

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

**ЖУРНАЛ  
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО  
МАТЕМАТИЧЕСКОГО  
ОБЩЕСТВА**

**Middle Volga  
Mathematical Society Journal**

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  **23**  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  **2**

**2021**



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 23, № 2. 2021

DOI 10.15507/2079-6900.23.202102

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 1 раз в квартал

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)  
ISSN 2587-7496 (Online)

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 23, NO. 2. 2021

DOI 10.15507/2079-6900.23.202102

Published since December 1998

Periodicity: Quarterly

# Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



**УЧРЕДИТЕЛИ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

**ИЗДАТЕЛЬ:** федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

**РЕДАКЦИЯ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.



FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малайзийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Губайдуллин Ирек Марсович** — доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

**Дерюгин Юрий Николаевич** — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института, БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

**Матус Петр Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Ион Анка Вероника** — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

**Aleksandr S. Andreev** — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Vyacheslav Z. Grines** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Irek M. Gubaydullin** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Chief Research Scientist, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

**Petr P. Matus** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Olga V. Pochinka** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Nikolay D. Morozkin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Petr V. Senin** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Lev A. Suharev** — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Nadezda G. Yarushkina** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Anca V. Ion** — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

**Д. А. Баранов, О. В. Починка**

Классификация периодических преобразований ориентируемой поверхности рода два . . . . . 147

**А. А. Косов, Э. И. Семенов**

О точных решениях уравнений вращательного движения твердого тела при действии момента циркулярно-гироскопических сил . . . . . 159

**А. И. Морозов**

Реализация гомотопических классов гомеоморфизмов тора простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами . . . . . 171

**И. П. Рязанцева**

Метод упрощения для нелинейных уравнений монотонного типа в банаховом пространстве . . . . . 185

---

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

**С. А. Суков**

Метод балансировки загрузки для гетерогенных численных алгоритмов моделирования газодинамических течений . . . . . 193

---

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

---

К 80-ЛЕТИЮ ВЛАДИМИРА КОНСТАНТИНОВИЧА ГОРБУНОВА . . . . . 207

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) . . . . . 211

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) . . . . . 215

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) . . . . . 219

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) . . . . . 225

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) . . . . . 229

Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) . . . . . 230

---

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

**D. A. Baranov, O. V. Pochinka**

Classification of periodic transformations of an orientable surface of genus two 147

**A. A. Kosov, E. I. Semenov**

 On exact solutions of equations of rotational motion of a rigid body under  
 action of torque of circular-gyroscopic forces . . . . . 159

**A. I. Morozov**

 Realization of homotopy classes of torus homeomorphisms by the simplest  
 structurally stable diffeomorphisms . . . . . 171

**I. P. Ryazantseva**

 Simplification method for nonlinear equations of monotone type in Banach  
 space . . . . . 185

---

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

**S. A. Soukov**

Load balancing method for heterogeneous CFD algorithms . . . . . 193

---

## MATHEMATICAL LIFE

---

TO THE 80TH ANNIVERSARY OF VLADIMIR KONSTANTINOVICH GORBUNOV 207

The rules of article design (in Russian) . . . . . 211

The rules of article design (in English) . . . . . 215

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . . 219

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) . . . . . 225

Author Index (In Russian) . . . . . 229

Author Index (in English) . . . . . 230

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202102.147-158

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

## Классификация периодических преобразований ориентируемой поверхности рода два

Д. А. Баранов, О. В. Починка

*ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В настоящей работе найдены все допустимые классы топологической сопряженности периодических преобразований двумерной поверхности рода два. Доказано, что существует в точности семнадцать попарно топологически несопряженных сохраняющих ориентацию периодических преобразований кренделя. Также представлена реализация всех классов посредством поднятия полных характеристик отображений с модульной поверхности на поверхность рода два. Классификационные результаты базируются на теории Нильсена периодических преобразований поверхностей, согласно которой класс топологической сопряженности любого подобного гомеоморфизма полностью определяется его характеристикой. Полная характеристика несет информацию о роде модульной поверхности, ветвлении накрытой несущей поверхностью, периодах точек ветвления и поворотах вокруг них. Необходимые и достаточные условия допустимости полной характеристики описаны Нильсеном и для любой поверхности дают конечное число допустимых наборов. Для поверхностей небольшого рода можно составить полный список допустимых характеристик, что и сделано авторами работы для поверхности рода 2.

**Ключевые слова:** периодический гомеоморфизм поверхностей, теория Нильсена-Терстона, ориентируемая поверхность, топологическая сопряженность

**Для цитирования:** Баранов Д. А., Починка О. В. Классификация периодических преобразований ориентируемой поверхности рода два // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 147–158. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.147-158>

### 1. Введение

В работе [1] Я. Нильсеном были исследованы структура и свойства периодических преобразований поверхностей и найдены необходимые и достаточные условия их топологической сопряженности. Реализация всех классов топологической сопряженности периодических преобразований стандартными представителями – задача трудная и необозримая. Однако в случае двумерной сферы она была решена Б. Керкъярто [2], а в случае двумерного тора – Л. Брауэром [3]. В настоящей работе найдены все допустимые классы топологической сопряженности периодических преобразований двумерной поверхности рода 2. Введем необходимые определения и факты.

Пусть  $S$  – замкнутая ориентируемая поверхность и  $f : S \rightarrow S$  – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм. Гомеоморфизмы  $f, f' : S \rightarrow S$  называются *топологически сопряженными*, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $h : S \rightarrow S$  такой, что  $f' = h \circ f \circ h^{-1}$ .

Гомеоморфизм  $f$  называется *периодическим*, если существует такое  $n \in \mathbb{N}$ , что  $f^n = id$ . Наименьшее из таких  $n$  называется периодом  $f$ .

Ниже мы приводим результаты Я. Нильсена [1], более современное изложение этих результатов можно найти, например, в [4–6], мы следуем изложению в [7–8].

С каждым периодическим преобразованием  $f$  периода  $n$  связаны следующие объекты:

1. множество  $\bar{B} \subset S$  точек, периода меньшего  $n$ , оно состоит из конечного числа орбит  $\mathcal{O}_i, i = 1, \dots, k$  периода  $n_i$ , являющегося делителем  $n$ ; с каждой орбитой  $\mathcal{O}_i \subset \bar{B}$  связано число  $\delta_i \in \{1, \dots, \lambda_i - 1\}$ , взаимно простое с  $\lambda_i = \frac{n}{n_i}$  такое, что в некоторой окрестности  $D_{\bar{x}_i}$  точки  $\bar{x}_i \in \mathcal{O}_i$  гомеоморфизм  $f^{n_i}$  топологически сопряжен (см. Рис. 1.1) с поворотом плоскости вокруг начала координат

$$z \rightarrow e^{\frac{2\pi\delta_i}{\lambda_i}i}z;$$

2. число  $d_i \in \{1, \dots, \lambda_i - 1\}$  такое, что  $d_i\delta_i \equiv 1 \pmod{\lambda_i}$ . Пара  $(n_i, d_i)$  называется валентностью орбиты  $\mathcal{O}_i$ ;
3. группа  $G = \{id, f, \dots, f^{n-1}\}$ , изоморфная  $\mathbb{Z}_n = \{0, \dots, n - 1\}$  и действующая на  $S$  так, что модульная поверхность  $\Sigma = S/G$  является замкнутой поверхностью, и естественная проекция  $\pi : S \rightarrow \Sigma$  является  $n$ -листным накрытием всюду, кроме точек множества  $\bar{B}$ ;  $B = \pi(\bar{B}), x_i = \pi(\mathcal{O}_i)$ ;
4. гомоморфизм  $\eta : H_1(\Sigma \setminus B) \rightarrow \mathbb{Z}_n$ , индуцированный проекцией  $\pi$ .

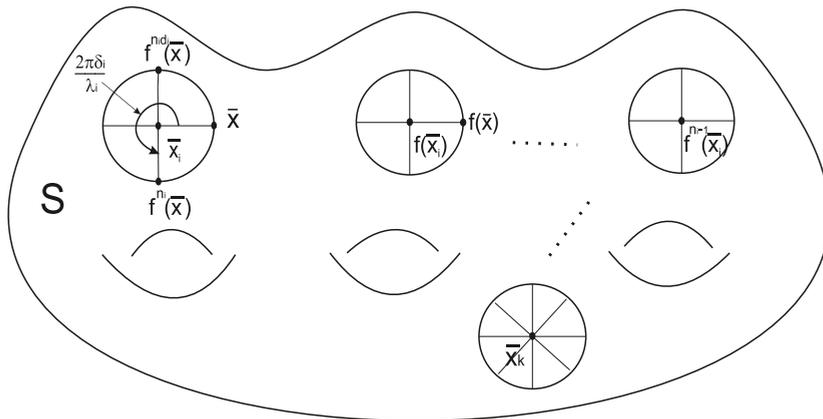


Рис. 1.1. Действие периодического гомеоморфизма в окрестности точки меньшего периода

Fig 1.1. Action of a periodic homeomorphism near a point of less period

**Предложение 1.1** Два периодических преобразования  $f, f'$  поверхности  $S$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые периоды и наборы валентностей орбит меньшего периода.

**Следствие 1.1** Два периодических преобразования  $f, f'$  поверхности  $S$  без точек меньшего периода топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые периоды.

Таким образом, если  $p$  – род поверхности  $S$ , а  $g$  – род модульной поверхности  $\Sigma$ , то каждый периодический гомеоморфизм можно описать *полной характеристикой*

$$(n, p, g, n_1, \dots, n_k, d_1, \dots, d_k).$$

Если  $B = \emptyset$ , то  $k = 0$  и полные характеристики имеют вид  $(n, p, g)$ , а естественная проекция  $\pi : S \rightarrow \Sigma$  является  $n$ -листным накрытием (без точек ветвления) модульной поверхности  $\Sigma$  рода  $g$  поверхностью  $S$  рода  $p$ .

Реализуемость некоторого набора чисел полной характеристикой какого-либо периодического гомеоморфизма определяется следующими соотношениями:

$$2p + \sum_{i=1}^k n_i - 2 = n(2g + k - 2), \tag{1.1}$$

$$\sum_{i=1}^k d_i n_i \equiv 0 \pmod{n} \tag{1.2}$$

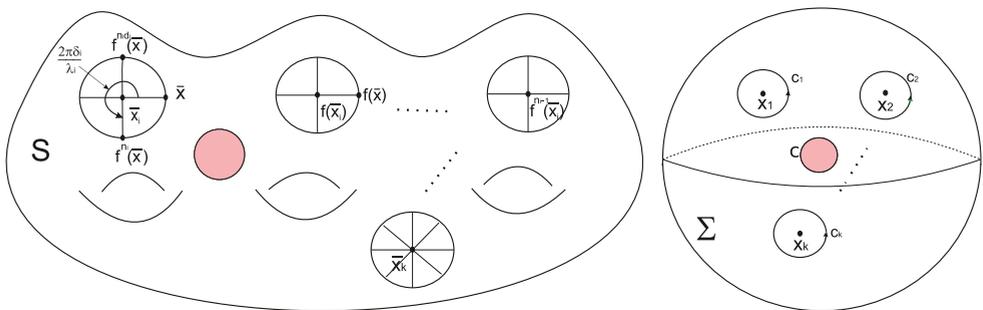
Равенство (1.1) выражает связь эйлеровых характеристик поверхностей

$$\dot{S} = S \setminus \bigcup_{i=1}^k \pi^{-1}(D_i), \quad \dot{\Sigma} = \Sigma \setminus \bigcup_{i=1}^k D_i,$$

при условии, что поверхность  $\dot{S}$   $n$ -листно накрывает  $\dot{\Sigma}$ :

$$\chi(\dot{S}) = n\chi(\dot{\Sigma}).$$

Соотношение (1.2) следует из следующих соображений (см. Рис. 1.2). Положим  $D_i = \pi(D_{\bar{x}_i})$  и обозначим через  $c_i$  границу диска  $D_i$ , ориентированную так, что при обходе вдоль границы диск остается слева. Тогда  $\eta([c_i]) = n_i d_i$ . С другой стороны цепь  $\sum_{i=1}^k [c_i]$  гомологична цепи  $[c]$ , где  $c$  – замкнутая кривая, которая ограничивает диск (Рис. 1.2) и, следовательно, удовлетворяет равенству  $\eta([c]) = 0$ .

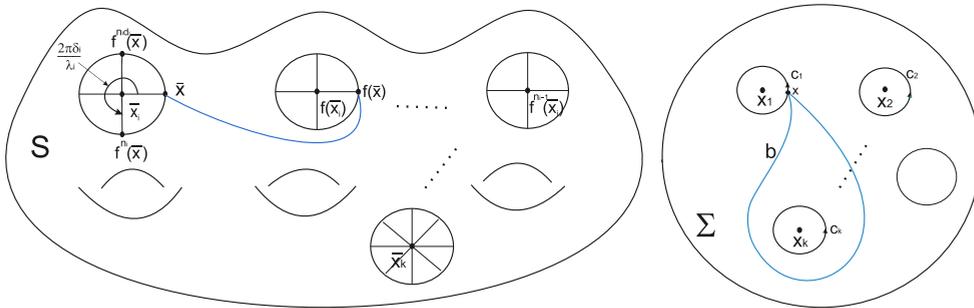


**Рис. 1.2.** Геометрический смысл соотношения (1.2)  
**Fig 1.2.** Geometrical meaning of relation (1.2)

В случае, когда модульная поверхность является сферой ( $g = 0$ ), отображение  $\eta$  является эпиморфизмом и, следовательно, некоторая цепь  $\sum_{i=1}^k l_i [c_i]$  должна быть гомологична цепи  $[b]$ , где  $b$  – замкнутая кривая (см. Рис. 1.3) такая, что  $\eta([b]) = 1$ . Тогда

к соотношению (1.2) добавляется следующее условие на наибольший общий делитель (GSD) чисел  $d_1 n_1, \dots, d_k n_k$ :

$$(GSD(d_1 n_1, \dots, d_k n_k), n) = 1. \tag{1.3}$$



**Рис. 1.3.** Геометрический смысл соотношения (1.3)  
**Fig 1.3.** Geometrical meaning of relation (1.3)

Основным результатом работы является доказательство следующих фактов.

**Т е о р е м а 1.1 (классификация периодических гомеоморфизмов поверхности рода два)** *Существует семнадцать классов топологической сопряженности периодических гомеоморфизмов тора со следующими полными характеристиками в каждом классе:*

1.  $f_1: g = 0, n = 10, k = 3, n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 5, d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 1;$
2.  $f_2 = f_1^2: g = 0, n = 5, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1, d_1 = 1, d_2 = d_3 = 2;$
3.  $f_3 = f_1^3: g = 0, n = 10, k = 3, n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 5, d_1 = 3, d_2 = 1, d_3 = 1;$
4.  $f_4 = f_1^4: g = 0, n = 5, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1, d_1 = 2, d_2 = d_3 = 4;$
5.  $f_5 = f_1^5: g = 0, n = 2, k = 6, n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = n_5 = n_6 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = d_5 = d_6 = 1;$
6.  $f_6 = f_1^6: g = 0, n = 5, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1, d_1 = 3, d_2 = d_3 = 1;$
7.  $f_7 = f_1^7: g = 0, n = 10, k = 3, n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 5, d_1 = 7, d_2 = 4, d_3 = 1;$
8.  $f_8 = f_1^8: g = 0, n = 5, k = 3, n_1 = n_2 = n_3 = 1, d_1 = 4, d_2 = d_3 = 3;$
9.  $f_9 = f_1^9: g = 0, n = 10, k = 3, n_1 = 1, n_2 = 2, n_3 = 5, d_1 = 9, d_2 = 3, d_3 = 1;$
10.  $f_{10}: g = 0, n = 8, k = 3, n_1 = n_2 = 1, n_3 = 4, d_1 = 1, d_2 = 3, d_3 = 1;$
11.  $f_{11} = f_{10}^2: g = 0, n = 4, k = 4, n_1 = 1, n_2 = n_3 = 2, n_4 = 1, d_1 = d_2 = d_3 = 1, d_4 = 3;$
12.  $f_{12} = f_{10}^5: g = 0, n = 8, k = 3, n_1 = n_2 = 1, n_3 = 4, d_1 = 5, d_2 = 7, d_3 = 1;$
13.  $f_{13}: g = 0, n = 6, k = 3, n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2, d_1 = d_2 = 1, d_3 = 2;$
14.  $f_{14} = f_{13}^2: g = 0, n = 3, k = 4, n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 1, d_1 = d_2 = 1, d_3 = d_4 = 2;$

$$15. f_{15} = f_{13}^3: g = 1, n = 2, k = 2, n_1 = n_2 = 1, d_1 = d_2 = 1;$$

$$16. f_{16} = f_{13}^5: g = 0, n = 6, k = 3, n_1 = n_2 = 1, n_3 = 2, d_1 = d_2 = 5, d_3 = 1;$$

$$17. f_{17}: g = 0, n = 6, k = 4, n_1 = n_2 = 2, n_3 = n_4 = 3, d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = d_4 = 1.$$

## 2. Неравенства, связывающие полные характеристики периодических гомеоморфизмов

Из формулы (1.1) вытекает несколько полезных следствий.

**Предложение 2.1** *Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма  $f : S \rightarrow S$  периода  $n$  без точек меньшего периода справедливо следующее равенство:*

$$p = n(g - 1) + 1 \quad (2.1)$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулой (1.1)  $2p + \sum_{i=1}^k n_i - 2 = n(2g + k - 2)$ . Поскольку нет точек меньшего периода, получается равенство  $2p - 2 = n(2g - 2)$ . Из этого следует, что  $p - 1 = n(g - 1)$  и  $p = n(g - 1) + 1$ .

**Следствие 2.1** *На ориентируемой поверхности рода 2 не существует сохраняющего ориентацию гомеоморфизма  $f$  периода  $n$  без точек меньшего периода.*

**Доказательство.** Подставив  $p = 2$  в равенство (2.1), получим  $n(g - 1) = 1$ . Это равенство не может быть верным ни при каком  $n > 1$ . Тогда, в силу утверждения 2.1, не существует гомеоморфизма без точек меньшего периода.

**Предложение 2.2** *Для любого сохраняющего ориентацию гомеоморфизма  $f : S \rightarrow S$  периода  $n$  с непустым множеством точек меньшего периода справедливо следующее неравенство:*

$$p > n(g - 1) + 1 \quad (2.2)$$

**Доказательство.** Воспользуемся формулой (1.1)  $2p + \sum_{i=1}^k n_i - 2 = n(2g + k - 2)$ . Поскольку  $n_i$  – делители  $n$ , не превосходящие  $n$ , то

$$0 < k \leq \sum_{i=1}^k n_i \leq \frac{nk}{2} < nk. \quad (2.3)$$

Для доказательства рассмотрим 3 случая.

1.  $p = 0$ . Тогда равенство (1.1) равносильно равенству  $\sum_{i=1}^k n_i - 2 = n(2g + k - 2)$ .

Воспользовавшись неравенством (2.3), получим  $n(2g - 2) < -2$ . Отсюда следует, что  $n(1 - g) > 1$  или  $1 - g > 0$ . Следовательно,  $g = 0$ .

2.  $p = 1$ . Тогда равенство (1.1) равносильно равенству  $\sum_{i=1}^k n_i = n(2g + k - 2)$ . Из (2.3) получим  $n(2g + k - 2) < nk$ . Следовательно,  $g - 1 < 0$  или  $g = 0$ .

3.  $p > 1$ . Из формул (1.1) и (2.3) получим, что  $n(2g + k - 2) < 2p + nk - 2$ . Откуда  $n(g - 1) < p - 1$  или  $p > n(g - 1) + 1$ .

Таким образом, во всех случаях  $p > n(g - 1) + 1$ .

**С л е д с т в и е 2.2** Для ориентируемой поверхности рода 2 род модульной поверхности  $g$  может быть равен 0 или 1.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Подставив  $p = 2$  в неравенство (2.2), получим  $n(g - 1) < 1$ . Это неравенство для  $n > 1$  выполняется только при  $g = 0$  или при  $g = 1$ .

**П р е д л о ж е н и е 2.3** Для ориентируемой поверхности рода 2 число  $k$  орбит меньшего периода удовлетворяет следующим неравенствам:

$$g = 1 : 0 < \frac{2}{n-1} \leq k \leq \frac{4}{n} \leq 2 \quad (2.4)$$

$$g = 0 : 2 < \frac{2+2n}{n-1} \leq k \leq 4 + \frac{4}{n} \leq 6 \quad (2.5)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно следствию 2.2,  $g = 0$  или  $g = 1$ . Рассмотрим эти два случая отдельно.

1. Если  $g = 0$ , то равенство (1.1) равносильно равенству

$$nk = \sum_{i=1}^k n_i + 2. \quad (2.6)$$

Используя неравенство (2.3), запишем, что  $2 + k \leq nk \leq 2 + \frac{nk}{2}$ . Из левой части этого неравенства получим, что  $k \geq \frac{2}{n-1} > 0$ , а из правой части – что  $k \leq \frac{4}{n} \leq 2$ .

2. Если  $g = 1$ , то равенство (1.1) равносильно равенству

$$nk = \sum_{i=1}^k n_i + 2 + 2n \quad (2.7)$$

Используя неравенство (2.3), запишем, что  $2 + k + 2n \leq nk \leq 2 + \frac{nk}{2} + 2n$ . Из левой части этого неравенства получаем, что  $k \geq \frac{2+2n}{n-1} > 2$ , а из правой части что  $k \leq 4 + \frac{4}{n} \leq 6$ .

### 3. Классификация периодических гомеоморфизмов ориентируемой поверхности рода два

В этом разделе мы докажем теорему 1.1, а именно, покажем, что, если  $f$  – сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $f$  периода  $n$ , то допустимы 17 периодических наборов, перечисленных в теореме 1.1.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из утверждения 2.2 следует, что род модульной поверхности  $g$  может быть 1 или 0. Рассмотрим оба случая.

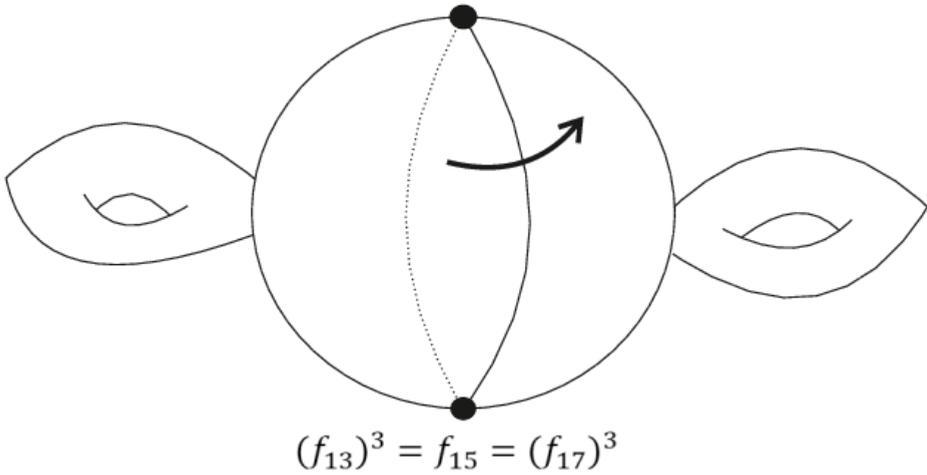
1.  $g = 1$ . В данном случае из неравенства (2.4) следует, что  $k = 1$  или  $k = 2$ . В случае  $k = 1$  неравенство (2.4) выполняется при  $n = 3$  или  $n = 4$ . Подставив эти данные в формулу (1.1), получим, что при  $n = 3$ ,  $n_1 = 1$  и  $d_1 = 1$  или  $d_1 = 2$ , а при  $n = 4$ ,  $n_1 = 2$  и  $d_1 = 1$ . Все эти варианты невозможны, т. к. не выполняется соотношение (1.2). В случае  $k = 2$  получим, что  $n = 2$ . Подставив данные в формулу (1.1), получаем, что  $n_1 = n_2 = 1$  и  $d_1 = d_2 = 1$  (набор значений 15).
2.  $g = 0$ . В данном случае из неравенства (2.5) следует, что  $3 \leq k \leq 6$ . Рассмотрим все случаи отдельно, начиная с  $k = 6$ .
  - (а)  $k = 6$ . Из неравенства (2.5) получим, что  $n = 2$ , а из равенства (1.1) следует, что все  $n_i = 1$  и все  $d_i = 1$  (набор значений 5).
  - (б)  $k = 5$ . Из неравенства (2.5) получим, что  $n = 3$  или  $n = 4$ . В первом случае из (1.1) получается, что  $\sum_{i=1}^5 n_i = 7$ , чего не может быть, поскольку  $n_i$  – делители 7. При  $n = 4$  получается, что  $\sum_{i=1}^5 n_i = 10$ , откуда все  $n_i = 2$ , но тогда не выполняется соотношение (1.3).
  - (с)  $k = 4$ . Из неравенства (2.5) получим, что возможны любые  $n \geq 3$ . Рассмотрим отдельно случаи  $n = 3$ ,  $n = 4$ ,  $n = 5$ ,  $n = 6$ ,  $n \geq 7$ .
    - i.  $n = 3$ . Из (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^4 n_i = 4$ . Следовательно, все  $n_i = 1$ , а из соотношения (1.2) получаем  $d_1 = d_2 = 1$ ,  $d_3 = d_4 = 2$  (набор значений 14).
    - ii.  $n = 4$ . Из (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^4 n_i = 6$ . Следовательно,  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $n_3 = n_4 = 2$ , а из соотношения (1.2) получим  $d_1 = 3$ ,  $d_2 = d_3 = d_4 = 1$  (набор значений – 11).
    - iii.  $n = 5$ . Из (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^4 n_i = 8$ , чего не может, т. к. единственный делитель 5 – это 1.
    - iv.  $n = 6$ . Из (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^4 n_i = 10$ . Следовательно,  $n_1 = n_2 = 2$ ,  $n_3 = n_4 = 3$ ; либо  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n_3 = n_4 = 3$ . Для второго набора ни при каких возможных  $d_i$  не выполняется соотношение (1.2). Для первого набора из соотношения (1.2) получим  $d_1 = 2$ , а  $d_2 = d_3 = d_4 = 1$  (набор значений 17).
    - v.  $n \geq 7$ . Из соотношения (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^4 n_i = 2n - 2$ . Тогда  $n_1 \geq \frac{n-1}{2}$ . Учитывая, что  $n_1 = \frac{n}{\lambda_1}$  и  $n \geq 7$ , получим, что  $n_1 = \frac{n}{2}$ . Аналогичные рассуждения приводят к тому, что  $n_2 = \frac{n}{2}$ ,  $n_3 = \frac{n}{2}$ . Из этого следует, что  $n_4 = \frac{n}{2} - 2$  и, соответственно,  $\lambda_4 \leq 4$  при  $n \geq 7$ . Учитывая соотношение (1.3), получим, что  $n_4 = \frac{n}{3}$  и  $n = 12$ . Таким образом,  $n_1 = n_2 = n_3 = 6$ ,  $n_4 = 4$ , но для такого набора ни при каких возможных  $d_i$  не выполняется соотношение (1.2).

