

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 23 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 1

2021

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)
ISSN 2587-7496 (Online)

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 23, № 1. 2021

DOI 10.15507/2079-6900.23.202101

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 1 раз в квартал

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 23, NO. 1. 2021

DOI 10.15507/2079-6900.23.202101

Published since December 1998

Periodicity: Quarterly

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.



УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.



FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малазийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Губайдуллин Ирек Марсович — доктор физико-математических наук, доцент, старший научный сотрудник Института нефтехимии и катализа – обособленного структурного подразделения Федерального государственного бюджетного научного учреждения Уфимского федерального исследовательского центра Российской академии наук (Уфа, Россия).

Дерюгин Юрий Николаевич — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Каmachкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института, БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, ректор ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Ион Анка Вероника — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

Aleksandr S. Andreev — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Vyacheslav Z. Grines — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Irek M. Gubaydullin — Dr. Sci. (Phys.-Math.), Senior Researcher, Institute Petrochemistry and Catalysis – Subdivision of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences (Ufa, Russia)

Yuriy N. Derugin — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Chief Research Scientist, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Sergey I. Martynov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Olga V. Pochinka — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Nikolay D. Morozkin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Petr V. Senin — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Lev A. Suharev — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Nadezda G. Yarushkina — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Anca V. Ion — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

Содержание

МАТЕМАТИКА

О. С. Костромина

О резонансах при квазипериодических возмущениях систем с двойным предельным циклом, близких к двумерным нелинейным гамильтоновым . 11

С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова

Динамики математической модели системы фазовой автоподстройки с запаздыванием 28

В. И. Никонов

К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора 43

М. Э. Файрузов, Ф. В. Лубышев

Об одном методе приближенного решения смешанной краевой задачи для уравнения эллиптического типа 58

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, Ю. В. Покладова

Исследование динамической устойчивости изгибно-крутильных деформаций трубопровода 72

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, Е. В. Данилова, Е. А. Лапшина

Математическое моделирование переноса тепла в системе плёнка-подложка-термостат при нагреве электропроводящей плёнки импульсным током высокой плотности 82

С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач

Гидродинамический механизм перемещения каталитических микро-/наномоторов 91

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Памяти Терехина Михаила Тихоновича 110

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) 112

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) 116

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) 120

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) 126

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) 130

Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) 131

Contents

MATHEMATICS

O. S. Kostromina

On resonances under quasi-periodic perturbations of systems with a double limit cycle, close to two-dimensional nonlinear Hamiltonian systems 11

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova

Dynamics of the mathematical model of phase-locked systems with delay . . . 28

V. I. Nikonov

Partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector 43

M. E. Fairuzov, F. V. Lubyshev

On a method for approximate solution of a mixed boundary value problem for an elliptic equation 58

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, Yu. V. Pokladova

Investigation of the dynamic stability of bending-torsional deformations of the pipeline 72

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, E. V. Danilova, E. A. Lapshina

Mathematical modeling of heat transfer in the film-substrate-thermostat system during heating of an electrically conductive film by a high-density pulse current 82

S. I. Martynov, L. Yu. Tkach

Hydrodynamic mechanism of movement of catalytic micro-/nanomotors . . . 91

MATHEMATICAL LIFE

In memory of Terekhin Mihail Tihonovich 110

The rules of article design (in Russian) 112

The rules of article design (in English) 116

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) 120

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) 126

Author Index (In Russian) 130

Author Index (in English) 131

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.11-27

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9

О резонансах при квазипериодических возмущениях систем с двойным предельным циклом, близких к двумерным нелинейным гамильтоновым

О. С. Костромина

ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (г. Нижний Новгород, Российская Федерация)

Аннотация. Изучается воздействие многочастотных квазипериодических возмущений на системы, близкие к двумерным нелинейным гамильтоновым. Предполагается, что соответствующая возмущенная автономная система имеет двойной предельный цикл. Анализ функции Пуанкаре-Понтрягина, построенной для автономной системы, позволяет установить наличие такого цикла. При выполнении условия соизмеримости собственной частоты соответствующей невозмущенной гамильтоновой системы с частотами квазипериодического возмущения невозмущенный уровень становится резонансным. Резонансные структуры существенно зависят от того, совпадают ли выбранные резонансные уровни с уровнями, порождающими предельные циклы в автономной системе. Получена усредненная система, описывающая топологию окрестностей резонансных уровней. Устанавливаются возможные фазовые портреты усредненной системы вблизи бифуркационного случая, когда резонансный уровень совпадает с уровнем, в окрестности которого соответствующая автономная система имеет двойной предельный цикл. Для иллюстрации полученных результатов приводятся результаты теоретического исследования и численного счета для конкретного уравнения маятникового типа с двухчастотными квазипериодическими по времени возмущениями.

Ключевые слова: двойной предельный цикл, квазипериодические возмущения, резонансы, усредненные системы, уравнения маятникового типа

Для цитирования: Костромина О. С. О резонансах при квазипериодических возмущениях систем с двойным предельным циклом, близких к двумерным нелинейным гамильтоновым // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 11–27. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.11-27>

1. Введение

Будем рассматривать системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g(x, y, \theta_1, \dots, \theta_p), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f(x, y, \theta_1, \dots, \theta_p), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\varepsilon > 0$ – малый параметр; $\theta_i = \omega_i t, i = \overline{1, p}$; функции H, g и f – достаточно гладкие и равномерно ограниченные по переменным x и y вместе с частными производными



до второго порядка включительно в некоторой области $D \subset \mathbb{R}^2$ (или $D \subset \mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^1$); функции g и f – непрерывные и квазипериодические по t равномерно относительно $(x, y) \in D$ с несоизмеримыми над полем рациональных чисел частотами $\omega_i, i = \overline{1, p}$.

Предполагается, что соответствующая невозмущенная система ($\varepsilon = 0$) является нелинейной гамильтоновой с гамильтонианом H и имеет ячейку $D_0 \subset D$, заполненную замкнутыми фазовыми кривыми $H(x, y) = h, h \in [h_{\min}, h_{\max}]$ и не содержащую малых окрестностей состояний равновесия и сепаратрис. Также предполагается неконсервативность исходной системы (1.1), что эквивалентно выполнению условия: $g'_x + f'_y \neq 0$.

Проблемы существования квазипериодических и почти периодических решений, а также сложной динамики в системах вида (1.1), изучались в ряде работ [1–8]. В работах [1–2] рассматривался вопрос о существовании квазипериодических и почти периодических решений уравнения Дуффинга. Вопросам существования сложной динамики для уравнения маятникового типа и уравнения Дуффинга при квазипериодических возмущениях посвящены работы [3–8].

Наряду с системой (1.1) будем рассматривать соответствующую ей автономную систему

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H(x, y)}{\partial y} + \varepsilon g_0(x, y), \\ \dot{y} = -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f_0(x, y), \end{cases} \quad (1.2)$$

где

$$g_0(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} g(x, y, \theta_1, \dots, \theta_p) d\theta_1 \dots d\theta_p,$$

$$f_0(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} f(x, y, \theta_1, \dots, \theta_p) d\theta_1 \dots d\theta_p.$$

Перейдем в D_0 от переменных x, y к переменным «действие I – угол θ » по формулам

$$I(h) = \frac{1}{2\pi} \oint_{M_h} y(x, h) dx, \quad \theta = \frac{\partial S(x, I)}{\partial I}, \quad S = \int_{x_0}^x y(x, h(I)) dx, \quad (1.3)$$

где $M_h = \{(x, y) : H(x, y) = h\}$; $S(x, I)$ – производящая функция данного канонического преобразования. Преобразование (1.3) можно записать в виде

$$x = X(I, \theta), \quad y = Y(I, \theta),$$

где X, Y – периодические по θ с периодом 2π функции. В результате система (1.1) в новых переменных запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon F_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_p), \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon G_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_p), \\ \dot{\theta}_i = \omega_i, \quad i = \overline{1, p}, \end{cases} \quad (1.4)$$

где

$$F_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_p) \equiv f(X, Y, \theta_1, \dots, \theta_p) X'_\theta - g(X, Y, \theta_1, \dots, \theta_p) Y'_\theta,$$

$$G_1(I, \theta, \theta_1, \dots, \theta_p) \equiv -f(X, Y, \theta_1, \dots, \theta_p)X'_I + g(X, Y, \theta_1, \dots, \theta_p)Y'_I.$$

Предполагается, что собственная частота $\omega(I)$ невозмущенной системы является монотонной функцией и не обращается в нуль на интервале $(I_{min}, I_{max}) \equiv (I(h_{min}), I(h_{max}))$. Функции F_1 и G_1 – достаточно гладкие по переменным $I, \theta, \theta_i, i = \overline{1, p}$ в области $[I_{min}, I_{max}] \times \mathbb{T}^{p+1}$, где \mathbb{T}^{p+1} – $(p+1)$ -мерный тор.

Говорят, что в системе (1.4) имеет место *резонанс*, если выполняется условие:

$$n\omega(I) = \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \quad (1.5)$$

где $n, m_i, i = \overline{1, p}$ – взаимно простые натуральные числа. Вещественные решения I этого уравнения на отрезке $[I_{min}, I_{max}]$ будем обозначать $I_{n\mathbf{m}}, \mathbf{m} = (m_1, \dots, m_p)$. Тогда уровни $I = I_{n\mathbf{m}}$ (замкнутые фазовые кривые $H(x, y) = h_{n\mathbf{m}}$ невозмущенной системы) будем называть *резонансными уровнями*. Окрестность $U_\mu = \{(I, \theta) : I_{n\mathbf{m}} - C\mu < I < I_{n\mathbf{m}} + C\mu, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0\}$, $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ индивидуального резонансного уровня $I = I_{n\mathbf{m}}$ будем называть *резонансной зоной*.

Система (1.2) в новых переменных запишется в виде

$$\begin{cases} \dot{I} = \varepsilon F_2(I, \theta), \\ \dot{\theta} = \omega(I) + \varepsilon G_2(I, \theta), \end{cases} \quad (1.6)$$

где $F_2(I, \theta) \equiv f_0(X, Y)X'_\theta - g_0(X, Y)Y'_\theta$, $G_2(I, \theta) \equiv -f_0(X, Y)X'_I + g_0(X, Y)Y'_I$. Функции F_2 и G_2 по определению являются периодическими по θ с периодом 2π . Усредняя систему (1.6) по θ , получим одномерную систему

$$\dot{u} = \varepsilon B_0(u), \quad (1.7)$$

где

$$B_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_0(X, Y)X'_\theta - g_0(X, Y)Y'_\theta] d\theta, \quad u = I + O(\varepsilon).$$

Как известно, простому состоянию равновесия u_0 ($B(u_0) = 0$, $B'(u_0) \neq 0$) усредненной системы (1.7) отвечает грубый предельный цикл в системе (1.2). Причем предельный цикл будет устойчивым, если $B'(u_0) < 0$, и неустойчивым в противном случае. Функцию $B_0(u)$ называют *порождающей функцией Пуанкаре-Понтрягина*.

Задачам о воздействии малых неконсервативных квазипериодических возмущений на системы с грубыми предельными циклами, близкие к произвольным нелинейным двумерным гамильтоновым, посвящены работы [9–12]. Кратко перечислим основные результаты указанных работ, полученные на основе методов исследования систем с периодическим возмущением [13]: описаны структуры невырожденных резонансных зон, найдены условия существования в них квазипериодических решений, решена задача синхронизации квазипериодических колебаний, установлено глобальное поведение решений. В качестве примеров, демонстрирующих полученные теоретические результаты, рассматривались уравнения типа Дуффинга.

В данной статье будем рассматривать случай, когда автономная система имеет двойной предельный цикл. Прежде всего, обозначим

$$B_1(u_0) \equiv B'_0(u_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g'_{0x} + f'_{0y}) \Big|_{\substack{x=X(u_0, \theta) \\ y=Y(u_0, \theta)}} d\theta.$$

Двукратный корень $u = u_*$ уравнения $B_0(u) = 0$ ($B_1(u_*) = 0$, $B'_1(u_*) \neq 0$) определяет невозмущенный уровень $I = I_*$ (замкнутую фазовую кривую $h = h_*$ невозмущенной системы), от которого под действием возмущения родится двойной предельный цикл.

Под действием неавтономного квазипериодического возмущения резонансный уровень может совпасть с уровнем невозмущенной системы, порождающим двойной предельный цикл в автономной системе. Изучим поведение решений системы (1.4) вблизи такого бифуркационного случая. Такая задача, помимо чисто математического интереса, имеет важное значение для теории бифуркаций динамических систем, а также теории синхронизации колебаний. Воздействие периодических по времени возмущений на систему с двойным предельным циклом, близкую к двумерной нелинейной гамильтоновой, было изучено в работе [14]. Настоящее исследование следует работам [9–10], [14].

2. Усредненная система в окрестности индивидуального резонансного уровня

Делая в системе (1.4) замену

$$I = I_{nm} + \mu u, \quad \theta = v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i$$

и усредняя полученную систему по $\theta_1, \dots, \theta_p$, приходим к двумерной системе

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = A(v; I_{nm}) + \mu P_0(v; I_{nm})u + \mu^2 P_1(v; I_{nm})u^2 + O(\mu^3), \\ \frac{dv}{d\tau} = b_1 u + \mu(b_2 u^2 + Q_0(v; I_{nm})) + \mu^2(b_3 u^3 + Q_1(v; I_{nm})u) + O(\mu^3), \end{cases} \quad (2.1)$$

где

$$A(v; I_{nm}) = \frac{1}{(2\pi n)^p} \int_0^{2\pi n} \cdots \int_0^{2\pi n} F_1 \left(I_{nm}, v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \theta_1, \dots, \theta_p \right) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (2.2)$$

$$P_0(v; I_{nm}) = \frac{1}{(2\pi n)^p} \int_0^{2\pi n} \cdots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial}{\partial I} F_1 \left(I_{nm}, v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \theta_1, \dots, \theta_p \right) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (2.3)$$

$$P_1(v; I_{nm}) = \frac{1}{2(2\pi n)^p} \int_0^{2\pi n} \cdots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial^2}{\partial I^2} F_1 \left(I_{nm}, v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \theta_1, \dots, \theta_p \right) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (2.4)$$

$$Q_0(v; I_{nm}) = \frac{1}{(2\pi n)^p} \int_0^{2\pi n} \cdots \int_0^{2\pi n} G_1 \left(I_{nm}, v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \theta_1, \dots, \theta_p \right) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (2.5)$$

$$Q_1(v; I_{nm}) = \frac{1}{(2\pi n)^p} \int_0^{2\pi n} \cdots \int_0^{2\pi n} \frac{\partial}{\partial I} G_1 \left(I_{nm}, v + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^p m_i \omega_i, \theta_1, \dots, \theta_p \right) d\theta_1 \dots d\theta_p, \quad (2.6)$$

$$b_1 = \frac{d\omega(I_{nm})}{dI}, \quad b_2 = \frac{d^2\omega(I_{nm})}{2dI^2}, \quad b_3 = \frac{d^3\omega(I_{nm})}{6dI^3}, \quad \tau = \mu t.$$

Функции (2.2)–(2.6) являются периодическими по v с наименьшим периодом $2\pi/n$ [9–10]. Поэтому фазовое пространство усредненной в окрестности индивидуального резонансного уровня $I = I_{nm}$ системы (2.1) – цилиндр $\{v(\bmod(2\pi/n)), u\}$.

Функции (2.2)–(2.4) могут быть представлены в виде

$$\begin{aligned} A(v; I_{nm}) &= \tilde{A}(v; I_{nm}) + B_0(I_{nm}), \quad B_0(I_{nm}) = \langle A(v; I_{nm}) \rangle_v, \\ P_0(v; I_{nm}) &= \tilde{P}_0(v; I_{nm}) + B_1(I_{nm}), \quad B_1(I_{nm}) = \langle P_0(v; I_{nm}) \rangle_v, \\ P_1(v; I_{nm}) &= \tilde{P}_1(v; I_{nm}) + B_2(I_{nm}), \quad B_2(I_{nm}) = \langle P_1(v; I_{nm}) \rangle_v. \end{aligned}$$

Заметим, что $B_2(I_{nm}) = B_0''(I_{nm})/2$.

Используя приведенные представления для функций (2.2)–(2.4), пренебрегая членами $O(\mu^3)$ и делая замену $u \rightarrow u - \mu Q_0(v; I_{nm})/b_1$ в системе (2.1), получим систему

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \tilde{A}(v; I_{nm}) + B_0(I_{nm}) + \mu\sigma(v; I_{nm})u + \mu^2 \left[\left(\tilde{P}_1(v; I_{nm}) + \right. \right. \\ \left. \left. + B_2(I_{nm}) + \frac{b_2}{b_1} \frac{dQ_0(v; I_{nm})}{dv} \right) u^2 - \tilde{P}_0(v; I_{nm}) \frac{Q_0(v; I_{nm})}{b_1} \right], \\ \frac{dv}{d\tau} = b_1 u + \mu b_2 u^2 + \mu^2 \left[b_3 u^3 + \left(Q_1(v; I_{nm}) - 2 \frac{b_2}{b_1} Q_0(v; I_{nm}) \right) u \right], \end{cases} \quad (2.7)$$

где $\sigma(v; I_{nm}) = \tilde{\sigma}(v; I_{nm}) + B_1(I_{nm})$; $\tilde{\sigma}(v; I_{nm}) = \tilde{P}_0(v; I_{nm}) + dQ_0(v; I_{nm})/dv$; $B_1(I_{nm}) = \langle \sigma(v; I_{nm}) \rangle_v$. Система (2.7) определяет топологию индивидуальных резонансных зон с точностью до членов порядка μ^3 . Согласно [9], простому устойчивому (неустойчивому) состоянию равновесия такой системы соответствует p -мерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (1.4), или устойчивое (неустойчивое) квазипериодическое резонансное решение с периодами $\frac{2\pi n}{\omega_1}, \dots, \frac{2\pi n}{\omega_p}$ в системе (1.1). Грубому устойчивому (неустойчивому) предельному циклу усредненной системы с частотой ω_0 соответствует $(p+1)$ -мерный устойчивый (неустойчивый) инвариантный тор в системе (1.4), или устойчивое (неустойчивое) квазипериодическое резонансное решение с периодами $\frac{2\pi}{\omega_0}, \frac{2\pi n}{\omega_1}, \dots, \frac{2\pi n}{\omega_p}$ в системе (1.1).

Важную роль в изучении структуры окрестности резонансных уровней I_{nm} играет функция $\sigma(v; I_{nm})$. В первую очередь необходимо знать, является ли она знакопостоянной или зависит от v [13]. В данной статье мы будем рассматривать случай знакопостоянной функции σ , поэтому $\tilde{\sigma} \equiv 0$ и $\sigma(v; I_{nm}) = B_1(I_{nm})$.

3. Поведение решений усредненной системы

Пусть $B_0(I_{nm}) = B_1(I_{nm}) = 0$. Система (2.7) без учета консервативного члена $2\mu \frac{b_2}{b_1} \tilde{A}(v; I_{nm}) \dot{v}$ преобразуется к виду

$$\ddot{v} - b_1 \tilde{A}(v; I_{nm}) = \mu^2 \left[\frac{M(v; I_{nm}) + B_2(I_{nm})}{b_1} \dot{v}^2 + N(v; I_{nm}) \right], \quad (3.1)$$

где

$$M(v; I_{nm}) = \tilde{P}_1(v; I_{nm}) + Q_1'(v; I_{nm}) + \frac{b_2}{b_1} \tilde{P}_0(v; I_{nm}) + 3 \frac{b_3}{b_1} \tilde{A}(v; I_{nm}),$$

$$N(v; I_{nm}) = -\tilde{P}_0(v; I_{nm})Q_0(v; I_{nm}) + \left(Q_1(v; I_{nm}) - 2\frac{b_2}{b_1}Q_0(v; I_{nm}) \right) \tilde{A}(v; I_{nm}).$$

Перепишем уравнение (3.1) в виде системы

$$\begin{cases} \dot{u} = \tilde{A}(v; I_{nm}) + \mu^2 \left[(M(v; I_{nm}) + B_2(I_{nm})) u^2 + \frac{N(v; I_{nm})}{b_1} \right], \\ \dot{v} = b_1 u. \end{cases} \quad (3.2)$$

Система (3.2) инвариантна относительно замены $u \rightarrow -u, \tau \rightarrow -\tau$, поэтому фазовый портрет уравнения (3.1) симметричен относительно оси u . Фазовое пространство системы (3.2) – цилиндр $\{v(\text{mod}(2\pi/n)), u\}$. Система (3.2) близка к гамильтоновой с гамильтонианом $\tilde{H}(v, u) = b_1 u^2/2 - V(v)$, $V(v) = \int \tilde{A}(v; I_{nm}) dv$. Система (3.2) при $\mu = 0$ имеет простые состояния равновесия $(v_0, 0)$ двух типов: центр, если $b_1 \tilde{A}'_v(v_0) < 0$, и седло, если $b_1 \tilde{A}'_v(v_0) > 0$. Установим взаимное расположение сепаратрис седла $(v_0, 0)$ невозмущенной системы под действием возмущения. Воспользуемся формулой Мельникова [15]: $\Delta_\mu = \mu^2 \Delta_1 + O(\mu^3)$, которая определяет (с точностью до членов порядка μ^3) расстояние между возмущенными сепаратрисами. Сделаем в системе (3.2) замену $v = w + v_0$, перемещая состояние равновесия $(v_0, 0)$ типа седло невозмущенной системы в начало координат. Применяя к полученной системе формулу Мельникова, находим

$$\Delta_1 = \frac{1}{b_1} \int_{-\infty}^{\infty} [M(w + v_0) b_1^2 u^2 + N(w + v_0)] \frac{dw}{d\tau} d\tau, \quad (3.3)$$

где $w(\tau)$, $u(\tau)$ – решение невозмущенной системы на сепаратрисе. Из интеграла невозмущенной системы находим

$$u = \pm \sqrt{\frac{2}{b_1} (V(w, v_0) - V(0, v_0))}, \quad V(w, v_0) = \int \tilde{A}(w + v_0) dw. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.3), получим

$$\Delta_1 = \frac{1}{b_1} \int_0^{2\pi/n} [2b_1 M(w + v_0) (V(w, v_0) - V(0, v_0)) + N(w + v_0)] dw.$$

Возможны два случая: $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_1 \neq 0$. В первом случае на фазовом цилиндре имеем две сепаратрисные петли к седлу (на верхнем и нижнем полуцилиндрах); во втором – сепаратрисы расщеплены, и расстояние между ними зависит от соотношения между амплитудой функции $M(v; I_{nm})$ и величиной $|B_2(I_{nm})|$. Возможные фазовые портреты системы (3.2) на фазовом цилиндре $\{v(\text{mod}(2\pi/n)), u\}$ показаны на Рис. 3.1.

Резонансные уровни $I = I_{nm}$, в окрестностях U_μ которых имеются области, для начальных условий из которых фазовая точка остается в U_μ при всех $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$, а также области, для начальных условий из которых фазовая точка за конечное время покидает U_μ , будем называть *частично проходимыми*. Структура частично проходимой резонансной зоны представлена на Рис. 3.1, а-в. Резонансные уровни $I = I_{nm}$ будем называть *непроходимыми*, если для любых начальных условий из U_μ фазовая точка остается в U_μ при всех $t \rightarrow +\infty$ или $t \rightarrow -\infty$. Такой случай иллюстрирует Рис. 3.1, б.

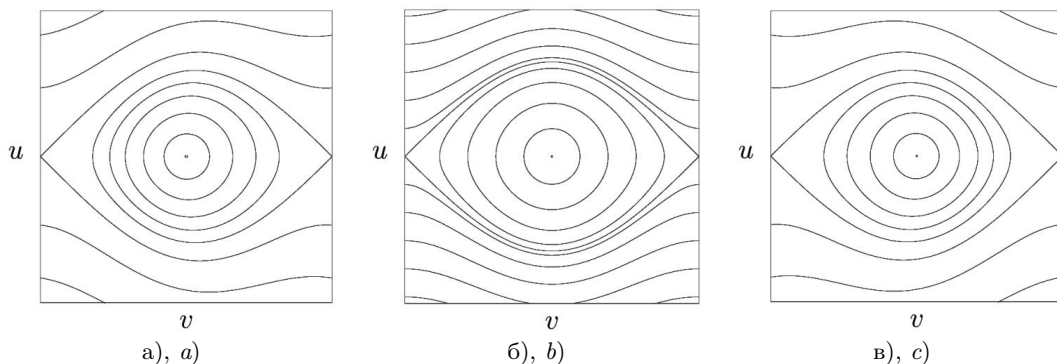


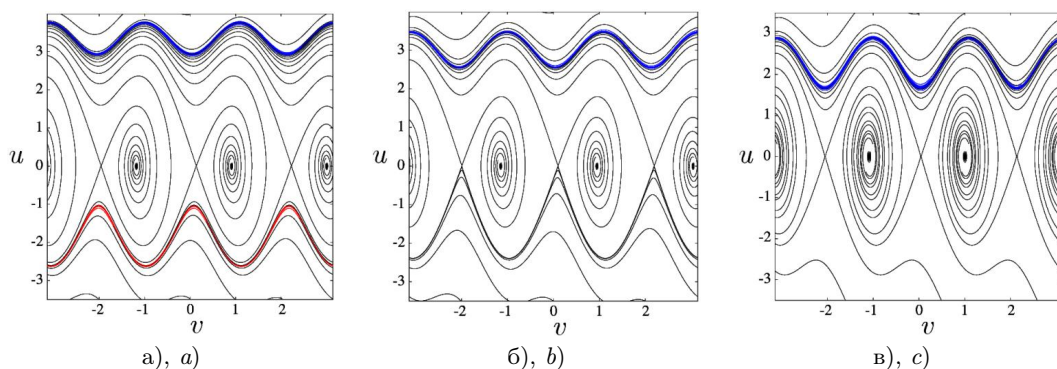
Рис. 3.1. Возможные фазовые портреты системы (3.2)

Fig 3.1. Possible phase portraits of system (3.2)

Положим $B_0(I_{nm}) = \mu\gamma_1$, $B_1(I_{nm}) = \mu\gamma_2$. На Рис. 3.2 показаны возможные фазовые портреты системы (2.7) на фазовом цилиндре $\{v(\bmod(2\pi)), u\}$ при $n = 3$ и различных значениях параметров $\gamma_1 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$ для случая знакопостоянной функции $\sigma \neq 0$. Вместо центров на фазовом цилиндре системы (2.7) будут фокусы, существует также асимметрия в формировании предельных циклов разной устойчивости (показаны разным цветом) на верхнем и нижнем фазовых полуцилиндрах. Бифуркационный случай, когда предельный цикл на нижнем/верхнем полуцилиндре усредненной системы (2.7) влипают в сепаратрисный контур, показан на Рис. 3.2 б, г.

Случай непроходимого резонанса (синхронизации колебаний) показан на Рис. 3.2 в. Рисунки 3.2, а, д иллюстрируют структуру частично проходимых резонансных зон.

В работе [14] явление синхронизации колебаний было названо ограниченным: в связи с возможностью существования предельного цикла в области вращательного движения маятника не все фазовые точки в резонансной зоне стремятся к устойчивому режиму, которому соответствует устойчивое состояние равновесия усредненной системы (см. Рис. 3.2 в).



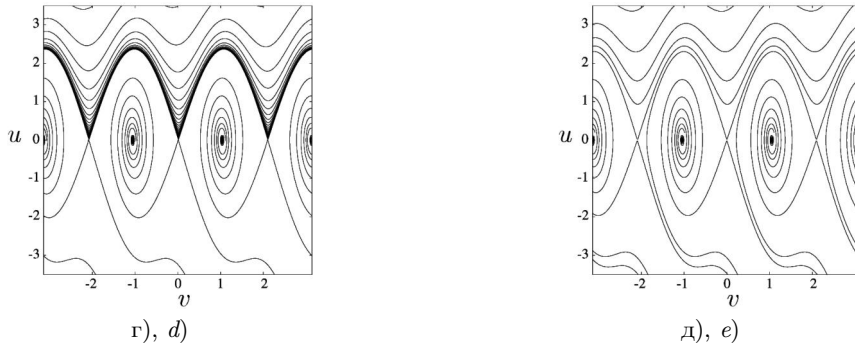


Рис. 3.2. Возможные фазовые портреты системы (2.7) при $n = 3$ для случая знакопостоянной функции $\sigma \neq 0$, определяющие структуру окрестности частично проходимого (а, д) и непроходимого (в) резонансных уровней $I = I_{3m}$, а также бифуркационный случай перехода от частично проходимого резонанса к непроходимому (б, г).

Fig 3.2. Possible phase portraits of system (2.7) at $n = 3$ for the case of a constant sign function $\sigma \neq 0$, determining the structure of the neighborhood of partially passable (a, e) and impassable (c) resonance levels $I = I_{3m}$, as well as the bifurcation case of transition from a partially passable resonance to an impassable one (b, d).

4. Пример

В качестве примера рассмотрим уравнение маятникового типа при квазипериодическом возмущении вида

$$\ddot{x} + \sin x = \varepsilon[(-1 + p_1 \dot{x} + p_2 \cos 3x)\dot{x} + p_3 \alpha(t)], \quad (4.1)$$

эквивалентное системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x + \varepsilon[(-1 + p_1 y + p_2 \cos 3x)y + p_3 \alpha(t)], \end{cases} \quad (4.2)$$

где $p_1, p_2, p_3 > 0$ – параметры; ε – малый положительный параметр; $\alpha(t) = \cos \omega_1 t \sin \omega_2 t$; ω_1 и ω_2 – несоизмеримые частоты. Уравнение вида (4.1) было изучено в работе [16] в случае, когда $\alpha(t)$ – периодическая функция.

Невозмущенная система ($\varepsilon = 0$) является гамильтоновой системой с гамильтонианом $H(x, y) = y^2/2 - \cos x \geq -1$. На фазовом цилиндре $\{x \pmod{2\pi}, y\}$ она имеет два состояния равновесия: центр $(0, 0)$ и седло $(\pi, 0) \equiv (-\pi, 0)$. Совокупность фазовых кривых, определяемых интегралом энергии $H(x, y) = h \in (-1, 1)$, не охватывающих фазовый цилиндр, формирует область G_1 колебательных движений маятника. Совокупность фазовых кривых, определяемых интегралом энергии $H(x, y) = h > 1$, охватывающих фазовый цилиндр, формирует две области G_2^+ (при $y > 0$) и G_2^- (при $y < 0$) вращательных движений маятника.

Рассмотрим область G_2^+ . В этой области решение невозмущенной системы имеет вид

$$\begin{aligned} x(k, \theta) &= 2\text{am}(\mathbf{K}\theta/\pi, k), & y(k, \theta) &= 2/k\text{dn}(\mathbf{K}\theta/\pi, k), \\ k^2 &= 2/(1 + h), & \omega(k) &= \pi/(k\mathbf{K}) \in (0, +\infty), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где ω – частота движения на замкнутых фазовых кривых (собственная частота), $\theta = \omega t \in [0, 2\pi]$; $\mathbf{K}(k)$ – полный эллиптический интеграл первого рода, k – его модуль; $\text{am}(z, k)$ – амплитуда Якоби, $\text{dn}(z, k)$ – дельта-амплитуда Якоби. Согласно [16], порождающая функция Пуанкаре-Понтрягина B_0 для системы (4.2) при $p_3 = 0$ в рассматриваемой области имеет вид

$$B_0 = B_0(k(h)) = \frac{4}{105\pi k^7} \{2(1 - k^2)(-27k^4 + 128k^2 - 128)p_2 \mathbf{K} + \\ + (-105k^6 + (2 - k^2)(3k^4 - 128k^2 + 128)p_2) \mathbf{E} + \frac{105\pi p_1}{2} (2 - k^2)k^5\}, \quad (4.4)$$

$$B_1 = \frac{dB_0}{dI} = -1 + \frac{2p_1\pi}{k\mathbf{K}} + p_2 \frac{(15k^6 - 158k^4 + 384k^2 - 256)\mathbf{K} + (46k^4 - 256k^2 + 256)\mathbf{E}}{15k^6\mathbf{K}}, \quad (4.5)$$

где $\mathbf{E} = \mathbf{E}(k)$ – полный эллиптический интеграл второго рода, k – его модуль. Анализ функций (4.4) – (4.5), проведенный в работе [16], позволил получить линию двойного цикла в G_2^+ на плоскости параметров (p_2, p_1) .

Обозначим через k_* значение переменной k , при котором функция (4.4) имеет двукратный нуль, а через k_{311} – значение переменной k , удовлетворяющее резонансному условию $n\omega(k) = m_1\omega_1 + m_2\omega_2$ при $n = 3$, $m_1 = 1$ и $m_2 = 1$, выбирая $\omega_1 = \sqrt{5}$, $\omega_2 = \sqrt{7}$. Решая систему

$$\begin{cases} B_0(k; p_1, p_2) = 0, \\ B_1(k; p_1, p_2) = 0, \\ 3\omega(k) = \sqrt{5} + \sqrt{7}, \end{cases}$$

где $\omega(k)$ определяется из (4.3), находим $k = k_{311} = k_* \approx 0.878527$, $p_1 \approx 0.487182$, $p_2 \approx 41.385972$. График порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина (4.4) при найденных значениях параметров p_1, p_2 показан на Рис. 4.1, а. На Рис. 4.1, б представлен график функции $\omega(k)$ и резонансное значение 3-1-1 при выбранных ω_1, ω_2 .

Усредненная система (2.7) в таком случае имеет вид

$$\begin{cases} \dot{u} = p_3 \widetilde{A}_1 \sin 3v + \mu \gamma_1 + \mu^2 \left[\left(p_3 \left(\widetilde{P}_{11} - \frac{3b_2}{b_1} Q_{01} \right) \sin 3v + B_2 \right) u^2 + \right. \\ \left. + \gamma_2 u - \frac{1}{b_1} p_3^2 \widetilde{P}_{01} Q_{01} \sin 3v \cos 3v \right], \\ \dot{v} = b_1 u + \mu b_2 u^2 + \mu^2 \left[b_3 u^3 + p_3 \left(Q_{11} - \frac{2b_2}{b_1} Q_{01} \right) u \cos 3v \right], \end{cases} \quad (4.6)$$

где

$$\widetilde{A}_1 = -\frac{a^3}{1+a^6}, a = \exp \left(-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-k^2})}{\mathbf{K}(k)} \right),$$

$$\widetilde{P}_{01} = \frac{\pi^3 k}{8(1-k^2)\mathbf{K}^3} \frac{3a^3(1-a^6)}{(1+a^6)^2},$$

$$\widetilde{P}_{11} = \frac{\pi^4 k^2}{128(1-k^2)^2 \mathbf{K}^6} \frac{3a^3}{(1+a^6)^3} (2(2(k^2-2)\mathbf{K} + 3\mathbf{E})\mathbf{K}(1-a^{12}) - 3\pi^2(a^{12} - 6a^6 + 1)),$$

$$Q_{01} = \frac{\widetilde{P}_{01}}{3}, Q_{11} = \frac{2\widetilde{P}_{11}}{3},$$

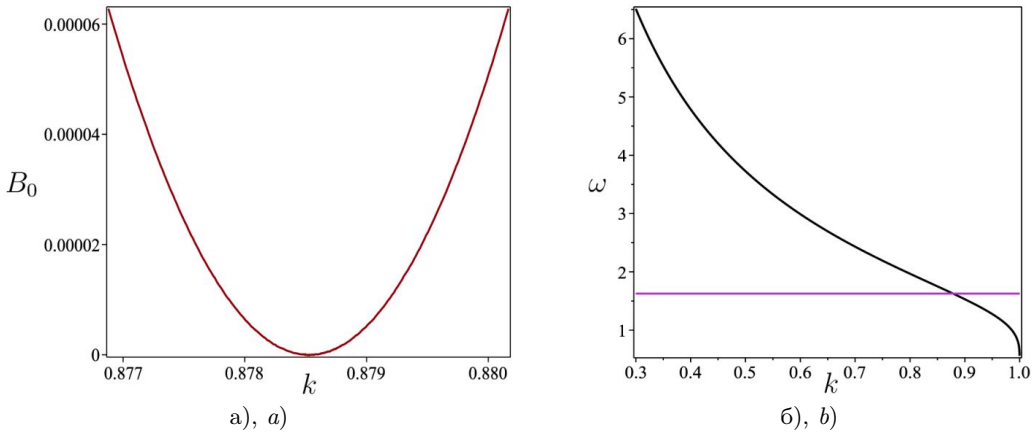


Рис. 4.1. а) График порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина (4.4) при $p_1 = 0.487182$, $p_2 = 41.385972$; б) График зависимости собственной частоты ω от k и резонансное значение 3-1-1 при $\omega_1 = \sqrt{5}$, $\omega_2 = \sqrt{7}$

Fig 4.1. a) Graph of the Poincaré-Pontryagin generating function (4.4) at $p_1 = 0.487182$, $p_2 = 41.385972$; b) Graph of the dependence of the natural frequency ω on k and the resonance value 3-1-1 at $\omega_1 = \sqrt{5}$, $\omega_2 = \sqrt{7}$

$$B_2 = \frac{\pi}{60k^5(1-k^2)\mathbf{K}^3} \left[p_2 \left((135k^4 - 640k^2 + 640)(k^2 - 1)\mathbf{K}^2 + 256(k^2 - 1)(k^2 - 2)\mathbf{KE} + (23k^4 - 128k^2 + 128)\mathbf{E}^2 \right) + 15p_1\pi k^5\mathbf{E} \right],$$

$$b_1 = \frac{\pi^2}{4} \frac{\mathbf{E}}{(1-k^2)\mathbf{K}^3}, \quad b_2 = \frac{\pi^3 k}{32} \frac{(1-k^2)\mathbf{K}^2 - 2(2-k^2)\mathbf{KE} + 3\mathbf{E}^2}{(1-k^2)^2\mathbf{K}^5},$$

$$b_3 = \frac{\pi^4 k^2}{384} \frac{(-4k^4 + 12k^2 - 8)\mathbf{K}^3 + (8k^4 - 33k^2 + 33)\mathbf{K}^2\mathbf{E} + 20(k^2 - 2)\mathbf{KE}^2 + 15\mathbf{E}^3}{(1-k^2)^3\mathbf{K}^7}.$$

Здесь $k = k_{311} = k_*$.

Исследуем поведение решений системы (4.6). Рассмотрим невозмущенную ($\mu = 0$) систему

$$\begin{cases} \frac{du}{d\tau} = p_3 \widetilde{A}_1 \sin 3v, \\ \frac{dv}{d\tau} = b_1 u. \end{cases} \quad (4.7)$$

Система (4.7) является гамильтоновой с гамильтонианом $\widetilde{H}(v, u) = b_1 \frac{u^2}{2} + \frac{p_3 \widetilde{A}_1}{3} \cos 3v$. Поведение решений данной системы достаточно изучить на цилиндре $\{v \bmod(2\pi/3), u\}$. На этом цилиндре система имеет два состояния равновесия: центр $(0, 0)$ и седло $(\frac{\pi}{3}, 0) \equiv (-\frac{\pi}{3}, 0)$. Фазовые кривые системы (4.7) определяются уравнением $b_1 \frac{u^2}{2} + \frac{p_3 \widetilde{A}_1}{3} \cos 3v = \widetilde{h}$, при этом колебательному движению соответствует $\widetilde{h} \in \left(\frac{p_3 \widetilde{A}_1}{3}, -\frac{p_3 \widetilde{A}_1}{3} \right)$, вращательному движению $-\widetilde{h} > -\frac{p_3 \widetilde{A}_1}{3}$. Движению по сепаратрисе, раз-

деляющей области колебательных и вращательных движений, отвечает $\tilde{h} = -\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3}$.

