12, 65N21

Continuous operator method application for direct and inverse scattering problems

I. V. Boykov¹, V. A. Roudnev², A. I. Boykova¹, N. S. Stepanov¹¹ Penza State University (Penza, Russian Federation),² Saint Petersburg State University (St. Petersburg, Russian Federation)

Abstract. We describe the continuous operator method for solution nonlinear operator equations and discuss its application for investigating direct and inverse scattering problems. The continuous operator method is based on the Lyapunov theory stability of solutions of ordinary differential equations systems. It is applicable to operator equations in Banach spaces, including in cases when the Frechet (Gateaux) derivative of a nonlinear operator is irreversible in a neighborhood of the initial value. In this paper, it is applied to the solution of the Dirichlet and Neumann problems for the Helmholtz equation and to determine the wave number in the inverse problem. The internal and external problems of Dirichlet and Neumann are considered. The Helmholtz equation is considered in domains with smooth and piecewise smooth boundaries. In the case when the Helmholtz equation is considered in domains with smooth boundaries, the existence and uniqueness of the solution follows from the classical potential theory. When solving the Helmholtz equation in domains with piecewise smooth boundaries, the Wiener regularization is carried out. The Dirichlet and Neumann problems for the Helmholtz equation are transformed by methods of potential theory into singular integral equations of the second kind and hypersingular integral equations of the first kind. For an approximate solution of singular and hypersingular integral equations, computational schemes of collocation and mechanical quadrature methods are constructed and substantiated. The features of the continuous method are illustrated with solving boundary problems for the Helmholtz equation. Approximate methods for reconstructing the wave number in the Helmholtz equation are considered.

Key words: Helmholtz equation, Dirichlet and Neumann boundary values, inverse problems, continuous method for solving operator equations

For citation: I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, N. S. Stepanov. Continuous operator method application for direct and inverse scattering problems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:3(2021), 247–272. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.247-272>

1. Introduction

The continuous operator method for solving nonlinear operator equations was proposed in [1]. It proved to be useful not only as a numerical technique of solving nonlinear problems which does not require any derivative calculations, but also as a tool of theoretical investigation which made possible to prove some existence theorems for the solutions of such problems [2].

Even though the full strength of the continuous operator method emerges in nonlinear problems, some linear problems – such as wave scattering – provide an instructing illustration of the method and its possible applications. In this paper we apply the method to boundary



problems for the Helmholtz equation on the base of integral equations of the first and second kind. Besides, we apply the method to inverse problem for Helmgoltz equation.

In [3] it is noted that equations of the first kind are practically not used to solve the Helmholtz equation.

Traditionally, diffraction problems are modeled by Fredholm boundary integral equations of the second kind. As noted in [4], this approach does not allow simulating wave diffraction on thin screens, since this requires the fulfillment of the boundary condition on both sides of the surface.

Recently, hypersingular integral equations of the first kind [5; 4; 6; 7] have been involved in solving scattering problems. In the papers [6; 7], when solving the Helmholtz equation, the singularities of the hypersingular integral are regularized and the collocation method is applied to equations with weakly singular and smooth kernels.

In the work [4], when constructing a computational scheme, a feature of the kernel of the hypersingular operator is used. In this case, authors write down the corresponding hypersingular integral equation in the form

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} x(\tau) \frac{\partial}{\partial n_t} \frac{\partial}{\partial n_{\tau}} \frac{1}{|t - \tau|} d\tau + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_{\sigma} x(\tau) \left[\frac{\partial}{\partial n_t} \frac{\partial}{\partial n_{\tau}} \left[\frac{e^{ik|t-\tau|}}{|t - \tau|} - \frac{1}{|t - \tau|} \right] \right] d\tau = f(t), t \in \sigma,$$

where $x(t)$ is the required function; $f(t)$ is the given function; n_t and n_{τ} are unit normals.

In this paper, to solve the Helmholtz equation with the Dirichlet and Neumann boundary conditions, integral equations of both the first and second kind are used. A comparison (in terms of accuracy) of the results obtained is carried out. A numerical experiment is carried out for solving the Helmholtz equation in a domain with a piecewise-smooth boundary using Wiener regularization. A comparison is made of the results of solving the Helmholtz equation in a domain with a piecewise smooth boundary with and without Wiener regularization.

The aim of the work is: construction, on the basis of a continuous method for solving operator equations, numerical methods for solving the Helmholtz equation, represented by integral equations of the first and second kind, comparison in accuracy of solutions of boundary value problems for the Helmholtz equation modeled by integral equations of the first and second kind, construction of a new method of justification approximate methods for solving hypersingular integral equations. Besides we solve the problem of restoration the wave number of Helmgoltz equation.

We shall see that for more singular problems the continuous operator method not only converges to the solution, but can also outperform direct solvers.

2. Continuous operator method

Consider an equation

$$A(x) - f = 0, \tag{2.1}$$

where $A(x)$ is a nonlinear operator mapping from Banach space X to X .

Let x^* be a solution of the equation (2.1). In [1] the connection between stability of solutions of operator differential equations in Banach spaces and resolving operator equations of the form (2.1) has been established. Here we shall summarize the results on the method.

Let B be a Banach space, $a, z \in B$, K be a linear operator mapping from B to B , $\Lambda(K)$ be the *logarithmic norm* [8] of the operator K , and I be the identity operator. We shall use the following notation:

$$B(a, r) = \{z \in B : \|z - a\| \leq r\},$$

$$S(a, r) = \{z \in B : \|z - a\| = r\},$$

$$\mathcal{Re}K = K_R = (K + K^*)/2,$$

$$\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1)/h.$$

Logarithmic norm examples. Let a complex matrix $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, be given in n -dimensional space \mathbb{R}^n of vectors x with the norms

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|,$$

$$\|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^n |x_k|^2 \right]^{1/2},$$

and

$$\|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

The corresponding logarithmic norms of the matrix A then read [9]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j (\mathcal{Re}(a_{jj}) + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|),$$

$$\Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^T}{2} \right),$$

$$\Lambda_3(A) = \max_i (\mathcal{Re}(a_{ii}) + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|).$$

Here $\lambda_{\max}(Z)$ stands for the real part of the largest real part eigenvalue of the matrix Z .

Let us associate the equation (2.1) with the following Cauchy problem

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad (2.2)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2.3)$$

Theorem 2.1 (Boikov, [1]) *Let the equation (2.1) have a solution x^* and on any differentiable curve $g(t)$ in Banach space B the inequality is valid*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0. \quad (2.4)$$

Then the solution of the Cauchy problem (2.2)–(2.3) converges to the solution x^ of the equation (2.1) for any initial approximation.*

Theorem 2.2 (Boikov, [1]) *Let the equation (2.1) has a solution x^* and for any differentiable curve $g(t)$ in a ball $B(x^*, r)$ the following conditions are satisfied:*

1) for any $t(t > 0)$

$$\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau)))d\tau \leq 0; \tag{2.5}$$

2) the inequality (2.4) is valid.

Then the solution of the Cauchy problem (2.2)–(2.3) converges to a solution of the equation (2.1).

Notation 2.1 *In the inequality (2.4) it is assumed that the constants $\alpha_g > 0$ can differ for different curves $g(t)$.*

Notation 2.2 *From inequalities (2.4)–(2.5) it follows that the logarithmic norm $\Lambda(A'(g(\tau)))$ can be positive for some values of τ ; i.e. the Frechet derivative $A'(g(\tau))$ can degenerate into an identically zero operator along the curve.*

Notation 2.3 *An example in [2] (an approximate solution of a hypersingular integral equation) has demonstrated convergence of an iterative process based on a continuous operator method when the Frechet derivative vanishes at the initial approximation.*

Notation 2.4 *Logarithmic norm has the property which is very useful for numerical analysis.*

Let A, B be square matrices of order n with complex elements and $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ are n -dimensional vectors with complex components. Let us consider the following systems of algebraic equations: $Ax = \xi$ and $By = \eta$. The norm of a vector and its subordinate operator norm of the matrix are fixed; the logarithmic norm $\Lambda(A)$ corresponds to the operator norm.

Theorem 2.3 (Lozinskii, [10]) *If $\Lambda(A) < 0$, the matrix A is non-singular and $\|A^{-1}\| \leq 1/|\Lambda(A)|$.*

Theorem 2.4 (Lozinskii, [10]) *Let $Ax = \xi$, $By = \eta$ and $\Lambda(A) < 0$, $\Lambda(B) < 0$. Then*

$$\|x - y\| \leq \frac{\|\xi - \eta\|}{|\Lambda(B)|} + \frac{\|A - B\|}{|\Lambda(A)\Lambda(B)|}.$$

Main properties of the logarithmic norm are given in [8].

Notation 2.5 *The logarithmic norm of the operator K can have different (positive or negative) values in different spaces.*

Described above continuous method for solving nonlinear operator equations admits the following generalization.

Let us return to the equation (2.1). Denote by $A'(x_0)x$ the Gateaux (Frechet) derivative on a element x_0 . We introduce the equation

$$(A'(x_0))^* A(x) - (A'(x_0))^* f = 0. \tag{2.6}$$

Equation (2.6) is associated with the Cauchy problem

$$\frac{dx(t)}{dt} = -((A'(x_0))^* A(x) - (A'(x_0))^* f), \tag{2.7}$$

$$x(0) = x_0. \tag{2.8}$$

If $\Lambda_2(A'(x_0))^*A'(x_0) > 0$, then in some neighborhood $B(x_0, r)$ of the element x_0 logarithmic norm $\Lambda_2(A'(x_0))^*A'(x)$ will be positive. Therefore, there is a time interval $[t_0, t_1]$ in which $\|x(t_1)\| < \|x(0)\|$ for $t_0 < t \leq t_1$. Here $x(t)$ is the solution to the Cauchy problem (2.7)–(2.8).

For $t \geq t_1$, consider the Cauchy task

$$\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} = -((A'(x_1))^*A(\tilde{x}(t)) - (A'(x_1))^*f), x_1 = x(t_1), \tag{2.9}$$

$$\tilde{x}(t_1) = x(t_1) \tag{2.10}$$

and define the segment $[t_1, t_2]$, in which $\Lambda_2((A'(\tilde{x}(t_1)))^*A'(\tilde{x}(t))) > 0$ and $\|x(t_2)\| < \|x(t_1)\|$.

Continuing this process, we have $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\|dx(t)\|}{dt} = 0$ and therefore $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^*$.

Theorem 2.5 *Let equation (2.6) have a solution x^* and for any differentiable curve in B the inequality*

$$\int_0^t \Lambda_2((A'(g(\tau)))^*A'(g(\tau)))d\tau > 0. \tag{2.11}$$

Then the solution of the Cauchy problems ((2.7)–(2.8)), ((2.9)–(2.10)), etc. converges to the solution x^ of the equation (2.6).*

If the conditions of Theorem 2.5 are not satisfied, the regularization is carried out

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha x(t) - ((A'(x(t_k)))^*A(x) - (A'(x(t_k)))^*f)$$

on segments $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots$, in which $\Lambda_2((A'(x(t_k)))^*A'(x(t))) > 0$, $t \in [t_k, t_{k+1}]$. Here α is a parameter of regularization.

3. Integral equations of the first kind

Consider the Helmholtz equation

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{3.1}$$

where $k = \|\mathbf{k}\| > 0$ is the wave number corresponding to some wave vector \mathbf{k} .

We look for the solutions that can be presented as a superposition of an incident plane wave and a scattered wave

$$u = u_0(x; \mathbf{k}) + \tilde{u}.$$

u_0 is a plane wave, \tilde{u} is the scattered spherical wave satisfying the radiation condition.

The interaction of an incident wave with a scatterer can be modelled with homogeneous boundary conditions that lead to standard boundary problems for a domain D with a boundary $\partial D \in C_2$.

Dirichlet interior problem. Find $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ satisfying the Helmholtz’s equation in D and the boundary condition

$$u = f|_{\partial D}, \tag{3.2}$$

where f is a given continuous function.

Dirichlet exterior problem. Find $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus D)$ satisfying the Helmholtz's equation in $\mathbb{R}^3 \setminus D$, Sommerfeld's radiation condition at infinity, and the boundary condition

$$u = f|_{\partial D}, \quad (3.3)$$

where f is a given continuous function.

Neumann interior problem. Find $u \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ having the normal derivative everywhere on ∂D , satisfying the Helmholtz's equation in D , and the boundary condition

$$\frac{du}{dn} = f|_{\partial D}, \quad (3.4)$$

where f is a given continuous function, n is the unit normal vector.

Neumann exterior problem. Find $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \bar{D})$ satisfying the Helmholtz's equation, Sommerfeld's radiation condition, and the boundary condition

$$\frac{du}{dn} = f|_{\partial D}, \quad (3.5)$$

where f is a given continuous function, n is the unit normal vector.

Let $\Phi(x, y)$ be the fundamental solution of the Helmholtz's equation in \mathbb{R}^3 :

$$\Phi(x, y; k) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|},$$

$x, y \in \mathbb{R}^3$, or for $x, y \in \mathbb{R}^2$

$$\Phi(x, y; k) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-y|),$$

where $H_0^{(1)}(z)$ stands for the Hankel function of the first kind. The following statements hold [3].

Theorem 3.1 (see D. Colton and R. Kress, [3]) *A simple-layer potential*

$$u(x) = \int_{\partial D} \Phi(x, y; k) \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D, \quad (3.6)$$

with continuous density φ solves the Dirichlet problems (3.2) and (3.3), if φ is a solution of the integral equation

$$\int_{\partial D} \Phi(x, y; k) \varphi(y) ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D. \quad (3.7)$$

Theorem 3.2 (see D. Colton and R. Kress, [3]) *A double-layer potential*

$$u(x) = \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y; k)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \partial D \quad (3.8)$$

with density φ solves the Neumann problems (3.4) and (3.5), if φ is a solution of the singular integral equation

$$\frac{\partial}{\partial n(x)} \int_{\partial D} \frac{\partial \Phi(x, y; k)}{\partial n(y)} \varphi(y) ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D. \quad (3.9)$$

Notation 3.1 *Theorems 3.1 and 3.2 are valid under the assumption that the boundary ∂D belongs to the space C^2 . If this condition is violated, it is necessary to construct a generalized solution. One of the ways to construct generalized solutions is Wiener regularization. It is as follows. Let us describe the Wiener regularization of interior problems with Dirichlet and Neumann boundary conditions. Since the construction of the regularization is carried out in the same way for the Dirichlet and Neumann boundary conditions, we will dwell on the consideration of the Helmholtz equation with Dirichlet boundary condition. Let $\{D_m\}$ be a sequence of domains with infinitely smooth boundaries that approximates the domain D , and $D_m \subset D_{m+1} \subset \dots \subset D$. This inclusion implies that any point $P \in D$ for sufficiently large m belongs to D_m . Let $F(x)$ be a continuous function in \bar{D} that coincides with $f(x)$ on the boundary ∂D . Let us denote by $u_m(x)$ the solution of the Dirichlet problem for the Helmholtz equation under the boundary condition $u_m(x)|_{\partial D_m} = F(x)$. It follows from Theorem 3.1 that such a solution exists. The Wiener generalized solution to problem (3.2) is the limit $u_f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} u_m(x)$, $x \in D$ if such a limit exists and does not depend on the choice of the sequences D_m and the way to build them.*

A large number of works have been devoted to the construction of generalized solutions of equations of mathematical physics, of which we will present review works: [11–12].

4. Numerical approach and illustrations

Let us apply the method to the Dirichlet problem for the Helmholtz equation in \mathbb{R}^2 .

$$\frac{i}{4} \int_{\partial D} H_0^{(1)}(k|x-y|) \varphi(y) ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D, \quad (4.1)$$

where D is a closed bounded domain.

Consider a set of points x_l , $l = 1, \dots, n$ distributed over the surface ∂D . An approximate solution of the equation (4.1) is sought as

$$\varphi_n(y) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \psi_k(y),$$

where $\psi_k(y)$ are basic functions defined on ∂D and, possibly, localized in the vicinity of the points x_l , $l = 1, \dots, n$.

We associate the following system of approximate collocation equations with the equation (4.1):

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{i}{4} \int_{\partial D} H_0^{(1)}(k|x_l-y|) \psi_j(y) ds(y) = f(x_l), \quad (4.2)$$

$$l = 1, \dots, n.$$

Here x_l , $l = 1, \dots, n$ are the collocation points.

Replace integrals in the left-hand side of eq. (4.2) with a quadrature formula. Finally, it yields the system of equations

$$\sum_{j=1}^n R_{lj} \alpha_j = f(x_l), \quad l = 1, \dots, n, \quad (4.3)$$

where $R_{lj} = \frac{i}{4} \sum_{v=0}^{n_q} p_v H_0^{(1)}(k|x_l - y_v|)\psi_j(y_v)$. Here $p_v, v = 0, \dots, n_q$ and $y_v, v = 0, \dots, n_q$ are the weights and nodes of the quadrature formula.

According to the continuous operator method, we associate the equation (4.3) with the following system of differential equations

$$\frac{d\alpha_l(t)}{dt} = \beta_l \left[\sum_{j=1}^n R_{lj} \alpha_j - f(x_l) \right], \quad l = 1, \dots, n. \tag{4.4}$$

The values of

$$\beta_l = -e^{i \arg(R_{ll})}, \quad l = 1, \dots, n \tag{4.5}$$

are chosen so that the logarithmic norms Λ_1 or Λ_3 are minimized.

Negative logarithmic norm of the matrix in the right hand side of (4.4) guarantees that the solution of the differential equations system converges to the solution of the system (4.3) as $t \rightarrow \infty$.

The system (4.4) can be solved by any numerical method. Model examples are solved by Euler or Runge-Kutta methods.

Computational schemes for solving the Helmholtz equation with other boundary conditions are constructed similarly.

Let us stay in more detail on the construction of a spline-collocation computational scheme with zero-order splines for solving the 3D Dirichlet problem for the Helmholtz equation

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \varphi(y) ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D. \tag{4.6}$$

Without loss of generality, we will assume that D is a star-shaped surface centered at a point $x^* \in D$.

Let's triangulate the surface ∂D with triangles «close» to equilateral. When constructing a triangulation, we require that the vertices of the triangles lie on the surface ∂D . Let us denote these nodes as $x_k, k = 1, 2, \dots, N_0$. Triangulation algorithms are described in sufficient detail in the works [13], [14].

As a result, the surface ∂D is approximated by the surface ∂D_N , and the equation (4.6) is approximated by the equation

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D_N} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \varphi(y) ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D. \tag{4.7}$$

An approximate solution to the equation (4.7) will be sought in the form of a function

$$\varphi_N(y) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \psi_k(y), \tag{4.8}$$

where

$$\psi_k(y) = \begin{cases} 1, & y \in \Delta_k, \\ 0, & y \in \partial D_N \setminus \Delta_k, \end{cases}$$

$k = 1, 2, \dots, N$; Δ_k is a element of the surface ∂D_N .

Denote by \bar{x}_k a point belonging to Δ_k . As such a point, you can take the center of a circle inscribed in a triangle Δ_k .

The coefficients α_k of the function (4.8) are determined from the system of linear algebraic equations

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^N \int_{\Delta_l} \alpha_l \frac{e^{ik|\bar{x}_j-y|}}{|\bar{x}_j-y|} ds(y) = f(\bar{x}_j^*), \tag{4.9}$$

$j = 1, \dots, N$.

Here the point \bar{x}_j^* is intersection of the straight line passing through the points x^* and x_j with the surface Δ_j .

A simpler, but less accurate computational scheme has the form

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^N \alpha_l \frac{e^{ik|\bar{x}_j-y_l|}}{|\bar{x}_j-y_l|} mes(\Delta_l) + \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_j} \alpha_j \frac{e^{ik|\bar{x}_j-y|}}{|\bar{x}_j-y|} ds(y) = f(\bar{x}_j^*), \tag{4.10}$$

$j = 1, \dots, N$.

Here $mes(\Delta_l)$ denote the square of the triangle Δ_l and by $\sum_{l=1}^N$ is indicated that $l \neq j$.

We will demonstrate the method of substantiating the spline collocation method using the computational scheme (4.9).

Theorem 4.1 *Let the following conditions be satisfied:*

- 1) The equation (4.6) has a solution $\varphi^*(x)$ for the given right-hand side;
- 2) The logarithmic norm of the matrix A_N on the left-hand side of the system of equations (4.9) is negative in the metric of some Banach space B and $\Lambda(A_N) \leq -\gamma_0$ for all $N \geq N_0$;
- 3) D is a star-shaped surface centered at a point $x^* \in D$;
- 4) The solution $\varphi^*(y)$ of the equation (4.6) belongs to the class of functions $W^2(M)$ having continuous derivatives of the first order and piecewise continuous derivatives of the second order bounded in modulus by the constant M ;
- 5) The surface ∂D is a Lyapunov surface.

Then the system of equations (4.9) has a unique solution $\varphi_N^*(y)$ converging to $\varphi^*(y)$ for $N \rightarrow \infty$.

Remark 4.1 *Note that, in contrast to the many well-known methods of substantiating approximate methods for solving integral equations, here only the solvability of the considered equation with the given right hand part is required.*

Proof.

Since the logarithmic norm $\Lambda(A_N)$ of the matrix A_N is negative for $N \geq N_0$, the Theorem 2.3 implies the unique solvability of the system of equations (4.9).

Let us denote by $\varphi^*(x)$ a solution of the equation (4.6). Then

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \varphi^*(y) ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D. \tag{4.11}$$

Draw planes from the point x^* through the vertices x_k of the triangles Δ_k to the intersection with the surface ∂D . The surfaces that cut out the constructed planes from ∂D are denoted by $\partial \tilde{D}_k, k = 1, 2, \dots, N$.

Then the equation (4.11) can be represented as

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^N \int_{\partial \tilde{D}_l} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \varphi^*(y) ds(y) = f(x), \quad x \in \partial D. \tag{4.12}$$

At the points $\bar{x}_j^*, j = 1, 2, \dots, N$ we have

$$\frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^N \int_{\partial \bar{D}_l} \frac{e^{ik|\bar{x}_j^*-y|}}{|\bar{x}_j^*-y|} \varphi^*(y) ds(y) = f(\bar{x}_j^*), \quad j = 1, 2, \dots, N. \tag{4.13}$$

The difference between the equations (4.9) and (4.13) can be represented as follows

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^N \int_{\Delta_l} \frac{e^{ik|\bar{x}_j-y|}}{|\bar{x}_j-y|} (\varphi_N(y) - \tilde{\varphi}_l^*(y)) ds(y) = \\ & = \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^N \left[\int_{\Delta_l} \frac{e^{ik|\bar{x}_j-y|}}{|\bar{x}_j-y|} \tilde{\varphi}_l^*(y) ds(y) - \right. \\ & \left. - \int_{\partial \bar{D}_l} \frac{e^{ik|\bar{x}_j^*-y|}}{|\bar{x}_j^*-y|} \varphi^*(y) ds(y) \right], \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Here $\tilde{\varphi}_l^*(y)$ is the linear function taking values $\varphi^*(y)$ at the vertices of the triangle $\Delta_l, l = 1, 2, \dots, N$.

We introduce the notations

$$\begin{aligned} g_j^N = & \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^N \left[\int_{\Delta_l} \frac{e^{ik|\bar{x}_j-y|}}{|\bar{x}_j-y|} \tilde{\varphi}_l^*(y) ds(y) - \right. \\ & \left. - \int_{\partial \bar{D}_l} \frac{e^{ik|\bar{x}_j^*-y|}}{|\bar{x}_j^*-y|} \varphi^*(y) ds(y) \right], \quad j = 1, \dots, N. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Let's start evaluating the expression g_j^N .

Without loss of generality, we can assume that the function $\varphi^*(y)$ has continuous second-order partial derivatives in the domain D , bounded in modulus by the constant M .

Starting to estimate g_j^N , we first estimate the term

$$I_1 = \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_j} \frac{e^{ik|\bar{x}_j-y|}}{|\bar{x}_j-y|} \tilde{\varphi}^*(y) ds(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \bar{D}_j} \frac{e^{ik|\bar{x}_j^*-y|}}{|\bar{x}_j^*-y|} \varphi^*(y) ds(y).$$

Without loss of generality, we can assume that the triangle Δ_j lies on the plane OXY .

Let be $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3)$.

We will assume that the surface $\partial \bar{D}_j$ is described by a function $y_3 = \psi_j(y_1, y_2), (y_1, y_2) \in \Delta_j, j = 1, 2, \dots, N, \psi_j(y_1, y_2) \in W^{1,1}(M)$.

