

ISSN 2587 – 7496 (Online)

ISSN 2079 – 6900 (Print)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 22 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 4

2020

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 22, № 4. 2020

DOI 10.15507/2079-6900.22.202004

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 22, NO. 4. 2020

DOI 10.15507/2079-6900.22.202004

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society», Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization «Middle Volga Mathematical Society». Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малайзийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

Ахтямов Азамат Мухтарович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Дерюгин Юрий Николаевич — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института, БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Спивак Семен Израилевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Терехин Михаил Тихонович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина» (Рязань, Россия)

Ион Анка Вероника — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, исполняющая обязанности ректора ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Aleksandr S. Andreev — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

Azamat M. Akhtyamov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Vyacheslav Z. Grines — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Yuriy N. Derugin — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Chief Research Scientist, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Sergey I. Martynov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Olga V. Pochinka — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Semen I. Spivak — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

Mikhail T. Terekhin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

Anca V. Ion — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

EDITORIAL COUNCIL

Morozkin Nikolay Danilovich — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Senin Petr Vasilievich — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Suharev Lev Alexandrovich — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Yarushkina Nadezda Glebovna — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Acting Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

И. В. Бойков, П. В. Айкашев, А. И. Бойкова

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси 405

В. З. Гринес, Е. В. Жужома

О локальной структуре одномерных базисных множеств необратимых A -эндоморфизмов поверхностей 424

А. Е. Колобянина, В. Е. Круглов

Энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω -устойчивых потоков 434

О. О. Развенская

О новых алгоритмических приемах для задачи о взвешенной вершинной раскраске 442

И. П. Рязанцева

Итеративный метод второго порядка с постоянными коэффициентами для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве 449

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Н. Д. Кузьмичев, А. А. Шушпанов, М. А. Васютин

Математическое моделирование магнитных свойств осесимметричных сверхпроводников второго рода в модели Кима . . . 456

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Памяти Спивака Семена Израилевича	463
---	-----

Правила оформления рукописей (на рус. яз.)	467
--	-----

Правила оформления рукописей (на англ. яз.)	471
---	-----

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.)	475
---	-----

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.)	481
--	-----

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.)	486
--	-----

Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.)	487
---	-----

Contents

MATHEMATICS

- I. V. Boykov, P. V. Aykashev, A. I. Boykova**
 Approximate solution of hypersingular integral equations on the
 number axis 405
-

- V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma**
 On local structure of one-dimensional basic sets of non-reversible
 A-endomorphisms of surfaces 424
-

- A. E. Kolobyanina, V. E. Kruglov**
 Morse-Bott energy function for surface Ω -stable flows 434
-

- O. O. Razvenskaya**
 On new algorithmic techniques for the weighted vertex coloring
 problem 442
-

- I. P. Ryazantseva**
 Iterative method of second order with constant coefficients for
 monotone equations in Hilbert space 449
-

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

- N. D. Kuzmichev, A. A. Shushpanov, M. A. Vasyutin**
 Mathematical modeling of the magnetic properties of spheroid of
 hard superconductors of the second kind in the Bean model 456
-

MATHEMATICAL LIFE

In memory of Spivak Semen Izrailevich	463
---	-----

The rules of article design (in Russian)	467
The rules of article design (in English)	471
The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian)	475
The rules for article layout in the LaTeX system (in English)	481

Author Index (In Russian)	486
Author Index (in English)	487

МАТЕМАТИКА

Идентификатор DOI 10.15507/2079-6900.22.202004.405-423

УДК 519.63

Приближенные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений на числовой оси

© И. В. Бойков¹, П. В. Айкашев², А. И. Бойкова³

Аннотация. В работе исследованы приближенные методы решения линейных и нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на числовой оси. Рассматриваются уравнения, имеющие особенности второго порядка, т. к. уравнения с такими сингулярностями находят широкое применение при моделировании проблем в естествознании и технологиях. Для решения линейных гиперсингулярных интегральных уравнений предложены три вычислительные схемы. Первая основана на технологии метода механических квадратур. В качестве базисных выбираются рациональные функции. Вторая вычислительная схема основана на сплайн-коллокационном методе со сплайнами первого порядка. В третьей вычислительной схеме используются сплайны нулевого порядка. При обосновании и реализации вычислительных схем используется непрерывный метод решения операторных уравнений. Его применение позволяет ослабить требования, налагаемые на исходное уравнение: достаточно потребовать его разрешимости при данной правой части. Непрерывный операторный метод основан на Ляпуновской теории устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и это обуславливает его устойчивость к возмущениям коэффициентов и правых частей. Приближенные методы решения нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений изложены на примере уравнения Пейрлса-Наборро, моделирующего ряд задач теории дислокаций. Для решения этого уравнения построены, по аналогии с линейными гиперсингулярными интегральными уравнениями, три вычислительные схемы. Их обоснование и реализация основаны на непрерывном методе решения операторных уравнений. На примере решения уравнения Пейрлса-Наборро продемонстрирована эффективность предложенных численных методов.