Решения системы (4.7) имеют вид

$$\begin{aligned} u(\vartheta) &= 2\tilde{k} \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \operatorname{cn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi, k), \\ v(\vartheta) &= \frac{1}{3} \left(\pi + 2 \arcsin \left(\tilde{k} \operatorname{sn}(2\mathbf{K}\vartheta/\pi, k) \right) \right), \end{aligned}$$

где $\operatorname{cn}(z, k)$ – эллиптический косинус Якоби; $\operatorname{sn}(z, k)$ – эллиптический синус Якоби,

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \sqrt{\frac{p_3 \tilde{A}_1 - 3\tilde{h}}{2p_3 \tilde{A}_1}} \in (0, 1), \\ \vartheta = \tilde{\omega}\tau, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\tilde{k}) &= \frac{\pi \sqrt{-3b_1 p_3 \tilde{A}_1}}{2\mathbf{K}(\tilde{k})} \in \left(0, \sqrt{-3b_1 p_3 \tilde{A}_1} \right), \end{aligned}$$

в колебательной области и

$$\begin{aligned} u(\vartheta) &= \pm \frac{2}{\tilde{k}} \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \operatorname{dn}(\mathbf{K}\vartheta/\pi, k), \\ v(\vartheta) &= \frac{1}{3} \left(\pi + 2 \operatorname{am}(\mathbf{K}\vartheta/\pi, k) \right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{k} &= \sqrt{\frac{2p_3 \tilde{A}_1}{p_3 \tilde{A}_1 - 3\tilde{h}}} \in (0, 1), \\ \vartheta = \tilde{\omega}\tau, \quad \tilde{\omega} = \tilde{\omega}(\tilde{k}) &= \frac{\pi \sqrt{-3b_1 p_3 \tilde{A}_1}}{\tilde{k}\mathbf{K}(\tilde{k})} \in (0, \infty) \end{aligned}$$

во вращательных областях. Здесь знак « \pm » соответствует движению на верхнем/нижнем полуцилиндре соответственно.

Теперь рассмотрим возмущенную ($\mu \neq 0$) систему (4.6). Переходя в этой системе в областях, не содержащих невозмущенных сепаратрис, от переменных (v, u) к переменным «действие-угол» (J, ϑ) и, усредняя полученную систему по «быстрой» переменной ϑ , придем к уравнению

$$\dot{w} = \mu \Phi(w), \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} \Phi(w) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\left(\gamma_1 + \mu \left[\left(p_3 \left(\widetilde{P_{11}} - \frac{3b_2}{b_1} Q_{01} \right) \sin 3v + B_2 \right) u^2 + \gamma_2 u - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{b_1} p_3^2 \widetilde{P_{01}} Q_{01} \sin 3v \cos 3v \right] \right) v'_\vartheta - \left(b_2 u^2 + \mu \left[b_3 u^3 + p_3 \left(Q_{11} - \frac{2b_2}{b_1} Q_{01} \right) u \cos 3v \right] \right) u'_\vartheta \right] d\vartheta, \end{aligned}$$

где $w = J + O(\mu)$. Простому состоянию равновесия усредненной системы (4.8) соответствует грубый предельный цикл системы (4.6).

В колебательной области функция Φ имеет следующий вид:

$$\Phi_1(\tilde{k}) = \frac{8\mu\gamma_2}{3\pi} \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \left(\mathbf{E} - (1 - \tilde{k}^2)\mathbf{K} \right). \quad (4.9)$$

Очевидно, что в колебательной области система (4.6) не имеет предельных циклов.

Во вращательной области функция Φ представима в виде:

$$\Phi_2^\pm(\tilde{k}) = \pm \frac{\gamma_1}{3} + \mu \left[\frac{4\gamma_2 \mathbf{E}}{3\pi \tilde{k}} \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \mp \frac{2B_2 p_3 \tilde{A}_1}{9b_1 \tilde{k}^2} (2 - \tilde{k}^2) \right]. \quad (4.10)$$

Равенство $\Phi_2(1) = 2\Phi_2^\pm(1)$, имеющее место при $\gamma_1 = 0$ и $B_2 = 0$, нарушается при $\gamma_1 \neq 0$, что приводит к необходимости дополнительного исследования в окрестности невозмущенного сепаратрисного контура.

Взаимное расположение возмущенных сепаратрис устанавливается формулой Мельникова [15]. С учетом решения невозмущенной системы (4.7), отвечающего движению по сепаратрисе

$$u(\tau) = \pm \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \frac{2}{\operatorname{ch}\left(\sqrt{-3b_1 p_3 \tilde{A}_1} \tau\right)},$$

$$v(\tau) = \frac{1}{3} \left(\pi + 2 \arcsin \left(\operatorname{th} \left(\sqrt{-3b_1 p_3 \tilde{A}_1} \tau \right) \right) \right),$$

находим функцию

$$\Delta_1^\pm = \pm \frac{2\pi\gamma_1}{3} + \mu \left[\frac{8\gamma_2}{3} \sqrt{-\frac{p_3 \tilde{A}_1}{3b_1}} \mp \frac{4\pi B_2 p_3 \tilde{A}_1}{9b_1} \right], \quad (4.11)$$

определяющую (с точностью до членов порядка μ^2) расстояние между устойчивой и неустойчивой возмущенными сепаратрисами. Заметим, что выражения в правых частях равенств (4.11) и (4.10) совпадают с точностью до постоянного множителя при $\tilde{k} = 1$.

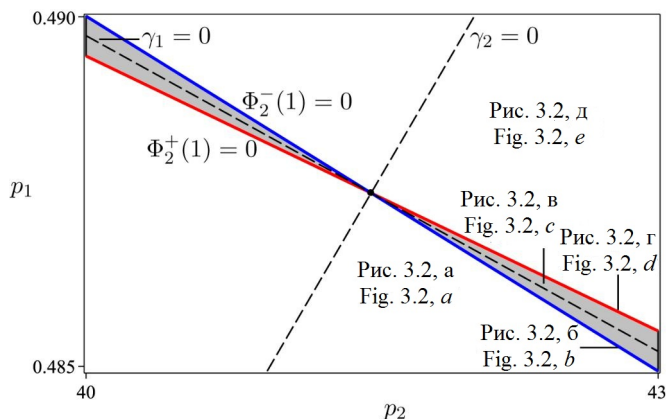


Рис. 4.2. Разбиение плоскости параметров (p_2, p_1) для усредненной системы (4.6) на области с разной топологией фазовых портретов

Fig 4.2. Partition of the plane of parameters (p_2, p_1) for the averaged system (4.6) into domains with different topology of phase portraits

Проведя исследование функций (4.9)–(4.11), получим разбиение плоскости параметров (p_2, p_1) для усредненной системы (4.6) на области с разной топологией фазовых портретов вблизи бифуркационного случая $k = k_{311} = k_*$ (см. Рис. 4.2). Для каждой полученной области установлено поведение фазовых кривых системы (4.6): ниже кривой $\gamma_2 = 0$ фазовые портреты показаны на Рис. 3.2 (со сдвигом вдоль v на $\pi/3$), выше кривой $\gamma_2 = 0$ фазовые портреты получаются поворотом на угол π соответствующего фазового портрета из симметричной относительно данной кривой области. Серым цветом на этой бифуркационной диаграмме выделена область синхронизации колебаний. Прямые $\gamma_1 = 0$ и $\gamma_2 = 0$, отмеченные пунктирными линиями на этой диаграмме, не являются бифуркационными, а носят вспомогательный характер.

Все фазовые портреты в данной статье построены с помощью компьютерной программы WInSet [17].

Благодарности. Исследования выполнены при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта 19-11-00280, а также Министерства науки и высшего образования РФ в рамках базовой части госзадания в сфере науки, проект № 0729-2020-0036.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Berger M.S., Chen Y.Y. Forced quasiperiodic and almost periodic oscillations of nonlinear Duffing equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1992. Vol. 19, No. 3. pp. 249–257.
2. Liu B., You J. Quasiperiodic solutions of Duffing's equations // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications. 1998. Vol. 33, No. 6. pp. 645–655.
3. Грищенко А. Д., Ваврив Д. М. Динамика маятника с квазипериодическим возбуждением // Журнал технической физики. 1997. Т. 67. № 10. С. 1–7
4. Wang R.Q., Deng J., Jing Z.J. Chaos control in duffing system // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. Vol. 27, No. 1. pp. 249–257. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.03.038>
5. Jing Z., Yang Z., Jiang T. Complex dynamics in Duffing-van der Pol equation // Chaos, Solitons and Fractals. 2006. Vol. 27, No. 3. pp. 722–747. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.04.044>
6. Jing Z.J., Huang J.C., Deng J. Complex dynamics in three-well Duffing system with two external forcings // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. Vol. 33, No. 3. pp. 795–812. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.071>
7. Ravichandran V., Chinnathambi V., Rajasekar S. Homoclinic bifurcation and chaos in Duffing oscillator driven by an amplitude-modulated force // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. 2007. Vol. 376, No 1. pp. 223–236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.11.003>
8. Jiang T., Yang, Z., Jing, Z. Bifurcations and chaos in the Duffing equation with parametric excitation and single external forcing // International Journal of Bifurcation and Chaos. 2017. Vol. 27, No. 08. 1750125-1-31. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127417501255>

9. Морозов А. Д., Морозов К. Е. О квазипериодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1607–1615. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064117120044>
10. Morozov A. D., Morozov K. E. On synchronization of quasiperiodic oscillations // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14, No. 3. pp. 367–376. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd180307>
11. Morozov A. D., Morozov K. E. Global dynamics of systems close to Hamiltonian ones under nonconservative quasi-periodic perturbation // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, No. 2. pp. 187–198. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd190208>
12. Драгунов Т. Н., Морозов К. Е., Морозов А. Д. О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипериодическом возмущении // Журнал Средне-волжского математического общества. 2020. Т. 22, № 2. С. 164–176. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202002.164-176>
13. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2005. 424 с.
14. Morozov A. D., Mamedov E. A. On a double cycle and resonances // Regular and Chaotic Dynamics. 2012. Vol. 17, No. 1. pp. 63–71. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354712010066>
15. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Московского математического общества. 1963. Т. 12. С. 3–52.
16. Kostromina O. S. On limit cycles, resonance and homoclinic structures in asymmetric pendulum-type equation // Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki. 2019. Vol. 29, No. 2. pp. 228–244. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190207>
17. Морозов А. Д., Драгунов Т. Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 303 с.

*Поступила 23.11.2020; доработана после рецензирования 16.02.2021;
принята к публикации 25.02.2021*

Информация об авторе:

Костромина Ольга Сергеевна, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9881-8817>, os.kostromina@yandex.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 34C15

On resonances under quasi-periodic perturbations of systems with a double limit cycle, close to two-dimensional nonlinear Hamiltonian systems

O. S. Kostromina

National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (Nizhny Novgorod, Russian Federation)

Abstract. The effect of multi-frequency quasi-periodic perturbations on systems close to two-dimensional nonlinear Hamiltonian ones is studied. It is assumed that the corresponding perturbed autonomous system has a double limit cycle. Analysis of the Poincaré–Pontryagin function constructed for the autonomous system makes it possible to establish the presence of such a cycle. When the condition of commensurability of the natural frequency of the corresponding unperturbed Hamiltonian system with the frequencies of the quasi-periodic perturbation is fulfilled, the unperturbed level becomes resonant. Resonant structures essentially depend on whether the selected resonance levels coincide with the levels that generate limit cycles in the autonomous system. An averaged system is obtained that describes the topology of the neighborhoods of resonance levels. Possible phase portraits of the averaged system are established near the bifurcation case, when the resonance level coincides with the level in whose neighborhood the corresponding autonomous system has a double limit cycle. To illustrate the results obtained, the results of a theoretical study and of a numerical calculation are presented for a specific pendulum-type equation under two-frequency quasi-periodic perturbations.

Key Words: double limit cycle, quasi-periodic perturbations, resonances, averaged systems, pendulum-type equations

For citation: O. S. Kostromina. On resonances under quasi-periodic perturbations of systems with a double limit cycle, close to two-dimensional nonlinear Hamiltonian systems. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:1(2021), 11–27. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.11-27>

REFERENCES

1. M. S. Berger, Y. Y. Chen, “Forced quasiperiodic and almost periodic oscillations of nonlinear Duffing equations”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **19**:3 (1992), 249–257.
2. B. Liu, J. You, “Quasiperiodic solutions of Duffing’s equations”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, **33**:6 (1998), 645–655.
3. A. D. Grischenko, D. M. Vavriv, “Dynamics of pendulum with a quasiperiodic perturbation”, *Technical Physics*, **67**:42:10 (1997), 1115–11120 (In Russ.).
4. R. Q. Wang, J. Deng, Z. J. Jing, “Chaos control in duffing system”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **27**:1 (2006), 249–257. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.03.038>
5. Z. Jing, Z. Yang, T. Jiang, “Complex dynamics in Duffing-van der Pol equation”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **27**:3 (2006), 722–747. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2005.04.044>

6. Z. J. Jing, J. C. Huang, J. Deng, “Complex dynamics in three-well Duffing system with two external forcings”, *Chaos, Solitons and Fractals*, **33**:3 (2007), 795–812. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2006.03.071>
7. V. Ravichandran, V. Chinnathambi, S. Rajasekar, “Homoclinic bifurcation and chaos in Duffing oscillator driven by an amplitude-modulated force”, *Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications*, **376** (2007), 223–236. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.physa.2006.11.003>
8. T. Jiang, Z. Yang, Z. Jing, “Bifurcations and chaos in the Duffing equation with parametric excitation and single external forcing”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **27**:8 (2017), 1750125-1-31. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0218127417501255>
9. A. D. Morozov, K. E. Morozov, “Quasiperiodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems”, *Differential Equations*, **53**:12 (2017), 1557–1566. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0374064117120044>
10. A. D. Morozov, K. E. Morozov, “On synchronization of quasiperiodic oscillations”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **14**:3 (2018), 367–376. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd180307>
11. A. D. Morozov, K. E. Morozov, “Global dynamics of systems close to Hamiltonian ones under nonconservative quasi-periodic perturbation”, *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, **15**:2 (2019), 187–198. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd190208>
12. T. N. Dragunov, K. E. Morozov, A. D. Morozov, “[On global dynamics in Duffing equation with quasiperiodic perturbation]”, *SVMO*, **22**:2 (2020), 164–176 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.22.202002.164-176>
13. A. D. Morozov, *[Resonances, cycles and chaos in quasiconservative systems]*, NITC “Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika” Publ, Institut kompyuternykh issledovaniy., Moscow—Izhevsk., 2005 (In Russ.), 424 p.
14. A. D. Morozov, E. A. Mamedov, “On a double cycle and resonances”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **17**:1 (2012), 63–71. DOI: <https://doi.org/10.1134/S1560354712010066>
15. V. K. Melnikov, “[On stability of a center under time-periodic perturbations]”, *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, **12** (1963), 3–52 (In Russ.).
16. O. S. Kostromina, “On limit cycles, resonance and homoclinic structures in asymmetric pendulum-type equation”, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, **29**:2 (2019), 228–244. DOI: <https://doi.org/10.20537/vm190207>
17. A. D. Morozov, T. N. Dragunov, *[Visualization and analysis of invariant sets of dynamical systems]*, Institut kompyuternykh issledovaniy Publ., Moscow—Izhevsk., 2003 (In Russ.), 303 p.

Submitted 23.11.2020; Revised 16.02.2021; Accepted 25.02.2021

Information about the author:

Olga S. Kostromina, Senior Teacher, Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9881-8817>, os.kostromina@yandex.ru

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

Динамики математической модели системы фазовой автоподстройки с запаздыванием

С. С. Мамонов, И. В. Ионова, А. О. Харламова

ФГБОУ ВО «РГУ им. С. А. Есенина» (г. Рязань, Российская Федерация)

Аннотация. В статье получены условия существования предельных циклов первого рода для систем автоподстройки с запаздыванием, которые, в свою очередь, определяют условия возникновения режимов скрытой синхронизации в таких системах. Принцип доказательства основан на построении положительно инвариантного тороидального множества с использованием двух цилиндрических поверхностей, границы которых определяются предельными циклами системы дифференциальных уравнений второго порядка. С помощью полученных в статье результатов для предельных циклов показывается возможность использования кривизны цикла для проведения сравнительного анализа близости циклов фазовой и нефазовой систем, а также для определения режима скрытой синхронизации. Рассмотрен пример для проверки условий существования предельных циклов первого рода, позволяющий определить в фазовом пространстве исходной системы область, содержащую начальные условия таких циклов. Прикладное значение полученных результатов заключается в возможности использования системы фазовой автоподстройки как генератора модулированных колебаний.

Ключевые слова: система дифференциальных уравнений, фазовая система, предельные циклы первого рода, скрытая синхронизация, мультистабильность, неподвижная точка, оператор сдвига, вращение векторного поля, кривизна цикла.

Для цитирования: Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Динамики математической модели системы фазовой автоподстройки с запаздыванием // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 28–42. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.28–42>

1. Введение

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1 - u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma, \quad (1.1)$$

где $x, b, c \in \mathbb{R}^2$, $u \in [0; 1]$, $\alpha_1, \rho_1, \rho_0 \in \mathbb{R}$. При $u = 0$ система (1.1) является математической моделью системы фазовой автоподстройки с запаздыванием. Запаздывание в системе фазовой автоподстройки определяется значением параметра $\rho = \rho_1 + \rho_0 > 0$, при отсутствии запаздывания $\rho = 0$. В случае $\rho = 0$ изучению системы фазовой автоподстройки посвящено множество публикаций [1–6], а исследование системы (1.1) проводилось в работах [5–11]. В данной работе решается задача определения условий существования предельных циклов первого рода системы (1.1), которые определяют условия возникновения режимов скрытой синхронизации в таких системах [5; 6; 11].

2. Условия существования предельных циклов первого рода

Для системы (1.1) сформулирована теорема, доказательство которой базируется на построении положительно инвариантного тороидального множества с использованием



двух цилиндрических поверхностей, границы которых определяются предельными циклами системы дифференциальных уравнений второго порядка. Использование циклов нефазовой системы (1.1) и численных методов позволяет определить наличие мультистабильности фазовой системы.

Т е о р е м а 2.1 Пусть для системы (1.1) выполнены условия:

- 1) $c^T b = -\Gamma < 0$, $c^T A = l^T$, $l^T b = -\nu_1 < 0$, $c^T A^{-1} b \neq 0$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $\text{rang} \|c, l\| = 2$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1}$, $\rho = \rho_1 + \rho_0$;
- 2) $\varphi(\sigma) - \Delta$ -периодическая функция, имеющая два нуля на периоде $\varphi(\tilde{\sigma}_1) = \varphi(\tilde{\sigma}_2) = 0$, $0 = \tilde{\sigma}_1 < \tilde{\sigma}_2 < \Delta$, $\dot{\varphi}(0) > 0$, $\dot{\varphi}(\tilde{\sigma}_2) < 0$, $\dot{\varphi}(\sigma)$ — ограничена на сегменте $[0; \Delta]$;
- 3) существуют значения $\lambda_1, \lambda_2, r_1 > 0$ такие, что система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\lambda_1 y - \lambda_2 \sigma - \Gamma \varphi(\sigma) - \varepsilon, \dot{\sigma} = y + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0 (1 - u) \varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma \quad (2.1)$$

при $\varepsilon = -\varepsilon_1^-$, $r_1 - \varepsilon_1^- < 0$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^-(\sigma)$ на $\sigma \in [-\sigma_1; \sigma_2]$, $f_1^-(-\sigma_1) = f_1^-(\sigma_2) = 0$, $f_1^-(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in (-\sigma_1; \sigma_2)$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$;

4) существует $r_2 > 0$ такое, что система (2.1) при $\varepsilon = \varepsilon_1^+ > r_2$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^+(\sigma)$ на $\sigma \in [-\sigma_1; \sigma_3]$, $\sigma_2 < \sigma_3$, $f_1^+(-\sigma_1) = f_1^+(\sigma_3) = 0$, $f_1^+(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\sigma_1; \sigma_3)$;

5) система (2.1) при $\varepsilon = \varepsilon_2^- > r_2$ имеет решение, определяющее функцию $f_2^-(\sigma)$ на $[-\sigma_4; \sigma_5]$, $f_2^-(-\sigma_4) = f_2^-(\sigma_5) = 0$, $-\sigma_4 < -\sigma_1 < \sigma_3 < \sigma_5$, $f_2^-(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in (-\sigma_4; \sigma_5)$;

6) система (2.1) при $\varepsilon = -\varepsilon_2^+$, $r_1 < \varepsilon_2^+$, имеет решение, определяющее функцию $f_2^+(\sigma)$ на $[-\sigma_6; \sigma_5]$, $f_2^+(-\sigma_6) = f_2^+(\sigma_5) = 0$, $-\sigma_6 < -\sigma_4 < 0$, $f_2^+(\sigma) > 0$ для любого $\sigma \in (-\sigma_6; \sigma_5)$;

7) для любого $\sigma \in [-\sigma_6; -\sigma_4]$ выполняется соотношение $-\lambda_2 \sigma - r_2 - \Gamma \varphi(\sigma) > 0$;

8) справедливо неравенство $r_1 - \lambda_2 \sigma - \Gamma \varphi(\sigma) < 0$ для любого $\sigma \in [\sigma_2; \sigma_3]$;

9) для значений $\sigma \in [-\sigma_6; \sigma_5]$ справедливы соотношения

$$\lambda_2 = \beta_1 + \lambda_1 (\lambda_1 - \alpha_1), \quad (2.2)$$

$$\psi_1(\sigma) = (\lambda_2 \rho_1 - \nu_1 - \lambda_1 \Gamma + \lambda_2 \rho_0 (1 - u)) \varphi(\sigma) - \lambda_2 (\alpha_1 u + \lambda_1 - \alpha_1) \sigma - (\alpha_1 - \lambda_1) r_1 < 0; \quad (2.3)$$

10) если $\sigma \in [-\sigma_6; \sigma_5]$, то справедливо неравенство

$$\psi_2(\sigma) = (\lambda_2 \rho_1 - \nu_1 - \lambda_1 \Gamma + \lambda_2 \rho_0 (1 - u)) \varphi(\sigma) - \lambda_2 (\alpha_1 u + \lambda_1 - \alpha_1) \sigma + (\alpha_1 - \lambda_1) r_2 > 0; \quad (2.4)$$

11) пусть $\psi_3(\sigma) = \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0 (1 - u) \varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma$, тогда функция $\psi_4(\sigma) = -\alpha_1 \Gamma \varphi(\sigma) - \nu_1 \varphi(\sigma) + \beta_1 \psi_3(\sigma)$, имеет единственный ноль на сегменте $\sigma \in [-\sigma_6; \sigma_5]$, $\psi_4(0) = 0$.

Тогда система (1.1) имеет предельный цикл.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Рассмотрим функции $W_1(z) = l^T x + \lambda_1 c^T x + \lambda_2 \sigma - r_1$, $W_2(z) = l^T x + \lambda_1 c^T x + \lambda_2 \sigma + r_2$, $P(z) = c^T x$, $V_1^+(z) = c^T x - f_1^+(\sigma)$, $V_1^-(z) = c^T x - f_1^-(\sigma)$, $V_2^+(z) = c^T x - f_2^+(\sigma)$, $V_2^-(z) = c^T x - f_2^-(\sigma)$, где $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}$, $r_1, r_2, f_1^+(\sigma), f_1^-(\sigma), f_2^+(\sigma), f_2^-(\sigma)$ удовлетворяют условиям 3)–10) теоремы. Пусть

$$\partial Q_1 = \{z : V_1^+(z) = c^T x - f_1^+(\sigma) = 0, \sigma \in [-\sigma_1; \sigma_3]\},$$

$$\partial Q_2 = \{z : V_1^-(z) = c^T x - f_1^-(\sigma) = 0, \sigma \in [-\sigma_1; \sigma_2]\},$$

$$\partial Q_3 = \{z : P(z) = c^T x = 0, \sigma_2 \leq \sigma \leq \sigma_3\},$$

$\partial Q = \partial Q_1 \cup \partial Q_2 \cup \partial Q_3$, тогда ∂Q является цилиндрической поверхностью. Обозначим внешность цилиндрической поверхности вместе с поверхностью ∂Q через множество Q .

Пусть

$$\partial D_1 = \{z : V_2^+(z) = c^T x - f_2^+(\sigma) = 0, \sigma \in [-\sigma_6; \sigma_5]\},$$

$$\partial D_2 = \{z : V_2^-(z) = c^T x - f_2^-(\sigma) = 0, \sigma \in [-\sigma_4; \sigma_5]\},$$

$$\partial D_3 = \{z : P(z) = c^T x = 0, -\sigma_6 \leq \sigma \leq -\sigma_4\},$$

$\partial D = \partial D_1 \cup \partial D_2 \cup \partial D_3$, тогда ∂D является цилиндрической поверхностью. Обозначим внутренность цилиндрической поверхности вместе с поверхностью ∂D через множество D . В силу условий теоремы множество $\Omega = Q \cap D \cap \{z : W_1(z) \leq 0\} \cap \{z : W_2(z) \geq 0\}$ является тороидальным, сечение его плоскостью $l^T x = 0$ изображено на Рис. 2.1, а граница этого множества определяется равенством $\partial \Omega = \partial \Omega_1^+ \cup \partial \Omega_2^+ \cup \partial \Omega_3^+ \cup \partial \Omega_4^- \cup \partial \Omega_5^- \cup \partial \Omega_6^- \cup \partial \Omega_7^- \cup \partial \Omega_8^+$, где

$$L = \{z : W_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\},$$

$$\partial \Omega_1^+ = \partial Q_1 \cap L, \partial \Omega_2^+ = \partial Q_2 \cap L, \partial \Omega_3^+ = \partial Q_3 \cap L,$$

$$\partial \Omega_4^- = \partial D_1 \cap L, \partial \Omega_5^- = \partial D_2 \cap L, \partial \Omega_6^- = \partial D_3 \cap L,$$

$$\partial \Omega_7^- = Q \cap D \cap \{z : W_1(z) = 0\}, \partial \Omega_8^+ = Q \cap D \cap \{z : W_2(z) = 0\}.$$

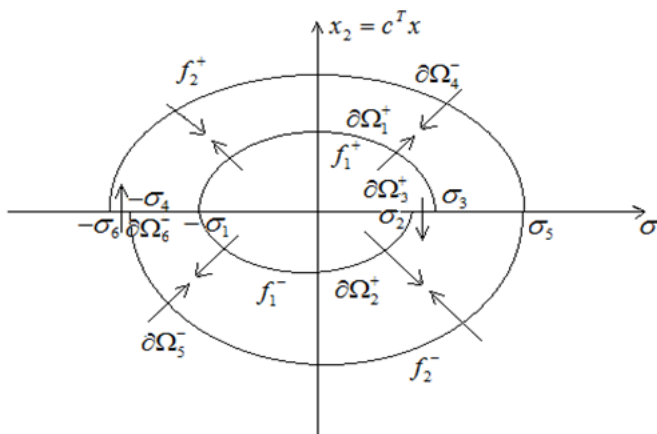


Рис. 2.1. Сечение множества Ω плоскостью $l^T x = 0$.

Fig 2.1. Section of the set Ω by the plane $l^T x = 0$.

Пусть $z \in \partial \Omega_1^+$, тогда справедливы соотношения

$$c^T x = f_1^+(\sigma), \sigma \in [-\sigma_1; \sigma_3], \quad (2.5)$$

$$l^T x \geq -r_2 - \lambda_1 c^T x - \lambda_2 \sigma. \quad (2.6)$$

Используя (2.5), (2.6) и условия 1); 4) теоремы найдём производную функции $V_1^+(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_1^+$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^+(z) &= l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma} (f_1^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \geq \\ &\geq -r_2 - \lambda_2 \sigma - \lambda_1 f_1^+(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma} (f_1^+(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) = \\ &= -r_2 + \varepsilon_1^+ > 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для $z \in \partial\Omega_2^+$, выполняются соотношения

$$c^T x = f_1^-(\sigma), \sigma \in [-\sigma_1; \sigma_2], \quad (2.8)$$

$$l^T x \leq r_1 - \lambda_1 c^T x - \lambda_2 \sigma. \quad (2.9)$$

Найдём производную функции $V_1^-(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_2^+$. Используя (2.8), (2.9), условия 1), 3) теоремы, получим

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^-(z) &= l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^-(\sigma)}{d\sigma} (f_1^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) \leq \\ &\leq r_1 - \lambda_2 \sigma - \lambda_1 f_1^-(\sigma) - \Gamma\varphi(\sigma) - \frac{df_1^-(\sigma)}{d\sigma} (f_1^-(\sigma) + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) = \\ &= r_1 - \varepsilon_1^- < 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_3^+$, если $z \in \partial\Omega_3^+$, то справедливо неравенство (2.9) и равенство

$$c^T x = 0, \sigma \in [\sigma_2; \sigma_3], \quad (2.11)$$

В силу условий 1); 8) теоремы и (2.9), (2.11) получим, что производная функции $P(z)$ в силу системы (1.1) удовлетворяет соотношению

$$\dot{P}(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) \leq r_1 - \lambda_2 \sigma - \Gamma\varphi(\sigma) < 0. \quad (2.12)$$

Пусть $z \in \partial\Omega_4^-$, тогда справедливо (2.9) и соотношение

$$c^T x = f_2^+(\sigma), \sigma \in [-\sigma_6; \sigma_5], \quad (2.13)$$

Используя (2.9), (2.13) и условия 1); 6) теоремы найдём производную функции $V_2^+(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_4^-$.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2^+(z) &= l^T x - \Gamma \varphi(\sigma) - \frac{df_2^+(\sigma)}{d\sigma} (f_2^+(\sigma) + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma) \leq \\
&\leq r_1 - \lambda_2 \sigma - \lambda_1 f_2^+(\sigma) - \Gamma \varphi(\sigma) - \frac{df_2^+(\sigma)}{d\sigma} (f_2^+(\sigma) + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma) = \\
&= r_1 - \varepsilon_2^+ < 0.
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Для $z \in \partial\Omega_5^-$ выполняется (2.6) и равенство

$$c^T x = f_2^-(\sigma), \sigma \in [-\sigma_4; \sigma_5], \tag{2.15}$$

Найдём производную функции $V_2^-(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_5^-$, применив (2.6), (2.15) и условия 1); 5) теоремы. Получим

$$\begin{aligned}
\dot{V}_2^-(z) &\geq -r_2 - \lambda_2 \sigma - \lambda_1 f_2^-(\sigma) - \Gamma \varphi(\sigma) - \\
&- \frac{df_2^-(\sigma)}{d\sigma} (f_2^-(\sigma) + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma) = -r_2 + \varepsilon_2^- > 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Рассмотрим множество $\partial\Omega_6^-$, если $z \in \partial\Omega_6^-$, то справедливо неравенство (2.6) и равенство

$$c^T x = 0, \sigma \in [-\sigma_6; -\sigma_4]. \tag{2.17}$$

С учётом условий 1); 7) теоремы и (2.6), (2.17) получим, что производная функции $P(z)$ в силу системы (1.1) удовлетворяет соотношению

$$\dot{P}(z) = l^T x - \Gamma \varphi(\sigma) \geq -r_2 - \lambda_2 \sigma - \lambda_1 c^T x - \Gamma \varphi(\sigma) = -r_2 - \lambda_2 \sigma - \Gamma \varphi(\sigma) > 0. \tag{2.18}$$

Пусть $z \in \partial\Omega_7^-$, тогда выполняется условие $\lambda_2 = \beta_1 + \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1)$ и справедливо соотношение

$$l^T x = r_1 - \lambda_2 \sigma - \lambda_1 c^T x. \tag{2.19}$$

Используя (2.19) и условия 1); 9) теоремы найдём производную функции $W_1(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_7^-$.

$$\begin{aligned}
\dot{W}_1(z) &= -\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x - \nu_1 \varphi(\sigma) + \lambda_1 l^T x - \lambda_1 \Gamma \varphi(\sigma) + \lambda_2 c^T x + \lambda_2 \rho_1 \varphi(\sigma) + \\
&+ \lambda_2 \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \lambda_2 \alpha_1 u \sigma = (\lambda_1 - \alpha_1) l^T x + (\lambda_2 - \beta_1) c^T x + \\
&+ (\lambda_2 \rho_1 - \nu_1 - \lambda_1 \Gamma + \lambda_2 \rho_0(1-u)) \varphi(\sigma) - \lambda_2 \alpha_1 u \sigma = (\lambda_1 - \alpha_1) r_1 - (\lambda_1 - \alpha_1) \lambda_2 \sigma - \\
&- (\lambda_1 - \alpha_1) \lambda_1 c^T x + (\lambda_2 - \beta_1) c^T x + (\lambda_2 \rho_1 - \nu_1 - \lambda_1 \Gamma + \lambda_2 \rho_0(1-u)) \varphi(\sigma) - \\
&- \lambda_2 \alpha_1 u \sigma = (\lambda_2 - \beta_1 - \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1)) c^T x - (\lambda_2 \alpha_1 u + \lambda_2(\lambda_1 - \alpha_1)) \sigma + \\
&+ (\lambda_2 \rho_1 - \nu_1 - \lambda_1 \Gamma + \lambda_2 \rho_0(1-u)) \varphi(\sigma) - (\alpha_1 - \lambda_1) r_1 = \psi_1(\sigma) < 0.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Для $z \in \partial\Omega_8^+$ выполняется условие $\lambda_2 = \beta_1 + \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1)$ и равенство

$$l^T x = -r_2 - \lambda_2 \sigma - \lambda_1 c^T x. \quad (2.21)$$

Найдём производную функции $W_2(z)$ в силу системы (1.1) на множестве $\partial\Omega_8^+$, применив (2.21) и условия 1); 10) теоремы. Получим

$$\begin{aligned} \dot{W}_2(z) &= (\lambda_2 - \beta_1 - \lambda_1(\lambda_1 - \alpha_1))c^T x - (\lambda_2\alpha_1 u + \lambda_2(\lambda_1 - \alpha_1))\sigma + \\ &+ (\lambda_2\rho_1 - \nu_1 - \lambda_1\Gamma + \lambda_2\rho_0(1-u))\varphi(\sigma) + (\alpha_1 - \lambda_1)r_2 = \psi_2(\sigma) > 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

С учётом соотношений (2.7), (2.10), (2.12), (2.14), (2.16), (2.18), (2.20), (2.22) получим, что множество Ω является положительно инвариантным.

Рассмотрим часть плоскости $P_0 = \{z : Q_0(z) = \sigma = 0, c^T x > 0\}$. Найдём пересечение множеств $\Omega \cap P_0 = G$. Обозначим через T оператор сдвига по траекториям системы (1.1). Покажем, что $T(G) \subset G$. Для этого множество Ω разобьём на два множества $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, где $\Omega_1 = \Omega \setminus \{z : c^T x > 0, \sigma < 0\}$, $\Omega_2 = \overline{\Omega \setminus \Omega_1}$, Ω_2 – замыкание множества $\Omega \setminus \Omega_1$. В силу построения множества Ω справедливо, что существует $\bar{\varepsilon} > 0$ и для любого $z \in \Omega$ выполняется неравенство

$$(c^T x)^2 + \sigma^2 \geq \bar{\varepsilon}. \quad (2.23)$$

Найдём производную функции $Q_0(z)$ в силу системы (1.1) на множестве G . Применяя условие 2) теоремы, получим

$$\dot{Q}_0(z) = c^T x + \rho_1\varphi(0) + \rho_0(1-u)\varphi(0) - \alpha_1 u\sigma = c^T x > 0. \quad (2.24)$$

Пусть $z \in G_{1,1} = \{z : c^T x = 0, -\sigma_4 < \sigma < -\sigma_1, W_1(z) \leq 0, W_2(z) \geq 0\}$, тогда используя условия 1); 7) теоремы найдём производную функции $P(z) = c^T x$ в силу системы (1.1) на множестве $G_{1,1}$

$$\dot{P}(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) \geq -r_2 - \lambda_2\sigma - \lambda_1 c^T x - \Gamma\varphi(\sigma) = -r_2 - \lambda_2\sigma - \Gamma\varphi(\sigma) > 0. \quad (2.25)$$

Для множества Ω_1 поверхности G , $G_{1,1}$ являются частью границы. Пусть $z_0 \in G \subset \Omega_1$ покажем, что для решения системы (1.1) $z(t, z_0)$ с начальными условиями $z(0, z_0) = z_0$ существует t_1 , такое что $z(t_1, z_0) \notin \Omega_1$. Предположим противное, то есть для любого $t > 0$ выполняется принадлежность $z(t, z_0) \in \Omega_1$. Множество Ω_1 является ограниченным, следовательно, решение $z(t, z_0)$ является ограниченным.

Обозначим $\psi_3(\sigma) = \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma$. В силу системы (1.1) справедливо соотношение

$$\int_0^t \dot{\sigma}(t)dt = \int_0^t (c^T x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma)dt = (\sigma(t) - \sigma(0)) \in R. \quad (2.26)$$

Из соотношения (2.26) в силу леммы Барбалата [12] получим равенство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (c^T x + \rho_1\varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u\sigma) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (c^T x + \psi_3(\sigma)) = 0. \quad (2.27)$$

Используя условие 1) теоремы найдем интегралы

$$\int_0^t c^T \dot{x}dt = \int_0^t (l^T x - \Gamma\varphi(\sigma))dt = c^T (x(t) - x(0)) \in R, \quad (2.28)$$

$$\int_0^t l^T \dot{x} dt = \int_0^t (-\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x - \nu_1 \varphi(\sigma)) dt = l^T (x(t) - x(0)) \in R. \quad (2.29)$$

С учетом (2.28), (2.29) и леммы Барбалата справедливы равенства

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (l^T x - \Gamma \varphi(\sigma)) = 0, \quad (2.30)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-\alpha_1 l^T x - \beta_1 c^T x - \nu_1 \varphi(\sigma)) = 0. \quad (2.31)$$

Используя (2.27), (2.30), (2.32) получим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (-\alpha_1 \Gamma \varphi(\sigma) + \beta_1 \psi_3(\sigma) - \nu_1 \varphi(\sigma)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \psi_4(\sigma) = 0. \quad (2.32)$$

В силу условий 2); 11) теоремы и (2.27), (2.32) получим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} c^T x = 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} ((c^T x)^2 + \sigma^2) = 0. \quad (2.33)$$

Соотношения (2.23) и (2.33) одновременно не выполняются, следовательно, существует t_1 , такое что $z(t_1, z_0) \notin \Omega_1$. С учетом (2.7), (2.10), (2.12), (2.14), (2.16), (2.24), (2.25) получим, что существует \bar{t} , для которого $z(\bar{t}, z_0) \in G_{1,1}$. Получим, что оператор T отображает множество G во множество $G_{1,1}$, $T(G) \subset G_{1,1}$.