Then

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \bar{D}_j} \frac{e^{ik|\bar{x}_j^* - y|} - e^{ik|\bar{x}_j - y|}}{|\bar{x}_j^* - y|} \varphi^*(y) ds(y) \right| + \\
 &+ \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \bar{D}_j} e^{ik|\bar{x}_j - y|} \left(\frac{1}{|\bar{x}_j^* - y|} - \frac{1}{|\bar{x}_j - y|} \right) \varphi^*(y) ds(y) \right| + \\
 &+ \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \bar{D}_j} \frac{e^{ik|\bar{x}_j - y|}}{|\bar{x}_j - y|} \varphi^*(y) ds(y) - \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_j} \frac{e^{ik|\bar{x}_j - y|}}{|\bar{x}_j - y|} \tilde{\varphi}^*(y) ds(y) \right| = \\
 &= I_{11} + I_{12} + I_{13}.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

It is not hard to see that

$$I_{11} \leq \frac{C}{N} \left| \int_{\partial \bar{D}_j} \frac{\varphi^*(y) ds(y)}{|\bar{x}_j^* - y|} \right| \leq \frac{C}{N^2}; \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 I_{12} &\leq C \left| \int_{\partial \bar{D}_j} \frac{||\bar{x}_j - y| - |\bar{x}_j^* - y||}{|\bar{x}_j^* - y| |\bar{x}_j - y|} ds(y) \right| \leq \\
 &\leq C \left| \int_{\partial \bar{D}_j} \frac{\sum_{i=1}^3 (|\bar{x}_i(j) - \bar{x}_i^*(j)| | |\bar{x}_i^*(j) - y_i| + |\bar{x}_i(j) - y_i|)^{1/2}}{|\bar{x}_j^* - y| |\bar{x}_j - y|} ds(y) \right| \leq \\
 &\leq \frac{C}{N^{1/2}} \left| \int_{\partial \bar{D}_j} \frac{ds(y)}{|\bar{x}_j^* - y|^{1/2} |\bar{x}_j - y|} \right| \leq \frac{C}{N}.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Here we have used following notations $\bar{x}_j = (\bar{x}_1(j), \bar{x}_2(j), \bar{x}_3(j))$.

Let us introduce the notation $v = (v_1, v_2, v_3), v_1 = y_1, v_2 = y_2, v_3 = \psi(y_1, y_2)$.

We transform the integral

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{1}{4\pi} \int_{\partial \bar{D}_j} \frac{e^{ik|\bar{x}_j - y|}}{|\bar{x}_j - y|} \varphi^*(y) ds(y) \right| = \\
 &= \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_j} \frac{e^{ik|\bar{x}_j - v|}}{|\bar{x}_j - v|} \varphi^*(v) \left(1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right)^2 \right)^{1/2} ds(y) \right|.
 \end{aligned}$$

Then

$$\begin{aligned}
 I_{13} &= \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_j} \frac{e^{ik|\bar{x}_j - v|} - e^{ik|\bar{x}_j - y|}}{|\bar{x}_j - v|} \varphi^*(v) \left(1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right)^2 \right)^{1/2} ds(y) \right| + \\
 &+ \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_j} e^{ik|\bar{x}_j - y|} \left(\frac{1}{|\bar{x}_j - v|} - \frac{1}{|\bar{x}_j - y|} \right) \varphi^*(v) \left(1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right)^2 \right)^{1/2} \right| + \\
 &+ \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_j} \frac{e^{ik|\bar{x}_j - y|}}{|\bar{x}_j - y|} \left(\left(1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_2} \right)^2 \right)^{1/2} - 1 \right) \varphi^*(v) ds(y) \right| + \\
 &+ \left| \frac{1}{4\pi} \int_{\Delta_j} \frac{e^{ik|\bar{x}_j - y|}}{|\bar{x}_j - y|} (\varphi^*(v) - \tilde{\varphi}^*(y)) ds(y) \right| = \\
 &= I_{131} + \dots + I_{134}.
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Let's estimate each term separately:

$$\begin{aligned}
 I_{131} &\leq C \left| \int_{\Delta_j} \frac{\varphi^*(v) \left(1 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y_2}\right)^2\right)^{1/2}}{|\bar{x}_j - v|} ds(y) \right| \leq \\
 &\leq \frac{C}{N} \left| \int_{\Delta_j} \frac{ds(y)}{|\bar{x}_j - v|} \right| \leq \frac{C}{N^{3/2}};
 \end{aligned}
 \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 I_{132} &\leq C \left| \int_{\Delta_j} \frac{||\bar{x}_j - v| - |\bar{x}_j - y| ds(y)}{|\bar{x}_j - y| |\bar{x}_j - v|} \right| \leq \\
 &\leq C \left| \int_{\Delta_j} \frac{|\psi(y_1, y_2)|^{1/2} (|\bar{x}_3(j)| + |\bar{x}_3(j) - \psi(y_1, y_2)|)^{1/2} ds(y)}{|\bar{x}_j - y| |\bar{x}_j - v|} \right| \leq \\
 &\leq C \left| \int_{\Delta_j} \frac{ds(y)}{|\bar{x}_j - y|} \right| \leq \frac{C}{N^{3/2}};
 \end{aligned}
 \tag{4.21}$$

$$I_{133} \leq \frac{C}{N} \int_{\Delta_j} \frac{ds(y)}{|\bar{x}_j - y|} \leq \frac{C}{N^{3/2}};
 \tag{4.22}$$

$$I_{134} \leq \frac{C}{N} \int_{\Delta_j} \frac{ds(y)}{|\bar{x}_j - y|} \leq \frac{C}{N^{3/2}}.
 \tag{4.23}$$

From the inequalities (4.19) - (4.23) we have

$$I_{13} \leq \frac{C}{N^{3/2}}.
 \tag{4.24}$$

Collecting estimates (4.17)–(4.18), (4.24), we arrive at the inequality

$$I_1 \leq \frac{C}{N}.
 \tag{4.25}$$

Let us estimate the summ

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1, l \neq j}^N \left| \int_{\Delta_l} \frac{e^{ik|x_j - y|}}{|x_j - y|} \tilde{\varphi}_l^*(y) ds(y) - \right. \\
 &\quad \left. - \int_{\partial \bar{D}_l} \frac{e^{ik|x_j - y|}}{|x_j - y|} \varphi^*(y) ds(y) \right|, j = 1, \dots, N.
 \end{aligned}$$

Repeating the above reasoning, we arrive at the following estimate $I_2 \leq C \frac{1}{N^{1/2}}$.

From estimates for I_1, I_2 we have $g_j^N \leq C \frac{1}{N^{1/2}}$.

It is not hard to see that $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j \leq N} |g_j^N(x)| = 0$. Hence and from the inequality $\|A^{-1}\| \leq 1/|\gamma_0|$ implies the estimate $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{j=1,2,\dots,N_0} |\varphi_N(y) - \tilde{\varphi}_l^*(y)| = 0$.

Since the surface D is Lyapunov, and the function $\varphi(x) \in W^2(M)$, then $\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{j=1,2,\dots,N} |\varphi_N(y) - \varphi_j^*(y)| = 0$.

The Theorem is proved.

The computational scheme for the external Dirichlet problem is substantiated in a similar way. For internal and external Neumann problems the unique solvability of the spline-collocation method with zero-order splines is proved.

The system of equations (4.10) is solved by the continuous method of solving operator equations. Its implementation is described above when considering 2D and 3D problems.

Let us present the results of numerical simulation of the solution of the Helmholtz equation in domains with a smooth boundary.

Let us present the results of solving the internal and external 3D Dirichlet task for the Helmholtz equations with boundary condition $f(x, y, z) = 5$ on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Also we will present the results of solving the internal and external 3D Neumann problems for the Helmholtz equations with boundary condition $\partial f(x, y, z)/\partial \bar{v} = 5$ on the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Here \bar{v} is unit normal vector to the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. The problem was solved in a spherical coordinate system. The grid of nodes $(R, \theta_k, \varphi_l), k = 0, 1, \dots, n_1, l = 0, 1, \dots, n_2$, was introduced. Through the nodes $(R, \theta_k, \varphi_l), k = 0, 1, \dots, n_1, l = 0, 1, \dots, n_2$, parallels and meridians were drawn. As a result, the sphere is covered by $N = n_1 n_2$ regions $\Delta_{k,l}, k, l = 0, 1, \dots, n$. The centers of the regions $\Delta_{k,l}, k = 0, 1, \dots, n_1, l = 0, 1, \dots, n_2$, are taken as collocation nodes.

The results of calculations for the Dirichlet problem are given in Table 4.1.

Table 4.1. Internal and External 3D Tasks for Dirichlet Problem

Таблица 4.1. 3D внутренние и внешние задачи Дирихле

Dirichlet problem k	N	Internal task		External task	
		ε_1	ε_2	ε_1	ε_2
0.5	80	0.0165725	0.00796006	0.00155752	0.00962531
0.5	240	0.00806834	0.00366256	0.000599909	0.00360849
1	80	0.0186016	0.00824733	0.00191118	0.00343365
1	240	0.00946607	0.00376398	0.000733595	0.00116734
5	80	0.210381	0.0423799	0.0089195	0.0037427
5	240	0.0482807	0.0120712	0.00375413	0.00158744
10	80	0.720814	0.173546	0.0254282	0.00325667
10	240	0.473627	0.089815	0.0148006	0.000953392
50	80	-	-	0.318658	0.00518162
50	240	-	-	0.158777	0.00692083

The results of calculations for the Neumann problem are given in Table 4.2.

By ε_1 we denote the error obtained when solving the Dirichlet problem for the Helmholtz equation by the method of hypersingular integral equations of the first kind, ε_2 denotes the error obtained when reducing the Dirichlet and Neumann problems for the Helmholtz equation to the Fredholm equation of the second kind. The modulus of the wave number is denoted by k .

Table 4.2. Internal and External 3D Tasks for Neumann Problem**Таблица 4.2.** 3D внутренние и внешние задачи Неймана

Neumann problem k	N	Internal task ε_2	External task ε_2
0.5	80	1.03246	0.000587054
0.5	240	0.395273	0.000223925
1	80	0.0875912	0.000558534
1	240	0.0310176	0.000188801
5	80	0.0155207	0.000359148
5	240	0.00659237	0.000160749
10	80	0.0185102	0.000674467
10	240	0.0092024	0.000289515
50	80	0.0276603	0.000625453
50	240	0.00851501	0.00163204

Let us present the results of solving the Helmholtz equation in domains with piecewise smooth surfaces. Regularization was carried out by the Wiener method.

Internal and external Dirichlet problems on a plane was reduced to hypersingular integral equations of the first kind and, using the method of double layer potentials, to the Fredholm equation of the second kind. The calculation results are presented in the Table 4.3.

Table 4.3. The Internal Dirichlet Problem on the Square Ω **Таблица 4.3.** Внутренняя задача Дирихле в квадрате Ω .

Dirichlet problem d	Internal task n	ε_1	ε_2	ε_1	ε_2
0.1	10	0.00213411	0.000224903	0.0128316	0.0126578
0.1	20	0.00184517	0.000105285	0.0122158	0.0120572
0.1	50	0.00391174	8.24397e-05	0.0108303	0.0106801
0.01	10	0.0110965	0.0110993	0.0107978	0.010798
0.01	20	0.0110512	0.011053	0.00891222	0.00891234
0.01	50	0.00391174	0.00391142	0.00449703	0.00449608
0.001	10	0.00612334	0.00612343	0.00751996	0.00751996
0.001	20	0.00633153	0.00633159	0.00554193	0.00554193
0.001	50	0.00139693	0.00139699	0.00281375	0.00281374
0.0001	10	0.0055992	0.0055992	0.00717709	0.00717709
0.0001	20	0.00585335	0.00585335	0.00585333	0.00585333
0.0001	50	1.48831e-05	1.48831e-05	0.000112018	0.000112018

Note: Here $\Omega = [-1, 1]^2$, d is the rounding radius at the corners of the square, n is the number of segments into which each side of the square is divided, and $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ are errors in the metric of space $C(\Omega)$. Here ε_1 is error when the boundary condition is approached as the value is displaced from the nearest boundary, ε_2 is the error when the boundary condition is approached as the average value over 5 points of the border. Exact solution is $u^*(x, y) = (x + 1)\cos kx + 2\sin ky$, $k = 1$.

Примечание: Здесь $\Omega = [-1, 1]^2$, d - радиус округления углов квадрата, n - количество сегментов, на которые делится каждая сторона квадрата, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - погрешности решения уравнения в метрике пространства $C(\Omega)$. Здесь ε_1 - погрешность решения при аппроксимации граничного условия в точке на гладкой границе значением в ближайшей точке исходной границы, ε_2 -

погрешность при аппроксимации граничного условия в точке на гладкой границе средним значением по 5 точкам исходной границы. Точное решение: $u^*(x, y) = (x+1) \cos kx + 2 \sin kx, k = 1$.

The internal Neumann problem on the plane solved by the method of double layer potentials. The calculating scheme was constructed for the Fredholm equation of the second kind. The calculation results are presented in the Table 4.4.

Table 4.4. Method of hypersingular integral equations of the second kind for internal Neumann problem

Таблица 4.4. Решение внутренней задачи Неймана. Метод гиперсингулярных интегральных уравнений второго рода

Neumann problem d	Internal task n	ε_1	ε_2
0.1	10	0.0203548	0.00835932
0.1	20	0.0340605	0.0305454
0.1	50	0.0418156	0.0406616
0.01	10	0.0760089	0.0759413
0.01	20	0.0423401	0.0422682
0.01	50	0.00932829	0.00927824
0.001	10	0.0894408	0.0894401
0.001	20	0.0548243	0.0548236
0.001	50	0.0258951	0.0258947
0.0001	10	0.0929163	0.0929163
0.0001	20	0.0579243	0.0579243
0.0001	50	0.0296693	0.0296692

Note: Here $\Omega = [-1, 1]^2$, d is the rounding radius at the corners of the square, n is the number of segments into which each side of the square is divided, and $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ are errors in the metric of space $C(\Omega)$. Here ε_1 is error when the boundary condition is approached as the value is displaced from the nearest boundary, ε_2 is the error when the boundary condition is approached as the average value over 5 points of the border. Exact solution is $u^*(x, y) = (x+1) \cos kx + 2 \sin kx, k = 1$.

Примечание: Здесь $\Omega = [-1, 1]^2$, d - радиус округления углов квадрата, n - количество сегментов, на которые делится каждая сторона квадрата, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - погрешности решения уравнения в метрике пространства $C(\Omega)$. Здесь ε_1 - погрешность решения при аппроксимации граничного условия в точке на гладкой границе значением в ближайшей точке исходной границы, ε_2 - погрешность при аппроксимации граничного условия в точке на гладкой границе средним значением по 5 точкам исходной границы. Точное решение: $u^*(x, y) = (x+1) \cos kx + 2 \sin kx, k = 1$.

Internal 3D Dirichlet problem was reduced to hypersingular integral equations of the first kind. Also internal 3D Dirichlet problem was solved by the method of double layer potentials. The calculating scheme was constructed for the Fredholm equation of the second kind. Results of calculation are given in the Table 4.5.

Table 4.5. 3D Internal Dirichlet Problem in Cube Ω
Таблица 4.5. 3D внутренняя задача Дирихле в кубе Ω

Dirichlet problem d	Internal task n	ε_1	ε_2
0.1	5	0.00110805	0.00529278
0.1	8	0.000426094	0.00204103
0.1	10	0.00251942	0.0034902
0.01	5	0.0029991	0.00581462
0.01	8	0.00301313	0.00608984
0.01	10	0.000544667	0.00152193
0.001	5	0.0036374	0.00586556
0.001	8	0.00117232	0.00238229
0.001	10	0.000680864	0.00153978
0.0001	5	0.00385141	0.00587077
0.0001	8	0.00124549	0.00238498
0.0001	10	0.000724935	0.00154162

Note: Here $\Omega = [-1, 1]^3$, d is the rounding radius at the corners of the cube, n is the number of segments into which each side of the cube is divided, and $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ are errors in the metric of space $C(\Omega)$. Here ε_1 is error when the boundary condition is approached as the value is displaced from the nearest boundary, ε_2 is the error when the boundary condition is approached as the average value over 5 points of the border. Exact solution is $u^*(x_1, x_2, x_3) = (\cos 0.7x_1 + 2 \sin 0.7x_1)(\cos 0.6x_2 + 2 \sin 0.6x_2)(\cos \sqrt{15}x_3 + 2 \sin \sqrt{15}x_3), k = 1$.

Примечание: Здесь $\Omega = [-1, 1]^3$, d - радиус округления вершин куба, n - количество сегментов, на которые делится каждая сторона куба, а $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ - точность решения уравнения в метрике пространства $C(\Omega)$. Здесь ε_1 - погрешность решения при аппроксимации граничного условия в точке на гладкой границе значением в ближайшей точке исходной границы, ε_2 - погрешность при аппроксимации граничного условия в точке на гладкой границе средним значением по 5 точкам исходной границы. Точное решение: $u^*(x_1, x_2, x_3) = (\cos 0.7x_1 + 2 \sin 0.7x_1)(\cos 0.6x_2 + 2 \sin 0.6x_2)(\cos \sqrt{15}x_3 + 2 \sin \sqrt{15}x_3), k = 1$.

Internal 3D Neumann problem solved by the method of double layer potentials. The calculating scheme was constructed for the Fredholm equation of the second kind. The calculation results are presented in the Table 4.6

Table 4.6. Method of Double Layer Potentials for Internal Neumann Problem in the Cube Ω

Таблица 4.6. Метод потенциалов двойного слоя для внутренней задачи Неймана в кубе Ω

Neumann problem d	Internal task n	ε
0.01	5	0.194361
0.01	10	0.158837
0.001	5	0.187427
0.001	10	0.123524
0.0001	5	0.184671
0.0001	10	0.115699
0.00001	5	0.184395
0.00001	10	0.119485

Note: Here $\Omega = [-1, 1]^3$, d is the rounding radius at the corners of the cube, n is the number of segments into which each side of the cube is divided, and ε is error in the metric of space $C(\Omega)$. Exact solution is $u^*(x_1, x_2, x_3) = (\cos 0.7x_1 + 2 \sin 0.7x_1)(\cos 0.6x_2 + 2 \sin 0.6x_2)(\cos \sqrt{15}x_3 + 2 \sin \sqrt{15}x_3)$, $k = 1$.

Примечание: Здесь $\Omega = [-1, 1]^3$, d - радиус округления вершин куба, n - количество сегментов, на которые делится каждая сторона куба, a , ε_1 , ε_2 - ошибки в метрике пространства $C(\Omega)$. Здесь ε_1 - погрешность решения при аппроксимации граничного условия в точке на гладкой границе значением в ближайшей точке исходной границы, ε_2 - погрешность при аппроксимации граничного условия в точке на гладкой границе средним значением по 5 точкам исходной границы. Точное решение: $u^*(x_1, x_2, x_3) = (\cos 0.7x_1 + 2 \sin 0.7x_1)(\cos 0.6x_2 + 2 \sin 0.6x_2)(\cos \sqrt{15}x_3 + 2 \sin \sqrt{15}x_3)$, $k = 1$.

The above theorems on the application of the Fredholm integral equations of the first and second kind to the solution of the Helmholtz equation with the Dirichlet and Neumann boundary conditions are valid when the equations are defined in domains with smooth surfaces or, after Wiener regularization, to equations defined in domains with piecewise smooth surfaces.

Therefore, it is of interest to study the applicability of the operator method in the case of piecewise smooth surfaces without any regularization.

It is the most instructive to compare the Dirichlet and the Neumann problems with respect to solving them with the continuous operator method. For this purpose we discuss the example of a plane wave scattering off a regular triangle.

The Dirichlet problem features a weakly singular integral kernel (logarithmic divergence), which warrants resolvability of the problem. The continuous operator method, though, converges slowly and only for a limited range of sufficiently small wave numbers. Minimization of the logarithmic norm by normalizing the phase appropriately (4.5) makes it possible to extend the range of convergence, but only marginally. For example, for $k = 1.7$ minimization of the logarithmic norm makes the continuous operator method converge. Indeed, with $\beta \equiv 1$ $\Lambda_1 = 0.929$, $\Lambda_3 = 0.929$ and $\Lambda_2 = 0.195$, and no convergence is observed. Choosing β_l appropriately we get $\Lambda_1 = 0.927$, $\Lambda_3 = 0.927$ and $\Lambda_2 = -0.004$, the latter ensures the convergence. For higher wave numbers the method does not converge for the Dirichlet problem even with this log-norm minimization trick.

In contrast, the Neumann problem integral kernel is strongly singular (quadratic singularity), which requires a special treatment of the singular kernel (see [2]). With this stronger singularity of the kernel for the Neumann problem all the logarithmic norms of the operator remain negative for any value of the wave number. The appropriate choice of the phase factor (4.5) becomes even more critical in this case, as it is the diagonal element which determines the logarithmic norm, and neglecting the phase normalization could just ruin the convergence. It is worth noticing, that for denser grids the continuous operator method requires even a smaller number of arithmetic operations than solving the equations directly by gaussian elimination. This is illustrated in Table 4.7, where we show the number of matrix multiplication calls required to achieve a given accuracy for a plane wave scattered off a regular triangle. For the both types of boundary condition we employ the 2-nd order Euler method and the 4-th order Runge-Kutta method with identical – though non-optimal – time steps $h = 0.125$. We see clearly that a very rapid convergence is observed in the case of strongly singular Neumann problem.

Table 4.7. Convergence table for $k = 1.7$ for a weakly (Dirichlet problem) and a strongly singular (Neumann problem) integral kernels.

Таблица 4.7. Таблица сходимости при $k = 1.7$ слабо (граничное условие Дирихле) и сильно сингулярных (граничное условие Неймана) интегральных ядер.

Residue norm	Matrix multiplication calls Euler(RK4)	
	Dirichlet problem	Neumann problem
10^{-1}	3126(4028)	4(44)
10^{-2}	4679(6468)	6(56)
10^{-4}	9178(36716)	9(76)
10^{-6}	N/A	12(N/A)

Note: The problem corresponds to a plane wave scattering off a regular triangle. The matrix rank is $n = 150$, the time step for solving the differential equation (4.4) is fixed to $h = 0.125$.

Примечание: Задача рассеяния плоской волны на правильном треугольнике. Ранг матрицы $n = 150$, шаг по времени решения дифференциального уравнения (4.4) равен $h = 0.125$.

The solutions of the Helmholtz equation are shown in Figs. 4.1 and Figs. 4.2. For the both cases the wave vector is chosen as $\mathbf{k} = (-1.7, 0)^T$, and the triangle is slightly tilted with respect to the incoming wave direction.

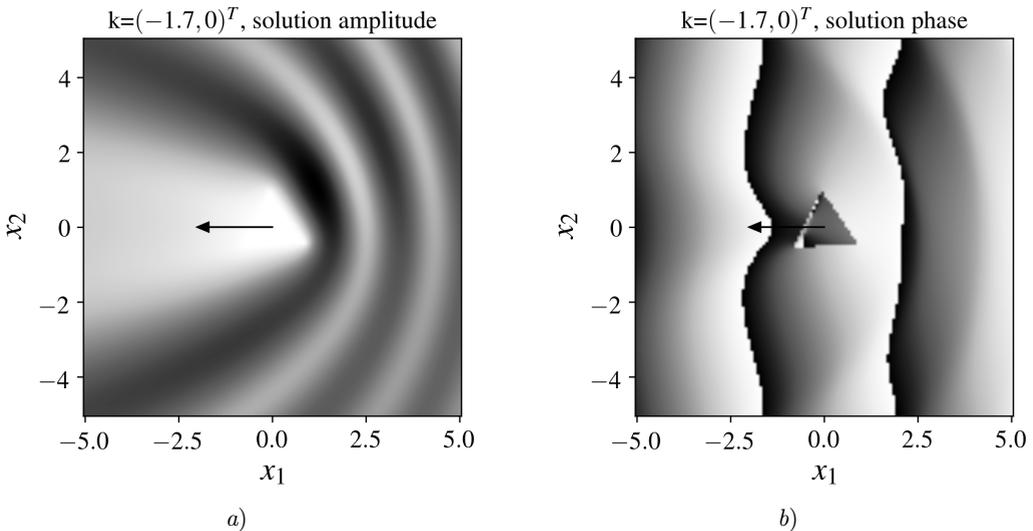


Fig 4.1. The amplitude (a) and the phase (b) of the solution in the vicinity of a scatterer, Dirichlet boundary conditions. The arrow is the wave vector

Рис. 4.1. Амплитуда (a) и фаза (b) решения в окрестности границы (граничное условие Дирихле). Стрелкой обозначен волновой вектор

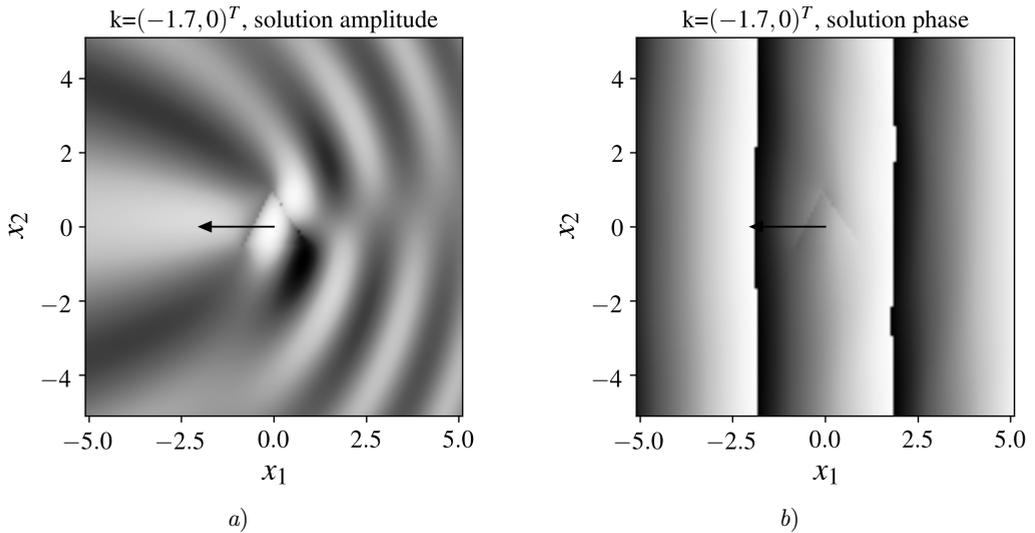


Fig 4.2. The amplitude (a) and the phase (b) of the solution in the vicinity of a scatterer, Neumann boundary conditions. The arrow is the wave vector

Рис. 4.2. Амплитуда (a) и фаза (b) решения в окрестности границы (граничное условие Неймана). Стрелкой обозначен волновой вектор

5. Inverse tasks

Consider the Helmholtz equation

$$\Delta u + k^2 u = 0, \tag{5.1}$$

where $k = \|k\| > 0$ is the wave number corresponding to the wave vector k .