Ключевые слова: линейные и нелинейные гиперсингулярные интегральные уравнения, непрерывный операторный метод, метод коллокации, метод механических квадратур

1. Введение

Теория сингулярных интегральных уравнений, зародившаяся в начале XX в. в трудах Д. Гильберта и А. Пуанкаре, и в настоящее время переживает бурное развитие. Это обусловлено многочисленными связями методов сингулярных интегральных уравнений с задачами физики и техники. В последнее время методы сингулярных интегральных уравнений тесно переплетаются с методами гиперсингулярных интегральных уравнений (ГИУ). Интересно отметить, что несмотря на то что понятие гиперсингулярного

¹Бойков Илья Владимирович, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, boikov@pnzgu.ru

²Айкашев Павел Владимирович, ассистент кафедры высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8076-4662>, aikashev.pavel@mail.ru

³Бойкова Алла Ильинична, доцент кафедры высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0003-0436-0460, allaboikova@mail.ru

интеграла (интеграла в смысле Адамара) было введено в начале XX в. [1], активное развитие направления, связанного с исследованиями гиперсингулярных интегральных уравнений, началось только в середине прошлого века, когда было обнаружено, что такими уравнениями моделируются задачи аэродинамики [2]. Позднее были опубликованы монографии [3–4], в которых методы гиперсингулярных интегральных уравнений привлекались к решению задач механики и аэродинамики.

В настоящее время гиперсингулярные интегральные уравнения находят широкое применение при моделировании задач аэродинамики, электродинамики, микроэлектроники, теории антенн, геофизики, атомной и ядерной физики и в ряде других областей естествознания и техники. При этом число областей, в которых применяются методы гиперсингулярных интегральных уравнений, постоянно расширяется. Наряду с прикладными аспектами гиперсингулярные интегральные уравнения находят применение в различных разделах математической физики. В частности, краевая задача Римана в исключительных случаях [5] приводит к гиперсингулярным интегральным уравнениям. Метод граничных интегральных уравнений трансформирует уравнения математической физики в гиперсингулярные интегральные уравнения с понижением размерности уравнения на единицу.

Обзор аналитических и численных методов решения гиперсингулярных интегральных уравнений представлен в [6–7].

Работа построена следующим образом. В первом разделе даны определения гиперсингулярных интегралов, описаны классы функций, используемые в работе, представлен один класс интерполяционных рациональных полиномов, определенных на интервале $(-\infty, \infty)$, и приведен непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений.

Второй раздел посвящен приближенным методам решения гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на числовой оси.

В третьем разделе исследуются приближенные методы решения одного класса нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений.

В четвертом разделе приведены примеры, иллюстрирующие эффективность предложенных вычислительных схем.

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Классы функций и обозначения

В этом разделе приведены классы функций, используемые в статье.

Пусть $A = [a, b]$.

О п р е д е л е н и е 2.1 *Класс функций Гельдера $\mathbb{H}_\alpha(M; A)$ ($0 < \alpha \leq 1$) состоит из заданных на A функций $f(x)$, удовлетворяющих во всех точках x' и x'' этого множества неравенству $|f(x') - f(x'')| \leq M|x' - x''|^\alpha$.*

В случае, когда из текста ясно, на каком множестве рассматриваются функции, вместо $\mathbb{H}_\alpha(M; A)$ будем писать $\mathbb{H}_\alpha(M)$. Это замечание относится и к остальным классам функций.

О п р е д е л е н и е 2.2 *Класс $\mathbb{W}^r(M; A)$ состоит из функций, заданных на A , непрерывных и имеющих непрерывные производные до $(r - 1)$ -го порядка включительно и кусочно-непрерывную производную r -го порядка, удовлетворяющую на этом множестве неравенству $|f^{(r)}(x)| \leq M$.*

О п р е д е л е н и е 2.3 Класс $\mathbb{W}^r \mathbb{H}_\alpha(M; A)$ состоит из функций $f(x)$, принадлежащих классу $\mathbb{W}^r(M; A)$ и удовлетворяющих дополнительному условию $f^{(r)}(x) \in \mathbb{H}_\alpha(M)$.

2.2. Определения гиперсингулярных интегралов

О п р е д е л е н и е 2.4 [1]. Пусть $A(t) \in \mathbb{W}^p(M)$. Интеграл вида $\int_a^b \frac{A(t) dt}{(b-t)^{p+\alpha}}$ при целом p и $0 < \alpha < 1$ определяет величину («конечную часть») рассматриваемого интеграла как предел при $x \rightarrow b$ суммы

$$\int_a^x \frac{A(t) dt}{(b-t)^{p+\alpha}} + \frac{B(x)}{(b-x)^{p+\alpha-1}}.$$

Здесь $B(x)$ — любая функция, на которую налагаются два условия:

- а) рассматриваемый предел существует;
- б) $B(x) \in \mathbb{W}^p$.

Долгое время эти интегралы назывались интегралами Адамара. В настоящее время их называют гиперсингулярными интегралами.