Пусть $z \in G_{1,2} = \{z : c^T x = 0, -\sigma_6 < \sigma < -\sigma_1, W_1(z) \leq 0, W_2 \geq 0\}$, тогда используя условия 1); 7) теоремы найдём производную функции $P(z) = c^T x$ в силу системы (1.1) на множестве $G_{1,2}$

$$\dot{P}(z) = l^T x - \Gamma \varphi(\sigma) \geq -r_2 - \lambda_2 \sigma - \lambda_1 c^T x - \Gamma \varphi(\sigma) = -r_2 - \lambda_2 \sigma - \Gamma \varphi(\sigma) > 0. \quad (2.34)$$

Для множества Ω_2 поверхности G , $G_{1,2}$ являются частью границы. Пусть $z_2 \in G_{1,2}$, $G_{1,1} \subset G_{1,2}$, тогда аналогично множеству Ω_1 показывается, что для решения системы (1.1) $z(t, z_2)$ с начальными условиями $z(0, z_2) = z_2$ существует t_2 , такое что $z(t_2, z_2) \in G$. Таким образом, для оператора T выполняется включение $T(G) \subset G$.

Из непрерывности решений системы (1.1) и того факта, что множество G – множество без контакта следует непрерывность оператора T . Множество G – замкнутое, ограниченное, выпуклое, оператор T отображает множество G в себя, $T(G) \subset G$, тогда по теореме Брауэра [13] существует неподвижная точка оператора T такая, что $Tz^* = z^* \in G$. Неподвижная точка z^* определяет начальные условия предельного цикла первого рода. Таким образом, система (1.1) имеет предельный цикл первого рода. Теорема доказана.

3. Проверка условий теоремы

П р и м е р 3.1 Рассмотрим систему дифференциальных уравнений (1.1), где $A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} -\nu_1 \\ -\Gamma \end{pmatrix}$, $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha_1 > 0$, $\beta_1 > 0$, тогда $c^T b = -\Gamma$, $c^T A = l^T$, $l^T b = -\nu_1 < 0$, $\text{rang} \|c, l\| = 2$, $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$, $c^T A^{-1} b \neq 0$, $\rho_1 = \nu_1 \beta_1^{-1}$, $\rho = \rho_1 + \rho_0$. Для системы (1) выполнено условие 1) теоремы.

Пусть $\alpha_1 = 0.02$, $\beta_1 = 2.11$, $\Gamma = 4$, $\nu_1 = 1.24$, $\gamma = 0.12$, $u = 0.978$, $\rho_1 = 0.59$, $\rho_0 = 0.032$. Рассмотрим систему

$$\dot{x} = Ax + b\varphi_2(\tilde{\sigma}), \quad \dot{\tilde{\sigma}} = c^T x + \rho_1\varphi_2(\tilde{\sigma}) + \rho_0(1-u)\varphi_2(\tilde{\sigma}) - \alpha_1 u \tilde{\sigma}. \quad (3.1)$$

Функция $\varphi_2(\tilde{\sigma}) = -\gamma + \sin(\tilde{\sigma})$ – периодическая с периодом $\Delta = 2\pi$. Уравнение $\varphi_2(\tilde{\sigma}) = 0$ на сегменте $[0; \Delta]$ имеет два корня $\varphi_2(\tilde{\sigma}_1) = \varphi_2(\tilde{\sigma}_2) = 0$, где $0 < \tilde{\sigma}_1 < \tilde{\sigma}_2 < \Delta$, $\tilde{\sigma}_1 = \arcsin\gamma = 0.12$, $\tilde{\sigma}_2 = \pi - 2\arcsin\gamma = 2.9$. В системе (3.1) сделаем замену переменных $\sigma = \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}_1$, тогда в силу условия 2) теоремы система (3.1) примет вид (1.1), где $\varphi(\sigma) = -\gamma + \sin(\tilde{\sigma} + \arcsin\gamma)$. Тогда $\dot{\varphi}(0) > 0$, $\dot{\varphi}(\sigma_2) < 0$, $\dot{\varphi}(\sigma)$ ограничена на сегменте $[0; \Delta]$. Для системы (1.1) выполнено условие 2) теоремы.

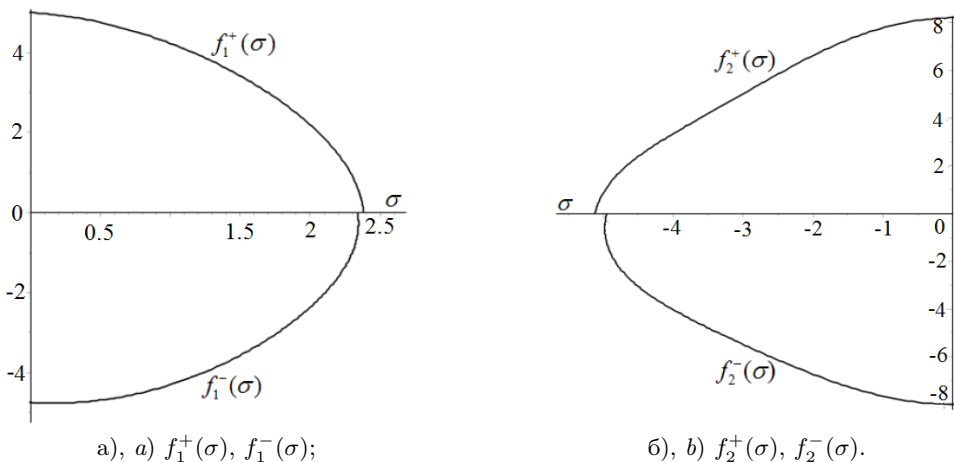
Пусть $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \beta_1 = 2.11$ тогда система второго порядка (2.1) при $\varepsilon = -\varepsilon_1^- = -0.96$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^-(\sigma)$ такую, что при любом $\sigma \in [-2.161; 2.34]$ справедливы соотношения $f_1^-(-2.161) = f_1^-(2.34) = 0$, $\sigma_1 = 2.161 > 0$, $\sigma_2 = 2.34$ и $f_1^-(\sigma) < 0$. Существует $r_1 > 0$ и $r_1 - \varepsilon_1^- < 0$. Для системы (1.1) выполняется условие 3) теоремы.

Система второго порядка (2.1) при $\varepsilon = \varepsilon_1^+ = 0.96 > r_2$ имеет решение, определяющее функцию $f_1^+(\sigma)$ на $\sigma \in [-2.161; 2.382]$, где $\sigma_3 = 2.382 > 0$. Функция $f_1^+(\sigma) > 0$, $f_1^+(-2.161) = f_1^+(2.382) = 0$, $f_1^+(\sigma) > 0$ и $0 < 2.34 < 2.382$. Существует такое r_2 , для которого $r_2 < \varepsilon = \varepsilon_1^+ = 0.96$. Условие 4) теоремы выполняется.

Система (2.1) в случае $\varepsilon = \varepsilon_2^- = 0.26 > r_2$ имеет решение, определяющее функцию $f_2^-(\sigma)$ на $\sigma \in [-4.949; 5.749]$, где $-\sigma_4 = -4.949$ и $\sigma_5 = 5.749$. Функция $f_2^-(\sigma) < 0$, $f_2^-(-4.949) = f_2^-(5.749)$ и справедливы неравенства $-4.949 < -2.161 < 2.382 < 5.749$. Проверено условие 5) теоремы.

При $\varepsilon = -\varepsilon_2^+ = -0.26$ и $r_1 < \varepsilon_2^+$ показывается, что система второго порядка (2.1) имеет решение $f_2^+(\sigma)$ на $\sigma \in [-5.118; 5.749]$, где $-\sigma_6 = -5.118$. Функция $f_2^+(\sigma) > 0$, $f_2^+(-5.118) = f_2^+(5.749) = 0$ и справедливы неравенства $-5.118 < -4.949 < 0$. Проверено условие 6) теоремы.

На Рис. 3.1, а изображены функции $f_1^+(\sigma)$ и $f_1^-(\sigma)$, а на Рис. 3.1, б – функции $f_2^+(\sigma)$ и $f_2^-(\sigma)$.



а), а) $f_1^+(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$;

б), б) $f_2^+(\sigma)$, $f_2^-(\sigma)$.

Рис. 3.1. Графики функций а) $f_1^+(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$ и б) $f_2^+(\sigma)$, $f_2^-(\sigma)$.

Fig 3.1. Function graphs а) $f_1^+(\sigma)$, $f_1^-(\sigma)$ and б) $f_2^+(\sigma)$, $f_2^-(\sigma)$.

Численно показывается, что при $\sigma \in [-5.118; -4.949]$ выполняется соотношение $-2.11\sigma - r_2 - 4\varphi(\sigma) > 0$, а для любого $\sigma \in [2.34; 2.382]$ справедливо неравенство $r_1 - 2.11\sigma - 4\varphi(\sigma) < 0$. В теореме выполнены условия 7), 8).

При $\sigma \in [-5.118; 5.749]$ выполняются неравенства $\psi_1(\sigma) < 0$ и $\psi_2(\sigma) > 0$. На Рис. 3.2, а-б изображены функции $\psi_1(\sigma) < 0$ и $\psi_2(\sigma) > 0$. Выполнены условия 9) и 10) теоремы.

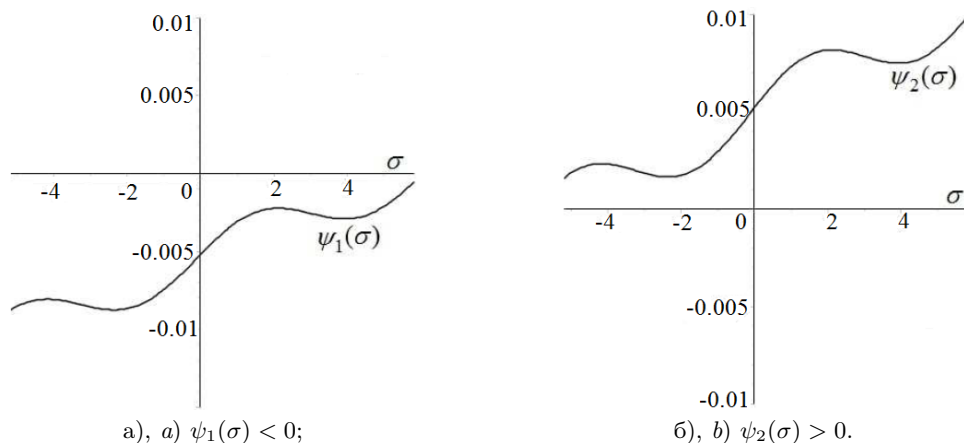


Рис. 3.2. Графики функций $\psi_1(\sigma)$ и $\psi_2(\sigma)$ при условии а) $\psi_1(\sigma) < 0$ и б) $\psi_2(\sigma) > 0$.

Fig 3.2. Function graphs $\psi_1(\sigma)$ and $\psi_2(\sigma)$ provided а) $\psi_1(\sigma) < 0$ and б) $\psi_2(\sigma) > 0$.

Если $\psi_3(\sigma) = 0.59\varphi(\sigma) + 7.04 \cdot 10^{-4}\varphi(\sigma) - 0.019\sigma$, то функция $\psi_4(\sigma) = -0.08\varphi(\sigma) - 1.24\varphi(\sigma) + 2.11\psi_3(\sigma)$ имеет единственный ноль на сегменте $\sigma \in [-5.118; 5.749]$, $\psi_4(0) = 0$. Условие 11) теоремы выполняется.

Для системы (1.1) выполнены все условия теоремы, тогда система (1.1) имеет предельный цикл первого рода. Условия теоремы позволяют определить область начальных условий цикла первого рода системы (1.1). Численно показывается, что система (1.1) при $u = 0.978$ имеет устойчивый предельный цикл первого рода $z_1(t) = colon(x_1(t), x_2(t), \sigma(t))$ с начальными условиями $x_1 = -0.00165$, $x_2 = 7.10951$, $\sigma = 0$, $T_z = 4.6802$ и $\langle \dot{\sigma} \rangle = 0.00073$, где $\langle \dot{\sigma} \rangle = T^{-1} \int_0^T \dot{\sigma}(t) dt = 0$.

Рассмотрим множество $\omega_1 = \{(\sigma, x) : (x_1 - 0.00165)^2 + (x_2 - 7.10951)^2 \leq 2.22^2, \sigma = 0\}$. Пусть U_1 – оператор сдвига по траекториям системы (1.1), тогда $U_1(\omega_1) \subset \{z : \sigma = 0, c^T x > 0\}$. Обозначим $Q_1(x) = x - U_1(x)$, $\gamma(Q_1, \partial\omega_1)$ – вращение векторного поля Q_1 оператора U_1 на границе $\partial\omega_1$ множества ω_1 . Вращение векторного поля Q_1 на границе $\partial\omega_1$ множества ω_1 отлично от нуля, $\gamma(Q_1, \partial\omega_1) \neq 0$. Множество ω_1 при $u = 0.978$ содержит неподвижную точку оператора U_1 , определяющую начальные условия цикла первого рода $z_1(t)$ системы (1.1).

При уменьшении значения параметра u до значения $u = 0$, нефазовая система (1.1) становится фазовой системой с запаздыванием

$$\dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \quad \dot{\sigma} = c^T x + (\rho_1 + \rho_0)\varphi(\sigma). \quad (3.2)$$

Пусть U_2 оператор сдвига по траекториям системы (1.1), $Q_2(x) = x - U_2(x)$, $\gamma(Q_2, \partial\omega_2)$ – вращение векторного Q_2 поля оператора U_2 . Численно показывается, что

$\gamma(Q_2, \partial\omega_2) \neq 0$, на $\partial\omega_2 = \{(\sigma, x) : (x_1 - 1.890)^2 + (x_2 - 8.743)^2 = 1.22^2, \sigma = 0\}$. Оператор U_2 имеет неподвижную точку, определяющую начальные условия устойчивого цикла первого рода $z_{10}(t)$, $x_1 = 1.89025$, $x_2 = 8.74307$, $\sigma = 0$, $T_{z_{10}} = 4.45675$ фазовой системы (3.2), для которого $\langle \dot{\sigma} \rangle = 0.00089$. Таким образом, цикл $z_1(t)$ нефазовой системы (1.1) переходит в цикл $z_{10}(t)$ фазовой системы (3.2).

У фазовой системы (3.2) помимо цикла $z_{10}(t)$ существует еще один устойчивый предельный цикл $z_{20}(t)$ с начальными условиями $x_1 = 2.36543$, $x_2 = 12.1368$, $\sigma = 0$, $T_{z_{20}} = 4.29085$, $\langle \dot{\sigma} \rangle = 0.0012$. Существование в системе (3.2) разночастотных предельных циклов первого рода позволяет сделать вывод о наличии фазовой мультистабильности в этой системе, при этом предельные циклы первого рода системы (3.2) определяют режимы фазовой синхронизации.

На Рис. 3.3, а изображены проекции полученных циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$ фазовой системы (3.2) на плоскость (x_1, x_2) , а на Рис. 3.3, б представлено их изображение в пространстве (x_1, x_2, σ) .

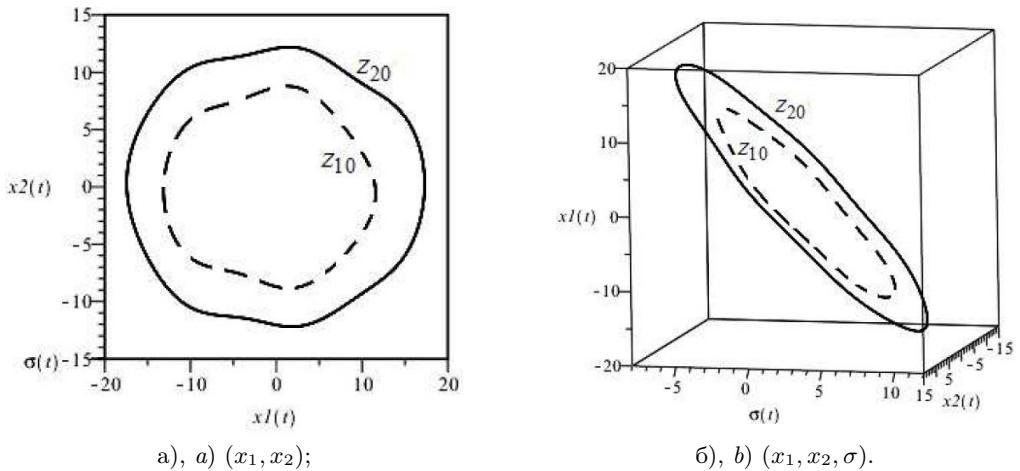


Рис. 3.3. Циклы $z_{10}(t)$ и $z_{20}(t)$ фазовой системы в плоскости а) (x_1, x_2) и в пространстве б) (x_1, x_2, σ) .

Fig 3.3. Cycles $z_{10}(t)$ and $z_{20}(t)$ of the phase system in the plane а) (x_1, x_2) and in space б) (x_1, x_2, σ) .

В работах [6; 7; 11] проводились исследования, связанные с определением пространственных характеристик циклов систем (1.1) и (3.2). Под пространственными характеристиками, понимаются понятия кривизны $K_z(t)$ и кручения $Q_z(t)$ циклов первого рода. Был рассмотрен вопрос возможности использования кривизны и кручения для определения характеристик режима скрытой синхронизации в системах фазовой автоподстройки [6; 7]. В работе [11] было показано, что для определения режима скрытой синхронизации в случае фазовой мультистабильности можно использовать кривизну цикла.

Для выбора наилучшего режима скрытой синхронизации системы (1.1) возникает необходимость проведения сравнительного анализа зависимости кривизны циклов системы (1.1) от ее координат. Для этого рассматривается расширенная система вида [6]

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + b\varphi(\sigma), \\ \dot{\sigma} = c^T x + \rho_1 \varphi(\sigma) + \rho_0(1-u)\varphi(\sigma) - \alpha_1 u \sigma, \\ \dot{K}(t) = \psi(\sigma, x), \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\dot{K}(t) = \frac{g'f - 3gf'}{2g^{1/2}f^{5/2}}$ – производная кривизны цикла системы (1.1), а функции $g(x; \sigma)$, $g'(x; \sigma)$, $f(x; \sigma)$, $f'(x; \sigma)$ и определяются соотношениями

$$\begin{aligned} g(x; \sigma) &= (x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)^2 + (x'_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')^2 + (\sigma' x'_1 - \sigma'' x'_1)^2, \\ g'(x; \sigma) &= 2(x'_1 x''_2 - x''_1 x'_2)(x'_1 x'''_2 - x'''_1 x'_2) + 2(x'_2 \sigma'' - x''_2 \sigma')(x'_2 \sigma''' - x'''_2 \sigma') + \\ &\quad + 2(\sigma' x'_1 - \sigma'' x'_1)(\sigma' x'''_1 - \sigma'''_1 x'_1), \\ f(x; \sigma) &= (x'_1)^2 + (x'_2)^2 + (\sigma')^2, \\ f'(x; \sigma) &= 2x'_1 x''_1 + 2x'_2 x''_2 + 2\sigma' \sigma''. \end{aligned}$$

Используя результаты, полученные в работах [6; 7; 11], для циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$, системы (3.2) проведен сравнительный анализ зависимости кривизны от фазовых координат этой системы. Так, например, на Рис. 3.4, а в пространстве $(x_1; x_2; K_z(t))$ изображены линии L_1 , L_2 определяющие решения системы (3.3), с начальными условиями, соответствующими начальным условиям циклов $z_{10}(t)$, $z_{20}(t)$ системы (3.2), а на Рис. 3.4, б представлены линии L_1^1 , L_2^2 , которые описывают зависимость кривизны $K_z(t)$ этих циклов от координаты $x_2(t)$.

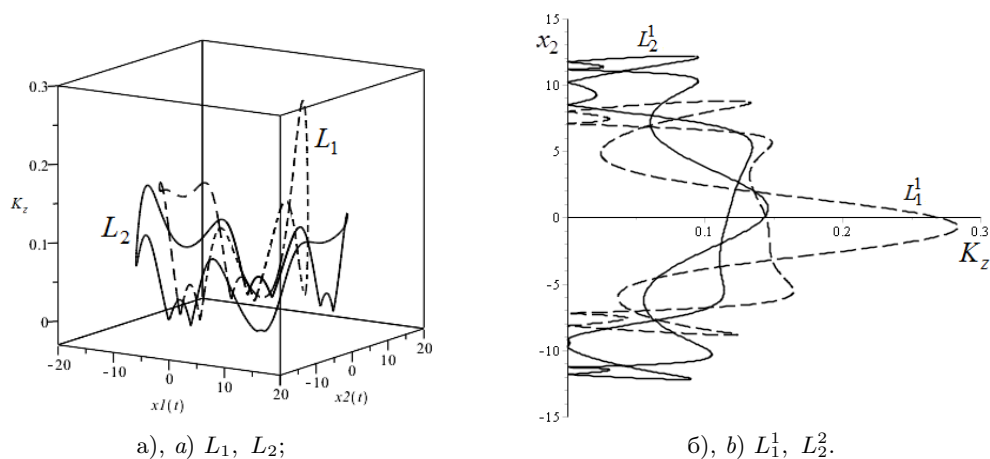


Рис. 3.4. Линии а) L_1 , L_2 и б) L_1^1 , L_2^2 .

Fig 3.4. Lines а) L_1 , L_2 and б) L_1^1 , L_2^2 .

Использование пространственных характеристик позволяет проводить анализ близости циклов фазовой и нефазовой систем для определения режима фазовой синхронизации. Результаты, полученные в данной работе, для математической модели системы фазовой автоподстройки, описываемой системой (3.2), позволяют получить условия существования в такой системе режимов фазовой мультстабильности, квазисинхронных режимов и режимов вынужденной фазовой синхронизации, влияющих на появление в системе (3.2) режима скрытой синхронизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Леонов Г.А., Буркин И.М., Шепелявый А.И. Частотные методы в теории колебаний. СПб.: Изд-во СПбГУ, 1992. 368 с.
2. Шахгильдян В.В., Ляховкин А.А. Системы фазовой автоподстройки частоты. М.: Связь, 1972. 448с.
3. Шалфеев В.Д., Матросов В.В. Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации. Н. Новгород: Изд-во ННГУ, 2013. 366 с.
4. Мамонов С.С., Харламова А.О. Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством // Журнал Средневолжского математического общества. 2017. Т.19, №1. С. 67–76. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.19.2017.01.67-76>
5. Мамонов С.С., Харламова А.О. Вынужденная синхронизация систем фазовой автоподстройки с запаздыванием // Вестник Рязанского государственного радиотехнического университета. 2017. № 62. С. 26–35. DOI: <https://doi.org/10.21667/1995-4565-2017-62-4-26-35>
6. Мамонов С.С., Ионова И.В., Харламова А.О. Механизмы возникновения скрытой синхронизации динамических систем // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 3. С. 333–348. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-333-348>
7. Мамонов С.С., Ионова И.В., Харламова А.О. Кривизна колебательных циклов фазовых систем // Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения. 2019. Т. 19, № 2. С. 105–110.
8. Kharlamova A. O. Asynchronous modes of phase systems. Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 248, No. 4. P. 476–483. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04888-w>
9. Mamonov S.S., Kharlamova A. O. First-kind cycles of systems with cylindrical phase space// Journal of Mathematical Sciences, 2020. Vol. 248, No. 4, P. 457–466 (2020). DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04886-y>
10. Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Матричные уравнения систем фазовой синхронизации // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, вып. 2. С. 244–258. DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-2-244-258>
11. Мамонов С. С., Ионова И. В., Харламова А. О. Пространственные характеристики циклов систем дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения и математическое моделирование : межвуз. сб. науч. тр. 2020. Вып. 1. С. 39–45.
12. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. М.: Наука, 1988. 256 с.
13. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1966. 332 с.

*Поступила 22.01.2021; доработана после рецензирования 25.02.2021;
принята к публикации 28.02.2021*

Информация об авторах:

Мамонов Сергей Станиславович, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, ФГБОУ ВО «РГУ им. С. А. Есенина», (390000, Россия, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5626-748X>, s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Ионова Ирина Викторовна, доцент кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, ФГБОУ ВО «РГУ им. С. А. Есенина», (390000, Россия, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2580-5388>, i.ionova@365.rsu.edu.ru

Харламова Анастасия Олеговна, старший преподаватель кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, ФГБОУ ВО «РГУ им. С. А. Есенина», (390000, Россия, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7811-381X>, a.harlamova@365.rsu.edu.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 34C25

Dynamics of the mathematical model of phase-locked systems with delay

S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova

Ryazan State University named after S.A. Esenin (Ryazan, Russian Federation)

Abstract. In the article, the conditions for the existence of limit cycles of the first kind are obtained for self-tuning systems with delay, which, in turn, determine the conditions for the occurrence of hidden synchronization modes in such systems. The principle of the proof is based on constructing a positively invariant toroidal set using two cylindrical surfaces, whose boundaries are determined by the limit cycles of a system of the second-order differential equations. Using the results obtained in the article for limit cycles, the possibility of using the curvature of the cycle for a comparative analysis of the proximity of the cycles of phase and non-phase systems, as well as for determining the mode of hidden synchronization, is shown.

Key Words: system of differential equations, phase system, limit cycles of the first kind, latent synchronization, multistability, fixed point, shift operator, rotation of a vector field, cycle curvature

For citation: S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova. Dynamics of the mathematical model of phase-locked systems with delay. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:1(2021), 28–42. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.28-42>

REFERENCES

1. G. A. Leonov, I. M. Burkin, A. I. Shepelyavyy, [*Frequency methods in the theory of vibrations*], SPbGU Publ., St. Petersburg, 1992 (In Russ.), 368 p.
2. V. V. Shahgildyan, A. A. Lyakhovkin, [*Phase-locked loop systems*], Svyaz' Publ, Moscow, 1972 (In Russ.), 448 p.
3. V. D. Shalfeev, V. V. Matrosov, [*Nonlinear dynamics of phase synchronization systems*], NNGU Publ., N. Novgorod, 2013 (In Russ.), 366 p.

4. S. S. Mamonov, A. O. Kharlamova, “Determination of the conditions for the existence of limit cycles of the first kind of systems with a cylindrical phase space”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19**:1 (2017), 67–76 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.19.2017.01.67-76>
5. S. S. Mamonov, A. O. Kharlamova, “Forced synchronization of the system phase-locked loop with delay”, *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta.*, **62** (2017), 26–35 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.21667/1995-4565-2017-62-4-26-35>
6. S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, “Mechanisms of occurrence of hidden synchronization of dynamic systems”, *Chebyshevskiy sbornik*, **20**:3 (2019), 333–348 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2019-20-3-333-348>
7. S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, “Curvature of oscillatory cycles of phase systems”, *Vestnik RAEN. Differentsial’nye uravneniya*, **19**:2 (2019), 105–110 (In Russ.).
8. A. O. Kharlamova, “Asynchronous modes of phase systems”, *Journal of Mathematical Sciences*, **248**:4 (2020), 476–483. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04888-w>
9. S. S. Mamonov, A. O. Kharlamova, “First-kind cycles of systems with cylindrical phase space”, *Journal of Mathematical Sciences*, **248**:4 (2020), 457–466. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10958-020-04886-y>
10. S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, “Matrix equations of the system of phase synchronization”, *Chebyshevskii Sbornik*, **20**:2 (2019), 244–258 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.22405/2226-8383-2018-20-2-244-258>
11. S. S. Mamonov, I. V. Ionova, A. O. Kharlamova, “Spatial characteristics of cycles of systems of differential equations”, *Differentsial’nye uravneniya i matematicheskoe modelirovanie : mezhvuz. sb. nauch. tr.*, **1** (2020), 39–45 (In Russ.).
12. E. P. Popov, [*Theory of nonlinear automatic control and control systems*], Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russ.), 256 p.
13. M. A. Krasnosel’skiy, [*The operator of the shift along the trajectories of differential equations*], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 332 p.

Submitted 22.01.2021; Revised 25.02.2021; Accepted 28.02.2021

Information about the authors:

Sergei S. Mamonov, Full Professor, Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan State University named after S.A. Esenin (46 Svobody Str., Ryazan 390000, Russia), D. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5626-748X>, s.mamonov@365.rsu.edu.ru

Irina V. Ionova, Associate Professor, Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan State University named after S.A. Esenin (46 Svobody Str., Ryazan 390000, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2580-5388>, i.ionova@365.rsu.edu.ru

Anastasiya O. Kharlamova, Senior Lecturer, Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan State University named after S.A. Esenin (46 Svobody

Str., Ryazan 390000, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7811-381X>, a.harlamova@365.rsu.edu.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.43–57

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.926:517.929.4

К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора

В. И. Никонов

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. Предлагается новый геометрический подход к исследованию частичной устойчивости линейных систем, основанный на применении геометрической теории линейных операторов. Привлекая теорию сопряженных пространств и сопряженных линейных операторов, строятся базисы, в которых исследуемая система принимает канонический вид. Рассматривается циклическое подпространство относительно сопряженного линейного оператора. Строится базис сопряженного пространства линейного оператора, в котором его матрица принимает канонический вид. Этому базису соответствует двойственный базис исходного линейного пространства. Тогда в паре базисов дуальных пространств, исследуемая система принимает наиболее простой вид. Реализация геометрических свойств системы осуществляется с помощью неособого линейного преобразования в пространстве части компонент фазового вектора системы. Это позволяет произвести декомпозицию исследуемой системы с целью получения необходимых и достаточных условий частичной устойчивости линейной системы. В эквивалентной системе выделяется независимая подсистема, характер устойчивости которой определяет поведение исследуемой компоненты фазового вектора исходной системы. Устанавливается взаимосвязь частичной устойчивости системы с существованием инвариантного подпространства линейного оператора, характеризующего динамику системы. Канонический вид полученной подсистемы позволяет легко исключить вспомогательные переменные и записать эквивалентное этой системе уравнение. Показано применение полученных результатов к решению задачи частичной устойчивости для линейных систем с постоянными коэффициентами из классов обыкновенных дифференциальных уравнений, дискретных и систем с отклоняющимся аргументом. Приведен пример линейной системы дифференциальных уравнений, иллюстрирующий полученный результат.

Ключевые слова: частичная устойчивость, циклическое подпространство, минимальный аннулирующий многочлен, сопряженное пространство

Для цитирования: Никонов В. И. К частичной устойчивости линейных систем относительно заданной компоненты фазового вектора // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 43–57. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.43–57>

1. Введение

В настоящее время имеется несколько подходов к исследованию частичной устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами [1–4], [6; 7]. Несмотря на то, что теория частичной устойчивости линейных систем изучена достаточно полно, использование новых геометрических свойств этих объектов позволяет получить более полное представление о динамике исследуемых компонент фазового вектора таких систем и использовать их при решении подобных задач.

Данная статья посвящена геометрическим методам исследования частичной устойчивости линейных систем с постоянными коэффициентами. Используя геометрическую теорию линейных операторов [5], предлагается дальнейшее развитие результатов работы [8].



2. Системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A_* x(t), \quad (2.1)$$

где $x \in R^n$, $A_* \in R^{n \times n}$. Требуется исследовать устойчивость системы (2.1) относительно заданной компоненты фазового вектора x .

Предположим, что требуется исследовать устойчивость относительно первой компоненты. Учитывая это, представим фазовый вектор x в виде $x = (y, z)$, $y \in R$, $z \in R^p$, $n = 1 + p$.

Тогда система (2.1) представима в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ay + bz, \\ \frac{dz}{dt} &= cy + Dz, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $y \in R$, $z \in R^p$, $a \in R$, $b \in R^{1 \times p}$, $c \in R^{p \times 1}$, $D \in R^{p \times p}$.

Отметим, что т. к. исследуется устойчивость только по переменной y , то необходимо, чтобы это свойство системы (2.2) не зависело от выбора системы z -координат пространства, в которой система задана. В связи с этим, в пространстве R^p можно выбирать произвольный базис, что не должно повлиять на характер устойчивости системы (2.2) относительно переменной y .

Следовательно, проведя замену переменных

$$z = S^{-1} \bar{z}, \quad (2.3)$$

получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ay + bS^{-1} \bar{z}, \\ \frac{d\bar{z}}{dt} &= Scy + SDS^{-1} \bar{z}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

Для решения поставленной задачи воспользуемся теорией линейных операторов. Введем в рассмотрение линейные операторы

$$\mathcal{D} : R^p \rightarrow R^p, \mathcal{D}^* : R^{p*} \rightarrow R^{p*},$$

где R^{p*} — сопряженное пространство к R^p , \mathcal{D}^* — сопряженный оператор к оператору \mathcal{D} . При этом, будем предполагать, что в стандартном базисе пространства R^p линейный оператор \mathcal{D} имеет матрицу D .

Пусть $b^* = bz \neq 0$ — элемент сопряженного пространства R^{p*} заданный в стандартном базисе этого пространства. Тогда в силу конечномерности пространства R^{p*} найдется такое число $s \in N$, что векторы $b^*, \mathcal{D}^* b^*, \dots, \mathcal{D}^{*s-1} b^*$ — линейно независимы, а вектор $\mathcal{D}^{*s} b^*$ является линейной комбинацией предыдущих векторов: $\mathcal{D}^{*s} b^* = -\gamma_{s-1} \mathcal{D}^{*s-1} b^* - \dots - \gamma_1 b^*$. Таким образом,

$$\sigma(\lambda) = \lambda^s + \gamma_s \lambda^{s-1} + \dots + \gamma_2 \lambda + \gamma_1,$$

где $0 \leq s \leq p$, является минимальным аннулирующим многочленом вектора b^* относительно линейного оператора \mathcal{D}^* . При этом $(\mathcal{D}^*)^k b^* = b D^k z$ — линейный функционал на линейном пространстве R^p .

Тогда справедливо соотношение

$$\sigma((\mathcal{D}^*)b^*) = 0.$$

Циклическое инвариантное подпространство относительно оператора \mathcal{D}^* сопряженного пространства R^{p*} имеет вид $U^* = \langle b^*, \mathcal{D}^* b^*, \dots, \mathcal{D}^{*s-1} b^* \rangle$, $\dim U^* = s$.

В качестве базиса пространства R^{p*} выберем

$$e^1 = b^*, e^2 = \mathcal{D}^* b^*, \dots, e^s = \mathcal{D}^{*s-1} b^*, e^{s+1}, \dots, e^p,$$

где векторы e^{s+1}, \dots, e^p дополняют базис циклического подпространства до базиса всего пространства R^{p*} .

Пусть $e_1, e_2, \dots, e_s, e_{s+1}, \dots, e_p$ — двойственный базис пространства R^p к введенному базису. При этом $e^j(e_i) = \delta_i^j$, $i, j = 1, \dots, p$, где δ_i^j — символ Кронекера, а $e^j(e_i)$ — действие функционала e^j на векторе e_i .

Имеет место следующая теорема:

Т е о р е м а 2.1 Если $\text{rang}\{b^*, \mathcal{D}^* b^*, \dots, \mathcal{D}^{*p-1} b^*\} = s < p$, то существует базис пространства R^p , в котором система (2.2) представима в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ay + \bar{z}_1, \\ \frac{d\bar{z}_1}{dt} &= bcy + \bar{z}_2, \\ \frac{d\bar{z}_2}{dt} &= bDcy + \bar{z}_3, \\ &\dots \\ \frac{d\bar{z}_{s-1}}{dt} &= bD^{s-2}cy + \bar{z}_s, \\ \frac{d\bar{z}_s}{dt} &= bD^{s-1}cy - \gamma_1 \bar{z}_1 - \gamma_2 \bar{z}_2 - \dots - \gamma_s \bar{z}_s, \\ \frac{d\bar{z}_{s+1}}{dt} &= \bar{c}_{s+1}y + \theta_{s+1,1} \bar{z}_1 + \theta_{s+1,2} \bar{z}_2 + \dots + \theta_{s+1,p} \bar{z}_p, \\ &\dots \\ \frac{d\bar{z}_p}{dt} &= \bar{c}_p y + \theta_{p,1} \bar{z}_1 + \theta_{p,2} \bar{z}_2 + \dots + \theta_{p,p} \bar{z}_p. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть выполнено условие теоремы 2.1. Рассмотрим элементы $bz, bDz, \dots, bD^{s-1}z$, $z \in R^p$ сопряженного пространства R^{p*} в стандартном базисе $g^1 = z_1, g^2 = z_2, \dots, g^p = z_p$. Очевидно, что $U^* = \langle bz, bDz, \dots, bD^{s-1}z \rangle$ — линейное подпространство в R^{p*} , такое, что $\dim U^* = s < p$. Учитывая, что линейное подпространство U^* — инвариантное подпространство сопряженного оператора \mathcal{D}^* , найдем матрицу оператора \mathcal{D}^* в базисе $\{e^1, e^2, \dots, e^s, e^{s+1}, \dots, e^p\}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^* e^1 &= e^2, \\
\mathcal{D}^* e^2 &= e^3, \\
&\dots \\
\mathcal{D}^* e^{s-1} &= e^s, \\
\mathcal{D}^* e^s &= -\gamma_1 e^1 - \gamma_2 e^2 - \dots - \gamma_s e^s, \\
\mathcal{D}^* e^{s+1} &= \theta_{s+1,1} e^1 + \theta_{s+1,2} e^2 + \dots + \theta_{s+1,p} e^p, \\
&\dots \\
\mathcal{D}^* e^p &= \theta_{p,1} e^1 + \theta_{p,2} e^2 + \dots + \theta_{p,p} e^p.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^* e^i(e_j) &= e^{i+1}(e_j) = \delta_j^{i+1}, (i = 1, \dots, s-1, j = 1, \dots, s), \\
\mathcal{D}^* e^s(e_j) &= -\gamma_j, (j = 1, \dots, s), \mathcal{D}^* e^s(e_j) = 0, (j = s+1, \dots, p), \\
\mathcal{D}^* e^i(e_j) &= \theta_{s+1,j}, (i = s+1, \dots, p, j = 1, \dots, p).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Таким образом, учитывая (2.6) и (2.7), в базисе $\{e^1, e^2, \dots, e^s, e^{s+1}, \dots, e^p\}$ матрица линейного оператора \mathcal{D}^* примет вид

$$D_{e^*}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\gamma_1 & \theta_{s+1,1} & \dots & \theta_{p,1} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & -\gamma_2 & \theta_{s+1,2} & \dots & \theta_{p,2} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & -\gamma_3 & \theta_{s+1,3} & \dots & \theta_{p,3} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -\gamma_{s-1} & \theta_{s+1,s-1} & \dots & \theta_{p,s-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -\gamma_s & \theta_{s+1,s} & \dots & \theta_{p,s} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \theta_{s+1,s+1} & \dots & \theta_{p,s+1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \theta_{s+1,p} & \dots & \theta_{p,p} \end{pmatrix}.$$

Исходя из связи матриц операторов \mathcal{D} и \mathcal{D}^* в двойственных базисах получим матрицу

$$D_e = D_{e^*}^{*T} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_3 & \dots & -\gamma_{s-1} & -\gamma_s & 0 & \dots & 0 \\ \theta_{s+1,1} & \theta_{s+1,2} & \theta_{s+1,3} & \dots & \theta_{s+1,s-1} & \theta_{s+1,s} & \theta_{s+1,s+1} & \dots & \theta_{s+1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{p1} & \theta_{p2} & \theta_{p3} & \dots & \theta_{p,s-1} & \theta_{ps} & \theta_{p,s+1} & \dots & \theta_{pp} \end{pmatrix}.$$

Это значит, что в паре выбранных двойственных базисов система (2.2) представима в виде (2.5).