The equation (5.1) is defined in the domain D with the boundary $\partial D \in C_2$. The solution of the equation (5.1) is a superposition of an incident plane wave and a scattering wave $u = u_0(x, k) + \tilde{u}$, where $u_0(x, k)$ is a plane wave; \tilde{u} – scattering wave.

Modeling the interaction of an incident wave with a scattering surface leads to equations of the form (5.1) with the Dirichlet and Neumann boundary conditions.

Let’s construct a computational scheme for determining the wave number. For definiteness, we restrict ourselves to considering the internal problem in the three-dimensional case.

Let the values of $u(x)$ and $\partial u / \partial \nu$ are known on the boundary ∂D , where ν is the unit outward normal vector. To construct a computational scheme, we will use the formula [3]

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} \right] ds(y) = \begin{cases} -u(x), & x \in D, \\ 0, & x \in R^3 \setminus \bar{D}. \end{cases}$$

Let at some point $x^* \in D$ the solution $u(x)$ of the equation (5.1) is known under known boundary conditions.

Then

$$\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik|x^*-y|}}{|x^*-y|} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] ds(y) = -u(x^*), \quad x^* \in D.$$

To find the wave number k , we use a continuous method for solving nonlinear operator equations

$$\begin{aligned} & \frac{dk(t)}{dt} = \\ & = \beta \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] ds(y) + u(x^*) \right), \end{aligned} \tag{5.2}$$

where $\beta = \pm 1$ and is chosen so that the logarithmic norm of the derivative of the operator

$$H(k) = \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] \varphi(y) ds(y)$$

was negative.

To build a computational circuit, the integral

$$\int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik(t)|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] \varphi(y) ds(y)$$

is approximated by a cubature formula.

The differential equation (5.2) is solved by Euler’s method. As a result, we arrive at the following iterative process

$$k_{m+1} = k_m + \beta h \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D} \left[u(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik_m|x^*-y|}}{|x^*-y|} - \frac{\partial u}{\partial \nu}(y) \frac{e^{ik_m|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] ds(y) + u(x^*) \right), \tag{5.3}$$

where h is the step of the Euler method.

But if ∂D is piecewise smooth, then instead of the classical solution we will consider the generalized by Wiener solution of the equation (5.1).

Let $F(x)$ and $G(x)$ be continuous functions in \bar{D} that coincide with u and $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ on ∂D , respectively. Let us denote by $u_i(x)$ the solution of the equation (5.1) in D_i satisfying the condition $u_i|_{\partial D_i} = F$ and $\frac{\partial u_i}{\partial \nu} \Big|_{\partial D_i} = G$.

Suppose the equation (5.1) is solvable in the domains D_i . Using the Wiener generalized solution to the equation (5.1) in the domain D we mean the function $u(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} u_i(x)$, $x \in D$, if such a limit exists and does not depend on the choice of the sequence of domains D_i and on the way of constructing the functions F or G .

Thus, the computational scheme (5.3) for a piecewise-smooth region will have the following form

$$k_{m+1} = k_m + \beta h \left(\frac{1}{4\pi} \int_{\partial D_i} \left[F(y) \frac{\partial}{\partial \nu(y)} \frac{e^{ik_m|x^*-y|}}{|x^*-y|} - G(y) \frac{e^{ik_m|x^*-y|}}{|x^*-y|} \right] ds(y) + u_i(x^*) \right).$$

Let us give a model example illustrating the effectiveness of the method.

Let be $D = [-1, 1]^3$. Exact solution of the Helmholtz equation (5.1) in D is equal $u(x, y, z) = (\cos 0.7x_1 + 2 \sin 0.7x_1)(\cos 0.6x_2 + 2 \sin 0.6x_2)(\cos \sqrt{15} + 2 \sin \sqrt{15})$, $k^2 = l^2 + m^2 + r^2$, $l = 0.7$, $m = 0.6$, $r = \sqrt{15}$.

Instead of the initial boundary of the region ∂D , we will consider the following sequence of surfaces $\partial D_i = \left\{ \bigcup_{j=1}^6 L_{ij} \cup \bigcup_{j=1}^{12} S_{ij} \cup \bigcup_{j=1}^8 R_{ij} \right\}$, where L_{ij} are planes with indents from

the edges at a distance d_i , S_{ij} are cylindrical surfaces indented from the ribs by a distance d_i with radius d_i and a height equal to $2 - d_i$, R_{ij} is spherical surfaces indented from the vertices by a distance d_i for each variable and with radius d_i .

The calculation results for the inverse problem of wave detection are shown in the Table 5.1. Here k^* is the exact value of the wavenumber, d_i is the rounding radius of the vertices and edges of the cube, M is the number of iterations of the Euler method, ε is the determination error, ε_1 is the residual.

Table 5.1. Reconstruction of the wavenumber
Таблица 5.1. Восстановление волнового числа

k^*	d_i	M	ε	ε_1
0.5	0.001	200	5.27961e-05	1.55197e-07
0.5	0.0001	200	5.35118e-06	1.55116e-07
0.5	0.00001	200	6.343e-07	1.55108e-07
1	0.001	200	6.0594e-05	1.64743e-14
1	0.0001	200	6.05479e-06	1.68754e-14
1	0.00001	200	6.05292e-07	1.73196e-14
5	0.001	200	6.00708e-05	0.000559045
5	0.0001	200	5.19241e-05	0.000559247
5	0.00001	200	5.22667e-05	0.000559268

6. Discussion

The paper demonstrates the application of a continuous method for solving nonlinear operator equations to direct and inverse problems of solving the Helmholtz equation. In the case of linear equations, the method is of theoretical interest, since allows one to justify approximate methods for solving operator equations without invertibility of the initial operator. In the case of nonlinear equations, the method is realizable when the Frechet (Gateau) derivative is uninvertible in the neighborhood of the initial value.

Analysis of the solution of model examples allows us to make the following conclusions:

1) The accuracy of solving the 3D internal and external Dirichlet problems is of the same order, both when using hypersingular integral equations of the first kind, and when applying weakly singular integral equations of the second kind;

2) The computational scheme for solving hypersingular integral equations constructed in the article diverges when solving the 3D Neumann problem. This is due to the fact that the piecewise constant approximation of the desired solution is insufficient in 3D hypersingular integral equations;

3) When solving 2D of the Dirichlet problem in a domain with a piecewise smooth boundary, the superiority of the method of hypersingular integral equations of the first kind is obvious;

4) When solving the 3D Neumann problem in a domain with a piecewise smooth surface, the method of hypersingular integral equations diverges.

It is obvious that there is a need to develop numerical methods for solving 3D hypersingular integral equations by spline-collocation methods with splines of the first and higher orders.

In the fifth section, the continuous operator method is applied to solving the problem of reconstructing the wave number for the Helmholtz equation. The efficiency of the proposed

computational scheme is demonstrated.

It is of considerable interest to extend the results obtained above to other formulations of inverse scattering problems.

Acknowledgments. The authors thank the Russian Foundation for Basic Research for support within grant 16-01-00594 (I.B. and A.B) and for partial support within grant 18-02-00492 (V.R.).

REFERENCES

1. I. V. Boikov, “On a Continuous Method for Solving Nonlinear Operator Equations”, *Differential Equations*, **48:9** (2012), 1308–1314.
2. I. V. Boikov, V. A. Roudnev, A. I. Boikova, O. A. Baulina, “New Iterative Method for Solving Linear and Nonlinear Hypersingular Integral Equations”, *Applied Numerical Mathematics*, **127** (2018), 280–305.
3. D. Colton, R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory*, John Wiley & Sons, New York, 1983, 287 p.
4. S. G. Daeva, A. V. Setukha, “[On the Numerical Solution of the Neumann Boundary Value Problem for the Helmholtz Equation by the Method of Hypersingular Integral Equations]”, *Computational Methods and Programming*, **16:3** (2015), 421–435 (In Russ.).
5. I. V. Boikov, N. V. Moiko, “Approximate Solution of the Helmholtz Equation”, *Proceedings of the International Conference on Computation Mathematics*, 2002, 374–380 (In Russ.).
6. Z. Y. Yan, K. C. Hung, H. Zheng, “Solving the Hypersingular Boundary Integral Equation in Three-Dimensional Acoustics a Regularization Relationship”, *J. Acoust. Soc. Am.*, **113:5** (2003), 2674–2683. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.1560164>
7. I. A. Tsukerman, “Singularity-Free Boundary Equation Method for Wave Scattering”, *IEEE Trans. Antennas Propag.*, **59:2** (2011), 555–562. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2010.2096189>
8. Yu. L. Daletskii, M. G. Krein, *Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Space*, Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russ.), 386 p.
9. K. Dekker, J. G. Verwer, *Stability of Runge-Kutta Methods for Stiff Nonlinear Differential Equations*, North Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984, 386 p.
10. S. M. Lozinskii, “Note on a paper by V.S. Godlevskii”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **13:2** (1973), 457–459 (In Russ.).
11. V. A. Kondrat’ev, O. A. Oleinik, “Boundary-Value Problems for Partial Differential Equations in Non-Smooth Domains”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **38:2** (1983), 3–76 (In Russ.).
12. V. M. Babich, M. A. Lyalinovm, V. E. Grikurov, *The Sommerfeld-Malyuzhinets Method in the Theory of Diffraction*, St. Petersburg State University Publ., St. Petersburg, 2003 (In Russ.), 104 p.

13. F. Preparata, M. Sheimos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer-Verlag New York Inc., New York, 1985, 390 p.
14. A. V. Skvortsov, *Delaunay Triangulation and Its Application*, Tomsk University Publ., Tomsk, 2002 (In Russ.), 128 p.

Submitted 08.07.2021; Revised 10.08.2021; Accepted 25.08.2021

Information about the authors:

Ilya V. Boykov, Professor, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russian Federation), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, i.v.boykov@gmail.com

Vladimir A. Roudnev, Associate Professor, Department of Computational Physics, Saint Petersburg State University (7/9 University Embankment, , St. Petersburg 199034, Russian Federation), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6451-5028>, v.rudnev@spbu.ru

Alla I. Boykova, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russian Federation), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0436-0460>, allaboikova@mail.ru

Nikita S. Stepanov, Student, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russian Federation), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4146-9302>, ctnik1998@mail.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

УДК 519.63

Применение непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений к прямым и обратным задачам рассеяния

И. В. Бойков¹, В. А. Руднев², А. И. Бойкова¹, Н. С. Степанов¹¹ Пензенский государственный университет (г. Пенза, Российская Федерация)² Санкт-Петербургский государственный университет (г. Санкт-Петербург, Российская Федерация)

Аннотация. Дано обобщение непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах и описано его применение для исследования прямых и обратных задач теории рассеяния. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений основан на Ляпуновской теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Он применим к операторным уравнениям в банаховых пространствах, в том числе, и в случаях, когда производная Фреше (Гато) нелинейного оператора необратима в окрестности начального значения. В работе он применяется к решению задач Дирихле и Нейманна для уравнения Гельмгольца и для определения волнового числа в обратной задаче. Рассмотрены внутренние и внешние задачи Дирихле и Нейманна для уравнения Гельмгольца, определенного в областях с гладкими и кусочно-гладкими границами. В случае, когда уравнение Гельмгольца рассматривается в области с гладкой границей, существование и единственность решения следует из классической теории потенциала. При решении уравнения Гельмгольца в областях с кусочно-гладкими границами проводится винеровская регуляризация. Задачи Дирихле и Нейманна для уравнения Гельмгольца методами теории потенциала трансформируются в сингулярные интегральные уравнения второго рода и в гиперсингулярные интегральные уравнения первого рода. Для приближенного решения сингулярных и гиперсингулярных интегральных уравнения построены и обоснованы вычислительные схемы методов коллокации и механических квадратур. Особенности непрерывного метода иллюстрируются решением краевых задач для уравнения Гельмгольца. Рассмотрены приближенные методы восстановления волнового числа в уравнении Гельмгольца.

Ключевые слова: уравнение Гельмгольца, граничные условия Дирихле и Неймана, обратные задачи, непрерывный метод решения операторных уравнений

Для цитирования: Бойков И. В., Руднев В. А., Бойкова А. И., Степанов Н. С. Применение непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений к прямым и обратным задачам рассеяния // Журнал Средневожского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 247–272. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.247-272>

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308–1314.
2. Boikov I. V., Roudnev V. A., Boikova A. I., Baulina O. A. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations // Applied Numerical Mathematics. 2018. Vol. 127. pp. 280–305.
3. Colton D., Kress R. Integral equation methods in scattering theory. New York: John Wiley & Sons, 1983. 287 p. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19850650104>

4. Даева С. Г., Сетуха А. В. О численном решении краевой задачи Неймана для уравнения Гельмгольца методом гиперсингулярных интегральных уравнений // Вычислительные методы и программирование. 2015. Т. 16, вып. 3. С. 421–435.
5. Boikov I. V., Moiko N. V. Approximate solution of the Helmholtz equation // Proceedings of the International Conference on Computation Mathematics. 2002. pp. 374–380.
6. Yan Z. Y., Hung K. C., Zheng H. Solving the hypersingular boundary integral equation in three-dimensional acoustics a regularization relationship // J. Acoust. Soc. Am. 2003. Vol. 113, No. 5. pp. 2674–2683. DOI: <https://doi.org/10.1121/1.1560164>
7. Tsukerman I. A. Singularity-free boundary equation method for wave scattering // IEEE Trans. Antennas Propag. 2011. Vol. 59, No. 2. pp. 555–562. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAP.2010.2096189>
8. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 386 с.
9. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
10. Лозинский С. М. Замечание о статье В. С. Годлевского // Журнал вычисл. матем. и матем. физ. 1973. Т. 13, № 2. С. 457–459.
11. Кондратьев В. А., Олейник О. А. Краевые задачи для уравнений с частными производными в негладких областях // Успехи математических наук. 1983. Т. 38, вып. 2. С. 3–76.
12. Бабич В. М., Лялинов М. А., Грикуров В. Э. Метод Зоммерфельда-Малюжинца в теории дифракции. СПб.: СПбГУ, 2003. 104 с.
13. Preparata F., Sheimos M. Computational geometry: An introduction. New York: Springer-Verlag New York Inc, 1985. 390 p.
14. Скворцов А. В. Триангуляция Делоне и ее применение. Томск: Изд-во Томск. ун-та, 2002. 128 с.

*Поступила 08.07.2021; доработана после рецензирования 10.08.2021;
принята к публикации 25.08.2021*

Информация об авторах:

Бойков Илья Владимирович, профессор, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика», Пензенский государственный университет (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), доктор физико-математических наук, <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, i.v.boikov@gmail.com

Руднев Владимир Александрович, доцент, кафедра «Вычислительная физика», Санкт-Петербургский государственный университет (199034, Россия, г. Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9), доктор физико-математических наук, <https://orcid.org/0000-0001-6451-5028>, v.rudnev@spbu.ru

Бойкова Алла Ильинична, доцент, кафедра «Высшая и прикладная математика», Пензенский государственный университет (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная,

д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0436-0460>, allaboikova@mail.ru

Степанов Никита Сергеевич, студент, кафедра «Высшая и прикладная математика», Пензенский государственный университет (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4146-9302>, ctnik1998@mail.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202103.273-284

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.925.51

Об устойчивости по части переменных неавтономной системы в цилиндрическом фазовом пространстве

Ж. И. Буранов¹, Д. Х. Хусанов²

¹ Академический лицей ТашГТУ им. Ислама Каримова (г. Ташкент, Узбекистан)

² Джизакский политехнический институт (г. Джизак, Узбекистан)

Аннотация. Статья посвящена задаче об устойчивости системы дифференциальных уравнений с правой частью, периодической по части фазовых (угловых) координат. Такие системы удобно рассматривать в цилиндрическом фазовом пространстве, позволяющем проводить более полный и качественный анализ их решений. В работе предлагается исследовать динамические свойства решений неавтономной системы с угловыми координатами на основе построения ее топологической динамики в таком пространстве. Выводится соответствующее свойство квазиинвариантности положительного предельного множества ограниченного решения системы. Задача об устойчивости по части переменных исследуется на основе векторной функции Ляпунова с принципом сравнения и построенной топологической динамики. Доказана теорема типа принципа квазиинвариантности с векторной функцией Ляпунова для рассматриваемого класса систем. Доказаны две теоремы об асимптотической устойчивости нулевого решения по части переменных (неугловым координатам). Новизна данных теорем состоит в требовании лишь устойчивости системы сравнения, в отличие от классических результатов с условием соответствующей асимптотической устойчивости. Полученные в работе результаты позволяют расширить применение прямого метода Ляпунова в решении ряда прикладных задач.

Ключевые слова: неавтономная система, цилиндрическое фазовое пространство, устойчивость по части переменных, функция Ляпунова

Для цитирования: Буранов Ж. И., Хусанов Д. Х. Об устойчивости по части переменных неавтономной системы в цилиндрическом фазовом пространстве // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 273–284. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.273-284>

1. Введение

Достаточно широкий класс дифференциальных уравнений, изучаемых при моделировании ряда задач механики, физических процессов, систем автоматического регулирования, составляют уравнения с угловыми координатами. Исследование таких уравнений удобно проводить на основе цилиндрического фазового пространства [1]. Это пространство позволяет в частности выявить важные особенности применения прямого метода Ляпунова в задачах об устойчивости [1–2]. Выделим некоторые результаты в этом направлении, относящиеся непосредственно к данной работе.

Развитие теоремы Барбашина-Красовского о полной асимптотической устойчивости [3] и принципа инвариантности Ла-Салля [4] на системы с угловыми координатами в автономном случае со скалярной функцией Ляпунова, имеющей знакопостоянную производную, приведено в работах [5–6], а в неавтономном случае с такой же функцией Ляпунова – в работе [7]. Оно позволило получить эффективные критерии глобальной управляемости механических систем [5], систем фазовой синхронизации [6],

глобального отслеживания траектории многозвенного манипулятора с цилиндрическими шарнирами [7].

Большое место в теории устойчивости занимают метод векторных функций Ляпунова и проблема устойчивости по части переменных, основные положения которых представлены в трудах [8–11]. Широкое применение соответствующих результатов в решении прикладных задач продолжает стимулировать интенсивные исследования этих направлений теории устойчивости [12–16]. К числу перспективных направлений исследования частичной устойчивости нелинейных систем можно отнести подход, основанный на асимптотических методах [17].

Целью настоящей работы является изучение малоисследованной задачи о частичной устойчивости системы дифференциальных уравнений с угловыми координатами на основе векторной функции Ляпунова.

Во втором разделе работы рассматривается построение топологической динамики системы уравнений в цилиндрическом фазовом пространстве. В третьем разделе исследуется применение векторной функции Ляпунова с принципом сравнения для решения исследуемой задачи. Доказывается теорема о локализации положительного предельного множества ограниченного решения системы. Доказываются теоремы о глобальной асимптотической устойчивости по части переменных, о частичной асимптотической устойчивости с притяжением по неконтролируемым координатам. Новизна теорем состоит в предположении лишь свойства устойчивости системы сравнения. В заключении представлен краткий анализ полученных результатов.

2. Топологическая динамика системы

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = X(t, x), \quad X(t, 0) \equiv 0, \quad (2.1)$$

где $x \in R^n$, $X(t, x) = (X_1(t, x), X_2(t, x), \dots, X_n(t, x))^T$ (индекс T означает транспонирование), вещественные функции $X_i(t, x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, определены в области $R \times R^n$ и таковы, что переменную x можно разделить $x^T = (y^T, z^T)$, $y \in R^m$, $z \in R^s$, $m + s = n$ таким образом, что функция $X(t, x)$ является 2π -периодической по переменной z , т. е. $X(t, y, z + 2\pi 1_j) = X(t, y, z)$, $(z + 2\pi 1_j) = (z_1, z_2, \dots, z_{j-1}, z_j + 2\pi, z_{j+1}, \dots, z_s)^T$, $j = 1, 2, \dots, s$. Решения этой системы можно рассматривать в цилиндрическом фазовом пространстве $R \times R^m \times P^s$, $P^s = \{z \in R^s : -\pi \leq z_j \leq \pi, j = 1, 2, \dots, s\}$ [1].

Пусть $\|y\|$ есть некоторая норма вектора $y \in R^m$; $\|z\|$ – норма вектора $z \in R^s$; $\|x\| = \|y\| + \|z\|$; L^1 – класс функций $\lambda : R \rightarrow R$, интегрируемых локально.

Введем множество F функций $f : R \times R^n \rightarrow R^n$, периодических по z с периодом 2π аналогично функции X , непрерывных по $x \in R^n$ при фиксированном $t \in R$, измеримых по t при фиксированном $x \in R^n$ и удовлетворяющих следующим условиям: для каждого компактного множества $K \subset R^m$ существуют функции $\lambda = \lambda_1(t, f, K)$ и $\lambda = \lambda_2(t, f, K)$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in L^1$) такие, что для всех (t, x) , $(t, x^{(1)})$, $(t, x^{(2)}) \in R \times K \times P^s$ выполнены неравенства [18]

$$\begin{aligned} \|f(t, x)\| &\leq \lambda_1(t, f, K), \\ \|f(t, x^{(2)}) - f(t, x^{(1)})\| &\leq \lambda_2(t, f, K) \|x^{(2)} - x^{(1)}\|, \end{aligned} \quad (2.2)$$

при этом функция $\lambda_1(t, f, K)$ равномерно непрерывна в среднем на R , а $\lambda_2(t, f, K)$ равномерно ограничена на R , а именно:

1) для $\varepsilon > 0$ найдется зависимость $\nu = \nu(\varepsilon, K) > 0$, такая что для каждого множества $E \subset [t, t+1]$ ($t \in R$ – любое) с мерой $\mu(E) < \nu$ выполнено неравенство

$$\int_E \lambda_1(\tau, f, K) d\tau < \varepsilon; \quad (2.3)$$

2) существует число $N = N(K) > 0$, такое что для каждого $t \in R$

$$\int_t^{t+1} \lambda_2(\tau, f, K) d\tau \leq N(K). \quad (2.4)$$

Для каждой функции $f \in F$ можно определить систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x), \quad (2.5)$$

решения которой можно рассматривать в пространстве $R \times R^m \times P^s$, при этом для каждой начальной точки $(t_0, y_0, z_0) \in R \times R^m \times P^s$ решение $x = x(t, t_0, x_0) = (y(t, t_0, y_0, z_0), z(t, t_0, y_0, z_0))^T$ будет существовать, являться единственным и продолжимым на некотором интервале $(\alpha(f, t_0, x_0), \beta(f, t_0, x_0))$, $\alpha < t_0 < \beta$, так, что если $\alpha > -\infty$ (или $\beta < \infty$), то $\|y(t, t_0, x_0)\| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \alpha$ (соответственно, $\|y(t, t_0, x_0)\| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \beta$).

Следуя работе [18], введем сходимость: последовательность $\{f_k \in F\}$ сходится к $f^* \in F$, если для каждого $t \in R$ и каждого $x = (y, z) \in R^m \times P^s$

$$\left\| \int_0^t (f^{(k)}(\tau, x) - f^*(\tau, x)) d\tau \right\| \rightarrow 0$$

при $k \rightarrow \infty$.

На основании [18] можно утверждать, что пространство F с такой сходимостью метризуемо и компактно.

Предположим, что функция X исходной системы (2.1) принадлежит множеству F , $X \in F$. Значит, системе (2.1) можно сопоставить семейство предельных систем [18]

$$\dot{x} = X^*(t, x), \quad X^* = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \rightarrow \infty} \int_0^t X(t_k + \tau, x) d\tau, \quad (2.6)$$

где функция $X^* \in F$ определяется в зависимости от последовательности $t_k \rightarrow \infty$.

Введем следующее определение положительного предельного множества $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ решения $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (2.1), полагая, что Z есть множество целых чисел.

О п р е д е л е н и е 2.1 Точка $p = (p^{(1)}, p^{(2)}) \in R^m \times P^s$ называется положительной предельной точкой решения $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (2.1), если существуют последовательности $t_k \rightarrow \infty$ и $L^{(k)} = (l_1^{(k)}, l_2^{(k)}, \dots, l_s^{(k)})$, $l_j^{(k)} \in Z^{(1)}$, $j = 1, 2, \dots, s$, такие что

$$y(t_k, t_0, x_0) \rightarrow p^{(1)}, \quad z(t_k, t_0, x_0) - 2\pi L^{(k)} \rightarrow p^{(2)} \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (2.7)$$

Множество $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ всех таких точек есть положительное предельное множество.