О п р е д е л е н и е 2.5 [5]. Пусть $\varphi(t) \in \mathbb{W}^{p-1} H_\alpha(M)$, $0 < \alpha \leq 1$. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p}$, $a < c < b$, в смысле главного значения Коши-Адамара называется предел

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-v} \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} + \int_{c+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-c)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} \right],$$

где $\xi(v) \in \mathbb{W}^{p-1}$ — некоторая функция, выбранная так, чтобы указанный предел существовал.

В концевых точках a и b гиперсингулярный интеграл может быть определен следующим образом.

О п р е д е л е н и е 2.6 Пусть $\varphi(t) \in \mathbb{W}^p(M)$. Интегралом $\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-a)^p}$ называется предел

$$\int_a^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-a)^p} = \lim_{v \rightarrow 0} \left[\int_{a+v}^b \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(\tau-a)^p} + \frac{\xi(v)}{v^{p-1}} + \xi_1(v) \ln |v| \right],$$

где $\xi(v)$ — некоторая функция, имеющая непрерывные производные до $(p-1)$ -го порядка, удовлетворяющие условию Дини-Липшица; $\xi_1(v)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию Дини-Липшица в окрестности нуля. Функции $\xi(v)$ и $\xi_1(v)$ выбираются так, чтобы указанный предел существовал.

2.3. Интерполяционные полиномы

При построении вычислительных схем используется интерполяционный полином вида

$$P_n(t) = \sum_{k=-n}^n f(t_k) \psi_k(t), \quad (2.1)$$

где $\psi_k(t)$ – фундаментальные полиномы по узлам $t_k = tg \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n, \dots, n$,

$$\psi_k(t) = \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^n c_l(t) c_l(t_k) + s_l(t) s_l(t_k) \right), \quad (2.2)$$

$$c_l(t) = \cos(2l \arctg t), \quad s_l(t) = \sin(2l \arctg t).$$

Остановимся на свойствах функций $c_l(t)$ и $s_l(t)$ и прежде всего, следуя [8], покажем, что $c_l(t)$ и $s_l(t)$ являются рациональными функциями от t . Действительно,

$$\sin(2n\Theta) = C_{2n}^1 \cos^{2n-1} \Theta \sin \Theta - C_{2n}^3 \cos^{2n-3} \Theta \sin^3 \Theta + \dots \pm C_{2n}^{2n-1} \cos \Theta \sin^{2n-1} \Theta.$$

Полагая $\Theta = \arctg t$ и используя формулы $\cos \Theta = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin \Theta = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, имеем

$$\sin(2n \arctg t) = \sum_{k=1}^n \frac{C_{2n}^{2k-1} t^{2k-1} (-1)^{k+1}}{(1+t^2)^n}, \quad n \neq 0, \quad \cos(2n \arctg t) = \sum_{k=0}^n \frac{C_{2n}^{2k} t^{2k} (-1)^k}{(1+t^2)^n}.$$

Функции $c_l(t)$ и $s_l(t)$ обладают следующими важными свойствами [8]:

- 1) $s_n(t) = -Im \left(\frac{1-it}{1+it} \right)^n$, $c_n(t) = Re \left(\frac{1-it}{1+it} \right)^n$;
- 2) Система функций $\{s_n(t), c_n(t)\}$, $n = 0, 1, \dots, \infty$, является ортогональной с весом $\frac{1}{1+t^2}$ на интервале $(-\infty, \infty)$;
- 3) Обозначим через H преобразование Гильберта $(Hf)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau)}{\tau - t} d\tau$.

Справедливы формулы [8]

$$Hc_n = -s_n, \quad Hs_n = c_n + (-1)^{n+1}. \quad (2.3)$$

2.4. Непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений

При решении гиперсингулярных интегральных уравнений успешно применяется непрерывный метод решения нелинейных операторных уравнений [9–10]. Приведём, следуя [11], его краткое описание.

Пусть \mathbb{X} – банахово пространство; K – оператор, действующий из \mathbb{X} в \mathbb{X} ; $B(a, r) = \{x, a \in \mathbb{X} : \|x - a\| \leq r\}$; $S(a, r) = \{x, a \in \mathbb{X} : \|x - a\| = r\}$; $\Lambda(K)$ – логарифмическая норма линейного оператора K , определяемая [12] выражением $\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1)/h$, где символ $h \downarrow 0$ означает, что h стремится к нулю, убывая.

Для матриц в часто используемых пространствах логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица $A = \{a_{ij}\}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, в n -мерном пространстве R_n векторов $x = (x_1, \dots, x_n)$ с нормой

$$\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|, \quad \|x\|_2 = [\sum_{k=1}^n |x_k|^2]^{1/2}, \quad \|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|.$$

Логарифмическая норма матрицы A равна [13]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j (a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|), \quad \Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left(\frac{A + A^T}{2} \right), \quad \Lambda_3(A) = \max_i (a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|).$$

Здесь $\lambda_{\max}((A + A^T)/2)$ – наибольшее собственное значение матрицы $(A + A^T)/2$.
Рассматривается нелинейное операторное уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (2.4)$$

где $A: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$ – нелинейный оператор, отображающий банахово пространство X в себя.