(d)  $k = 3$ . В данном случае из неравенства (2.5) следует, что  $n \geq 5$ . Рассмотрим отдельно случаи  $n = 5$ ,  $n = 6$ ,  $n = 7$ ,  $n = 8$ ,  $n = 9$ ,  $n = 10$ ,  $n \geq 11$ .

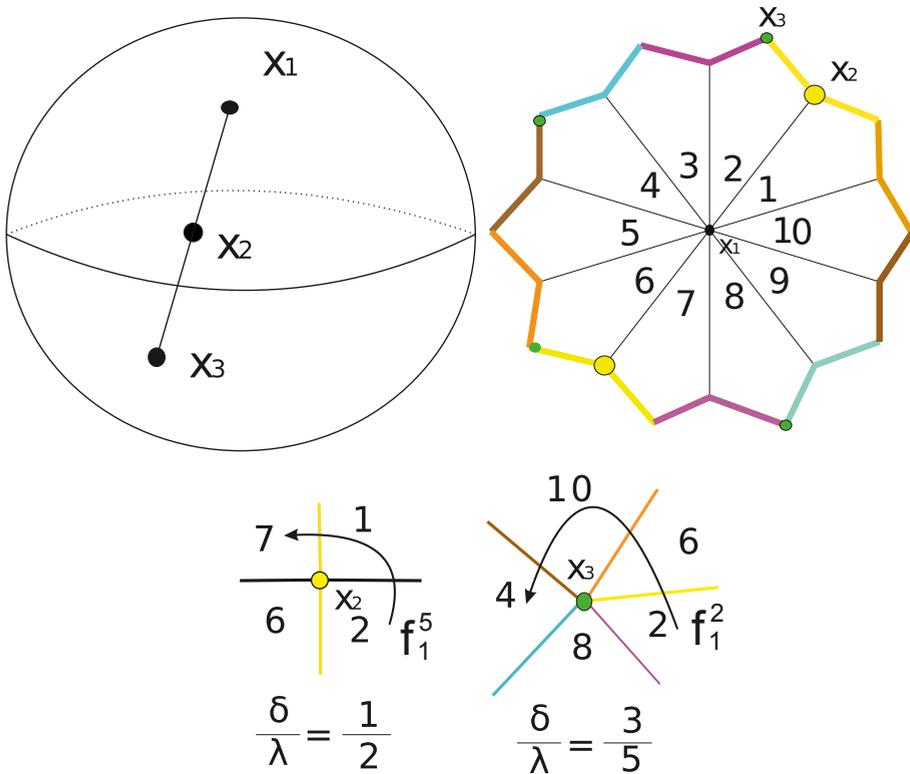
- i.  $n = 5$ . Из соотношения (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^3 n_i = 3$  и, следовательно, все  $n_i = 1$ . Из соотношения (1.2) получаем четыре возможных набора для  $d_i$  (наборы значений 2, 4, 6, 8).
- ii.  $n = 6$ . Из соотношения (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^3 n_i = 4$ . Откуда  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $n_3 = 2$ . Из соотношения (1.2) получим два возможных набора для  $d_i$  (наборы значений 13 и 16).
- iii.  $n = 7$ . Из соотношения (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^3 n_i = 5$ , чего не может быть, поскольку  $n_i$  – делители 7.
- iv.  $n = 8$ . Из соотношения (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^3 n_i = 6$ . Следовательно,  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $n_3 = 4$ ; либо  $n_1 = n_2 = n_3 = 2$ . Для первого набора из соотношения (1.2) получим наборы значений 10 и 12. Для второго набора ни при каких возможных  $d_i$  не выполняется соотношение (1.2).
- v.  $n = 9$ . Из соотношения (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^3 n_i = 7$ . Следовательно,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = n_3 = 3$ , но ни при каких возможных  $d_i$  не выполняется соотношение (1.2).
- vi.  $n = 10$ . Из соотношения (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^3 n_i = 8$ . Следовательно,  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 2$ ,  $n_3 = 5$ . Из соотношения (1.2) получим наборы значений 1, 3, 7, 9.
- vii.  $n \geq 11$ . Из соотношения (1.1) следует, что  $\sum_{i=1}^3 n_i = n - 2$  и, следовательно,  $n_1 \geq \frac{n-2}{3}$ . Учитывая, что  $n_1 = \frac{n}{\lambda_1}$  и  $n \geq 11$ , получаем, что  $n_1 = \frac{n}{2}$  либо  $n_1 = \frac{n}{3}$ . Аналогичные рассуждения приводят к тому, что  $\lambda_2 \leq 3$  для  $n_1 = \frac{n}{2}$  и  $\lambda_2 \leq 2$  для  $n_1 = \frac{n}{3}$  и это сводится к тому, что  $n_3 = \frac{n-12}{6}$  в обоих вариантах. В данном случае получается, что  $n$  и все  $n_i$  – четные числа, поэтому не выполняется соотношение (1.3) ни для каких  $d_i$ .

#### 4. Реализация периодических гомеоморфизмов поверхности рода 2 через модульную поверхность

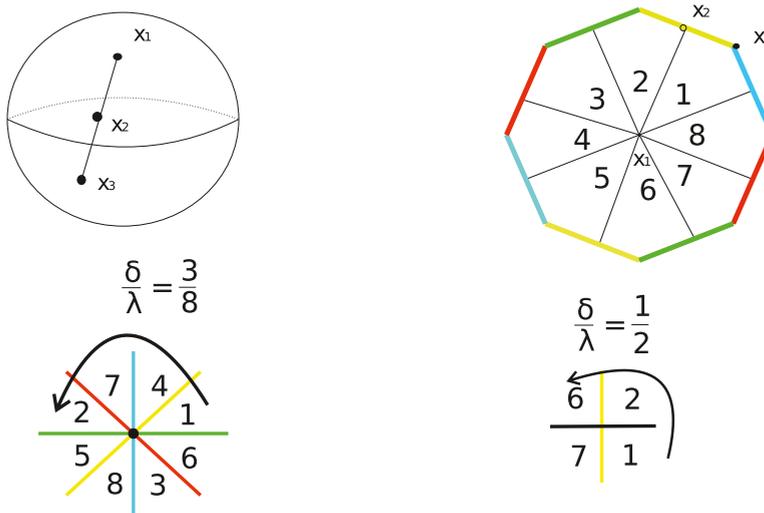
Согласно теореме 1.1, все периодические гомеоморфизмы являются степенями гомеоморфизмов  $f_1, f_{10}, f_{13}, f_{17}$ . Ниже приведены иллюстрации, демонстрирующие поднятие этих гомеоморфизмов с модульной поверхности.



**Рис. 4.1.** Периодический гомеоморфизм  $f_{13}^3 = f_{15} = f_{17}^3$   
**Fig 4.1.** Periodic homeomorphism  $f_{13}^3 = f_{15} = f_{17}^3$



**Рис. 4.2.** Периодический гомеоморфизм  $f_1$   
**Fig 4.2.** Periodic homeomorphism  $f_1$



**Рис. 4.3.** Периодический гомеоморфизм  $f_{10}$   
**Fig 4.3.** Periodic homeomorphism  $f_{10}$

**Благодарности.** Классификационные результаты подготовлены в ходе проведения исследования (№ 21-04-004) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2021–2022 гг. Реализация периодических гомеоморфизмов поддержана международной лабораторией динамических систем и приложений НИУ ВШЭ (№ 075-15-2019-1931).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Nielsen J. Die struktur periodischer transformationen von flachen. Medd. Danske Vid. Selsk. 1937. pp. 15.
2. Kerekjarto B. Topologische charakterisierung der linearen abbildungen. Acta Scient. Math. Szeged. 1934. Vol. 6. pp. 235–262.
3. Brouwer L. E. J. Aufzählung der periodischen transformationen. KNAW Proceedings, 21 II. 1919. pp. 1352–1356.
4. Fajuyigbe O. An extension theorem for periodic transformations of surface. I. Israel J. Math. 1979. Vol. 34. pp. 12–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02761821>
5. Hirose S. On periodic maps over surfaces with large periods. Tohoku Math. J. 2010. Vol. 67, No. 10. pp. 45–53. DOI: <https://doi.org/10.2748/tmj/1270041026>
6. Hirose S., Kasahara Y. A uniqueness of periodic maps on surfaces. J. Math. Soc. Japan. 2016. Vol. 68, No. 4. pp. 1777–1787. DOI: <http://dx.doi.org/10.2969/jmsj/06841777>
7. Smith P. A. Abelian actions on 2-manifolds. Michigan Math. J. 1967. Vol. 14, No 3. pp. 257–275. DOI: <https://doi.org/10.1307/mmj/1028999776>

8. Yokoyama K. Classification of periodic maps on compact surfaces. I. Tokyo J. Math. 1983. Vol. 6, No. 1. pp. 75–94. DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270214327>

*Поступила 25.03.2021; доработана после рецензирования 26.04.2021;  
принята к публикации 24.05.2021*

*Информация об авторах:*

**Баранов Денис Алексеевич**, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, [denbaranov0066@gmail.com](mailto:denbaranov0066@gmail.com)

**Починка Ольга Витальевна**, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603150, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4274-8215>, [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru)

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

---

*Original article*

*MSC2020 37E30*

## Classification of periodic transformations of an orientable surface of genus two

D. A. Baranov, O. V. Pochinka

*National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** In this paper, we find all admissible topological conjugacy classes of periodic transformations of a two-dimensional surface of genus two. It is proved that there are exactly seventeen pairwise topologically non-conjugate orientation-preserving periodic pretzel transformations. The implementation of all classes by lifting the full characteristics of mappings from a modular surface to a surface of genus two is also presented. The classification results are based on Nielsen's theory of periodic surface transformations, according to which the topological conjugacy class of any such homeomorphism is completely determined by its characteristic. The complete characteristic carries information about the genus of the modular surface, the ramified bearing surface, the periods of the ramification points and the turns around them. The necessary and sufficient conditions for the admissibility of the complete characteristic are described by Nielsen and for any surface they give a finite number of admissible collections. For surfaces of a small genus, one can compile a complete list of admissible characteristics, which was done by the authors of the work for a surface of genus 2.

**Key Words:** periodic homeomorphisms of surfaces, Nielsen-Thurston theory, orientable surface, topological conjugacy

**For citation:** D. A. Baranov, O. V. Pochinka. Classification of periodic transformations of an orientable surface of genus two. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:2(2021), 147–158. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.147-158>

## REFERENCES

1. J. Nielsen, “Die struktur periodischer transformationen von flachen”, *Medd. Danske Vid. Selsk.*, 1937, 15.
2. B. von Kerekjarto, “Topologische charakterisierung der linearen abbildungen”, *Acta Scient. Math. Szeged*, **6** (1934), 235–262.
3. L. E. J. Brouwer, “Aufzählung der periodischen transformationen”, *KNAW Proceedings*, *21 II*, 1919, 1352–1356.
4. O. Fajuyigbe, “An extension theorem for periodic transformations of surface”, *I. Israel J. Math.*, **34** (1979), 12–20. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02761821>
5. S. Hirose, “On periodic maps over surfaces with large periods”, *Tohoku Math. J.*, **67**:10 (2010), 45–53. DOI: <https://doi.org/10.2748/tmj/1270041026>
6. S. Hirose, Y. Kasahara, “A uniqueness of periodic maps on surfaces”, *J. Math. Soc. Japan*, **68**:4 (2016), 1777–1787. DOI: <http://dx.doi.org/10.2969/jmsj/06841777>
7. P. A. Smith, “Abelian actions on 2-manifolds”, *Michigan Math. J.*, **14**:3 (1967), 257–275. DOI: <https://doi.org/10.1307/mmj/1028999776>
8. K. Yokoyama, “Classification of periodic maps on compact surfaces”, *I. Tokyo J. Math.*, **6**:1 (1983), 75–94. DOI: <https://doi.org/10.3836/tjm/1270214327>

*Submitted 25.03.2021; Revised 26.04.2021; Accepted 24.05.2021*

*Information about the authors:*

**Denis A. Baranov**, student of the Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, [denbaranov0066@gmail.com](mailto:denbaranov0066@gmail.com)

**Olga V. Pochinka**, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603150, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4274-8215>, [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru).

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202102.159-170

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.925

# О точных решениях уравнений вращательного движения твердого тела при действии момента циркулярно-гироскопических сил

А. А. Косов, Э. И. Семенов

*Институт динамики систем и теории управления им В. М. Матросова  
СО РАН (ИДСТУ СО РАН) (г. Иркутск, Российская Федерация)*

**Аннотация.** Рассматривается нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая вращательное движение твердого тела под действием момента потенциальных и циркулярно-гироскопических сил. При таком моменте сил система дифференциальных уравнений имеет три классических первых интеграла: интеграл энергии, интеграл площадей и геометрический интеграл. Для аналога случая Лагранжа, при котором два момента инерции совпадают, а потенциал зависит от одного угла, найден дополнительный первый интеграл и выполнено интегрирование в квадратурах. Рассмотрен целый ряд примеров построения параметрических семейств точных решений. В этих примерах в качестве потенциала использовались полиномиальные или аналитические функции. В частности, построены семейства периодических и почти периодических движений, а также семейства асимптотически одноосных вращений. Кроме того, выявлены движения, имеющие предельные значения противоположных знаков при неограниченном возрастании и убывании времени.

**Ключевые слова:** твердое тело, уравнения движения, первые интегралы, точные решения

**Для цитирования:** Косов А. А., Семенов Э. И. О точных решениях уравнений вращательного движения твердого тела при действии момента циркулярно-гироскопических сил // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 159–170. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.159-170>

## 1. Введение

Система нелинейных дифференциальных уравнений, описывающая движение тяжелого твердого тела около неподвижной точки, была получена Л. Эйлером в середине XVIII в. и на протяжении длительного времени была вдохновляющим объектом для исследований выдающихся математиков и механиков. Были найдены классические случаи интегрируемости этой системы (случаи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской), для которых существует дополнительный четвертый по счету алгебраический первый интеграл и доказано, что если условия этих классических случаев не выполняются, то дополнительного интеграла не существует даже в классе аналитических функций (подробную историю исследований и обзор результатов можно найти в монографиях [1–5]), а также в обзорной статье [6].

Классический случай Лагранжа для уравнений движения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой выделяется условиями совпадения двух моментов инерции  $B = A$  и линейной зависимостью потенциальной функции только от одного угла  $U(\gamma) = k\gamma_3$  [1]. В этом случае, как известно, уравнения движения интегрируются и все решения выражаются через эллиптические функции времени. В данной статье мы рассматриваем аналог случая Лагранжа для более общей системы, когда моменты

инерции совпадают  $B = A$ , потенциальная функция  $U(\gamma) = U(\gamma_3)$  является произвольной непрерывно дифференцируемой функцией одного аргумента, и, кроме того, на тело действует момент циркулярно-гироскопических сил  $M = L(\gamma_3)\omega \times \gamma$ ,  $L(\gamma_3)$  — произвольная непрерывная функция, в частности, представляет интерес случай  $L = \text{const}$ .

Мотивация такого выбора объекта исследования включает как чисто математические, так и прикладные аспекты. Во-первых, присоединение указанного выше циркулярно-гироскопического момента сохраняет все три классических первых интеграла, поэтому логично выяснить аналоги классических случаев интегрируемости при действии такого дополнительного момента. Во-вторых, момент сил именно такого рода возникает при вращении ферромагнитного тела в магнитном поле [7], поэтому описание движений точными решениями может представлять в т.ч. прикладной интерес. Необходимо отметить, что вопрос о поиске аналогов классических случаев интегрируемости является нетривиальным. Например, аналога для случая Эйлера (ему соответствует потенциал  $U(\gamma) = 0$ ) при действии момента  $M = L(\gamma_3)\omega \times \gamma$  не существует. Вопросам поиска аналогов классических случаев полной или частичной интегрируемости, их развитию и обобщению уделяется внимание в современной литературе. Например, различные вопросы, касающиеся случая Гесса, его аналогов и обобщений, изучались в ряде недавних работ [8–11]. Основная цель данной статьи состоит в том, чтобы провести интегрирование системы нелинейных дифференциальных уравнений, соответствующей аналогу случая Лагранжа, и показать на примерах возможность получения точных решений, выражаемых элементарными функциями.

## 2. Случай Лагранжа с потенциальной функцией

**Уравнения вращательного движения твердого тела при действии момента циркулярно-гироскопических сил:**

$$A\dot{p} + (C - A)r\dot{q} = \frac{\gamma_2}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} + L(\gamma_3)(q\gamma_3 - r\gamma_2), \quad (2.1)$$

$$A\dot{q} + (A - C)r\dot{p} = -\frac{\gamma_1}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} + L(\gamma_3)(r\gamma_1 - p\gamma_3), \quad (2.2)$$

$$C\dot{r} = L(\gamma_3)(p\gamma_2 - q\gamma_1), \quad (2.3)$$

$$\dot{\gamma}_1 = r\gamma_2 - q\gamma_3, \quad (2.4)$$

$$\dot{\gamma}_2 = p\gamma_3 - r\gamma_1, \quad (2.5)$$

$$\dot{\gamma}_3 = q\gamma_1 - p\gamma_2. \quad (2.6)$$

Здесь  $A > 0$ ,  $C > 0$  — главные центральные моменты инерции;  $(p, q, r)$  — проекции вектора угловой скорости на оси эллипсоида инерции;  $\text{col}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$  — вектор положения тела, задаваемый проекциями единичного вектора местной вертикали на главные центральные оси эллипсоида инерции;  $U = U(\gamma_3)$  — потенциальная непрерывно дифференцируемая функция;  $L(\gamma_3)$  — произвольная непрерывная функция.

Система уравнений движения (2.1)–(2.6) имеет [1] следующие первые интегралы.

**Первые интегралы:**

$$\mathbf{J}_1 = A(p^2 + q^2) + Cr^2 + U(\gamma_3) = D_1 \equiv \text{const}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{J}_2 = A(p\gamma_1 + q\gamma_2) + Cr\gamma_3 = D_2 \equiv \text{const}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{J}_3 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{J}_1$  — интеграл энергии;  $\mathbf{J}_2$  — квадратичный интеграл площадей;  $\mathbf{J}_3$  — квадратичный геометрический интеграл. Аналогично классическому случаю Лагранжа, система уравнений движения (2.1)–(2.6) обладает дополнительным четвертым интегралом.

**Дополнительный первый интеграл:**

$$\mathbf{J}_4 = Cr + \int_0^{\gamma_3} L(s) ds = D_4 \equiv \text{const}. \quad (2.10)$$

Отметим, что при  $U(\gamma_3) = k\gamma_3$ ,  $k = \text{const}$  и  $L \equiv 0$  получим классический интегрируемый в эллиптических функциях случай Лагранжа [1]. Поскольку система (2.1)–(2.6) имеет четыре независимых первых интеграла, то в соответствии с теорией последнего множителя Якоби [1] она интегрируема в квадратурах. Выполним интегрирование, считая всюду далее  $L = \text{const}$ .

**Интегрирование системы (2.1)–(2.6).** Введем полярные координаты  $(\Omega, \varphi)$ :  $p = \Omega \cos \varphi$ ,  $q = \Omega \sin \varphi$ , где  $\Omega = \Omega(t)$ ,  $\varphi = \varphi(t)$  — новые искомые дифференцируемые функции времени. С учетом введенных формул уравнения движения (2.1)–(2.2) перепишем как

$$A\dot{\Omega} \cos \varphi - A\Omega\dot{\varphi} \sin \varphi + (C - A)r\Omega \sin \varphi = \frac{\gamma_2}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} + L(\Omega \sin \varphi \gamma_3 - r\gamma_2), \quad (2.11)$$

$$A\dot{\Omega} \sin \varphi + A\Omega\dot{\varphi} \cos \varphi + (A - C)r\Omega \cos \varphi = -\frac{\gamma_1}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} + L(r\gamma_1 - \Omega \cos \varphi \gamma_3), \quad (2.12)$$

Сложим эти два уравнения, предварительно умножив (2.11) на  $\cos \varphi$ , а (2.12) — на  $\sin \varphi$ , в итоге получим

$$A\dot{\Omega} = \left( Lr - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} \right) (\gamma_1 \sin \varphi - \gamma_2 \cos \varphi). \quad (2.13)$$

Из ОДУ (2.6) имеем  $\dot{\gamma}_3 = \Omega(\gamma_1 \sin \varphi - \gamma_2 \cos \varphi)$ . С учетом этого соотношения ОДУ (2.13) примет вид

$$A\Omega\dot{\Omega} = \left( Lr - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} \right) \dot{\gamma}_3. \quad (2.14)$$

Из формулы (2.10) для первого интеграла  $\mathbf{J}_4$  легко выразить  $r$  через  $\gamma_3$ :

$$r = \frac{1}{C} (D_4 - L\gamma_3). \quad (2.15)$$

С учетом формулы (2.15) уравнение (2.14) запишем как

$$A\Omega\dot{\Omega} = \left( \frac{L}{C} (D_4 - L\gamma_3) - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} \right) \dot{\gamma}_3. \quad (2.16)$$

Интегрируя это выражение, окончательно получим формулу, выражающую функцию  $\Omega(t)$  через  $\gamma_3(t)$ :

$$A\Omega^2 = -\frac{L^2}{C} \gamma_3^2 + \frac{2LD_4}{C} \gamma_3 - U(\gamma_3) + K_1, \quad (2.17)$$

где  $K_1$  — константа интегрирования. Заметим, что соотношение (2.17) можно получить другим способом. Действительно, из формулы (2.7) для первого интеграла  $\mathbf{J}_1$  имеем

$$A\Omega^2 = -Cr^2 - U(\gamma_3) + D_1$$

или, с учетом формулы (2.15),

$$A\Omega^2 = -\frac{L^2}{C} \gamma_3^2 + \frac{2LD_4}{C} \gamma_3 - U(\gamma_3) + D_1 - \frac{D_4^2}{C}. \quad (2.18)$$

Сравнив соотношения (2.17) и (2.18), получим формулу для постоянной интегрирования  $K_1$ :

$$K_1 = D_1 - \frac{D_4^2}{C}. \quad (2.19)$$

Теперь вычтем из (2.12) уравнение (2.11), предварительно умножив (2.11) на  $\sin \varphi$ , а (2.12) на  $\cos \varphi$ , в итоге запишем:

$$A\Omega\dot{\varphi} + (A - C)r\Omega = \left( Lr - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} \right) (\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi) - L\Omega\gamma_3$$

или, с учетом формулы (2.15),

$$A\dot{\varphi} = \frac{1}{\Omega} \left( \frac{L}{C} (D_4 - L\gamma_3) - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} \right) (\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi) - \frac{A - C}{C} (D_4 - L\gamma_3) - L\gamma_3. \quad (2.20)$$

Из формулы (2.8) для первого интеграла  $\mathbf{J}_2$  найдем

$$\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi = \frac{1}{A\Omega} (D_2 - Cr\gamma_3)$$

или, с учетом формулы (2.15),

$$\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi = \frac{1}{A\Omega} \left( D_2 - (D_4 - L\gamma_3) \gamma_3 \right). \quad (2.21)$$

С учетом формулы (2.21) ОДУ (2.20) запишем как

$$A\dot{\varphi} = \frac{1}{A\Omega^2} \left( \frac{L}{C} (D_4 - L\gamma_3) - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} \right) \left( D_2 - (D_4 - L\gamma_3) \gamma_3 \right) - \frac{A - C}{C} (D_4 - L\gamma_3) - L\gamma_3.$$

В этом соотношении выражение  $A\Omega^2$  заменим равенством (2.18) и тогда окончательно получим соотношение для определения функции  $\varphi(t)$ :

$$A\dot{\varphi} = \frac{\left( \frac{L}{C} (D_4 - L\gamma_3) - \frac{1}{2} \frac{dU}{d\gamma_3} \right) \left( D_2 - (D_4 - L\gamma_3) \gamma_3 \right)}{-\frac{L^2}{C} \gamma_3^2 + \frac{2LD_4}{C} \gamma_3 - U(\gamma_3) + D_1 - \frac{D_4^2}{C}} \quad (2.22)$$

$$-\frac{A-C}{C}(D_4 - L\gamma_3) - L\gamma_3.$$

Здесь функция  $U(\gamma_3)$  считается заданной, при этом будем предполагать, что

$$U(\gamma_3) \neq -\frac{L^2}{C}\gamma_3^2 + \frac{2LD_4}{C}\gamma_3 - U(\gamma_3) + D_1 - \frac{D_4^2}{C}, \quad (2.23)$$

чтобы избежать деления на ноль в первом слагаемом правой части ОДУ (2.22). Для заданного потенциала  $U(\gamma_3)$  и известной  $\gamma_3(t)$  функция  $\varphi(t)$  находится из соотношения (2.22) однократным интегрированием.