О п р е д е л е н и е 2.2 Множество $M \subset R^m \times P^s$ называется квазиинвариантным по отношению к системе (2.1), если $\forall p = (p^{(1)}, p^{(2)}) \in M$ найдется предельная система (2.6), такая что ее решение $x = x(t, 0, p)$ таково, что $x(t, 0, p) \in M \forall t \in (\alpha, \beta)$ ($\alpha < 0 < \beta$), где (α, β) – интервал определения этого решения.

Заметим, что $M \subset R^m \times P^s$ и свойство квазиинвариантности подразумевает, что существует последовательность $L^{(k)} \in Z^k$, такая что $(y(t, 0, p), z(t, 0, p) - 2\pi L^{(k)}) \in M$ для всех $t \in (\alpha, \beta)$.

Справедливо следующее утверждение динамического типа.

Т е о р е м а 2.1 Пусть $x = x(t, t_0, x_0)$ есть некоторое решение системы (2.1), ограниченное по y компактом $K \subset R^m$ при всех $t \geq t_0$. Тогда положительное предельное множество решения $x = x(t, t_0, x_0)$ связно, компактно и квазиинвариантно.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Связность и компактность $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ доказывается аналогично работе [19] с учетом ограниченности по z в силу 2π – периодичности функции $X = X(t, x)$ по переменным z .

Докажем свойство квазиинвариантности множества $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$.

Пусть $p \in \omega^+(t_0, x_0)$, $p \in R^m \times P^s$ есть положительная предельная точка этого решения, так что существуют последовательности $\{t_k \in R^n, t_k \rightarrow \infty\}$ и $\{L^{(k)} \in Z^k\}$, такие что выполнены соотношения (2.7).

Из последовательности $\{t_k\}$ выберем подпоследовательность $\{t_{k_j}\} \subset \{t_k\}$ (для удобства изложения будем считать, что это та же самая последовательность $\{t_k\}$), для которой определяется предельная система (2.6). Будем также считать, что последовательность функций $(y^{(k)}(t), z^{(k)}(t))$, определяемая равенствами $y^{(k)}(t) = y(t_k + t, t_0, x_0)$, $z^{(k)}(t) = z(t_k + t, t_0, x_0) - 2\pi L^{(k)}$, сходится равномерно по $t \in [-T, T]$ для каждого $T > 0$ к $x^*(t) = (y^*(t), z^*(t))$. При этом имеем последовательно следующие соотношения:

$$x = x(t) = x(t, t_0, x_0) = x(t_0) + \int_{t_0}^t X(\tau, x(\tau)) d\tau,$$

$$x^{(k)}(t) = x(t_k + t) = x(t_k) + \int_0^t X(t_k + \tau, x^{(k)}(\tau)) d\tau.$$

Из этого следует, что

$$y^{(k)}(t) = y(t_k) + \int_0^t X^{(k)}(\tau, y^{(k)}(\tau), z^{(k)} - 2\pi L^{(k)}) d\tau,$$

$$z^{(k)}(t) = z(t_k) - 2\pi L^{(k)} + \int_0^t X^{(k)}(\tau, y^{(k)}(\tau), z^{(k)} - 2\pi L^{(k)}) d\tau.$$

Переходя в этих соотношениях к пределу при $t_k \rightarrow \infty$, получим равенство

$$x^*(t) = p + \int_0^t X^*(\tau, x^*(\tau)) d\tau.$$

Таким образом, $x = x^*(t)$ является решением некоторой предельной системы (2.6), удовлетворяющим условию $x^*(0) = p$. При этом по построению $x^*(t)$ можно переопределить с учетом 2π -периодичности (2.6) так, что $\{x^*(t), t \in R\} \subset \omega^+(x(t, t_0, x_0))$. Теорема доказана.

Построенная топологическая динамика является развитием результатов классического характера работ [18–19] для систем с цилиндрическим фазовым пространством.

3. Теоремы об устойчивости

Введем следующие классы функций.

1. Класс \mathcal{K}_1 векторных функций $V = (V^1, V^2, \dots, V^r)^T$, $V : R \times R^n \rightarrow R^r$, являющихся ограниченными и равномерно непрерывными на каждом множестве $R^+ \times K_1$, где $K_1 = \{x \in R^n : \|x\| \leq H_1 = \text{const} > 0\}$.

2. Класс \mathcal{K}_2 векторных функций $U : R^+ \times R^r \rightarrow R^r$, ограниченных и равномерно непрерывных на каждом множестве $K_2 = \{u \in R^r : \|u\| \leq H_2 = \text{const} > 0\}$.

3. Класс \mathcal{K}_3 векторных функций $W : R^+ \times R^m \times P^s \times R^r \rightarrow R^r$, 2π -периодических по третьему аргументу, ограниченных и равномерно непрерывных на каждом множестве $R \times K_1 \times P^s \times K_2$.

Можно ввести соответствующие функциональные пространства непрерывных векторных функций $F_1 = \{V : R \times R^n \rightarrow R^n\}$, $F_2 = \{U : R \times R^r \rightarrow R^r\}$, $F_3 = \{W : R \times R^m \times P^s \times R^r \rightarrow R^r\}$ с открыто-компактной топологией [19].

Семейства сдвигов $\{V_\tau(t, x) = V(\tau + t, x), \tau \in R^+\}$, $\{U_\tau(t, u) = U(\tau + t, u), \tau \in R^+\}$, $\{W_\tau(t, x, u) = W(\tau + t, x, u), \tau \in R^+\}$ функций $V \in \mathcal{K}_1$, $U \in \mathcal{K}_2$, $W \in \mathcal{K}_3$ будут предкомпактны соответственно в F_1, F_2, F_3 [19].

Таким образом, можно определить семейства $\{V^*\}, \{U^*\}, \{W^*\}$ соответствующих предельных функций, а также предельные совокупности $\{X^*, V^*, U^*, W^*\}$ [19].

Пусть для системы (2.1) найдется непрерывно дифференцируемая функция $V \in \mathcal{K}_1$, производная которой в силу этой системы представима в виде [15; 20]

$$\begin{aligned} \dot{V}(t, x) &= U(t, V(t, x)) + W(t, x, V(t, x)), \\ V(t, 0) &= 0, \quad U(t, 0) = 0, \quad W(t, 0, 0) = 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где функция $U = U(t, u)$ принадлежит классу \mathcal{K}_2 , $U \in \mathcal{K}_2$, и является квазимонотонной и непрерывно дифференцируемой по $u \in R^r$, функция $W = W(t, x, u)$ принадлежит классу \mathcal{K}_3 , $W \in \mathcal{K}_3$, и удовлетворяет неравенствам $W_j(t, x, u) \leq 0$ ($j = 1, 2, \dots, r$) для любых $(t, x, u) \in R^+ \times R^m \times P^s \times R^r$.

Из равенства (2.5) следует, что функция $V(t, x)$ является вектор-функцией сравнения, а система

$$\dot{u} = U(t, u) \quad (3.2)$$

является системой сравнения.

Если $V = V(t, x)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению (3.1), при этом $V(t_0, x_0) = V_0$, а $u = u(t, t_0, V_0)$ есть решение (3.2), определенное на интервале $[t_0, t_0 + \beta)$, $\beta > 0$, то для всех $t \in [t_0, t_0 + \beta)$ на решении $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (2.1) выполняется неравенство [12]

$$V(t, x(t, t_0, x_0)) \leq u(t, t_0, V_0). \quad (3.3)$$

Поскольку $U \in \mathcal{K}_2$, то система (3.2) является предкомпактной и для неё существует семейство предельных систем сравнения

$$\dot{u} = U^*(t, u), \quad U^* \in F_2. \quad (3.4)$$

Рассматривая условия относительно правой части $U = U(t, u)$ системы (3.2), получим, что каждое решение $u = u(t, t_0, u_0)$ этой системы непрерывно дифференцируемо по $(t_0, u_0) \in R^+ \times R^r$, при этом из свойства неубывания функции $u(t, t_0, u_0)$ по переменной u_0 следует, что матрица

$$\Phi(t, t_0, u_0) = \frac{\partial u(t, t_0, u_0)}{\partial u_0}$$

является неотрицательной и нормированной, т. е. $(\Phi(t, t_0, u_0))_{jl} \geq 0$ ($j, l = 1, 2, \dots, r$), $\Phi(t_0, t_0, u_0) = I$.

Предположим, что для любого компакта $K_2 = \{u \in R^r : \|u\| \leq H_2 > 0\}$ существуют числа $M(K_2)$ и $\alpha(K_2)$, такие что матрица Φ для любых $(t, t_0, u_0) \in R^+ \times R^+ \times K_2$ удовлетворяет условиям

$$\|\Phi(t, t_0, u_0)\| \leq M(K_2), \quad \det \Phi(t, t_0, u_0) \geq \alpha(K_2) > 0. \quad (3.5)$$

Имеет место следующая теорема о локализации положительного предельного множества $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ решения системы (2.1).

Т е о р е м а 3.1 *Допустим, что $x = x(t, t_0, x_0)$ есть некоторое решение системы (2.1) и найдется векторная функция Ляпунова $V \in K_1$, такая что*

- 1) $\|V(t, y, z)\| \rightarrow \infty$ равномерно по $(t, z) \in R^+ \times P^s$ при $\|y\| \rightarrow \infty$;
- 2) $V(t, y, z)$ ограничена при $\|y\| \leq H = \text{const} > 0$, $\|V(t, y, z)\| \leq m(H) \forall (t, y, z) \in R^+ \times \{y : \|y\| \leq H\} \times P^s$;
- 3) производная \dot{V} удовлетворяет равенству (3.1);
- 4) решения системы сравнения (3.2) удовлетворяют условию (3.5);
- 5) решение $u(t, t_0, V_0)$ системы сравнения (3.2), где $V_0 = V(t_0, x_0)$ ограничено при всех $t \geq t_0$.

Тогда выполняется соотношение $\omega^+(x(t, t_0, x_0)) \subset M$, где M – максимальное инвариантное подмножество множества $\{W^*(t, x, u^*(t)) = 0\}$, $u^*(t)$ есть решение соответствующей предельной системы сравнения (3.4) с начальным условием $u^*(0) = V^*(0, p)$ для выбранной точки $p \in \omega^+(x(t, t_0, x_0))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x = x(t, t_0, x_0)$ есть какое-либо решение уравнения (2.1). Оно определено по крайней мере при некоторых $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \beta)$, $\alpha, \beta > 0$. При этом $x(t, t_0, x_0)$ удовлетворяет неравенству (3.3). Однако тогда из условий 1, 2 и 5 теоремы следует, что это решение является ограниченным по y и определено при всех $t \geq t_0$, так что существует такое $H > 0$, что выполнено соотношение

$$x(t, t_0, x_0) \in \{y \in R^m : \|y\| \leq H\} \cap P^s \quad \forall t \geq t_0.$$

Из равенства (3.1) имеем при всех $t \geq t_0$ следующее соотношение между зависимостью $V(t, x[t]) = V(t, x(t, t_0, x_0))$ и решением $u = u[t] = u(t, t_0, V_0)$, $V_0 = V(t_0, x_0)$ системы сравнения (3.2) [15; 20]

$$V(t, x[t]) = u[t] + \int_{t_0}^t \Phi(t, \tau, V(\tau, x[\tau])) W(\tau, x[\tau], V(\tau, x[\tau])) d\tau. \quad (3.6)$$

Следуя [15; 20], можно показать, что из этого равенства следует

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, x[t], V(t, x[t])) = 0. \quad (3.7)$$

По теореме 2.1 положительное предельное множество $\omega^+(x(t, t_0, x_0))$ будет связным, компактным и квазиинвариантным.

Для предельной точки $p \in \omega^+(x(t, t_0, x_0))$ определим предельную систему (2.6) и ее решение $x = x^*(t)$, $x^*(0) = p$, предельную систему сравнения (3.4) и ее решение $u = u^*(t) = u^*(t, 0, u_0^*)$, $u_0^* = V^*(0, p)$, а также предельную функцию $W^*(t, x, u)$. Из равенств (3.6) и (3.7) выведем

$$V^*(t, x^*(t)) = u^*(t), \quad W^*(t, x^*(t), u^*(t)) = 0.$$

что и доказывает теорему.

В соответствие векторной функции $V = (V^1, V^2, \dots, V^r)^T$ введем скалярную функцию

$$\bar{V}(t, x) = \sum_{j=1}^r V^j(t, x).$$

Введем класс \mathcal{K}_4 непрерывных функций типа Хана $a_i : R^+ \rightarrow R^+$, $a_i(0) = 0$, a_i строго монотонно возрастает, $i = 1, 2$ [21].

Теорема 3.2 *Предположим, что для системы (2.1) можно найти векторную функцию $V = V(t, x)$, такую что:*

1) $a_1(\|y\|) \leq \bar{V}(t, x) \leq a_2(\|x\|) \quad \forall (t, y, z) \in R^+ \times R^m \times P^s$, $a_1, a_2 \in \mathcal{K}_4$, $a_1(\alpha) \rightarrow \infty$ при $\alpha \rightarrow \infty$;

2) выполнены условия 3 и 4 теоремы 3.1;

3) решение $u = 0$ системы сравнения (3.2) равномерно устойчиво;

4) для каждой предельной совокупности $\{X^*, V^*, W^*, U^*\}$ множество $\{W^*(t, x, u^*(t)) = 0\} \cap \{\bar{V}^*(t, x) > 0\}$ не содержит целых решений системы (2.6), где $u^*(t) \neq 0$ есть любое ненулевое решение системы (3.4).

Тогда решение $x = 0$ системы (2.1) глобально равномерно асимптотически устойчиво по y .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий 1–3 теоремы следует, что решение $x = 0$ системы (2.1) равномерно устойчиво по y [11; 13]. Из условия $\bar{V}(t, x) \geq a_1(\|y\|)$ и 2π -периодичности системы (2.1) по z найдем, что решения этой системы равномерно ограничены. Из условия 4 теоремы найдем, что для любого решения $x = x(t, t_0, x_0)$ системы (2.1) функция V такова, что

$$\bar{V}(t, x(t, t_0, x_0)) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty$$

равномерно по $(t_0, x_0) \in R^+ \times \{y \in R^m : \|y\| \leq H\} \times P^s$.

Однако тогда из условия $\bar{V}(t, x(t, t_0, x_0)) \geq a_1(\|y(t, t_0, x_0)\|)$ следует, что $\|y(t, t_0, x_0)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ равномерно по $(t_0, x_0) \in R^+ \times \{y \in R^m : \|y\| \leq H\} \cap P^s$. Теорема доказана.

В ряде прикладных задач система типа (2.1) может иметь на множестве $\{x \in R^n : y = 0, z \in P^s\}$ иные положения равновесия, кроме $x = 0$. Для таких систем эффективна следующая теорема.

Теорема 3.3 *Предположим, что для системы (2.1) можно найти векторную функцию $V = V(t, x)$, такую что выполнены условия 1–3 Теоремы 3.2, а также:*

4) $V(t, 0, z + 2\pi 1_j) = 0$, $j = 1, 2, \dots, s$;

5) для каждой предельной совокупности $\{X^*, V^*, W^*, U^*\}$ множество $\{W^*(t, x, u^*(t)) = 0\} \setminus \{x \in R^n : y = 0, z = \pi L^{(k)}\}$ не содержит решений системы (2.6), где $u^*(t) \neq 0$ есть любое ненулевое решение системы (3.4).

Тогда:

1) решение $x = 0$ и соответственно множество положений равновесия $\{x \in R^n : y = 0, z = 2\pi L^{(k)}\}$ системы (2.1) равномерно асимптотически устойчивы по y ;

2) множество положений равновесия $\{x \in R^n : y = 0, z = \pi L^{(k)}\}$ системы (2.1) является глобально притягивающим по y .

Доказательство. Как и в случае теоремы 3.2, из условий 1–3 теоремы определяем свойство равномерной устойчивости по y решения $x = 0$ системы (2.1), а с ним всего множества $\{x \in R^n : y = 0, z = 2\pi L^{(k)}\}$ в силу условия 4. Из этих же условий 1–3 имеем свойство равномерной ограниченности решений системы (2.1). Отсюда и из условия 5 на основании теоремы 2.1 получаем второй вывод теоремы.

4. Заключение

Теорема 3.1 представляет собой принцип квазиинвариантности для неавтономной системы с цилиндрическим фазовым пространством на основе применения векторной функции Ляпунова с принципом сравнения. Указанные во введении результаты работ [5–7] для таких систем являются ее частным случаем. Теоремы 3.2–3.3 представляют собой достаточные условия асимптотической устойчивости исследуемой системы по неугловым координатам, глобальной по теореме 3.2, нелокальной с притяжением по угловым координатам согласно теореме 3.3. Они развивают и обобщают соответствующие результаты работ [10; 16; 20; 22] и представляют собой достаточный интерес применительно к задачам механики и автоматического регулирования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Барбашин Е. А., Табуева В. А. Динамические системы с цилиндрическим фазовым пространством. М.: Физматгиз, 1969. 302 с.
2. Леонов Г. А. Об одном классе динамических систем с цилиндрическим фазовым пространством // Сибирский математический журнал. 1976. Т. 17, № 1. С. 91–112.
3. Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
4. La Salle J. P. Stability theory for ordinary differential equations // J. Differ. Equat. 1968. Vol. 4, issue 1. pp. 57–65.
5. Каюмов О. Р. Асимптотическая устойчивость в большом в системах с цилиндрическим фазовым пространством // Изв. вузов. Матем. 1987. № 10. С. 61–63.
6. Леонов Г. А., Селеджи С. М. Системы фазовой синхронизации в аналоговой и цифровой схемотехнике. СПб.: Невский диалект, 2002. 112 с.
7. Andreev A. S., Peregudova O. A. On global trajectory tracking control of robot manipulators in cylindrical phase space // International Journal of Control. 2020. Vol. 93, No. 2. pp. 3003–3015.

8. Матросов В. М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М: Физматлит, 2001. 380 с.
9. Румянцев В. В. Об устойчивости по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Сер. Математика, механика, физика, астрономия, химия. 1957. № 4. С. 9–16.
10. Corduneanu C. Some problems, concerning partial stability // Sympos. Math. 1971. Vol. 6. pp. 141–154.
11. Румянцев В. В., Озиранер А. С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
12. Метод векторных функций Ляпунова в теории устойчивости / под ред. А. А. Воронова, В. М. Матросова. М.: Наука., 1987. 312 с.
13. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
14. Воротников В. И. Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автомат. и телемех. 2005. Вып. 4. С. 3–59.
15. Перегудова О. А. Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем. Ульяновск: УлГУ, 2009. 253 с.
16. Хусанов Дж. Х., Бердиеров А. Ш., Буранов Ж. И. Метод сравнения в задачах устойчивости по части переменных решений обыкновенных дифференциальных уравнений // Бюллетень Института Математики. 2020. № 4. С. 147–163.
17. Воскресенский Е. В. Асимптотические методы: Теория и приложения. Саранск: СВМО, 2001. 300 с.
18. Artstein Z. Topological dynamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equat. 1977. Vol. 23. pp. 216–223.
19. Sell G. R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I, II // Trans. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 127, No. 2. pp. 241–283.
20. Андреев А. С., Перегудова О. А. К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости // ПММ. 2006. Т. 70, вып. 6. С. 965–976.
21. Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 304 с.
22. Хатвани Л. О применении дифференциальных неравенств к теории устойчивости // Вестник Московского университета. Сер. Математика и механика. 1975. № 3. С. 83–89.

*Поступила 16.07.2021; доработана после рецензирования 20.08.2021;
принята к публикации 30.08.2021*

Информация об авторах:

Буранов Жамшид Имамкулович, аспирант Академического лицея Ташкентского государственного технического университета имени Ислама Каримова (100095, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 2), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4366-4021>, juventus88.60.94@mail.ru

Хусанов Джуманазар Хусанович, профессор Джизакского политехнического института (130100, Узбекистан, Джизак, ул. И. Каримова, 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9444-9324>, d.khusanov1952@mail.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 34D20

On stability with respect to the part of variables of a non-autonomous system in a cylindrical phase space

J. I. Buranov¹, D. Kh. Khusanov²

¹ *Academic Lyceum of Tashkent State Technical University named after Islam Karimov (Tashkent, Uzbekistan)*

² *Jizzakh Polytechnic Institute (Jizakh, Uzbekistan)*

Abstract. The stability problem of a system of differential equations with a right-hand side periodic with respect to the phase (angular) coordinates is considered. It is convenient to consider such systems in a cylindrical phase space which allows a more complete qualitative analysis of their solutions. The authors propose to investigate the dynamic properties of solutions of a non-autonomous system with angular coordinates by constructing its topological dynamics in such a space. The corresponding quasi-invariance property of the positive limit set of the system's bounded solution is derived. The stability problem with respect to part of the variables is investigated basing of the vector Lyapunov function with the comparison principle and also basing on the constructed topological dynamics. Theorem like a quasi-invariance principle is proved on the basis of a vector Lyapunov function for the class of systems under consideration. Two theorems on the asymptotic stability of the zero solution with respect to part of the variables (to be more precise, non-angular coordinates) are proved. The novelty of these theorems lies in the requirement only for the stability of the comparison system, in contrast to the classical results with the condition of the corresponding asymptotic stability property. The results obtained in this paper make it possible to expand the usage of the direct Lyapunov method in solving a number of applied problems.

Key Words: non-autonomous system, cylindrical phase space, stability with respect to the part of variables, Lyapunov function

For citation: J. I. Buranov, D. Kh. Khusanov. On stability with respect to the part of variables of a non-autonomous system in a cylindrical phase space. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:3(2021), 273–284. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.273-284>

REFERENCES

1. Barbashin E. A., Tabueva V. A., *[Dynamical systems with a cylindrical phase space]*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 302 p.

2. Leonov G. A., “A Class of Dynamical Systems with Cylindrical Phase Spaces”, *Siberian Mathematical Journal*, **17** (1976), 72–90.
3. Krasovskii N. N., *Stability of Motion: Applications of Lyapunov’s Second Method to Differential Systems and Equations with Delay*, Stanford Univ. Press, Stanford, 1963, 194 p.
4. La Salle J. P., “Stability Theory for Ordinary Differential Equations”, *J. Differ. Equat.*, **4:1** (1968), 57–65.
5. Kayumov O. R., “Asymptotic Stability in the Large in Systems with a Cylindrical Phase Space”, *Soviet Math. (Iz. VUZ)*, **31:10** (1987), 79–82.
6. Leonov G. A., Seledzhi S. M., *[Systems of Phase Synchronization in Analog and Digital Circuit Technology]*, Nevskii Dialekt, St. Petersburg, 2002 (In Russ.), 112 p.
7. Andreev A. S., Peregodova O. A., “On Global Trajectory Tracking Control of Robot Manipulators in Cylindrical Phase Space”, *International Journal of Control*, **93:2** (2020), 3003–3015.
8. Matrosov V. M., *Method of Lyapunov Vector Functions: Analysis of Dynamical Properties of Nonlinear Systems*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 380 p.
9. Rumyantsev V. V., “[On Stability with Respect to Some of the Variables]”, *Vestnik MGU. Ser. Mat., Mechanics, Phys., Astron., Chem.*, 1957, no. 4, 9–16 (In Russ.).
10. Corduneanu C., “Some Problems, Concerning Partial Stability”, *Sympos Math.*, . **6** (1971), 141–154.
11. Rumyantsev V. V., Oziraner A. S., *Stability and Stabilization of Motion in Relation to Some of the Variables*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 253 p.
12. *The Vector Lyapunov Functions in Stability Theory*, eds. R. Z. Abdullin, R. Z. Kozlov, V. M. Matrosov, others, World Federation Publishers Inc., 1996, 394 p.
13. Vorotnikov V. I., Rumyantsev V. V., *Stability and Control in a Part of Coordinate of the Phase Vector of Dynamic Systems: Theory, Methods, and Applications*, Nauchnyy Mir Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 320 p.
14. Vorotnikov V. I., “Partial Stability and Control: The State-of-the-Art and Development Prospects”, *Automation and Remote Control*, 2005, no. 66, 511–561.
15. Peregodova O. A., *Comparison Method in Problems of Stability and Motion Control of Mechanical Systems*, UIGU Publ., Ulyanovsk, 2009 (In Russ.), 253 p.
16. Khusanov J. Kh., Berdierov A. Sh., Buranov Zh. I., “[Comparison Method in Problems of Stability in Terms of Variables for Solutions of Ordinary Differential Equations]”, *Bulletin of the Institute of Mathematics*, 2020, no. 4, 147–163 (In Russ.).
17. Voskresenskiy E. V., *[Asymptotic Methods: Theory and Applications]*, SVMO Publ., Saransk, 2001 (In Russ.), 300 c.
18. Artstein Z., “Topological Dynamics of Ordinary Differential Equations”, *J. Differ. Equat.*, **23** (1977), 216–223.

19. Sell G. R., “Nonautonomous Differential Equations and Topological Dynamics. I, II”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **127**:2 (1967), 241–283.
20. Andreyev A. S., Peregudova O. A., “The Comparison Method in Asymptotic Stability Problems”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **70**:6 (2006), 865–875.
21. Rouche N., Habets P., Laloy M., *Stability Theory by Lyapunov’s Direct Method*, Springer-Verlag, New York, 1977, 396 p.
22. Hatvani L., “On the Application of Differential Inequalities to Stability Theory”, *Moscow University Bulletin. Ser. Mathematics and Mechanics*, 1975, no. 3, 83–89.