Поставим в соответствие уравнению (2.4) задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad (2.5)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2.6)$$

Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 2.1 [11] Пусть задача Коши (2.5)–(2.6) имеет решение x^* , и на любой дифференцируемой кривой $g(t)$, расположенной в шаре $B(x^*, r)$, выполняются следующие условия:

$$1) \text{ при любом } t \ (t > 0) \text{ выполняется неравенство } \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) \, d\tau \leq 0;$$

$$2) \text{ справедливо неравенство } \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) \, d\tau \leq -\alpha_g, \quad \alpha_g > 0.$$

Тогда решение задачи Коши (2.5)–(2.6) при t , стремящемся к бесконечности, сходится к решению x^* уравнения (2.4).

3. Приближенное решение линейных гиперсингулярных интегральных уравнений

Рассмотрим линейное ГИУ вида

$$a(t)x(t) + \frac{b(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)d\tau}{(\tau - t)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau)x(\tau)d\tau = f(t), \quad -\infty < t < \infty. \quad (3.1)$$

3.1. Первая вычислительная схема

Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \psi_k(t),$$

где $\psi_k(t)$ – фундаментальные полиномы (2.2), построенные по узлам $t_k = tg \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n, \dots, n$.

Значения коэффициентов α_k , $k = -n, \dots, n$, будем определять из системы алгебраических уравнений, полученных из уравнения (3.1) по технологии метода механических квадратур.

Предварительно вычислим интегралы $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2}$ и $\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2}$.

Из определения гиперсингулярного интеграла и формулы (2.3) следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)} = \frac{d}{dt} (-s_n) = \\ &= -(\cos(2n \arctg t)) 2n \frac{1}{1+t^2} = -2n \frac{1}{1+t^2} c_n(t). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} &= \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{s_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)} = \frac{d}{dt} c_n(t) = \\ &= -(\sin(2n \arctg t)) 2n \frac{1}{1+t^2} = -2n \frac{1}{1+t^2} s_n(t). \end{aligned}$$

Применим к уравнению (3.1) метод коллокации по узлам $t_k = tg \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n, \dots, n$. В результате имеем

$$\begin{aligned} a(t_i) \alpha_i + b(t_i) \frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \alpha_k \left(\sum_{l=1}^n 2l \frac{1}{1+t_k^2} (c_l(t_i) c_l(t_k) + s_l(t_i) s_l(t_k)) \right) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty} h(t_i, \tau) x_n(\tau) d\tau = f(t_i), \quad i = -n, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Обозначим через $P_n[f]$ оператор проектирования на множество интерполяционных полиномов вида $\sum_{k=1}^n f(t_k) \psi_k(t)$ по узлам $t_k = -n, \dots, n$.

Систему уравнений (3.2) в операторном виде запишем в виде уравнения

$$\bar{K}_n x_n \equiv P_n \left(a(t) x_n(t) + \frac{b(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau \right) = P_n(f(t)). \quad (3.3)$$

Для построения вычислительной схемы метода механических квадратур аппроксимируем интегральный оператор $\int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau$ квадратурной формулой

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(t, \tau) x_n(\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\tau^2} P_n((1+\tau^2) h(t, \tau) x_n(\tau)) d\tau + R_n(h(t, \tau) x_n(\tau)) = \\ &= \frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \left(1 + tg^2 \frac{k\pi}{2n+1}\right) h\left(t, tg \frac{k\pi}{2n+1}\right) x_n\left(tg \frac{k\pi}{2n+1}\right) + R_n(h(t, \tau) x_n(\tau)). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Получим

$$\begin{aligned} K_n x_n &\equiv P_n \left(a(t) x_n(t) + \frac{b(t)}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x_n(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + \right. \\ &\left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\tau^2} P_n((1+\tau^2) h(t, \tau) x_n(\tau)) d\tau \right) = P_n(f(t)). \end{aligned}$$

Вычисляя гиперсингулярные интегралы и используя квадратурную формулу (3.4), получим систему уравнений

$$\begin{aligned} a(t_i) \alpha_i + \frac{2}{2n+1} b(t_i) \sum_{k=-n}^n \alpha_k \left(\sum_{l=1}^n \frac{2l}{1+t_k^2} \cos \left(2l \left(\frac{(i-k)\pi}{2n+1} \right) \right) \right) + \\ + \frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=-n}^n (1+t_k^2) h(t_i, t_k) \alpha_k = f(t_i), \quad i = -n, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Системе (3.5) поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений, полученных непрерывным операторным методом:

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i(u)}{du} &= \lambda_i \left(a(t_i) \alpha_i(u) + \frac{2}{2n+1} b(t_i) \sum_{k=-n}^n \alpha_k(u) \left(\sum_{l=1}^n \frac{2l}{1+t_k^2} \cos \left(2l \left(\frac{(i-k)\pi}{2n+1} \right) \right) \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=-n}^n (1+t_k^2) h(t_i, t_k) \alpha_k(u) - f(t_i) \right), \quad i = -n, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Здесь через $\lambda_i = \pm 1, i = -n, \dots, n$, обозначены коэффициенты, подбираемые таким образом, чтобы логрифмическая норма матрицы в левой части системы уравнений (3.5) была отрицательной.