Для выражения функций  $\gamma_1(t)$ ,  $\gamma_2(t)$  через функцию  $\gamma_3(t)$ , из соотношений (2.6), (2.21), получим следующую невырожденную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\gamma_1 \sin \varphi - \gamma_2 \cos \varphi = \frac{1}{\Omega} \dot{\gamma}_3,$$

$$\gamma_1 \cos \varphi + \gamma_2 \sin \varphi = \frac{1}{A\Omega} \left( D_2 - (D_4 - L\gamma_3) \gamma_3 \right).$$

Из этой линейной системы найдем:

$$\gamma_1(t) = \frac{1}{\Omega} \dot{\gamma}_3 \sin \varphi + \frac{1}{A\Omega} \left( D_2 - (D_4 - L\gamma_3) \gamma_3 \right) \cos \varphi, \quad (2.24)$$

$$\gamma_2(t) = -\frac{1}{\Omega} \dot{\gamma}_3 \cos \varphi + \frac{1}{A\Omega} \left( D_2 - (D_4 - L\gamma_3) \gamma_3 \right) \sin \varphi. \quad (2.25)$$

Осталось получить искомое ОДУ для функции  $\gamma_3(t)$ . Для этого возведем в квадрат уравнение (2.6):

$$\dot{\gamma}_3^2 = \Omega^2 (\gamma_1^2 \sin^2 \varphi + \gamma_2^2 \cos^2 \varphi - 2\gamma_1\gamma_2 \sin \varphi \cos \varphi). \quad (2.26)$$

Также возведем в квадрат выражение (2.21) и с учетом формулы (2.15) получим

$$\gamma_1^2 \cos^2 \varphi + \gamma_2^2 \sin^2 \varphi + 2\gamma_1\gamma_2 \sin \varphi \cos \varphi = \frac{\left( D_2 - (D_4 - L\gamma_3) \gamma_3 \right)^2}{A^2\Omega^2}.$$

Выразим из этого соотношения слагаемое, содержащее смешанное произведение  $\gamma_1\gamma_2$ , и подставим его в формулу (2.26), которая примет вид

$$\dot{\gamma}_3^2 = \Omega^2 \left[ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 - \frac{1}{A^2\Omega^2} \left( D_2 - (D_4 - L\gamma_3) \gamma_3 \right)^2 \right].$$

В свою очередь из формулы (2.9) для первого интеграла  $\mathbf{J}_3$  имеем  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 = 1 - \gamma_3^2$ . Тогда последнее равенство запишем как

$$\dot{\gamma}_3^2 = \Omega^2 (1 - \gamma_3^2) - \frac{1}{A^2} \left( D_2 - (D_4 - L\gamma_3) \gamma_3 \right)^2. \quad (2.27)$$

Наконец, с учетом формулы (2.18) для  $\Omega^2$  получим окончательный вид искомого ОДУ для определения функции  $\gamma_3(t)$ :

$$A^2 \dot{\gamma}_3^2 = A \left[ -\frac{L^2}{C} \gamma_3^2 + \frac{2LD_4}{C} \gamma_3 - U(\gamma_3) + D_1 - \frac{D_4^2}{C} \right] (1 - \gamma_3^2) - \left( D_2 - (D_4 - L\gamma_3) \gamma_3 \right)^2. \quad (2.28)$$

Таким образом, задача интегрирования системы ОДУ (2.1)–(2.6) с использованием первых интегралов (2.7)–(2.10) свелась следующей квадратуре:

$$\int \frac{d\gamma_3}{\sqrt{R(\gamma_3)}} = \frac{t}{A} - t_0, \quad (2.29)$$

где  $t_0$  — постоянная интегрирования, а функция  $R(\gamma_3)$  имеет вид

$$R(\gamma_3) = P(\gamma_3) - AU(\gamma_3)(1 - \gamma_3^2). \quad (2.30)$$

здесь  $P(\gamma_3)$  — полином четвертой степени следующего вида:

$$\begin{aligned} P(\gamma_3) = & \left(\frac{A}{C} - 1\right)L^2\gamma_3^4 + 2\frac{(C-A)LD_4}{C}\gamma_3^3 - \\ & - \left(\frac{A}{C}(L^2 - D_4^2) + AD_1 + D_4^2 + 2D_2L\right)\gamma_3^2 + \\ & \frac{2D_4}{C}(CD_2 + AL)\gamma_3 + AD_1 - D_2^2 - \frac{AD_4^2}{C}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Заметим, что если функция  $U(\gamma_3)$  представима в виде

$$U(\gamma_3) = a_2\gamma_3^2 + a_1\gamma_3 + a_0 + \frac{b_4\gamma_3^4 + b_3\gamma_3^3 + b_2\gamma_3^2 + b_1\gamma_3 + b_0}{1 - \gamma_3^2},$$

где  $a_i, b_j$  — произвольные постоянные ( $i = \overline{0, 2}, j = \overline{0, 4}$ ), то  $R(\gamma_3)$  будет многочленом не выше четвертой степени от  $\gamma_3$ . Тогда интеграл в правой части равенства (2.29), в общем случае вычисляется в эллиптических функциях.

Если все постоянные, кроме  $D_4$ , отличны от нуля и удовлетворяют соотношениям

$$A = C, \quad D_2 = -L, \quad D_1 = \frac{L^2}{C}, \quad D_4 = 0,$$

то многочлен  $P(\gamma_3)$  тождественно обращается в ноль. В этом случае квадратура (2.29) заменой  $\gamma_3 = \operatorname{ch} \theta$  приводится к виду

$$\int \frac{d\theta}{\sqrt{U(\operatorname{ch} \theta)}} = \pm(t - t_0).$$

### 3. Примеры

#### Пример 3.1 *Случай семейства асимптотически одноосных вращений*

Пусть в системе (2.1)–(2.6) параметры  $A = B = C = 1, L = 2$ , а константы первых интегралов (2.7)–(2.10) имеют значения  $D_1 = 5, D_2 = -2, D_4 = 0$ . Тогда система уравнений (2.1)–(2.6) с потенциальной функцией  $U(\gamma_3) = \gamma_3^2$  имеет следующее параметрическое семейство решений:

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\sqrt{5} \cos(c_2)}{\operatorname{ch}(t + c_1)}, \quad q(t) = \frac{\sqrt{5} \sin(c_2)}{\operatorname{ch}(t + c_1)}, \quad r(t) = 2 \operatorname{th}(t + c_1), \\ \gamma_1(t) &= -\frac{\sqrt{5} (2 \cos(c_2) + \sin(c_2))}{5 \operatorname{ch}(t + c_1)}, \quad \gamma_2(t) = -\frac{\sqrt{5} (2 \sin(c_2) - \cos(c_2))}{5 \operatorname{ch}(t + c_1)}, \end{aligned}$$

$$\gamma_3(t) = -\operatorname{th}(t + c_1),$$

где  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные. Вычисляя для построенного параметрического семейства решений пределы при  $t \rightarrow \pm\infty$ , получим равенства

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = p(+\infty) = 0, & \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) = p(-\infty) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = q(+\infty) = 0, & \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = q(-\infty) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = r(+\infty) = 2, & \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = r(-\infty) = -2, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_1(t) = \gamma_1(+\infty) = 0, & \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_1(t) = \gamma_1(-\infty) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_2(t) = \gamma_2(+\infty) = 0, & \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_2(t) = \gamma_2(-\infty) = 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_3(t) = \gamma_3(+\infty) = -1, & \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_3(t) = \gamma_3(-\infty) = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, любое движение построенного параметрического семейства асимптотически стремится к вращению вокруг одной из главных осей инерции с постоянной угловой скоростью как в далеком прошлом (при  $t \approx -\infty$ ), так и в далеком будущем (при  $t \approx +\infty$ ).

**Пример 3.2** *Случай аналитической потенциальной функции*

Рассмотрим теперь случай, когда потенциальная функция является не полиномом, а аналитической функцией вида

$$U(\gamma_3) = -\frac{4\gamma_3^3}{1 + \gamma_3} = -4 \sum_{k=3}^{\infty} (-1)^{k+1} \gamma_3^k,$$

Пусть параметры системы (2.1)–(2.6) и значения констант первых интегралов имеют вид  $A = B = C = 1$ ,  $L = 2$ ,  $D_1 = 4$ ,  $D_2 = -2$ ,  $D_4 = 0$ . Тогда получим следующее параметрическое семейство решений системы уравнений (2.1)–(2.6):

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{2\sqrt{\tau^4 + 3\tau^2 + 1} \cos \varphi(\tau)}{\sqrt{\tau^4 + 3\tau^2 + 2}}, & q(t) &= \frac{2\sqrt{\tau^4 + 3\tau^2 + 1} \sin \varphi(\tau)}{\sqrt{\tau^4 + 3\tau^2 + 2}}, \\ r(t) &= -\frac{2}{1 + \tau^2}, & \gamma_1(t) &= -\frac{\tau\sqrt{2 + \tau^2} \left[ \sin \varphi(\tau) + \tau(2 + \tau^2) \cos \varphi(\tau) \right]}{(1 + \tau^2)^{3/2} \sqrt{\tau^4 + 3\tau^2 + 1}}, \\ \gamma_2(t) &= \frac{\tau\sqrt{2 + \tau^2} \left[ \cos \varphi(\tau) - \tau(2 + \tau^2) \sin \varphi(\tau) \right]}{(1 + \tau^2)^{3/2} \sqrt{\tau^4 + 3\tau^2 + 1}}, & \gamma_3(t) &= \frac{1}{1 + \tau^2}, \\ \varphi(\tau) &= c_2 - \operatorname{arctg}(\tau) + \operatorname{arctg} \left( \frac{2\tau}{\sqrt{5} + 1} \right) - \operatorname{arctg} \left( \frac{2\tau}{\sqrt{5} - 1} \right), \end{aligned}$$

где  $\tau = t + c_1$ ,  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные. Вычисляя для построенных решений пределы при  $t \rightarrow \pm\infty$ , получим равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} p(t) = p(+\infty) = 2 \sin c_2, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} p(t) = p(-\infty) = -2 \sin c_2,$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = q(+\infty) &= -2 \cos c_2, & \lim_{t \rightarrow -\infty} q(t) = q(-\infty) &= 2 \cos c_2, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} r(t) = r(+\infty) &= 0, & \lim_{t \rightarrow -\infty} r(t) = r(-\infty) &= 0, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_1(t) = \gamma_1(+\infty) &= -\sin c_2, & \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_1(t) = \gamma_1(-\infty) &= \sin c_2, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_2(t) = \gamma_2(+\infty) &= \cos c_2, & \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_2(t) = \gamma_2(-\infty) &= -\cos c_2, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \gamma_3(t) = \gamma_3(+\infty) &= 0, & \lim_{t \rightarrow -\infty} \gamma_3(t) = \gamma_3(-\infty) &= 0. \end{aligned}$$

◇ Отметим, что все предельные значения в примерах 3.1-3.2 являются точными стационарными решениями, неустойчивыми по Ляпунову.

**Пример 3.3** *Случай семейства  $2\pi$  – периодических решений*

Пусть  $A = 1$ ,  $C = \frac{1}{2}$ ,  $L = -1$  и потенциальная функция задается формулой  $U(\gamma_3) = -m\gamma_3^2$ ;  $0 < m \leq 1$  – произвольная постоянная. Для значений первых интегралов  $J_1 = 2$ ,  $J_2 = 1$ ,  $J_4 = 0$  из квадратуры (2.30) найдем

$$\gamma_3(t) = \pm \operatorname{sn}(t + c_1, k), \quad (3.1)$$

где  $\operatorname{sn}(\cdot, k)$  – эллиптический синус Якоби с модулем  $k = \sqrt{1 - m}$ . Используя функцию (3.1) с произвольной постоянной  $m \in (0, 1]$  по формулам из раздела 2 найдем оставшиеся искомые функции, которые не будем приводить в статье в силу их громоздкости. Однако если постоянный множитель  $m$  в функции  $U(\gamma_3)$  выбрать равным единице, то эллиптический синус Якоби с модулем  $k = 0$  в формуле (3.1) вырождается в тригонометрический синус. В этом частном случае получим параметрическое семейство  $2\pi$  – периодических решений системы (2.1)–(2.6) вида

$$\begin{aligned} p(t) &= \sqrt{1 + \cos^2 \tau} \cos \varphi(\tau), & q(t) &= \sqrt{1 + \cos^2 \tau} \sin \varphi(\tau), \\ r(t) &= \pm 2 \sin(\tau), & \gamma_1(t) &= \frac{\cos \tau \left( \cos \tau \cos \varphi(\tau) \pm \sin \varphi(\tau) \right)}{\sqrt{1 + \cos^2 \tau}}, \\ \gamma_2(t) &= \frac{\cos \tau \left( \cos \tau \sin \varphi(\tau) \mp \cos \varphi(\tau) \right)}{\sqrt{1 + \cos^2 \tau}}, & \gamma_3(t) &= \pm \sin(\tau), \end{aligned}$$

где функция  $\varphi(t)$  задается следующим образом:

$$\varphi(\tau) = c_2 \pm (\cos \tau - \operatorname{arctg}(\cos \tau)),$$

$\tau = t + c_1$ ,  $c_1, c_2$  – произвольные постоянные.

**Пример 3.4** *Случай семейства почти периодических решений*

Рассмотрим случай следующих значений параметров  $A = 1$ ,  $C = \frac{3}{2}$ ,  $L = 1$  и потенциальной функции задается формулой  $U(\gamma_3) = -\frac{2}{3}\gamma_3 + \frac{1}{3}\gamma_3^2$ . Используя формулы

раздела 2, для значений первых интегралов  $J_1 = 2$ ,  $J_2 = -1$ ,  $J_4 = 1$  получим параметрическое семейство почти периодических решений

$$p(t) = \Omega(t) \cos \varphi(t), \quad q(t) = \Omega(t) \sin \varphi(t), \quad r(t) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} \sin \tau,$$

$$\gamma_1(t) = -\frac{1}{\Omega(t)} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau \sin \varphi(t) + \left( 1 + \frac{1}{2} \sin \tau - \frac{1}{4} \sin^2 \tau \right) \cos \varphi(t) \right),$$

$$\gamma_2(t) = \frac{1}{\Omega(t)} \left( \cos \tau \cos \varphi(t) - \left( 1 + \frac{1}{2} \sin \tau - \frac{1}{4} \sin^2 \tau \right) \sin \varphi(t) \right),$$

$$\gamma_3(t) = \frac{1}{2} \sin \tau,$$

где функции  $\Omega(t)$  и  $\varphi(t)$  задаются следующим образом:

$$\Omega(t) = \frac{1}{6} \sqrt{39 + 9 \cos^2 \tau - 36 \sin \tau}, \quad \varphi(t) = c_2 + \frac{t}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos^2 \frac{\tau}{2} -$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} \cos \tau - \operatorname{arctg} \frac{(\sqrt{21} - 3) \cos \frac{\tau}{2} - 8 \sin \frac{\tau}{2}}{(3\sqrt{3} + \sqrt{7}) \cos \frac{\tau}{2}} + \operatorname{arctg} \frac{(\sqrt{21} + 3) \cos \frac{\tau}{2} + 8 \sin \frac{\tau}{2}}{(3\sqrt{3} - \sqrt{7}) \cos \frac{\tau}{2}}.$$

Здесь  $\tau = \frac{2\sqrt{3}}{3} (c_1 - t)$ ,  $c_1, c_2$  — произвольные постоянные.

#### 4. Заключение

В статье исследовалась нелинейная система дифференциальных уравнений, описывающая вращательное движение твердого тела вокруг неподвижной точки под действием момента потенциальных и циркулярно-гироскопических сил. Для аналога случая Лагранжа выполнено интегрирование и построены семейства параметрических точных решений для ряда примеров. Эти точные решения представляют движения, обладающие рядом интересных свойств, в частности периодичностью и почти периодичностью. Найдены также двойко асимптотические движения. В качестве одного из возможных направлений дальнейших исследований полученных в статье точных решений представляет интерес анализ их устойчивости вторым методом Ляпунова с помощью успешно применявшегося в подобных случаях подхода [11].

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 19-08-00746).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Голубев В.В. Лекции по интегрированию уравнений движения твердого тела около неподвижной точки. М.: Гостехиздат, 1953. 287 с.
2. Зубов В.И. Аналитическая динамика системы тел. Л.: Изд-во ЛГУ, 1983. 344 с.
3. Козлов В.В. Методы качественного анализа в динамике твердого тела. Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 256 с.

4. Борисов А.В., Мамаев И.С. Динамика твердого тела. Ижевск. НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. 384 с.
5. Гашененко И.Н., Горр Г.В., Ковалев А.М. Классические задачи динамики твердого тела. Киев. Наукова думка, 2012. 401 с.
6. Nikolov S., Nedkova N. Dynamical Behavior of a Rigid Body with One Fixed Point (Gyroscope). Basic Concepts and Results. Open Problems: a Review. Journal of Applied and Computational Mechanics. 2015. Vol. 1, No. 4. Pp. 187–206. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2015.11949>
7. Козлов В.В. К задаче о вращении твердого тела в магнитном поле. Изв. АН СССР. МТТ. 1985. № 6. С. 28–33.
8. Борисов А.В., Мамаев И.С. Случай Гесса в динамике твердого тела. Прикладная математика и механика. 2003. Т. 67, Вып. 2. С. 256–265.
9. Беляев А.В. Об общем решении задачи о движении тяжелого твердого тела в случае Гесса. Матем. сб. 2015 Т. 206, №. 5. С. 5–34. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8335>
10. Бизяев И.А., Борисов А.В., Мамаев И.С. Система Гесса–Аппельерота и ее неголономные аналоги. Тр. МИАН. 2016. Т. 294, № 1. С. 268–292. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0371968516030171>
11. Новиков М.А. О стационарных движениях твердого тела при существовании частного интеграла Гесса. Изв. РАН. МТТ. 2018. № 3. С. 28–37. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0572329918030042>

*Поступила 18.02.2021; доработана после рецензирования 19.03.2021;  
принята к публикации 1.05.2021*

*Информация об авторах:*

**Косов Александр Аркадьевич**, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1352-1828>, [kosov\\_idstu@mail.ru](mailto:kosov_idstu@mail.ru)

**Семенов Эдуард Иванович**, старший научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9768-9945>, [edwseiz@gmail.com](mailto:edwseiz@gmail.com)

*Авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 34A34, 34A05, 34C25, 34C27

# On exact solutions of equations of rotational motion of a rigid body under action of torque of circular-gyroscopic forces

A. A. Kosov, E. I. Semenov

*Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (Irkutsk, Russian Federation)*

**Abstract.** A nonlinear system of differential equations describing the rotational motion of a rigid body under the action of torque of potential and circular-gyroscopic forces is considered. For this torque, the system of differential equations has three classical first integrals: the energy integral, the area integral, and the geometric integral. For the analogue of the Lagrange case, when two moments of inertia coincide and the potential depends on one angle, an additional first integral is found and integration in quadratures is performed. A number of examples is considered where parametric families of exact solutions are considered. In these examples, polynomial or analytical functions were used as a potential. In particular, we construct families of periodic and almost periodic motions, as well as families of asymptotically uniaxial rotations. We also identified movements that have limit values of opposite signs for unlimited increase and decrease of time.

**Key Words:** rigid body, equations of motion, first integrals, exact solutions

**For citation:** A. A. Kosov, E. I. Semenov. On exact solutions of equations of rotational motion of a rigid body under action of torque of circular-gyroscopic forces. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:2(2021), 159–170. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.159-170>

## REFERENCES

1. V. V. Golubev, “Israeli Program for Scientific Translations”, 1960.
2. V. I. Zubov, *Analytical dynamics of the system of bodies*, LSU Publ., Leningrad, 1983 (In Russ.), 344 p.
3. V. V. Kozlov, [*Qualitative analysis methods in the dynamics of a rigid body*], NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika» Publ., Izhevsk, 2000 (In Russ.), 256 p.
4. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, [*Solid dynamics*], NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika» Publ., Izhevsk, 2001 (In Russ.), 384 p.
5. I. N. Gashenenko, G. V. Gorr, A. M. Kovalev, *Classical problems in the dynamics of rigid body*, Naukova dumka Publ., Kiev, 2012 (In Russ.), 401 p.
6. S. Nikolov, N. Nedkova, “Dynamical behavior of a rigid body with one fixed point (Gyroscope). Basic concepts and results. Open problems: a review”, *Journal of Applied and Computational Mechanics*, 4:1 (2015), 187–206. DOI: <https://doi.org/10.22055/jacm.2015.11949>
7. V. V. Kozlov, “[To the problem of the rotation of a solid in a magnetic field]”, *Izv. AN SSSR. MTT*, 1985, no. 6, 28–33 (In Russ.).

8. A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “[Hess case in rigid body dynamics]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **67**:2 (2003), 256–265 (In Russ.).
9. A. V. Belyaev, “On the general solution of the problem of the motion of a heavy rigid body in the Hess case”, *Sbornik: Mathematics.*, **206**:5 (2015), 621–649. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm8335>
10. I. A. Bizyaev, A. V. Borisov, I. S. Mamaev, “The Hess-Appelrot system and its nonholonomic analogues”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **294**:1 (2016), 252–275. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0371968516030171>
11. M. A. Novikov, “[On stationary motions of a rigid body with the existence of a private Hess integral]”, *Izv. RAN. MTT*, 2018, no. 3, 28–37 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.7868/S0572329918030042>

*Submitted 18.02.2021; Revised 19.03.2021; Accepted 1.05.2021*

*Information about the authors:*

**Alexander Kosov**, Leading Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1352-1828>, [kosov\\_idstu@mail.ru](mailto:kosov_idstu@mail.ru)

**Eduard Semenov**, Senior Researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134 Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9768-9945>, [edwseiz@gmail.com](mailto:edwseiz@gmail.com),

*The authors have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202102.171–184

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.938.5

# Реализация гомотопических классов гомеоморфизмов тора простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами

А. И. Морозов

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

**Аннотация.** Согласно классификации Терстона, множество гомотопических классов, сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов ориентируемых поверхностей разбивается на четыре непересекающихся подмножества. Гомотопический класс из каждого подмножества характеризуется существованием в нем гомеоморфизма, называемого канонической формой Терстона, а именно: периодического гомеоморфизма, приводимого непериодического гомеоморфизма алгебраически конечного порядка, приводимого гомеоморфизма не являющегося гомеоморфизмом алгебраически конечного порядка, псевдоаносовского гомеоморфизма. Канонические формы Терстона не являются структурно устойчивыми диффеоморфизмами. Поэтому естественным образом встает задача построения простейших (в определенном смысле) структурно устойчивых диффеоморфизмов в каждом гомотопическом классе. В настоящей работе поставленная задача решена для гомеоморфизмов тора. В каждом гомотопическом классе аналитически построены структурно устойчивые представители, а именно градиентно-подобный диффеоморфизм, диффеоморфизм Морса-Смейла с ориентируемой гетерокликой и диффеоморфизм Аносова, являющийся частным случаем псевдоаносовского диффеоморфизма.