Submitted 16.07.2021; Revised 20.08.2021; Accepted 30.08.2021

Information about the authors:

Jamshid I. Buranov, Graduate Student, Academic Lyceum of Tashkent State Technical University named after Islam Karimov (2 University St., Tashkent 100095, Uzbekistan), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4366-4021>, juventus88.60.94@mail.ru

Jumanazar Kh. Khusanov, Professor, Jizzakh Polytechnic Institute (4 I. Karimov St., Jizakh 130100, Uzbekistan), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9444-9324>, d.khusanov1952@mail.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202103.285-294

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.925

О сохранении устойчивости равновесия нелинейных осцилляторов при консервативных возмущениях

А. А. Косов

*Институт динамики систем и теории управления им В. М. Матросова
СО РАН (ИДСТУ СО РАН) (г. Иркутск, Российская Федерация)*

Аннотация. Рассматривается задача Ю. Н. Бибикова о сохранении устойчивости положения равновесия двух взаимосвязанных нелинейных осцилляторов при действии малых в определенном смысле консервативных возмущающих сил. При разных способах сведения системы к гамильтоновой форме выявлены некоторые особенности для случая, когда возмущающие силы взаимодействия двух осцилляторов являются потенциальными. Получены условия сохранения устойчивости и неустойчивости равновесия двух осцилляторов для случая достаточно малых возмущающих сил. Задача о сохранении устойчивости равновесия при консервативных возмущениях рассмотрена также в более общей ситуации произвольного числа осцилляторов со степенными потенциалами с рациональными показателями степени, что приводит к случаю обобщенно однородного потенциала невозмущенной системы. На примере показана применимость предложенного подхода и в случае, когда порядок малости возмущающих сил совпадает с порядком малости невозмущенного гамильтониана.

Ключевые слова: нелинейные осцилляторы, гамильтонова система, устойчивость

Для цитирования: Косов А. А. О сохранении устойчивости равновесия нелинейных осцилляторов при консервативных возмущениях // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 285–294. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.285-294>

1. Постановка задачи

Рассматривается механическая система, состоящая из двух не связанных устойчивых нелинейных осцилляторов

$$m_i \ddot{x}_i + a_i x_i^{2n_i-1} = 0, \quad m_i > 0, \quad a_i > 0, \quad n_i > 1, \quad i = 1, 2. \quad (1.1)$$

Система (1.1) имеет устойчивое по Ляпунову положение равновесия $x_i = 0$, $i = 1, 2$, поскольку потенциальная энергия $\Pi_0 = \frac{a_1}{2n_1} x_1^{2n_1} + \frac{a_2}{2n_2} x_2^{2n_2}$ имеет в этой точке изолированный минимум. В работе [1] была поставлена задача о сохранении устойчивости положения равновесия при консервативных возмущениях.

Введем обозначения

$$y_1 = \frac{\dot{x}_1}{\lambda_1}, \quad y_2 = -\frac{\dot{x}_2}{\lambda_2}, \quad \lambda_i = \sqrt{\frac{a_i}{m_i}}, \quad H_0 = \frac{\lambda_1}{2n_1} (x_1^{2n_1} + n_1 y_1^2) - \frac{\lambda_2}{2n_2} (x_2^{2n_2} + n_2 y_2^2).$$

Тогда систему (1.1) можно переписать в гамильтоновой форме

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H_0}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H_0}{\partial x_i}. \quad (1.2)$$



Положение равновесия в начале координат системы (1.2) устойчиво, поскольку этим свойством обладает исходная система (1.1). Ю. Н. Бибииков рассматривает в работе [1] возмущенную гамильтонову систему

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad H = H_0(x, y) + H_1(x, y) \quad (1.3)$$

и задачу нахождения условий на возмущения, порождаемые функцией $H_1(x, y)$, при выполнении которых равновесие в начале координат системы (1.3) будет устойчиво по Ляпунову.

Обозначим наименьшее общее кратное чисел n_1 и n_2 через $N = \text{НОК}(n_1, n_2) = n_1 k_1 = n_2 k_2$, где k_1 и k_2 взаимно простые целые числа. Введем предположения [1] о свойствах функции $H_1(x, y)$.

(Условия **(В)**):

$H_1 = H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ аналитическая функция всех своих аргументов, разложение которой в ряд не содержит членов порядка ниже чем $N_B = 2N + |k_1 - k_2| + 1$, если x_i считать порядка k_i , а y_i – порядка N . Отметим, что в соответствии с работой [2] функция $H_0 = H_0(x_1, x_2, y_1, y_2)$ является обобщенно однородной класса (k_1, k_2, N, N) порядка $2N$, поскольку удовлетворяет тождеству

$$H_0(c^{k_1} x_1, c^{k_2} x_2, c^N y_1, c^N y_2) = c^{2N} H_0(x_1, x_2, y_1, y_2), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Условия **(В)** означают, что каждый моном в разложении функции $H_1 = H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ в степенной ряд является обобщенно однородной функцией класса (k_1, k_2, N, N) порядка не ниже чем $N_B = 2N + |k_1 - k_2| + 1$, что выше порядка малости $2N$ исходного гамильтониана $H_0 = H_0(x_1, x_2, y_1, y_2)$. В случае различных степеней $n_1 \neq n_2$ в соответствии с условиями **(В)** в окрестности положения равновесия возмущение гамильтониана $H_1 = H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ должно иметь порядок малости существенно выше (на 2 и более единицы) по сравнению с $H_0 = H_0(x_1, x_2, y_1, y_2)$.

$$H_1 = O\left(\left(|x_1|^{1/k_1} + |x_2|^{1/k_2} + |y_1|^{1/N} + |y_2|^{1/N}\right)^{N_B-1}\right),$$

$$H_0 = O\left(\left(|x_1|^{1/k_1} + |x_2|^{1/k_2} + |y_1|^{1/N} + |y_2|^{1/N}\right)^{2N}\right).$$

В работе [1] Ю. Н. Бибииковым были доказаны следующие утверждения.

Т е о р е м а 1.1 Если $n_1 \neq n_2$, возмущение $H_1 = H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ удовлетворяет условиям **(В)**, то равновесие $x = y = 0$ системы (1.3) устойчиво по Ляпунову.

Т е о р е м а 1.2 Если $n_1 = n_2$, возмущение $H_1 = H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ удовлетворяет условиям **(В)**, то равновесие $x = y = 0$ системы (1.3) условно устойчиво по отношению к начальным возмущениям, удовлетворяющим условию $H(x_1, x_2, y_1, y_2) \neq 0$.

Как отмечено Бибииковым, при $n_1 = n_2$ безусловная устойчивость при произвольных удовлетворяющих условию **(В)** возмущениях не гарантирована.

Рассмотрим применимость данных теорем в случае потенциальных возмущений

$$m_i \ddot{x}_i + a_i x_i^{2n_i-1} = F_i(x_1, x_2) = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2. \quad (1.4)$$

В гамильтоновой форме система (1.4) будет представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \frac{\partial H_0}{\partial y_1}, & \dot{x}_2 &= \frac{\partial H_0}{\partial y_2}, \\ \dot{y}_1 &= -\frac{\partial H_0}{\partial x_1} + \frac{1}{m_1 \lambda_1} F_1(x_1, x_2), & \dot{y}_2 &= -\frac{\partial H_0}{\partial x_2} - \frac{1}{m_2 \lambda_2} F_2(x_1, x_2). \end{aligned}$$

Следовательно, возмущение гамильтониана должно удовлетворять равенствам

$$-\frac{\partial H_1}{\partial x_1} = \frac{1}{m_1 \lambda_1} F_1 = -\frac{1}{m_1 \lambda_1} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_1}, \quad -\frac{\partial H_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{m_2 \lambda_2} F_2 = \frac{1}{m_2 \lambda_2} \frac{\partial \Pi_1}{\partial x_2}.$$

Дифференцируя первое равенство по x_2 , второе по x_1 и вычитая из первого второе, находим

$$\left(\frac{1}{m_1 \lambda_1} + \frac{1}{m_2 \lambda_2} \right) \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial x_1 \partial x_2} \equiv 0.$$

Отсюда находим $\Pi_1(x_1, x_2) = f_1(x_1) + f_2(x_2)$ — есть сумма произвольных дважды дифференцируемых функций. Однако в этом случае система (1.4) описывает *несвязанные* осцилляторы!

$$m_i \ddot{x}_i + a_i x_i^{2n_i-1} = F_i(x_1, x_2) = -\frac{\partial f_i(x_i)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, теоремы 1.1 и 1.2 неприменимы для анализа устойчивости положения равновесия взаимосвязанных нелинейных осцилляторов при потенциальных силах взаимодействия $F_i(x_1, x_2) = -\frac{\partial \Pi_1(x_1, x_2)}{\partial x_i}$.

Следовательно, поставленную Ю. Н. Бибиковым задачу получения условий сохранения устойчивости нелинейных осцилляторов при консервативных (в т. ч. потенциальных) силах взаимодействия необходимо рассматривать заново. Аналогичная задача представляет интерес в отношении сохранения неустойчивости, которая проявляется в случае, когда хотя бы один из коэффициентов отрицателен $a_i < 0$.

Необходимо отметить, что устойчивость положения равновесия гамильтоновой системы с двумя степенями свободы типа (1.3) в случае, когда одно из чисел n_1, n_2 равно 1, исследовалась в работах [3; 4; 5]. При этом, как указывалось в [6; 7], в первоначальные формулировки результатов и доказательства потребовалось вносить коррективы. Случай, когда оба числа n_1, n_2 больше 1, впервые изучался в [1].

2. Условия сохранения устойчивости (неустойчивости)

Введем обозначения

$$z_1 = m_1 \dot{x}_1, \quad z_2 = m_2 \dot{x}_2, \quad h_0 = \frac{a_1}{2n_1} x_1^{2n_1} + \frac{a_2}{2n_2} x_2^{2n_2} + \frac{1}{2m_1} z_1^2 + \frac{1}{2m_2} z_2^2.$$

Тогда систему (1.1) можно переписать в гамильтоновой форме

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h_0}{\partial z_i}, \quad \dot{z}_i = -\frac{\partial h_0}{\partial x_i}. \quad (2.1)$$

Положение равновесия в начале координат системы (2.1) устойчиво, поскольку функция $h_0(x, z)$ положительно определенная (в отличие от $H_0(x, y)$, которая знакопеременная) и поскольку этим же свойством обладает исходная система (1.1).

Отметим, что функция $h_0 = h_0(x_1, x_2, z_1, z_2)$ является обобщенно однородной класса (k_1, k_2, N, N) порядка $2N$, поскольку удовлетворяет тождеству

$$h_0(c^{k_1}x_1, c^{k_2}x_2, c^N z_1, c^N z_2) = c^{2N}h_0(x_1, x_2, z_1, z_2), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим возмущенную систему (2.1)

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h}{\partial z_i}, \quad \dot{z}_i = -\frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad h(x, z) = h_0(x, z) + h_1(x, z). \quad (2.2)$$

В частности, в случае, когда силы взаимодействия осцилляторов в системе (1.4) потенциальны $F_i(x_1, x_2) = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}$, возмущающий гамильтониан имеет вид $h_1(x, z) = \Pi_1(x)$.

Введем предположения о свойствах функции $h_1(x, z)$ (условия **(А)**): Функция $h_1 = h_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$ является дважды дифференцируемой и удовлетворяет в малой окрестности положения равновесия оценке

$$h_1 = o\left(\left(|x_1|^{1/k_1} + |x_2|^{1/k_2} + |y_1|^{1/N} + |y_2|^{1/N}\right)^{2N}\right).$$

Условия **(А)** будут очевидно выполнены, если $h_1 = h_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$ есть аналитическая функция всех своих аргументов, разложение которой в ряд не содержит членов порядка ниже, чем $N_A = 2N + 1$, если x_i считать порядка k_i , а z_i считать порядка N .

Таким образом, для функций одних и тех же аргументов условия **(В)** являются более жесткими, чем условия **(А)**. В случае различных степеней $n_1 \neq n_2$ порядок малости возмущения в условиях **(В)** на $|k_1 - k_2|$, т. е. минимум на единицу выше, чем в условиях **(А)**.

Условия сохранения устойчивости взаимодействующих осцилляторов при консервативных возмущениях даются следующим утверждением.

Теорема 2.1 Если $a_i > 0$, $i = 1, 2$ и возмущение $h_1 = h_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$ удовлетворяет условиям **(А)**, то положение равновесия $x = z = 0$ системы (2.2) устойчиво по Ляпунову.

Условия сохранения неустойчивости взаимодействующих осцилляторов при консервативных возмущениях даются следующим утверждением.

Теорема 2.2 Если хотя бы один из коэффициентов отрицателен $a_i < 0$, возмущение $h_1 = h_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$ является аналитической функцией и удовлетворяет условиям **(А)**, то положение равновесия $x = z = 0$ системы (2.2) неустойчиво по Ляпунову.

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 не приводятся, т. к. в следующем разделе доказаны более общие утверждения для произвольного числа нелинейных осцилляторов.

Отметим, что теорема 2.1 применима к системе (1.4) с потенциальными возмущениями, к которой, как было показано выше, неприменимы теоремы 1.1 и 1.2 Ю. Н. Бибикова [1]. Поскольку условия **(В)** являются более жесткими, чем условия **(А)**, то создается впечатление, что утверждения теорем 1.1 и 1.2 представляют собой простое следствие теоремы 2.1. Однако это не так, теоремы 1.1 и 1.2 Ю. Н. Бибикова и теорема 2.1 являются независимыми результатами.

Дело в том, что переменные (x, y) и (x, z) связаны линейным соотношением $y_1 = \frac{z_1}{m_1 \lambda_1}$, $y_2 = -\frac{z_2}{m_2 \lambda_2}$, которое переводит гамильтонову невозмущенную систему (1.2) с гамильтонианом $H_0(x, y)$ в гамильтонову невозмущенную систему (2.1) с гамильтонианом $h_0(x, z)$, и эти системы имеют устойчивые равновесия в начале координат. Однако эта замена переменных не является канонической, поэтому не переводит возмущенную гамильтонову систему с гамильтонианом $H = H_0(x_1, x_2, y_1, y_2) + H_1(x_1, x_2, y_1, y_2)$ в возмущенную гамильтонову систему с гамильтонианом $h = h_0(x_1, x_2, z_1, z_2) + h_1(x_1, x_2, z_1, z_2)$, а переводит в некоторую негамильтонову систему. Поэтому из теоремы 2.1 не следуют теоремы 1.1 и 1.2, а из теорем 1.1 и 1.2 не следует теорема 2.1.

3. Обобщение на случай произвольного числа осцилляторов

Рассмотрим теперь механическую систему, состоящую из $n \geq 2$ не связанных устойчивых нелинейных осцилляторов

$$m_i \ddot{x}_i + a_i x_i^{b_i} = 0, \quad m_i > 0, \quad a_i > 0, \quad b_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.1)$$

Здесь $b_i = \frac{p_i}{q_i}$ — рациональные числа с нечетными числителями p_i и знаменателями q_i . Отметим, что в частном случае, когда $n = 2$, $q_i = 1$, $p_i = 2n_i - 1$, $i = 1, 2$, (3.1) переходит в систему (1.1). Система (3.1) имеет устойчивое по Ляпунову положение равновесия $x_i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, поскольку потенциальная энергия

$$\Pi_0 = \frac{a_1}{b_1 + 1} x_1^{b_1+1} + \frac{a_2}{b_2 + 1} x_2^{b_2+1} + \dots + \frac{a_n}{b_n + 1} x_n^{b_n+1}$$

имеет в этой точке изолированный минимум. Рассмотрим задачу о сохранении устойчивости положения равновесия при консервативных возмущениях.

Обозначим наименьшее общее кратное чисел $\frac{p_i + q_i}{2}$ через $N = \text{НОК} \left(\frac{p_i + q_i}{2}, i = 1, 2, \dots, n \right)$. Тогда $2N = (p_i + q_i)k_i$, где k_i — натуральные числа, наибольший общий делитель которых равен 1.

Введем обозначения $z_i = m_i \dot{x}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$,

$$h_0 = \frac{a_1}{b_1 + 1} x_1^{b_1+1} + \frac{a_2}{b_2 + 1} x_2^{b_2+1} + \dots + \frac{a_n}{b_n + 1} x_n^{b_n+1} + \frac{1}{2m_1} z_1^2 + \dots + \frac{1}{2m_n} z_n^2.$$

Тогда систему (3.1) можно переписать в гамильтоновой форме

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h_0}{\partial z_i}, \quad \dot{z}_i = -\frac{\partial h_0}{\partial x_i}. \quad (3.2)$$

Положение равновесия в начале координат системы (3.2) устойчиво, поскольку функция $h_0(x, z)$ — положительно определенная.

Отметим, что функция $h_0 = h_0(x_1, \dots, x_n, z_1, \dots, z_n)$ является обобщенно однородной класса $(k_1 q_1, \dots, k_n q_n, N, \dots, N)$ порядка $2N$, поскольку удовлетворяет тождеству

$$h_0(c^{k_1 q_1} x_1, \dots, c^{k_n q_n} x_n, c^N z_1, \dots, c^N z_n) = c^{2N} h_0(x, z), \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Рассмотрим возмущенную систему (3.2)

$$\dot{x}_i = \frac{\partial h}{\partial z_i}, \quad \dot{z}_i = -\frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad h(x, z) = h_0(x, z) + h_1(x, z). \quad (3.3)$$

В частности, в случае, когда силы взаимодействия осцилляторов в системе (3.3) потенциальны, возмущающий гамильтониан имеет вид $h_1(x, z) = \Pi_1(x)$.

Введем предположения о свойствах функции $h_1(x, z)$ (условия (А)): функция $h_1 = h_1(x, z)$ является дважды дифференцируемой и удовлетворяет в малой окрестности положения равновесия оценке

$$h_1 = o\left(\left(|x_1|^{1/k_1 q_1} + \dots + |x_n|^{1/k_n q_n} + |y_1|^{1/N} + \dots + |y_n|^{1/N}\right)^{2N}\right). \quad (3.4)$$

Условия (А) будут очевидно выполнены, если $h_1 = h_1(x, z)$ есть аналитическая функция всех своих аргументов, разложение которой в ряд не содержит членов порядка ниже чем $N_A = 2N + 1$, если x_i считать порядка $k_i q_i$, а z_i – порядка N . Условия сохранения устойчивости взаимодействующих осцилляторов при консервативных возмущениях описываются следующим утверждением.

Теорема 3.1 *Если $a_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, и возмущение $h_1 = h_1(x, z)$ удовлетворяет условиям (А), то положение равновесия $x = z = 0$ системы (3.3) устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Гамильтонова система (3.3) имеет первый интеграл $h = h_0(x, z) + h_1(x, z) = const$. Для производной в силу системы (3.3) имеет место равенство $\left.\frac{dh}{dt}\right|_{(3.3)} = 0$. Функция $h_0(x, z)$ является положительно определенной, поэтому по свойствам обобщенно однородных функций [2] справедлива оценка

$$h_0(x, z) \geq M \left(|x_1|^{1/k_1 q_1} + \dots + |x_n|^{1/k_n q_n} + |y_1|^{1/N} + \dots + |y_n|^{1/N}\right)^{2N},$$

где $M > 0$ есть некоторая постоянная. По условию (А) для функции $h_1(x, z)$ справедлива оценка (3.4), поэтому в некоторой окрестности нулевого решения справедлива оценка для суммы

$$h = h_0 + h_1 \geq \frac{M}{2} \left(|x_1|^{1/k_1} + |x_2|^{1/k_2} + |y_1|^{1/N} + |y_2|^{1/N}\right)^{2N}.$$

Справедливость утверждения теоремы 3.1 теперь вытекает из теоремы Ляпунова об устойчивости с учетом положительной определенности функции $h = h_0(x, z) + h_1(x, z)$. **Доказательство завершено.**

Условия сохранения неустойчивости взаимодействующих осцилляторов при консервативных возмущениях даются следующим утверждением.

Теорема 3.2 *Если хотя бы один из коэффициентов отрицателен $a_i < 0$, все знаменатели $q_i = 1$, $i = 1, \dots, n$, и возмущение $h_1 = h_1(x, z)$ является аналитической функцией и удовлетворяет условиям (А), то положение равновесия $x = z = 0$ системы (3.3) неустойчиво по Ляпунову.*

Справедливость этого утверждения вытекает из теоремы В. В. Козлова о неустойчивости [8] с учетом полуквазиоднородности функции $h = h_0(x, z) + h_1(x, z)$.

Покажем на примере, что условия сохранения устойчивости могут быть получены и в случае, когда порядок малости потенциальных возмущений совпадает с порядком малости невозмущенного потенциала.

Пример 3.1 Рассмотрим систему, состоящую из двух осцилляторов

$$m_i \ddot{x}_i + a_i x_i^{(4-q)/q} = -\frac{\partial \Pi_1}{\partial x_i}, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.5)$$

Здесь $\Pi_1 = k \left(x_1^{1/q} - x_2^{1/q} \right)^4$, $k < 0$, $q = 1$ или $q = 3$. При $k = 0$ осцилляторы не связаны между собой и положение равновесия каждого из них устойчиво. Найдем максимальное значение $k_1 < 0$ такое, что при всех $k \in (k_1, 0)$ устойчивость положения равновесия $x = 0$ системы (3.5) сохраняется.

Положим $u_i = x_i^{1/q}$, тогда потенциальная энергия будет однородной формой четвертой степени $\Pi(u_1, u_2) = q \frac{a_1}{4} u_1^4 + q \frac{a_2}{4} u_2^4 + k(u_1 - u_2)^4$. Для получения области, в которой сохраняется устойчивость надо установить, при каких $k < 0$ эта форма 4-й степени остается положительно определенной.

Эту форму запишем в виде $\Pi(u_1, u_2) = u_2^2 F_4(v)$, $v = \frac{u_1}{u_2}$, где $F_4(v)$ есть полином 4-й степени

$$F_4(v) = q \frac{a_1}{4} v^4 + q \frac{a_2}{4} + k(v - 1)^4.$$

Форма $\Pi(u_1, u_2)$ положительно определена тогда и только тогда, когда у полинома $F_4(v)$ нет вещественных корней. Дискриминант полинома $F_4(v)$ есть полином 3-й степени относительно k

$$D_4 = 4q^3(a_1 + a_2)^3 k^3 + 3q^4 a_1 a_2 (a_1^2 - 7a_1 a_2 + a_2^2) k^2 + \frac{3}{4} q^5 a_1^2 a_2^2 (a_1 + a_2) k + \frac{1}{16} q^6 a_1^3 a_2^3.$$

Обозначим наибольший отрицательный корень полинома D_4 через k_0 . Свободный член этого полинома положителен, поэтому на интервале $k \in (k_0, 0)$ будет $D_4 > 0$. Значит, для этого интервала все 4 корня полинома $F_4(v)$ различны и либо все вещественные, либо все комплексные. Если у полинома $F_4(v)$ четыре различных вещественных корня, то у его производной

$$F_3(v) = \frac{d}{dv} F_4(v) = q a_1 v^3 + 4k(v - 1)^3$$

должно быть 3 различных вещественных корня. Но дискриминант полинома $F_3(v)$ есть $D_3 = -432q^2 a_1^2 k^2 < 0$. Следовательно, у полинома $F_3(v)$ только один вещественный корень. Это значит, что у полинома $F_4(v)$ все 4 корня комплексные и форма $\Pi(u_1, u_2)$ является положительно определенной при всех $k \in (k_0, 0)$. Таким образом установлено, что устойчивость сохраняется в интервале $k \in (k_1, 0)$, где $k_1 = k_0$ есть наибольший отрицательный корень полинома D_4 .

Отметим, что в случае $q = 1$ потенциальная энергия для системы (3.5) является однородной формой четвертой степени от исходных координат, которая при любом $k < k_0$ может принимать отрицательные значения. Поэтому применима теорема В. В. Козлова [8], из которой следует неустойчивость равновесия. В случае же $q = 3$ применить эту теорему формально невозможно, поскольку потенциальная энергия не является полиномом.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00746).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бибииков Ю. Н. Об устойчивости в гамильтоновых системах с двумя степенями свободы // Математические заметки. 2014. Т. 95, вып. 2. С. 202–208. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9115>
2. Зубов В. И. Математические методы исследования систем автоматического регулирования. Л.: Машиностроение, 1974. 336 с.
3. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974. 478 с.
4. Moser J. K. Lectures on Hamiltonian Systems. Amer. Math. Soc. Providence, RI. 1968. 87 p.
5. Сокольский А. Г. Об устойчивости автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы при резонансе первого порядка // Прикладная математика и механика. 1977. Т. 41, вып. 1. С. 24–33.
6. Брюно А. Д. Аналитическая форма дифференциальных уравнений // Тр. ММО. 1972. Т. 26, стр. 199–239.
7. Брюно А. Д. Об устойчивости в системе Гамильтона // Математические заметки. 1986. Т. 40, вып. 3. С. 385–392. <https://doi.org/10.1007/BF01142477>
8. Козлов В. В. Неустойчивость равновесия в потенциальном поле // Успехи математических наук. 1981. Т. 36, вып. 1. С. 209–210. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1981v036n01ABEH002551>

*Поступила 18.05.2021; доработана после рецензирования 30.07.2021;
принята к публикации 25.08.2021*

Информация об авторе:

Косов Александр Аркадьевич, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-1352-1828>, kosov_idstu@mail.ru.