Связь между решением системы уравнений (3.4) и сходимостью системы уравнений (3.6) устанавливается так же, как в случае второй вычислительной схемы.

3.2. Вторая вычислительная схема

Обозначим через A достаточно большое положительное число и аппроксимируем уравнение (3.1) следующим гиперсингулярным интегральным уравнением:

$$a(t)x(t) + b(t) \int_{-A}^A \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + \int_{-A}^A h(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t), \quad -A \leq t \leq A. \quad (3.7)$$

Введем узлы $t_k = -A + \frac{A}{n}k$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, и обозначим через Δ_k интервалы $[t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, 2n-2$, $\Delta_{2n-1} = [t_{2n-1}, t_{2n}]$.

Приближенное решение уравнения (3.7) будем искать в виде сплайна

$$x_N(t) = \sum_{k=0}^{2N} \alpha_k \varphi_k(t), \quad (3.8)$$

где $\varphi_k(t)$, $k = 0, 1, \dots, 2N$, множество базисных функций.

Для узлов t_k , $k = 1, \dots, 2N-1$ – соответствующие базисные функции определяются формулой

$$\varphi_k(t) = \begin{cases} 0, & t_{k-1} \leq t \leq t_{k-1} + \frac{A}{N^2}, \\ \frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{k-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{k-1} + \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_k - \frac{A}{N^2}, \\ 1, & t_k - \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_k + \frac{A}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{k+1}) - \frac{1}{N-2}, & t_k + \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_{k+1} - \frac{A}{N^2}, \\ 0, & t_{k+1} - \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_{k+1}, \\ 0, & t \in [-A, A] \setminus [t_{k-1}, t_{k+1}]. \end{cases} \quad (3.9)$$

Для граничных узлов t_k , $k = 0$ и $k = 2N$ соответствующие базисные функции определяются формулами

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} 1, & -A \leq t \leq -A + \frac{A}{N^2}, \\ -\frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_1) - \frac{1}{N-2}, & -A + \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_1 - \frac{A}{N^2}, \\ 0, & t_1 - \frac{A}{N^2} \leq t \leq t_1, \\ 0, & [-A, A] \setminus [t_0, t_1]; \end{cases} \quad (3.10)$$

и

$$\varphi_{2N}(t) = \begin{cases} 0, & -A \leq t \leq t_{N-1} + \frac{A}{N^2}, \\ \frac{N^2}{A(N-2)}(t - t_{N-1}) - \frac{1}{N-2}, & t_{N-1} + \frac{A}{N^2} \leq t \leq 1 - \frac{A}{N^2}, \\ 1, & A - \frac{A}{N^2} \leq t \leq A. \end{cases} \quad (3.11)$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ определяются из системы алгебраических уравнений

$$a(t_k)\alpha_k + b(t_k) \sum_{l=0}^{2N} \alpha_l \int_{-A}^A \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau + \sum_{l=0}^{2N} \alpha_l h(t_k, t_l) \int_{-A}^A \varphi_l(\tau) d\tau = f(t_k), \quad (3.12)$$

$k = 0, 1, \dots, 2N$.

З а м е ч а н и е 3.1 Ниже сумма регулярных интегралов в уравнении (3.12) опускается, т. к. она не влияет на дальнейшие рассуждения.

Используя определения гиперсингулярных интегралов, получим

$$\int_{t_{k-1}}^{t_{k+1}} \frac{\varphi_k(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} = -2N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}, \quad (3.13)$$

$$\int_{-A}^{t_1} \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{(\tau + A)^2} = -N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}, \quad (3.14)$$

$$\int_{t_{2N-1}}^A \frac{\varphi_{2N}(\tau) d\tau}{(\tau - A)^2} = -N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}, \quad (3.15)$$

$$\int_{-A}^A \left[\sum_{l=1}^{2N} \varphi_l(\tau) \right] \frac{d\tau}{(\tau + A)^2} = \frac{N^2}{A(N-2)} \ln(N-1) - \frac{1}{2A}, \quad (3.16)$$

$$\int_{-A}^A \left[\sum_{l=0}^{2N-1} \varphi_l(\tau) \right] \frac{d\tau}{(\tau - A)^2} = \frac{N^2}{A(N-2)} \ln(N-1) - \frac{1}{2A}, \quad (3.17)$$

$$\int_{-A}^A \left[\sum_{l=0}^{2N} {}' \varphi_l(\tau) \right] \frac{d\tau}{(\tau - t_N)^2} = \frac{2N^2}{A(N-2)} \ln(N-1) - \frac{2}{A}. \quad (3.18)$$

Здесь \sum_l' означает суммирование по $l \neq N$. Детали вычислений приведены в [16].