**Ключевые слова:** теория Нильсена-Терстона, гомотопический класс отображения, реализация диффеоморфизмов, алгебраические отображения

**Для цитирования:** Морозов А. И. Реализация гомотопических классов гомеоморфизмов тора простейшими структурно устойчивыми диффеоморфизмами // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 171–184. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.171–184>

## 1. Гомотопическая теория гомеоморфизмов поверхностей

### 1.1. Группа классов отображений

Пусть  $X$  — топологическое пространство. Два непрерывных отображения  $\varphi_0, \varphi_1 : X \rightarrow X$  называются *гомотопными* (пишут  $\varphi_0 \sim \varphi_1$ ), если существует непрерывное отображение  $F : X \times [0, 1] \rightarrow X$  такое, что  $F(x, 0) = \varphi_0(x)$  и  $F(x, 1) = \varphi_1(x)$ . Отображение  $F$  называется *гомотопией* между  $\varphi_0$  и  $\varphi_1$ . Для каждого фиксированного  $t \in [0, 1]$  мы полагаем  $F(x, t) = F_t(x)$ . Обозначим через  $[\varphi]$  *гомотопический класс* отображения  $\varphi$ , т. е.  $\varphi' \in [\varphi] \iff \varphi' \sim \varphi$ .

Множество гомотопических классов гомеоморфизмов пространства  $X$  образует группу  $\Gamma(X)$  с групповой операцией  $[\varphi_1] \circ [\varphi_2] = [\varphi_1 \circ \varphi_2]$ , которая называется *группой классов преобразований*. Таким образом,

$$\Gamma(X) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Homeo}(X) / \simeq,$$

где  $\text{Homeo}(X)$  — множество гомеоморфизмов из  $X$  в  $X$ , а отношение  $\simeq$  является отношением гомотопии отображений.



Гомотопия  $F_t : X \rightarrow X, t \in [0, 1]$  называется *изотопией*, если при любом  $t$  отображение  $F_t$  является гомеоморфизмом  $X$ .

## 1.2. Классификация Нильсена-Терстона

Согласно классификации Нильсена-Терстона, существует четыре типа гомотопических классов гомеоморфизмов поверхностей, которые определяются содержанием в классе гомеоморфизма одного из следующих типов:

- $T_1$ ) периодический гомеоморфизм;
- $T_2$ ) приводимый непериодический гомеоморфизм алгебраически конечного типа;
- $T_3$ ) приводимый гомеоморфизм, не являющийся гомеоморфизмом алгебраически конечного типа;
- $T_4$ ) псевдоаносовский гомеоморфизм.

Пусть  $S_{g,k}, g \geq 0, k \geq 0$  – связная компактная ориентируемая поверхность рода  $g$  с краем, состоящим из  $k$  компонент связности. Положим  $S_{g,0} = S_g$ . Везде далее отображения поверхностей предполагаются сохраняющими ориентацию.

Гомеоморфизм  $h : S_{g,k} \rightarrow S_{g,k}$  называется *периодическим гомеоморфизмом*, если существует  $m \in \mathbb{N}$ , такое, что  $h^m = id$ , где  $id$  – тождественное преобразование. Наименьшее из таких чисел  $m$  называется *периодом* периодического гомеоморфизма.

Гомеоморфизм  $h : S_g \rightarrow S_g, g \geq 1$  называется *приводимым* системой  $C$  непересекающихся между собой простых замкнутых кривых  $C_i, i = 1, \dots, l$ , негомотопных нулю и попарно не гомотопных друг другу, если система кривых  $C$  инвариантна относительно  $h$ . Если  $h : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  является приводимым, то система  $C$  состоит из одного элемента.

Приводимый непериодический гомеоморфизм  $h : S_g \rightarrow S_g, g \geq 1$  называется *гомеоморфизмом алгебраически конечного порядка*, если существует  $h$ -инвариантная окрестность  $\mathcal{C}$  кривых множества  $C$ , состоящая из объединения двумерных колец и такая, что для каждой компоненты связности  $S_{g_j, k_j}, j = 1, \dots, n$  множества  $S_g \setminus int \mathcal{C}$  существует число  $m_j \in \mathbb{N}$  такое, что  $h^{m_j}|_{S_{g_j, k_j}} : S_{g_j, k_j} \rightarrow S_{g_j, k_j}$  – периодический гомеоморфизм.

Гомеоморфизм  $h : S_g \rightarrow S_g$  называется *псевдоаносовским*, если на поверхности  $S_g$  существует пара  $h$ -инвариантных трансверсальных слоений  $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$  с множеством особенностей  $\mathcal{S}$  и трансверсальными мерами  $\psi^s, \psi^u$  такая, что:

- 1) каждая особенность из  $\mathcal{S}$  имеет отрицательный индекс;
- 2) существует число  $\lambda > 1$  такое, что  $\psi^s(h(\alpha)) = \lambda\psi^s(\alpha)(\psi^u(h(\alpha)) = \lambda^{-1}\psi^u(\alpha))$  для любой дуги  $\alpha$ , трансверсальной  $\mathcal{F}^s(\mathcal{F}^u)$ .

Хорошо известно описание представителя каждого класса каноническими формами Терстона. Однако они не являются структурно устойчивыми. Поэтому представляет интерес указание наиболее простых структурно устойчивых представителей в этих классах. Так, в каждом гомотопическом классе первого типа А. Н. Безденежных и В. З. Гринес построили градиентно-подобный диффеоморфизм и получили полную топологическую классификацию градиентно-подобных диффеоморфизмов, принадлежащих типу  $T_1$  (см. [1] и [2]). В работе [3] анонсировано существование в каждом гомотопическом классе из  $T_4$  структурно устойчивого диффеоморфизма, неблуждающее множество которого состоит из конечного числа источников орбит и единственного одномерного аттрактора. Более того, в недавней работе [4] найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности двух таких диффеоморфизмов.

### 1.3. Группы классов отображений тора

Любой гомеоморфизм  $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  индуцирует изоморфизм фундаментальной группы  $\varphi_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2)$ , которая изоморфна группе  $\mathbb{Z}^2$ . Тогда индуцированный изоморфизм  $\varphi_*$  однозначно определяется своим действием на образующих, которое задается матрицей

$$A_\varphi = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

из множества  $GL(2, \mathbb{Z})$  унимодулярных матриц – целочисленных матриц с определителем  $\pm 1$ . Напомним, что алгебраическим автоморфизмом  $\hat{A} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , определенным матрицей  $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ , называется диффеоморфизм, заданный формулой

$$\hat{A}(x, y) = (\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y).$$

**Предложение 1.1** ([5][Theorem 8.1], впервые доказано в [6–7]) Гомеоморфизмы  $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  гомотопны тогда и только тогда, когда  $A_{\varphi_1} = A_{\varphi_2}$ .

### 1.4. Классификация унимодулярных матриц

Матрица  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$  называется гиперболической, если она не имеет собственных значений, по модулю равных единице.

Матрица  $A \in GL(2, \mathbb{Z})$  называется периодической, если существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $A^n = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

Из леммы 3 работы С. Баттерсона [8] следует, что любая матрица из  $GL(2, \mathbb{Z})$  с собственными значениями, по модулю равными единице, подобна (при помощи матрицы из  $GL(2, \mathbb{Z})$ ) одной из следующих матриц:

$$B_{1,m} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_{2,m} = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad m \in \{0, 1, \dots\},$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом матрицы  $B_{1,0}, B_{2,0}, B_3$ – $B_7$  являются периодическими, а матрицы  $B_{1,m}, B_{2,m}, m \neq 0$  периодическими не являются и называются матрицами вращений. Матрицы  $B_6, B_7$  реализуются меняющими ориентацию диффеоморфизмами поверхности, поэтому далее мы не будем их рассматривать.

## 2. Структурно устойчивые диффеоморфизмы поверхностей

Система  $f \in Diff^r(X), r \geq 0$ , где  $Diff^r(X)$  – множество диффеоморфизмов, заданных на пространстве  $X$ , называется  $E$ -устойчивой, если существует окрестность  $U(f)$  элемента  $f \in Diff^r(X)$  такая, что если  $f' \in U(f)$ , то  $f'$  и  $f$  принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности  $E$ .

Понятие устойчивости диффеоморфизмов, ассоциированное с топологической сопряженностью, называется грубостью (по Андронову-Понтрягину) или структурной устойчивостью (по Пейшото).

Структурно устойчивые диффеоморфизмы с конечным неблуждающим множеством называются *диффеоморфизмами Морса-Смейла*. Среди них выделяют *градиентно-подобные диффеоморфизмы* как не имеющие гетероклинических точек. *Гетероклинической точкой* называется точка пересечения  $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$  инвариантных многообразий различных седловых точек  $\sigma_i, \sigma_j$ .

Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла  $f$ , заданных на ориентируемой поверхности  $M^2$ , введем понятие ориентируемой гетероклиники следующим образом.

Пусть  $\sigma_i, \sigma_j$  — седловые точки диффеоморфизма  $f$  такие, что  $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u \neq \emptyset$ . Для любой гетероклинической точки  $x \in W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$  определим упорядоченную пару векторов  $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$ , где:

- $\vec{v}_x^u$  — касательный вектор к неустойчивому многообразию точки  $\sigma_j$  в точке  $x$ ;
- $\vec{v}_x^s$  — касательный вектор к устойчивому многообразию точки  $\sigma_i$  в точке  $x$ .

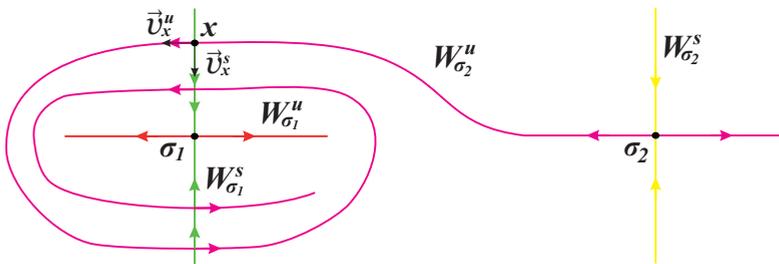


Рис. 2.1. Ориентируемое гетероклиническое пересечение  
 Fig 2.1. Orientable heteroclinic intersection

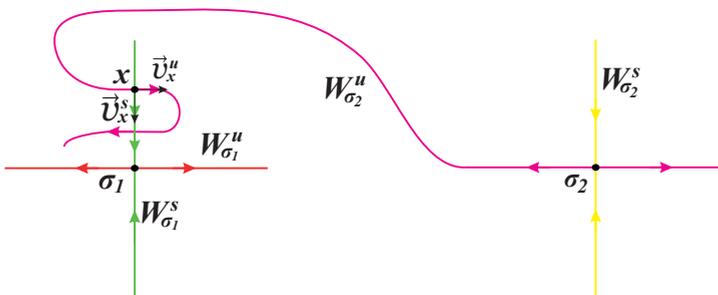


Рис. 2.2. Неориентируемое гетероклиническое пересечение  
 Fig 2.2. Non-orientable heteroclinic intersection

Гетероклиническое пересечение диффеоморфизма  $f$  называется *ориентируемым* (Рис. 2.1), если упорядоченные пары векторов  $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$  задают одинаковую ориентацию несущей поверхности  $M^2$ . В противном случае гетероклиническое пересечение называется *неориентируемым* (Рис. 2.2).

Примером структурно устойчивого диффеоморфизма с бесконечным множеством периодических точек является аносковский диффеоморфизм. Напомним, что диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  называется *диффеоморфизмом Аносова*, если существует непрерывное разложение касательного расслоения  $T(M) = E^s \oplus E^u$  (подрасслоения  $E^s$  и  $E^u$  называют устойчивой и неустойчивой компонентами соответственно), инвариантное относительно  $f$ , и существуют константы  $c, c'$ , а также число  $\lambda \in (0, 1)$  такие, что для любого  $n > 0$

$$\| (df)^n(v) \| \leq c\lambda^n \| v \| \text{ для любого } v \in E^s,$$

$$\| (df)^n(v) \| \geq c'\lambda^{-n} \| v \| \text{ для любого } v \in E^u.$$

Простейшим аносовским диффеоморфизмом является алгебраический автоморфизм двумерного тора, заданный гиперболической матрицей.

### 3. Реализация классов гомеоморфизмов тора структурно устойчивыми диффеоморфизмами

#### 3.1. Схема реализации

**Гиперболические матрицы.** В силу результата Дж. Френкса [9], любой гомеоморфизм, индуцирующий гиперболическое действие в фундаментальной группе, имеет бесконечное множество периодических точек. Поэтому в гомотопическом классе такого гомеоморфизма не может быть диффеоморфизмов Морса-Смейла. Однако для гиперболических матриц существует естественная их реализация алгебраическим автоморфизмом тора, соответствующим данной матрице. Поскольку диффеоморфизм Аносова является частным случаем псевдоаносовского диффеоморфизма, то диффеоморфизм Аносова является представителем типа  $T_4$  на  $\mathbb{T}^2$ .

**Периодические матрицы.** В силу результата С. Баттерсона среди периодических матриц достаточно реализовать структурно устойчивым диффеоморфизмом матрицы  $B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $B_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ . Все остальные матрицы с определителем 1 являются либо степенями этих двух, либо подобны им посредством унимодулярной матрицы. Ниже мы реализуем матрицы  $B_4$  и  $B_5$  градиентно-подобными диффеоморфизмами тора, которые являются представителями класса  $T_1$ .

**Непериодические и негиперболические матрицы.** Из результатов А. Н. Бездежных и В. З. Гринеса [1] известно, что любой градиентно-подобный диффеоморфизм имеет периодическое индуцированное действие. Поэтому матрицы  $B_{1,m} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $B_{2,m} = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ,  $m \in \{0, 1, \dots\}$  не могут быть реализованы градиентно-подобными диффеоморфизмами при  $m \neq 0$ . Ниже реализуем матрицы  $B_{1,m}$  и  $B_{2,m}$  диффеоморфизмами Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим пересечением, которые являются представителями класса  $T_2$ .

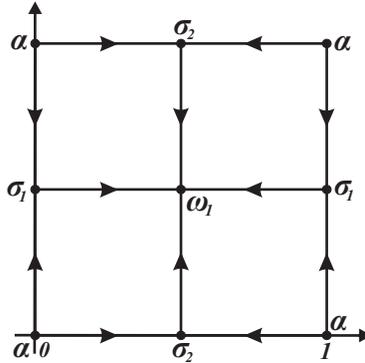
#### 3.2. Реализация матрицы $B_4$

Везде ниже для координат точек и отображений на двумерном торе используем координаты на плоскости по модулю 1, согласно накрывающему отображению

$$q(x, y) = (e^{i2\pi x}, e^{i2\pi y}) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2.$$

Непосредственный поиск периодических точек алгебраического автоморфизма  $\widehat{B}_4$  показывает, что существует в точности 3 периодических орбиты  $\mathcal{O}_1 = \{\alpha(0, 0)\}$ ,  $\mathcal{O}_2 = \{\sigma_1(0, \frac{1}{2}), \sigma_2(\frac{1}{2}, 0)\}$ ,  $\mathcal{O}_3 = \{\omega(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$ . Определим диффеоморфизм  $g : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  формулой (Рис. 3.1):

$$g(x, y) = \left( \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi x) + x, \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi y) + y \right).$$



**Рис. 3.1.** Фазовый портрет диффеоморфизма  $g$   
**Fig 3.1.** Phase portrait of the diffeomorphism  $g$

Непосредственно проверяется, что  $g_* = E$  и  $g\widehat{B}_4 = \widehat{B}_4g$ . Тогда градиентно-подобный диффеоморфизм  $f_4 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , реализующий матрицу  $B_4$ , имеет вид  $f_4 = g\widehat{B}_4$  и действует по формуле

$$f_4(x, y) = \left( \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi y) + y, -\frac{1}{4\pi} \sin(2\pi x) - x \right).$$

**3.3. Реализация матрицы  $B_5$**

Непосредственный поиск периодических точек алгебраического автоморфизма  $\widehat{B}_5$  показывает, что существует в точности три периодические орбиты  $\mathcal{O}_1 = \{\alpha(0, 0)\}$ ,  $\mathcal{O}_2 = \{\omega_1(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), \omega_2(\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$ ,  $\mathcal{O}_3 = \{\sigma_1(\frac{1}{2}, 0), \sigma_2(0, \frac{1}{2}), \sigma_3(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$  (Рис. 3.2).

Разобьем единичный квадрат на треугольники  $\Delta_i, i \in \{1, \dots, 12\}$ , инвариантные относительно диффеоморфизма  $\widehat{B}_5$  (Рис. 3.3) и индуцируем динамику  $h_i = H_i g H_i^{-1} : \Delta_i \rightarrow \Delta_i$  отображения  $g$  на треугольнике  $\Delta$  с вершинами  $A(0, 0), B(\frac{1}{2}, 0), C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  диффеоморфизмом  $H_i : \Delta \rightarrow \Delta_i$ . Для этого положим

$$H_1(x, y) = \left( x - \frac{y}{3}, \frac{2y}{3} \right).$$

Тогда отображение  $h_1 : \Delta_1 \rightarrow \Delta_1$  имеет вид (Рис. 3.4):

$$h_1(x, y) = \left( \frac{1}{4\pi} \sin \left( 2\pi \left( x + \frac{y}{2} \right) \right) + \left( x + \frac{y}{2} \right) - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \left( \frac{1}{4\pi} \sin(3\pi y) + \frac{3y}{2} \right), \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4\pi} \sin(3\pi y) + \frac{3y}{2} \right) \right).$$

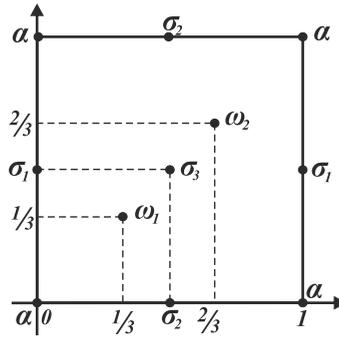


Рис. 3.2. Периодические точки диффеоморфизма  $\widehat{B}_5$

Fig 3.2. Periodic points of the diffeomorphism  $\widehat{B}_5$

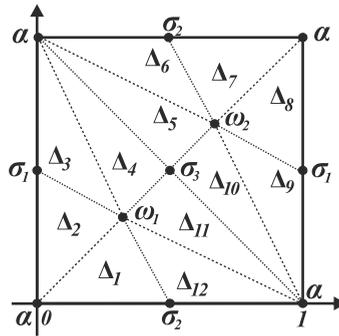


Рис. 3.3. Разбиение единичного квадрата на треугольники  $\Delta_i, i \in \{1, \dots, 12\}$

Fig 3.3. Partition of a unit square into triangles  $\Delta_i, i \in \{1, \dots, 12\}$

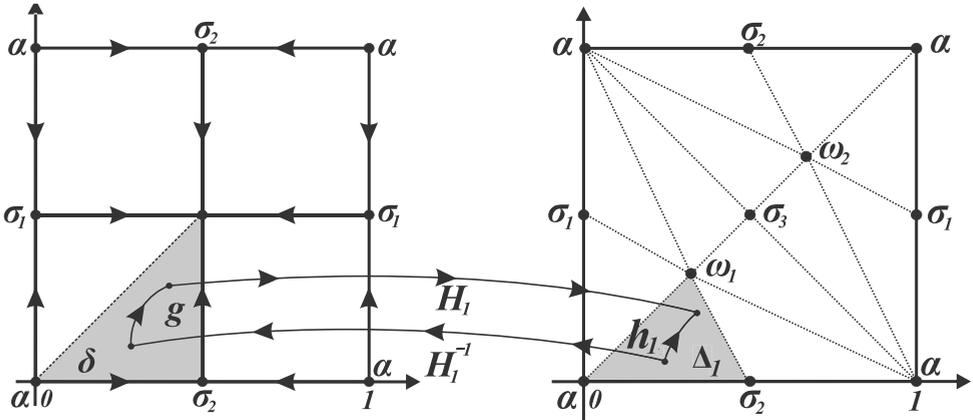


Рис. 3.4. Индуцирование динамики диффеоморфизма  $g$  на треугольник  $\Delta_1$ .

Fig 3.4. Induction of the dynamics of the diffeomorphism  $g$  onto the triangle  $\Delta_1$

Аналогично для треугольника  $\Delta_2$  с вершинами  $A(0, 0), B(0, \frac{1}{2}), C(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ . Определим

диффеорфизм  $H_2 : \Delta \rightarrow \Delta_2$  формулой:

$$H_2(x, y) = \left( \frac{2y}{3}, x - \frac{y}{3} \right).$$

Тогда диффеоморфизм  $h_2 : \Delta_2 \rightarrow \Delta_2$  имеет вид:

$$h_2(x, y) = \left( \frac{3}{2} \left( \frac{\sin(3\pi x)}{4\pi} + \frac{3x}{2} \right), \frac{1}{4\pi} \sin \left( 2\pi \left( \frac{x}{2} + y \right) \right) + \left( \frac{x}{2} + y \right) - \frac{1}{3} \left( \frac{\sin(3\pi x)}{4\pi} + \frac{3x}{2} \right) \right).$$

Заметим, что треугольники  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  инвариантны относительно действия диффеоморфизмов  $h_1$  и  $h_2$ , которые, в свою очередь, являются гладкими на области их действия. Составим отображение  $h_{1,2}$  из диффеоморфизмов  $h_1$  и  $h_2$ . Сужение отображения  $h_{1,2}$  на множества  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  является диффеоморфизмом, остается лишь проверить действие этого отображения на множестве пересечения треугольников  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ , а именно на множестве  $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x, x \in [0, \frac{1}{3}]\}$ . Чтобы отображение  $h_{1,2} : \Delta_1 \cup \Delta_2 \rightarrow \Delta_1 \cup \Delta_2$  было диффеоморфизмом, требуется, чтобы диффеоморфизмы  $h_1$  и  $h_2$  действовали одинаково на множестве  $I$ , а так же чтобы значения их частных производных совпадали на множестве  $I$ . Выполним проверку.

1) Проверим действие диффеоморфизмов  $h_1$  и  $h_2$  на множестве  $I$ :

$$h_1|_I(x, y) = h_2|_I(x, y) = \left( \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4\pi} \sin(3\pi x) + \frac{3}{2}x \right), \frac{2}{3} \left( \frac{1}{4\pi} \sin(3\pi x) + \frac{3}{2}x \right) \right).$$

При подстановке  $y = x$  наблюдаем точное соответствие  $h_1|_I = h_2|_I$ .

2) Найдем частные производные для диффеоморфизма  $h_1$  и вычислим значения при условии  $y = x$ :  $h_1(x, y)'_x = (\frac{1}{2} \cos(3\pi x) + 1, 0)$ ,  $h_1(x, y)'_y = (0, \frac{1}{2} \cos(3\pi x) + 1)$ .

3) Найдем частные производные для функции  $h_2$  и вычислим значения при условии  $y = x$ :  $h_2(x, y)'_x = (\frac{1}{2} \cos(3\pi x) + 1, 0)$ ,  $h_2(x, y)'_y = (0, \frac{1}{2} \cos(3\pi x) + 1)$ .

Выполняется равенство соответствующих частных производных, следовательно  $h_{1,2}$  является диффеоморфизмом на множестве  $\Delta_1 \cup \Delta_2$ .

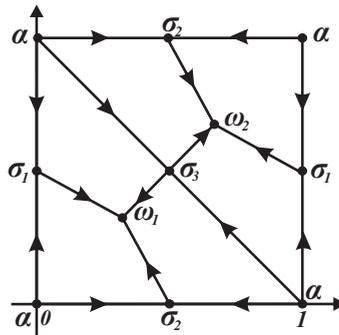


Рис. 3.5. Фазовый портрет диффеоморфизма  $h$

Fig 3.5. Phase portrait of the diffeomorphism  $h$

Продолжая построение описанным выше образом на каждом треугольнике фазового портрета получим диффеоморфизмы  $h_i, i \in \{1, \dots, 12\}$ . Приведенная выше

проверка показывает, что диффеоморфизм  $h$ , составленный из диффеоморфизмов  $h_i, i \in \{1, \dots, 12\}$  является, гладким отображением единичного квадрата на себя, а его фазовый портрет соответствует Рис. 3.5.

Непосредственно проверяется, что  $h_* = E$  и  $h\widehat{B}_5 = \widehat{B}_5h$ . Тогда градиентно-подобный диффеоморфизм  $f_5 : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , реализующий матрицу  $B_5$ , имеет вид  $f_5 = h\widehat{B}_5$  и действует по формуле

$$f_5(x, y) = h(-y, x + y).$$

### 3.4. Реализация матриц $B_{1,m}, B_{2,m}$

Пусть  $\hat{f} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  – диффеоморфизм тора совпадающий с диффеоморфизмом  $\hat{f}_1$  из п. 3.2.

Индукцированный изоморфизм  $\hat{f}_* : H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{R})$  диффеоморфизма  $\hat{f}$  задается матрицей  $B_{\hat{f}} = B_{1,m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, m = 0$ .