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 34D20, 34H15, 70E50

On maintaining the stability of the equilibrium of nonlinear oscillators under conservative perturbations

A. A. Kosov

Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation)

Abstract. The problem of Yu.N. Bibikov on maintaining the stability of the equilibrium position of two interconnected nonlinear oscillators under the action of small, in a certain sense, conservative perturbing forces is considered. With different methods of reducing the system to the Hamiltonian form, some features are revealed for the case when the perturbing forces of the interaction of two oscillators are potential. The conditions for preserving the stability and instability of the equilibrium of two oscillators for the case of sufficiently small disturbing forces are obtained. The problem of maintaining the stability of the equilibrium under conservative perturbations is also considered in the more general situation of an arbitrary number of oscillators with power potentials with rational exponents, which leads to the case of a generalized homogeneous potential of an unperturbed system. The example given shows the applicability of the proposed approach in the case when the order of smallness of the perturbing forces coincides with the order of smallness of the unperturbed Hamiltonian.

Key Words: nonlinear oscillators, Hamiltonian system, stability

For citation: A. A. Kosov. On maintaining the stability of the equilibrium of nonlinear oscillators under conservative perturbations. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:3(2021), 285–294. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.285-294>

REFERENCES

1. Bibikov Yu. N., “On Stability in Hamiltonian Systems with Two Degrees of Freedom”, *Mathematical Notes*, **95**:2 (2014), 176–181. DOI: <https://doi.org/10.4213/mzm9115>
2. Zubov V. I., “Mathematical Methods for the Study of Automatic Control Systems”, 1962, 327 p.
3. Arnold V. I., “Mathematical Methods of Classical Mechanics”, 1978, 464 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4757-1693-1>
4. Moser J. K., *Lectures on Hamiltonian Systems*, Amer. Math. Soc., Providence, RI., 1968, 87 c.
5. Sokol'skii A. G., “[On Stability of an Autonomous Hamilton System with Two Degrees of Freedom under First-Order Resonance]”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **41**:1 (1977), 24–33 (In Russ.).
6. Bryuno A. D., “Analytic form of differential equations”, *Trans. Moscow Math. Soc.*, **26** (1972), 199-239.
7. Bryuno A. D., “Stability in a Hamiltonian System”, *Mathematical Notes*, **40**:3 (1986), 726–730. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF01142477>

8. Kozlov V. V., “Instability of Equilibrium in a Potential Field”, *Russian Math. Surveys*, **36:3** (1981), 238–239. DOI: <https://doi.org/10.1070/RM1981v036n01ABEH002551>

Submitted 18.05.2021; Revised 30.07.2021; Accepted 25.08.2021

Information about the author:

Alexander Kosov, Leading researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134, Lermontov Str., Irkutsk 664033, Russian Federation), Ph. D. (Mathematics and Physics), ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-1352-1828>, kosov_idstu@mail.ru,

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202103.295–307

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 515.162.2

О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора

С. В. Сидоров¹, Е. Е. Чилина²

¹ ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

² Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Данная работа содержит полную классификацию алгебраических негиперболических автоморфизмов двумерного тора, анонсированную С. Баттерсоном в 1979 г. Такие автоморфизмы включают в себя все периодические автоморфизмы. Их классификация имеет непосредственное отношение к топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей, т. к. согласно результатам В. З. Гринеса и А. Н. Безденежных, любой градиентно-подобный сохраняющий ориентацию диффеоморфизм поверхности представляется как суперпозиция сдвига на единицу времени градиентно-подобного потока и некоторого периодического гомеоморфизма. Я. Нильсеном найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов ориентируемых поверхностей посредством сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. Результаты настоящей работы позволяют в случае тора полностью решить задачу реализации всех классов топологической сопряженности не гомотопных тождественному периодическим отображениям. А именно, из настоящей работы следует, что если несущая поверхность периодических гомеоморфизмов является двумерным тором, то существует в точности семь таких классов, каждый из которых представляется алгебраическим автоморфизмом двумерного тора, индуцированным некоторой периодической матрицей.

Ключевые слова: периодические гомеоморфизмы, двумерный тор, алгебраический автоморфизм

Для цитирования: Сидоров С. В., Чилина Е. Е. О негиперболических алгебраических автоморфизмах двумерного тора // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 295–307. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.295–307>

1. Введение

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{Z})$, то есть A — целочисленная квадратная матрица второго порядка и $\det A = \pm 1$. Тогда она индуцирует отображение $f_A : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, заданное формулой

$$f_A : \begin{cases} \bar{x} = ax + by \pmod{1} \\ \bar{y} = cx + dy \pmod{1}, \end{cases}$$

которое является **алгебраическим автоморфизмом двумерного тора**.

Если собственные значения матрицы $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ не равны по модулю единице, то алгебраический автоморфизм двумерного тора, индуцированный матрицей A , называется **гиперболическим алгебраическим автоморфизмом двумерного тора**. В против-



ном случае автоморфизм f_A будем называть **негиперболическим** алгебраическим автоморфизмом двумерного тора.

Два алгебраических автоморфизма тора f и g называются **сопряженными**, если существует такой автоморфизм h , что $g = hfh^{-1}$.

Пусть f — алгебраический автоморфизм тора. Множество $K_f = \{hfh^{-1} \mid h \text{ — алгебраический автоморфизм тора}\}$ называется **классом сопряженности автоморфизма f** .

Обозначим через $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ множество целочисленных матриц порядка 2. Матрица $B \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ называется **подобной** матрице $A \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ над \mathbb{Z} , если существует такая матрица $S \in Gl(2, \mathbb{Z})$, что $B = S^{-1}AS$. Если $A \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$, то множество $K_A = \{S^{-1}AS \mid S \in Gl(2, \mathbb{Z})\}$ называется **классом подобия матрицы A** .

Таким образом, задача о нахождении классов сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора сводится к задаче о нахождении классов подобия целочисленных унимодулярных матриц второго порядка, собственные значения которых равны по модулю единице. Решение задачи о нахождении классов подобия целочисленных унимодулярных матриц второго порядка, собственные значения которых являются корнями из единицы, было анонсировано в [1] в виде следующей леммы.

Л е м м а 1.1 (Лемма Баттерсона [1]) Пусть $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ и оба ее собственных значения являются корнями из единицы. Тогда A подобна над \mathbb{Z} в точности одной из следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

В разделе 2 установлено, что утверждение леммы 1.1 имеет место для более общей ситуации, когда собственные значения матрицы $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ равны по модулю единице, и приведено полное доказательство леммы 1.1, так как в работе [1] автор оставляет часть доказательства для читателя.

Два гомеоморфизма f и g называются **топологически сопряженными**, если существует такой гомеоморфизм h , что $g = hfh^{-1}$.

В предложении 3.2 раздела 3. приведена классификация периодических алгебраических автоморфизмов двумерного тора. Кроме того, в предложении 3.3 установлено, что каждый класс топологической сопряженности не гомотопных тождественному сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора содержит алгебраический автоморфизм.

2. Лемма Баттерсона

В работе [1] С. Баттерсон при доказательстве леммы 1.1 опускает нахождение всех возможных собственных значений, которые может иметь матрица $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$. Автор приводит рассуждения для случая, когда оба собственных значения матрицы $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ равны 1, основываясь на Теореме III.12 из книги [2]. Не приводя доказательство для случаев, когда оба собственных значения матрицы $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ равны -1 или одно равно 1, а другое -1 . Автор утверждает, что они аналогичны случаю, когда оба собственных значения матрицы $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ равны 1. На самом деле в случае,

когда одно собственное значение матрицы $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ равно 1, а другое -1 , доказательство требует некоторых дополнительных рассуждений. В качестве доказательства для случая, когда собственные значения матрицы $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ являются комплексными числами, С. Баттерсон ссылается на теорему III.13 из книги [2] и результаты работы [6], которые напрямую не связаны с ходом рассуждения доказательства леммы. По этой причине доказательство этой части леммы остается не до конца ясным читателю.

В данном разделе предложение 2.1 устанавливает, что утверждение леммы 1.1 также имеет место для случая, когда собственные значения матрицы $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ равны по модулю 1. Кроме того, в ходе его доказательства найдены все возможные собственные значения, равные по модулю 1, которые могут соответствовать матрице $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$, и доказано, что других нет. В разделе представлено полное доказательство леммы Баттерсона, которое опирается на результаты работы [7].

Сначала приведем все необходимые для доказательства предложения.

Предложение 2.1 Пусть собственные значения λ_1, λ_2 матрицы $A \in Gl(2, \mathbb{Z})$ равны по модулю единице. Тогда они являются корнями из единицы и имеют вид, соответствующий одному из следующих:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$.
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$.
3. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$.
4. $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$.
5. $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.
6. $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Доказательство.

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Gl(2, \mathbb{Z})$. Через Δ обозначим определитель матрицы A , а через $f(\lambda)$ – ее характеристический многочлен. Тогда $\Delta = ad - bc = \pm 1$, $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a+d) + ad - bc$.

Найдем собственные значения $\lambda_{1,2}$ матрицы A :

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a+d \pm \sqrt{(a-d)^2 + 4bc}).$$

По условию имеем $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$.

Если $(a-d)^2 + 4bc \geq 0$, то $\lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$. Поскольку $\lambda_1 \lambda_2 = ad - bc = \Delta = \pm 1$ и $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, то $\lambda_1, \lambda_2 \in \{1, -1\}$. При этом возможны три случая:

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$
2. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
3. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$

Если $(a-d)^2 + 4bc < 0$, то $\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(a+d \pm i\sqrt{|(a-d)^2 + 4bc|}) \notin \mathbb{R}$. Представив комплексное число λ_j в тригонометрической форме записи $\lambda_j = |\lambda_j|(\cos \phi + i \sin \phi)$, получим $Re\lambda_j = |\lambda_j| \cos \phi = \cos \phi = \frac{a+d}{2}$. Имеем $|\cos \phi| = |Re\lambda_j| = \left| \frac{a+d}{2} \right| \leq 1$. При условии $a, d \in \mathbb{Z}$ получим, что $|Re\lambda_j| \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$

Если $|Re\lambda_j| = 1$, то $|Im\lambda_i| = (a-d)^2 + 4bc = 0$ – противоречие с условием $(a-d)^2 + 4bc < 0$. Если $|Re\lambda_j| = 0$, то $|Im\lambda_j| = 1$. Если $|Re\lambda_i| = \frac{1}{2}$, то $|Im\lambda_i| = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что коэффициенты многочлена $f(\lambda)$ – вещественные числа, то при условии, что $|Re\lambda_j| \in \{0, \frac{1}{2}\}$ и $|\lambda_j| = 1$, возможны только три случая:

1. $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$
2. $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
3. $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Каждое из найденных значений λ_j является корнем из единицы, следовательно, утверждение предложения верно. В общем случае утверждение о том, что если все корни целочисленного многочлена со старшим коэффициентом 1 равны по модулю единице, то они являются корнями из единицы, доказано в работе [8].

Напомним, что многочлен ненулевой степени $f \in \mathbb{Q}[\lambda]$ с рациональными коэффициентами называется **неприводимым над \mathbb{Q}** , если его нельзя представить в виде произведения многочленов из $\mathbb{Q}[\lambda]$, степень каждого из которых строго меньше степени многочлена f .

Предложение 2.2 (Теорема 3 из [7]). Пусть характеристический многочлен матрицы $A \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ имеет вид $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$, где $\alpha \in \mathbb{Z}$. Тогда матрица A подобна над \mathbb{Z} в точности одной матрице вида:

$$\begin{pmatrix} \alpha & m \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Предложение 2.3 (Теорема 4 из [7]). Пусть характеристический многочлен матрицы $A \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ имеет вид $f(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, где $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}, \beta > \alpha$. Тогда матрица A подобна над \mathbb{Z} в точности одной матрице вида:

$$\begin{pmatrix} \alpha & m \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, m \in \left\{ 0, \dots, \left\lfloor \frac{\beta - \alpha}{2} \right\rfloor \right\}.$$

Предложение 2.4 Пусть целочисленная матрица A имеет неприводимый над \mathbb{Q} характеристический многочлен $f(\lambda) = \lambda^2 - t\lambda + 1$, где $t \in \{-1, 0, 1\}$. Тогда A подобна над \mathbb{Z} некоторой матрице $\begin{pmatrix} a & b \\ c & t-a \end{pmatrix}$, $a \geq 0, |b| \geq a+1, |c| \geq a+1$.

Доказательство. Пусть A – целочисленная матрица и $f(\lambda) = \lambda^2 - t\lambda + 1$. Тогда след матрицы A (сумма ее диагональных элементов) равен t , а $\det(A) = 1$, поэтому

$A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t-x \end{pmatrix}$. Не уменьшая общности, можно считать, что $x \geq 0$. Действительно, если $x < 0$, то взяв $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, получим $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} t-x & z \\ y & x \end{pmatrix}$, $t-x \geq t+1 \geq 0$.

1. Если $|y| \geq x+1$, $|z| \geq x+1$, то A имеет искомый вид ($A = E^{-1}AE$).

2. Если $|y| \leq x$, то разделим x на y с остатком, получим $x = yq_1 + r_1$, где $0 \leq r_1 < |y|$.

Тогда для $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q_1 & 1 \end{pmatrix}$ имеем $A_2 = T^{-1}AT = \begin{pmatrix} r_1 & y \\ c_1 & t-r_1 \end{pmatrix}$.

3. Если $|z| \leq x$, то разделим x на z с остатком, получим $x = zq_2 + r_2$, где $0 \leq r_2 < |z|$.

Тогда для $S = \begin{pmatrix} 1 & q_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеем $A_3 = S^{-1}AS = \begin{pmatrix} r_2 & b_2 \\ z & t-r_2 \end{pmatrix}$.

После выполнения действий во втором или в третьем случаях для новой матрицы (A_2 или A_3) либо сразу будет справедлив случай 1, либо снова будет справедлив случай 2 или случай 3. Тогда с каждым шагом элемент x в левом верхнем углу матрицы будет уменьшаться. В силу его неотрицательности за конечное число шагов получим случай 1.

Предложение 2.5 Пусть $f(\lambda) = \lambda^2 - t\lambda + 1$, где $t \in \{-1, 0, 1\}$ — характеристический многочлен матрицы A . Тогда

1) если $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$, то A подобна над \mathbb{Z} матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

2) если $f(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 1$, то A подобна над \mathbb{Z} матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

3) если $f(\lambda) = \lambda^2 + \lambda + 1$, то A подобна над \mathbb{Z} матрице $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Доказательство. Из предложения 2.4 можно считать, что матрица A имеет вид $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & t-a \end{pmatrix}$, где $t \in \{-1, 0, 1\}$, $-a^2 + at - bc = 1$, $a \geq 0$, $|b| \geq a+1$, $|c| \geq a+1$.

Заметим, что $bc = -a^2 + at - 1 < 0$ при $t \in \{-1, 0, 1\}$.

Поскольку $bc < 0$ и $|b| \geq a+1$, $|c| \geq a+1$, то $-bc = |b| \cdot |c|$ и

$$a^2 - at + 1 = -bc = |b| \cdot |c| \geq (a+1)^2 = a^2 + 2a + 1,$$

что равносильно неравенству $a(t+2) \leq 0$. Если $a > 0$, то имеем $t+2 \leq 0$ — противоречие с условием $t \in \{-1, 0, 1\}$. Следовательно,

$$a = 0, \quad bc = -1, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & t \end{pmatrix},$$

причем можно считать, что $b = 1$, $c = -1$, поскольку для $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ имеем $P^{-1}AP =$
 $= \begin{pmatrix} 0 & -b \\ -c & t \end{pmatrix}$.

Таким образом,

1) если $t = 0$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$,

2) если $t = 1$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$,

3) если $t = -1$, то $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Перейдем к доказательству леммы Баттерсона.

Доказательство.

Пусть $M \in Gl(2, \mathbb{Z})$. Согласно предложению 2.1 рассмотрим все возможные случаи собственных значений λ_1, λ_2 матрицы M .

1. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M имеет вид $f(\lambda) = (\lambda - 1)^2$. Из предложения 2.2 матрица M подобна над \mathbb{Z} в точности одной матрице вида:

$$M_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

2. $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M имеет вид $f(\lambda) = (\lambda + 1)^2$. Из предложения 2.2 матрица M подобна над \mathbb{Z} в точности одной матрице вида:

$$M_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

3. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M имеет вид $f(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda - 1) = \lambda^2 - 1$. Из предложения 2.3 матрица M подобна над \mathbb{Z} в точности одной матрице вида:

$$M'_3(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1\}.$$

Рассмотрим две матрицы $M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

При $m = 0$ имеем $M_3 = S^{-1}M'_3(0)S$, где $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица M_3 подобна над \mathbb{Z} матрице $M'_3(0)$.

При $m = 1$ имеем $M_4 = S^{-1}M'_3(1)S$, где $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица M_4 подобна над \mathbb{Z} матрице $M'_3(1)$.

Таким образом, когда одно собственное значение матрицы M равно 1, а другое -1 , M подобна над \mathbb{Z} в точности одной из матриц:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M равен $f(\lambda) = (\lambda + i)(\lambda - i) = \lambda^2 + 1$. Следовательно, из предложения 2.5 матрица M подобна над \mathbb{Z} матрице

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M равен $f(\lambda) = \left(\lambda - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \left(\lambda - \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = \lambda^2 - \lambda + 1$. Следовательно, из предложения 2.5 матрица M подобна над \mathbb{Z} матрице $M'_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Рассмотрим матрицу $M_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $M_6 = S^{-1}M'_6S$, где $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Следовательно, матрица M_6 подобна над \mathbb{Z} матрице M'_6 .

Таким образом, в случае $\lambda_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ получаем, что M подобна над \mathbb{Z} матрице

$$M_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. В этом случае характеристический многочлен матрицы M равен $f(\lambda) = \left(\lambda - \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) \left(\lambda - \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\right) = \lambda^2 + \lambda + 1$. Следовательно, из предложения 2.5 матрица M подобна над \mathbb{Z} матрице

$$M_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Лемма Баттерсона доказана.

3. Классы негиперболических автоморфизмов двумерного тора

Из леммы Баттерсона 1.1 и предложения 2.1 следует.

Предложение 3.1 *Каждый класс сопряженности негиперболических алгебраических автоморфизмов двумерного тора задается в точности одной из следующих матриц:*

$$M_1(m) = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, M_2(m) = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Отличный от тождественного, алгебраический автоморфизм двумерного тора f назовем **периодическим**, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $f^n = id$. Наименьшее из таких n называется периодом f . Верно следующее следствие из предложения 3.1.

Следствие 3.1 *Существует 6 классов периодических алгебраических автоморфизмов двумерного тора, каждый из которых задан в точности одной из следующих матриц:*

$$M_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, M_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $M_2(0), M_5, M_6, M_7$ индуцируют сохраняющие ориентацию автоморфизмы двумерного тора периода 2, 4, 3 и 6, соответственно. Матрицы M_3, M_4 индуцируют не сохраняющие ориентацию автоморфизмы двумерного тора периода 2.

В работе [4] Я. Нильсеном были изучены сохраняющие ориентацию периодические гомеоморфизмы ориентируемых поверхностей. Установлено, что каждому сохраняющему ориентацию гомеоморфизму f периода n ориентируемой поверхности рода p сопоставляется множество точек гомеоморфизма f , период которых строго меньше n . Это множество либо пусто, либо состоит из конечного числа орбит $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_k$, $k \geq 1$, периода n_i , $i \in \{1, \dots, k\}$. В окрестности любой точки орбиты \mathcal{O}_i существует простая замкнутая инвариантная относительно гомеоморфизма f^{n_i} кривая l_i . Более того, для любого n_i существует число d_i , такое что дуга, принадлежащая кривой l_i , рассматриваемая в направлении против часовой стрелки и заключенная между точками $x \in l_i$ и $f^{n_i d_i}(x) \in l_i$, не содержит других точек орбиты точки x . В силу результатов Я. Нильсена [4] два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма топологически сопряжены посредством сохраняющего ориентацию гомеоморфизма тогда и только тогда, когда им соответствует один и тот же набор данных $(n, p, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k)$.

В работе [5] такой набор данных назван полной характеристикой и обозначен через κ . Более того, в данной работе были найдены все допустимые полные характеристики сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов двумерного тора. Периодические алгебраические автоморфизмы двумерного тора индуцируют периодические гомеоморфизмы. Таким образом, интерес представляет нахождение классов сопряженности периодических сохраняющих ориентацию автоморфизмов двумерного тора посредством сохраняющего ориентацию автоморфизма. Для этого разобьем классы подобия матриц, индуцирующие классы сохраняющих ориентацию периодических автоморфизмов двумерного тора, на классы подобия с помощью матрицы, определитель которой равен единице.

Введем на множестве $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ **отношение эквивалентности** \sim , заданное следующим образом: матрицы $A \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ и $B \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$ находятся в отношении \sim ($A \sim B$) тогда и только тогда, когда существует такая матрица $T \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$, что $\det T = 1$ и $A = T^{-1}BT$.

Докажем, что каждый класс подобия матриц K_A распадается не более чем на два класса эквивалентности по отношению \sim .

Предположим противное. Пусть существует более двух классов эквивалентности по отношению \sim на множестве K_A . Рассмотрим три различных класса эквивалентности по отношению \sim на множестве K_A , которые обозначим через N_1, N_2, N_3 . Рассмотрим матрицы $A_1 \in N_1, A_2 \in N_2, A_3 \in N_3$. Поскольку $A_1, A_2, A_3 \in K_A$, то существуют такие матрицы $D \in Gl(2, \mathbb{Z})$ и $H \in Gl(2, \mathbb{Z})$, что $A_1 = D^{-1}A_2D$ и $A_2 = H^{-1}A_3H$. Однако т. к. матрицы A_1 и A_2, A_2 и A_3 принадлежат различным классам эквивалентности по отношению \sim , то $\det D = -1$ и $\det H = -1$. При этом $A_1 = D^{-1}H^{-1}A_3HD = (HD)^{-1}A_3HD$ и $\det HD = \det H \cdot \det D = (-1) \cdot (-1) = 1$, т. е. $A_1 \sim A_3$ и матрицы A_1 и A_3 принадлежат одному классу эквивалентности. Получили противоречие.

Перейдем к разбиению каждого из классов подобных матриц, индуцирующих сохраняющие ориентацию периодические автоморфизмы двумерного тора, на классы эк-

вивалентности по отношению \sim .

Рассмотрим класс подобия $K_{M_2(0)}$ матрицы $M_2(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Если $X \in K_{M_2(0)}$, то существует такая унимодулярная матрица $T \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$, что $X = T^{-1}M_2(0)T$. Поскольку $M_2(0) = -E$, то $X = -T^{-1}ET = -E$.

Следовательно, **класс подобия $K_{M_2(0)}$ состоит из единственной матрицы $M_2(0)$.**

Рассмотрим класс подобия K_{M_5} матрицы $M_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Каждая из матриц M_5 и $M_5^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ содержится в классе K_{M_5} , т. к. обе они имеют характеристический многочлен $\lambda^2 + 1$. Докажем, что **матрицы M_5 и M_5^{-1} принадлежат различным классам эквивалентности** по введенному отношению \sim . Предположим противное. Пусть существует такая целочисленная матрица второго порядка $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det T = 1$, что $M_5 = T^{-1}M_5^{-1}T$. Перемножив матрицы и приравняв соответствующие элементы, получим:

$$\begin{cases} 0 = -ab - cd \\ 1 = -b^2 - d^2 \\ -1 = a^2 + c^2 \\ 0 = ab + cd \end{cases}.$$

Поскольку данная система равенств не обращается в верные тождества ни при каких целочисленных значениях a, b, c, d , то предположение о том, что $M_5 \sim M_5^{-1}$, неверно.

Рассмотрим класс подобия K_{M_6} матрицы $M_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$. Каждая из матриц M_6 и $M_6^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ содержится в классе K_{M_6} , т. к. обе они имеют характеристический многочлен $\lambda^2 + \lambda + 1$. Докажем, что **матрицы M_6 и M_6^{-1} принадлежат различным классам эквивалентности** по введенному отношению \sim . Предположим противное. Пусть существует такая целочисленная матрица второго порядка $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det T = 1$, что $M_6 = T^{-1}M_6^{-1}T$. Перемножив матрицы и приравняв соответствующие элементы, получим:

$$\begin{cases} 0 = -ad - ab - cd \\ 1 = -db - b^2 - d^2 \\ -1 = ac + a^2 + c^2 \\ -1 = bc + ab + cd \end{cases}.$$

Рассмотрим равенство $-1 = ac + a^2 + c^2$. С одной стороны, $a^2 + c^2 = -1 - ac \geq 0$, поэтому $ac < 0$. С другой, $(a + c)^2 = ac - 1 \geq 0$, следовательно, $ac > 0$. Таким образом, получили противоречие. Значит, предположение о том, что $M_6 \sim M_6^{-1}$, неверно.