Доказательство завершено.

З а м е ч а н и е 2.1 Действительно, переход от исходных базисов пространств R^{p^*} и R^p к соответствующим двойственным базисам этих пространств

осуществляется с помощью линейного преобразования (2.3), где матрицы S^{-1} и S имеют, соответственно, вид

$$S^{-1} = (E_1, E_2, \dots, E_s, E_{s+1}, \dots, E_p), S = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ \dots \\ E^s \\ E^{s+1} \\ \dots \\ E^p \end{pmatrix},$$

где E^j – координатные строки векторов $e^1, e^2, \dots, e^s, e^{s+1}, \dots, e^p$ в стандартном базисе пространства R^{p*} , E_i – координатные столбцы векторов $e_1, e_2, \dots, e_s, e_{s+1}, \dots, e_p$ в стандартном базисе пространства R^p .

Таким образом, в паре двойственных базисов имеем

$$bS^{-1} = E^1 (E_1 \ E_2 \ \dots \ E_s \ E_{s+1} \ \dots \ E_p) = \\ = (E^1 E_1 \ E^1 E_2 \ \dots \ E^1 E_s \ E^1 E_{s+1} \ \dots \ E^1 E_p) = (1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0).$$

$$Sc = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ \dots \\ E^s \\ E^{s+1} \\ \dots \\ E^p \end{pmatrix} c = \begin{pmatrix} E^1 c \\ E^2 c \\ \dots \\ E^s c \\ E^{s+1} c \\ \dots \\ E^p c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ bDc \\ \dots \\ bD^s c \\ E^{s+1} c \\ \dots \\ E^p c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bc \\ bDc \\ \dots \\ bD^s c \\ \bar{c}_{s+1} \\ \dots \\ \bar{c}_p \end{pmatrix},$$

$$SDS^{-1} = \begin{pmatrix} E^1 \\ E^2 \\ \dots \\ E^s \\ E^{s+1} \\ \dots \\ E^p \end{pmatrix} D (E_1 \ E_2 \ \dots \ E_s \ E_{s+1} \ \dots \ E_p) = \\ = \begin{pmatrix} E^1 D E_1 & E^1 D E_2 & \dots & E^1 D E_s & E^1 D E_{s+1} & \dots & E^1 D E_p \\ E^2 D E_1 & E^2 D E_2 & \dots & E^2 D E_s & E^2 D E_{s+1} & \dots & E^2 D E_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E^{s-1} D E_1 & E^{s-1} D E_2 & \dots & E^{s-1} D E_s & E^{s-1} D E_{s+1} & \dots & E^{s-1} D E_p \\ E^s D E_1 & E^s D E_2 & \dots & E^s D E_s & E^s D E_{s+1} & \dots & E^s D E_p \\ E^{s+1} D E_1 & E^{s+1} D E_2 & \dots & E^{s+1} D E_s & E^{s+1} D E_{s+1} & \dots & E^{s+1} D E_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E^p D E_1 & E^p D E_2 & \dots & E^p D E_s & E^p D E_{s+1} & \dots & E^p D E_p \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} E^2 E_1 & E^2 E_2 & \cdots & E^2 E_{s+1} & \cdots & E^2 E_p \\ E^3 E_1 & E^3 E_2 & \cdots & E^3 E_{s+1} & \cdots & E^3 E_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ E^s E_1 & E^s E_2 & \cdots & E^s E_{s+1} & \cdots & E^s E_p \\ -\sum_{k=1}^s \gamma_k E^k E_1 & -\sum_{k=1}^s \gamma_k E^k E_2 & \cdots & -\sum_{k=1}^s \gamma_k E^k E_{s+1} & \cdots & -\sum_{k=1}^s \gamma_k E^k E_p \\ \sum_{k=1}^p \theta_{s+1,k} E^k E_1 & \sum_{k=1}^p \theta_{s+1,k} E^k E_2 & \cdots & \sum_{k=1}^p \theta_{s+1,k} E^k E_{s+1} & \cdots & \sum_{k=1}^p \theta_{s+1,k} E^k E_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^p \theta_{p,k} E^k E_1 & \sum_{k=1}^p \theta_{p,k} E^k E_2 & \cdots & \sum_{k=1}^p \theta_{p,k} E^k E_{s+1} & \cdots & \sum_{k=1}^p \theta_{p,k} E^k E_p \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & \cdots & -\gamma_s & 0 & \cdots & 0 \\ \theta_{s+1,1} & \theta_{s+1,2} & \cdots & \theta_{s+1,s} & \theta_{s+1,s+1} & \cdots & \theta_{s+1,p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \theta_{p,1} & \theta_{p,2} & \cdots & \theta_{p,s} & \theta_{p,s+1} & \cdots & \theta_{p,p} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Что и подтверждает истинность утверждения теоремы 2.1. на матричном языке.

З а м е ч а н и е 2.2 Свойство приводимости системы (2.2) к виду (2.5) зависит от существования инвариантного подпространства линейного оператора \mathcal{D} . Выполнении условий теоремы 2.1 гарантирует приводимость исходной системы к канонической форме (2.5). При этом свойство устойчивости по переменной y является инвариантным относительно выбора базиса пространства. Кроме того, инвариантом системы является размерность подпространства. Так для оператора \mathcal{D} , $\dim U = p - s$, а для сопряженного оператора \mathcal{D}^* , $\dim U^* = s$.

Учитывая это, справедлива теорема:

Т е о р е м а 2.2 Для того, чтобы система (2.2) была устойчивой по переменной y необходимо и достаточно, чтобы была устойчива система

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dt} &= ay + \bar{z}_1, \\
\frac{d\bar{z}_1}{dt} &= bcy + \bar{z}_2, \\
\frac{d\bar{z}_2}{dt} &= bDcy + \bar{z}_3, \\
&\dots \\
\frac{d\bar{z}_{s-1}}{dt} &= bD^{s-2}cy + \bar{z}_s, \\
\frac{d\bar{z}_s}{dt} &= bD^{s-1}cy - \gamma_1 \bar{z}_1 - \gamma_2 \bar{z}_2 - \cdots - \gamma_s \bar{z}_s.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

С л е д с т в и е 2.1 Если $\text{rang}\{b^*, \mathcal{D}^*b^*, \dots, \mathcal{D}^{*p-1}b^*\} = p$, то существует базис пространства R^p , в котором система (2.2) представима в виде

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= ay + \bar{z}_1, \\ \frac{d\bar{z}_1}{dt} &= bcy + \bar{z}_2, \\ \frac{d\bar{z}_2}{dt} &= bDcy + \bar{z}_3, \\ &\dots \\ \frac{d\bar{z}_{s-1}}{dt} &= bD^{p-2}cy + \bar{z}_p, \\ \frac{d\bar{z}_p}{dt} &= bD^{p-1}cy - \gamma_1\bar{z}_1 - \gamma_2\bar{z}_2 - \dots - \gamma_p\bar{z}_p.\end{aligned}$$

В этом случае устойчивость по переменной y эквивалентна устойчивости системы по всем переменным.

З а м е ч а н и е 2.3 Следует отметить, что полученный результат можно назвать геометрическим аналогом критерия частичной устойчивости [2] только по отношению к заданной компоненте фазового вектора.

З а м е ч а н и е 2.4 Следует отметить, что характеристический многочлен системы (2.2) и уравнения (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned}P_s(\lambda) &= \lambda^{s+1} + (\gamma_s - a)\lambda^s + (\gamma_{s-1} - a\gamma_s - bc)\lambda^{s-1} + \dots \\ &+ (\gamma_1 - a\gamma_2 - bc\gamma_3 - \dots - bD^{s-3}c\gamma_s - bD^{s-2}c)\lambda - \\ &- (a\gamma_1 + bc\gamma_2 + bDc\gamma_3 + \dots + bD^{s-2}c\gamma_s + bD^{s-1}c).\end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 2.5 Используя процедуру дифференцирования можно исключить переменные $\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_s$ из системы (2.5) и получить дифференциальное уравнение $s + 1$ -го порядка относительно компоненты y

$$\begin{aligned}\frac{d^{s+1}y}{dt^{s+1}} + (\gamma_s - a)\frac{d^s y}{dt^s} + (\gamma_{s-1} - a\gamma_s - bc)\frac{d^{s-1}y}{dt^{s-1}} + \dots \\ + (\gamma_1 - a\gamma_2 - bc\gamma_3 - \dots - bD^{s-3}c\gamma_s - bD^{s-2}c)\frac{dy}{dt} - \\ - (a\gamma_1 + bc\gamma_2 + bDc\gamma_3 + \dots + bD^{s-2}c\gamma_s + bD^{s-1}c)y = 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

З а м е ч а н и е 2.6 Коэффициенты $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, присутствующие в системе (2.5), также выражаются через исходные параметры исследуемой системы.

Действительно, исходя из соотношения

$$\mathcal{D}^{*s}b^* = -\gamma_{s-1}\mathcal{D}^{*s-1}b^* - \dots - \gamma_1b^*,$$

следует, что $\mathcal{D}^{*s}b^*(e_i) = -\gamma_i$, или в координатной форме

$$bD^s E_i = -\gamma_i, i = 1, \dots, s.$$

В этом случае система (2.5) имеет вид

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= ay + \bar{z}_1, \\ \frac{d\bar{z}_1}{dt} &= bcy + \bar{z}_2, \\ \frac{d\bar{z}_2}{dt} &= bDcy + \bar{z}_3, \\ &\dots \\ \frac{d\bar{z}_s}{dt} &= bD^{s-1}cy + bD^s E_1 \bar{z}_1 + bD^s E_2 \bar{z}_2 + \dots + bD^s E_s \bar{z}_s.\end{aligned}$$

Таким образом, характер устойчивости исследуемой компоненты y фазового вектора x системы (2.2) сводится к исследованию устойчивости системы (2.8) или уравнения (2.9).

Пример 2.1 Проиллюстрируем, сказанное выше на примере из [2]. Исследуется устойчивость системы

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -y + z_1 - 2z_2, \\ \frac{dz_1}{dt} &= 4y + z_1, \\ \frac{dz_2}{dt} &= 2y + z_1 - z_2.\end{aligned}$$

по переменной y .

В нашем случае

$$\{b^T, (bD)^T\} = \{(1, -2)^T, (-1, 2)^T\}, \text{rang}\{b^T, (bD)^T\} = 1 < 2 = \dim R^2.$$

Следовательно, согласно теореме 2.2 существует одномерное инвариантное подпространство относительно линейного оператора D^* , матрица которого в стандартном базисе сопряженного пространства R^{2*} имеет вид

$$D^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

При этом минимальный аннулирующий многочлен вектора $b^* = z_1 - 2z_2$ имеет вид

$$\sigma(\lambda) = \lambda - 1, \sigma((D^*)b^*) = 0.$$

В пространстве R^{2*} дополняем базис подпространства $U^* = \langle b^*(z) = z_1 - 2z_2 \rangle$ произвольным линейно независимым с $e^1(z) = z_1 - 2z_2$ вектором, например, $e^2(z) = z_2$. Находим соответствующий двойственный базис из пространства R^2 : $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (2, 1)$. Таким образом

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, bS = (1 \quad 0), Sc = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, SDS^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система представима в виде

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -y + \bar{z}_1, \\ \frac{d\bar{z}_1}{dt} &= -\bar{z}_1, \\ \frac{d\bar{z}_2}{dt} &= 2y + \bar{z}_1 + \bar{z}_2.\end{aligned}$$

Откуда из устойчивости системы

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= -y + \bar{z}_1, \\ \frac{d\bar{z}_1}{dt} &= -\bar{z}_1,\end{aligned}$$

следует устойчивость исходной системы по переменной y .

3. Системы линейных разностных уравнений

Рассмотрим линейную разностную систему вида

$$x(t+1) = A_*x(t), \quad (3.1)$$

где $x \in R^n$, A – постоянная матрица соответствующих размеров.

Предположим, что требуется исследовать устойчивость относительно первой компоненты. Учитывая это, представим фазовый вектор x в виде $x = (y, z)$, $y \in R$, $z \in R^p$, $n = 1 + p$.

Также будем предполагать, что исследуется на устойчивость первая координата фазового вектора x . В связи с этим представим систему (3.1) в виде

$$\begin{aligned}y(t+1) &= ay(t) + bz(t), \\ z(t+1) &= cy(t) + Dz(t).\end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что т. к. исследуется устойчивость по переменной y , свойство системы (3.2) не должно зависеть от выбора системы z -координат, в которой задана система. В связи с этим, в пространстве R^p можно выбирать произвольный базис, что не должно повлиять на характер устойчивости системы (3.2) относительно переменной y .

Проведя замену переменных

$$z(t) = S^{-1}\bar{z}(t),$$

получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned}y(t+1) &= ay(t) + bS^{-1}\bar{z}(t), \\ \bar{z}(t+1) &= Scy(t) + SDS^{-1}\bar{z}(t),\end{aligned} \quad (3.3)$$

Аналогичная теорема имеет место и для системы (3.2).

Т е о р е м а 3.1 *Если $\text{rang}\{b^*, \mathcal{D}^*b^*, \dots, \mathcal{D}^{*p-1}b^*\} = s < p$, то существует базис пространства R^p , в котором система (3.2) представима в виде*

$$\begin{aligned}y(t+1) &= ay(t) + \bar{z}_1(t), \\ \bar{z}_1(t+1) &= bcy(t) + \bar{z}_2(t), \\ \bar{z}_2(t+1) &= bDcy(t) + \bar{z}_3(t), \\ &\dots \\ \bar{z}_{s-1}(t+1) &= bD^{s-2}cy(t) + \bar{z}_s(t), \\ \bar{z}_s(t+1) &= bD^{s-1}cy(t) - \gamma_1\bar{z}_1(t) - \gamma_2\bar{z}_2(t) - \dots - \gamma_s\bar{z}_s(t), \\ \bar{z}_{s+1}(t+1) &= \bar{c}_{s+1}y(t) + \theta_{s+1,1}\bar{z}_1(t) + \theta_{s+1,2}\bar{z}_2(t) + \dots + \theta_{s+1,p}\bar{z}_p(t), \\ &\dots \\ \bar{z}_p(t+1) &= \bar{c}_py(t) + \theta_{p,1}\bar{z}_1(t) + \theta_{p,2}\bar{z}_2(t) + \dots + \theta_{p,p}\bar{z}_p(t).\end{aligned} \quad (3.4)$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 2.1.

Исходя из этого следует что устойчивость системы (3.4) по переменной y эквивалентна устойчивости системы

$$\begin{aligned} y(t+1) &= ay(t) + \bar{z}_1(t), \\ \bar{z}_1(t+1) &= bcy(t) + \bar{z}_2(t), \\ \bar{z}_2(t+1) &= bDcy(t) + \bar{z}_3(t), \\ &\dots \\ \bar{z}_{s-1}(t+1) &= bD^{s-2}cy(t) + \bar{z}_s(t), \\ \bar{z}_s(t+1) &= bD^{s-1}cy(t) - \gamma_1\bar{z}_1(t) - \gamma_2\bar{z}_2(t) - \dots - \gamma_s\bar{z}_s(t). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Поэтому имеет место утверждение, аналогичное теореме 2.2.

Т е о р е м а 3.2 *Для того, чтобы система (3.2) была устойчивой по переменной y , необходимо и достаточно, чтобы была устойчива система (3.5).*

Систему (3.5) также можно привести к эквивалентному уравнению $s+1$ -го порядка относительно переменной y . Для этого исключим переменные $\bar{z}_1(t), \bar{z}_2(t), \dots, \bar{z}_s(t)$ из системы (3.5)

Из первого уравнения системы (3.5) и в силу второго уравнения имеем

$$y(t+2) = ay(t+1) + \bar{z}_1(t+1) = ay(t+1) + bcy(t) + \bar{z}_2(t).$$

Исходя из третьего уравнения, получим

$$y(t+3) = ay(t+2) + bcy(t+1) + bD\bar{z}_2(t+1) = ay(t+2) + bcy(t+1) + bDcy(t) + \bar{z}_3(t).$$

Таким образом, на s -м шаге (s – степень минимального многочлена вектора $b^* = bz$ относительно оператора линейного оператора D^*) получим уравнение

$$y(t+s) = ay(t+s-1) + bcy(t+s-2) + bDcy(t+s-3) + \dots + bD^{s-2}cy(t) + \bar{z}_s(t).$$

Из этого следует

$$\begin{aligned} y(t+s+1) &= ay(t+s) + bcy(t+s-1) + bDcy(t+s-2) + \dots + bD^{s-2}cy(t+1) + \\ &+ \bar{z}_s(t+1) = ay(t+s) + bcy(t+s-1) + bDcy(t+s-2) + \dots + \\ &+ bD^{s-2}cy(t+1) - \gamma_1\bar{z}_1(t) - \dots - \gamma_s\bar{z}_s(t). \end{aligned}$$

Пользуясь полученными соотношениями, исключаем переменную y из системы (3.5), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} y(t+s+1) &+ (\gamma_s - a)y(t+s-1) + (\gamma_{s-1} - a\gamma_s - bc)y(t+s-2) + \\ &+ (\gamma_{s-2} - a\gamma_{s-1} - bc\gamma_s - bDc)y(t+s-3) + \dots + \\ &+ (\gamma_1 - a\gamma_2 - bc\gamma_3 - bDc\gamma_4 - \dots - bD^{s-3}c\gamma_s - bD^{s-2}c)y(t+1) - \\ &- (a\gamma_1 + bc\gamma_2 + bDc\gamma_3 + \dots + bD^{s-2}c\gamma_s - bD^{s-1}c)y(t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Таким образом, и в этом классе систем устойчивость по переменной y сводится к исследованию устойчивости системы (3.5) или уравнения $s+1$ -го порядка (3.6).

4. Системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Предлагаемый подход применим и к исследованию частичной устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Исследуем y -устойчивость системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_* x(t - \tau), \quad (4.1)$$

где $x \in R^n$, $\tau = \text{const}$, A_* – постоянная матрица соответствующих размеров.

Представим систему (4.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= ay(t - \tau) + bz(t - \tau), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= cy(t - \tau) + Dz(t - \tau). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Введем замену переменных

$$z(t) = S^{-1}\bar{z}(t),$$

получим эквивалентную систему

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= ay(t - \tau) + bS^{-1}\bar{z}(t - \tau), \\ \frac{d\bar{z}}{dt}(t) &= Scy(t - \tau) + SDS^{-1}\bar{z}(t - \tau). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Аналогичные результаты получаем и в классе линейных систем с отклоняющимся аргументом.

Т е о р е м а 4.1 Если $\text{rang}\{b^*, D^*b^*, \dots, D^{*p-1}b^*\} = s < p$, то существует базис пространства R^p , в котором система (4.1) представима в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= ay(t - \tau) + \bar{z}_1(t - \tau), \\ \frac{d\bar{z}_1(t)}{dt} &= bcy(t - \tau) + \bar{z}_2(t - \tau), \\ \frac{d\bar{z}_2(t)}{dt} &= bDcy(t - \tau) + \bar{z}_3(t - \tau), \\ &\dots \\ \frac{d\bar{z}_{s-1}(t)}{dt} &= bD^{s-2}cy(t - \tau) + \bar{z}_s(t - \tau), \\ \frac{d\bar{z}_s(t)}{dt} &= bD^{s-1}cy(t - \tau) - \gamma_1\bar{z}_1(t - \tau) - \gamma_2\bar{z}_2(t - \tau) - \dots - \gamma_s\bar{z}_s(t - \tau), \\ \frac{d\bar{z}_{s+1}(t)}{dt} &= \bar{c}_{s+1}y(t - \tau) + \theta_{s+1,1}\bar{z}_1(t - \tau) + \theta_{s+1,2}\bar{z}_2(t - \tau) + \dots + \theta_{s+1,p}\bar{z}_p(t - \tau), \\ &\dots \\ \frac{d\bar{z}_p(t)}{dt} &= \bar{c}_py(t - \tau) + \theta_{p,1}\bar{z}_1(t - \tau) + \theta_{p,2}\bar{z}_2(t - \tau) + \dots + \theta_{p,p}\bar{z}_p(t - \tau). \end{aligned}$$

Доказательство данной теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2.1. Поэтому получаем аналогичное утверждение

Т е о р е м а 4.2 Для того чтобы система (4.2) была устойчивой по переменной y , необходимо и достаточно, чтобы была устойчива система

$$\begin{aligned}\frac{dy(t)}{dt} &= ay(t - \tau) + \bar{z}_1(t - \tau), \\ \frac{d\bar{z}_1(t)}{dt} &= bcy(t - \tau) + \bar{z}_2(t - \tau), \\ \frac{d\bar{z}_2(t)}{dt} &= bDcy(t - \tau) + \bar{z}_3(t - \tau), \\ &\dots \\ \frac{d\bar{z}_{s-1}(t)}{dt} &= bD^{s-2}cy(t - \tau) + \bar{z}_s(t - \tau), \\ \frac{d\bar{z}_s(t)}{dt} &= bD^{s-1}cy(t - \tau) - \gamma_1\bar{z}_1(t - \tau) - \gamma_2\bar{z}_2(t - \tau) - \dots - \gamma_s\bar{z}_s(t - \tau).\end{aligned}\tag{4.4}$$

Также можно получить уравнение характеризующее поведение переменной y , исключив ее из системы (4.4).

Исключим переменные $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_s$ из системы (4.4).

Из первого уравнения системы (4.4) и в силу второго уравнения имеем

$$\frac{dy(t + \tau)}{dt} = ay(t) + \bar{z}_1(t), \quad \frac{d^2y(t + \tau)}{dt^2} = a \frac{dy(t)}{dt} + \frac{d\bar{z}_1(t)}{dt}.$$

Исходя из третьего уравнения системы запишем

$$\frac{d^2y(t + \tau)}{dt^2} = a \frac{dy(t)}{dt} + bcy(t - \tau) + \bar{z}_2(t - \tau), \quad \frac{d^2y(t + 2\tau)}{dt^2} = a \frac{dy(t + \tau)}{dt} + bcy(t) + \bar{z}_2(t)$$

Таким образом, на $s - 1$ -м и s -м шагах получим, соответственно, уравнения

$$\begin{aligned}\frac{d^{s-1}y(t + (s-1)\tau)}{dt^{s-1}} &= a \frac{d^{s-2}y(t + (s-2)\tau)}{dt^{s-2}} + bc \frac{d^{s-3}y(t + (s-3)\tau)}{dt^{s-3}} + \dots \\ &+ bD^{s-3}cy(t - \tau) + \bar{z}_{s-1}(t - \tau), \\ \frac{d^s y(t + s\tau)}{dt^s} &= a \frac{d^{s-1}y(t + (s-1)\tau)}{dt^{s-1}} + bc \frac{d^{s-2}y(t + (s-2)\tau)}{dt^{s-2}} + \dots \\ &+ bD^{s-2}cy(t - \tau) + \bar{z}_s(t - \tau).\end{aligned}$$

тогда

$$\begin{aligned}&\frac{d^{s+1}y(t + (s+1)\tau)}{dt^{s+1}} + (\gamma_s - a) \frac{d^s y(t + s\tau)}{dt^s} + \\ &+ (\gamma_{s-1} - a\gamma_s - bc) \frac{d^{s-1}y(t + (s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \dots \\ &+ (\gamma_1 - a\gamma_2 - \dots - bD^{s-3}c\gamma_s - bD^{s-2}c) \frac{dy(t)}{dt} - \\ &- (a\gamma_1 + bc\gamma_2 + \dots + bD^{s-2}c\gamma_s + bD^{s-1}) y(t - \tau) = 0.\end{aligned}\tag{4.5}$$

Таким образом, и для данного класса систем исследование устойчивости по переменной y сводится к исследованию устойчивости системы (4.4) или к эквивалентному уравнению (4.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М. Наука, 1987. 256 с.
2. Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 284 с.
3. Воротников В. И., Румянцев В. В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
4. Воротников В.И. Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития // Автоматика и телемеханика. 2005. Вып. 4. С. 3–59.
5. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 576 с.
6. Чудинов К. М. Критерий устойчивости по части переменных автономной системы дифференциальных уравнений // Известия высших учебных заведений. Математика. 2003. № 4. С. 67–72.
7. Чудинов К. М. Об устойчивости по части переменных линейных автономных систем с последействием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2004. № 6. С. 72–80.
8. Никонов В. И. Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных // Журнал Средневолжского математического общества. 2011. Т. 13, № 2. С. 95–99.

*Поступила 6.12.2020; доработана после рецензирования 15.02.2021;
принята к публикации 19.02.2021*

Информация об авторах:

Никонов Владимир Иванович, доцент кафедры алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7202-9679>, nik_vl@mail.ru

Автор прочитал и одобрил окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

Partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector

V. I. Nikonov

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. A new geometric approach to the study of the partial stability of linear systems is proposed, which is based on the application of the geometric theory of linear operators. Using the theory of conjugate spaces and conjugate linear operators, bases are constructed in which the system under study takes the canonical form. A cyclic subspace with respect to the conjugate linear operator is considered. A basis is constructed for the dual space of a linear operator, in which its matrix takes the canonical form. This basis corresponds to the dual basis of the original linear space. Then, in a pair of bases of dual spaces the system under study takes the simplest form. The geometric properties of the system are realized using a non-singular linear transformation in the space of a part of the components of the system's phase vector. This allows us to decompose the system under study in order to obtain necessary and sufficient conditions for the partial stability of the linear system. In an equivalent system, an independent subsystem is distinguished, whose nature of stability determines the behavior of the investigated component of the original system's phase vector. The relationship between the partial stability of the system and the existence of an invariant subspace of a linear operator characterizing the dynamics of the system is established. The canonical form of the resulting subsystem makes it easy to exclude auxiliary variables and write an equation equivalent to this system. The application of the obtained results to the solution of the problem of partial stability for linear systems with constant coefficients belonging to the classes of ordinary differential equations, discrete systems and systems with deviating argument is shown. An example of a linear system of differential equations is given to illustrate the result obtained.

Key Words: partial stability, cyclic subspace, minimal annihilating polynomial, dual space

For citation: V. I. Nikonov. Partial stability of linear systems with respect to a given component of the phase vector. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:1(2021), 43–57. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.43-57>

REFERENCES

1. V. V. Rumyantsev, A. S. Oziraner, *[Stability and stabilization of motion in relation to some of the variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 256 p.
2. V. I. Vorotnikov, *[Stability of dynamic systems with respect to some of the variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1991, 284 p.
3. V. I. Vorotnikov, V. V. Rumyantsev, *[Stability and control with respect to the coordinates of the phase vector of dynamical systems: theory, methods and applications]*, Nauka Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 320 p.
4. V. I. Vorotnikov, “[Partial stability and control: the state of the problem and development prospects]”, *Avtomatika i telemekhanika*, 2005, № 4, 3–59 (In Russ.).
5. F. R. Gantmakher, *[The theory of matrices]*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 576 p.

6. K. M. Chudinov, “[Criterion of stability in terms of variables of an autonomous system of differential equations]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematikas*, 2003, № 4, 67–72 (In Russ.).
7. K. M. Chudinov, “[On stability with respect to variables of linear autonomous systems with aftereffect]”, *Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Matematikas*, 2004, № 6, 72–80 (In Russ.).
8. V. I. Nikonov, “Geometric aspect of partial stability for linear systems”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:2 (2011), 95–99 (In Russ.).

Submitted 6.12.2020; Revised 15.02.2021; Accepted 19.02.2021

Information about the authors:

Vladimir I. Nikonov, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7202-9679>, nik_vl_@mail.ru

The author have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The author declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.58–71

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.6:517.962

Об одном методе приближенного решения смешанной краевой задачи для уравнения эллиптического типа

М. Э. Файрузов, Ф. В. Лубышев

ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (г. Уфа, Российская Федерация)

Аннотация. Рассматривается смешанная краевая задача для уравнения эллиптического типа дивергентного вида с переменными коэффициентами. Предполагается, что область интегрирования представляет собой прямоугольник, причем граница области интегрирования есть объединение двух непересекающихся областей, на одной из которых задано граничное условие Дирихле, а на другой – граничное условие Неймана. Поставленная задача – это задача с разрывным граничным условием. Подобные задачи со смешанными условиями на границе наиболее часто встречаются на практике при моделировании процессов и представляют значительный интерес в области разработки методов их решения. Настоящая работа посвящена численной реализации аппроксимации исходной смешанной краевой задачи с главным краевым условием третьей краевой задачей уже с естественным краевым условием. Следует однако заметить, что как известно одним из вопросов, важным для практического использования, например, вариационных методов (например, метода Ритца) по решению смешанных краевых задач является проблема выделения как главных так и естественных краевых условий. Практическая важность умения отличать эти условия, как известно, состоит в том, что базисные функции не обязательно подчинять естественным краевым условиям, если они установлены. В настоящей же работе указан другой подход, основан на идеи аппроксимировать исходную смешанную задачу краевой задачей с естественным краевым условием. На базе полученных в настоящей работе результатов проведены вычислительные эксперименты по приближенному решению модельных смешанных краевых задач.

Ключевые слова: эллиптические уравнения, смешанная краевая задача, соболевские пространства, теоремы вложения, аппроксимация, сходимость аппроксимаций, разностная схема, итерационные методы, метод сеток.

Для цитирования: Файрузов М. Э., Лубышев Ф. В. Об одном методе приближенного решения смешанной краевой задачи для уравнения эллиптического типа // Журнал Средневожского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 58–71. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.58–71>

1. Постановка смешанной краевой задачи

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник в \mathbb{R}^2 с границей $\partial\Omega = \Gamma$, $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. Для участков границы Γ прямоугольника $\bar{\Omega}$ введем для определенности постановки смешанной задачи следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\Gamma_{+1} &= \{x_1 = l_1, 0 \leq x_2 \leq l_2\}, & \Gamma_{-1} &= \{x_1 = 0, 0 \leq x_2 \leq l_2\}, \\ \Gamma_{-2} &= \{0 \leq x_1 \leq l_1, x_2 = 0\}, & \Gamma_{+2} &= \{0 \leq x_1 \leq l_1, x_2 = l_2\}, \\ \Gamma &= \partial\Omega = \Gamma_{-1} \cup \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2}, & \Gamma_1 &= \Gamma \setminus \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2}, & \Gamma_2 &= \Gamma_{-1}.\end{aligned}$$

Рассматривается следующая смешанная граничная задача:

$$Lu(x) = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (1.1)$$

$$u(x) = \mu_1(x), \quad x \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x) = -k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = \mu_2(x), \quad x \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}, \quad (1.3)$$

где $k_\alpha(x)$, $f(x)$, $\mu_1(x)$, $\mu_2(x)$ – заданные функции; $k_\alpha(x) \in L_\infty(\Omega)$; $f(x) \in L_2(\Omega)$; $\mu_1(s) \in L_2(\Gamma_1)$; $\mu_2(s) \in L_2(\Gamma_2)$; $0 < \nu_0 \leq k_\alpha(x) \leq \bar{\nu}_0$, $\alpha = 1, 2$.

Более подробная постановка задачи представлена в работе см. [1].

2. Аппроксимация смешанной краевой задачи третьей краевой задачей

Рассмотрим метод, заключающийся в приближенной замене смешанной краевой задачи (1.1)–(1.3) третьей краевой задачей:

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} + \varepsilon(s)u_\varepsilon = g(s), \quad s \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial\Omega, \quad (2.2)$$

где

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} \varepsilon, & s \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \\ 0, & s \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}, \end{cases}$$

$$g(s) = \begin{cases} \varepsilon\mu_1(s), & s \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \\ \mu_2(s), & s \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}, \end{cases} \quad \varepsilon = \text{const} > 0.$$

О п р е д е л е н и е 2.1 *Обобщенным решением задачи (2.1)–(2.2) называется функция $u_\varepsilon(x) \in W_2^1(\Omega)$, удовлетворяющая тождеству*

$$Q(u_\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad (2.3)$$

где

$$Q(u_\varepsilon, v) = \int \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} d\Omega + \varepsilon \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon(s)v(s) ds,$$

$$l_\varepsilon(v) = \varepsilon \int_{\Gamma_1} \mu_1(s)v(s) ds + \int_{\Gamma_2} \mu_2(s)v(s) ds + \int_{\Omega} f(x)v(x) d\Omega.$$

Т е о р е м а 2.1 *Обобщенное решение из класса $W_2^1(\Omega)$ задачи (2.1)–(2.2) существует, единственно, и для него выполняется априорная оценка*

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \frac{c_0[c_1\varepsilon\|\mu_1\|_{L_2(\Gamma_1)} + c_2\|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_2)} + c_3\|f\|_{L_2(\Omega)}]}{\min\{\nu_0, \varepsilon\}}. \quad (2.4)$$

Доказательство. Нетрудно убедиться в следующей оценке

$$|Q(u_\varepsilon, v)| \leq \bar{\nu}_0 \left(\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega \right)^{1/2} + \\ + \varepsilon \left(\int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^2 ds \right)^{1/2} \left(\int_{\Gamma_1} v^2 ds \right)^{1/2}.$$

Кроме того,

$$\left(\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \left(\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial v}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega \right)^{1/2} \leq \|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \\ \left(\int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^2 ds \right)^{1/2} \leq c_1 \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \left(\int_{\Gamma_1} v^2 ds \right)^{1/2} \leq c_1 \|v\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Поэтому имеем

$$|Q(u_\varepsilon, v)| \leq (\bar{\nu}_0 + c_1^2 \varepsilon) \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \|v\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (2.5)$$

Далее, принимая во внимание оценки [2–6]

$$\|v\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq c_1 \|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \|v\|_{L_2(\Gamma_2)} \leq c_2 \|v\|_{W_2^1(\Omega)}, \quad \|v\|_{L_2(\Omega)} \leq c_3 \|v\|_{W_2^1(\Omega)},$$

нетрудно получить неравенство

$$|l_\varepsilon(v)| \leq [c_1 \varepsilon \|\mu_1\|_{L_2(\Gamma_1)} + c_2 \varepsilon \|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_2)} + c_3 \|f\|_{L_2(\Omega)}] \cdot \|v\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (2.6)$$

Кроме того, принимая во внимание неравенство [2; 4]

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 \leq c_0 \left[\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega + \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon^2(s) ds \right],$$

нетрудно установить оценку

$$Q(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \geq \frac{1}{c_0} \min\{\nu_0, \varepsilon\} \|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (2.7)$$

Таким образом, установлены оценки (2.5)–(2.7) и выполнены условия леммы Лакса-Мильграма [2; 7]. Следовательно, обобщенное решение из класса $W_2^1(\Omega)$ задачи (2.1)–(2.2) существует и единственно.

Используя неравенства (2.5)–(2.7), получим априорную оценку

$$\|u_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \frac{c_0 [c_1 \varepsilon \|\mu_1\|_{L_2(\Gamma_1)} + c_2 \|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_2)} + c_3 \|f\|_{L_2(\Omega)}]}{\min\{\nu_0, \varepsilon\}}.$$

Доказательство завершено.

В дальнейшем, не ограничивая общности, будут рассмотрены задачи (1.1)–(1.3) и (2.1)–(2.2) для случая, когда

$$\mu_1(s) \equiv 0, \quad s \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}.$$

В этом случае получим

$$g(s) = \begin{cases} 0, & s \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \\ \mu_2(s), & s \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}. \end{cases}$$

Таким образом, задачу (2.1)–(2.2) можем переписать в следующем виде:

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) = f(x), \quad x \in \Omega, \quad (2.8)$$

$$-k_1(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} = \mu_2(x), \quad x \in \Gamma_{-1}, \quad (2.9)$$

$$k_1(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_1} + \varepsilon u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma_{+1}, \quad (2.10)$$

$$-k_2(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2} + \varepsilon u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma_{-2}, \quad (2.11)$$

$$k_2(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_2} + \varepsilon u_\varepsilon(x) = 0, \quad x \in \Gamma_{+2}, \quad (2.12)$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Обобщенное решение $u_\varepsilon(x) \in W_2^1(\Omega)$ задачи (2.8)–(2.12) будет удовлетворять тождеству

$$Q(u_\varepsilon, v) = \tilde{l}(v), \quad \forall v \in W_2^1(\Omega), \quad (2.13)$$

где

$$Q(u_\varepsilon, v) = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} d\Omega + \varepsilon \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon(s) v(s) ds,$$

$$\tilde{l}(v) = \int_{\Gamma_2} \mu_2(s) v(s) ds + \int_{\Omega} f(x) v(x) d\Omega.$$

Здесь

$$\int_{\Gamma_1} u_\varepsilon(s) v(s) ds = \int_{\Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2}} u_\varepsilon(s) v(s) ds, \quad \int_{\Gamma_2} \mu_2(s) v(s) ds = \int_{\Gamma_{-1}} \mu_2(s) v(s) ds.$$

3. Разностная аппроксимация краевой задачи (2.8)–(2.12). Корректность постановки сеточной задачи

Для аппроксимации задачи (2.8)–(2.12) введем в Ω сетку, вводя в рассмотрение одномерные сетки на отрезках $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$. Пусть $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$ – одномерная сетка на $[0, l_\alpha]$, $\omega_\alpha \equiv \{x_\alpha^{(i_\alpha)} : i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}\}$ – множество внутренних узлов сетки $\bar{\omega}_\alpha$. Введем также множества $\omega_\alpha^+ = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{1, N_\alpha}\}$, $\omega_\alpha^- = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha, i_\alpha = \overline{0, N_\alpha - 1}\}$, $\alpha = 1, 2$, и средний шаг сетки $\bar{\omega}_\alpha$: $\bar{h}_\alpha = h_\alpha^{(i_\alpha)} = h_\alpha$, если $i_\alpha = \overline{1, N_\alpha - 1}$, $\bar{h}_\alpha = 0.5 h_\alpha$, если $i_\alpha = 0, N_\alpha$. Пусть $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – двумерная сетка в $\bar{\Omega}$, $\omega = \omega_1 \times \omega_2$ – множество внутренних узлов

сетки $\bar{\omega}$, $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$ – множество граничных узлов, $\overset{\circ}{\gamma} = (\bar{\omega}_1 \setminus \omega_1) \times (\bar{\omega}_2 \setminus \omega_2)$ – угловые точки, $\gamma_{\alpha}^{+} = \{x_{\alpha}^{(i_{\alpha})} = l_{\alpha}\} \times \omega_{\beta}$, $\gamma_{\alpha}^{-} = \{x_{\alpha}^{(i_{\alpha})} = 0\} \times \omega_{\beta}$. Пусть $N = (N_1, N_2)$, $h = (h_1, h_2)$, $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$.