Обозначим через  $V_1, V_2$  компоненты связности пространства  $\mathbb{T}^2 \setminus (cl(W_{\sigma_2}^u) \cup cl(W_{\sigma_1}^s))$ , каждая из которых гомеоморфна кольцу. Пусть  $\gamma_1 \subset V_1$  – простая замкнутая не гомотопная нулю кривая на множестве  $V_1$  такая, что  $\gamma_1 \subset int(V_1)$ , а  $\mathcal{N}(\gamma_1) = \mathcal{N}_1$  – ее трубчатая окрестность, также гомотопная кольцу. Не уменьшая общности, будем считать, что окрестность  $\mathcal{N}_1$  является фундаментальной областью диффеоморфизма  $\hat{f}$  (см. Рис. 3.6). Пусть  $\bar{\mathcal{N}}_1 = \mathbb{S}^1 \times [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon]$  и  $\bar{\gamma}_1 = \mathbb{S}^1 \times \{1\}$  подмножества кольца  $\mathbb{S}^1 \times [0, 2]$ . Обозначим через  $\rho : \mathbb{S}^1 \times [0, 2] \rightarrow V_1$  – естественную проекцию, такую, что  $\rho(\bar{\mathcal{N}}_1) = \mathcal{N}_1$ ,  $\varepsilon > 0$  и  $\gamma_1 = \rho(\bar{\gamma}_1)$ .

Определим отображение  $D_{\bar{\gamma}_1} : \bar{\mathcal{N}}_1 \rightarrow \bar{\mathcal{N}}_1$ , являющееся вращением Дена на кольце  $\bar{\mathcal{N}}_1$  (см., например, [10]) по формуле

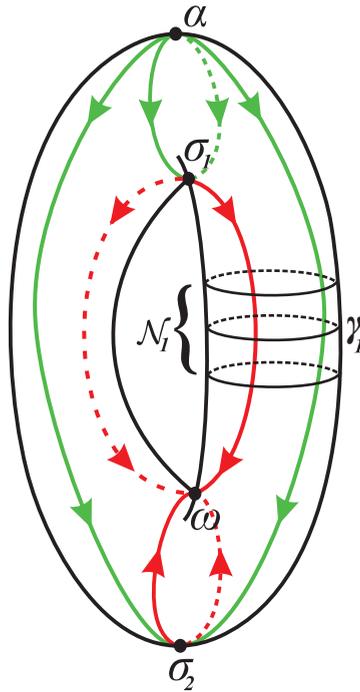
$$D_{\bar{\gamma}_1}(e^{i\theta}, t) = \left( e^{(i\theta + m \cdot \pi \cdot (\frac{t-1}{\varepsilon} + 1))}, t \right), t \in [1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon].$$

Положим  $D_{\gamma_1} = \rho D_{\bar{\gamma}_1} \rho^{-1} : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1$ . Продолжим отображение  $D_{\gamma_1} : \mathcal{N}_1 \rightarrow \mathcal{N}_1$  до отображения тора  $\hat{D}_{\gamma_1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  полагая  $\hat{D}_{\gamma_1}|_{\mathbb{T}^2 \setminus \mathcal{N}_1} = id$ . Индукцированный изоморфизм  $\hat{D}_{\gamma_1*}$  отображения  $\hat{D}_{\gamma_1}$  действует на фундаментальной группе матрицей  $\hat{D}_{\gamma_1*} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Обозначим  $\hat{g} = \hat{D}_{\gamma_1*} \hat{f} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  композицию заданных отображений. Из [11] следует, что индуцированный изоморфизм  $\hat{g}_*$  определяется произведением матриц  $\hat{g}_* = \hat{D}_{\gamma_1*} \hat{f}_* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Покажем, что диффеоморфизм  $\hat{g}$  является сохраняющим ориентацию диффеоморфизмом Морса-Смейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями.

Опишем поведение сепаратрис седловых точек диффеоморфизма  $\hat{g}$  на подмножестве  $V_1$ . Пусть  $l_{\sigma_1}^{u,1} = W_{\sigma_1}^u \cap V_1$  ( $l_{\sigma_2}^{s,1} = W_{\sigma_2}^s \cap V_1$ ) – неустойчивая (устойчивая) сепаратриса седловой точки  $\sigma_1$  ( $\sigma_2$ ) лежащая в множестве  $V_1$ . В соответствии с теоремой 5.5 работы [12] существует достаточно малая окрестность  $U_{\sigma_1}$  ( $U_{\sigma_2}$ ) точки  $\sigma_1$  ( $\sigma_2$ ) такая, что отображение  $\hat{g}|_{U_{\sigma_1}} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  ( $\hat{g}|_{U_{\sigma_2}} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ ) сопряжено линейному отображению  $\bar{g} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$\bar{g}(x, y) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} x, 2y \Big).$$

Пусть  $\bar{p}_1 : U_{\sigma_1} \rightarrow \mathbb{R}^2$  – естественная проекция, такая, что  $\bar{p}_1(l_{\sigma_1}^{u,1}) \subset Oy^+$ . Обозначим через  $F_1$  фундаментальную область отображения  $\bar{g}$ , такую, что  $\hat{g}^{n_1}(\bar{p}_1^{-1}(F_1)) =$



**Рис. 3.6.** Фазовый портрет диффеоморфизма  $\hat{f}_1$  на торе  $\mathbb{T}^2$   
**Fig 3.6.** Phase portrait of the diffeomorphism  $\hat{f}_1$  on the torus  $\mathbb{T}^2$

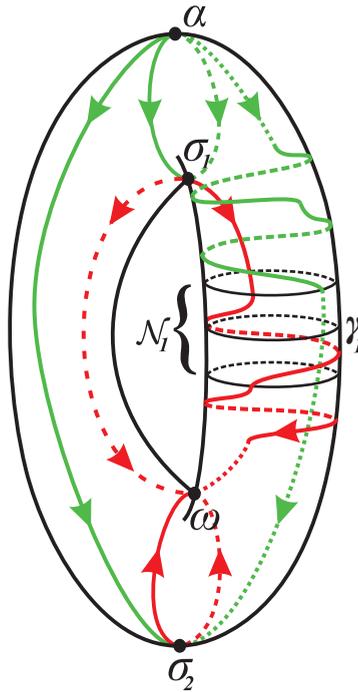
$\mathcal{N}_1$  и положим  $\tilde{l}_{\sigma_1}^{u,1} = \bar{l}_{\sigma_1}^{u,1} \cap F_1$ ,  $\hat{l}_{\sigma_1}^{u,1} = \bar{p}_1^{-1}(\tilde{l}_{\sigma_1}^{u,1})$ . Тогда в силу того, что  $\omega \in cl(l_{\sigma_1}^{u,1})$ , существует такое  $n_1 \in \mathbb{Z}$ , что  $\hat{g}^{n_1}(\hat{l}_{\sigma_1}^{u,1}) \cap \mathcal{N}_1 \neq \emptyset$ . Не уменьшая общности, будем считать, что  $n_1 \in \mathbb{N}$ .

Аналогично, введем проекцию  $\bar{p}_2 : U_{\sigma_2} \rightarrow \mathbb{R}^2$ , такую, что  $\bar{l}_{\sigma_2}^{s,1} = \bar{p}_2(l_{\sigma_2}^{s,1}) \subset Ox^+$ . Обозначим через  $F_2$  фундаментальную область отображения  $\bar{g}$  такую, что  $\hat{g}^{n_2}(\bar{p}_2^{-1}(F_2)) = \mathcal{N}_1$  и положим  $\tilde{l}_{\sigma_2}^{s,1} = \bar{l}_{\sigma_2}^{s,1} \cap F_2$ ,  $\hat{l}_{\sigma_2}^{s,1} = \bar{p}_2^{-1}(\tilde{l}_{\sigma_2}^{s,1})$ . Тогда, в силу того что  $\alpha \in cl(l_{\sigma_2}^{s,1})$ , существует такое  $n_2 \in \mathbb{Z}$ , что  $\hat{g}^{n_2}(\hat{l}_{\sigma_2}^{s,1}) \cap \mathcal{N}_1 \neq \emptyset$ . Не уменьшая общности будем считать, что  $-n_2 \in \mathbb{N}$ .

На подмножестве  $\bigcup_{k=-\infty}^{-1} \hat{g}^k(\mathcal{N}_1)$  часть  $\bigcup_{k=-\infty}^{n_1-1} \hat{g}^k(\hat{l}_{\sigma_1}^{u,1})$  сепаратрисы  $l_{\sigma_1}^{u,1}$  не изменяется под действием отображения  $\hat{D}_{\gamma_1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . В окрестности  $\mathcal{N}_1$  часть  $\hat{g}^{n_1}(\hat{l}_{\sigma_1}^{u,1})$  совершает  $m$  оборотов относительно кривой  $\gamma_1$ , а затем транслируется на множество  $\bigcup_{k=1}^{\infty} \hat{g}^k(\mathcal{N}_1)$  согласно действию диффеоморфизма  $\hat{f}$  (см. Рис. 3.7).

Аналогичным образом на подмножестве  $\bigcup_{k=-\infty}^0 \hat{g}^{-k}(\mathcal{N}_1)$  часть  $\bigcup_{k=-\infty}^{-n_2} \hat{g}^{-k}(\hat{l}_{\sigma_1}^{s,1})$  сепаратрисы  $l_{\sigma_1}^{s,1}$  не изменяется под действием отображения  $\hat{D}_{\gamma_1} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ . Поскольку  $\hat{g}^{-1}|_{\mathcal{N}_1} = \hat{f}^{-1} \hat{D}_{\gamma_1}^{-1} : \mathcal{N}_1 \rightarrow \hat{g}^{-1}(\mathcal{N}_1)$ , то в окрестности  $\hat{g}^{-1}(\mathcal{N}_1)$  часть  $\hat{g}^{n_2-1}(\hat{l}_{\sigma_1}^{s,1})$  сепаратрисы  $l_{\sigma_1}^{s,1}$  совершает  $m$  оборотов относительно кривой  $\gamma_1$ , а затем транслируется на множество  $\bigcup_{k=-n_2+1}^{\infty} \hat{g}^{-k}(\mathcal{N}_1)$  согласно действию отображения  $\hat{f}$  (см. Рис. 3.7).

Таким образом, построенный диффеоморфизм  $\hat{g} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  является диффео-



**Рис. 3.7.** Динамика диффеоморфизма  $\hat{g} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$   
**Fig 3.7.** Dynamics of the diffeomorphism  $\hat{g} : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$

морфизмом Морса-Сейла с ориентируемыми гетероклиническими пересечениями и  $\hat{g}_* = B_{1,m}$ .

Поскольку  $\hat{g}_* = B_{1,m}$ , то  $\hat{g}_1$  не является периодическим диффеоморфизмом. Пусть  $\beta = cl(W_{\sigma_1}^s)$ , а  $C_\beta$  – окрестность кривой  $\beta$ , такая, что  $N_1 \subset C_\beta$ . Тогда диффеоморфизм  $\hat{g}|_{\mathbb{T}^2 \setminus C_\beta}$  является изотопным тождественному, а следовательно,  $\hat{g} \in T_2$ .

**Благодарности.** Исследование выполнено при поддержке фонда развития теоретической физики и математики базис «БАЗИС», номер контракта 19-7-1-15-1. Также автор благодарит О. В. Починку за постановку задачи и плодотворные обсуждения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях // Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой. 1987. С. 24–32.
2. Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // Дифференциальные и интегральные уравнения. 1985. С. 33–37.
3. Жиров А. Ю., Плыкин Р. В. Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоано-

совскими диффеоморфизмами // Математические заметки. 1995. Т. 58, № 1. С. 149–152.

4. Гринес В. З., Куренков Е. Д. Диффеоморфизмы двумерных многообразий с одномерными просторно расположенными базисными множествами // Известия Российской академии наук. Серия математическая. 2020. Т. 84, № 5. С. 40–97. DOI: <https://doi.org/10.4213/im8923>
5. Farb B., Margalit D. A primer on mapping class groups (pms-49). Princeton: Princeton University Press, 2011. 489 p.
6. Nielsen J. et al. Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen flachen. Acta Mathematica. 1927. Vol. 50. pp. 189–358. DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02421324>
7. Baer R. Isotopie von kurven auf orientierbaren, geschlossenen flachen und ihr zusammenhang mit der topologischen deformation der flachen. Journal far die reine und angewandte Mathematik. 1928. Vol. 159. pp. 101–116.
8. Batterson S. The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus. Transactions of the American Mathematical Society. 1979. Vol. 256. pp. 395–403. DOI: <https://doi.org/10.2307/1998118>
9. Franks J. Anosov diffeomorphisms. Berkeley: University of California, 1968. 134 p.
10. Au T. K. K., Luo F., Yang T. Lectures on the mapping class group of a surface. Transformation Groups and Moduli Spaces of Curves. 2010. Vol. 16. pp. 21–61.
11. Rolfsen D. Knots and links. Providence: American Mathematical Soc., 2003. Vol. 346. 439 p.
12. Палис Ж., Ди М. В. Геометрическая теория динамических систем: Введение. М.: Мир, 1986. 304 с.

*Поступила 21.03.2021; доработана после рецензирования 23.04.2021;  
принята к публикации 26.05.2021*

*Информация об авторе:*

**Морозов Андрей Игоревич**, стажер-исследователь Международной лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3125-1825>, [andrefrostnn@gmail.com](mailto:andrefrostnn@gmail.com)

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 37E30

# Realization of homotopy classes of torus homeomorphisms by the simplest structurally stable diffeomorphisms

A. I. Morozov

National Research University «Higher School of Economics» (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

**Abstract.** According to Thurston's classification, the set of homotopy classes of orientation-preserving homeomorphisms of orientable surfaces is split into four disjoint subsets. A homotopy class from each subset is characterized by the existence of a homeomorphism called Thurston's canonical form, namely: a periodic homeomorphism, a reducible nonperiodic homeomorphism of algebraically finite order, a reducible homeomorphism that is not a homeomorphism of an algebraically finite order, and a pseudo-Anosov homeomorphism. Thurston's canonical forms are not structurally stable diffeomorphisms. Therefore, the problem naturally arises of constructing the simplest (in a certain sense) structurally stable diffeomorphisms in each homotopy class. In this paper, the problem posed is solved for torus homeomorphisms. In each homotopy class, structurally stable representatives are analytically constructed, namely, a gradient-like diffeomorphism, a Morse-Smale diffeomorphism with an orientable heteroclinic, and an Anosov diffeomorphism, which is a particular case of a pseudo-Anosov diffeomorphism.

**Key Words:** Nielsen-Thurston theory, homotopic classes of mappings, realization of diffeomorphisms, algebraic mappings

**For citation:** A. I. Morozov. Realization of homotopy classes of torus homeomorphisms by the simplest structurally stable diffeomorphisms. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:2(2021), 171–184. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.171-184>

## REFERENCES

1. A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “[Dynamical Properties and Topological Classification of Gradient-Like Diffeomorphisms on Two-Dimensional Manifolds I.]”, *Sel. Math. Sov.*, **11:1** (1992), 1-11.
2. A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, “[Realization of Gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds]”, *Sel. Math. Sov.*, 1992, 19-23.
3. A. Yu. Zhirov, R. V. Plikin, “[On the relationship between one-dimensional hyperbolic attractors of surface diffeomorphisms and generalized pseudo-Anosov diffeomorphisms]”, *Mathematical Notes*, **58:1** (1995), 779-781.
4. V. Z. Grines, E. D. Kurenkov, “[Diffeomorphisms of 2-manifolds with one-dimensional sparsely situated basic sets]”, *Izvestiya: Mathematics*, **84:5** (2020), 862–909 (in Russ.). DOI: <https://doi.org/10.4213/im8923>
5. B. Farb, D. Margalit, *A primer on mapping class groups (pms-49)*, Princeton University Press, Princeton, 2011, 489 p.

6. J. Nielsen, “Untersuchungen zur topologie der geschlossenen zweiseitigen flachen”, *Acta Mathematica*, **50** (1927), 189–358. (In Ger.). DOI: <https://doi.org/10.1007/BF02421324>
7. R. Baer, “Isotopie von kurven auf orientierbaren, geschlossenen flachen und ihr zusammenhang mit der topologischen deformation der flachen”, *Journal far die reine und angewandte Mathematik*, **159** (1928), 101–116 (In Ger.).
8. S. Batterson, “The dynamics of Morse-Smale diffeomorphisms on the torus”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **256** (1979), 395–403. DOI: <https://doi.org/10.2307/1998118>
9. J. Franks, *Anosov diffeomorphisms, Global Analysis*, University of California Publ., Berkeley, 1968, 134 p.
10. T.K.K. Au, F. Luo, T. Yang, “Lectures on the Mapping Class Group of a surface”, *Transformation groups and moduli spaces of curves*, **16** (2010), 21–61.
11. D. Rolfsen, *Knots and links*, **346**, Mathematics Lecture Series, Providence, 2003, 439 p.
12. Zh. Palis, V.M. Di, *Geometric Theory of Dynamical Systems: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, 1982 DOI: <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5703-5>, 210 p.

*Submitted 21.03.2021; Revised 23.04.2021; Accepted 26.05.2021*

*Information about the author:*

**Andrei I. Morozov**, Research Assistant, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University «Higher School of Economics» (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3125-1825>, [andrefrostnn@gmail.com](mailto:andrefrostnn@gmail.com)

*The author have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202102.185–192

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.624

# Метод упрощения для нелинейных уравнений монотонного типа в банаховом пространстве

И. П. Рязанцева

ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет  
им. Р. Е. Алексеева» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

**Аннотация.** В банаховом пространстве изучается операторное уравнение с монотонным оператором  $T$ , действующим из банахова пространства в его сопряжённое, причем  $T = AC$ , где  $A$  и  $C$  – операторы некоторых классов. Рассматриваемая задача относится к классу некорректных задач. По этой причине для её решения предлагается операторный метод регуляризации. Этот метод строим, используя не оператор  $T$  исходного уравнения, а более простой оператор  $A$ , который является  $B$ -монотонным,  $B = C^{-1}$ . Существование оператора  $B$  предполагается. Кроме того, при построении операторного метода регуляризации используем дуальное отображение с некоторой масштабной функцией. При этом операторы и правая часть заданного уравнения предполагаются возмущёнными. Установлены требования на геометрию банахова пространства и условия согласования уровней возмущений данных и параметра регуляризации, которые обеспечивают сильную сходимость построенных приближений к некоторому решению исходного уравнения. Приведен пример задачи в пространстве Лебега, для которой применим предложенный метод.

**Ключевые слова:** банахово пространство, сопряжённое пространство, строго выпуклое пространство,  $E$ -пространство, монотонный оператор,  $B$ -монотонный оператор, дуальное отображение с масштабной функцией, операторный метод регуляризации, возмущённые данные, сходимость.

**Для цитирования:** Рязанцева И. П. Метод упрощения для нелинейных уравнений монотонного типа в банаховом пространстве // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 185–192. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.185–192>

## 1. Постановка задачи

Пусть  $X$  – вещественное рефлексивное равномерно гладкое банахово пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряжённым  $X^*$ ,  $\langle u, v \rangle$  при  $u \in X^*$ ,  $v \in X$  есть отношение двойственности между пространствами  $X$  и  $X^*$ . Пусть  $X$  является  $E$ -пространством, т. е. из сходимостей  $x_n \rightarrow x$ ,  $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$  следует, что  $x_n \rightarrow x$ , где  $x_n \in X$  при всех  $n \geq 1$ ,  $x \in X$ .

Рассмотрим в  $X$  уравнение

$$Tx = f, \quad (1.1)$$

где оператор  $T : X \rightarrow X^*$ ; элемент  $f \in X^*$ , причём  $T$  – монотонное отображение на  $X$ .

Предположим, что  $T = AC$ , где  $A : X \rightarrow X^*$ ,  $C : X \rightarrow X$ ,  $D(C) = X$ ,  $R(C) \subseteq D(A)$ , оператор  $A$  деминепрерывен, и существует непрерывный оператор  $B = C^{-1} : X \rightarrow X$ .

Запишем условие монотонности оператора  $T$ :

$$\langle Tu - Tv, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X,$$

т. е. верно неравенство

$$\langle ACu - ACv, u - v \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X. \quad (1.2)$$



Пусть  $Cu = x, Cv = y$ , т.е.  $u = C^{-1}x = Bx, v = C^{-1}y = By$ , тогда неравенство (1.2) примет следующий вид:

$$\langle Ax - Ay, Bx - By \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in R(C), \quad (1.3)$$

т. е. оператор  $A : X \rightarrow X^*$  является  $B$ -монотонным (см. [1]), где  $B : X \rightarrow X$ .

Если в (1.3) равенство возможно только при  $x = y$ , то оператор  $A$  называется строго  $B$ -монотонным.

Поскольку уравнение (1.1) можно переписать в виде  $ACx = f$ , то приняв обозначение  $Cx = z$ , от (1.1) придём к уравнению

$$Az = f, \quad (1.4)$$

с  $B$ -монотонным деминепрерывным оператором  $A : X \rightarrow X^*$  и элементом  $f \in X^*$ .

Таким образом, от уравнения (1.1) с монотонным оператором  $T : X \rightarrow X^*$  мы пришли к уравнению (1.4) с  $B$ -монотонным деминепрерывным оператором  $A : X \rightarrow X^*$ , где  $B : X \rightarrow X$  – непрерывный оператор.

Далее считаем, что  $B^{-1} : X \rightarrow X$  – непрерывное отображение.

## 2. Основной результат

Пусть уравнение (1.1) имеет непустое множество решений  $N$ . Значит, и множество

$$N_B = \{Bx | x \in N\}$$

также непусто. Поскольку  $T$  – максимальный монотонный оператор, то используя линейность (1.3) относительно  $Bx$  и  $By$ , подобно [1–3] доказываются выпуклость и замкнутость множества  $N_B$ . Следовательно, найдётся единственный элемент  $v^* \in N_B$  такой, что

$$\|v^*\| = \|Bz^*\| = \min\{\|v\| \mid v \in N_B\}. \quad (2.1)$$

В наших предположениях задача нахождения решения уравнения (1.4) некорректна. Построим для (1.4) регуляризованное операторное уравнение следующего вида:

$$Ax_\alpha + \alpha J^\mu Bx_\alpha = f, \quad \alpha > 0, \quad (2.2)$$

где  $J^\mu : X \rightarrow X^*$  – дуальное отображение в  $X$  с некоторой масштабной функцией  $\mu(t)$ , т. е. (см. [2, с. 315; 4, с. 65])

$$\|J^\mu x\| = \mu(\|x\|), \langle J^\mu x, x \rangle = \mu(\|x\|)\|x\| \quad \forall x \in X,$$

$$\langle J^\mu u - J^\mu v, u - v \rangle \geq [\mu(\|u\|) - \mu(\|v\|)] (\|u\| - \|v\|) \quad \forall u, v \in X. \quad (2.3)$$

Здесь  $\mu(t)$  – вещественная непрерывная и возрастающая функция, определённая при  $t \geq 0$ , причем  $\mu(0) = 0, \mu(t) \rightarrow +\infty$  при  $t \rightarrow \infty$ . В силу строгой монотонности оператора  $J^\mu$  (см. [3, лемма 1.5.5]) элемент  $Bx_\alpha$  из (2.2) определяется однозначно.

Пусть  $Bx_\alpha = u_\alpha \in X$ , перепишем равенство (2.2) в следующем виде:

$$Tu_\alpha + \alpha J^\mu u_\alpha = f, \quad (2.4)$$

где  $T : X \rightarrow X^*$  – монотонный деминепрерывный оператор с  $D(T) = X$ . Согласно работе [3, с. 126] имеет место сходимость  $u_\alpha \rightarrow x^*$  при  $\alpha \rightarrow 0$ , где  $\|x^*\| = \min\{\|x\| \mid x \in$

$N\}$ , т. е.  $x^*$  – единственное нормальное решение уравнения (1.1). Поскольку  $x_\alpha = B^{-1}u_\alpha$  и оператор  $B^{-1}$  в наших предположениях непрерывен, то  $x_\alpha \rightarrow \bar{x}^* = B^{-1}x^*$ , причём  $\bar{x}^*$  – решение уравнения (1.4).

Рассмотрим случай возмущённых данных. Пусть вместо операторов  $A : X \rightarrow X^*, B : X \rightarrow X$  и элемента  $f \in X^*$  известны их приближения  $A^h : X \rightarrow X^*, B^h : X \rightarrow X, f^\delta \in X^*$  такие (сравни с [3, с. 124]), что

$$\|Au - A^h u\| \leq g(\|u\|)h, \quad \|Bu - B^h u\| \leq qh \quad \forall u \in X, \quad q > 0 \quad \|f - f^\delta\| \leq \delta, \quad (2.5)$$

причём  $A^h$  является  $B^h$ -монотонным оператором при  $h > 0, D(A) = D(A^h), D(B) = D(B^h), A^h$  и  $B^h$  сохраняют свойства операторов  $A$  и  $B$  соответственно. Функция  $g(t)$  из (2.5) определена при  $t \geq t_0$  и переводит ограниченное множество в ограниченное.

Записать условие близости типа (2.5) для оператора  $T = AB^{-1} : X \rightarrow X^*$  и возмущённого оператора  $T^h = A^h(B^h)^{-1} : X \rightarrow X^*$  не всегда удаётся, поскольку нелинейные операторы  $B^{-1}$  и  $(B^h)^{-1}$  не всегда можно представить в явном виде. Кроме того, условия (2.5) соответствуют задаче упрощения нелинейного уравнения (1.1).