Рассмотрим класс подобия K_{M_7} матрицы $M_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Каждая из матриц M_7 и $M_7^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ содержится в классе K_{M_7} , т. к. обе они имеют характеристический

многочлен $\lambda^2 - \lambda + 1$. Докажем, что **матрицы M_7 и M_7^{-1} принадлежат различным классам эквивалентности** по введённому отношению \sim . Предположим противное. Пусть существует такая целочисленная матрица второго порядка $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\det T = 1$, что $M_7 = T^{-1}M_7^{-1}T$. Перемножив матрицы и приравняв соответствующие элементы, получим:

$$\begin{cases} 0 = ad + ba + dc \\ -1 = db + b^2 + d^2 \\ 1 = -ac - a^2 - c^2 \\ 1 = -bc - ab - cd \end{cases}.$$

Аналогично, рассмотрев равенство $1 = -ac - a^2 - c^2$, получим, что оно не выполняется ни при каких целочисленных значениях a, c . Значит, предположение о том, что $M_7 \sim M_7^{-1}$, неверно.

Переобозначим матрицы следующим образом: $A_1 = M_2(0)$, $A_2 = M_6^{-1}$, $A_3 = M_6$, $A_4 = M_7$, $A_5 = M_7^{-1}$, $A_6 = M_5^{-1}$, $A_7 = M_5$. Тогда в силу вышесказанного верно следующее предложение.

Предложение 3.2 *Каждый периодический сохраняющий ориентацию автоморфизм двумерного тора сопряжен с помощью сохраняющего ориентацию алгебраического автоморфизма двумерного тора в точности с одним автоморфизмом f_{A_j} , индуцированным матрицей A_j ($j = \overline{1, 7}$):*

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; A_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; A_4 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \\ A_6 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; A_7 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

В работе [5] доказано, что множество всех не гомотопных тождественному сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов тора разбивается в точности на семь классов топологической сопряженности H_j таким образом, что любые два гомеоморфизма, принадлежащих одному классу топологически сопряженных сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов и обладают в точности одной полной характеристикой из множества κ_j ($j = \overline{1, 7}$):

1. κ_1 : $n = 2, p = 1, k = 4, n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$;
2. κ_2 : $n = 3, p = 1, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
3. κ_3 : $n = 3, p = 1, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = 2$;
4. κ_4 : $n = 6, p = 1, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
5. κ_5 : $n = 6, p = 1, k = 3, n_1 = 3, n_2 = 2, n_3 = 1, d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 5$;
6. κ_6 : $n = 4, p = 1, k = 3, n_1 = 2, n_2 = n_3 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = 1$;
7. κ_7 : $n = 4, p = 1, k = 3, n_1 = 2, n_2 = n_3 = 1, d_1 = 1, d_2 = d_3 = 3$.

Кроме того, в работе [5] также показано, что полная характеристика автоморфизма f_{A_j} , индуцированного матрицей A_j ($j = \overline{1, 7}$) равна κ_j .

Обозначим через C_j множество алгебраических автоморфизмов двумерного тора, сопряженных с помощью сохраняющего ориентацию автоморфизма двумерного тора, с автоморфизмом f_{A_j} ($j = \overline{1, 7}$).

Предложение 3.3 *Справедливо следующее включение $C_j \subset H_j$.*

Доказательство. В силу [4] полная характеристика является полным топологическим инвариантом в классе сохраняющих ориентацию периодических гомеоморфизмов замкнутых ориентируемых поверхностей посредством сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. Следовательно, любой автоморфизм множества C_j ($j = \overline{1, 7}$) имеет полную характеристику, равную κ_j . Таким образом, автоморфизмы множества C_j являются представителями класса гомеоморфизмов H_j .

Благодарности. Публикация подготовлена по результатам исследования (№ 21-04-004) в рамках программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021–2022 гг. Авторы благодарят В.З. Гринеса и О.В. Починку за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Batterson, S. The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus // Transactions of the American Mathematical Society. 1979. Vol. 256. pp. 395–403. DOI: <https://doi.org/10.2307/1998118>
2. Newman M. Integral matrices. New York: Academic Press, 1972. 223 p.
3. Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // Дифференциальные и интегральные уравнения : сб. науч. тр. / под ред. Н. Ф. Отрокова. Горький: ГГУ, 1985. С. 33–37.
4. Nielsen J. Die struktur periodischer transformationen von flachen. Kobenhavn: Levin & Munksgaard, 1937. 77 p.
5. Баранов Д. А., Гринес В. З., Починка О. В., Чилина Е. Е. О классификации периодических преобразований двумерного тора // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. (В печати).
6. Montgomery H., Masley J. Cyclotomic fields with unique factorization // J. Reine Angew. Math. 1976. Vol. 286-287. pp. 248–256. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1976.286-287.248>
7. Шевченко В. Н., Сидоров С. В. О подобии матриц второго порядка над кольцом целых чисел // Известия ВУЗ. Математика. 2006. № 4. С. 57–64.
8. Kronecker L. Zwei Satze uber Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten // Journal fur die reine und angewandte Mathematik. 1857. No. 53. pp. 173–175. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1857.53.173>

Поступила 10.07.2021; доработана после рецензирования 08.08.2021;
принята к публикации 25.08.2021

Информация об авторах:

Сидоров Сергей Владимирович, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2883-6427>, sesidorov@yandex.ru

Чилина Екатерина Евгеньевна, студентка факультета информатики, математики и компьютерных наук, НИУ ВШЭ (Нижний Новгород). (603150, Россия, г. Нижний Новгород, Б. Печерская, д. 25/12), k.chilina@yandex.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 37E30

On non-hyperbolic algebraic automorphisms of a two-dimensional torus

S. V. Sidorov¹, E. E. Chilina²

¹ *National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation),*

² *National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

Abstract. This paper contains a complete classification of algebraic non-hyperbolic automorphisms of a two-dimensional torus, announced by S. Batterson in 1979. Such automorphisms include all periodic automorphisms. Their classification is directly related to the topological classification of gradient-like diffeomorphisms of surfaces, since according to the results of V. Z. Grines and A.N. Bezdenezhykh, any gradient like orientation -preserving diffeomorphism of an orientable surface is represented as a superposition of the time-1 map of a gradient-like flow and some periodic homeomorphism. J. Nielsen found necessary and sufficient conditions for the topological conjugacy of orientation-preserving periodic homeomorphisms of orientable surfaces by means of orientation-preserving homeomorphisms. The results of this work allow us to completely solve the problem of realization all classes of topological conjugacy of periodic maps that are not homotopic to the identity in the case of a torus. Particularly, it follows from the present paper and the work of that if the surface is a two-dimensional torus, then there are exactly seven such classes, each of which is represented by algebraic automorphism of a two-dimensional torus induced by some periodic matrix.

Key Words: periodic homeomorphisms, two-dimensional torus, algebraic automorphism

For citation: S. V. Sidorov, E. E. Chilina. On non-hyperbolic algebraic automorphisms of a two-dimensional torus. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:3(2021), 295–307. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.295-307>

REFERENCES

1. S. Batterson, “The Dynamics of Morse-Smale Diffeomorphisms on the Torus”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **256** (1979), 395–403. DOI: <https://doi.org/10.2307/1998118>
2. N. Newman, *Integral matrices*, Academic Press, New York, 1972, 223 p.
3. A. N. Bezdenezhykh, V. Z. Grines, “Realization of Gradient-Like Diffeomorphisms of Two-Dimensional Manifolds”, *Sel. Math. Sov.*, **11:1** (1992), 19-23.
4. J. Nielsen, *Die Struktur Periodischer Transformationen von Flächen*, Levin & Munksgaard, Kobenhavn, 1937, 77 p.
5. D. A. Baranov, V. Z. Grines, O. V. Pochinka, E. E. Chilina, “[On Classification of Periodic Maps of 2-torus]”, *Russian Math. (Iz. VUZ). Applied Nonlinear Dynamics* (In print.) (In Russ.).
6. H. Montgomery, J. Masley, “Cyclotomic Fields with Unique Factorization”, *J. Reine Angew. Math.*, **286-287** (1976), 248–256.
7. V. N. Shevchenko, S. V. Sidorov, “On the similarity of second-order matrices over the ring of integers”, *Russian Math. (Iz. VUZ)*, **50:4** (2006), 56–63.
8. L. Kronecker, “Zwei Satze uber Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten”, *Journal fur die reine und angewandte Mathematik*, **53** (1857), 173–175. DOI: <https://doi.org/10.1515/crll.1857.53.173>

Submitted 10.07.2021; Revised 08.08.2021; Accepted 25.08.2021

Information about the authors:

Sergey V. Sidorov, Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2883-6427>, sesidorov@yandex.ru

Ekaterina E. Chilina, student of National Research University «Higher School of Economics» (25/12 B. Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), k.chilina@yandex.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: the authors declare no conflict of interest.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202103.308–317

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9:532.5:536.4

Математическое моделирование закрученной струи в приложениях к малоэмиссионному сжиганию низкосортных топлив

У. Д. Мизхер, В. Н. Ковальногов, П. А. Вельмисов

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»
(г. Ульяновск, Российская Федерация)

Аннотация. Поиск новых решений в области энергетики, предотвращающих негативное воздействие на окружающую среду, является одной из приоритетных задач современного общества. Устойчивую позицию потребности ЕЭС России в органическом топливе занимает природный газ. Возможным альтернативным топливом, добываемым из органических отходов, является биогаз. Биогаз имеет повышенное содержание диоксида углерода, влияющее на скорость распространения пламени, и пониженное содержание метана, снижающее теплоту его сгорания. Однако комбинированное сжигание природного газа и биогаза при условии хорошего смешения смеси топлива с окислителем может позволить, с одной стороны, – снизить максимальную адиабатическую температуру в камере сгорания энергетических котлов ТЭС, а с другой – увеличить стабильность горения биогаза. Для комбинированного сжигания природного газа и биогаза в эксплуатируемых энергетических котлах необходимо провести реконструкцию имеющихся горелочных устройств. Для качественной реконструкции горелочных устройств, способной обеспечить стабильное и малотоксичное горение топлива, важно обладать теоретическими данными о влиянии горения комбинаций органических топлив на распределение температуры в зоне горения и ее максимального значения. В данной работе получены автомодельные решения уравнения энергии осесимметричного движения жидкости (газа) в модели вязкой несжимаемой среды, на основе которых построено стационарное поле температур в закрученных струях. На основе программного решателя ANSYS Fluent для моделирования и исследования тепловых и газодинамических процессов в камере сгорания. На основе модели турбулентности $k - \epsilon$ (realizable) проведено моделирование процесса горения закрученной топливо-воздушной смеси. Приведены результаты аналитического и численного исследования распределения температуры и углекислого газа в струе

Ключевые слова: газодинамика, выбросы, температура, энергетический котел, природный газ, биогаз, комбинированное горение

Для цитирования: Мизхер У. Д., Ковальногов В. Н., Вельмисов П. А. Математическое моделирование закрученной струи в приложениях к малоэмиссионному сжиганию низкосортных топлив // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 3. С. 308–317. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.308–317>

1. Введение

В России, как и в большинстве стран мира, в настоящее время одной из целей государственной политики является снижение негативного влияния на атмосферный воздух в населенных пунктах [1]. Поэтому на законодательном уровне установлены низкие уровни предельно допустимых концентраций (ПДК) загрязняющих веществ в воздухе: оксидов азота, оксидов серы, летучей золы, бенз(а)пирена и т. д. Одним из основных



источников загрязнения атмосферного воздуха являются энергетические предприятия, а именно уходящие дымовые газы энергетических котлов теплоэлектростанций (ТЭС). Согласно работе [2] устойчивую позицию потребности в органическом топливе ЕЭС России занимает именно газ, имеющий ряд преимуществ перед другими видами органического топлива, в т. ч. и экологического характера.

Одним из перспективных и экологичных методов сжигания природного газа является его комбинированное сжигание с биогазом. Основной особенностью биогаза как топлива, является пониженное, по сравнению с природным газом, содержание метана и наличие диоксида углерода в больших количествах, что влияет на скорость распространения пламени и понижает теплоту сгорания биогаза. В работе [3] Институтом газа НАН Украины в лабораторных условиях были оценены перспективы данного метода и сделан вывод о том, что биогаз является одним из экологически безопасных видов топлива.

В данной статье для изучения процесса горения используется «Программный комплекс для исследования стационарных газодинамических и тепловых процессов в камере сгорания с автоматизированной подготовкой геометрических и граничных условий модели» [4], ввиду его широких возможностей при моделировании процессов горения топлив. Исследование тепловых и газодинамических процессов в работе основано на применении модели турбулентности $k-\epsilon$ (realizable), позволяющей моделировать процесс горения топливо-воздушной смеси [5–6].

Приведены результаты аналитического и численного исследования распределения температуры (T) и углекислого газа (CO_2) в струе.

2. Аналитическое исследование

Уравнение энергии осесимметричного движения жидкости (газа) в модели вязкой несжимаемой среды имеет вид [7–8]

$$\rho c_v (T_t + uT_x + vT_r) = \lambda (T_{xx} + T_{rr} + \frac{1}{r} T_r) + \mu \Phi. \quad (2.1)$$

Здесь и далее: $u(x, r, t)$, $v(x, r, t)$, $w(x, r, t)$ – продольная (вдоль горизонтальной оси Ox), поперечная (радиальная, перпендикулярная оси Ox) и тангенциальная (вращательная) составляющие вектора скорости V жидкости; $T(x, r, t)$ – температура; $\rho, \mu, \nu = \mu \rho^{-1}$ – плотность, динамическая и кинематическая вязкости среды; c_v, λ – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности среды; x, r – цилиндрические координаты; t – время; индексы снизу обозначают частные производные. Диссипативная функция Φ определяется выражением

$$\Phi = \left[\left(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{(y)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{(z)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial y} + \frac{\partial V_{(y)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial z} + \frac{\partial V_{(z)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{(y)}}{\partial z} + \frac{\partial V_{(z)}}{\partial y} \right)^2, \quad (2.2)$$

где $V_{(x)}, V_{(y)}, V_{(z)}$ – проекции вектора \bar{V} на оси декартовой системы координат x, y, z , при этом имеет место следующая связь между проекциями вектора скорости в декартовой и цилиндрической системах координат:

$$V_{(x)} = u, \quad V_{(y)} = v \sin \phi + w \cos \phi, \quad V_{(z)} = v \cos \phi - w \sin \phi.$$

Здесь $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dr}{dt}$, $w = r \frac{d\phi}{dt}$, при этом r, ϕ – полярные координаты в плоскости, перпендикулярной оси Ox ($y = r \sin \phi$, $z = r \cos \phi$).

Представим температуру и проекции вектора скорости в виде разложений [9–10]

$$\begin{aligned} T - T_0 &= \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x, r_*, t) \epsilon^{k-1}, \\ u &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, r_*, t) \epsilon^{k-1}, \quad v = \epsilon \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, r_*, t) \epsilon^{k-1}, \quad w = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(x, r_*, t) \epsilon^k. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $r = \epsilon r_*$, где ϵ – малый параметр, определяющий порядок величины кинематической вязкости ν ($\nu = \epsilon^2 \nu_*$), при этом новая переменная r_* и постоянная ν_* имеют порядок единицы. Подставляя (2.3) в (2.1)–(2.2) и задавая дополнительно $\lambda \rho^{-1} = \epsilon^2 \lambda_*$, из (2.1) при $\epsilon \rightarrow 0$ получим для T_1 уравнение

$$c_v(T_{1t} + u_1 T_{1x} + v_1 T_{1r_*}) = \lambda_* (T_{1r_* r_*} + \frac{1}{r_*} T_{1r_*}) + \nu_* u_{1r_*}^2 \quad (2.4)$$

Функции u_1, v_1 имеют вид [9–10]

$$\begin{aligned} u_1 &= \nu_* x^{-1} f(\eta), & v_1 &= \nu_* x^{-1} g(\eta), \\ f(\eta) &= \frac{2\gamma^2}{\theta^2}, & g(\eta) &= \frac{\gamma^2 \eta}{\theta^2} (1 - \frac{1}{4} \gamma^2 \eta^2), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где $\eta = \frac{r_*}{x}$ – автомодельная переменная, $\theta = 1 + \frac{1}{4} \gamma^2 \eta^2$, а постоянная γ – произвольная.

Рассмотрим стационарные течения, тогда в уравнении (2.4) следует опустить производную по времени t . Решение уравнения (2.4) для температуры $T_1(x, r_*)$ в этом случае будем искать в виде

$$T_1(x, r_*) = \nu_*^2 x^{-2} H(\eta). \quad (2.6)$$

Для функции $H(\eta)$ получим из обыкновенное дифференциальное уравнение:

$$-c_v [f(2H + \eta H') - gH'] = \frac{\lambda_*}{\nu_*} (H'' + \frac{1}{\eta} H') + f'^2(\eta). \quad (2.7)$$

Общее решение уравнения (2.7) при $\lambda_* = 0$ определяется выражением

$$H(\eta) = \frac{c_0 \theta^2}{\eta^4} + \frac{32}{15c_v \eta^4 \theta^4} (15\theta^2 - 24\theta + 10), \quad (2.8)$$

где c_0 – произвольная постоянная. Из условия конечности значений температуры на оси Ox ($\eta \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$) находим $c_0 = -\frac{32}{15c_v}$, тогда (2.8) принимает вид

$$H(\eta) = -\frac{32}{15c_v \theta^4 \eta^4} (\theta^6 - 15\theta^2 + 24\theta - 10). \quad (2.9)$$

При $\eta \rightarrow 0$ имеем

$$H(\eta) = -\frac{2\gamma^6(\eta^2 + O(\eta^4))}{3c_v \theta^4}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.7) при $\lambda_* \neq 0$. С учетом (2.5) запишем его в виде

$$-\frac{\gamma^2 c_v}{\theta} (\eta H' + \frac{4}{\theta} H) - \frac{\lambda_*}{\nu_*} (H'' + \frac{1}{\eta} H') = \frac{4\gamma^8 \eta^2}{\theta^6}. \quad (2.10)$$

Введем новую независимую переменную

$$y = \frac{\frac{1}{4}\gamma^2\eta^2}{1 + \frac{1}{4}\gamma^2\eta^2}. \quad (2.11)$$

Уравнение (2.10) примет вид

$$-c_v(2yH' + 4H) - \frac{1}{2} \frac{\lambda_*}{\nu_*} [2y(1-y)H'' + (2-4y)H'] = 16\gamma^4 y(1-y)^3. \quad (2.12)$$

Частное решение уравнения (2.12) будем искать в виде многочлена

$$H(y) = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4. \quad (2.13)$$

Для постоянных a, b, c, d, e получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \left(6 \frac{\lambda_*}{\nu_*} - 3c_v\right)e &= -4\gamma^4, & \left(6 \frac{\lambda_*}{\nu_*} - 5c_v\right)d &= 8 \frac{\lambda_*}{\nu_*} e + 24\gamma^4 \\ \left(6 \frac{\lambda_*}{\nu_*} - 8c_v\right)c &= 9 \frac{\lambda_*}{\nu_*} d - 48\gamma^4, & \left(\frac{\lambda_*}{\nu_*} - 3c_v\right)b &= 2 \frac{\lambda_*}{\nu_*} c + 8\gamma^4, & -4c_v a &= \frac{\lambda_*}{\nu_*} b, \end{aligned}$$

из которой последовательно находятся e, d, c, b, a .

Таким образом, распределение температуры в струе определяется формулой (2.6), где $H(\eta)$ задается формулой (2.9) при $\lambda_* = 0$ и формулами (2.11); (2.13) при $\lambda_* \neq 0$.

Распределение (2.6) используется в разработанном программном комплексе [4] как первое приближение для исследования тепловых и газодинамических процессов в камере сгорания. Это позволяет ускорить процесс расчета задачи и получить более точные результаты расчета.

3. Компьютерная модель

Для моделирования процесса горения закрученного топливо-воздушного потока используются уравнения неразрывности, Навье-Стокса и энергии [11–13].

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0,$$

$$\operatorname{div}(\rho u \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} u) + \left(\frac{\partial(\overline{\rho u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho u'w'})}{\partial z} \right),$$

$$\operatorname{div}(\rho v \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} v) + \left(\frac{\partial(\overline{\rho u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho v'^2})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho v'w'})}{\partial z} \right),$$

$$\operatorname{div}(\rho w \vec{V}) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} w) + \left(\frac{\partial(\overline{\rho u'v'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\rho v'w'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\rho w'^2})}{\partial z} \right),$$

$$\rho c_p \left[u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \operatorname{div} \left[\left(\lambda + \frac{c_p \mu_t}{Pr_t} \right) \operatorname{grad} T \right] + S_h.$$

Здесь u, v, w – компоненты скорости по оси (x, y, z) последовательно; p – давление; ρ – плотность, $(-\rho u'^2, -\rho v'^2, -\rho w'^2, -\rho u'v', -\rho u'w', -\rho v'w')$ – напряжения Рейнольдса; μ – динамическая вязкость; μ_t – турбулентная вязкость; T – температура; c_p – удельная теплоемкость; λ – теплопроводность; Pr_t – турбулентное число Прандтля; S_h – включает теплоту химической реакции и любые другие объемные источники тепла; \vec{V} – вектор скорости:

$$\vec{V} = ui + vj + wk.$$

Согласно работе [5], уравнения модели турбулентности k - ϵ для описания процесса горения для стационарного потока примут вид

$$\operatorname{div}(\rho k \vec{V}) = \operatorname{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \operatorname{grad} k \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k,$$

$$\operatorname{div}(\rho \epsilon \vec{V}) = \operatorname{div} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \operatorname{grad} \epsilon \right] + \rho C_1 S_\epsilon - \rho C_2 \frac{\epsilon^2}{k + \sqrt{\nu \epsilon}} + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} C_{3\epsilon} G_b + S_\epsilon,$$

где

$$C C_1 = \max \left[0.43, \frac{\eta}{\eta + 5} \right], \quad C_{3\epsilon} = \tanh \left| \frac{v}{u} \right|, \quad \eta = S \frac{k}{\epsilon}.$$

Постоянные модели $C_{1\epsilon}, C_2, \sigma_k$ и σ_ϵ имеют по умолчанию следующие значения [5]: $C_{1\epsilon} = 1,44, C_2 = 1,9, \sigma_k = 1, \sigma_\epsilon = 1,2$, k – кинетическая энергия турбулентности; ϵ – скорость диссипации; G_k – источник за счёт градиента средней скорости; G_b – источник за счёт архимедовых сил (важно для конвективных течений); Y_M – представляет собой вклад флуктуирующей дилатации в сжимаемой турбулентности в общую скорость диссипации; C_2 и $C_{1\epsilon}$ – постоянные; σ_k и σ_ϵ – турбулентные числа Прандтля для k и ϵ , соответственно; S_ϵ, S_k – определяемые пользователем источники; S – тензор средней скорости деформации; μ_t – турбулентная (или вихревая) вязкость, вычисляется путем объединения k и ϵ следующим образом:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon},$$

где C_μ – эмпирический коэффициент, равный $C_\mu = 0,09$.

4. Результаты исследований и заключение

Камера сгорания представляет собой цилиндр с заданной постоянной температурой стенки $T_c = 617$ К и размерами: $L = 7,3$ м; $D = 4$ м. Температура стенки камеры сгорания подобрана исходя из условий температуры теплоносителя в экранных трубах энергетического водотрубного барабанного котла.

Камера сгорания (Рис. 4.1) имеет одну комбинированную горелку, позволяющую обеспечить одновременное сжигание как природного газа, так и биогаза. Горелочное устройство с центральной подачей газа содержит канал для подвода природного газа $S_{ch4} = 0,00125 \text{ м}^2$, канал для подвода биогаза $S_{biogas} = 0,078 \text{ м}^2$ и канал для подвода воздуха $S_{air} = 0,234 \text{ м}^2$. В ходе исследования моделировалось как совместное горение смеси природного газа и биогаза, так и раздельное горение топлив. На рис. 4.2–4.5, представлены результаты горения комбинаций топлив с закруткой воздуха $\omega = 300$

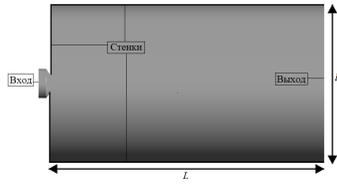


Рис. 4.1. Схема камеры сгорания
Fig 4.1. Combustion chamber diagram

рад/с, температурой воздуха на входе в горелочное устройство $T_{air} = 583$ К. Моделируемый расход топлив через горелку при совместном сжигании природного газа $\dot{m}_{ch_4} = 0,2$ кг/с, биогаза $\dot{m}_{biogas} = 0,3$ кг/с. Моделируемый расход через горелку при сжигании только природного газа $\dot{m}_{ch_4} = 0,4$ кг/с, при сжигании только биогаза $\dot{m}_{biogas} = 0,59$ кг/с. Результаты горения представлены в вертикальном сечении пламени при $x = 1$ м и $x = 5$ м от амбразуры комбинированного горелочного устройства.