Таким образом, система (3.12) может быть представлена в следующем виде:

$$\begin{aligned} & a(t_k)\alpha_k - b(t_k)2N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_k + \alpha_0 b(t_k) \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} + \\ & + b(t_k) \sum_{l=1}^{2N-1} {}' \alpha_l \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \varphi_l(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} + \\ & + \alpha_{2N} b(t_k) \int_{t_{2N-1}}^A \varphi_{2N}(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} = f(t_k), \quad k = 1, \dots, 2N-1, \\ & a(t_0)\alpha_0 - b(t_0)N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_0 + \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l b(t_0) \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \varphi_l(\tau) \frac{d\tau}{(\tau + A)^2} + \\ & + \alpha_N b(t_0) \int_{2N-1}^A \varphi_{2N}(\tau) \frac{d\tau}{(\tau + A)^2} = f(t_0), \\ & a(t_{2N})\alpha_{2N} - b(t_{2N})N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)}\alpha_{2N} + \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l b(t_{2N}) \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \varphi_l(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - A)^2} + \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$+\alpha_0 b(t_{2N}) \int_{-A}^{t_1} \varphi_0(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-A)^2} = f(t_{2N}).$$

Здесь \sum' означает суммирование по $l \neq k$.

Система (3.19) эквивалентна следующей системе

$$\begin{aligned} (\operatorname{sgn} b(t_k)) \left(a(t_k) \alpha_k - b(t_k) 2N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \alpha_k + \alpha_0 b(t_k) \int_{t_0}^{t_1} \varphi_0(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-t_k)^2} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l b(t_k) \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \varphi_l(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-t_k)^2} + \alpha_{2N} b(t_k) \int_{t_{2N-1}}^A \varphi_{2N}(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-t_k)^2} \right) = \\ = (\operatorname{sgn} b(t_k)) f(t_k), k = 1, \dots, 2N-1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

$$\begin{aligned} (\operatorname{sgn} b(t_0)) \left(a(t_0) \alpha_0 - b(t_0) N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \alpha_0 + \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l b(t_0) \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau) d\tau}{(\tau+A)^2} + \right. \\ \left. + \alpha_N b(t_0) \int_{t_{2N-1}}^A \varphi_{2N}(\tau) \frac{d\tau}{(\tau+A)^2} \right) = (\operatorname{sgn} b(t_0)) f(t_0), \\ (\operatorname{sgn} b(t_{2N})) \left(a(t_{2N}) \alpha_{2N} - b(t_{2N}) N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \alpha_{2N} + \right. \\ \left. + \sum_{l=1}^{2N-1} \alpha_l b(t_{2N}) \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \varphi_l(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-A)^2} + \right. \\ \left. + \alpha_0 b(t_{2N}) \int_{-A}^{t_1} \varphi_0(\tau) \frac{d\tau}{(\tau-A)^2} \right) = (\operatorname{sgn} b(t_{2N})) f(t_{2N}). \end{aligned}$$

Запишем систему (3.20) в матричной форме:

$$DX = F,$$

где $D = \{d_{kl}\}$, $k, l = 0, 1, \dots, 2N$, $X = (x_0, x_1, \dots, x_{2N})$, $F = (f_0, f_1, \dots, f_{2N})$. Значения $\{d_{kl}\}$, $\{x_k\}$ и $\{f_k\}$ очевидны.

Диагональные элементы в левой части системы (3.20) имеют следующий вид

$$\begin{aligned} d_{kk} = (\operatorname{sgn} b(t_k)) \left(a(t_k) - b(t_k) 2N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \right), k = 1, 2, \dots, 2N-1, \\ d_{00} = (\operatorname{sgn} b(t_0)) \left(a(t_0) - b(t_0) N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \right), \end{aligned}$$

$$d_{2N,2N} = (\operatorname{sgn} b(t_{2N})) \left(a(t_{2N}) - b(t_{2N}) N^2 \frac{\ln(N-1)}{A(N-2)} \right).$$

Кубическая норма матрицы D оценивается выражением

$$\begin{aligned} \Lambda_3(D) = \max & \left(\max_{1 \leq k \leq 2N-1} \left(d_{kk} + \sum_{l=1}^{2N-1} |b(t_k)| \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. + |b(t_k)| \int_{-A}^{t_1} \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} + |b(t_k)| \int_{t_{2N-1}}^A \frac{\varphi_{2N}(\tau) d\tau}{(\tau - t_k)^2} \right), \right. \\ & \left(d_{00} + \sum_{l=1}^{2N-1} |b(t_0)| \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau) d\tau}{(\tau + A)^2} + |b(t_0)| \int_{t_{2N-1}}^A \frac{\varphi_{2N}(\tau) d\tau}{(\tau + A)^2} \right), \\ & \left. \left(d_{2N,2N} + \sum_{l=1}^{2N-1} |b(t_{2N})| \int_{t_{l-1}}^{t_{l+1}} \frac{\varphi_l(\tau) d\tau}{(\tau - A)^2} + |b(t_{2N})| \int_{-A}^{t_1} \frac{\varphi_0(\tau) d\tau}{(\tau - A)^2} \right) \right). \end{aligned}$$

Если $\Lambda_3(D) < 0$, то из теоремы 2.1 следует, что система (3.20) имеет единственное решение $x_N^*(t)$ и $\|D^{-1}\| \leq 1/|\Lambda_3(D)|$.

Очевидно, что $x_N^*(t)$ также является решением системы уравнений (3.20).