Следовательно, уравнение (2.2) в рассматриваемом случае принимает следующий вид:

$$A^h x_\alpha^\Delta + \alpha J^\mu u_\alpha^\Delta = f^\delta, \quad (2.6)$$

здесь  $\alpha > 0; \Delta = \{\delta, h\}; x_\alpha^\Delta \in X; u_\alpha^\Delta = B^h x_\alpha^\Delta \in X$ .

Покажем однозначную разрешимость уравнения (2.6). Оператор  $F_\alpha^\Delta : X \rightarrow X^*, F_\alpha^\Delta u = A^h u + \alpha J^\mu B^h u$  в силу  $B^h$ -монотонности отображения  $A^h$  и строгой монотонности  $J^\mu$  обладает свойством строгой  $B^h$ -монотонности.

Сделаем дополнительные предположения. Пусть

$$\|A^h y\| \leq P(\|B^h y\|) \quad \forall y \in X, \quad B^h y \in X, \quad (2.7)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t\mu(t)}{P(t)} = +\infty, \quad (2.8)$$

где  $P(s)$  – неотрицательная непрерывная функция при  $s \geq 0$ . Тогда (сравни с [1]) с учётом (2.7),  $B^h$ -монотонности операторов  $A^h$  и определения оператора  $J^\mu$  для произвольной точки  $x_0$  из  $X$  запишем следующие соотношения

$$\begin{aligned} \langle A^h y + \alpha J^\mu B^h y, B^h y \rangle &= \alpha \mu(\|B^h y\|) \|B^h y\| + \langle A^h y - A^h x_0, B^h y - B^h x_0 \rangle + \\ &+ \langle A^h x_0, B^h y - B^h x_0 \rangle + \langle A^h y, B^h x_0 \rangle \geq \alpha \mu(\|B^h y\|) \|B^h y\| - \|A^h x_0\| (\|B^h y\| + \|B^h x_0\|) - \\ &- P(\|B^h y\|) \|B^h x_0\|. \end{aligned}$$

Следовательно, предположение (2.8) обеспечивает  $B^h$ -коэрцитивность оператора  $F_\alpha^\Delta$ . Кроме того, оператор  $F_\alpha^\Delta : X \rightarrow X^*$  является строго  $B^h$ -монотонным. Значит, согласно теореме 1 из [1], применённой при  $\Omega = X$ , уравнение (2.6) в наших предположениях однозначно разрешимо при любом положительном  $\alpha$  и неотрицательных  $\delta$  и  $h$ .

Далее из (1.4) и (2.6) при  $u^h = B^h z$  получим:

$$\langle A^h x_\alpha^\Delta - Az, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle + \alpha \langle J^\mu u_\alpha^\Delta, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle = \langle f^\delta - f, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle. \quad (2.9)$$

Оценим слагаемые, входящие в (2.9). Приняв во внимание  $B^h$ -монотонность оператора  $A^h$  и первое неравенство из (2.5), запишем:

$$\langle A^h x_\alpha^\Delta - Az, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle = \langle A^h x_\alpha^\Delta - A^h z, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle + \langle A^h z - Az, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle \geq -hg(\|z\|) \|u_\alpha^\Delta - u^h\|.$$

Используя свойство (2.3) оператора  $J^\mu$ , запишем неравенство

$$\begin{aligned} \langle J^\mu u_\alpha^\Delta, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle &= \langle J^\mu u_\alpha^\Delta - J^\mu u^h, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle + \langle J^\mu u^h, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle \geq \\ &\geq [\mu(\|u_\alpha^\Delta\|) - \mu(\|u^h\|)] (\|u_\alpha^\Delta\| - \|u^h\|) + \langle J^\mu u^h, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle, \quad u_\alpha^\Delta = B^h x_\alpha^\Delta. \end{aligned}$$

Правая часть (2.9) с учётом последнего неравенства из (2.5) имеет следующую оценку сверху:

$$\langle f^\delta - f, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle \leq \delta \|u_\alpha^\Delta - u^h\|. \tag{2.10}$$

Таким образом, от (2.9) приходим к неравенству вида

$$\begin{aligned} &[\mu(\|u_\alpha^\Delta\|) - \mu(\|u^h\|)] (\|u_\alpha^\Delta\| - \|u^h\|) \leq \frac{h}{\alpha} g(\|z\|) (\|u_\alpha^\Delta\| + \|u^h\|) + \\ &+ \frac{\delta}{\alpha} (\|u_\alpha^\Delta\| + \|u^h\|) - \langle J^\mu u^h, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Пусть

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\delta + h}{\alpha} = 0. \tag{2.12}$$

Перепишем (2.9) в следующем виде:

$$\langle A^h x_\alpha^\Delta - A^h z, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle + \langle A^h z - Az, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle + \alpha \langle J^\mu u_\alpha^\Delta, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle = \langle f^\delta - f, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle. \tag{2.13}$$

В силу  $B^h$ -монотонности оператора  $A^h$  первое слагаемое в (2.13) неотрицательно. Следовательно, из (2.13) вытекает неравенство

$$\mu(\|u_\alpha^\Delta\|)\|u_\alpha^\Delta\| \leq \mu(\|u_\alpha^\Delta\|)\|u^h\| + \frac{h}{\alpha} g(\|z\|)(\|u_\alpha^\Delta\| + \|u^h\|) + \frac{\delta}{\alpha} (\|u_\alpha^\Delta\| + \|u^h\|). \tag{2.14}$$

Поскольку

$$\|u^h\| \leq \|B^h z - Bz\| + \|Bz\| \leq qh + \|Bz\|,$$

где  $z$  – решение (1.4) и  $h \rightarrow 0$ , то семейство  $\{u^h\}$  ограничено при  $h \rightarrow 0$ .

Условие (2.12) и свойства функции  $\mu(t)$  позволяют из неравенства (2.14) сделать вывод об ограниченности семейства  $\{u_\alpha^\Delta\} = \{B^h x_\alpha^\Delta\}$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Не меняя обозначений для подпоследовательности, считаем, что  $u_\alpha^\Delta \rightarrow \bar{u} \in X$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Теперь из (2.6) имеем сходимость семейства  $\{A^h x_\alpha^\Delta - f^\delta\}$  к нулю при  $\alpha \rightarrow 0$ , поскольку оператор  $J^\mu : X \rightarrow X^*$  – ограниченный. Запишем условие  $B^h$ -монотонности оператора  $A^h$ :

$$\langle A^h v - A^h x_\alpha^\Delta, B^h v - B^h x_\alpha^\Delta \rangle \geq 0 \quad \forall v \in R(C^h).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , получим:

$$\langle Av - f, Bv - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall v \in R(C). \tag{2.15}$$

Поскольку  $D(B^{-1}) = D(C) = X$  и  $\bar{u} \in X$ , то найдётся элемент  $\bar{z} = B^{-1}\bar{u}$ , т. е.  $\bar{u} = B\bar{z}$ . Значит, (2.15) можно записать в следующем виде:

$$\langle Av - f, Bv - B\bar{z} \rangle \geq 0, \quad \forall v \in R(C). \tag{2.16}$$

Поскольку существует оператор  $B^{-1}$ , то для всякого  $v \in D(B)$  найдётся элемент  $u \in X$  такой, что  $v = B^{-1}u$ . Таким образом, из (2.16) имеем

$$\langle AB^{-1}u - f, u - \bar{u} \rangle \geq 0 \quad \forall u \in X.$$

Оператор  $T = AB^{-1}$  является деминепрерывным монотонным с  $D(T) = X$ , поэтому из последнего неравенства заключаем, что  $AB^{-1}\bar{u} = f$ ,  $\bar{z} = B^{-1}\bar{u}$  (см. [2, с. 257]).

Таким образом, доказано, что  $\bar{u} \in N$ . Значит,  $B\bar{u} \in N_B$ . Далее из (2.11), учитывая неотрицательность левой части и ограниченность семейств  $\{u_\alpha^\Delta\}$  и  $\{u^h\}$ , имеем неравенство

$$\langle J^\mu u^h, u_\alpha^\Delta - u^h \rangle \leq c_1 \frac{\delta + h}{\alpha}, \quad c_1 > 0. \tag{2.17}$$

Поскольку  $u_\alpha^\Delta \rightarrow \bar{u} = B\bar{z}$ ,  $u^h = B^h z \rightarrow Bz$ ,  $J^\mu B^h z \rightarrow J^\mu Bz$  при  $\alpha \rightarrow 0$  (см. [4, замечание 3.1.2 и лемму 3.2.1]), то из последнего неравенства с учётом предположения (2.12) получаем

$$\langle J^\mu Bz, B\bar{z} - Bz \rangle \leq 0 \quad B\bar{z} \in N_B, \quad \forall Bz \in N_B.$$

Теперь на основании леммы 6.1.2 из [4], применённой к последнему неравенству, заключаем, что верно неравенство

$$\langle J^\mu B\bar{z}, B\bar{z} - Bz \rangle \leq 0 \quad \forall Bz \in N_B,$$

т. е.  $\|B\bar{z}\| \leq \|Bz\|$  при всех  $Bz \in N_B$ . Значит,  $B\bar{z} = v^* = Bz^*$ , где  $Bz^*$  – элемент с минимальной нормой в  $N_B$  (см. (2.1)), т. е. установлена сходимость  $u_\alpha^\Delta \rightarrow v^*$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Положив в (2.11)  $u^h = B^h z^*$  и затем перейдя к пределу при  $\alpha \rightarrow 0$ , получим, что  $\|u_\alpha^\Delta\| \rightarrow \|v^*\|$ . Таким образом,  $u_\alpha^\Delta \rightarrow v^*$ ,  $\|u_\alpha^\Delta\| \rightarrow \|v^*\|$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . В  $E$ -пространстве  $X$  полученные предельные соотношения дают сильную сходимость, т. е.  $u_\alpha^\Delta \rightarrow v^*$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Теперь из неравенства

$$\|Bx_\alpha^\Delta - Bz^*\| \leq \|Bx_\alpha^\Delta - B^h x_\alpha^\Delta\| + \|B^h x_\alpha^\Delta - Bz^*\|$$

в силу второго неравенства из (2.5) и доказанной сильной сходимости семейства  $\{u_\alpha^\Delta\}$  к  $v^*$  заключаем, что  $Bx_\alpha^\Delta \rightarrow Bz^*$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Непрерывность оператора  $B^{-1}$  приводит в этом случае к сходимости  $x_\alpha^\Delta \rightarrow z^* \in N$  при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Сформулируем доказанный результат.

**Т е о р е м а 2.1** Пусть  $X$  – вещественное рефлексивное равномерно гладкое банахово  $E$ -пространство, строго выпуклое вместе со своим сопряжённым  $X^*$ . Предположим, что оператор  $T : X \rightarrow X^*$  является монотонным,  $T = AC$  при  $A : X \rightarrow X^*$ ,  $C : X \rightarrow X$ ,  $R(C) \subseteq D(A)$ ,  $D(C) = X$ , причём  $A$  – деминепрерывный оператор, и существует непрерывное отображение  $B = C^{-1} : X \rightarrow X$  с непрерывным обратным. Пусть уравнение (1.1) имеет непустое множество решений  $N$ ; построим множество  $N_B = \{Bx | x \in N\}$ . Пусть данные уравнения (1.1) – операторы  $A, B$  и элемент  $f$  – возмущены, а их возмущения  $A^h, B^h$  и  $f^\delta$  удовлетворяют неравенствам (2.5), причём  $A^h$  и  $B^h$  сохраняют свойства операторов  $A$  и  $B$  соответственно, и выполнены условия (2.7)–(2.8), (2.12). Тогда элементы семейства  $\{x_\alpha^\Delta\}$  однозначно определяются из уравнения (2.6) и при  $\alpha \rightarrow 0$  сходятся по норме пространства  $X$  к элементу  $z^* \in N$ , удовлетворяющему (2.1).

Приведём пример уравнения вида (1.1), для которого переход к (1.4) приводит к решению более простой задачи.

Пусть оператор  $A : L^p[a, b] \rightarrow L^q[a, b]$  при  $p > 1, 1/p + 1/q = 1$  определяется равенством

$$Av(s) = \varphi(s, |v(s)|^{p-1})|v(s)|^{p-2}v(s), \tag{2.18}$$

где

$$\varphi(s, |v(s)|^{p-1}) = \begin{cases} 0, & v(s) < 0, \\ 1 / (a_1(s) + a_2(s)|v(s)|^{p-1}), & v(s) \geq 0, \end{cases}$$

функции  $a_k(s)$  для  $k = 1, 2$  положительны и непрерывны при  $s \in [a, b]$ .

Построим оператор  $C : L^p[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$  следующего вида:

$$Cx(s) = \psi(x(s)), \quad s \in [a, b],$$

где неотрицательная непрерывная функция  $\psi(u)$  возрастает при  $u \geq 0$ . Значит, оператор  $T = AC$  действует из пространства  $L^p[a, b]$  в пространство  $L^q[a, b]$ , причём  $C$  и  $C^{-1}$  – непрерывные отображения. Монотонность оператора  $T$  устанавливается на основании равенства

$$\langle Tx - Ty, x - y \rangle = \int_a^b [\varphi(s, u(s))u(s) - \varphi(s, v(s))v(s)] (x(s) - y(s)) ds,$$

где  $u(s) = [\psi(x(s))]^{p-1}$ ,  $v(s) = [\psi(y(s))]^{p-1}$ ,  $x(s)$  и  $y(s)$  – произвольные функции из  $L^p[a, b]$ ,  $p > 1$ .

Предложенный метод решения уравнения (1.1) можно исследовать, если  $T = AC$ ,  $T : X \rightarrow X$ ,  $C : X \rightarrow X$ ,  $A : X \rightarrow X$ , причём будем считать, что оператор  $T$  является  $d$ -аккретивным (см. [3, с. 108]) относительно дуального отображения  $J^\mu : X \rightarrow X^*$  с некоторой масштабной функцией  $\mu(t)$ . Следовательно, справедливо неравенство

$$\langle J^\mu u - J^\mu v, Tu - Tv \rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in X.$$

Отсюда при  $u = Bx$ ,  $v = By$  имеем

$$\langle J^\mu Bx - J^\mu By, Ax - Ay \rangle \geq 0.$$

Полученное свойство оператора  $A$  можно назвать  $B$ - $d$ -аккретивностью относительно дуального отображения  $J^\mu$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рязанцева И. П. Непрерывные методы регуляризации первого порядка для обобщённых вариационных неравенств // Журнал вычисл. матем. и матем. физики. 2010. Т. 50. № 4. С. 636–650.
2. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
3. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer. 2006. 410 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/1-4020-4396-1>
4. Рязанцева И. П. Избранные главы теории операторов монотонного типа. Нижний Новгород: Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева. 2008. 272 с.

Поступила 13.03.2021; доработана после рецензирования 24.04.2021;  
принята к публикации 4.05.2021

Информация об авторе:

**Рязанцева Ирина Прокофьевна**, профессор кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6215-1662>, [ryazantseva@applmath.ru](mailto:ryazantseva@applmath.ru)

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 65J15

## Simplification method for nonlinear equations of monotone type in Banach space

I. P. Ryazantseva

*Nizhny Novgorod State Tehnical University named after R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russian Federation)*

**Abstract.** In a Banach space, we study an operator equation with a monotone operator  $T$ . The operator is an operator from a Banach space to its conjugate, and  $T = AC$ , where  $A$  and  $C$  are operators of some classes. The considered problem belongs to the class of ill-posed problems. For this reason, an operator regularization method is proposed to solve it. This method is constructed using not the operator  $T$  of the original equation, but a more simple operator  $A$ , which is  $B$ -monotone,  $B = C^{-1}$ . The existence of the operator  $B$  is assumed. In addition, when constructing the operator regularization method, we use a dual mapping with some gauge function. In this case, the operators of the equation and the right-hand side of the given equation are assumed to be perturbed. The requirements on the geometry of the Banach space and on the agreement conditions for the perturbation levels of the data and of the regularization parameter are established, which provide a strong convergence of the constructed approximations to some solution of the original equation. An example of a problem in Lebesgue space is given for which the proposed method is applicable.

**Key Words:** Banach space, conjugate space, strictly convex space,  $E$ -space, monotone operator,  $B$ -monotone operator, dual map with gauge function, operator regularization method, perturbed data, convergence

**For citation:** I. P. Ryazantseva. Simplification method for nonlinear equations of monotone type in Banach space. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:2(2021), 185–192. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.185-192>

## REFERENCES

1. I. P. Ryazantseva, “First-order continuous regularization methods for generalized variational inequalities”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50:4** (2010), 606–619.
2. M. M. Vainberg, [*Variational methods and method of monotone operators in theory of nonlinear equations*], Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 416 p.

3. Ya. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006 DOI: <https://doi.org/10.1007/1-4020-4396-1>, 410 p.
4. I. P. Ryazantseva, *[Selected topics of the theory of operators of monotone type]*, Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev Publ., Nizhny Novgorod, 2008 (In Russ.), 272 p.

*Submitted 13.03.2021; Revised 24.04.2021; Accepted 4.05.2021*

*Information about the author:*

**Irina P. Ryazantseva**, Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev (24 Minina St., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6215-1662>, [lryazantseva@appliedmath.ru](mailto:lryazantseva@appliedmath.ru)

*The author have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202102.193–206

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6

## Метод балансировки загрузки для гетерогенных численных алгоритмов моделирования газодинамических течений

С. А. Суков

*Федеральный исследовательский центр Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша Российской академии наук (г. Москва, Российская Федерация)*

**Аннотация.** В статье рассматривается проблема балансировки загрузки в параллельных гетерогенных алгоритмах численного моделирования физических процессов на неструктурированных сетках. Описан метод распределения вычислений для кластеров с центральными процессорами и массивно-параллельными ускорителями. Балансировка загрузки включает определение весов вершин и ребер дуального графа, тестирование быстродействия вычислительных устройств и двухуровневую декомпозицию дискретной модели расчетной области на основе метода геометрического параллелизма. Детали предлагаемого подхода рассматриваются на примере параллельного неструктурированного конечно-объемного алгоритма моделирования уравнений Навье-Стокса, разработанного с использованием моделей программирования MPI, OpenMP и CUDA. Приводятся параметры быстродействия и параллельной эффективности вычислений, полученные в процессе расчета задачи сверхзвукового обтекания сферы на смешанной сетке.

**Ключевые слова:** гетерогенные вычисления, балансировка загрузки, неструктурированные сетки, вычислительная газовая динамика

**Для цитирования:** Суков С. А. Метод балансировки загрузки для гетерогенных численных алгоритмов моделирования газодинамических течений // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 2. С. 193–206. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.193–206>

### 1. Введение

Вычислительный эксперимент постепенно становится основным методом предварительной оценки характеристик проектируемых технических объектов и моделирования физических процессов. Качество результатов расчета задач вычислительной газовой динамики (CFD), помимо точности численного алгоритма, зависит от типа и пространственного шага сетки. Для дискретизации двумерных и трехмерных областей со сложной формой границ широко применяются неструктурированные гибридные и смешанные сетки, которые в общем случае состоят из многогранников произвольной формы [1].

Моделирование течений на подробных сетках CFD-алгоритмами повышенного порядка точности требует привлечения ресурсов суперкомпьютерных систем. На текущем этапе развития вычислительной техники производительность кластеров максимизируется за счет перехода к гетерогенной (гибридной) архитектуре узлов. В дополнение



к центральным многоядерным процессорам (CPU) на каждом узле устанавливаются массивно-параллельные ускорители. Это могут быть существенно многоядерные сопроцессоры Intel Xeon Phi или потоковые графические мультипроцессоры (GPU). Аппаратно заложенный в гетерогенной архитектуре многоуровневый параллелизм требует разработки специальных вычислительных алгоритмов, сочетающих модели параллельных вычислений с распределенной (уровень узлов кластера) и общей (уровень CPU-ядер одного узла) памятью, а также параллелизм SIMD (Single Instruction Multiple Data) на уровне сопроцессоров. Описание примеров алгоритмов моделирования задач газовой динамики для гетерогенных систем и их программных реализаций можно найти в работах [2–5].

Эффективность и масштабируемость параллельных алгоритмов для кластерных систем жестко связана с эффективностью применяемого метода балансировки загрузки. Стандартным решением проблемы распределения вычислений является метод геометрического параллелизма (domain decomposition), при котором каждый MPI-процесс обрабатывает ассоциированное с ним подмножество сеточных ячеек. На этапе балансировки топология сетки представляется как нерегулярный граф ее элементов и их связей по вершинам, ребрам или граням. Для разбиения дуального графа используются программные реализации соответствующих методов [6–7]. Корректная постановка задачи декомпозиции требует ввода весов ячеек смешанной сетки, пропорциональных объему вычислений в процессе их обработки. Результат разбиения для вычислений в гетерогенном режиме должен дополнительно учитывать фактическое соотношение производительности программных реализаций CFD-алгоритма для разных устройств.

В настоящей работе на примере параллельного алгоритма моделирования уравнений Навье-Стокса описан эффективный подход к решению проблемы балансировки загрузки для гетерогенных вычислений. Приводятся оценки производительности и параллельной эффективности расчета сверхзвукового обтекания сферы на смешанной сетке с четырьмя типами элементов.

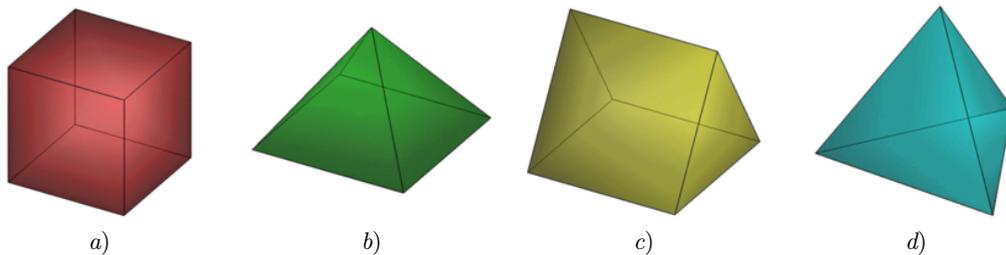
## 2. Параллельный алгоритм моделирования уравнений Навье-Стокса

Предлагаемый метод статической балансировки загрузки рассматривается применительно к параллельной версии неструктурированного конечно-объемного алгоритма моделирования задач газовой динамики повышенного порядка точности с явным интегрированием по времени. В качестве математической модели течений вязкого сжимаемого теплопроводного газа используется система нестационарных уравнений Навье–Стокса, записанная в виде законов сохранения

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \mathbf{F} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, E)^T$  – вектор консервативных газодинамических переменных;  $\mathbf{F} = \mathbf{F}^C + \mathbf{F}^D$  – вектор потока, равный сумме потоков конвективного и диффузионного переноса, соответственно.

Дискретизация системы уравнений (2.1) выполняется на смешанных сетках с элементами четырех типов (Рис. 2.1). Многогранная сеточная ячейка  $C_i$  имеет объем  $|C_i|$  и центр масс  $\mathbf{r}_i$ . Ее поверхность  $\partial C_i = \bigcup_{j \in I_i} \partial C_{ij}$  состоит из разделяемых с многогранниками множества  $I_i$  плоских граней. Общая для контрольных объемов  $C_i$  и  $C_j$



**Рис. 2.1.** Типы ячеек смешанной сетки: а) гексаэдр; б) четырехугольная пирамида; в) треугольная призма; г) тетраэдр

**Fig 2.1.** Mixed mesh cell types: а) hexahedron; б) quadrangular pyramid; в) triangular prism; г) tetrahedron

треугольная или четырехугольная грань  $\partial C_{ij}$  характеризуется координатой центра  $\mathbf{r}_{ij}$ , единичным вектором внешней нормали  $\mathbf{n}_{ij}$  и площадью  $S_{ij}$ .

Дискретные значения сеточных функций  $Q_i$  относятся к центрам масс расчетных ячеек и равны среднему интегральному значению от непрерывно распределённой величины

$$Q_i = \frac{1}{|C_i|} \int_{C_i} Q d\Omega.$$

Поведение функции  $f$  внутри контрольного объема реконструируется линейным полином вида

$$f_i^P(\mathbf{r}) = f_i + \Psi_i (\nabla f_i \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)),$$

где  $\nabla f_i = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$  соответствует градиенту  $f$  в центре ячейки, и  $\Psi$  обозначена функция-лимитер. Компоненты вектора градиента определяются на основе дискретного аналога формулы интегрального представления градиента

$$\nabla f_i = \frac{1}{|C_i|} \sum_{j \in I_i} \left( g_{ij}^i f_i + g_{ij}^j f_j \right) \mathbf{n}_{ij} S_{ij}. \quad (2.2)$$

Геометрические коэффициенты  $g_{ij}^i$  и  $g_{ij}^j$  в (2.2) обратно пропорциональны расстояниям от центров ячеек до плоскости общей грани и отвечают условию  $g_{ij}^i + g_{ij}^j = 1$ .