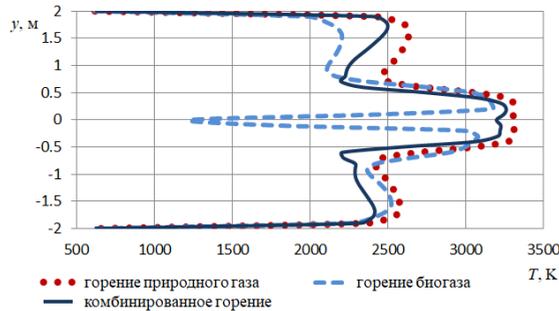


Рис. 4.2. Профиль температуры $T(1, y, 0)$, сравнение горения биогаза, горения природного газа и комбинированного горения природного газа и биогаза
Fig 4.2. Temperature profile $T(1, y, 0)$, comparison of biogas combustion, natural gas combustion and combined combustion of natural gas and biogas

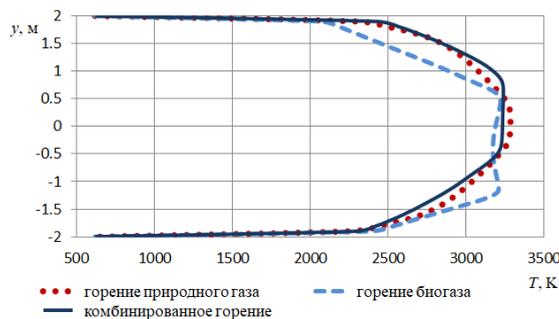


Рис. 4.3. Профиль температуры $T(5, y, 0)$, сравнение горения биогаза, горения природного газа и комбинированного горения природного газа и биогаза
Fig 4.3. Temperature profile $T(5, y, 0)$, comparison of biogas combustion, natural gas combustion and combined combustion of natural gas and biogas

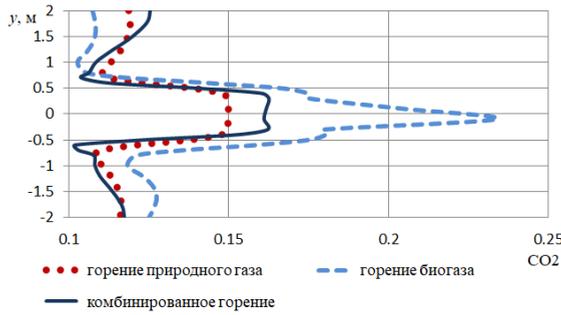


Рис. 4.4. Содержание углекислого газа (CO_2) в продуктах сгорания топлива при $x = 1$ м

Fig 4.4. Carbon dioxide (CO_2) content in fuel combustion products at $x = 1$ m

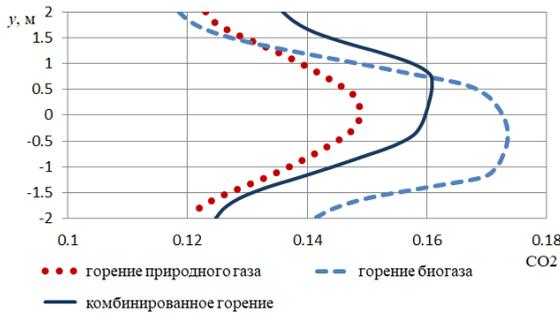


Рис. 4.5. Содержание углекислого газа (CO_2) в продуктах сгорания топлива при $x = 5$ м

Fig 4.5. Carbon dioxide (CO_2) content in fuel combustion products at $x = 5$ m

Исходя из полученных результатов, проведённых с использованием разработанного программного комплекса [4], следует отметить снижение температуры в центре пламени при сжигании биогаза, являющееся основным критерием интенсивности образования оксидов азота (NO_x) в топке энергетических котлов. Снижение температуры в зоне активного горения объясняется наличием в биогазе углекислого газа (CO_2), что является отличительной особенностью данного вида топлива.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантами РФФИ и Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, № 19-41-730006), грантом Президента РФ (проект НШ-2493.2020.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Стратегия экологической безопасности Российской Федерации на период до 2025 года (Утв. Указом Президента РФ от 19.04.2017 № 176).
2. Схема и программа развития Единой энергетической системы России на 2018–2024 годы (Утв. Приказом Минэнерго России от 28.02.2018 № 121).

3. Сигал И. Я., Марасин А. В., Смихула А. В. Газогорелочные устройства для сжигания биогаза в котлах // Энерготехнологии и ресурсосбережение. 2014. № 3. С. 68–71.
4. Мизхер У. Д., Ковальногов В. Н., Вельмисов П. А., Чукалин А. В., Федоров Р. В. Программный комплекс для исследования стационарных газодинамических и тепловых процессов в камере сгорания с автоматизированной подготовкой геометрических и граничных условий модели : свидетельство о гос. рег. программы для ЭВМ № 2021615282 // УлГТУ, 2021.
5. ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide. April, 2009.
6. Versteeg H., Malalasekera V. Introduction to computational fluid dynamics. – 2nd ed. Glasgow: Prentice Hall, 2007. 520 p.
7. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1978. 736 с.
8. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука; Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1969. 744 с.
9. Velmisov P. A., Mizher U. J. Asymptotic study of heat and mass transfer processes in viscous fluids // AIP Conference Proceedings. 2021. Vol. 2333, Issue 1. pp. 120003-1–120003-12. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0041780>
10. Вельмисов П. А., Мизхер У. Д., Ковальногов В. Н. Асимптотическое исследование процессов теплопереноса в слабо закрученных струях // Журнал Средневолжского математического общества. 2020. Т. 22, № 2. С. 200–207. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202002.200-207>
11. Anderson J. D. Computational fluid dynamics: The basic with application // New York: McCraw-Hill, 1995. 563 p.
12. Hoffman K. A. Chiang S. T. Computational fluid dynamics. – 4th ed. Engineering Education System, 2000. Vol. 1. 479 p.
13. Chung T. J. Computational fluid dynamics. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. 1034 p.

*Поступила 09.07.2021; доработана после рецензирования 10.08.2021;
принята к публикации 25.08.2021*

Информация об авторах:

Мизхер Усама Джавад, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8950-9772>, usama.mizher@gmail.com

Ковальногов Владислав Николаевич, заведующий кафедрой теплоэнергетики ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор технических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1907-3790>, kvn@ulstu.ru

Вельмисов Петр Александрович, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия,

г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 76D05, 80A19, 35B40

Mathematical modeling of a swirling jet in applications to low-emission combustion of low-grade fuels

U. J. Mizher, V. N. Kovalnogov, P. A. Velmisov

Ulyanovsk State Technical University(Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. The search for new solutions in the field of energy, preventing negative impact on the environment, is one of the priority tasks for modern society. Natural gas occupies a stable position in the demand of the UES of Russia for fossil fuel. Biogas is a possible alternative fuel from organic waste. Biogas has an increased content of carbon dioxide, which affects the speed of flame propagation, and a lower content of methane, which reduces its heat of combustion. However, the combined combustion of natural gas and biogas, provided that the mixture of fuel and oxidizer is well mixed, can, on the one hand, reduce the maximum adiabatic temperature in the combustion chamber of power boilers at TPPs, and, on the other, increase the stability of biogas combustion. For the combined combustion of natural gas and biogas in operating power boilers, it is necessary to reconstruct the existing burners. For a high-quality reconstruction of burners capable of providing stable and low-toxic combustion of fuel, it is important to have theoretical data on the combustion effect of combustion of combinations of organic fuels on the temperature distribution in the combustion zone and on its maximum value. In this paper, self-similar solutions of the energy equation for axisymmetric motion of a liquid (gas) in a model of a viscous incompressible medium are obtained. Basing on them, a stationary temperature field in swirling jets is constructed. A set of programs based on the ANSYS Fluent software solver has been developed for modeling and researching of thermal and gas-dynamic processes in the combustion chamber. On the basis of the $k - \epsilon$ (realizable) turbulence model, the combustion process of a swirling fuel-air mixture is simulated. The results of an analytical and numerical study of the temperature and carbon dioxide distribution in the jet are presented.

Key Words: gas dynamics, emissions, temperature, power boiler, natural gas, biogas, combined combustion

For citation: *U. J. Mizher, V. N. Kovalnogov, P. A. Velmisov. Mathematical modeling of a swirling jet in applications to low-emission combustion of low-grade fuels. Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva. 23:3(2021), 308–317. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202103.308–317>*

REFERENCES

1. “[Environmental Safety Strategy of the Russian Federation for the Period up to 2025]” (In Russ.).
2. “[Scheme and Program for the Development of the Unified Energy System of Russia for 2018–2024]” (In Russ.).
3. I. Ya. Sigal, A. V. Marasin, A. V. Smikhula, “Gas Burners for Combustion of Biogas in Boilers”, *Energy Technology and Resource Conservation*, **3** (2014), 68–71 (In Russ.).

4. U. J. Mizher, V. N. Kovalnogov, P. A. Velmisov, A. V. Chukalin, R. V. Fedorov, “A software package for the study of stationary gas-dynamic and thermal processes in the combustion chamber with automated preparation of geometric and boundary conditions for the model”, Testimonial. about the state. reg. computer programs No. 2021615282, *ULSTU*, 2021 (In Russ.).
5. *ANSYS Fluent 12.0. Theory Guide*, 2009.
6. H. Versteeg, V. Malalasekera, *Introduction to Computational Fluid Dynamics. – 2nd ed.*, Prentice Hall, Glasgow, 2007, 520 p.
7. L. G. Loitsyansky, [*Mechanics of Fluid and Gas*], Nauka Publ., Main Edition of Phys.-Math. Literature, Moscow, 1978 (In Russ.), 736 p.
8. H. Schlichting, K. Gersten, *Grenzschicht-Theorie*, Springer-Verlag, Berlin, 2006 DOI: <https://doi.org/10.1007/3-540-32985-4>, 799 p.
9. Petr A. Velmisov, Usama J. Mizher, “Asymptotic Study of Heat and Mass Transfer Processes in Viscous Fluids”, *AIP Conference Proceedings*, **2333**:1 (2021), 120003-1–120003-12. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0041780>
10. P. A. Velmisov, U. J. Mizher, V. N. Kovalnogov, “Asymptotic Study of Heat and Mass Transfer in Weakly Twisted Jets”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **22**:2 (2020), 200–207 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202002.200-207>
11. J. D. Anderson, *Computational Fluid Dynamics: The Basic with Application*, McCraw-Hill, New York, 1995, 563 p.
12. K. A. Hoffman, S. T. Chiang, *Computational Fluid Dynamics. – 4th ed.*, **1**, Engineering Education System, 2000, 479 p.
13. T. J. Chung, *Computational Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010, 1034 p.

Submitted 09.07.2021; Revised 10.08.2021; Accepted 25.08.2021

Information about the authors:

Usama J. Mizher, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8950-9772>, usama.mizher@gmail.com

Vladislav N. Kovalnogov, Head of the Department of Thermal Power Engineering, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Dr. Sci. (Engineering), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1907-3790>, kvn@ulstu.ru

Peter A. Velmisov, Head of the Department of Higher Mathematics, Federal State Budgetary Educational Establishment of Higher Education, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

The authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

К 80-ЛЕТИЮ

ИЛЬИ ВЛАДИМИРОВИЧА БОЙКОВА



Бойков Илья Владимирович родился 19 марта 1941 г. в СССР (на территории современной Украины – в г. Кременчуге Полтавской области).

В 1963 г. окончил Пензенский политехнический институт по специальности «Математические и счетно-решающие машины и устройства». После окончания института И. В. Бойков до 1965 г. работал инженером-наладчиком на Пензенском заводе «ВЭМ», а с 1965 по 1968 гг. – старшим инженером Пензенского научно-исследовательского института математических машин. Одновременно с 1964 по 1968 гг. он учился на заочном отделении механико-математического факультета Казанского государственного университета им. В. И. Ульянова-Ленина, который закончил с отличием по специальности «Математика» и после этого был оставлен в аспирантуре при кафедре математического анализа. В статусе аспиранта И. В. Бойков ведет активную научную деятельность в области фундаментальной и вычислительной математики

и их приложений.

В 1971 г. И. В. Бойков начал работать в Пензенском политехническом институте в должности ассистента кафедры «Высшая математика» (в настоящее время – «Высшая и прикладная математика»). Затем, в 1972 г., был переведен на должность старшего преподавателя. В этом же году И. В. Бойковым была защищена кандидатская диссертация по специальности «Математический анализ» (на тему «Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений»). В 1973 г. ученый стал доцентом этой кафедры, а в 1974 г. был избран заведующим.

В 1991 г. во ВЦ СО АН СССР И. В. Бойковым была защищена докторская диссертация по специальности «Вычислительная математика» (на тему «Оптимальные по точности алгоритмы вычисления сингулярных интегралов и решения сингулярных интегральных уравнений»).

К основным научным достижениям И. В. Бойкова относятся:

– общий метод построения оптимальных алгоритмов вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов [1–3]. На основе этого метода им были построены оптимальные, асимптотически оптимальные и оптимальные по порядку квадратурные

формулы вычисления многих классов сингулярных, полисингулярных, многомерных сингулярных интегралов и получены обобщения этих формул на гиперсингулярные, полигиперсингулярные и многомерные гиперсингулярные интегралы;

– построение и обоснование проекционных методов решения нелинейных сингулярных интегральных уравнений [4–7];

– решение 9-й и 18-й задач, сформулированных К. И. Бабенко в 1985 г. в статье «О некоторых задачах теории приближений и численного анализа» (УМН. 1985. Т. 40, вып. 1 (241). С. 3–27), в ряду 19 задач, имеющих, по мнению автора статьи, исключительное значение для численного анализа и теории приближения функций. Первая задача была посвящена асимптотике численного решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа, вторая – вычислению поперечников Колмогорова и Бабенко для классов функций, модули производных которых растут, как степенные функции расстояния от точки до границы области [8–9]. Последняя задача была обобщена на более широкие классы функций [9];

– решение проблемы Колмогорова о существовании аналитических функций многих переменных, не представимых непрерывно дифференцируемыми функциями меньшего числа переменных [9];

– обобщение первого метода Ляпунова на системы нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных параболического типа [10], решение проблемы Брокетта о стабилизации решений систем дифференциальных уравнений, решение проблемы Айзермана для одного частного случая [10].

Полученные теоретические результаты были использованы при решении следующих прикладных проблем:

– построение оптимальных методов аппроксимации потенциальных полей [11];

– построение и обоснование итерационно-проекционных методов решения обратных задач гравиразведки [11];

– построение оптимальных методов аппроксимации тепловых полей [12];

– построение аналитических и численных методов одновременного восстановления глубины залегания, плотности и уравнения поверхности в обратных контактных задачах логарифмического и ньютоновского потенциала [13];

– построение численных методов идентификации динамических систем с сосредоточенными и распределенными параметрами [14].

Научная работа И. В. Бойкова была поддержана двумя грантами Международного научного фонда, тремя грантами Российского фонда фундаментальных исследований, тремя грантами Минвуза РФ, грантом Российского научного гуманитарного фонда. Дважды И. В. Бойков был удостоен Государственной научной стипендии для выдающихся ученых РФ, а в 1999 г. был избран Соросовским профессором.

И. В. Бойков является автором 8 и соавтором 4 монографий. Им опубликовано более 500 статей, более 60 из которых проиндексированы в Web of Science и Scopus; получено 6 авторских свидетельств, 2 патента, сделано более 100 докладов на международных и республиканских конференциях и семинарах. В 2010 г. статья И. В. Бойкова в соавторстве с Э. С. Вентцелем и А. И. Бойковой «An approximate solution of hypersingular integral equations» (Applied Numerical Mathematics. 2010. Vol. 6. pp. 607–628) заняла 3-е место среди статей в журнале Applied Numerical Mathematics, издаваемом IMACS (International Association for Mathematics and Computers in Simulation). И. В. Бойков удостоен звания Почетный член IMACS_2011.

В разные годы И.В. Бойковым было издано десять учебных пособий по различным разделам математики и один конспект лекций.

И. В. Бойков является руководителем аспирантуры и докторантуры по специальностям «Вычислительная математика» и «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» Под его руководством было защищено семнадцать кандидатских диссертаций. Кроме этого, ученым создана научная школа «Аналитические и численные методы решения уравнений математической физики», которая широко известна в мире.

Большое внимание И. В. Бойков уделяет математическому образованию в городе и области. В 1974, 1975, 1977, 1983–1986, 1994–1995 и 1998–2011 гг. он занимал пост председателя Государственной экзаменационной комиссии в Пензенском государственном педагогическом университете им. В. Г. Белинского, а с 2003 по 2013 гг. – председателя областной предметной комиссии по проведению Единого государственного экзамена по математике в Пензенской области; неоднократно был председателем жюри областных и республиканских олимпиад по математике.

И. В. Бойков большое внимание уделяет популяризации научных результатов, полученных сотрудниками кафедры и университета, в России и за рубежом. Под его руководством ежегодно начиная с 2007 г. проводятся две международные конференции по актуальным вопросам прикладной математики и математического моделирования.

Ученый является членом редакционных коллегий журналов «Известия высших учебных заведений. Поволжский регион» и «Журнал Средневожского математического общества», официальным рецензентом международных журналов *Mathematics*, *Symmetry*, *Zentralblatt fur Mathematik* (Springer), *Mathematical Review* (AMS) и ряда других.

И. В. Бойкова связывают долгие годы сотрудничества со Средне-Волжским математическим обществом. Ученый возглавляет пензенское отделение общества; является активным участником научных конференций и школ-семинаров по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию, проводимых МГУ им. Н. П. Огарёва совместно со Средне-Волжским математическим обществом и ИПМ им. М. В. Келдыша РАН. Несколько аспирантов И. В. Бойкова прошли защиту в диссертационном совете Мордовского государственного университета; в этом же совете ученый выступал в качестве официального оппонента.

Научная и педагогическая деятельность И. В. Бойкова получила признание мирового научного сообщества: он является членом Американского математического общества, Европейского математического общества, членом исследовательского совета Американского биографического института. Биография этого выдающегося исследователя включена в десяток международных справочников, включая «Who is Who in the World» (с 1994 г.) и «Кто есть кто в России».

И. В. Бойков является Почетным работником высшего профессионального образования России (2001 г.).

Сердечно поздравляем Илью Владимировича с юбилеем и желаем доброго здоровья, семейного счастья и дальнейших творческих успехов!

*П. А. Вельмисов, В. З. Гринес, Р. В. Жалнин, Е. Б. Кузнецов,
Т. Ф. Мамедова, П. В. Сенин, Л. А. Сухарев, В. Ф. Тишкин,
И. И. Чучаев, П. А. Шаманаев, О.С. Язовцева*

Основные публикации

1. Бойков И. В. Оптимальные по точности алгоритмы приближенного вычисления сингулярных интегралов. Изд-во Сарат. гос. ун-та, Саратов. 1983. 210 с.
2. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 1. Сингулярные интегралы. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2005. 360 с.
3. Бойков И. В. Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Ч. 2. Гиперсингулярные интегралы. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. 252 с.
4. Бойков И.В. О приближенном решении сингулярных интегральных уравнений // ДАН СССР. 1972. Т. 203, № 3. С. 511–514.
5. Бойков И. В. К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений // Матем. заметки. 1972. Т. 12, № 2. С. 177–186.
6. Бойков И. В. Об одном прямом методе решения сингулярных интегральных уравнений // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1972. Т. 12, № 6. С. 1381–1390.
7. Бойков И. В. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2004. 316 с.
8. Бойков И. В. Аппроксимация некоторых классов функций локальными сплайнами // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 1998. Т. 38, № 1. С. 25–33.
9. Бойков И. В. Оптимальные методы приближения функций и вычисления интегралов. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007. 236 с.
10. Бойков И. В. Устойчивость решений дифференциальных уравнений. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. 244 с.
11. Бойков И. В., Бойкова А. И. Приближенные методы решения прямых и обратных задач гравиразведки. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2013. 510 с.
12. Бойков И. В., Рязанцев В. А. К вопросу об оптимальной аппроксимации геофизических полей // СЖВМ. 2021. Т. 24, № 1. С. 17–34.
13. Бойков И. В., Рязанцев В. А. К вопросу об одновременном восстановлении плотности и уравнения поверхности в обратной задаче гравиметрии для контактной поверхности // СЖВМ. 2020. № 3. С. 289–308.
14. Бойков И. В., Кривулин Н. П. Аналитические и численные методы идентификации динамических систем. Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2016. 398 с.

ПОЗДРАВЛЯЕМ ШАВКАТА АБДУЛЛАЕВИЧА АЮПОВА



Поздравляем члена редакционной коллегии журнала – доктора физико-математических наук, профессора, академика Академии наук Республики Узбекистан, директора Института математики Академии наук Узбекистана Шавката Абдуллаевича Аюпова с присвоением звания «Узбекистон Кахрамони» («Герой Узбекистана») и вручением высшего знака — медали «Олтин юлдуз» («Золотая звезда»). Желаем Шавкату Абдуллаевичу крепкого здоровья, одарённых учеников и новых успехов в науке!

Редколлегия журнала

Средне-Волжское математическое общество

*Коллектив Национального исследовательского Мордовского
государственного университета им. Н. П. Огарёва*

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов – 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы – не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

– *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

– *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

– *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

— *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmobib.sty. Этот пакет разработан на основе пакета amsbib.sty.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английский язык (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

- *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the `svmobib.sty` style package. This package is developed based on the `amsbib.sty` package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticznogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение **table** с вложенным окружением **tabular**:

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_фай-
ла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_под-
пись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжа-тия}
{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжа-тия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmobib.sty`. Основой этого пакета является стилевая файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citetthree`, `\citetfour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в
виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными
ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib4}  
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев  
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий  
\inbook Прикладная математика и механика  
\publaddr Ульяновск  
\publ УлГТУ  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}  
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
\publaddr Ulyanovsk  
\publ UIGTU Publ.  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13  
\lang In Russ.
```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib5}  
\by Ю. Н. Бибииков  
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений  
\publaddr М.  
\publ Высш. шк.  
\yr 1991  
\totalpages 303
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}  
\by Yu. N. Bibikov  
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]  
\publaddr Moscow  
\publ Visshay shkola Publ.  
\yr 1991  
\totalpages 303  
\lang In Russ.
```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib6}  
\by В. Г. Малинов
```

```
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\proinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.
```

В разделе thebibliographyEn:

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\proinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name \ \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in
English} \label{shamanaevtable1}
```

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
\hline
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

- a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

- b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

- c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

- d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

- e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

- f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

- g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the `svmobib.sty` package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

Articles in the electronic journals in Russian

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funktionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Articles in collections in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

Books (monographs and collections) in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential
equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

Conference proceedings in Russian:

```

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

```

Алфавитный указатель авторов

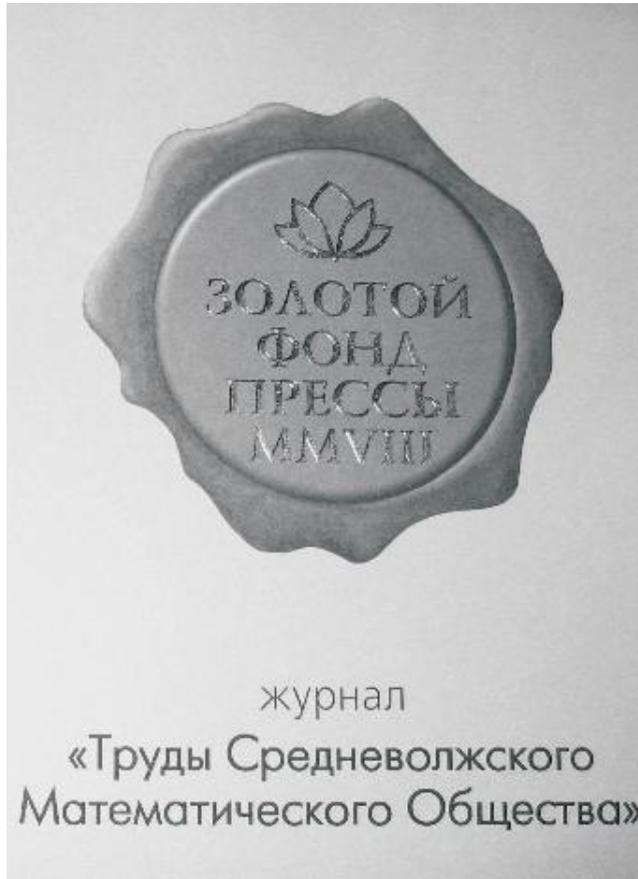
Аюпов Ш. А.	322	Косов А. А.	285
Бойков И. В.	247, 318	Мизхер У. Д.	308
Бойкова А. И.	247	Руднев В. А.	247
Буранов Ж. И.	273	Сидоров С. В.	295
Вельмисов П. А.	308	Степанов Н. С.	247
Ковальногов В. Н.	308	Хусанов Д. Х.	273
Чилина Е. Е.		295	

Author Index

Ayupov Sh. A.	322	Kosov A. A.	285
Boykov I. V.	247, 318	Kovalnogov V. N.	308
Boykova A. I.	247	Mizher U. J.	308
Buranov J. I.	273	Roudnev V. A.	247
Chilina E. E.	295	Sidorov S. V.	295
Khusanov D. Kh.	273	Stepanov N. S.	247

Velmisov P. A. 308

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Редактор: *Зинина С. Х.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 10.09.2021. Дата выхода в свет 30.09.2021. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 9,8 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1348.

Типография: Издательство Мордовского университета

Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Atryahin V. A.*

Editor: *Zinina S. Kh.*

Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 10.09.2021. Date of publishing 30.09.2021. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 9,8.

Number of copies 100. Order no. 1348.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24

Для заметок

Для заметок

Для заметок