Для сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega}$, введем скалярные произведения и нормы [7–10]

$$(y, v)_{L_2(\bar{\omega})} = \sum_{x \in \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2} y(x)v(x) \hbar_1 \hbar_2, \quad \|y\|_{L_2(\bar{\omega})}^2 = (y, y)_{L_2(\bar{\omega})},$$

$$(y, v)_{L_2(\gamma)} = \sum_{x \in \gamma} y(x)v(x) \hbar_{\alpha}, \quad \|y\|_{L_2(\gamma)}^2 = (y, y)_{L_2(\gamma)},$$

$$\hbar_{\alpha}(x_{\alpha}) = \begin{cases} 0.5h_{\alpha}, & x_{\alpha} = 0, l_{\alpha}, \\ h_{\alpha}, & h_{\alpha} \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha} - h_{\alpha}, \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

О п р е д е л е н и е 3.1 Сеточную функцию $y_{\varepsilon}(x)$, заданную на сетке $\bar{\omega}$, назовем решением разностной схемы для задачи (2.8)–(2.12), если она для любой сеточной функции $\nu(x)$, заданной на сетке $\bar{\omega}$, удовлетворяет сумматорному тождеству

$$Q_h(y_{\varepsilon}, \nu) = \tilde{l}_h(\nu),$$

где

$$\begin{aligned} Q_h(y_{\varepsilon}, \nu) = & \sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} a_1(x) y_{\varepsilon \bar{x}_1} \nu_{\bar{x}_1} \hbar_1 \hbar_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \omega_2^+} a_2(x) y_{\varepsilon \bar{x}_2} \nu_{\bar{x}_2} \hbar_1 \hbar_2 + \\ & + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_{\varepsilon}(x) \nu(x) \hbar_2 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_{\varepsilon}(x) \nu(x) \hbar_1 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_{\varepsilon}(x) \nu(x) \hbar_1, \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\tilde{l}_h(\nu) = \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{-1} \cap \gamma} \mu_2(x) \nu(x) \hbar_2 + \sum_{x \in \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2} f(x) \nu(x) \hbar_1 \hbar_2,$$

$$a_1(x_1, x_2) = k_1(x_1 - 0.5h_1, x_2), \quad a_2(x_1, x_2) = k_2(x_1, x_2 - 0.5h_2),$$

$$\hbar_{\alpha}(x_{\alpha}) = \begin{cases} 0.5h_{\alpha}, & x_{\alpha} = 0, l_{\alpha}, \\ h_{\alpha}, & h_{\alpha} \leq x_{\alpha} \leq l_{\alpha} - h_{\alpha}, \quad \alpha = 1, 2. \end{cases}$$

Т е о р е м а 3.1 Решение $y_{\varepsilon}(x)$ разностной схемы для задачи (2.8)–(2.12), определяемое из сумматорного тождества (3.1) существует, единственно и для него справедлива априорная оценка

$$\|y_{\varepsilon}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} \leq \frac{\bar{c}_2 \|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} + \bar{c}_3 \|f(x)\|_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2}}{\min\{c_1^{-1}, c_5^{-1}, c_6^{-1}\} \min\{\frac{\nu_0}{3}, \varepsilon\}}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}
 & \left| \sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} a_1(x) y_{\varepsilon \bar{x}_1} \nu_{\bar{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} a_2(x) y_{\varepsilon \bar{x}_2} \nu_{\bar{x}_2} h_1 h_2 \right| \leq \\
 & \leq \bar{\nu}_0 \left[\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} |y_{\varepsilon \bar{x}_1}| \cdot |\nu_{\bar{x}_1}| h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} |y_{\varepsilon \bar{x}_2}| \cdot |\nu_{\bar{x}_2}| h_1 h_2 \right] \leq \\
 & \leq \bar{\nu}_0 \left[\left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} |y_{\varepsilon \bar{x}_1}|^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} |\nu_{\bar{x}_1}|^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} + \right. \\
 & \quad \left. + \left(\sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} |y_{\varepsilon \bar{x}_2}|^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \left(\sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} |\nu_{\bar{x}_2}|^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \right] \leq \\
 & \leq \bar{\nu}_0 \left[\left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon \bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon \bar{x}_2}^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \times \left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} \nu_{\bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} \nu_{\bar{x}_2}^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \right].
 \end{aligned}$$

Далее имеем оценки:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon \bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon \bar{x}_2}^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \leq \|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})}, \\
 & \left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} \nu_{\bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} \nu_{\bar{x}_2}^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \leq \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})}, \\
 & \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_\varepsilon(x) \nu(x) h_2 \leq \|y_\varepsilon(x)\|_{L_2(\Gamma_{+1} \cap \gamma)} \|\nu(x)\|_{L_2(\Gamma_{+1} \cap \gamma)} \leq \bar{c}_1^2 \|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})}, \\
 & \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_\varepsilon(x) \nu(x) h_1 \leq \bar{c}_2^2 \|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})}, \\
 & \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_\varepsilon(x) \nu(x) h_1 \leq \bar{c}_3^2 \|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})}.
 \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 |Q_h(y_\varepsilon, \nu)| & \leq \bar{\nu}_0 \|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} + (\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2 + \bar{c}_3^2) \varepsilon \|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} = \\
 & = [\bar{\nu}_0 (\bar{c}_1^2 + \bar{c}_2^2 + \bar{c}_3^2) \varepsilon] \|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})} \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega})}.
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Далее имеем

$$\begin{aligned}
 Q_h(y_\varepsilon, y_\varepsilon) &\geq \nu_0 \sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon \bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \nu_0 \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon \bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 h_2 + \\
 &+ \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 h_1 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 h_1 = \frac{\nu_0}{3} \left[3 \sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon \bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + 3 \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon \bar{x}_2}^2 h_1 h_2 \right] + \\
 &+ \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) h_2 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) h_1 + \varepsilon \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) h_1 \geq \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \times \\
 &\times \left[3 \left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon \bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon \bar{x}_2}^2 h_1 h_2 \right) + \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 h_2 + \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 h_1 + \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2 h_1 \right] = \\
 &= \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \left[\left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon \bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon \bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + \sum_{x \in \Gamma_{+1} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) h_2 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon \bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon \bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + \sum_{x \in \Gamma_{-2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) h_1 \right) + \right. \\
 &\quad \left. + \left(\sum_{\omega_1^+ \times \bar{\omega}_2} y_{\varepsilon \bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2^+} y_{\varepsilon \bar{x}_2}^2 h_1 h_2 + \sum_{x \in \Gamma_{+2} \cap \gamma} y_\varepsilon^2(x) h_1 \right) \right] \geq \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \times \\
 &\times \left[\frac{1}{c_4} \|y_\varepsilon\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 + \frac{1}{c_5} \|y_\varepsilon\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 + \frac{1}{c_6} \|y_\varepsilon\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 \right] \geq \min \left\{ \frac{1}{c_4}, \frac{1}{c_5}, \frac{1}{c_6} \right\} \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \|y_\varepsilon\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2.
 \end{aligned}$$

Таким образом, имеем оценку

$$Q_h(y_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq \min \left\{ \frac{1}{c_4}, \frac{1}{c_5}, \frac{1}{c_6} \right\} \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \|y_\varepsilon\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2. \quad (3.4)$$

Далее справедливы оценки

$$\begin{aligned}
 |\tilde{l}_h(\nu)| &\leq \|\mu_2(x)\|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} \|\nu(x)\|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} + \|f(x)\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)} \|\nu(x)\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}, \\
 \|\nu(x)\|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} &\leq \bar{c}_2 \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}, \quad \|\nu(x)\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)} \leq \bar{c}_3 \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}.
 \end{aligned}$$

Следовательно, имеем неравенство

$$|\tilde{l}_h(\nu)| \leq [\bar{c}_2 \|\mu_2(x)\|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} + \bar{c}_3 \|f(x)\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}] \|\nu(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}. \quad (3.5)$$

Кроме того, справедливы оценки:

$$\begin{aligned}
 \min \left\{ \frac{1}{c_4}, \frac{1}{c_5}, \frac{1}{c_6} \right\} \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\} \|y_\varepsilon\|_{W_2^1(\bar{\omega})}^2 &\leq A_{1h}(y_\varepsilon, y_\varepsilon) = \tilde{l}_h(y_\varepsilon) \leq \\
 &\leq |\tilde{l}_h(y_\varepsilon)| \leq [\bar{c}_2 \|\mu_2(x)\|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} + \bar{c}_3 \|f(x)\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}] \|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}, \\
 \|y_\varepsilon(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)} &\leq \frac{\bar{c}_2 \|\mu_2(x)\|_{L_2(\Gamma_{-1} \cap \gamma)} + \bar{c}_3 \|f(x)\|_{L_2(\bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2)}}{\min \left\{ \frac{1}{c_4}, \frac{1}{c_5}, \frac{1}{c_6} \right\} \min \left\{ \frac{\nu_0}{3}, \varepsilon \right\}} \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Таким образом, установлены оценки (3.3)–(3.5), выполнены условия леммы Лакса-Мильграма. Значит разностная схема для задачи (2.8)–(2.12) однозначно разрешима, и выполнена оценка (3.6).

Доказательство завершено.

Введем гильбертово пространство сеточных функций $H_h(\bar{\omega})$, заданных на сетке $\bar{\omega}$. Скалярное произведение $[y_\varepsilon, v]$ в $H_h(\bar{\omega})$ зададим соотношением

$$[y_\varepsilon, v] = (y_\varepsilon, v)_{L_2(\bar{\omega})},$$

где

$$[y_\varepsilon, v] = (y_\varepsilon, v)_{L_2(\bar{\omega})} = \sum_{x \in \bar{\omega}} y_\varepsilon(x) v(x) \bar{h}_1(x) \bar{h}_2(x) = \sum_{x \in \bar{\omega}_1} \bar{h}_1(x_1) \sum_{x \in \bar{\omega}_2} y_\varepsilon(x) v(x) \bar{h}_2(x_2),$$

$$\bar{h}_\alpha(x_\alpha) = \begin{cases} 0.5h_\alpha, & x_\alpha = 0, l_\alpha, \\ h_\alpha, & h_\alpha \leq x_\alpha \leq l_\alpha - h_\alpha, \alpha = 1, 2, \end{cases} \quad \text{при этом } \|y_\varepsilon\|_{L_2(\bar{\omega})}^2 = (y_\varepsilon, y_\varepsilon)_{L_2(\bar{\omega})}.$$

Задача о нахождении сеточного решения $y_\varepsilon(x)$, $x \in \bar{\omega}$ из сумматорного тождества (3.1) может быть записана в виде операторного уравнения первого рода с оператором A_h , действующим в гильбертовом пространстве $H_h(\bar{\omega})$:

$$A_h y_\varepsilon(x) = F_h, \quad y_\varepsilon \in H_h(\bar{\omega}), \quad (3.7)$$

$$A_h = A_{1h} + A_{2h}, \quad F_h(x) = f(x) + \frac{2}{h_1} F_{1h}(x) + \frac{2}{h_2} F_{2h}(x), \quad x \in \bar{\omega}. \quad (3.8)$$

Здесь операторы A_{1h} , A_{2h} и сеточные функции $F_{1h}(x)$, $F_{2h}(x)$, $x \in \bar{\omega}$ определяются соотношениями:

$$A_{1h} y_\varepsilon = \begin{cases} -\frac{2}{h_1} (a_1^{+1} y_{\varepsilon x_1}), & x_1 = 0, \\ -(a_1 y_{\varepsilon \bar{x}_1})_{x_1}, & h_1 \leq x_1 \leq l_1 - h_1, \\ \frac{2}{h_1} (a_1 y_{\varepsilon \bar{x}_1} + \varepsilon y_\varepsilon), & x_1 = l_1, \end{cases} \quad (3.9)$$

$$A_{2h} y_\varepsilon = \begin{cases} -\frac{2}{h_2} (a_2^{+1} y_{\varepsilon x_2} - \varepsilon y_\varepsilon), & x_2 = 0, \\ -(a_2 y_{\varepsilon \bar{x}_2})_{x_2}, & h_2 \leq x_2 \leq l_2 - h_2, \\ \frac{2}{h_2} (a_2 y_{\varepsilon \bar{x}_2} + \varepsilon y_\varepsilon), & x_2 = l_2, \end{cases} \quad (3.10)$$

$$F_{1h}(x) = \begin{cases} \mu_2(x), & x_1 = 0, \\ 0, & h_1 \leq x_1 \leq l_1 - h_1, \\ 0, & x_1 = l_1, \end{cases} \quad F_{2h}(x) = \begin{cases} 0, & x_2 = 0, \\ 0, & h_2 \leq x_2 \leq l_2 - h_2, \\ 0, & x_2 = l_2, \end{cases} \quad (3.11)$$

$$a_1^{+1} = a_1(x_1 + h_1, x_2), \quad a_2^{+1} = a_2(x_1, x_2 + h_2).$$

Здесь

$$a_1(x_1, x_2) = k_1(x_1 - 0.5h_1, x_2), \quad a_2(x_1, x_2) = k_2(x_1, x_2 - 0.5h_2). \quad (3.12)$$

Оператор A_h , определяемый согласно (3.7)–(3.12), самосопряжен и положителен в $H_h(\bar{\omega})$ [9].

4. Модельная смешанная краевая задача для проведения вычислительных экспериментов

В качестве модельного примера рассмотрим следующую смешанную краевую задачу:

$$\begin{aligned} -\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \right) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x) &= \mu_1(x), \quad x \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1}, \\ \frac{\partial u}{\partial N} &= -k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) = \mu_2(x), \quad x \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

Функции $k_{\alpha}(x)$, $f(x)$, $\mu_1(x)$ и $\mu_2(x)$, $\alpha = 1, 2$, выберем следующим образом:

$$\begin{aligned} k_1(x_1, x_2) &= 1 + \exp(x_1) + x_2^2, \quad k_2(x_1, x_2) = 1 + \exp(x_2) + x_1^2, \\ \mu_1(x) &\equiv 0, \quad x \in \Gamma_1 = \Gamma_{+1} \cup \Gamma_{-2} \cup \Gamma_{+2} = \Gamma \setminus \Gamma_{-1} = \partial\Omega \setminus \Gamma_{-1}, \\ \mu_2(x) &= (2 + x_2^2)(l_2 - x_2)x_2, \quad x \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}, \\ f(x) &= \exp(x_1)x_2(l_2 - x_2) - (l_1 - x_1)[\exp(x_2)(l_2 - 2x_2 - 2) - 2(1 + x_1^2)]. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Точным решением задачи (4.1), при заданных функциях (4.2), является функция:

$$u(x_1, x_2) = (l_1 - x_1)(l_2 - x_2)x_2, \quad x \in \Omega.$$

Для модельной смешанной краевой задачи (4.1) аппроксимирующая ее третья краевая задача, как нетрудно видеть, примет вид (см. выше):

$$\begin{aligned} -\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_{\alpha}} \left(k_{\alpha}(x) \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_{\alpha}} \right) &= f(x), \quad x \in \Omega, \\ -k_1(x) \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_1} &= \mu_2(x), \quad x \in \Gamma_{-1}, \\ k_1(x) \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_1} + \varepsilon u_{\varepsilon}(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_{+1}, \\ -k_2(x) \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_2} + \varepsilon u_{\varepsilon}(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_{-2}, \\ k_2(x) \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial x_2} + \varepsilon u_{\varepsilon}(x) &= 0, \quad x \in \Gamma_{+2}, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\varepsilon = \text{const} > 0$.

Функции $k_{\alpha}(x)$, $f(x)$ и $\mu_2(x)$, $\alpha = 1, 2$, выбраны следующем образом:

$$\begin{aligned} k_1(x_1, x_2) &= 1 + \exp(x_1) + x_2^2, \quad k_2(x_1, x_2) = 1 + \exp(x_2) + x_1^2, \\ \mu_2(x) &= (2 + x_2^2)(l_2 - x_2)x_2, \quad x \in \Gamma_2 = \Gamma_{-1}, \\ f(x) &= \exp(x_1)x_2(l_2 - x_2) - (l_1 - x_1)[\exp(x_2)(l_2 - 2x_2 - 2) - 2(1 + x_1^2)]. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Наиболее универсальными методами численного решения аппроксимирующей краевой задачи (4.3)–(4.5) являются метод сеток, вариационные методы, метод конечных элементов [7–10].

5. Расчетные формулы для нахождения приближенного решения сеточной задачи (3.7)–(3.12) методом верхней релаксации

Разностная аппроксимация задачи (4.3)–(4.5) имеет вид (3.7)–(3.12). Приближенное решение разностной задачи (3.7)–(3.12) найдем методом верхней релаксации. Пусть на прямоугольной сетке $\bar{\omega} = \{(x_1^{(i)}, x_2^{(j)}) = (ih_1, jh_2), 0 \leq i \leq N_1, 0 \leq j \leq N_2, h_\alpha = l_\alpha/N_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, введенной в прямоугольнике $\Omega = \{x = (x_1, x_2) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$, требуется найти решение задачи (3.7)–(3.12). В данной задаче неизвестными являются $y_\varepsilon(i, j) = y_\varepsilon((x_1^{(i)}, x_2^{(j)}))$ в узлах сетки. Если упорядочить неизвестные естественным способом по строкам сетки $\bar{\omega}$, начиная с нижней, то метод верхней релаксации, как нетрудно убедиться, описывается формулами [9; 10]:

$$b(0, 0)y_\varepsilon^{k+1}(0, 0) = (1 - \omega)b(0, 0)y_\varepsilon^k(0, 0) + \omega \left[\frac{a_1(1, 0)}{h_1^2} y_\varepsilon^k(1, 0) + \frac{a_2(0, 1)}{h_2^2} y_\varepsilon^k(0, 1) + \frac{\mu_2(0)}{h_1} + \frac{1}{2} f(0, 0) \right],$$

$$b(0, 0) = \frac{a_1(1, 0)}{h_1^2} + \frac{a_2(0, 1)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2};$$

$$b(0, j)y_\varepsilon^{k+1}(0, j) = (1 - \omega)b(0, j)y_\varepsilon^k(0, j) + \omega \left[\frac{2a_1(1, j)}{h_1^2} y_\varepsilon^k(1, j) + \frac{a_2(0, j)}{h_2^2} y_\varepsilon^{k+1}(0, j-1) + \frac{a_2(0, j+1)}{h_2^2} y_\varepsilon^k(0, j+1) + \frac{2\mu_2(j)}{h_1} + f(0, j) \right],$$

$$b(0, j) = \frac{2a_1(1, j)}{h_1^2} + \frac{a_2(0, j) + a_2(0, j+1)}{h_2^2}, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1;$$

$$b(0, N_2)y_\varepsilon^{k+1}(0, N_2) = (1 - \omega)b(0, N_2)y_\varepsilon^k(0, N_2) + \omega \left[\frac{a_1(1, 0)}{h_1^2} y_\varepsilon^k(1, N_2) + \frac{a_2(0, 1)}{h_2^2} y_\varepsilon^{k+1}(0, N_2 - 1) + \frac{\mu_2(l_2)}{h_1} + \frac{1}{2} f(0, l_2) \right],$$

$$b(0, N_2) = \frac{a_1(1, l_2)}{h_1^2} + \frac{a_2(0, l_2)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2};$$

$$b(i, 0)y_\varepsilon^{k+1}(i, 0) = (1 - \omega)b(i, j)y_\varepsilon^k(i, 0) + \omega \left[\frac{a_1(i, 0)}{h_1^2} y_\varepsilon^{k+1}(i-1, 0) + \frac{a_1(i+1, 0)}{h_1^2} y_\varepsilon^k(i+1, j) + 2\frac{a_2(i, 1)}{h_2^2} y_\varepsilon^k(i, 1) + f(i, 0) \right],$$

$$b(i, 0) = \frac{a_1(i, 0) + a_1(i+1, 0)}{h_1^2} + 2\frac{a_2(i, 1)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2}, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1;$$

$$b(i, j)y_{\varepsilon}^{k+1}(i, j) = (1 - \omega)b(i, j)y_{\varepsilon}^k(i, j) + \omega \left[\frac{a_1(i, j)}{h_1^2} y_{\varepsilon}^{k+1}(i - 1, j) + \right. \\ \left. + \frac{a_2(i, j)}{h_2^2} y_{\varepsilon}^{k+1}(i, j - 1) + \frac{a_1(i + 1, j)}{h_1^2} y_{\varepsilon}^k(i + 1, j) + \frac{a_2(i, j + 1)}{h_2^2} y_{\varepsilon}^k(i, j + 1) + f(i, j) \right], \\ 1 \leq i \leq N_1 - 1, 1 \leq j \leq N_2 - 1,$$

$$b(i, j) = \frac{a_1(i, j) + a_1(i + 1, j)}{h_1^2} + \frac{a_2(i, j) + a_2(i, j + 1)}{h_2^2};$$

$$b(i, N_2)y_{\varepsilon}^{k+1}(i, N_2) = (1 - \omega)b(i, j)y_{\varepsilon}^k(i, N_2) + \omega \left[\frac{k_1(i - 0.5, l_2)}{h_1^2} y_{\varepsilon}^{k+1}(i - 1, N_2) + \right. \\ \left. + \frac{a_1(i + 1, l_2)}{h_1^2} y_{\varepsilon}^k(i + 1, N_2) + 2 \frac{a_2(i, l_2)}{h_2^2} y_{\varepsilon}^{k+1}(i, N_2 - 1) + f(i, N_2) \right],$$

$$b(i, N_2) = \frac{a_1(i, l_2) + a_1(i + 1, l_2)}{h_1^2} + 2 \frac{a_2(i, l_2)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2}, \quad 1 \leq i \leq N_1 - 1;$$

$$b(N_1, 0)y_{\varepsilon}^{k+1}(N_1, 0) = (1 - \omega)b(N_1, 0)y_{\varepsilon}^k(N_1, 0) + \omega \left[\frac{a_1(l_1, 0)}{h_1^2} y_{\varepsilon}^{k+1}(N_1 - 1, 0) + \right. \\ \left. + \frac{a_2(l_1, 1)}{h_2^2} y_{\varepsilon}^k(N_1, 1) + \frac{1}{2} f(N_1, 0) \right],$$

$$b(N_1, 0) = \frac{a_1(l_1, 0)}{h_1^2} + \frac{a_2(l_2, 1)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2};$$

$$b(N_1, j)y_{\varepsilon}^{k+1}(N_1, j) = (1 - \omega)b(N_1, j)y_{\varepsilon}^k(N_1, j) + \omega \left[\frac{2k_1(l_1 - 0.5, j)}{h_1^2} y_{\varepsilon}^{k+1}(N_1 - 1, j) + \right. \\ \left. + \frac{a_2(l_1, j)}{h_2^2} y_{\varepsilon}^{k+1}(N_1, j - 1) + \frac{a_2(l_1, j + 1)}{h_2^2} y_{\varepsilon}^k(N_1, j + 1) + f(N_1, j) \right],$$

$$b(N_1, j) = \frac{2a_1(l_1, j)}{h_1^2} + \frac{a_2(l_1, j) + a_2(l_1, j + 1)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2}, \quad 1 \leq j \leq N_2 - 1;$$

$$b(N_1, N_2)y_{\varepsilon}^{k+1}(N_1, N_2) = (1 - \omega)b(N_1, N_2)y_{\varepsilon}^k(N_1, N_2) + \omega \left[\frac{a_1(l_1, l_2)}{h_1^2} y_{\varepsilon}^{k+1}(N_1 - 1, N_2) + \right. \\ \left. + \frac{a_2(l_1, l_2)}{h_2^2} y_{\varepsilon}^{k+1}(N_1, N_2 - 1) + \frac{1}{2} f(N_1, N_2) \right],$$

$$b(N_1, N_2) = \frac{a_1(l_1, l_2)}{h_1^2} + \frac{a_2(l_1, l_2)}{h_2^2} + \frac{\varepsilon}{h_2}.$$

Здесь $0 < \omega < 2$ – параметр метода, при котором метод релаксации сходится, а $k = 0, 1, 2, \dots$

Вычисления начинаются с точки $i = 0, j = 0$ и продолжаются по столбцам сетки $\bar{\omega}$. Найденное значение $y_\varepsilon^{k+1}(i, j)$ размещается на месте $y_\varepsilon^k(i, j)$. Начальное приближение выбирается следующим образом: $y_\varepsilon^0(x) = 0, x \in \bar{\omega}$.

Вычислительные эксперименты по приближенному решению краевых задач (4.3)–(4.5) проводились на основе разностной схемы (3.7)–(3.12), представляющей собой систему сеточных уравнений. Расчеты проводились в единичном квадрате ($l_1 = l_2 = 1$), на квадратной сетке с $N_1 = N_2$, с шагами сетки $h_1 = h_2$.

Процесс итераций, построенный на основе метода верхней релаксации по решению системы сеточных уравнений (3.7)–(3.12), заканчивался, если выполнялось условие

$$\|y_\varepsilon^{k+1}(x) - y_\varepsilon^k(x)\|_{L_\infty(\bar{\omega})} < 10^{-6}.$$

Вычислительные эксперименты по решению модельных задач показали, что с ростом параметра $\varepsilon > 0$ наблюдается монотонное убывание погрешности типа $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$, поэтому имеем при $\varepsilon \rightarrow +\infty$

$$\|u(x) - y(x, \varepsilon, h, k)\|_{L_\infty(\bar{\omega})} \rightarrow 0.$$

Здесь $u(x)$ – точное решение модельной смешанной краевой задачи (4.1)–(4.2), а $y(x, \varepsilon, h, k)$ – приближенное решение аппроксимирующей краевой задачи (4.3)–(4.5), полученное на основе разработанного метода решения смешанных краевых задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э. Аппроксимация смешанной краевой задачи Журнал Средневолжского математического общества. 2018, Т. 20, № 4. С. 429–438.
2. Ректорис К. Вариационные методы в математической физике и технике: монография. М.: Мир, 1985. 590 с.
3. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука, 1976. 391 с.
4. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 408 с.
5. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989. 464 с.
6. Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981. 416 с.
7. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. М.: Высшая школа, 1987. 296 с.
8. Самарский А. А., Андреев В. Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. 352 с.
9. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Вычислительная теплопередача. М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ». 2009. 784 с.

10. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука. 1978. 592 с.

*Поступила 26.12.2020; доработана после рецензирования 20.02.2021;
принята к публикации 25.02.2021*

Информация об авторах:

Файрузов Махмут Эрнстович, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, fairuzovme@mail.ru

Лубышев Федор Владимирович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 65N06

On a method for approximate solution of a mixed boundary value problem for an elliptic equation

M. E. Fairuzov, F. V. Lubyshev

Bashkir State University (Ufa, Russian Federation)

Abstract. A mixed boundary value problem for an elliptic equation of divergent type with variable coefficients is considered. It is assumed that the integration region is a rectangle, and the boundary of the integration region is the union of two disjoint pieces. The Dirichlet boundary condition is set on the first piece, and the Neumann boundary condition is set on the other one. The given problem is a problem with a discontinuous boundary condition. Such problems with mixed conditions at the boundary are most often encountered in practice in process modeling, and the methods for solving them are of considerable interest. This work is related to the paper [1] and complements it. It is focused on the approbation of the results established in [1] on the convergence of approximations of the original mixed boundary value problem with the main boundary condition of the third boundary value problem already with the natural boundary condition. On the basis of the results obtained in this paper and in [1], computational experiments on the approximate solution of model mixed boundary value problems are carried out.

Key Words: elliptic equation, mixed boundary value problem, Sobolev spaces, embedding theorem, approximation, convergence of approximations, difference scheme, iterative method, grid method

For citation: M. E. Fairuzov, F. V. Lubyshev. On a method for approximate solution of a mixed boundary value problem for an elliptic equation. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:1(2021), 58–71. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.58-71>

REFERENCES

1. F. V. Lubyshev, M. E. Fairuzov, "Approximation of a mixed boundary value problem", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **20**:4 (2018), 429–438 (In Russ.).
2. K. Rektoris, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike i tekhnike [Variational Methods in Mathematical Physics and Engineering]*, Mir Publ., Moscow, 1985 (In Russ.), 590 p.
3. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh [Partial Differential Equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 391 p.
4. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki [Boundary value problems of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 408 p.
5. David Gilbarg, Neil S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order Second Edition*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1983.
6. G. I. Marchuk, V. I. Agoshkov, *Vvedenie v proekcionno-setochnye metody [Introduction to projection-grid methods]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 416 p.
7. A. A. Samarskiy, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, *Raznostnye skhemy dlya differentsial'nykh uravneniy s obobshchennymi resheniyami [Difference schemes for differential equations with generalized solutions]*, Vysshaya shkola Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 296 p.
8. A. A. Samarskiy, V. B. Andreev, *Raznostnye metody dlya ellipticheskikh uravneniy [Difference methods for elliptic equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 352 p.
9. A. A. Samarskiy, P. N. Vabishchevich, *Vychislitel'naya teploperedacha [Computational heat transfer]*, Knizhnyy dom "LIBROKOM" Publ., M., 2009 (In Russ.), 784 p.
10. A. A. Samarskiy, E. S. Nikolaev, *Metody resheniya setochnykh uravneniy [Methods for solving grid equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 592 p.

Submitted 26.12.2020; Revised 20.02.2021; Accepted 25.02.2021

Information about the authors:

Mahmut E. Fairuzov, Associate Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Bashkir State University» (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Ph. D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, fairuzovme@mail.ru

Fedor V. Lubyshev, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Bashkir State University» (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.72–81

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 517.9, 539.3, 532.542

Исследование динамической устойчивости изгибно-крутильных деформаций трубопровода

П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, Ю. В. Покладова

ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет»
(г. Ульяновск, Российская Федерация)

Аннотация. Предложены нелинейные математические модели, описывающие динамику трубопровода с протекающей в нем жидкостью: а) модель изгибно-крутильных колебаний с двумя степенями свободы; б) модель, описывающая изгибно-крутильные колебания с учетом нелинейности изгибающего момента и центробежной силы; в) модель, учитывающая совместные продольные, изгибные (поперечные) и крутильные колебания. Все предложенные модели описываются нелинейными дифференциальными уравнениями с частными производными для неизвестных функций деформаций. Для описания динамики трубопровода используется нелинейная теория твердого деформируемого тела, учитывающая поперечные, тангенциальные и продольные деформации трубопровода. Исследуется динамическая устойчивость изгибно-крутильных и продольно-изгибно-крутильных колебаний трубопровода. Принятые в работе определения устойчивости деформируемого тела соответствуют концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Задача об исследовании динамической устойчивости, а именно устойчивости по начальным данным, формулируется следующим образом: при каких значениях параметров, характеризующих систему «газ-тело», малым отклонениям тела от положения равновесия в начальный момент времени будут соответствовать малые отклонения и в любой момент времени. Для предложенных моделей построены положительно определенные функционалы типа Ляпунова, на основе которых исследуется динамическая устойчивость трубопровода. Получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на параметры механической системы.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, трубопровод, деформация, динамика, изгибно-крутильные колебания, устойчивость, функционалы Ляпунова

Для цитирования: Вельмисов П. А., Тамарова Ю. А., Покладова А. В. Исследование динамической устойчивости изгибно-крутильных деформаций трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 72–81. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.72–81>

1. Введение

Актуальной проблемой во многих отраслях техники является задача исследования динамики и устойчивости составных частей конструкций, устройств, приборов, установок различного назначения при аэрогидродинамическом воздействии. Такого рода задачи возникают на этапе проектирования в приборостроении, авиаракетостроении, машиностроении и т. д. Изучению и описанию колебаний трубопроводов, распространения волн в трубопроводах, содержащих газожидкостную среду, устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком жидкости, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных с середины прошлого века до сегодняшних дней и представленных, например, [1–14]. Среди публикаций авторов



данной статьи по исследованию динамики и устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, отметим статьи и монографии [15–19].

В данной статье исследуется устойчивость решений начально-краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, описывающих динамику трубопровода с учетом кручения. Для описания динамики трубопровода с протекающей в нем жидкостью предложены модельные уравнения, описывающие изгибно-крутильные колебания с двумя степенями свободы, уравнения, описывающие изгибно-крутильные колебания с учетом нелинейности изгибающего момента и центробежной силы, а также уравнения, описывающие совместные продольные, изгибные и крутильные колебания. Для исследования устойчивости используется аналитический метод, который основан на построении положительно определенных функционалов типа Ляпунова для указанных математических моделей.

2. Математические модели

1) Модель изгибно-крутильных колебаний с двумя степенями свободы имеет вид

$$m\ddot{w} + EJw'''' + (N(t) + m_*U^2(t))w'' + 2m_*U(t)\dot{w}' + m_*\dot{U}(t)w' + \alpha_2\dot{w}'''' + \alpha_1\dot{w}' + \alpha_0w + g(w, \dot{w}) - m\sigma\ddot{\theta} = Q, \quad (2.1)$$

$$J_m\ddot{\theta} - GJ_k\theta'' - \beta_2\dot{\theta}'' + \beta_1\dot{\theta}' + \beta_0\theta + h(\theta, \dot{\theta}) - m\sigma\ddot{w} = M. \quad (2.2)$$

Здесь $w(x, t)$, $\theta(x, t)$ – поперечная деформация и угол закручивания сечения с координатой x в момент времени t ; EJ и GJ_k – изгибная и крутильная жесткости; $J_m = mr^2$ – массовый момент инерции сечения (r – радиус инерции); $m = m_0 + m_*$; m_0 , m_* – погонные массы трубопровода и жидкости; $U(t)$ – скорость жидкости в трубопроводе; $N(t)$ – сжимающее (растягивающее) продольное усилие; σ – расстояние от центра тяжести до центра жесткости; α_2 , β_2 – коэффициенты демпфирования (в поперечном и тангенциальном направлениях) материала трубопровода; α_1 , β_1 , α_0 , β_0 – коэффициенты демпфирования и жесткости внешней связи; функции $g(w, \dot{w})$ и $h(\theta, \dot{\theta})$ учитывают нелинейные составляющие жесткости (упругости) и демпфирования (трения) внешних связей (например, упрочняющего слоя) в поперечном и тангенциальном направлениях; $Q(w, \dot{w}, \theta, \dot{\theta})$ и $M(w, \dot{w}, \theta, \dot{\theta})$ – поперечное воздействие и крутящий момент внешних воздействий. Штрих и точка сверху обозначают производные по координате x и времени t соответственно.

2) Модель изгибно-крутильных колебаний, учитывающая нелинейность изгибающего момента и центробежной силы, имеет вид

$$m\ddot{w} + \left[EJw'' \left(1 - \frac{3}{2}w'^2 \right) \right]'' + m_*U^2(t)w'' \left(1 - \frac{3}{2}w'^2 \right) + N(t)w'' + 2m_*U(t)\dot{w}' + m_*\dot{U}(t)w' + \alpha_2\dot{w}'''' + \alpha_1\dot{w}' + \alpha_0w + g(w, \dot{w}) - m\sigma\ddot{\theta} = Q, \quad (2.3)$$

$$J_m\ddot{\theta} - GJ_k\theta'' - \beta_2\dot{\theta}'' + \beta_1\dot{\theta}' + \beta_0\theta + h(\theta, \dot{\theta}) - m\sigma\ddot{w} = M. \quad (2.4)$$

3) Модель, учитывающая совместные продольные, поперечные (изгибные) и крутильные деформации, имеет вид

$$-EF \left(u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)' + m\ddot{u} - \gamma_2\dot{u}'' + \gamma_1\dot{u}' + \gamma_0u + f(u, \dot{u}) = P, \quad (2.5)$$

$$-EF \left[w' \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) \right]' + m\ddot{w} + EJw'''' + (N(t) + m_*U^2(t)) w'' + 2m_*U(t)\dot{w}' + \\ + m_*\dot{U}(t)w' + \alpha_2\dot{w}'''' + \alpha_1\dot{w} + \alpha_0w + g(w, \dot{w}) - m\sigma\ddot{\theta} = Q, \quad (2.6)$$

$$J_m\ddot{\theta} - GJ_k\theta'' - \beta_2\dot{\theta}'' + \beta_1\dot{\theta} + \beta_0\theta + h(\theta, \dot{\theta}) - m\sigma\ddot{w} = M. \quad (2.7)$$

Здесь $u(x, t)$ – продольная деформация; P – продольное внешнее воздействие; функция $f(u, \dot{u})$ учитывает нелинейную составляющую жесткости и демпфирования внешних связей в продольном направлении; γ_2 – коэффициент демпфирования (в продольном направлении) материала трубопровода; γ_1, γ_0 – коэффициенты демпфирования и жесткости внешней связи.

Функции $f(u, \dot{u})$, $g(w, \dot{w})$, $h(\theta, \dot{\theta})$ можно представить, например, в виде

$$f(u, \dot{u}) = \frac{df_0(u)}{du} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}(u)\dot{u}^{2k-1}, \\ g(w, \dot{w}) = \frac{dg_0(w)}{dw} + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k-1}(w)\dot{w}^{2k-1}, \quad (2.8) \\ h(\theta, \dot{\theta}) = \frac{dh_0(\theta)}{d\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k-1}(\theta)\dot{\theta}^{2k-1},$$

при этом $f_k(u)$, $g_k(w)$, $h_k(\theta)$, $k = 0 \div \infty$, неотрицательны. В случае, когда зависимости (2.8) определяются экспериментальным путем, вместо рядов можно брать конечные суммы.

3. Исследование динамической устойчивости

Рассмотрим модель изгибно-крутильных колебаний (2.1)–(2.2). Введем в рассмотрение функционал

$$J(w, \theta) \equiv J(t) = \int_0^l \left[H(\dot{w}, \dot{\theta}) + EJ(w'')^2 + \alpha_0w^2 + \beta_0\theta^2 + GJ_k(\theta')^2 - \right. \\ \left. - (N(t) + m_*U^2(t))(w')^2 + 2g_0(w) + 2h_0(\theta) \right] dx, \quad (3.1)$$

где $H(\dot{w}, \dot{\theta}) = m(\dot{w}^2 - 2\sigma\dot{w}\dot{\theta} + r^2\dot{\theta}^2)$ – квадратичная форма, являющаяся положительно определенной при $r > \sigma$. Для производной $\frac{dJ}{dt}$ этого функционала, согласно (2.1)–(2.2) получим

$$\frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} = - \int_0^l \left[\alpha_2(\dot{w}'')^2 + \beta_2(\dot{\theta}')^2 + \beta_1\dot{\theta}^2 + \alpha_1\dot{w}^2 + m_*\dot{U}(t)\dot{w}w' + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\dot{N}(t) + 2m_*U(t)\dot{U}(t) \right) (w')^2 + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k-1}(w)\dot{w}^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k-1}(\theta)\dot{\theta}^{2k} \right] dx - \\ - \left[EJ(w'''\dot{w} - w''\dot{w}') + (N(t) + m_*U^2(t)) \dot{w}w' + m_*U(t)\dot{w}^2 + \right. \\ \left. + \alpha_2(\dot{w}'''\dot{w} - \dot{w}''\dot{w}') - GJ_k\theta'\dot{\theta} - \beta_2\dot{\theta}'\dot{\theta} \right] \Big|_0^l + \int_0^l (Q\dot{w} + M\dot{\theta}) dx. \quad (3.2)$$

Предположим, что концы трубопровода $x = 0$, $x = l$ закреплены жестко или шарнирно ($w = w' = 0$ или $w = w'' = 0$), при этом на концах $\theta = 0$ или $\theta' = 0$, а внешние воздействия Q , M удовлетворяют условию

$$\int_0^l (M\dot{w} + Q\dot{\theta}) \leq 0, \quad (3.3)$$

что имеет место, в частности, для свободных колебаний.

Справедливы неравенства [20]

$$\int_0^l w'^2 dx \leq \mu_1 \int_0^l w''^2 dx, \quad \int_0^l w^2 dx \leq \mu_2 \int_0^l w'^2 dx, \quad (3.4)$$

где μ_1 , μ_2 – некоторые положительные константы.