В соответствии с методом контрольного объема для ячеек сетки записывается балансовое соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_i}{\partial t} + \sum_{j \in I_i} (\mathbf{F}_{ij}^C + \mathbf{F}_{ij}^D) S_{ij} = 0.$$

Конвективный поток через грань контрольного объема вычисляется с использованием одной из базовых схем решения задачи Римана о распаде произвольного разрыва

$$\mathbf{F}_{ij}^C = \Phi(\mathbf{Q}_i^P(\mathbf{r}_{ij}), \mathbf{Q}_j^P(\mathbf{r}_{ij}), \mathbf{n}_{ij}).$$

Выбор схемы зависит от параметров моделируемого течения. В качестве аргументов функции  $\Phi$  подставляются реконструированные значения газодинамических переменных слева и справа от центра рассматриваемой грани.

Необходимые для определения диффузионных потоков первые производные трех компонент скорости и температуры вычисляются как комбинация усредненных градиентов  $\overline{\nabla Q_{ij}}$  и производных по направлению

$$\overline{\nabla Q_{ij}} = \frac{\nabla Q_i + \nabla Q_j}{2},$$

$$\nabla Q_{ij} = \overline{\nabla Q_{ij}} - \left[ \overline{\nabla Q_{ij}} \mathbf{t}_{ij} - \frac{Q_j - Q_i}{l_{ij}} \right] \mathbf{t}_{ij}.$$

Параметр  $l_{ij} = |\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i|$  соответствует расстоянию между центрами соседних ячеек,  $\mathbf{t}_{ij} = \frac{(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i)}{l_{ij}}$  - единичный вектор, сонаправленный с проходящей через центры прямой.

Постановка граничных условий реализуется путем явного задания значений газодинамических переменных  $\mathbf{Q}_\Gamma$  или потоков  $\mathbf{F}_{i\Gamma}$  в центрах масс граней  $\partial C_{i\Gamma}$ , расположенных на границе расчетной области  $\Gamma$ . Для интегрирования системы газодинамических уравнений по времени используется явная четырехшаговая схема Рунге-Кутты (RK) второго порядка точности.

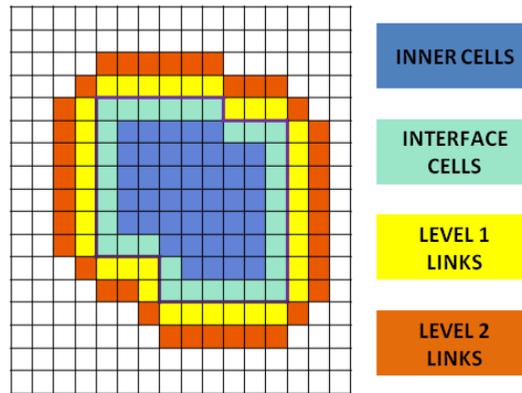
Последовательная программная реализация вычислительного ядра газодинамического алгоритма состоит из трех функциональных блоков:

- блок линейной реконструкции – вычисление градиентов, цикл по контрольным объемам;
- блок вычисления потоков – определение потоков через грани расчетных ячеек, цикл по граням контрольных объемов;
- блок обновления значений переменных – суммирование потоков и вычисление значений газодинамических переменных на новом шаге RK или новом временном слое, цикл по контрольным объемам.

Поток через общую грань соседних контрольных объемов вычисляется один раз и буферизуется в локальный массив. При выполнении третьего функционального блока значение потока дважды считывается из буфера с разными знаками. Витки циклов всех функциональных блоков не имеют зависимости по данным.

Параллельная версия алгоритма для гетерогенных кластерных систем с графическими ускорителями реализована с использованием программных моделей MPI, OpenMP и CUDA. Каждый MPI-процесс обрабатывает подмножество сеточных ячеек, называемое доменом. По расположению в пределах домена его ячейки делятся на внутренние и интерфейсные многогранники. Внутренние многогранники не имеют общих граней с многогранниками соседних доменов. Расчетная область MPI-процесса объединяет домен и зону запрашиваемых данных. В нее попадают ячейки доменов других процессов, являющиеся связями первого и второго уровня по дуальному графу для интерфейсных ячеек. Значения сеточных функций в ячейках второго уровня связей учитываются при вычислении градиентов в ячейках первого уровня связей. Сеточные функции и их градиенты в ячейках первого уровня связей используются для определения потоков через границу домена. Пример выделения расчетной области для домена структурированной сетки на плоскости показан на Рис. 2.2.

По типу привязки к центральным процессорам или ускорителям MPI-процессы делятся на вычислительные и управляющие соответственно. Вычислительные MPI-процессы резервируют для выполнения функциональных блоков газодинамического



**Рис. 2.2.** Пример расчетной области MPI-процесса  
**Fig 2.2.** An example of the MPI process computational domain

алгоритма одно или несколько ядер центрального процессора. Распределение вычислений между CPU-ядрами реализовано через постановку директив OpenMP. Управляющий MPI-процесс запускается на одном ядре CPU и устанавливает привязку к графическому ускорителю, куда переносятся основные вычисления. В программных реализациях функциональных блоков для GPU один поток CUDA обрабатывает сеточный элемент или грань. Запущенный на CPU фоновый MPI-процесс управляет постановкой GPU-ядер в очередь на выполнение, передачей MPI-сообщений и копированием данных между процессором и ускорителем.

В параллельном режиме вычислений выполнение функциональных блоков газодинамического алгоритма чередуется с обменом данными. MPI-процесс принимает значения газодинамических переменных в ячейках зоны запрашиваемых данных, а также буферизует и передает значения переменных в собственных ячейках, оказавшихся в зонах запрашиваемых данных других MPI-процессов. Применяемый принцип формирования расчетных областей допускает распараллеливание с одной точкой синхронизации MPI-процессов на каждом шаге RK при условии дублирования вычислений потоков и градиентов вдоль границ разбиения сетки на домены.

Вычислительные процессы работают с явной точкой синхронизации. Функциональные блоки газодинамического алгоритма запускаются строго по завершении процедуры обмена данными. В случае переноса вычислений на графический ускоритель происходит перекрытие обменов данными с вычислениями. Блок-схема алгоритма работы управляющего процесса показана на Рис. 2.3. Вспомогательные операции распараллеливания, в число которых входят буферизация передаваемых данных, копирование данных между CPU и GPU и передача MPI-сообщений, выполняются одновременно с вычислением градиентов во внутренних ячейках домена и потоков через общие грани внутренних расчетных ячеек.

Более подробное описание численного алгоритма и его программной реализации приведено в [8–10].

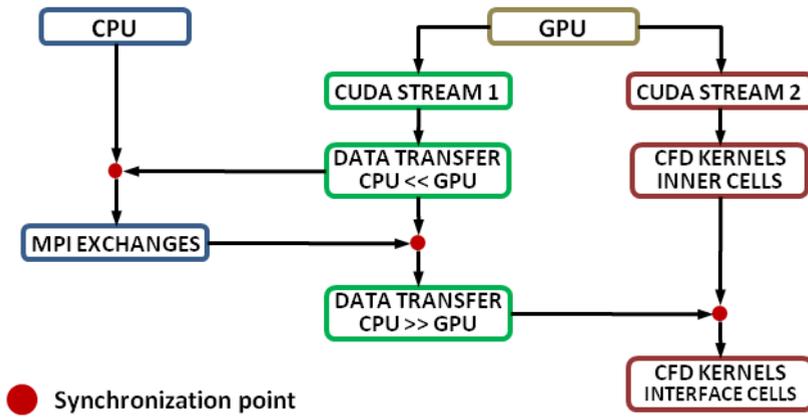


Рис. 2.3. Алгоритм работы управляющего MPI-процесса  
 Fig 2.3. Algorithm of the control MPI process

### 3. Алгоритм балансировки загрузки

Предлагаемый алгоритм статической балансировки загрузки параллельных процессов включает пять этапов:

- определение весов ребер и вершин дуального графа сетки;
- выбор конфигурации запуска;
- определение соотношения между производительностью центральных процессоров и массивно-параллельных ускорителей;
- декомпозиция сетки между узлами кластера;
- декомпозиция подобластей кластеров между вычислительными устройствами.

Весы ребер и вершин дуального графа сетки устанавливаются с учетом особенностей программной реализации CFD-алгоритма. В рассматриваемом случае объем вычислений в процессе полиномиальной реконструкции и обновления значений переменных в ячейке на новом слое по времени кратен числу граней контрольного объема. Общее число граней, обработанных при вычислении потоков, приблизительно равно половине от общего числа граней ячеек, входящих в расчетную подобласть процесса. Поэтому целочисленный вес сеточной ячейки (вершины дуального графа) приравнивается к числу ее граней. Ребра дуального графа эквивалентны связям ячеек через общую грань и не имеют весов.

Проблема выбора конфигурации запуска приложения заключается в поиске оптимального числа выполняемых на узле кластера вычислительных MPI-процессов. Число управляющих процессов соответствует числу установленных на узле ускорителей. Запуск отдельного вычислительного MPI-процесса на каждом из оставшихся CPU-ядер приводит к росту объема вычислений вследствие увеличения площади границы разбиения на домены. Для алгоритмов с дублированием вычислений вдоль границ доменов более эффективным оказывается гибридное распараллеливание MPI+OpenMP.

В таком случае привязка управляющих MPI-процессов к ядрам центральных процессоров должна учитывать число нитей OpenMP, порождаемых вычислительными MPI-процессами.

На Рис. 3.1 показан пример двух вариантов загрузки узла кластера с двумя шестиядерными CPU и двумя GPU-ускорителями. В первом варианте (Рис. 3.1, а) на узле запускается два вычислительных MPI-процесса с вложенным распараллеливанием циклов между пятью OpenMP-нитеями, во втором – пять вычислительных процессов по две нити OpenMP – (рис. 3.1, б). Число управляющих процессов в обоих случаях равно двум. Обозначенная на рисунке жесткая привязка MPI-процессов и нитей OpenMP к ядрам центрального процессора (например, с использованием пары функций `sched_getaffinity` и `sched_setaffinity`) необходима для стабилизации времени работы параллельного приложения.

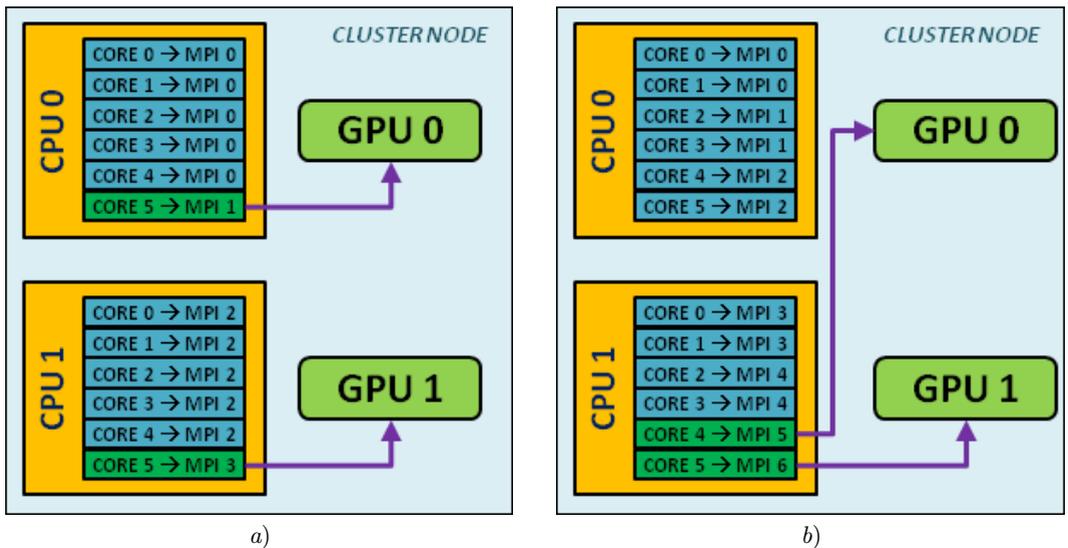
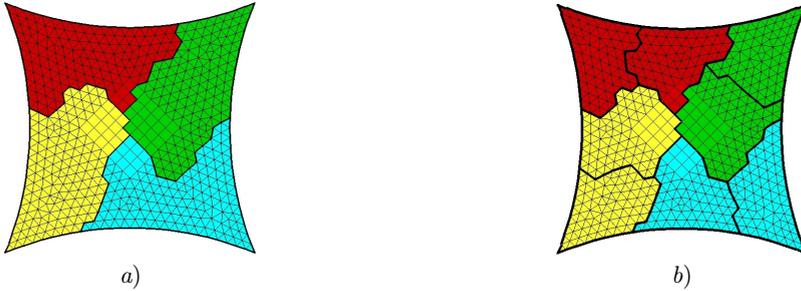


Рис. 3.1. Варианты загрузки узла кластера  
Fig 3.1. Examples of run MPI processes on a cluster node

Лучший по быстродействию вариант запуска выявляется экспериментально. Одновременно определяется фактическое соотношение между производительностью вычислений на различных устройствах. При небольшом размере расчетной сетки в качестве исходных данных теста целесообразно рассматривать постановку основной задачи. В противном случае эксперименты проводятся на некотором упрощенном тесте, выполнение которого возможно на одном узле. При первом запуске считается, что быстродействие процессора и ускорителя совпадает. Фиксируется только чистое время выполнения функциональных блоков CFD-алгоритма, а время передачи данных не учитывается. На основе полученных результатов соотношение производительности корректируется. И эксперимент повторяется до тех пор, пока времена выполнения функциональных блоков на различных устройствах не совпадет.

Декомпозиция расчетной области в процессе балансировки загрузки происходит в два этапа (Рис. 3.2). Масштабируемость гетерогенного приложения измеряется числом загруженных узлов кластера, производительность которых считается идентичной. Поэтому на первом этапе (Рис. 3.2, а) граф сетки делится на равные по весу домены пер-

вого уровня, ассоциированные с узлами суперкомпьютера. На втором этапе (Рис. 3.2, б) внутри доменов первого уровня выделяются домены второго уровня, обрабатываемые запущенными на узле управляющими и вычислительными MPI-процессами. Веса доменов второго уровня соответствуют производительности вычислительных устройств. Преимущество двухуровневой схемы декомпозиции состоит в минимизации числа передаваемых сообщений между MPI-процессами, запущенными на разных узлах.

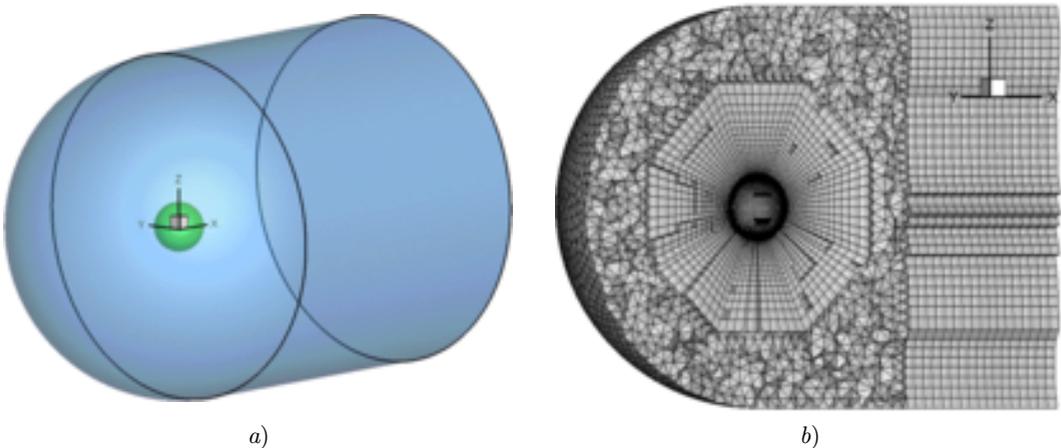


**Рис. 3.2.** Двухуровневая декомпозиция смешанной сетки: а) декомпозиция между четырьмя узлами на первом уровне; б) последующее разбиение между двумя устройствами на втором уровне

**Fig 3.2.** Two-level mixed mesh decomposition: a) decomposition between four nodes on the first level; b) partitioning between two devices on the second level

#### 4. Результаты вычислительных экспериментов

Эффективность метода балансировки загрузки исследовалась на примере расчета сверхзвукового обтекания единичной сферы при  $M = 2$  и  $Re = 300$ . Геометрия расчетной области и структура сетки отображены на Рис. 4.1.

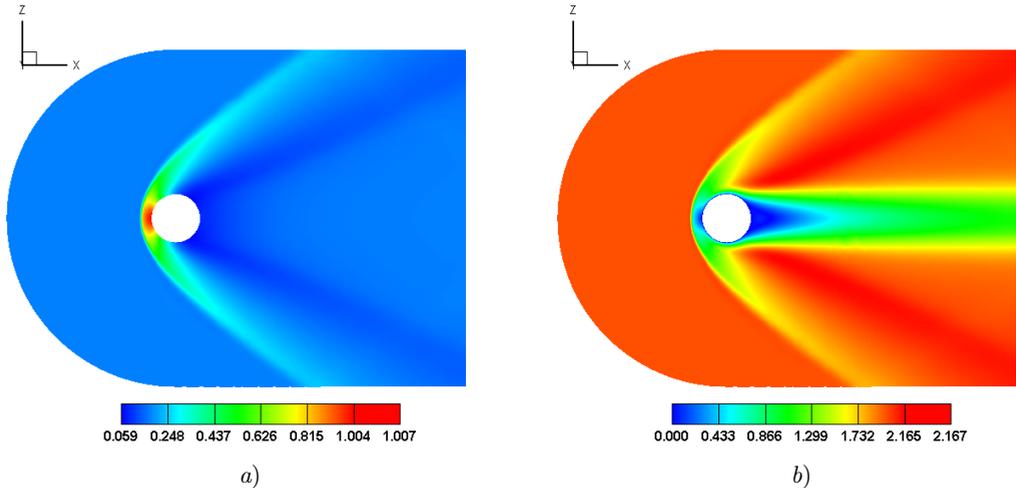


**Рис. 4.1.** а) расчетная область; б) структура смешанной сетки  
**Fig 4.1.** а)Computational domain; б) mixed mesh structure

В процессе генерации сетки область решения задачи была разделена на 54 подобласти, внутри которых построены согласованные по границам сеточные блоки различных

типов. Плотность пространственной дискретизации увеличивается вблизи поверхности сферы. Зона разрешения пограничного слоя заполнена гексаэдрами и треугольными призмами. В общей сложности сетка состоит из 1 039 620 узлов и 2 160 156 элементов: 1 238 224 тетраэдра, 33 276 четырехугольных пирамид, 172 800 треугольных призм и 715 856 гексаэдров. Выбранная размерность сетки по числу элементов позволяет как запускать расчет на одном узле кластера, так и оценивать масштабируемость гетерогенного алгоритма.

На Рис. 4.2 показана визуализация картины стационарного течения, построенная по результатам расчета. Контрольные параметры течения (например, коэффициент сопротивления  $C_d = 1.401$ ) согласуются с опубликованными в [11] данными.



**Рис. 4.2.** а) поле безразмерного давления; б) числа Маха

**Fig 4.2.** a) dimensionless pressure distribution; b) Mach number distribution

Для проведения экспериментов по оценке эффективности параллельных вычислений использовался гетерогенный суперкомпьютер К-100, установленный в ИМП им. М. В. Келдыша РАН. Данный кластер состоит из объединенных высокоскоростной коммуникационной системой узлов с несимметричной архитектурой: два центральных шестиядерных процессора Intel Xeon X5670 и три графических ускорителя NVIDIA 2050. Эксперимент включает серию запусков программы на различном числе узлов в трех режимах: загрузка только центральных процессоров, загрузка только графических ускорителей и гетерогенный режим распараллеливания. При запуске каждой конфигурации фиксировалось время выполнения 200 шагов газодинамического алгоритма (800 вызовов функциональных блоков). В качестве начальных данных использовалось поле сеточных функций установившегося течения.

В представленных ниже результатах быстродействие выполнения программы на  $N$  узлах характеризуется скоростью вычислений  $R_N$ , которая измеряется числом шагов интегрирования по времени в секунду. Ускорение и эффективность распараллеливания вычисляются относительно времени выполнения теста на одном узле.

В режиме загрузки графических ускорителей на узле кластера запускается три управляющих MPI-процесса с привязкой к трем ядам первого CPU. График изменения  $R^{GPU}$  показан на Рис. 4.3 зеленой линией; там же красной линией отображен график изменения скорости вычислений в случае балансировки загрузки путем декомпозиции

дуального графа без весов. Из полученных данных следует, что вариант балансировки с разбиением взвешенного графа позволяет снизить время работы программы на 10-18 %. При этом эффективность распараллеливания в обоих случаях не опускается ниже 80 %.

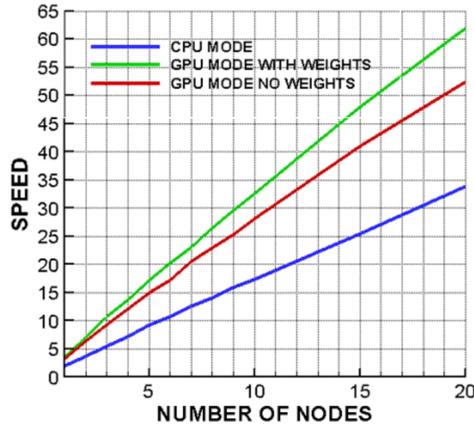


Рис. 4.3. Скорость вычислений

Fig 4.3. Computation speed

В режиме загрузки центральных процессоров на узле запускается четыре вычислительных MPI-процесса с внутренним распараллеливанием функциональных блоков между тремя нитями OpenMP. Полученная скорость вычислений  $R^{CPU}$  (синяя линия на Рис. 4.3) оказывается в среднем в 1.88 раза ниже  $R^{GPU}$  при практически совпадающей эффективности распараллеливания.

В гетерогенном режиме на узле выполняется три вычислительных и три управляющих MPI-процесса (Рис. 4.4).

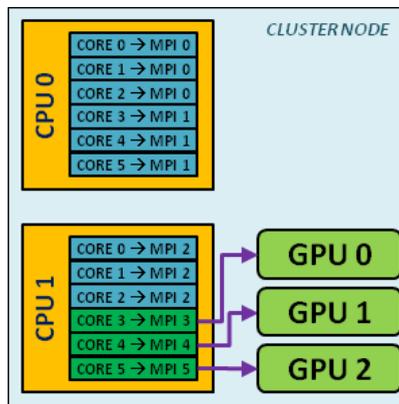


Рис. 4.4. Конфигурация запуска

Fig 4.4. Program launch configuration

При первичном запуске программы на одном узле кластера с равномерной балан-

сировкой загрузки между вычислительными и управляющими MPI-процессами минимальное и максимальное время выполнения теста функциональных блоков газодинамического алгоритма отличаются приблизительно в 2.43 раза, что соответствует соотношению производительности 0.41:1. При последующих настроенных запусках, уже с обменов данными, соотношение меняется до 0.35:1. Корректировка в меньшую сторону относительной производительности вычислительных MPI-процессов объясняется падением производительности параллельных вычислений на CPU вследствие блокировки запуска функциональных блоков CFD-алгоритма до завершения процедуры обмена данными.

График скорости вычислений в гетерогенном режиме  $R^{HET}$  приведен на Рис. 4.5. Для сравнения приводится график теоретически ожидаемой по результатам предшествующих запусков скорости вычислений  $R_N^{OPT} = R_N^{GPU} + 0.75R_N^{CPU}$ . Поправочный коэффициент при  $R_N^{GPU}$  учитывает использование трех ядер центрального процессора для запуска управляющих MPI-процессов.

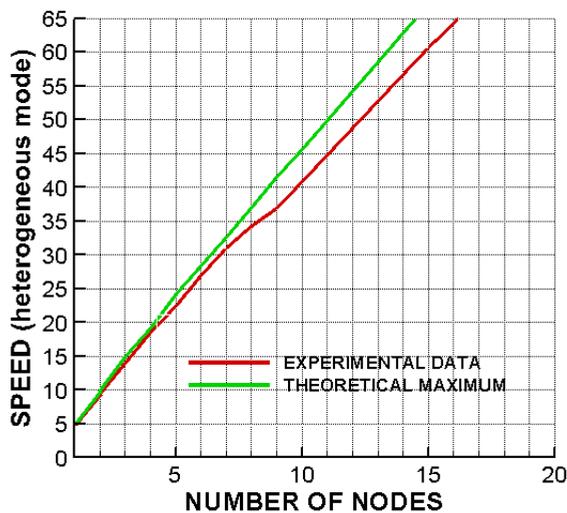


Рис. 4.5. Скорость вычислений в гетерогенном режиме  
Fig 4.5. Computation speed for heterogeneous mode

Соотношение между фактической и ожидаемой скоростью вычислений находится на отрезке  $\frac{R_N^{HET}}{R_N^{OPT}} \in [0.91; 0.96]$ . С ростом числа узлов эффективность распараллеливания плавно опускается с 97 до 82 %. На пределе масштабируемости задачи (20 узлов, 120 MPI-процессов, 240 процессорных ядер, 60 ускорителей) время выполнения теста составляет 2.527 с. Другими словами, один шаг RK занимает порядка 0.003 с, включая обмены данными. Представленные результаты могут рассматриваться как подтверждение эффективности описанного в статье метода балансировки загрузки.