Пусть $x^*(t)$ и $x_N^*(t)$ являются решениями уравнений (3.1) и (3.20) соответственно.

Пусть функции $x^*(t), x^{*(1)}(t)$ непрерывно дифференцируемы при $t \in (-\infty, \infty)$ и $\max(\sup_{(-\infty < t < \infty)} |x^*(t)|, \sup_{(-\infty < t < \infty)} |x^{*(1)}(t)|, \sup_{(-\infty < t < \infty)} |x^{*(2)}(t)|) \leq M$, $0 < M < \infty$, где M — ограниченная константа.

Легко видеть, что

$$a(t_k)x^*(t_k) + b(t_k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^*(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau = f(t_k),$$

где $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Следовательно,

$$(\operatorname{sgn} b(t_k))(a(t_k)x^*(t_k) + b(t_k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^*(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau) = (\operatorname{sgn} b(t_k))f(t_k), \quad (3.21)$$

где $k = 0, 1, \dots, 2N$.

Пусть $x_N^*(t)$ — решение уравнения (3.20). Вычтем (3.20) из (3.21) и представим результат в следующем виде:

$$\begin{aligned} & (\operatorname{sgn} b(t_k))(a(t_k)(x^*(t_k) - x_N^*(t_k)) + b(t_k) \sum_{l=0}^{2N} (x^*(t_l) - x_N^*(t_l)) \int_{-A}^A \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau) = \\ & = (\operatorname{sgn} b(t_k))g(t_k), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 g(t_k) &= \sum_{l=0}^{2N} b(t_k) x^*(t_l) \int_{-A}^A \frac{\varphi_l(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau - b(t_k) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^*(\tau)}{(\tau - t_k)^2} d\tau = \\
 &= -b(t_k) \int_{-\infty}^{-A} x^*(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} - b(t_k) \int_A^{\infty} x^*(\tau) \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} - \\
 &- b(t_k) \sum_{l=0}^{2N} \int_{\Delta_l} [x^*(\tau) - x^*(t_l) \varphi_l(\tau)] \frac{d\tau}{(\tau - t_k)^2} = i_1(k) + i_2(k) + i_3(k), \\
 &k = 0, 1, \dots, 2N.
 \end{aligned}$$

Поскольку матрица D обратима, то

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}_N^*\| \leq \|D^{-1}\| \|G\|, \quad (3.22)$$

где $\bar{x}^* = (x^*(t_0), x^*(t_1), \dots, x^*(t_{2N}))$, $\bar{x}_N^* = (x_N^*(t_0), x_N^*(t_1), \dots, x_N^*(t_{2N}))$. Структура вектора G очевидна.

Оценим нормы векторов $I_j = (i_j(0), i_j(1), \dots, i_j(2N))$, $j = 1, 2, 3$. Норма $\|I_2\|$ оценена в [9] при $A = 1$. Перенос полученной оценки на случай произвольного A не вызывает затруднения. Из условий, наложенных на функцию $x^*(t)$, следует, что $\|I_1\| + \|I_2\| \leq C/A$.

Таким образом, при $N \rightarrow \infty$ и при $A \rightarrow \infty$ справедлива оценка $\|x^* - x_N^*\| \rightarrow 0$.

3.3. Третья вычислительная схема

Обозначим через t_k узлы $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n, \dots, n$ и введем интервалы $\Delta_{-n-1} = (-\infty, t_{-n})$, $\Delta_{-k} = [t_{-k}, t_{-k+1})$, $k = n, n-1, \dots, 1$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\Delta_n = [t_n, \infty)$.

Приближенное решение уравнения (3.1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=-n-1}^n \alpha_k \psi_k(t),$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \in (-\infty, \infty) \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = -n-1, -n, \dots, n.$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ будем искать из решения системы линейных уравнений

$$\begin{aligned}
 &a(\bar{t}_i) \alpha_i + b(\bar{t}_i) \alpha_{-n-1} \int_{-\infty}^{t_{-n}} \frac{d\tau}{(t - \bar{t}_i)^2} + b(\bar{t}_i) \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^2} + \\
 &+ b(\bar{t}_i) \alpha_n \int_{t_n}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_i)^2} + \frac{\pi}{2n+1} \sum_{k=-n}^n (1 + \bar{t}_k^2) h(\bar{t}_i, \bar{t}_k) \alpha_k = f(\bar{t}_i), \quad i = -n-1, \dots, n,
 \end{aligned} \quad (3.23)$$

где $\bar{t}_{-n-1} = t_{-n} - 1, \bar{t}_k = (t_{k+1} + t_k)/2, k = -n, \dots, n, \bar{t}_{n+1} = t_n + 1$.

Преобразование системы уравнений (3.23) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений проводится по аналогии с первой и второй вычислительными схемами.

По аналогии с проведенными выше рассуждениями, можно показать в случае отрицательной логарифмической нормы матрицы, стоящей в левой части системы уравнений (3.23), однозначную разрешимость последней. Доказать сходимость решений последовательности уравнений (3.23) при $n \rightarrow \infty$ к решению уравнения (3.1) не удастся, хотя при решении модельных примеров подобный метод продемонстрировал свою эффективность [17].