С учетом принятых предположений и неравенств (3.4), а также учитывая положительность коэффициентов демпфирования и жесткости, согласно (3.2) получим

$$\frac{1}{2} \frac{dJ}{dt} \leq - \int_0^l L(\dot{w}, w') dx, \quad (3.5)$$

где $L(\dot{w}, w')$ – квадратичная форма, определяемая выражением

$$L(\dot{w}, w') = \left(\frac{\alpha_2}{\mu_1 \mu_2} + \alpha_1 \right) \dot{w}^2 + m \dot{U}(t) \dot{w} w' + \frac{1}{2} (\dot{N}(t) + 2m_* U(t) \dot{U}(t)) w'^2. \quad (3.6)$$

Если выполняется условие

$$2 \left(\frac{\alpha_2}{\mu_1 \mu_2} + \alpha_1 \right) [\dot{N}(t) + 2m_* U(t) \dot{U}(t)] \geq m^2 \dot{U}^2(t), \quad (3.7)$$

то квадратичная форма $L(\dot{w}, w')$ является положительно определенной, и тогда $\frac{dJ}{dt} \leq 0$, $J(t) \leq J(0)$, откуда с учетом (3.1), (3.4) получим

$$\begin{aligned} \int_0^l \left[H(\dot{w}, \dot{\theta}) + \left(\frac{EJ}{\mu_1} - N(t) - m_* U^2(t) \right) w'^2 + GJ_k \theta'^2 + \alpha_0 w^2 + \beta_0 \theta^2 + \right. \\ \left. + 2g_0(w) + 2h_0(\theta) \right] (x, t) dx \leq J(t) \leq J(0) = \int_0^l \left[H(\dot{w}, \dot{\theta}) + EJ w''^2 - \right. \\ \left. - (N + m_* U^2) w'^2 + GJ_k \theta'^2 + \alpha_0 w^2 + \beta_0 \theta^2 + 2g_0(w) + 2h_0(\theta) \right] (x, 0) dx. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Из неравенства (3.8) следует

Т е о р е м а 3.1 Если $r > \sigma$, а также выполнены условия

$$N + m_* U^2 \leq \frac{EJ}{\mu_1}, \quad 2 \left(\frac{\alpha_2}{\mu_1 \mu_2} + \alpha_1 \right) \frac{d}{dt} (N + m_* U^2) \geq m^2 \left(\frac{dU}{dt} \right)^2, \quad (3.9)$$

то имеет место динамическая устойчивость изгибно-крутильных колебаний трубопровода.

З а м е ч а н и е 3.1 Речь идет об устойчивости решений начально-краевых задач (устойчивости по Ляпунову) для функций $w(x, t)$, $\theta(x, t)$ и их производных $\dot{w}(x, t)$, $\dot{\theta}(x, t)$, $w'(x, t)$, $\theta'(x, t)$ (по отношению к возмущениям начальных данных $w(x, 0)$, $\theta(x, 0)$, $\dot{w}(x, 0)$, $\dot{\theta}(x, 0)$, $w'(x, 0)$, $\theta'(x, 0)$, $w''(x, 0)$).

Рассмотрим теперь модель, которая описывается уравнениями (2.5)–(2.7). Рассмотрим функционал

$$S(u, w, \theta) \equiv S(t) = \int_0^l \left[EF \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + H(\dot{w}, \dot{\theta}) + EJ(w'')^2 + GJ_k(\theta')^2 + \right. \\ \left. + m\dot{u}^2 - (N(t) + m_*U^2(t))w'^2 + \gamma_0 u^2 + \alpha_0 w^2 + \right. \\ \left. + \beta_0 \theta^2 + 2f_0(u) + 2g_0(w) + 2h_0(\theta) \right] dx. \quad (3.10)$$

Согласно уравнениям (2.5)–(2.7) имеем

$$\frac{1}{2} \frac{dS}{dt} = - \int_0^l \left[\gamma_2 (\dot{u}')^2 + \alpha_2 (\dot{w}'')^2 + \beta_2 (\dot{\theta}')^2 + \gamma_1 \dot{u}^2 + \alpha_1 \dot{w}^2 + \beta_1 \dot{\theta}^2 + m_* \dot{U}(t) w' \dot{w} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (N(t) + m_* U^2(t)) w'^2 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}(u) \dot{u}^{2k} + \sum_{k=1}^{\infty} g_{2k-1}(w) \dot{w}^{2k} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{\infty} h_{2k-1}(\theta) \dot{\theta}^{2k} \right] dx - \left[EJ(w''' \dot{w} - w'' \dot{w}') - EF \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) (\dot{u} + w' \dot{w}) - \right. \\ \left. - \gamma_2 \dot{u}' \dot{u} + \alpha_2 (\dot{w}''' \dot{w} - \dot{w}'' \dot{w}') - \beta_2 \dot{\theta}' \dot{\theta} + (N(t) + m_* U^2(t)) w' \dot{w} + \right. \\ \left. m_* U(t) \dot{w}^2 - GJ_k \theta' \dot{\theta} \right] \Big|_0^l + \int_0^l (\dot{u}P + \dot{w}Q + \dot{\theta}M) dx. \quad (3.11)$$

Предположим, что

$$\int_0^l (\dot{u}P + \dot{w}Q + \dot{\theta}M) dx \leq 0. \quad (3.12)$$

Тогда при шарнирном или жестком закреплении концов трубопровода, согласно (3.11), запишем

$$\frac{1}{2} \frac{dS}{dt} \leq \int_0^l L(\dot{w}, w') dx, \quad (3.13)$$

откуда при выполнении условия (3.7) найдем

$$\frac{dS}{dt} \leq 0, \quad S(t) \leq S(0).$$

Тогда, учитывая (3.4), получим

$$\begin{aligned} & \int_0^l \left[EF \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + m \dot{u}^2 + H(\dot{w}, \dot{\theta}) + \left(\frac{EJ}{\mu_1} - N(t) - m_* U^2(t) \right) w'^2 + \right. \\ & \quad \left. + GJ_k(\theta')^2 + \gamma_0 u^2 + \alpha_0 w^2 + \beta_0 \theta^2 + 2f_0(u) + 2g_0(w) + 2h_0(\theta) \right] (x, t) dx \leq \\ & \leq S(t) \leq S(0) = \int_0^l \left[EF \left(u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + m \dot{u}^2 + H(\dot{w}, \dot{\theta}) + EJ(w'')^2 + GJ_k(\theta')^2 - \right. \\ & \quad \left. - (N(t) + m_* U^2(t)) w'^2 + \gamma_0 u^2 + \alpha_0 w^2 + \beta_0 \theta^2 + 2f_0(u) + 2g_0(w) + 2h_0(\theta) \right] (x, 0) dx. \end{aligned}$$

Из этого неравенства следует

Т е о р е м а 3.2 Если выполнены условия (3.9) и $r > \sigma$, то имеет место устойчивость по Ляпунову решений начально-краевых задач для функций $u(x, t)$, $w(x, t)$, $\theta(x, t)$ и их производных $\dot{u}(x, t)$, $\dot{w}(x, t)$, $\dot{\theta}(x, t)$, $u'(x, t)$, $w'(x, t)$, $\theta'(x, t)$ (по отношению к возмущениям начальных данных $u(x, 0)$, $w(x, 0)$, $\theta(x, 0)$), $\dot{u}(x, 0)$, $\dot{w}(x, 0)$, $\dot{\theta}(x, 0)$, $u'(x, 0)$, $w'(x, 0)$, $\theta'(x, 0)$, $w''(x, 0)$).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, № 19-41-730006).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Феодосьев В.И. О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Инж. сб. 1951. Т. 10. С. 169-170.
2. Мовчан А.А. Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости // Прикладная математика и механика. 1965. Вып. 4. С. 760-762.
3. Челомей С.В. О динамической устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. Сер. «Механика». 1980. Т. 252, № 2. С. 307-310.
4. Светлицкий В.А. Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха. М.: Машиностроение, 1982. 280 с.
5. Васина В.Н. Параметрические колебания участка трубопровода с протекающей жидкостью // Вестник Московского энергетического института. 2007. № 1. С. 1-11.
6. Болотин В.В., Радин В.П., Чирков В.П., Щугорев А.В. Устойчивость участка трубопровода с упругой опорой // Известия Российской академии наук. Механика твёрдого тела. 2009. № 1. С. 174-184.
7. Kaya-Cekin E. Y., Aulisa E., Ibragimov A., Seshaiyer P. A stability estimate for fluid structure interaction problem with non-linear beam // Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement. 2009. pp. 424-432.
8. Faal R. T., Derakhshan D. Flow-Induced Vibration of Pipeline on Elastic Support // Procedia Engineering. 2011. Vol. 14. pp. 2986-2993.

9. Зефирова С.В., Кочетков А.В., Овчинников В.Ф., Савихин А.О., Смирнов Л.В., Яскеляин А.В. // Численное моделирование динамического деформирования пространственного трубопровода с жидкостью при локальном ударном нагружении // Проблемы прочности и пластичности. 2013. Т. 75, № 2. С. 152–159.
10. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y. Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid // Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S. 2014. Vol. 7, No. 6. pp. 1133–1148. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133>
11. Moditis K., Paidoussis M., Ratigan J. Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow // Journal of Fluids and Structures. 2016. Vol. 63. pp. 120–139. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002>
12. Kontzialis K., Moditis K., Paidoussis M. P. Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions // Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME. 2017. Vol. 139, No. 3. 031303. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4034405>
13. Giacobbi D. B., Semler C., Paidoussis M. P. Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density // Journal of Sound and Vibration. 2020. Vol. 473. 115202. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202>
14. Abdelbaki A.R., Paidoussis M.P., Misra A.K. A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow // International Journal of Non-Linear Mechanics. 2020. Vol. 118. 103290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290>
15. Вельмисов П. А., Васильева А. А., Семенова Е. П. Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии // Математическое моделирование физических, экономических, социальных систем и процессов : тр. 7-й Междунар. конф. (Ульяновск, 2–5 февраля 2009 г.). Ульяновск: УлГУ, 2009. С. 68–70.
16. Вельмисов П. А., Манжосов В. К. Математическое моделирование в задачах динамики вбродарных и аэроупругих систем. Ульяновск: УлГТУ, 2014. 204 с.
17. Вельмисов П. А., Корнеев А. В. Математическое моделирование в задаче о динамической устойчивости трубопровода // Автоматизация процессов управления. 2015. Т. 39, № 1. С. 63–73. DOI: <https://doi.org/10.1016/10.35752/1991-2927-2019-3-57-93-101>
18. Вельмисов П. А., Гладун А. В. Об управлении динамикой трубопровода // Журнал Средневолжского математического общества, 2016. Т. 18, № 4. С. 89–97.
19. Анкилов А.В., Вельмисов П. А. Функционалы Ляпунова в некоторых задачах аэрогидроупругости. Ульяновск, 2019. 201 с.
20. Коллатц Л. Задачи на собственные значения. М.: Наука, 1968. 503 с.

*Поступила 4.12.2020; доработана после рецензирования 7.01.2021;
принята к публикации 10.02.2021*

Информация об авторах:

Вельмисов Петр Александрович, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Тамарова Юлия Александровна, соискатель кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovaua@mail.ru

Покладова Юлия Валерьевна, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (430027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9876-4038>, pokladovau@inbox.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Original article

MSC2020 35Q35, 35Q74, 74H55

Investigation of the dynamic stability of bending-torsional deformations of the pipeline

P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, Yu. V. Pokladova

Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russian Federation)

Abstract. Nonlinear mathematical models are proposed that describe the dynamics of a pipeline with a fluid flowing in it: a) the model of bending-torsional vibrations with two degrees of freedom; b) the model describing flexural-torsional vibrations taking into account the nonlinearity of the bending moment and centrifugal force; c) the model that takes into account joint longitudinal, bending (transverse) and torsional vibrations. All proposed models are described by nonlinear partial differential equations for unknown strain functions. To describe the dynamics of a pipeline, the nonlinear theory of a rigid deformable body is used, which takes into account the transverse, tangential and longitudinal deformations of the pipeline. The dynamic stability of bending-torsional and longitudinal-flexural-torsional vibrations of the pipeline is investigated. The definitions of the stability of a deformable body adopted in this work correspond to the Lyapunov concept of stability of dynamical systems. The problem of studying dynamic stability, namely, stability according to initial data, is formulated as follows: at what values of the parameters characterizing the gas-body system, small deviations of the body from the equilibrium position at the initial moment of time will correspond to small deviations and at any moment of time. For the proposed models, positive definite functionals of the Lyapunov type are constructed, on the basis of which the dynamic stability of the pipeline is investigated. Sufficient stability conditions are obtained that impose restrictions on the parameters of a mechanical system.

Key Words: differential equations, pipeline, deformation, dynamics, flexural-torsional vibrations, stability, Lyapunov functionals

For citation: P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, Yu. V. Pokladova. Investigation of the dynamic stability of bending-torsional deformations of the pipeline. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:1(2021), 72–81. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.72-81>

REFERENCES

1. V.I. Feodosev, “[On vibration and stability of a pipeline containing flowing fluid]”, *Inzhenernyy sbornik*, **10** (1951), 169–170 (In Russ.).
2. A.A. Movchan, “[On a problem of stability of a pipe when a fluid flows through it]”, *Applied Mathematics and Mechanics*, **4** (1965), 760–762 (In Russ.).
3. S.V. Chelomey, “[On dynamic stability of elastic systems]”, *Dokl. of the Academy of Sciences of the SSR. Ser. "Mechanics"*, **252**:2 (1980), 307–310 (In Russ.).
4. V.A. Svetlitsky, *[Mechanics of Piping and Hoses: Problems of the interaction of rods with a fluid or air flow]*, Mashinostroyeniye Publ., Moscow, 1982 (In Russ.), 280 p.
5. V.N. Vasina, “[Parametric vibrations of a pipeline section with a flowing liquid]”, *Bulletin of the Moscow Power Engineering Institute*, **1** (2007), 1–11 (In Russ.).
6. V.V. Bolotin, V.P. Radin, V.P. Chirkov, A.V. Shchugorev, “[Stability of a pipeline section with elastic support]”, *Rigid Body Mechanics*, **1** (2009), 174–184 (In Russ.).
7. E.Y. Kaya-Cekin, E. Aulisa, A. Ibragimov, P. Seshaiyer, “A stability estimate for fluid structure interaction problem with non-linear beam”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Supplement*, 2009, 424–432.
8. R.T. Faal, D. Derakhshan, “Flow-induced vibration of pipeline on elastic support”, *Procedia Engineering*, **14** (2011), 2986–2993.
9. S.V. Zefirov, A.V. Kochetkov, V.F. Ovchinnikov, A.O. Savikhin, L.V. Smirnov, A.V. Yaskelyin, “[Numerical modeling of dynamic deformation of a spatial pipeline with a liquid under local shock loading]”, *Problems of Strength and Ductility*, **75**:2 (2013), 152–159 (In Russ.).
10. E. Aulisa, A. Ibragimov, E.Y. Kaya-Cekin, “Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Ser. S.*, **7**:6 (2014), 1133–1148. DOI: <https://doi.org/10.3934/dcdss.2014.7.1133>
11. K. Mouditis, M.P. Paidoussis, J. Ratigan, “Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow”, *Journal of Fluids and Structures*, **63** (2016), 120–139. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2016.03.002>
12. K. Kontzialis, K. Mouditis, M.P. Paidoussis, “Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions”, *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, **139**:3 (2017), 031303. DOI: <https://doi.org/10.1115/1.4034405>
13. D.B. Giacobbi, C. Semler, M.P. Paidoussis, “Dynamics of pipes conveying fluid of axially varying density”, *Journal of Sound and Vibration*, **473** (2020), 115202. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2020.115202>
14. A.R. Abdelbaki, M.P. Paidoussis, A.K. Misra, “A nonlinear model for a hanging cantilevered pipe discharging fluid with a partially-confined external flow”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, **118** (2020), 103290. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.103290>

15. P. A. Velmisov, A. A. Vasil'eva, E. P. Semenova, "Matematicheskoye modelirovaniye dinamiki uprugikh elementov pri aerogidrodinamicheskom vozeystvii [Mathematical modeling of the dynamics of elastic elements under aerohydrodynamic action]", *Mathematical modeling of physical, economic, technical, social systems and processes: Tr. 7 Mezhdunar. conf., Ulyanovsk, February 2-5, 2009*, 68–70 (In Russ.).
16. P. A. Velmisov, V. K. Manzhosov, *Matematicheskoye modelirovaniye v zadachakh dinamiki vibroudarnykh i aerouprugikh sistem [Mathematical modeling in problems of dynamics of vibroimpact and aeroelastic systems]*, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014 (In Russ.), 204 p.
17. P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "Matematicheskoye modelirovaniye v zadache o dinamicheskoy ustoychivosti truboprovoda [Mathematical modeling in the problem of dynamic stability of a pipeline]", *Automation of control processes*, **39**:1 (2015), 63–73 (In Russ.). DOI: <https://doi.org/10.1016/10.35752/1991-2927-2019-3-57-93-101>
18. P. A. Velmisov, A. V. Gladun, "Ob upravlenii dinamikoй truboprovoda [On control of pipeline dynamics]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:4 (2016), 89–97 (In Russ.).
19. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Funktsionaly Lyapunova v nekotorykh zadachakh aerogidrouprugosti [Lyapunov functionals in some problems of aerohydroelasticity]*, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2019 (In Russ.), 201 p.
20. L. Collatz, *Zadachi na sobstvennyye znacheniya [Eigenvalue problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russ.), 503 p.

Submitted 4.12.2020; Revised 7.01.2021; Accepted 10.02.2021

Information about the authors:

Petr A. Velmisov, Head of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), Professor, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

Yuliya A. Tamarova, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6408-1573>, kazakovau@mail.ru

Yuliya V. Pokladova, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9876-4038>, pokladovau@inbox.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.82–90

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 519.633.6; 536.21; 538.945

Математическое моделирование переноса тепла в системе плёнка-подложка-термостат при нагреве электропроводящей плёнки импульсным током высокой плотности

Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, Е. В. Данилова, Е. А. Лапшина

ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (г. Саранск, Российская Федерация)

Аннотация. Выполнено математическое моделирование теплопереноса в системе плёнка-подложка-термостат при импульсном протекании через электропроводящую плёнку тока высокой плотности. На основе проведенного моделирования сделан анализ нагрева плёнки нитрида ниобия с высоким удельным сопротивлением вблизи критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние. Численно решено неоднородное уравнение теплопроводности, которое моделирует теплоперенос в системе плёнка-подложка-термостат для третьей слева и первой справа начально-краевой задачи. С помощью симметрии задачи определен параметр H , равный отношению теплоотдачи поверхности плёнки к ее теплопроводности, необходимый для эффективного теплоотвода. Показано, что эффективный теплоотвод от плёнок могут обеспечить токоподводящие и потенциальные прижимные контакты, изготовленные, например, из бериллиевой бронзы. Это позволяет проводить исследование вольт-амперных характеристик сверхпроводников вблизи критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние с токами высокой плотности ($10^4 - 10^5 \text{ A/cm}^2$) без значительного нагрева образцов.

Ключевые слова: неоднородное уравнение теплопроводности, 1-я начально-краевая задача, 3-я начально-краевая задача, плёнка нитрида ниобия, импульсный нагрев током

Для цитирования: Кузьмичев Н. Д., Васютин М. А., Данилова Е. В., Лапшина Е. А. Математическое моделирование переноса тепла в системе плёнка-подложка-термостат при нагреве электропроводящей плёнки импульсным током высокой плотности // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 82–90. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.82–90>

1. Введение

Нитрид ниобия (NbN) является бинарным неорганическим соединением, представляющим собой серый/черный кристалл. Соединение NbN используется при производстве сверхпроводящих плёнок с критической температурой от 5 до 17 К с узким переходом, порядка 0,1 К. Нитрид ниобия используется для сверхпроводящих болометров в радиоастрономии и терагерцовой спектроскопии (hot-electron bolometer, НЕВ) [1]. Тонкие плёнки из NbN используются в качестве однофотонных детекторов (superconducting single-photon detectors, SSPDs) [2]. Широкие и относительно толстые плёнки используются в сверхпроводящих магнитах и накопителях энергии [3].

При проведении экспериментов по исследованию вольт-амперных характеристик (ВАХ) и других параметров образцов, связанных с пропусканием через них сильного



тока, необходимым является выполнение условия достаточного теплоотвода. Поэтому математическое моделирование процесса теплоотдачи плёнок NbN при пропускании через них тока является актуальной и практически важной задачей.

2. Постановка задачи

Поставлена и решена задача моделирования теплоотдачи плёнки NbN при низких температурах и импульсном нагреве током. В инженерном математическом программном обеспечении MathCad было решено одномерное неоднородное уравнение теплопроводности для определения распределения температуры $u(x, t)$ в системе плёнка-подложка-термостат с использованием неявной разностной схемы (см., например, [4–5]). Уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad (2.1)$$

где $a^2 = \lambda/c_p\rho = 4,3 \cdot 10^{-2} \text{ cm}^2/\text{s}$ — коэффициент температуропроводности кварцевой подложки и плёнки NbN; $c_p = 17 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ — удельная теплоёмкость подложки при 20 К [6]; $\rho = 2,2 \text{ g}/\text{cm}^3$ — плотность подложки; $\lambda = 0.16 \text{ W}/(\text{mK})$ — теплопроводность подложки при 20 К; u — температура плёнки; t — время; x — координата с началом на внешней от подложки плоскости плёнки, направленная перпендикулярно в сторону подложки (Рис. 2.1).

$$f(x, t) = P(x, t)/(c_{NbN} \cdot \rho_{NbN}),$$

$P(x, t)$ — объёмная плотность мощности источника тепла (плёнки); $c_{NbN} = 17 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$ — удельная теплоёмкость NbN плёнки при $T = 14 \text{ K}$ (сумма решёточной и электронной теплоёмкости); $\rho_{NbN} = 8.4 \text{ g}/\text{cm}^3$ — плотность плёнки. Учитывая, что сила тока линейно возрастает за время t_0 от 0 до I_{max} , величина $P(x, t)$ определяется законом Джоуля-Ленца:

$$P(x, t) = \begin{cases} \rho \cdot j_0^2 \cdot t^2, & \text{если } x \leq d, t \leq t_0; \\ 0, & \text{если } x > d, t > t_0. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь $\rho \approx 440 \text{ }\mu\Omega \cdot \text{cm}$ — удельное сопротивление плёнки в нормальном состоянии, $j_0 = I_{max}/(d \cdot b \cdot t_0)$; d — толщина и b — ширина плёнки. Начальным условием будет функция $\psi(x)$, которая определяет начальную температуру системы плёнка-подложка. Задаем краевую задачу третьего рода на левом конце в силу того, что левая граница плёнки находится в теплообмене со средой, имеющей температуру $\phi_1(t)$.

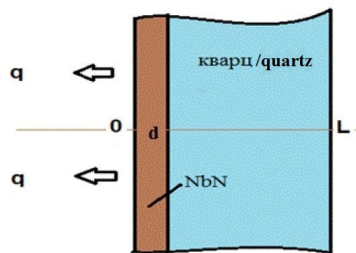


Рис. 2.1. Схематическое расположение плёнки и подложки
Fig 2.1. Schematic arrangement of membrane and substrate

На правом конце будут граничные условия первого рода, т. к. подложка находится в контакте с термостатом имеющем температуру $\phi_2(t)$. Условия на границе плёнка-подложка не определяем, т. к. коэффициенты температуропроводности плёнки и подложки имеют приблизительно одинаковые значения. В итоге начально-краевые условия для уравнения (2.1) имеют вид:

$$\begin{cases} u(x, 0) = \psi(x); \\ \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = H[u(0, t) - \phi_1(t)]; \\ u(L, t) = \phi_2(t). \end{cases} \quad (2.3)$$

В нашем конкретном случае эксперимента имеем: $\psi(x) = \phi_1(t) = \phi_2(t) = 14$ К.

3. Численное решение

Нанесем на пространственно-временную область $0 < x < L$, $0 < t < T_0$ конечно-разностную сетку $x_i = ih$, $t_j = j\tau$ с шагом по времени $\tau = T_0/M$ по x с шагом $h = L/N$. Здесь $0 \leq i \leq N$; $0 \leq j \leq M$; L – толщина системы плёнка-подложка, T_0 – временной интервал моделирования; N и M – количество шагов.

Воспользуемся неявной конечно-разностной аппроксимацией начально-краевой задачи (2.1) и (2.3), поскольку она обладает устойчивостью при любом соотношении шагов h и τ [4–5].

Аппроксимация краевой задачи (2.3) на левом конце в нашем приближении будет записана как $\frac{\partial u}{\partial x}|_{0,t} \approx \frac{u_1^{j+1} - u_0^{j+1}}{h} = H(u_0^{j+1} - \phi_1^{j+1})$ и в окончательном виде будет выглядеть следующим образом:

$$u_0^{j+1} = \frac{u_1^{j+1} + \delta \phi_1^{j+1}}{1 + \delta}, \quad (3.1)$$

где $\delta = hH$; H – отношение коэффициента теплообмена к коэффициенту теплопроводности материала нитрида ниобия. На правом конце имеем: $u_N^j = \phi_2(j\tau) = \phi_2^j$. В итоге запишем M систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с трехдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} (1 + \sigma\lambda)u_1^{j+1} - \lambda u_2^{j+1} = u_1^j + \tau f_1^j + (\sigma - 1)\lambda \phi_1^{j+1}; \\ -\lambda u_{i-1}^{j+1} + (1 + 2\lambda)u_i^{j+1} - \lambda u_{i+1}^{j+1} = u_i^j + \tau f_i^j; \\ -\lambda u_{N-1}^{j+1} + (1 + 2\lambda)u_N^{j+1} = u_{N-1}^j + \tau f_{N-1}^j + \lambda \phi_2^{j+1}. \end{cases} \quad (3.2)$$

Здесь $\lambda = a^2\tau/h^2$; $2 \leq i \leq N - 2$; $0 \leq j \leq M - 1$; $\sigma = 1 + \frac{\delta}{1 + \delta}$.

Сеточную функцию (температуру) u_i^j на первом и последующих временных слоях получим из решения СЛАУ (3.2) методом прогонки. Следует отметить, что при отсутствии теплообмена $\delta = 0$ ($\sigma = 1$) получим 2-ю краевую задачу, а при $\delta = \infty$ ($\sigma = 2$) – 1-ю краевую задачу (при бесконечно большом теплообмене температура на левом конце поддерживается постоянной).

Решение поставленной задачи было получено в среде MathCad [7]. Результаты численных расчетов температуры $u(x, t)$ для $H = 10 \text{ } \mu\text{m}^{-1}$, $L = 40 \text{ } \mu\text{m}$, $t_0 = 250 \text{ } \mu\text{s}$ и остальными вышеприведенными параметрами в разделе «2. Постановка задачи» отражены на Рис. 3.1 – 3.3.

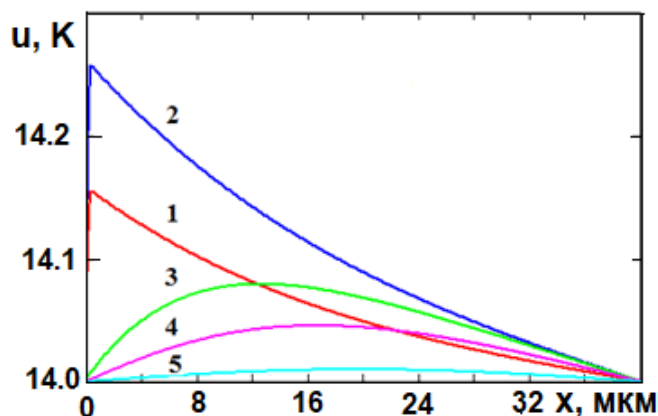


Рис. 3.1. Распределение температуры по толщине системы плёнка-подложка в разные моменты времени после начала импульса. Цифрами обозначены моменты времени: 1 – $200 \mu s$, 2 – $250 \mu s$, 3 – $275 \mu s$, 4 – $300 \mu s$, 5 – $375 \mu s$

Fig 3.1. Temperature distribution over the thickness of the membrane-substrate system at different times after the start of the pulse. The numbers indicate moments of time: 1 – $200 \mu s$, 2 – $250 \mu s$, 3 – $275 \mu s$, 4 – $300 \mu s$, 5 – $375 \mu s$

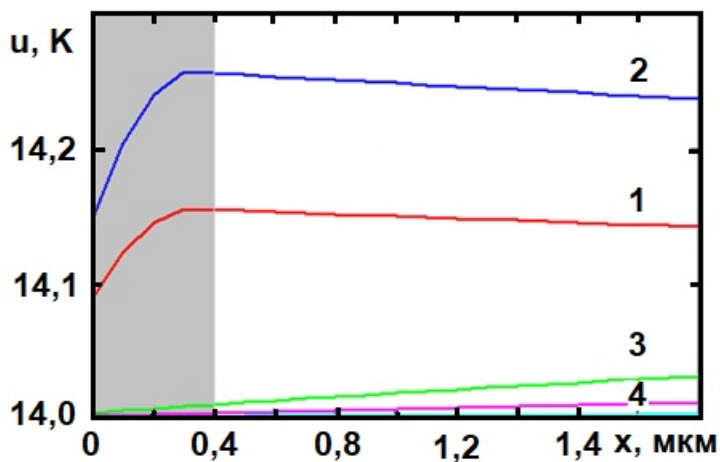


Рис. 3.2. Начальная область распределения температуры по толщине системы плёнка-подложка в разные моменты времени после начала импульса. Область плёнки выделена серым цветом. Цифрами обозначены моменты времени: 1 – $200 \mu s$, 2 – $250 \mu s$, 3 – $275 \mu s$, 4 – $300 \mu s$

Fig 3.2. Initial region of temperature distribution over the thickness of the system membrane-substrate at different times after the onset of the pulse. Region the film is highlighted in gray. The numbers indicate the moments in time: 1 – $200 \mu s$, 2 – $250 \mu s$, 3 – $275 \mu s$, 4 – $300 \mu s$

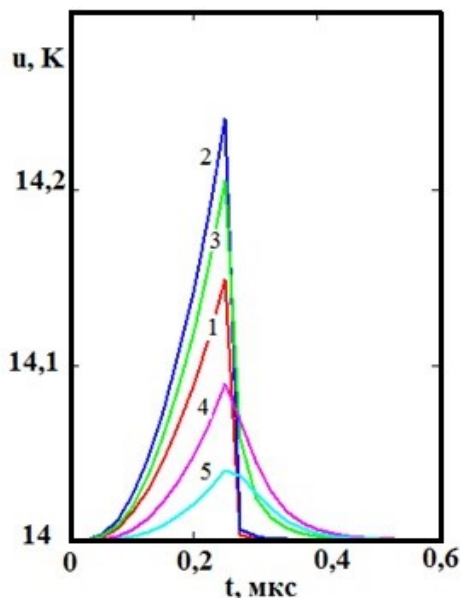


Рис. 3.3. Изменение температуры с течением времени в системе плёнка-подложка в разных точках системы. Цифрами обозначены координаты x точек: 1 – $0 \mu m$, 2 – $0,2 \mu m$, 3 – $5 \mu m$, 4 – $20 \mu m$, 5 – $30 \mu m$

Fig 3.3. Temperature change over time in the system membrane-substrate at different points of the system. The numbers indicate the coordinates x points: 1 – $0 \mu m$, 2 – $0.2 \mu m$, 3 – $5 \mu m$, 4 – $20 \mu m$, 5 – $30 \mu m$

4. Обсуждение полученных результатов

При экспериментальном исследовании ВАХ плёнки необходимо обеспечить хороший теплоотвод, чтобы её нагрев не превышал нескольких десятых градуса. Поэтому результаты численного моделирования процесса теплоотдачи плёнки, приведенные в настоящей работе актуальны, в частности, для вышеотмеченной цели.

Из полученных результатов, приведенных на Рис. 3.1 – 3.3, видно, что максимальная температура нагрева находится достигается внутри плёнки и наибольшее ее значение – в конце импульса. Внешняя ($x = 0 \text{ nm}$) и внутренняя ($x = 400 \text{ nm}$) границы плёнки имеют разные температуры. Максимальная разность температур поверхностей плёнки достигается также в конце импульса и равна в нашем случае: $\Delta u_s = u(400 \text{ nm}, 250 \mu s) - u(0, 250 \mu s) \approx 0,12 \text{ K}$. Значение максимума температуры нагрева плёнки зависит от параметра H (равного отношению теплоотдачи к теплопроводности материала) т. е. $u_{max} = 14 \text{ K} + \Delta u_{max}(H)$. Данная зависимость приведена на Рис. 4.1. Как видно из данного рисунка, Δu_{max} при малых H с возрастанием данного параметра резко падает, а при H больше $20 \mu m^{-1}$ уменьшается медленно.

В нашем случае величина H неизвестна, но её можно оценить с помощью симметрии задачи. Для этого сначала необходимо найти такое значение H , при котором максимум нагрева плёнки приходится на её середину ($x = 0,2 \mu m$). В этом случае теплоотдача верхней и нижней поверхностей плёнки будет одинаковой. Т. к. теплопроводности подложки и контактов известны, можно оценить требуемую H , учитывая, что площадь

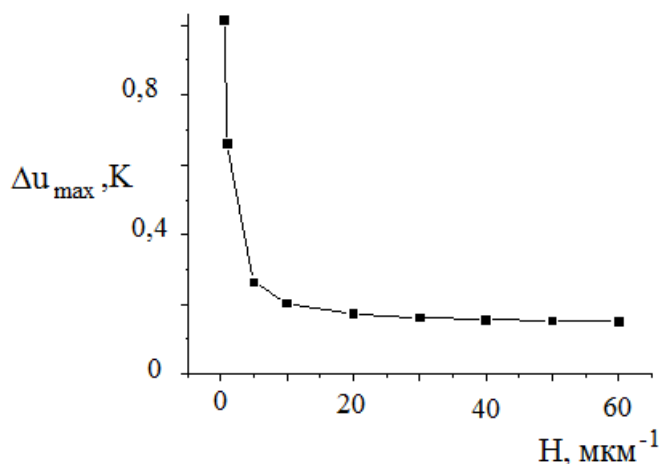


Рис. 4.1. Зависимость температуры максимального локального нагрева плёнки NbN от параметра H

Fig 4.1. Dependence of the temperature of the maximum local heating of the membrane NbN on H

контактов составляет около 20 % площади плёнки. Было получено $H = 50 \mu\text{м}^{-1}$. Такое высокое значение параметра H могут обеспечить прижимные контакты с высокой теплопроводностью. В качестве материала контактов целесообразно использовать бериллиевую бронзу (BeCu). Большая теплопроводность ($\lambda_{\text{BeCu}} = 754 \text{ W}/(\text{м} \cdot \text{K})$) и упругие свойства BeCu, в частности предел усталости, вместе с высокой коррозионной стойкостью делают этот материал чрезвычайно подходящим для изготовления прижимных контактов.

5. Заключение

В работе показано, что при хорошем теплоотводе поверхностями плёнки можно достичь нагрева плёнки всего лишь на 0,2–0,3 К. Это может быть достигнуто, например, применением прижимных контактов из бериллиевой бронзы, что позволяет проводить исследование ВАХ сверхпроводников вблизи критической температуры перехода в сверхпроводящее состояние с токами высокой плотности ($10^4 - 10^5 \text{ A}/\text{cm}^2$) без значительного нагрева образцов. Полученный результат работы показывает, что небольшой рост температуры, вызванный импульсом тока, вносит незначительные искажения в реальные ВАХ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Shurakov A., Lobanov Y., Goltsman G. Superconducting hot-electron bolometer: from the discovery of hot-electron phenomena to practical applications // Superconductor Science and Technology. 2016. Vol. 29, No. 2.

2. Carter F. W., Khaire T., Chang C., Novosad V. Low-loss single-photon NbN microwave resonators on Si // Appl. Phys. Lett. 2019. Vol. 115, No. 9.
3. Suzuki Y., Iguchi N., Adachi K., Ichiki A., Hioki T., Hsu C.-W., Sato R., Kumagai S., Sasaki M., Noh J.-H., Sakurahara Y., Okabe K., Takai O., Honma H., Watanabe H., Sakoda H., Sasagawa H., Doy H., Zhou S., Hori H., Nishikawa S., Nozaki T., Sugimoto N., Motohiro T. Complete fabrication of a traversable 3 μ m thick NbN film superconducting coil with Cu plated layer of 42 m in length in a spiral three-storied trench engraved in a Si wafer of 76.2 mm in diameter formed by MEMS technology for a compact SMES with high energy storage volume density // J. Phys.: Conf. Series. 2017. Vol. 897, No. 1. 012045.
4. Турчак Л. И., Плотников П. В. Основы численных методов. М.: Физматлит, 2005. 304 с.
5. Формалев В. Ф., Ревизников Д. Л. Численные методы. М.: Физматлит, 2006. 406 с.
6. Таблицы физических величин: справочник / под ред. И. К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
7. Охорзин В. А. Компьютерное моделирование в системе Mathcad: учеб. пособие. М.: Финансы и статистика, 2006. 144 с.

*Поступила 10.01.2021; доработана после рецензирования 15.02.2021;
принята к публикации 20.02.2021*

Информация об авторах:

Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68/1), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

Данилова Екатерина Витальевна, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68/1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0554-3795>, danilova29-94@mail.ru

Лапшина Елена Анатольевна, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевицкая, д. 68/1), кандидат педагогических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8828-273X>, e.lapshina2010@yandex.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 35K200

Mathematical modeling of heat transfer in the film-substrate-thermostat system during heating of an electrically conductive film by a high-density pulse current

N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, E. V. Danilova, E. A. Lapshina

National Research Mordovia State University (Saransk, Russian Federation)

Abstract. Mathematical modeling of heat transfer in the film-substrate-thermostat system with a pulsed flow of high-density current through an electrically conductive film has been carried out. On the basis of the simulation, the analysis of the heating of a niobium nitride film with a high resistivity near the critical temperature of the transition to the superconducting state is made. The inhomogeneous heat conduction equation which is solved numerically, simulates heat transfer in the film-substrate-thermostat system for the third on the left and the first on the right initial boundary value problem. Using the symmetry of the problem, the parameter H is determined, which is equal to the ratio of the heat transfer of the film surface to its thermal conductivity; this parameter is necessary for effective heat removal. It is shown that effective heat removal from films can be provided by current-carrying and potential clamping contacts made, for example, of beryllium bronze. This makes possible to study the current-voltage characteristics of superconductors near the critical transition temperature to the superconducting state with high-density currents ($10^4 - 10^5 \text{ A/cm}^2$) without significant heating of the samples.