**Благодарности.** Расчёты проводились на суперкомпьютерах ЦКП ИПМ им. М. В. Келдыша РАН.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Liou M.-S., Kao K.-H. Progress in grid generation: from chimera to DRAGON grids. Cleveland: National Aeronautics and Space Administration, 1994. 26 p.
2. Zaspel P., Griebel M. Solving incompressible two-phase flows on multi-GPU clusters // Computers and fluids, 2013, v. 80, p. 356–364. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.01.021>
3. Davydov A. A., Chetverushkin B. N., Shilnikov E. V. Simulating flows of incompressible and weakly compressible fluids on multicore hybrid computer systems // Comput. Math. and Math. Phys. Vol. 50. pp. 2157–2165 (2010). DOI: <https://doi.org/10.1134/S096554251012016X>
4. Krasnov M. M., Kuchugov P. A., Ladonkina M. E., Tishkin V. F. Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids: Using the operator programming method // Math. Models Comput. Simul. 2017. Vol. 9, Issue 5. pp. 529–543. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048217050064>
5. Gorobets A., Soukov S., Bogdanov P. Multilevel parallelization for simulating turbulent flows on most kinds of hybrid supercomputers // Computers and Fluids. 2018. Vol. 173. pp. 171–177. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.03.011>
6. Schloegel K., Karypis G., Kumar V. Parallel multilevel algorithms for multi-constraint graph partitioning // Euro-Par 2000 Parallel Processing / ed by. A. Bode, T. Ludwig, W. Karl, R. Wismuller. Berlin-Heidelberg: Springer, 2000. Vol. 1900. pp. 296–310. DOI: [https://doi.org/10.1007/3-540-44520-X\\_39](https://doi.org/10.1007/3-540-44520-X_39)
7. Golovchenko E. N., Kornilina M. A., Yakobovskiy M. V. Algorithms in the parallel partitioning tool GridSpiderPar for large mesh decomposition // Proceedings of the 3rd International Conference on Exascale Applications and Software (EASC 2015). Edinburgh: University of Edinburgh, 2015. pp. 120–125.
8. Blazek J. Computational fluid dynamics: Principles and applications. Amsterdam: Elsevier, 2001. 470 c.
9. Kim S., Caraeni D., Makarov B. A multidimensional linear reconstruction scheme for arbitrary unstructured grids : technical report // AIAA 16th Computational Fluid Dynamics Conference. 2003. DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2003-3990>
10. Soukov S. A., Gorobets A. V., Bogdanov P. B. Portable solution for modeling compressible flows on all existing hybrid supercomputers // Math. Models Comput. Simul. 2018. Vol. 10. pp. 135–144. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048218020138>
11. Nagata T., Nonomura T., Takahashi S., Mizuno Y., Fukuda K. Investigation on subsonic to supersonic flow around a sphere at low Reynolds number of between 50 and 300 by direct numerical simulation // Physics of Fluids. 2016. Vol. 28. pp. 056101-1–056101-20. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4947244>

*Поступила 18.03.2021; доработана после рецензирования 11.04.2021;  
принята к публикации 6.05.2021*

*Информация об авторе:*

**Суков Сергей Александрович**, старший научный сотрудник, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (125047, Россия, г. Москва, Миусская пл., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0667-6955>, [ssoukov@gmail.com](mailto:ssoukov@gmail.com)

*Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.*

*Конфликт интересов:* автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

*Original article*

MSC2020 65Y05

## Load balancing method for heterogeneous CFD algorithms

S. A. Soukov

*Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (Moscow, Russian Federation)*

**Abstract.** The problem of load balancing for unstructured heterogeneous numerical algorithms for simulation of physical processes is considered. A computational distribution method for hybrid supercomputers with multicore CPUs and massively parallel accelerators is described. The load balancing procedure includes determination of dual graph vertices and edges weights, devices' performance test and two-level decomposition of the computational mesh based on domain decomposition method. First level decomposition involves the graph partitioning between supercomputer nodes. On the second level node subdomains are partitioned between the MPI-processes running on the nodes. The details of the proposed approach are considered on the example of an unstructured finite-volume algorithm for modeling the Navier-Stokes equations with polynomial reconstruction of variables and explicit time integration scheme. The parallel version of the algorithm is developed using the MPI, OpenMP and CUDA programming models. The parameters of performance, parallel efficiency and scalability of the heterogeneous program are given. The results mentioned are obtained during the simulation of a supersonic flow around a sphere on a mixed mesh consisting of tetrahedrons, triangular prisms, quadrangular pyramids and hexagons.

**Key Words:**

**For citation:** S. A. Soukov. Load balancing method for heterogeneous CFD algorithms. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:2(2021), 193–206. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202102.193-206>

## REFERENCES

1. M.-S. Liou, K.-H. Kao, *Progress in grid generation: from chimera to DRAGON grids*, National Aeronautics and Space Administration Publ., Cleveland, 1994, 26 p.
2. P. Zaspel, M. Griebel, “Solving incompressible two-phase flows on multi-GPU clusters”, *Computers and Fluids*, **80** (2013), 356–364. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2012.01.021>
3. A. A. Davydov, B. N. Chetverushkin, E. V. Shilnikov, “Simulating flows of incompressible and weakly compressible fluids on multicore hybrid computer systems”, *Comput. Math. and Math. Phys.*, **50** (2010), 2157–2165. DOI: <https://doi.org/10.1134/S096554251012016X>

4. M. M. Krasnov, P. A. Kuchugov, M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin, “Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids: Using the operator programming method”, *Math. Models Comput. Simul.*, **9**:5 (2017), 529–543. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048217050064>
5. A. Gorobets, S. Soukov, P. Bogdanov, “Multilevel parallelization for simulating turbulent flows on most kinds of hybrid supercomputers”, *Computers and Fluids*, **173** (2018), 171–177. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2018.03.011>
6. K. Schloegel, G. Karypis, V. Kumar, “Parallel multilevel algorithms for multiconstraint graph partitioning”, *Euro-Par 2000 Parallel Processing*, **1900**, eds. A. Bode, T. Ludwig, W. Karl, R. Wismuller, Springer, Berlin-Heidelberg, 2000, 296–310 DOI: [https://doi.org/10.1007/3-540-44520-X\\_39](https://doi.org/10.1007/3-540-44520-X_39).
7. E. N. Golovchenko, M. A. Kornilina, M. V. Yakobovskiy, “Algorithms in the parallel partitioning tool GridSpiderPar for large mesh decomposition”, *Proceedings of the 3rd International Conference on Exascale Applications and Software (EASC 2015)*, University of Edinburgh Publ., Edinburgh, 2015, 120–125.
8. J. Blazek, *Computational fluid dynamics: principles and applications*, Elsevier, Amsterdam, 2001, 470 p.
9. S. Kim, D. Caraeni, B. Makarov, “A multidimensional linear reconstruction scheme for arbitrary unstructured grids”, technical report, *AIAA 16th Computational Fluid Dynamics Conference* (Orlando, Florida American Institute of Aeronautics and Astronautics. June 2003), 2003 DOI: <https://doi.org/10.2514/6.2003-3990>.
10. S. A. Soukov, A. V. Gorobets, P. B. Bogdanov, “Modeling Compressible Flows on All Existing Hybrid Supercomputers”, *Math. Models Comput. Simul.*, **10** (2018), 135–144. DOI: <https://doi.org/10.1134/S2070048217050064>
11. T. Nagata, T. Nonomura, S. Takahashi, Y. Mizuno, K. Fukuda, “Investigation on subsonic to supersonic flow around a sphere at low Reynolds number of between 50 and 300 by direct numerical simulation”, *Physics of Fluids*, **28** (2016), 056101-1–056101-20. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4947244>

*Submitted 18.03.2021; Revised 11.04.2021; Accepted 6.05.2021*

*Information about the author:*

**Sergey A. Soukov**, Senior Researcher, Federal Research Center Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences (4 Miusskaya Sq., Moscow 125047, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0667-6955>, [ssoukov@gmail.com](mailto:ssoukov@gmail.com)

*The author have read and approved the final manuscript.*

*Conflict of interest:* The author declare no conflict of interest.

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

## К 80-ЛЕТИЮ

## ВЛАДИМИРА КОНСТАНТИНОВИЧА ГОРБУНОВА



Владимир Константинович Горбунов родился 27 апреля 1941 г. в г. Семипалатинске (Казахская ССР). Детство и юность прошли в г. Фрунзе – столице Киргизской ССР.

В 1969 г. В.К. Горбунов окончил Московский физико-технический институт по специальности «Системы автоматического управления». В 1970 – 1976 гг. Владимир Константинович работал в Ташкентском государственном университете им. В.И. Ленина младшим, затем старшим научным сотрудником и старшим преподавателем.

В 1974 г. защитил в МФТИ кандидатскую диссертацию по специальности «Математическая кибернетика» под научным руководством доктора физико-математических наук Феликса Леонидовича Черноусько (академик РАН с 1992 г.).

В 1976 г. Владимир Константинович вернулся в город Фрунзе, где работал в Институте математики АН Киргизской ССР старшим научным сотрудником, а с 1980 г. – заведующим лабораторией. Основным направлением его исследований в киргизский период были методы оптимизации и некорректно постав-

ленные задачи математического моделирования и вычислительной математики.

В это же время он активно занимался горным туризмом и альпинизмом, и немало горных походов было пройдено им с нашим активным коллегой – недавно ушедшим Борисом Владимировичем Логиновым (1938–2018 гг.).

В 1983 году на Международном конгрессе математиков (ICM-82, Варшава) им были представлены первые результаты по методу нормальных сплайнов для интегральных уравнений первого рода.

В 1980-е гг. В.К. Горбунов занимался также моделированием демографических процессов с учетом их этнической неоднородности, особенно заметной в среднеазиатских республиках СССР. В 1987 г. под его руководством была подготовлена и защищена кандидатская диссертация, посвященная этой тематике, на соискание степени кандидата экономических наук (Койчуманов Т.Д., МГУ имени М.В. Ломоносова).

С 1990 г. по настоящее время В.К. Горбунов работает в Ульяновском государственном университете. В 1991 г. он стал доктором физико-математических наук, защитив

диссертацию «Экстремальные задачи обработки результатов измерений» по специальности «Вычислительная математика» в Вычислительном центре СО АН СССР (Новосибирский Академгородок). С 2002 по 2012 гг. был заведующим созданной им кафедры математической экономики, которая в 2007 г. была преобразована в кафедру экономико-математических методов и информационных технологий (ЭММИТ), в 2017 г. – кафедру цифровой экономики. Горбунов продолжает работать на ней профессором, передав заведование своему ученику Лутошкину Игорю Викторовичу.

Важнейшими достижениями В.К. Горбунова до начала 2000-х гг. стали: метод параметризации для решения задач оптимального управления и систем нелинейных сингулярных дифференциальных уравнений [1, 2], метод регуляризации некорректных задач с параметризованными данными [3, 4] и метод нормальных сплайнов для решения линейных дифференциально-алгебраических и интегральных уравнений, вырожденных в различных смыслах [5, 6]. Результаты этих работ опубликованы в двух монографиях (АН Киргизской ССР), изданиях АН СССР, РАН, а также зарубежных изданиях (Springer, Elsevier).

С конца 1990-х гг. В.К. Горбунов перешел к исследованию математическими методами экономических проблем в области потребительских рынков, производства и ценообразования. При углубленном знакомстве с соответствующими разделами экономической теории В. К. Горбунов пришел к выводу, что эти разделы построены в рамках методологического индивидуализма, постулирующего независимость и рациональность элементарных агентов (индивидов-потребителей и фирм-производителей), и на этой основе оказалось невозможным построение теорий коллективного (агрегированного) рыночного спроса и макроэкономических производственных объектов, функционирующих также рационально.

Выход был найден на основе целостного (холистического) подхода к этим сложным, ввиду различия и трудности выявления потребительских и других предпочтений людей, объектам [7, 8<sup>1</sup>]. Для идентификации математических моделей, адекватно отражающих эти объекты, пригодились методы регуляризации, разработанные им ранее. Читателям, интересующимся экономическими приложениями и вкладом в эту проблематику исследований юбиляра, хорошим и лаконичным введением будет знакомство со статьей В.К. Горбунова и его ученика и коллеги А. Г. Львова [9], опубликованной в журнале «Журнал Средневожского математического общества». Кроме этого, тандем Горбунов-Львов успешно разрабатывает способы оценки эффективных (реально используемых) производственных фондов методом производственных функций [10]. На основе этой модели были получены оценки эффективных фондов региональных экономик (Уральский ФО, Поволжский ФО) [11], а также промышленных сегментов секторов малых, средних и крупных предприятий России [12]. На основе теории рыночного спроса реабилитирована и развита холистическая модель экономического равновесия Касселя-Вальда с единственным равновесием, что открывает возможности определения для конкретных национальных экономик оптимальных цен, учитывающих их технологические, климатические и другие особенности [13].

Начиная с середины 1990-х гг. исследования В.К. Горбунова регулярно поддерживаются грантами РФФИ, РГНФ и Минобрнауки России. Поддержке своих исследований на международном уровне Владимиру Константиновичу помогает участие во многих международных конференциях, а также работа по реферированию современной зарубежной научной литературы (статей и книг) по своим исследовательским интересам для международных реферативных журналов Zentralblatt fur Mathematik (Springer) и

<sup>1</sup>[http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o\\_1945611](http://www.rfbr.ru/rffi/ru/books/o_1945611)

Mathematical Review (AMS). Его работы в англоязычных изданиях высокого уровня посвящены, помимо результатов по экономической теории [13, 14], некоторым проблемам математического аппарата экономических исследований [15].

Владимира Константиновича связывают долгие годы сотрудничества со Средне-Волжским математическим обществом. Он является членом редакционной коллегии нашего журнала, активным участником научных конференций и школ-семинаров по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию, проводимых МГУ им. Н.П. Огарёва совместно со Средне-Волжским математическим обществом и ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. До 2020 г. В. К. Горбунов возглавлял ульяновское отделение общества.

Им подготовлено шесть кандидатов наук, четверо из которых работали на кафедре экономико-математических методов и информационных технологий (с 2019 – цифровой экономики) Ульяновского государственного университета.

Научные достижения В.К. Горбунова были отмечены региональными и правительственными наградами: Грамотой Верховного Совета Киргизской ССР (1979 г.); дипломом ВДНХ Киргизской ССР (1984 г.); медалью «Ветеран труда» (1989 г.); а также званиями Почетного работника высшего профессионального образования России (2001 г.) и Заслуженного профессора Ульяновского государственного университета (2011 г.).

Владимир Константинович Горбунов – не только крупный специалист в области математической экономики и решения экстремальных вычислительных задач, но и высокообразованный и эрудированный человек, преданно служащий своему делу.

Владимир Константинович обладает замечательным даром – умением видеть, формулировать и находить пути решения новых проблем в разных областях математического моделирования. Его увлеченность наукой и широта знаний оказывают самое плодотворное влияние на большое число учеников и последователей в различных научных центрах. Он – русский интеллигент с высочайшим профессиональным авторитетом.

Сердечно поздравляем Владимира Константиновича с юбилеем и желаем доброго здоровья, семейного счастья и дальнейших творческих успехов!

*А. С. Андреев, И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. З. Гринес,  
Е. В. Десяев, Д. К. Егорова, Р. В. Жалнин, Е. Б. Кузнецов,  
И. В. Лутосшкин, А. Г. Львов, Т. Ф. Мамедова, С. М. Мурюмин,  
И. П. Рязанцева, П. В. Сенин, Д. Н. Сидоров, Н. А. Сидоров,  
Л. А. Сухарев, В. Ф. Тишкин, И. И. Чучаев, П. А. Шаманаев*

### Список цитированных работ В.К. Горбунова

1. Горбунов В. К. Метод параметризации задач оптимального управления. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1979, Т. 19, № 2. С. 292-302.
2. Gorbunov V. K., Lutoshkin I.V., Martynenko Yu. V. A parametrization method for numerical solution of singular differential equations. Applied Numerical Mathematics. 2009. Vol. 59. Issue 3-4. pp. 639-655.
3. Горбунов В. К. О регуляризации экстремальных задач. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1991, Т. 31, № 2. С. 235-248.
4. Gorbunov V. K. Regularization of degenerated equations and inequalities under explicit data parametrization. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems (VSP). 2001, Vol. 9. No. 6, pp. 575-594.

5. Горбунов В. К. Метод нормальной сплайн-коллокации. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.* 1989, № 29, № 2. С. 212–224.
6. Gorbunov V. K., Sviridov V. Yu. A method of normal splines for linear DAEs on the number semi-axes. *Applied Numerical Mathematics*. 2009. Vol. 59. Issue 3-4. pp. 656-670.
7. Горбунов В. К. Математическая модель потребительского спроса: Теория и прикладной потенциал. М.: Экономика, 2004. 174 с. (РГНФ, № 03-02-16025).
8. Горбунов В. К. Потребительский спрос: Аналитическая теория и приложения. Ульяновск: УлГУ, 2015. 264 с. (РФФИ №15-06-07018).
9. Горбунов В. К., Львов А. Г. Обратная задача теории рыночного спроса и аналитические индексы спроса. *Журнал Средневожского математического общества*. 2019. Т. 25, № 1. С. 89-110. DOI 10.15507/2079-6900.21.201901.89-110.
10. Горбунов В. К., Львов А. Г. Построение производственных функций по данным об инвестициях. *Экономика и математические методы*. 2012. № 2.
11. Горбунов В. К., Львов А. Г. Эффективные производственные фонды и производственные функции малого предпринимательства регионов. *Экономика региона*. 2018. Т. 14, вып. 2. С. 502-515. DOI: 10.17059/2018-2-13.
12. Горбунов В. К., Львов А. Г. Анализ малого и среднего предпринимательства: построение производственных функций с оценкой эффективных фондов. *Экономика и математические методы*. 2021. № 3 (в печати).
13. Gorbunov V. K. Holistic Theory of Economic Equilibrium: The Modified Cassel-Wald Model. *Doklady Mathematics*, 2018. Vol. 98, No. 2, pp. 537-539. DOI: 10.1134/S1064562418060121.
14. Gorbunov V. K. The holistic theory of the consumer market demand. *European Proceedings of Social and Behavioural Sciences*. 2021. Vol. 105 - CDSSES, pp. 476-485. DOI:10.15405/epsbs.2021.04.52.
15. Gorbunov V. K. Analytical representation of concave and quasiconcave homogeneous functions. *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*. 2017. V. 66, Issue 4. pp. 507-519. DOI: 10.1080/02331934.2016.1278000.

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

**УДК.** Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

**MSC2020.** Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аффилиция автора(-ов):** название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

**Информация об авторе(-ах).** Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

**Объем аннотаций** на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов.**

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

**Ключевые слова.** Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов – 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы – не более трех.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

– *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

– *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

– *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

– *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

– *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

– *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

**Список литературы на русском языке** оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка.* Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

**Список литературы на английском языке** оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом (American Mathematical Society)* и *Европейским математическим обществом (European Mathematical Society)*. Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmobib.sty. Этот пакет разработан на основе пакета amsbib.sty.

#### **Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английский язык (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.****Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Статьи в журналах на английском языке.**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Статьи в электронном журнале на русском языке.**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке.**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]*, 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Книги (монографии и сборники) на русском языке.**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Статьи в материалах конференций на русском языке.**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]*, *Tezisy dokladov [Abstract]* (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

**UDC.** The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

**MSC2020 codes** The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

**Affiliate author(s):** the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

**Information about the author(s).** The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

**Keywords.** The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

– *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

– *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

– *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

– *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

– *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

- *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

**References** formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the `svmobib.sty` style package. This package is developed based on the `amsbib.sty` package.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

*Books (monographs and collections) in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

**Examples of bibliographic references for the section *References*.**

**Journal articles in Russian.**

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Journal articles in English:**

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

**Articles in the electronic journals in Russian:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Articles in collections in Russian:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

## Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение `equation`. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение `equation*`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения `Th`, `Lemm`, `Prop`, `Cor`, `Defin`, `NB` и `Example`. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \ \ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \ \
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \ \
\hline
1 & 2 \ \
\hline
3 & 4 \ \
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```

\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}

```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```

\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая_под-
пись_на_английском_языке}

```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```

\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}

```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_подпись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmobib.sty`. Основой этого пакета является стилевая файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citetthree`, `\citetfour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`**

**Статьи в журналах на русском языке**

**В разделе `thebibliography`:**

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневолжского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

**Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):**

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

**Статьи в электронном журнале на русском языке****В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными
ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**В разделе thebibliographyEn:**

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**Статьи в сборниках на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib4}  
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев  
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий  
\inbook Прикладная математика и механика  
\publaddr Ульяновск  
\publ УлГТУ  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib4En}  
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
\publaddr Ulyanovsk  
\publ UIGTU Publ.  
\yr 2014  
\issue 10  
\pages 4–13  
\lang In Russ.
```

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib5}  
\by Ю. Н. Бибииков  
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений  
\publaddr М.  
\publ Высш. шк.  
\yr 1991  
\totalpages 303
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib5En}  
\by Yu. N. Bibikov  
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]  
\publaddr Moscow  
\publ Visshay shkola Publ.  
\yr 1991  
\totalpages 303  
\lang In Russ.
```

**Статьи в материалах конференций на русском языке:****В разделе thebibliography:**

```
\RBibitem{shamanaevBib6}  
\by В. Г. Малинов
```

```
\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\proinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.
```

**В разделе thebibliographyEn:**

```
\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\proinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow
```

## The rules for article layout in the LaTeX system

*Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.*

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmo.sty and svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

*If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.*

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation\*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles – `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name \ \ \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in
English} \label{shamanaevtable1}
```

```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
\hline
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

**Design of pictures.** To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

- a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

- b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

- c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

- d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} \\ {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

- e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

- f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

- g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

**Examples of bibliographic references' using commands from the `svmobib.sty` package**

**Journal articles in Russian:**

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

**Journal articles in English:**

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

**Articles in the electronic journals in Russian**

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funktionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

**Articles in collections in Russian:**

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

**Books (monographs and collections) in Russian:**

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential
equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

**Conference proceedings in Russian:**

```

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

```

---

---

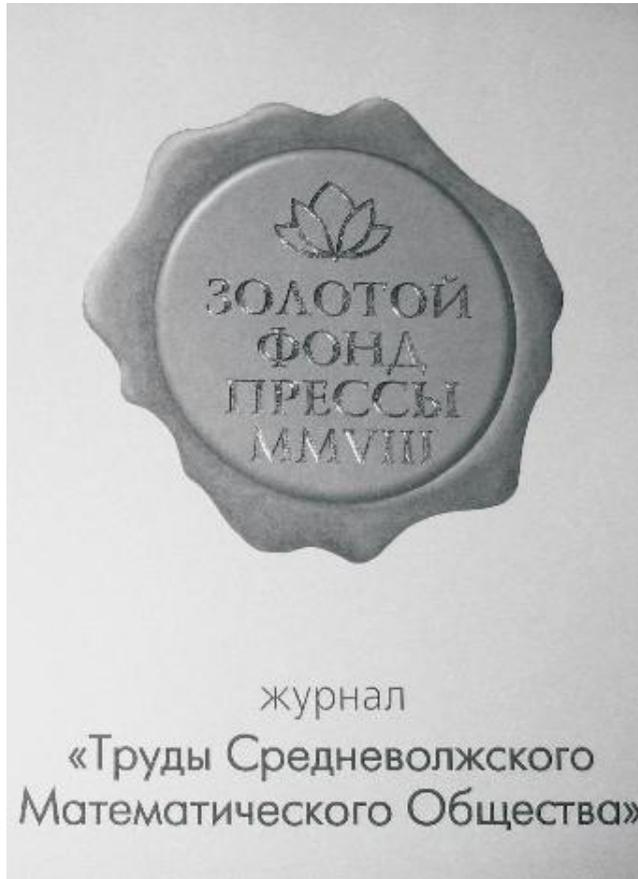
## Алфавитный указатель авторов

Баранов Д. А.	147	Починка О. В.	147
Горбунов В. К.	207	Рязанцева И. П.	185
Косов А. А.	159	Семенов Э. И.	159
Морозов А. И.	171	Суков С. А.	193

## Author Index

Baranov D. A.	147	Pochinka O. V.	147
Gorbunov V. K.	207	Ryazantseva I. P.	185
Kosov A. A.	159	Semenov E. I.	159
Morozov A. I.	171	Soukov S. A.	193

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Редактор: *Зинина С. Х.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 16.06.2021. Дата выхода в свет 30.06.2021. Цена свободная.

Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 8,75 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 675.

Типография: Издательство Мордовского университета

Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Atryahin V. A.*

Editor: *Zinina S. Kh.*

Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 16.06.2021. Date of publishing 30.06.2021. Free price.

Sheet size 70x108  $\frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 8,75.

Number of copies 100. Order no. 675.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24

**Для заметок**

---

## Для заметок

**Для заметок**