Key Words: inhomogeneous heat conduction equation, 1st initial-boundary value problem, 3rd initial-boundary value problem, niobium nitride membrane, pulsed heating by current

For citation: N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, E. V. Danilova, E. A. Lapshina. Mathematical modeling of heat transfer in the film-substrate-thermostat system during heating of an electrically conductive film by a high-density pulse current. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:1(2021), 82–90. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.82-90>

REFERENCES

1. A. Shurakov, Y. Lobanov, G. Goltsman, “Superconducting hot-electron bolometer: from the discovery of hot-electron phenomena to practical applications”, *Superconductor Science and Technology*, **29**:2 (2016).
2. F.W. Carter, T. Khaire, C. Chang, V. Novosad, “Low-loss single-photon NbN microwave resonators on Si”, *Appl. Phys. Lett.*, **115**:9 (2019).
3. Y. Suzuki, N. Iguchi, K. Adachi, A. Ichiki, T. Hioki, C.-W. Hsu, R. Sato, S. Kumagai, M. Sasaki, J.-H. Noh, Y. Sakurahara, K. Okabe, O. Takai, H. Honma, H. Watanabe, H. Sakoda, H. Sasagawa, H. Doy, S. Zhou, H. Hori, S. Nishikawa, T. Nozaki, N. Sugimoto, T. Motohiro, “Complete fabrication of a traversable $3 \mu\text{m}$ thick NbN film superconducting coil with Cu plated layer of 42 m in length in a spiral three-storied trench engraved in a Si wafer of 76.2 mm in diameter formed by MEMS technology for a compact SMES with high energy storage volume density”, *J. Phys.: Conf. Series*, **897**:1 (2017).

4. L. I. Tyrchak, P. V. Plotnikov, *Osnovy chislennykh metodov [Numerical Basics]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2005 (In Russ.), 304 p.
5. V. F. Formalev, D. L. Reviznikov, *CHislennyye metody [Numerical methods]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2006 (In Russ.), 406 p.
6. ed. I. K. Kikoin, *Tablicy fizicheskikh velichin. Spravochnik [Tables of physical quantities. Directory]*, Atomizdat Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 1008 p.
7. V. A. Ohorzin, *Komp'yuternoe modelirovanie v sisteme Mathcad: ucheb. posobie [Computer modeling in the Mathcad system: textbook. allowance]*, Finansy i statistika Publ., Moscow, 2006 (In Russ.), 144 p.

Submitted 10.01.2021; Revised 15.02.2021; Accepted 20.02.2021

Information about the authors:

Nikolay D. Kuzmichev, Professor of Department of Computer Science and CAD-Technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

Mikhael A. Vasyutin, Associate Professor of Department of Computer Science and CAD-Technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph. D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

Ekaterina V. Danilova, Post-Graduate Student of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0554-3795>, danilova29-94@mail.ru

Elena A. Lapshina, Associate Professor of Department of Computer Science and CAD-Technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph. D. (Pedagogy), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8828-273X>, e.lapshina2010@yandex.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

DOI 10.15507/2079-6900.23.202101.91–109

Оригинальная статья

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

УДК 532.529:541.182

Гидродинамический механизм перемещения каталитических микро-/наномоторов

С. И. Мартынов, Л. Ю. Ткач

БОУ ВО «Сургутский государственный университет» (г. Сургут, Российская Федерация)

Аннотация. В статье обосновывается гидродинамический механизм перемещения дипольного микро-/наномотора в жидкости с ионами разного знака. Дипольный заряд и ионы в окружающей жидкости образуются в результате электрокаталитической реакции на поверхности наномотора. С этой целью проводится сравнение известных результатов моделирования динамики дипольного агрегата на основе уравнений электрогидродинамики с результатами моделирования динамики системы, в которой дипольный агрегат перемещается в облаке мелких противоположно заряженных частиц в окружающей его вязкой жидкости. Учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц в облаке между собой и с дипольным агрегатом при их различных распределениях в жидкости вокруг диполя. Суммарный заряд всех мелких частиц может быть как равен нулю, так и иметь отличное от нуля значение. Под действием поля дипольного агрегата частицы в облаке приводятся в движение, которое формирует в окружающей жидкости течение, создающее гидродинамическую силу, перемещающую агрегат. Проведенные расчеты подтвердили возможность дипольного агрегата перемещаться во всех рассмотренных случаях в результате действия гидродинамической силы, создаваемой формируемым течением окружающей жидкости. При этом скорость и направление его перемещения существенно зависит как от распределения мелких частиц в окружающей жидкости, так и от их суммарного заряда. Показано и обосновано существенное отличие имеющихся в литературе результатов моделирования от полученных на основе рассматриваемой модели, которая более точно описывает динамику такого рода микро-/наномотора.

Ключевые слова: вязкая жидкость, заряженные частицы, гидродинамическое взаимодействие, дипольный агрегат, микро-/наномотор

Для цитирования: Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Гидродинамический механизм перемещения каталитических микро-/наномоторов // Журнал Средневолжского математического общества. 2021. Т. 23, № 1. С. 91–109. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.91–109>

1. Введение

Развитие современных технологий невозможно без использования последних достижений в области управления физическими процессами в микро- и наномасштабе. Это касается, например, процессов получения новых материалов с управляемыми свойствами на основе жидких дисперсных сред; конструирования миниатюрных самодвижущихся устройств, основанного на применении в их работе принципов движения живых организмов в природе. Такие устройства необходимы при обследовании сосудов и органов человека и точечной доставке терапевтической нагрузки в больную клетку, а также при выполнении других прикладных задач. Потенциальная возможность инженерной разработки наномеханических систем с разными функциональными возможностями уже в настоящее время обеспечивается современными научными достижениями в молекулярной биологии и в нанотехнологиях. Активно изучаются биологические и синтетические наномоторы [1–2], которые планируется применять в качестве управляемых транспортных средств для доставки полезного груза (терапевтической нагрузки,



элементов самособирающихся микроустройств и т. п.) к месту назначения как в естественных, так и в лабораторных условиях.

Проводятся эксперименты по использованию самодвижущихся микрочастиц для эффективного удаления загрязнений в воде [3] и возможности использования их в медицине [4–5] для изоляции раковых клеток. Большое число самодвижущихся частиц обладают возможностью к самоорганизации [6], что позволяет управлять образованием динамических структур, состоящих из таких частиц. Конструируются различные синтетические наномоторы в виде янусподобных частиц, перемещающиеся за счет химических реакций [7–10] в жидкостях, которые являются топливом для таких двигателей. Химические реакции одновременно и подают топливо на наномотор, и удаляют продукты, которые они производят. Кроме использующих энергию химических реакций [15], конструируются наномоторы, перемещающиеся в жидкости за счет энергии внешнего поля – электрического [11], магнитного [12], ультразвукового [13–14], фотонного [16]. Обсуждаются инженерные проблемы выбора материалов и конструкции микро- и наномоторов с целью увеличения их грузоподъемности [17–18].

Механизм движение синтетических наномоторов в вязкой жидкости во многих случаях связывают с образованием градиента концентрации определенных частиц в окружающей жидкости в результате реакции на его поверхности (янусподобные частицы) или действия электрического или фотонного поля. Градиент концентрации приводит частицы в движение, которое формирует течение жидкости, создающее гидродинамическую силу, перемещающую наномотор. При этом возникают вопросы, связанные с более глубоким пониманием гидродинамических процессов, определяющих формирование такого рода течения в окружающей наномотор жидкости, и с эффективным использованием таких микротранспортных средств на практике: как управлять направлением и скоростью перемещения наномотора, какая конструкция и используемые для нее материалы позволят переносить большую полезную нагрузку. Ответ на эти вопросы может дать подробный анализ гидродинамических потоков, возникающих в окружающей наномотор вязкой жидкости из-за наличия в ней движущихся частиц.

Для этого подробно рассмотрим механизм перемещения наномотора, представляющего собой биметаллический стержень из золота и платины и находящийся в растворе перекиси водорода. В экспериментах [7–8] биметаллический стержень наноразмера из платины Pt и золота Au автономно перемещается в водных растворах пероксида водорода, катализируя образование кислорода на конце Pt . В 2 – 3% растворе перекиси водорода стержень движется преимущественно вдоль своей оси в направлении конца Pt со скоростью до 10 длин тела в секунду. В работе [10] была получена скорость таких стержней, превышающая 100 длин тела в секунду за счет увеличения ионов в окружающей жидкости. Первоначально считалось [7], что сила вдоль оси стержня создается градиентом концентрации кислорода, который и приводит к возникновению силы, приводящей в движение частицу. Однако такой механизм дает противоположное направление движения частицы, чем наблюдаемое в эксперименте. Поэтому в работе [8] был предложен другой механизм перемещения, а именно движение наностержней Pt/Au в H_2O_2 обусловлено, прежде всего, каталитически индуцированным электрокинетическим процессом. Предполагается, что стержень движется за счёт самоиндуцированных электрофоретических потоков, возникающих при каталитическом распаде H_2O_2 в точке контакта золота и платины. Распад перекиси водорода на ионы генерирует электрическое поле вокруг стержня, которое действует на сами ионы в окружающей вязкой жидкости, приводя ее в движение. Причем считается, что реализуется асимметричный поток ионов на поверхности стержня. За счет этого создается градиент концентрации

ионов одного знака, что приводит в движение жидкость и создает гидродинамическую силу, перемещающую стержень. Механизм, связанный с асимметрией потоков ионов разного знака, был предположен в работе [21] относительно перемещений определенного рода бактерий.

Модель такого механизма была рассмотрена в работах [19–20], в которых авторы попытались обосновать перемещение частицы предположением об асимметричности потоков ионов на поверхности биметаллического стержня. Раствор, окружающий стержень, рассматривается как водная среда, содержащая протоны (H^+), гидроксид-ионы (OH^-), перекись водорода (H_2O_2) и растворенный молекулярный кислород (O_2). В результате электрокинетической реакции платиновый конец стержня приобретает положительный заряд, а золотой – отрицательный. В окружающей стержень жидкости образуется заряд, который под действием силы qE (q – объемная плотность заряда в жидкости, E – вектор напряженности индуцированного электрического поля) приводит в движение жидкость вокруг стержня и создает гидродинамическую силу, перемещающую стержень в направлении от отрицательно заряженного конца стержня к концу с положительным зарядом. Наличие объемного заряда в жидкости связано с предполагаемой асимметрией в потоках ионов на поверхности стержня, что приводит к большей концентрации положительных ионов. При расчетах использовались уравнения электрогидродинамики, в которых, как известно, заряженные частицы рассматриваются как сплошная среда, взаимодействующая с жидкостью. Но принимая во внимание размер наностержня, возникает вопрос: как точно такое приближение учитывает гидродинамическое взаимодействие заряженных частиц и стержня на таких масштабах. К тому же в рассматриваемой задаче ионы H^+ по размерам и массе, примерно, в 15 и 17 раз соответственно меньше ионов OH^- [22]. Кроме того, в работе [23] показано, что даже в случае нулевого суммарного заряда агрегат из заряженных частиц разного знака перемещается в жидкости в переменном однородном электрическом поле в результате гидродинамического взаимодействия. Все это ставит под сомнение модель, предложенную в работах [19–20], и требует более детального исследования механизма перемещения биметаллического наностержня.

В настоящей работе предлагается гипотеза о гидродинамическом механизме перемещения биметаллического наностержня. Для обоснования предложенной гипотезы моделировалась динамика системы дипольная частица – облако малых заряженных частиц, распределенных случайным и определенным образом в окружающей жидкости и имеющих заряды противоположного знака. Результаты моделирования динамики такой системы и сравнение с расчетами на основе уравнений электрогидродинамики приведены ниже.

2. Выбор модели для описания динамики микро-/наномотора

Рассмотрим проводящую частицу симметричной формы, помещенную в жидкость вязкости η и движущуюся со скоростью u . Будем предполагать, что в результате каталитической реакции на поверхности проводящей частицы в жидкости образуются анионы и катионы с концентрациями n_1 и n_2 , зарядами частиц e_1 и $e_2 = -e_1 = e > 0$, скоростями v_1 и v_2 , подвижностью b_1 и b_2 , коэффициентами диффузии D_1 и D_2 соответственно. Считаем, что коэффициенты диффузии связаны с подвижностями ионов соотношениями Эйнштейна $D_i = k_B T b_i$. В результате каталитической реакции на противоположных концах проводящей частицы накапливаются заряды разных знаков. Другими словами, частицу можно рассматривать как диполь с моментом P , вокруг которой создается

электрическое поле напряженности \mathbf{E} , соответствующее полю диполя с таким моментом. Система уравнений динамики жидкости с ионами двух видов в приближении электрогидродинамики имеет вид [24]:

$$\begin{aligned}\nabla \mathbf{u} &= 0, \quad \eta \Delta \mathbf{u} - \nabla p + q \mathbf{E} = 0, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla(\mathbf{v}_i n_i) &= 0, \quad n_i \mathbf{v}_i = n_i \mathbf{u} \mp en_i b_i \mathbf{E} - D_i \nabla n_i, \\ q &= \sum_{i=1}^2 en_i, \quad i = 1, 2.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Также на поверхности частицы задаются условия для скорости несущей жидкости и для нормальных составляющих потоков ионов. В случае симметричных потоков ионов на поверхности частицы получаем равенство концентраций ионов разного знака $n_1 = n_2$, что соответствует отсутствию суммарного объемного заряда в жидкости $q = 0$. Из второго уравнения системы (2.1) следует, что в этом случае решение гидродинамической задачи не зависит от распределения зарядов в жидкости. Согласно граничным условиям, в системе координат, связанной с частицей, скорость жидкости на ее поверхности должна быть равна нулю. Поскольку далеко от частицы жидкость также находится в состоянии покоя, то равенство нулю скорости \mathbf{u} является решением гидродинамической задачи во всей области. Однако это приводит к противоречию. Поскольку градиенты концентрации ионов существенны только вблизи поверхности частицы, на больших расстояниях от частицы можно считать, что скорость ионов определяется равенствами

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u} - eb_1 \mathbf{E}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{u} + eb_2 \mathbf{E}.$$

Поскольку внешняя сила, действующая на жидкость с ионами, равна нулю, то суммарный импульс системы также должен быть равен нулю, поскольку в начальный момент среда находилась в состоянии покоя. Другими словами, должно выполняться равенство

$$m\mathbf{u} + m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = 0.$$

Здесь m – масса нейтральных молекул; m_1 – масса ионов OH^- ; m_2 – масса ионов H^+ в единице объема среды. Будем полагать, что выражения для подвижности ионов аналогичны выражениям для сферических частиц такого же размера:

$$b_1 = \frac{1}{6\pi\eta a_1}, \quad b_2 = \frac{1}{6\pi\eta a_2}.$$

Подставляя в условие выражения для скоростей \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 и учитывая, что, согласно [20], $m_1 = 17m_2$ и $a_1 = 15a_2$, получаем следующую оценку для скорости жидкости на большом расстоянии от частицы:

$$\mathbf{U} = -\frac{m_2 e \mathbf{E}}{45\pi\eta a_2(m + 18m_2)}.$$

Несмотря на то, что эта скорость небольшая, т. к. напряженность поля диполя быстро убывает с увеличением расстояния от частицы, и концентрация заряженных частиц мала по сравнению с концентрацией нейтральных, тем не менее в случае равенства

концентраций ионов H^+ и OH^- движение жидкости будет определяться движением последних. С учетом вида электрического поля диполя \mathbf{E} получается, что движение жидкости происходит в направлении, противоположном, зафиксированному в ходе эксперимента [8]. При увеличении концентрации ионов OH^- по сравнению с концентрацией H^+ возникает внешняя сила, связанная с появлением объемного отрицательного заряда q , которая увеличивает скорость движения жидкости в том же направлении. При увеличении же концентрации ионов H^+ по сравнению с OH^- меняется знак объемного заряда, а внешняя сила и, следовательно, движение несущей жидкости меняют свои направления на противоположные. Считается, что в эксперименте [8] реакция проходила с преобладанием концентрации положительных ионов, что определило направление движения стержня. Однако, как показано выше, движение возможно и при нулевой суммарной концентрации ионов H^+ и OH^- за счет их разных размеров и массы. Если к системе приложено еще и внешнее однородное электрическое поле \mathbf{E}_0 , направленное вдоль вектора дипольного момента \mathbf{P} , то скорость жидкости на большом расстоянии от частицы будет равна:

$$\mathbf{U} = -\frac{m_2 e (\mathbf{E}_0 + \mathbf{E})}{45\pi\eta a_2 (m + 18m_2)}.$$

В случае $\mathbf{E}_0 \gg \mathbf{E}$ жидкость относительно частицы будет двигаться в направлении, противоположном вектору внешнего поля, т. е., как указано в эксперименте, но это движение определяется движением отрицательно заряженных ионов при равенстве их концентрации с положительными. В системе отсчета, в которой жидкость на большом расстоянии от частицы находится в состоянии покоя, частица будет перемещаться со скоростью $-\mathbf{U}_0$. При повышении концентрации в объеме жидкости положительных ионов это приводит к тому, что направление движения жидкости меняется на противоположное. Применительно к рассматриваемому эксперименту о движении биметаллического стержня это означает, что внешнее электрическое поле должно уменьшить его скорость, но при этом оно стабилизирует направление движения стержня за счет ориентации вектора дипольного \mathbf{P} вдоль вектора \mathbf{E}_0 . Суммируя сказанное, получим, что при равенстве концентраций ионов разных знаков решение гидродинамической задачи такое же, как если бы ионов в жидкости не было. Проблема заключается в том, что они в жидкости присутствуют, но система уравнений (2.1) не дает корректного их учета при решении гидродинамической задачи. Этот вывод можно обосновать в т. ч. следующим образом. Используя соотношения для скоростей ионов

$$\frac{n_i(\mathbf{v}_i - \mathbf{u})}{b_i} + k_B T \nabla n_i = \mp e n_i \mathbf{E}, \quad i = 1, 2,$$

и объемной плотности заряда, следующие из (2.1), выражение для силы $q\mathbf{E}$ можно представить в виде

$$q\mathbf{E} = \frac{n_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u})}{b_1} + \frac{n_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u})}{b_2} + k_B T \nabla n_1 + k_B T \nabla n_2.$$

Тогда второе уравнение динамики жидкости можно записать в виде

$$6\pi\eta a_1 n_1(\mathbf{v}_1 - \mathbf{u}) + 6\pi\eta a_2 n_2(\mathbf{v}_2 - \mathbf{u}) - \nabla(p - k_B T n_1 - k_B T n_2) + \eta \Delta \mathbf{u} = 0. \quad (2.2)$$

Слагаемые в уравнении (2.2), содержащие разность скоростей ионов и жидкости, имеют смысл сил трения, действующих на жидкость-носитель со стороны ионов каждого сорта. При этом ионы рассматриваются как сплошные среды с соответствующими давлениями kTn_i . Уравнение (2.2) получено из системы (2.1), но также можно провести обратную процедуру и из уравнения (2.2) получить второе уравнение системы (2.1). Другими словами, в выбранном приближении эти уравнения равнозначны. Отличия связаны с представлением взаимодействия ионов с жидкостью. Если в системе (2.1) на жидкость действует объемная сила со стороны электрического поля, то в уравнении (2.2) поле отсутствует, а на жидкость действует сила трения со стороны самих ионов. Это отличие становится еще существеннее, если иметь в виду, что ионы, распределены дискретно и предположение о том, что они образуют сплошную среду, есть способ описания их динамики в жидкости. Если учесть сказанное и представить ионы как частицы, распределенные в жидкости, окружающей дипольную частицу, то уравнение (2.2) можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{N_1} 6\pi\eta a_1(\mathbf{v}_{1j} - \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{N_2} 6\pi\eta a_2(\mathbf{v}_{2j} - \mathbf{u}) - \nabla p + \eta\Delta\mathbf{u} = 0. \quad (2.3)$$

Здесь точечные силы, действующие на жидкость со стороны ионов, представлены в виде суммы сил трения со стороны каждой заряженной частицы. Это уже существенно отличается от интегральной записи сил трения в (2.2). Дело в том, что результирующие силы каждой суммы приложены в разных точках, т. к. расположение ионов одного знака не совпадает с расположением ионов другого знака. Направления этих сил противоположные, т. к. положительно и отрицательно заряженные частицы в электрическом поле двигаются в противоположные стороны. Поэтому даже в случае равенства каждой суммы по величине результирующая их сил не равна нулю, а дает пару сил. Очевидно, что наличие таких сил меняет решение гидродинамической задачи даже в случае равенства нулю объемного заряда частиц в жидкости. Воздействие заряженных частиц на жидкость имеет место даже в случае, когда центры приложения суммарных сил трения от частиц разного знака в (2.3) совпадают, так и в этом случае они получены от различных распределений точечных сил по объему жидкости. Примером такого распределения может служить система четырех равных по величине сил, две из которых направлены в одну сторону, а две другие направлены в противоположную и симметрично расположены между двумя первыми. Такая система дает две пары сил с противоположно направленными моментами, создающими течение жидкости. Таким образом, различное распределение даже равных по величине и противоположно направленных точечных сил формирует различную гидродинамику окружающей жидкости. Предположение, что ионы каждого знака представляют собой сплошную среду, приводит к тому, что в уравнении (2.2) результирующая суммы двух сил трения со стороны ионов разного знака при их одинаковой концентрации равна нулю, т. к. в этом случае они приложены в одной точке, равны по величине и противоположны по направлению. Отличие в их распределении в объеме жидкости не учитывается. Метод точечных сил, который фактически используется в уравнении (2.3) для учета влияния заряженных частиц на гидродинамику жидкости вокруг дипольной частицы, впервые был предложен в работе [25]. Этот прием позволил свести исходную задачу о течении вязкой жидкости через периодическую решетку сферических частиц с соответствующими граничными условиями на их поверхности к задаче о течении вязкой жидкости, на которую действуют точечные силы, приложенные к центрам частиц. Полученная задача относительно

проще, однако ее решение требует дополнительных предположений для определения значения точечных сил. Поэтому для корректного учета гидродинамического воздействия движения заряженных частиц на перемещение дипольной частицы необходимо решать исходную задачу о течении вязкой жидкости с частицами для определения их динамики. Ниже рассматривается постановка задачи, метод ее решения и результаты расчетов динамики дипольной частицы в облаке мелких заряженных частиц в окружающей диполь жидкости.

3. Постановка задачи

Рассмотрим дипольный агрегат, состоящий из двух частиц A и B одинакового радиуса a , расположенных на расстоянии $3a$ друг от друга и соединенных между собой тонким жестким стержнем, который не дает гидродинамическое сопротивление, но сохраняет расстояние между ними. Все частицы имеют электрические заряды, которые равны по величине q и противоположны по знаку. В окружающей агрегат жидкости случайным образом распределены 80 частиц меньшего радиуса $0,2a$ величина заряда (q) которых равна 40. Рассматриваются случаи, когда половина из них имеет заряд, одинаковый по знаку с зарядом частицы A , а половина - заряд одинаковый по знаку с зарядом частицы B с равномерным и неравномерным распределением заряда мелких частиц вокруг диполя. Таким образом моделируется биметаллический стержень и результат электрохимической реакции, при которой в жидкости вокруг него образуются электрически нейтральная или имеющая заряд система заряженных частиц. Распределение частиц в жидкости происходило следующим образом: выделялся некоторый ограниченный объем вокруг каждой частицы в агрегате, а каждая мелкая частица случайным образом помещалась в этот объем. Считалось, что частица с равной вероятностью может оказаться в любой точке выделенного объема, если эта точка еще не занята другой частицей. В системе координат, центр которой помещен в середину отрезка, соединяющего частицы A и B , а ось OY направлена вдоль этого отрезка по направлению от A к B , выделенные объемы представляли собой два прямоугольных параллелепипеда, координаты точек которых лежат в интервалах $-2.5a \leq x \leq 2.5a$, $-5a \leq y \leq 0$, $-2.5a \leq z \leq 2.5a$ для первого и в интервалах $-2.5a \leq x \leq 2.5a$, $0 \leq y \leq 5a$, $-2.5a \leq z \leq 2.5a$ для второго. При этом сначала в первом объеме распределялись частицы, имеющие противоположный знак с частицей A , а потом частицы с зарядом другого знака. Во втором объеме аналогично: сначала распределялись мелкие частицы имеющие противоположный знак с частицей B , а потом другие частицы. Такой порядок распределения соответствует механизму реакции на поверхности наномотора с образованием ионов, имеющих противоположный знак, чем заряд на поверхности стержня. Поскольку электрический заряд мелких частиц мал по сравнению с зарядом частиц A и B , кроме того, они расположены случайным образом, то кулоновское взаимодействие между ними не учитывается, а считается, что они находятся в электрическом поле, создаваемом только зарядами диполя из частиц A и B . Гидродинамическое взаимодействие учитывается между всеми частицами. Движение наностержня происходит в результате реакции на его поверхности и образованием ионов в той области окружающей его жидкости, где их раньше не было. Поэтому данный процесс не является стационарным. Это означает, что в рассматриваемой модели число мелких частиц в выделенном объеме окружающей его жидкости должно изменяться за счет появления новых и прореагировавших старых. Будем рассчитывать динамику агрегата за промежуток времени гораздо меньший, чем характерное время реакции, что позволяет

считать число заряженных частиц в объеме жидкости постоянным. Система уравнений динамики жидкости и частиц записывается в следующем виде [23]:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad -\nabla p + \eta \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{F}_k^{(i)} + \mathbf{F}_k^{(e)} + \mathbf{F}_k^{(h)} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{T}_k^{(i)} + \mathbf{T}_k^{(e)} + \mathbf{T}_k^{(h)} = \mathbf{0}. \quad (3.2)$$

Здесь $\mathbf{F}_k^{(h)}$ – силы; $\mathbf{T}_k^{(h)}$ – моменты сил со стороны жидкости; $\mathbf{F}_k^{(e)}$, $\mathbf{T}_k^{(e)}$ – внешние и $\mathbf{F}_k^{(i)}$, $\mathbf{T}_k^{(i)}$ – внутренние силы и моменты сил, действующие на частицу с номером k . При этом внутренние силы равны

$$\mathbf{F}_j^{(i)} = \pm k \frac{q^2 \mathbf{r}_{Aj}}{40r_{Aj}^3} \mp k \frac{q^2 \mathbf{r}_{Bj}}{40r_{Bj}^3}.$$

Здесь k – коэффициент пропорциональности в законе Кулона; \mathbf{r}_{Aj} и \mathbf{r}_{Bj} – радиус-векторы, соединяющие частицу A или B в агрегате с частицей в облаке с номером j . Знак $+$ или $-$ выбирается в зависимости знаков зарядов соответствующих частиц. Как отмечалось выше, кулоновским взаимодействием между мелкими частицами в облаке пренебрегается по сравнению с силами, действующими со стороны частиц в агрегате. На поверхности частиц задаются граничные условия для скорости жидкости \mathbf{u} :

$$\begin{aligned} u_i &= V_i^A + \Omega_{ij}^A x_j^A, & |\mathbf{X}^A| &= a, \\ u_i &= V_i^B + \Omega_{ij}^B x_j^B, & |\mathbf{X}^B| &= a, \quad u_i = V_i^k + \Omega_{ij}^k x_j^k, & |\mathbf{X}^k| &= 0.2a, \quad k = 1, \dots, 80. \end{aligned}$$

Здесь введены следующие обозначения: \mathbf{V}^k – вектор абсолютной линейной скорости; Ω_{ij}^k – тензор угловой скорости; \mathbf{X}^k – вектор положения точки жидкости относительно центра частицы с номером k и радиусом a^k .

На большом расстоянии от частиц должны выполняться условия:

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0, \quad \text{если } |\mathbf{X}| \rightarrow \infty.$$

Здесь p_0 – невозмущенное давление в жидкости.

В результате действия электрических сил происходит деформация облака за счет перемещения в электрическом поле диполя заряженных частиц разного знака в противоположных направлениях. Поскольку система заряженных частиц находится в вязкой жидкости, то предполагается, что в результате такой деформации облака в окружающей диполь жидкости формируется течение, создающее гидродинамическую силу, действующую на агрегат и перемещающую его. Ниже приводятся результаты расчетов, доказывающие это предположение для всех рассматриваемых выше случаев (нейтрально заряженной системы частиц и имеющей заряд определенного знака), а также позволяющие определить направление и скорость перемещения диполя в зависимости в т. ч. от распределения заряженных частиц в облаке.

4. Метод решения и результаты расчетов динамики дипольного агрегата частиц

Для решения системы уравнений гидродинамики и определения сил \mathbf{F}_k^h и моментов \mathbf{T}_k^h использовался метод, предложенный в работе [26]. Метод основан на представлении

решения уравнений гидродинамики в виде мультипольного разложения с тензорными коэффициентами и позволяет учитывать гидродинамическое взаимодействие большого числа частиц в вязкой жидкости. В рассматриваемом случае распределение давления и скорости в жидкости имеет вид

$$p = \sum_{k=1}^{82} (H_i^k L_i(\mathbf{X}^k) + H_{ij}^k L_{ij}(\mathbf{X}^k) + H_{ijl}^k L_{ijl}(\mathbf{X}^k) + H_{ijlq}^k L_{ijlq}(\mathbf{X}^k) + \dots),$$

$$\eta u_i = \sum_{k=1}^{82} \left(-\frac{2}{3} H_i^k L_0(\mathbf{X}^k) - \frac{1}{6} H_j^k L_{ij}(\mathbf{X}^k) \cdot (X^k)^2 - \frac{3}{5} H_{ij}^k L_j(\mathbf{X}^k) - \frac{1}{10} H_{jil}^k L_{ijl}(\mathbf{X}^k) \cdot (X^k)^2 + \dots \right).$$

Здесь $L_{ijl\dots s}(\mathbf{X}^k)$ – мультиполь, вычисляемый следующим образом:

$$L_{ijl\dots s}(\mathbf{X}^k) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_l} \dots \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{1}{X^k} \right).$$

С учетом вида решения уравнений гидродинамики (3.1) содержит 492 алгебраических уравнения для определения линейной и угловой скорости частиц. Для численного решения системы уравнений использовалась специальная программа [27].

Для получения корректных результатов расчета были учтены члены разложения с тензорными коэффициентами шестого порядка, что привело к ошибке расчета порядка 10^{-3} . Это означает, что учет остальных членов может вносить вклад в результирующее значение только в третьем десятичном разряде. Такая ошибка была получена при компьютерном моделировании, когда вместо реальных параметров задачи использовались параметры модели, в частности характерный масштаб составлял 1 см. Другими словами относительно размера модели погрешность расчета составила около 0,1 %. Использование модельных параметров связано с тем, что для реальных систем размеры частиц должны быть достаточно малыми, например, 10^{-4} – 10^{-5} см. Использование такой шкалы затрудняет нахождение численного решения системы уравнений и визуализацию результатов, т. к. в этом случае ошибка в 0,1 % требует вычислений с точностью до 10^{-6} – 10^{-7} . Поэтому при моделировании использовался метод подобия, когда вместо реальных параметров задаются их модельные значения, но так, чтобы характеристики реального и модельного потоков совпадали. При компьютерном моделировании задаются размер частиц $\hat{a} = 1$ см, вязкость несущей жидкости $\hat{\eta} = 10$ г/(см·с) и такие модельные значения электрических зарядов \hat{q} в кулоновской силе взаимодействия, что $k\hat{q}^2/(40\hat{a}^2) = 5 \cdot 10^{-6}$ Н. Детали такого представления при моделировании и взаимосвязи между реальными и модельными параметрами представлены в [19–20].

Рассматривался случай отсутствия внешних сил \mathbf{F}_k^e и моментов $\mathbf{T}_k^e = 0$, действующих на заряженные частицы и жидкость. Расчеты проводились на модельных структурах четырех видов. Во всех случаях размеры частиц были одинаковыми: радиусы частиц A и B равны $\hat{a} = 1$ см, а размеры мелких частиц равны $0,2\hat{b}$ см. Первая структура соответствовала нейтрально заряженной системе с одинаковой концентрацией положительных и отрицательных зарядов в окружающей диполь жидкости. Процедура получения такой структуры описана выше в разделе 2. Вторая структура получалась из первой заменой знака заряда у половины частиц: все мелкие частицы, распределенные в соответствующих областях вокруг частиц A и B , имели противоположный с этими частицами заряд. Третья структура получалась из первой уменьшением до 15 числа противоположно заряженных с частицей A мелких частиц в объеме, выделенном в жидкости вокруг первой частицы агрегата. Четвертая структура получалась из первой

уменьшением до 15 числа одинаково заряженных с частицей B мелких частиц в соответствующем объеме жидкости вокруг второй частицы дипольного агрегата. Другими словами, последние две структуры имели одинаковый объемный заряд.

Результаты расчетов динамики агрегатов за модельный промежуток времени $\hat{t} = 0,05$ с приведены в табл. 4.1. Средние значения линейной U и угловой скорости Ω всей системы определялись по стандартным формулам статистики, зная значения скоростей всех частиц. Как видно из приведенных в таблице значений, во всех случаях агрегаты перемещаются в жидкости. Поскольку в первых двух структурах сумма зарядов мелких частиц равна нулю, то суммарная сила, действующая на них со стороны электрического диполя, также равна нулю. Поэтому можно полагать, что перемещение агрегатов обусловлено действием гидродинамических сил со стороны окружающей их вязкой жидкости. Поскольку знак зарядов частиц A и B не указывался, а считалось, что они противоположны, – соответственно, и у мелких частиц так же, – то полученный результат означает, что направление перемещения определяется только распределением мелких частиц в окружающей жидкости. Распределение скоростей заряженных частиц для первой структуры представлена на Рис. 4.1, для второй – на Рис. 4.2. С уменьшением числа частиц, имеющих заряд одинакового знака с частицей B (агрегаты третьего и четвертого вида), происходит увеличение продольной составляющей скорости дипольного агрегата. Причем наибольшая скорость наблюдается в случае четвертой структуры, когда число противоположно заряженных частице B мелких частиц превышает число одинаково заряженных в области вокруг нее. Распределение скоростей заряженных частиц таких структур представлены на Рис. 4.3 и Рис. 4.4, соответственно.

Таблица 4.1. Результаты численного моделирования динамики агрегатов.

Table 4.1. Results of numerical modeling of aggregate dynamics.

Скорость \ Velocity	Агрегат 1 \ Aggregate 1	Агрегат 2 \ Aggregate 2	Агрегат 3 \ Aggregate 3	Агрегат 4 \ Aggregate 4
\hat{u}_{Ax} [10^{-3} см/сек \ cm/sec]	6.30	–4.6	8.9	6.8
\hat{u}_{Ay} [10^{-3} см/сек \ cm/sec]	9.68	6.11	7.5	11.2
\hat{u}_{Az} [10^{-3} см/сек \ cm/sec]	6.87	8.3	6.8	7.03
\hat{u}_{Bx} [10^{-3} см/сек \ cm/sec]	2.31	2.3	9.8	–1.13
\hat{u}_{By} [10^{-3} см/сек \ cm/sec]	9.67	6.11	7.5	11.02
\hat{u}_{Bz} [10^{-3} см/сек \ cm/sec]	1.996	–12.6	1.5	0.711
\hat{U}_x [10^{-3} см/сек \ cm/sec]	–0.57	0.45	–1.7	0
\hat{U}_y [10^{-3} см/сек \ cm/sec]	–1.31	1.26	–1.55	–2.1
\hat{U}_z [10^{-3} см/сек \ cm/sec]	–5.03	2.09	–4.9	–4.2
$\hat{\Omega}_x$ [10^{-3} сек $^{-1}$ \ sec $^{-1}$]	–0.59	0.41	–6.3	–0.49
$\hat{\Omega}_y$ [10^{-3} сек $^{-1}$ \ sec $^{-1}$]	0.19	0.0	0.31	0.0
$\hat{\Omega}_z$ [10^{-3} сек $^{-1}$ \ sec $^{-1}$]	–0.34	0.2	–0.37	–0.36

Результаты, полученные для модельных структур третьего и четвертого вида, качественно отличаются от того, что следует из уравнений электрогидродинамики (2.1). А именно, из уравнений (2.1) следует, что в случае наличия объемного заряда перемещение диполя должно происходить в другом направлении, чем получено для указанных

модельных структур. Согласие результатов по направлению перемещения диполя, полученное из уравнений (2.1) и рассматриваемой модели, имеют место только в случае, когда все мелкие частицы имеют заряд одного знака. Такое различие можно объяснить тем, что уравнения (2.1) фактически учитывают воздействие на жидкость только частиц, дающих объемный заряд, т. е. только малой части из всех, имеющих заряд, т. к. частицы, чей суммарный заряд равен нулю, вообще не учитываются при расчете течения жидкости. В случае нейтральной системы заряженных частиц воздействие на жидкость со стороны заряженных частиц в уравнениях (3.1) отсутствует, в то время как из расчетов динамики первой модельной структуры следует, что такое воздействие существует и приводит к перемещению дипольного агрегата.

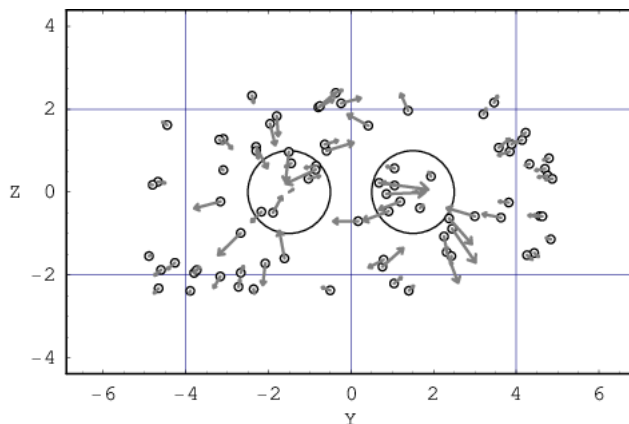


Рис. 4.1. Скорости частиц для первого агрегата.

Fig 4.1. Particle velocities for the first aggregate.

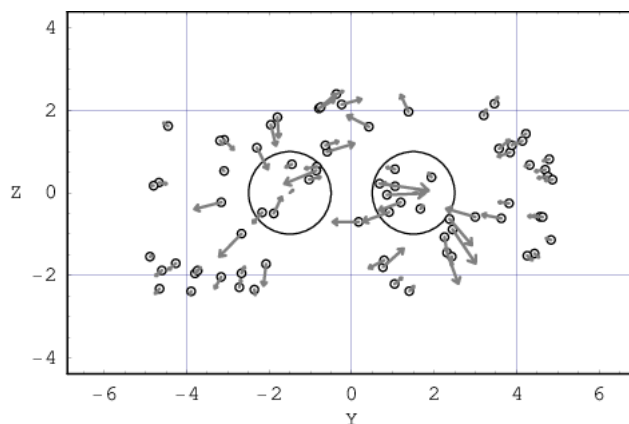


Рис. 4.2. Скорости частиц для второго агрегата.

Fig 4.2. Particle velocities for the second aggregate.

Значения реальных параметров можно определить согласно формулам пересчета, приведенным в [27]. Так, реальное значение скорости агрегата v определяются из условия подобия модельного и реального течения при равенстве плотностей жидкости:

$$v = \frac{\hat{a}\eta}{a\hat{\eta}}\hat{v}.$$

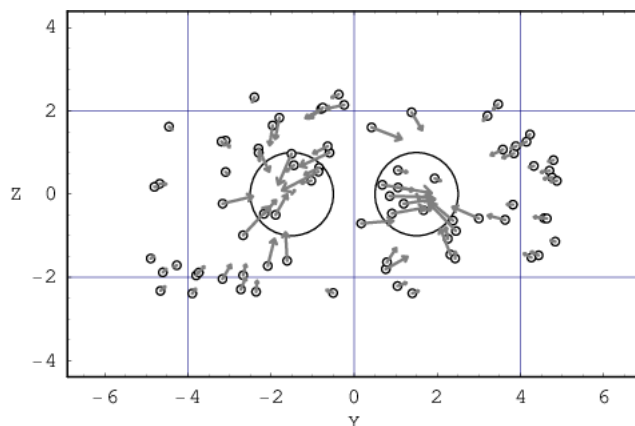


Рис. 4.3. Скорости частиц для третьего агрегата.

Fig 4.3. Particle velocities for the third aggregate.

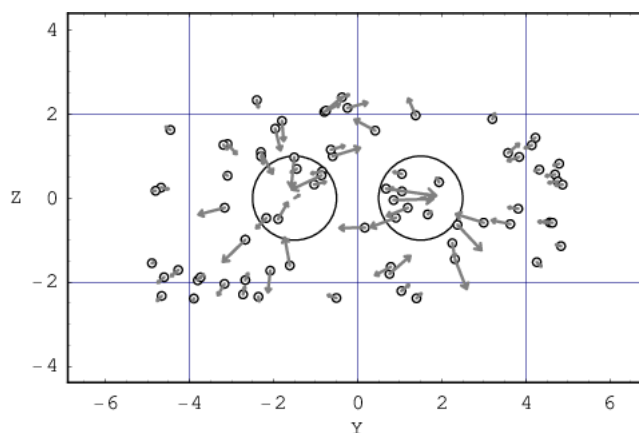


Рис. 4.4. Скорости частиц для четвертого агрегата.

Fig 4.4. Particle velocities for the fourth aggregate.

Так, для агрегата из частиц размером $a = 10^{-4}$ см и реальной вязкости жидкости $\eta = 10^{-2}$ г/(см·с) получаем $v = 10u$. Как было установлено в эксперименте [10], скорость таких стержней зависит от количества ионов в жидкости и может превышать величину, равную 100 длин тела в секунду, т. е. быть выше, чем скорость $v = 2 \cdot 10^{-2}$ см/с. Как видно из таблицы, реальная скорость рассмотренных агрегатов соответствует этим значениям. Направление движения агрегатов также совпадает с тем, что наблюдалось в эксперименте для случая, когда частица B имеет отрицательный заряд, а мелкие частицы – положительный. Для реального заряда q запишем следующее выражение через модельные параметры, полученное из условия подобия реального и модельного течений [27]:

$$k \frac{q^2}{a^2} \eta^2 = k \frac{\hat{q}^2}{\hat{a}^2} \eta^2$$

С учетом выбранного значения величины модельного q заряда величина реального равна $q = 2.3 \cdot 10^{-17}$ Кл, что соответствует $1.47 \cdot 10^2$ величин элементарного электрического заряда. Потенциал такого заряда на расстоянии 10^{-5} см равен $20.7 \cdot 10^{-3}$ В, что согласуется со значениями потенциала, используемого в работах [19–20] для расчета электрофоретической силы, действующей на диполь. Таким образом, приведенные выше расчеты динамики системы на основе модели диполя в облаке мелких заряженных частиц дают обоснование перемещения диполя за счет гидродинамической силы, действующей со стороны окружающей его вязкой жидкости. Эта сила образуется сформированным течением жидкости за счет движения в ней мелких заряженных частиц в поле диполя. Можно предположить, что из-за неравномерной плотности распределения частиц в жидкости их движение в противоположные стороны под действием электрического поля диполя формирует в жидкости вокруг агрегата характерное вихревое течение, которое рассматривалось в работе [28]. Формирование в окружающей вязкой жидкости такого вихревого течения и создает гидродинамическую силу, перемещающую агрегат. Наличие такого течения подтверждает также тот факт, что при изменении знака зарядов частиц A и B и сохранении знака зарядов мелких частиц в облаке скорость перемещения агрегата меняется на противоположную, т. е. вихревое течение также меняет свое направление. Наличие такого течения и дает отличие результатов по динамике заряженных частиц по сравнению с приближением электрогидродинамики.

Из-за случайного расположения мелких частиц относительно оси агрегата возникает поперечная составляющая скорости, поэтому возникает вопрос об управлении такого перемещения в заданном направлении. Как было указано выше, внешнее однородное электрическое поле стабилизирует движение агрегата, но уменьшает его скорость, поэтому более подходящим для управления таким движением является внешнее магнитное поле. В этом случае дипольный агрегат должен обладать магнитным моментом, например, за счет наличия внутри частицы ядра из намагничивающегося материала.

5. Заключение

Предложен гидродинамический механизм перемещения микро-/наномотора с каталитической реакцией на его поверхности, индуцирующей дипольный заряд в нем. Для этого проведено численный моделирование динамики дипольного агрегата из двух сфер облаке противоположно заряженных мелких частиц, имитирующих наличие ионов разных знаков в жидкости в результате реакции. При расчетах учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц между собой и кулоновское взаимодействие мелких частиц с диполем. Рассмотрены случаи с нейтральным зарядом системы диполь-мелкие частицы и случаи наличия объемного заряда у системы. Рассматривались нейтрально заряженные системы двух типов: с равномерным и неравномерным распределением зарядов разного знака вокруг диполя. Наличие объемного заряда в окружающей диполь жидкости моделировалось путем уменьшения числа заряженных частиц определенного знака в электрически нейтральной системе с равномерным распределением зарядов. Во всех рассмотренных случаях происходит перемещение дипольного агрегата. Механизм этого перемещения основан на действии на агрегат гидродинамической силы со стороны сформированного в окружающей жидкости течения. Формирование течения

происходит за счет движения мелких заряженных частиц в электрическом поле дипольного агрегата. Расчетная продольная скорость перемещения дипольного агрегата согласуется со скоростью, полученной в эксперименте. Поскольку из-за случайного распределения мелких частиц в окружающей дипольный агрегат жидкости его скорость имеет поперечную составляющую, то для управления его движением требуется внешнее воздействие. Показано, что внешнее электрическое поле стабилизирует направление перемещения, но уменьшает его скорость, поэтому управляющего воздействия предлагается использовать внешнее магнитное поле. Для этого требуется, чтобы диполь обладал еще и магнитной структурой, например, в виде внутреннего ядра из намагничивающегося материала. Сравнение полученных результатов по динамике такого диполя с имеющимися, основанными на решении уравнений электрогидродинамики, дает существенные отличия, связанные с тем, что электрогидродинамическая модель некорректно учитывает гидродинамику заряженных частиц в окружающей диполь жидкости. Предложенный механизм перемещения может использоваться для моделирования динамики каталитических синтетических наномоторов.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-41-860002/18).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Montemagno C., Bachand G., Stelick S., Bachand M. Constructing biological motor powered nanomechanical devices // *Nanotechnology*. 1999. Vol. 10, No. 3. pp. 225–231.
2. Gao W., Wang J. Synthetic micro/nanomotors in drug delivery // *Nanoscale*. 2014. No. 6. pp. 10486–10494. DOI: <https://doi.org/10.1039/x0xx00000x>
3. Li X., Sun Y.-M., Zhang Z.-Y., Feng N.-X., Song H., Liu Y.-L., Hai L., Cao J.-M., Wang G. P. Visible light-driven multi-motion modes CNC/TiO₂ nanomotors for highly efficient degradation of emerging contaminants // *Carbon*. 2019. Vol. 155. pp. 195–203. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2019.08.039>
4. Gao W., de Avila B. E.-F., Zhang L., Wang J. Targeting and isolation of cancer cells using micro/nanomotors // *Adv. Drug Deliv. Rev.* 2018. Vol. 125. pp. 94–101. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.addr.2017.09.002>
5. Medina-Sanchez M., Haifeng Xu H., Schmidt O. G. Micro- and nano-motors: the new generation of drug carriers // *Therapeutic Delivery*. 2018. Vol. 9, No. 4. pp. 303–316. DOI: <https://doi.org/10.4155/tde-2017-0113>
6. Lin Z., Gao C., Chen M., Lin X., He Q. Collective motion and dynamic self-assembly of colloid motors // *Current Opinion in Colloid & Interface Science*. 2018. Vol. 35. pp. 51–58. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.01.006>
7. Paxton W. F., Sen A, Mallouk T. E. Motility of catalytic nanoparticles through self-generated forces // *Chemistry*. 2005. Vol. 11, Issue 22. pp. 6462–6470. DOI: <https://doi.org/10.1002/chem.200500167>

8. Paxton W. F., Baker P. T., Kline T. R., Wang Y., Mallouk T. E., Sen A. Catalytically induced electrokinetics for motors and micropumps // J. Am. Chem. Soc. 2006. Vol. 128, No. 46. pp. 14881–14888. DOI: <https://doi.org/10.1021/ja0643164>
9. Wang Y., Hernandez R. M., Bartlett D. J., Bingham J. M., Kline T. R., Sen A., Mallouk T. E. Bipolar electrochemical mechanism for the propulsion of catalytic nanomotors in hydrogen peroxide solutions // Langmuir. 2006. Vol. 22, No. 25. pp. 10451–10456. DOI: <https://doi.org/10.1021/la0615950>
10. Laocharoensuk R., Burdick J., Wang J. Carbon-nanotube-induced acceleration of catalytic nanomotors // ACS Nano. 2008. Vol. 2, No. 5. pp. 1069–1075. DOI: <https://doi.org/10.1021/nn800154g>
11. Vissers T., van Blaaderen A., Imhof A. Band formation in mixtures of oppositely charged colloids driven by an ac electric field // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106, Issue 22. 228303. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.228303>
12. Dreyfus R., Baudry J., Roper M. L., Fermigier M., Stone H. A., Bibette J. Microscopic artificial swimmers // Nature. 2005. Vol. 437. pp. 862–865. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature04090>
13. Ahmed S., Wang W., Mair L. O., Fraleigh R. D., Li S., Castro L. A., Hoyos M., Huang T. J., Mallouk T. E. Steering acoustically propelled nanowire motors toward cells in a biologically compatible environment using magnetic fields // Langmuir. 2013. Vol. 29. Issue 52. pp. 16113–16118. DOI: <https://doi.org/10.1021/la403946j>
14. Tailin Xu T., Xu L-P., Zhang X. Ultrasound propulsion of micro-nanomotors // Applied Materials Today. 2017. Vol. 9. pp. 493–503. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2017.07.011>
15. Robertson B., Kapral R. Nanomotor dynamics in a chemically oscillating medium // J. Chem. Phys. 2015. Vol. 142, Issue 15. 154902. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4918329>
16. Rozenbaum V. M., Dekhtyar M. L., Lin S. H., Trakhtenberg L. I. Photoinduced diffusion molecular transport // J. Chem. Phys. 2016. Vol. 145, Issue 6. 064110. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4960622>
17. Santiago I. Nanoscale active matter matters: challenges and opportunities for self-propelled nanomotors // Nano Today. 2018. Vol. 19. pp. 11–15. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nantod.2018.01.001>
18. Xing Y., Zhou M., Du X., Li X., Jianqiang Li J., Xu T., Zhang X. Hollow mesoporous carbon@Pt Janus nanomotors with dual response of H_2O_2 and near-infrared light for active cargo delivery // Applied Materials Today. 2019. Vol. 17. pp. 85–91. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2019.07.017>
19. Moran J. L., Wheat P. M., Posner J. D. Locomotion of electrocatalytic nanomotors due to reaction induced charge autoelectrophoresis // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 81, Issue 6. 065302. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.065302>

20. Moran J. L., Posner J. D. Electrokinetic locomotion due to reaction-induced charge auto-electrophoresis // J. Fluid Mech. 2011. Vol. 680. pp. 31–66. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.132>
21. Mitchell P. Hypothetical thermokinetic and electrokinetic mechanisms of locomotion in microorganisms // Proc. R. Phys. Soc. Edin. 1956. Vol. 25. pp. 32–34.
22. Баданов С. С. Экспериментальные основы структурной химии (справочное пособие). М.: Издательство стандартов, 1986. 240 с.
23. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. О механизме перемещения агрегатов частиц в вязкой жидкости в переменном однородном внешнем поле // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2019. Т. 59, № 3. С. 505–515. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919030128>
24. Жакин А. И. Электродинамика // Успехи физ. наук. 2012. Т. 182, № 5. С. 495–520. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0182.201205b.0495>
25. Hasimoto H. On the periodic fundamental solutions of the Stokes' equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres // J. Fluid Mech. 1959. Vol. 5, Issue 2. pp. 317–328. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112059000222>
26. Мартынов С. И. Гидродинамическое взаимодействие частиц // Известия РАН. Механика жидкости и газа. 1998. № 2. С. 112–119.
27. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Моделирование динамики агрегатов частиц в вязкой жидкости // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2015. Т. 55, № 2. С. 109–118. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466915020143>
28. Мартынов С. И., Ткач Л. Ю. Об одной модели динамики самодвижущихся агрегатов частиц в вязкой жидкости // Нелинейная динамика. 2016. Т. 12, № 4. С. 605–618. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd1604005>

*Поступила 3.12.2020; доработана после рецензирования 15.02.2021;
принята к публикации 27.02.2021*

Информация об авторах:

Мартынов Сергей Иванович, главный научный сотрудник, БУ ВО «Сургутский государственный университет» (628412, Россия, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

Ткач Леонилла Юрьевна, научный сотрудник, БУ ВО «Сургутский государственный университет» (628412, Россия, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, leonilla7777@mail.ru

Все авторы прочитали и одобрили окончательный вариант рукописи.

Конфликт интересов: авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

Hydrodynamic mechanism of movement of catalytic micro-/nanomotors

S.I. Martynov, L.Yu. Tkach

Surgut State University (Surgut, Russian Federation)

Abstract. A hydrodynamic mechanism of movement of a micro/nanomotor with a dipole charge induced by an electro-catalytic reaction on its surface and the formation of charges in the surrounding liquid is proposed. For this, the dynamics of a dipole aggregate in a cloud of small oppositely charged particles in a viscous fluid surrounding it is simulated. Under the action of the field of the aggregate, the particles in the cloud are set in motion, which forms a flow in the surrounding fluid. In turn, the flow creates a hydrodynamic force that moves the aggregate. The hydrodynamic interaction of all particles in the cloud with each other and with the dipole aggregate is taken into account at their different distributions in the liquid around the dipole. The total charge of all small particles can be either equal to zero or have a non-zero value. The calculations carried out confirmed the possibility of the dipole unit to move in all the cases considered as a result of action of the hydrodynamic force created by the formed flow of the surrounding fluid. In this case, the speed and direction of dipole movement significantly depends both on the distribution of small particles in the surrounding liquid and on their total charge. As the result of asymmetry in the distribution of small charged particles in the surrounding fluid, dipole unit will move not only in longitudinal but also in transverse direction. This leads to the need to use some mechanism of controlling its movement. As such a mechanism the action of an external field can be used, orienting the dipole unit in a given direction of motion. It is proposed to use an external magnetic field for such control. In this case, the dipole aggregate must have a magnetic moment due to the presence of a magnetizable nucleus inside the particles.

Key Words: viscous fluid, charged particles, hydrodynamic interaction, dipole aggregate, micro-/nanomotor

For citation: S.I. Martynov, L.Yu. Tkach. Hydrodynamic mechanism of movement of catalytic micro-/nanomotors. *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*. 23:1(2021), 91–109. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.23.202101.91-109>

REFERENCES

1. C. Montemagno, G. Bachand, S. Stelick, M. Bachand, “Constructing biological motor powered nanomechanical devices”, *Nanotechnology*, **10** (1999), 225–231.
2. W. Gao, J. Wang, “Synthetic micro/nanomotors in drug delivery”, *Nanoscale*, 2014, no. 6, 10486–10494. DOI: <https://doi.org/10.1039/x0xx00000x>
3. X. Li, Y.-M. Sun, Z.-Y. Zhang, N.-X. Feng, H. Song, Y.-L. Liu, L. Hai, J.-M. Cao, G.P. Wang, “Visible light-driven multimotion modes CNC/TiO₂ nanomotors for highly efficient degradation of emerging contaminants”, *Carbon*, **155** (2019), 195–203. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.carbon.2019.08.039>
4. W. Gao, B. E.-F. de Avila, L. Zhang, J. Wang, “Targeting and Isolation of cancer cells using micro/nanomotors”, *Adv Drug Deliv Rev.*, **125** (2018), 94–101. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.addr.2017.09.002>

5. M. Medina-Sanchez, Xu H. Haifeng, O. G. Schmidt, “Micro- and nano-motors: the new generation of drug carriers”, *Therapeutic Ddelivery*, **9**:4 (2018), 303–316. DOI: <https://doi.org/10.4155/tde-2017-0113>
6. Z. Lin, C. Gao, M. Chen, X. Lin, Q. He, “Collective motion and dynamic self-assembly of colloid motors”, *Current Opinion in Colloid & Interface Science*, **35** (2018), 51–58. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.cocis.2018.01.006>
7. W. F. Paxton, A. Sen, T. E. Mallouk, “Motility of catalytic nanoparticles through self-generated forces”, *Chemistry*, **11**:22 (2005), 6462–6470. DOI: <https://doi.org/10.1002/chem.200500167>
8. W. F. Paxton, P. T. Baker, T. R. Kline, Y. Wang, T. E. Mallouk, A. Sen, “Catalytically Induced Electrokinetics for Motors and Micropumps”, *J. Am. Chem. Soc.*, **128**:46 (2006), 14881–14888. DOI: <https://doi.org/10.1021/ja0643164>
9. Y. Wang, R. M. Hernandez, D. J. Bartlett, J. M. Bingham, T. R. Kline, A. Sen, T. E. Mallouk, “Bipolar electrochemical mechanism for the propulsion of catalytic nanomotors in hydrogen peroxide solutions”, *Langmuir*, **22**:25 (2006), 10451–10456. DOI: <https://doi.org/10.1021/la0615950>
10. R. Laocharoensuk, J. Burdick, J. Wang, “Carbon-nanotube-induced acceleration of catalytic nanomotors”, *ACS Nano*, **2**:5 (2008), 1069–1075. DOI: <https://doi.org/10.1021/nn800154g>
11. T. Vissers, A. van Blaaderen, A. Imhof, “Phys. Rev. Lett.”, **106**:22 (2011), 228303. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.106.228303>
12. R. Dreyfus, J. Baudry, M. L. Roper, M. Fermigier, H. A. Stone, J. Bibette, “Microscopic artificial swimmers”, *Nature*, **437** (2005), 862–865. DOI: <https://doi.org/10.1038/nature04090>
13. S. Ahmed, W. Wang, L. O. Mair, R. D. Fraleigh, S. Li, L. A. Castro, M. Hoyos, T. J. Huang, T. E. Mallouk, “Steering acoustically propelled nanowire motors toward cells in a biologically compatible environment using magnetic fields”, *Langmuir*, **29**:52 (2013), 16113–16118. DOI: <https://doi.org/10.1021/la403946j>
14. Tailin Xu, L.-P. Xu, X. Zhang, “Ultrasound propulsion of micro-nanomotors”, *Applied Materials Today*, **9** (2017), 493–503. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2017.07.011>
15. B. Robertson, R. Kapral, “Nanomotor dynamics in a chemically oscillating medium”, *J. Chem. Phys.*, **142**:15 (2015), 154902. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4918329>
16. V. M. Rozenbaum, M. L. Dekhtyar, S. H. Lin, L. I. Trakhtenberg, “Photoinduced diffusion molecular transport”, *J. Chem. Phys.*, **145**:6 (2016), 064110. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.4960622>
17. I. Santiago, “Nanoscale active matter matters: Challenges and opportunities for self-propelled nanomotors”, *Nano Today*, **19** (2018), 11–15. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.nantod.2018.01.001>

18. Y. Xing, Zhou M. Mengyun, X. Du, X. Li, Jianqiang J. Li, T. Xu, X. Zhang, “Hollow meso-porous carbon@Pt Janus nanomotors with dual response of H_2O_2 and near-infrared light for active cargo delivery”, *Applied Materials Today*, **17** (2019), 85–91. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apmt.2019.07.017>
19. J.L. Moran, P.M. Wheat, J.D. Posner, “Locomotion of electrocatalytic nanomotors due to reaction induced charge autoelectrophoresis”, *Phys. Rev. E.*, **81**:6 (2010), 065302. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRevE.81.065302>
20. J.L. Moran, J.D. Posner, “Electrokinetic locomotion due to reaction-induced charge auto-electrophoresis”, *J. Fluid Mech.*, **680** (2011), 31–66. DOI: <https://doi.org/10.1017/jfm.2011.132>
21. P. Mitchell, “Hypothetical thermokinetic and electrokinetic mechanisms of locomotion in microorganisms”, *Proc. R. Phys. Soc. Edin.*, **25** (1956), 32–34.
22. S.S. Batsanov, *Experimental foundations of structural chemistry (reference manual)*, Publishing house of standards Izdatelstvo standartov Publ., Moscow., 1986, 240 p.
23. S.I. Martynov, L.Yu. Tkach, “Mechanism of moving particle aggregates in a viscous fluid subjected to a varying uniform external field”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **59**:3 (2019), 475–483. DOI: <https://doi.org/10.1134/S0044466919030128>
24. A.I. Zhakin, “Electrohydrodynamics”, *Physics - Uspekhi fizicheskikh nauk*, **55**:5 (2012), 465–488. DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.0182.201205b.0495>
25. H. Hasimoto, “On the periodic fundamental solutions of the Stokes’ equations and their application to viscous flow past a cubic array of spheres”, *J. Fluid Mech.*, **5**:2 (1959), 317–328. DOI: <https://doi.org/10.1017/S0022112059000222>
26. S.I. Martynovs, “Hydrodynamic interaction of particles”, *Izvestiya RAN. Fluid and Gas Mechanics Mekhanika zhidkosti I gaza*, 1998, no. 2, 112–119.
27. S.I. Martynov, L.Yu. Tkach, “Simulation of particle aggregate dynamics in a viscous fluid”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **55**:2 (2015), 282109–118. DOI: <https://doi.org/10.7868/S0044466915020143290>
28. S.I. Martynov, L.Yu. Tkach, “On one model of the dynamics of self-propelled aggregates of particles in a viscous fluid”, *Rus. J. Nonlin. Dyn.*, **12**:4 (2016), 605–618. DOI: <https://doi.org/10.20537/nd1604005>

Submitted 3.12.2020; Revised 15.02.2021; Accepted 27.02.2021

Information about the authors:

Sergey I. Martynov, Chief Researcher, Surgut State University (1 Lenina av., Surgut, 628412, Khanty-Mansiysk Autonomous District - Yugra, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

Leonilla Yu. Tkach, Researcher, Surgut State University (1 Lenina av., Surgut, 628412, Khanty-Mansiysk Autonomous District - Yugra, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8814-9285>, leonilla7777@mail.ru

All authors have read and approved the final manuscript.

Conflict of interest: The authors declare no conflict of interest.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ПАМЯТИ ТЕРЕХИНА МИХАИЛА ТИХОНОВИЧА



Терехин Михаил Тихонович
(5.01.1934–23.12.2020)

Ушел из жизни доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Почетный профессор РГУ имени С.А. Есенина (с 1999 г.) Михаил Тихонович Терехин.

Михаил Тихонович был руководителем известной в России научной школы в области теории обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложений. Под руководством Михаила Тихоновича Терехина было защищено 45 кандидатских диссертаций и 1 докторская.

С Мордовским государственным университетом им. Н. П. Огарёва Михаила Тихоновича связывали долгие годы сотрудничества. В диссертационном совете Мордовского государственного университета прошли защиту несколько аспирантов Михаила Тихоновича. В этом же совете профессор М. Т. Терехин неоднократно выступал в качестве официального оппонента.

М. Т. Терехин принимал активное участие в деятельности Средне-Волжского математического общества, возглавлял рязанское отделение общества, был членом редколлегии научного журнала «Журнал Средневолжского математического общества». М. Т. Терехин регулярно участвовал в Международных научных конференциях, посвященных дифференциальным уравнениям и их приложениям в математическом моделировании, проводимых Мордовским государственным университетом и Средне-Волжским математическим обществом.

Педагогическая и научная деятельность профессора М. Т. Терехина была отмечена медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» II степени, другими правительственными, ведомственными и общественными наградами.

Так, в 2015 г. Михаил Тихонович был награжден медалью Вильгельма Лейбница. Департамент «Европейского научно-промышленного консорциума» отметил Михаила Тихоновича Терехина как ученого, внесшего существенный вклад в развитие науки и образования.

Коллеги, ученики и друзья знают Михаила Тихоновича Терехина как доброго, порядочного, интеллигентного и эрудированного человека, преданно служившего своему делу.

Светлая память о Михаиле Тихоновиче будет жить в наших сердцах долгие годы.

*В. В. Абрамов, Д. И. Бояркин, И. М. Буркин, К. В. Бухенский,
О. В. Дружинина, Д. К. Егорова, Р. В. Жалнин, И. В. ИONOва,
А. Н. Коненков, А. Н. Куликов, А. Г. Кушнер, Е. Ю. Лискина,
С. С. Мамонов, О. Н. Масина, А. К. Муртазов, А. Ю. Павлов,
П. М. Симонов, А. О. Харламова, Т. Ф. Мамедова, С. М. Мурюмин,
В. И. Сафонкин, Г. А. Смолкин, Л. А. Сухарев, В. Ф. Тишкин,
И. И. Чучаев, П. А. Шаманаев*

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- УДК (только на русском);
- MSC2020 (только на английском);
- название статьи;
- аффилиция автора(-ов);
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском или английском);
- список литературы.

УДК. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

MSC2020. Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аффилиция автора(-ов): название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, город, страна.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

- а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);
- б) должность, подразделение (указывается при наличии);
- в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования;
- г) почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.);
- д) ученая степень (указывается при наличии);
- е) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>;
- ж) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 150 до 250 слов**.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Ключевые слова. Ключевые слова, составляющие семантическое ядро статьи, являются перечнем основных понятий и категорий, служащих для описания исследуемой проблемы. Эти слова служат ориентиром для читателя и используются для поиска статей в электронных базах, поэтому должны отражать дисциплину (область науки, в рамках которой написана статья), тему, цель и объект исследования.

В качестве ключевых слов могут использоваться как одиночные слова, так и словосочетания в единственном числе и именительном падеже. Рекомендуемое количество ключевых слов — 5–7 на русском и английском языках, количество слов внутри ключевой фразы – не более трех.

Текст статьи. При изложении текста статьи рекомендуется придерживаться следующей структуры.

— *Введение.* В этом разделе следует описать проблему, с которой связано исследование; привести обзор литературы по теме исследования; указать задачи, решение которых не известно на сегодняшний день и решению которых посвящена эта рукопись; сформулировать цели и задачи исследования, а также показать их новизну и практическую значимость.

— *Теоретические основы, методы решения задачи и принятые допущения.* В этом разделе подробно приводится общая схема исследования, в деталях описываются методы и подходы, которые использовались для получения результатов.

При использовании стандартных методов и процедур лучше сделать ссылки на соответствующие источники, не забывая описать модификации стандартных методов, если таковые имелись. Если же используется собственный новый метод, который еще нигде ранее не публиковался, важно дать все необходимые детали. Если ранее метод был опубликован в известном журнале, можно ограничиться ссылкой. Однако рекомендуется полностью представить метод в рукописи, если ранее он был опубликован в малоизвестном журнале и не на английском языке.

— *Результаты.* Это основной раздел, в котором излагается авторский оригинальный материал, содержащий полученные в ходе исследования теоретические или экспериментальные данные. По объему эта часть занимает центральное место в научной статье.

Результаты проведенного исследования необходимо описывать достаточно полно, чтобы читатель мог проследить его этапы и оценить обоснованность сделанных автором выводов.

Результаты при необходимости подтверждаются иллюстрациями — таблицами, графиками, рисунками, которые представляют исходный материал или доказательства в свернутом виде.

Если рукопись носит теоретический характер, то в этом разделе приводятся математические выкладки с такой степенью подробности, чтобы можно было компетентному специалисту легко воспроизвести их и проверить правильность полученных результатов.

— *Обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.* Этот раздел содержит интерпретацию полученных результатов исследования, предположения о полученных фактах, сравнение полученных собственных результатов с результатами других авторов.

— *Заключение.* Заключение содержит главные идеи основного текста статьи. Рекомендуется сравнить полученные результаты с теми, которые планировалось получить. В конце приводятся выводы и рекомендации, определяются основные направления дальнейших исследований в данной области.

— *Благодарности.* В данном разделе принято выражать благодарность коллегам, которые оказывали помощь в выполнении исследования или высказывали критические замечания в адрес вашей статьи. Так же указываются источники финансирования исследования (грант, государственное задание, государственный контракт, стипендия и т.д.).

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка. Их можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом* (*American Mathematical Society*) и *Европейским математическим обществом* (*European Mathematical Society*). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmobib.sty. Этот пакет разработан на основе пакета amsbib.sty.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английский язык (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английский язык в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английский, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**Статьи в журналах на русском языке.**

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р. А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р. А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nyh uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The article should contain the following sections in Russian and English:

- UDC (only in Russian);
- MSC2020 (only in English);
- article title;
- affiliation of the author(s);
- information about every author(s);
- abstract;
- keywords;
- text of the article (in English);
- references.

UDC. The Universal Decimal Classification (UDC) is a system for classifying information widely used all over the world to systematize works of science, literature and art, periodicals.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

The UDC and MSC2020 codes can be downloaded from the **Useful materials** section of the **For author** menu on the journal's website.

Affiliate author(s): the name of the organization at the place of main work or organization where the research was carried out, city, country.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Surname, First name, Patronymic (for the section in Russian); First name, P., Surname (for the section in English);
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted;
- d) the postal address is indicated in the form: postcode, country, city, street, house (in Russian) and house street, postcode, country (in English);
- e) academic degree (indicated if available);
- f) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- g) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

bf The volume of annotations in Russian and English should be on average bf from 150 to 250 words.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

Keywords. The keywords that make up the semantic core of the article are a list basic concepts and categories that serve to describe the problem under study. These words serve as a guide for the reader and are used to search for articles in electronic bases, therefore, should reflect the discipline (the field of science within which the article), topic, purpose and object of research.

As keywords, both single words and nominative and singular phrases. Recommended the number of keywords — 5-7 in Russian and English, the number of words within a key phrase - no more than three.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is recommended to adhere to the following structure.

— *Introduction.* In this section, you should describe the problem with which the research is connected; review the literature on the research topic; indicate the problems, the solution of which is not known today and the solution of which this manuscript is devoted to; to formulate the goals and objectives of the study, as well as to show their novelty and practical significance.

— *Theoretical foundations, methods of solving the problem and accepted assumptions.* This section details the general design of the study, detailing the methods and approaches that were used to obtain the results.

When using standard methods and procedures, it is best to refer to relevant sources, remembering to describe modifications of standard methods, if any. If you use your own new method, which is still has not been published anywhere before, it is important to give all the necessary details. If previously the method was published in a well-known journal, you can limit yourself to a link.

— *Results.* This is the main section that sets out the author's original material containing theoretical or experimental data obtained in the course of the research. In terms of volume, this part is central to the scientific article.

The results of the study must be described in sufficient detail, so that the reader can trace its stages and assess the validity of the conclusions made by the author.

The results, if necessary, are confirmed by illustrations - tables, graphs, figures, which present the original material or evidence in a collapsed form.

If the manuscript is of a theoretical nature, then this section provides mathematical calculations with such a degree of detail that a competent specialist can easily reproduce them and check the correctness of the results obtained.

— *Discussion and analysis of the obtained results and their comparison with the previously known ones.* This section contains the interpretation of the obtained research results, assumptions about the obtained facts, comparison of the obtained results with the results of other authors.

— *Conclusion.* The conclusion contains the main ideas of the main text of the article. It is recommended to compare the results obtained with those that it was planned to receive. At the end, conclusions and recommendations are given, and the main directions for further research in this area are determined.

– *Thanks.* In this section, it is customary to express gratitude to colleagues who assisted with research or criticized your article. The sources of research funding (grant, state assignment, state contract, scholarship, etc.) are also indicated.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmbib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article’s description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book’s name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukci>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются следующие файлы: файл-преамбула, файл-шаблон, стилевые пакеты svmo.sty и svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы и стилевых пакетов изменять нельзя. Определение новых команд автором статьи не допускается для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2020} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор(ы) со сносками на организации} {Организации (название, город, страна) со сносками на авторов} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теореме 5 из этой статьи – `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение **table** с вложенным окружением **tabular**:

```

\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы на русском языке \\\ \textbf{Table
\ref{shamanaevtable1}.} Название на английском языке }
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \\\
Название первого столбца на английском языке & Название второго столбца
на английском языке \\\
\hline
1 & 2 \\\
\hline
3 & 4 \\\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```
\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}
```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```
\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись} {под-
пись_под_рисунком_на_английском_языке}
```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```
\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {подпись
под_рис_на_английском_языке} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис}
{подпись_под_рис_на_английском_языке} {общая_подпись} {общая под-
пись_на_английском_языке}
```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```
\inserttwopictureswithcompression {метка}{имя_файла.eps}{подпись_под
рис}\\подпись_под_рис_на_английском_языке}{степень_сжатия} {имя_фай-
ла.eps} {подпись_под_рис}\\подпись_на_английском_языке} {степень_сжатия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_фай-
ла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps}{степень_сжатия}{общая_под-
пись_под_рисунком} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_фай-ла.eps}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжа-тия}
{имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжа-тия}
{общая_подпись} {общая_подпись_на_английском_языке}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmobib.sty. Основой этого пакета является стилиевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилового пакета svmobib.sty

Статьи в журналах на русском языке

В разделе thebibliography:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}
```

```
\by П. А. Шаманаев
```

```
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в
виде однородных векторных полиномов
```

```
\jour Труды Средневожского математического общества
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib1En}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах thebibliography и thebibliographyEn оформляются одинаково):

```

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

```

Статьи в электронном журнале на русском языке**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib3}
\by М. С. Чельшов, П. А. Шаманаев,
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными
ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции
\jour Огарёв-online
\vol 20
\yr 2016
\elink Доступно по адресу: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear
constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

```

Статьи в сборниках на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

```

Книги (монографии и сборники) на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибилов
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.
\publ Высш. шк.
\yr 1991
\totalpages 303

```

В разделе thebibliographyEn:

```

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

```

Статьи в материалах конференций на русском языке:**В разделе thebibliography:**

```

\RBibitem{shamanaevBib6}
\by В. Г. Малинов

```

\paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
\inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
\bookvol II
\procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
\yr 2016
\pages 48–50
\publ ФИЦ ИУ РАН
\publaddr М.

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

The following files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package `svmo.sty` and `svmobib.sty`. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named `<LastName>.tex`. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file can not be changed. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The author(s)} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors} {The author(s) with footnotes to organizations} {The organizations (name, city, country) with footnotes to authors} {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
```

```
\caption{Table name} \textbf{Table \ref{shamanaevtable1}.} Table name in English \label{shamanaevtable1}
```



```

\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
First column name in English & Second column name in English \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```

\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {caption
of_the_figure_in_English}

```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```

\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}

```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```

\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
{caption_of_the_figure_in_English} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {common_caption} {common
caption_in_English}

```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```

\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {caption_of_the_figure_in_English} {degree_of_compression} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} {caption_of_the_figure_in_English}
{degree_of_compression} {common_caption} {common caption_in_English}

```

e) insert two pictures with common caption only

```

\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```

\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption} {common_caption_in_English}

```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file_name.eps}
{common_caption} {common_caption_in_English}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file_name.eps} {degree_of_compression} {file_name.eps}
{degree_of_compression}{common_caption}{common_caption_in_English}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmobib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmobib.sty package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form
of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

```
\issue 1
```

```
\pages 145–151
```

```
\lang In Russ.
```

Journal articles in English:

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
```

```
\by M. J. Berger, J. Oliger
```

```
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
```

```
\jour Journal of Computational Physics
```

```
\yr 1984
```

```
\vol 53
```

```
\pages 484–512
```

Articles in the electronic journals in Russian

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticznogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UIGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
\by Yu. N. Bibikov
\book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
\publaddr Moscow
\publ Visshay shkola Publ.
\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

Conference proceedings in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

Алфавитный указатель авторов

Васютин М. А.	82	Мамонов С. С.	28
Вельмисов П. А.	72	Мартынов С. И.	91
Данилова Е. В.	82	Никонов В. И.	43
Ионова И. В.	28	Покладова Ю. В.	72
Костромина О. С.	11	Тамарова Ю. А.	72
Кузьмичев Н. Д.	82	Терехин М. Т.	110
Лапшина Е. А.	82	Ткач Л. Ю.	91
Лубышев Ф. В.	58	Файрузов М. Э.	58

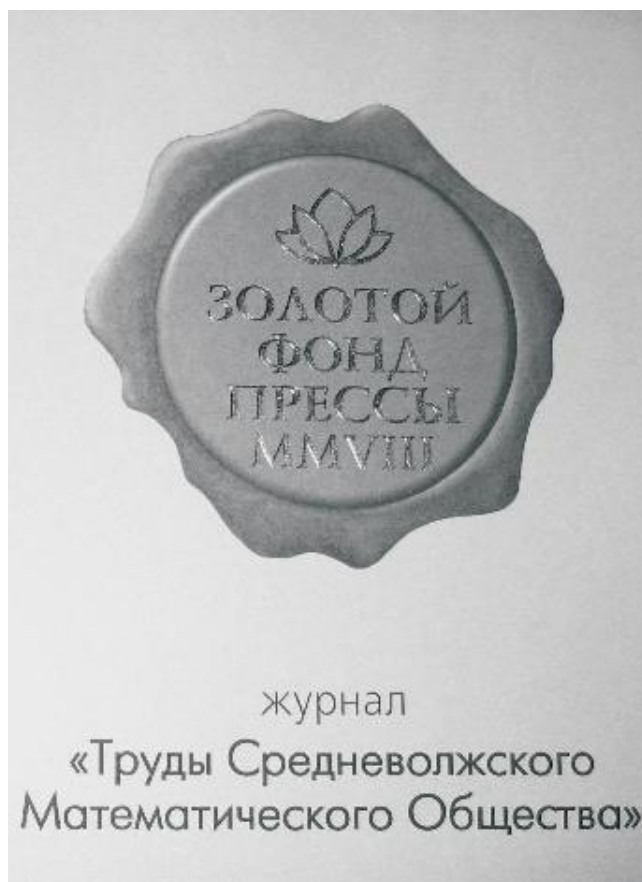
Харламова А. О. 28

Author Index

Danilova E. V.	82	Mamonov S. S.	28
Fairuzov M. E.	58	Martynov S. I.	91
Ionova I. V.	28	Nikonov V. I.	43
Kharlamova A. O.	28	Pokladova Yu. V.	72
Kostromina O. S.	11	Tamarova Yu. A.	72
Kuzmichev N. D.	82	Terekhin M. T.	110
Lapshina E. A.	82	Tkach L. Yu.	91
Lubyshev F. V.	58	Vasyutin M. A.	82

Velmisov P. A. 72

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Редактор: *Зинина С. Х.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 9.03.2021. Дата выхода в свет 31.03.2021. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 11,9 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 250.

Типография: Издательство Мордовского университета

Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Atryahin V. A.*

Editor: *Zinina S. Kh.*

Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 9.03.2021. Date of publishing 31.03.2021. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 11,9.

Number of copies 100. Order no. 250.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24

Для заметок

Для заметок