4. Приближенное решение нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений типа Пейерлса теории дислокации

Рассмотрим частные случаи нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений, определенных на числовой оси, – уравнения Пейерлса-Набарро и Бенжамина-Оно, играющие важную роль в теории дислокации и теории волн на водной поверхности.

Эти уравнения имеют сходную конструкцию:

1) уравнение Пейерлса-Набарро –

$$\frac{1}{1-v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + \sin \frac{2\pi x(t)}{b} = 0, \quad (4.1)$$

где b, v – вещественные константы, $b > 0, 0 < v < 1$;

2) уравнение Бенжамина-Оно –

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau-t)^2} + x(t) - x^2(t) = 0.$$

Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением уравнения Пейерлса-Набарро. Для приближенного решения уравнения (4.1) рассмотрим три вычислительные схемы и сравним их погрешность.

4.1. Первая вычислительная схема

Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k \psi_k(t), \quad (4.2)$$

где

$$\psi_k(t) = \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{2} + \sum_{l=1}^n c_l(t) c_l(t_k) + s_l(t) s_l(t_k) \right),$$

$$c_l(t) = \cos(2l \arctg t), s_l(t) = \sin(2l \arctg t), t_k = tg \frac{k\pi}{2n+1}, k = -n, \dots, n.$$

В соответствии с технологией метода коллокации коэффициенты $\{\alpha_k\}$ находятся из системы уравнений

$$\frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \alpha_k \left(\sum_{l=1}^n 2l \frac{1}{1+t_k^2} (c_l(t_i) c_l(t_k) + s_l(t_i) s_l(t_k)) \right) + \sin \frac{2\pi \alpha_i}{b} = 0, \quad i = -n, \dots, n. \quad (4.3)$$

Проведя в системе (4.3) несложные преобразования, получим:

$$\frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \alpha_k \left(\sum_{l=1}^n \frac{2l}{1+t_k^2} \cos \left(2l \left(\frac{i\pi - k\pi}{2n+1} \right) \right) \right) + \sin \frac{2\pi\alpha_i}{b} = 0, \quad i = -n, \dots, n. \quad (4.4)$$

Для решения уравнения (4.4) воспользуемся непрерывным операторным методом. Введем вспомогательную переменную u и поставим системе (4.4) в соответствие систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha_i(u)}{du} = \gamma_i \left(\frac{2}{2n+1} \sum_{k=-n}^n \alpha_k(u) \left(\sum_{l=1}^n \frac{2l}{1+t_k^2} \cos \left(2l \left(\frac{i\pi - k\pi}{2n+1} \right) \right) \right) + \right. \\ \left. + \sin \frac{2\pi\alpha_i(u)}{b} \right), \quad i = -n, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Здесь значения $\gamma_i = \pm 1$, $i = -n, \dots, n$, подбираются таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана, стоящего в правой части системы уравнений (4.5), была бы отрицательной в некотором банаховом пространстве.

В этом случае система (4.5) при $u \rightarrow \infty$ сходится к решению системы (4.4) по норме пространства, в котором логарифмическая норма отрицательна.

4.2. Вторая вычислительная схема

Воспользуемся сплайн-коллокационным методом со сплайнами первого порядка для приближенного решения уравнения (4.1).

Обозначим через A достаточно большое положительное число и аппроксимируем уравнение (4.1) следующим гиперсингулярным интегральным уравнением

$$\int_{-A}^A \frac{x(\tau) d\tau}{(\tau - t)^2} + \sin \frac{2\pi x(t)}{b} = 0. \quad (4.6)$$

Введем узлы $t_k = -A + \frac{A}{n}k$, $k = 0, 1, \dots, 2n$, и обозначим через Δ_k интервалы $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, 2n-2$, $\Delta_{2n-1} = [t_{2n-1}, t_{2n}]$.

Приближенное решение уравнения (4.6) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{2n} \alpha_k \varphi_k(t),$$

где базисные функции φ_k определены выражениями (3.9)–(3.11).

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ находим из системы алгебраических уравнений

$$\frac{1}{1-v} \sum_{k=0}^{2n} \int_{-A}^A \frac{\alpha_k \varphi_k(\tau)}{(\tau - t_l)^2} d\tau + \sin \frac{2\pi\alpha_l \varphi_l(t_l)}{b} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, 2n, \quad (4.7)$$

где $k = 0, 1, \dots, 2n$.

Применение к системе (4.7) непрерывного метода решения операторных уравнений приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_l(u)}{du} = \gamma_l \left(\frac{1}{1-v} \sum_{k=0}^{2n} \int_{-A}^A \frac{\alpha_k(u) \varphi_k(\tau)}{(\tau - t_l)^2} d\tau + \sin \frac{2\pi\alpha_l(u) \varphi_l(t_l)}{b} \right), \quad l = 0, 1, \dots, 2n. \quad (4.8)$$

Значения γ_i , $\gamma_i = \pm 1$, – константы, подбираемые таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана оператора, стоящего в правой части системы уравнений (4.8), была бы отрицательной в метрике некоторого банахова пространства. В этом банаховом пространстве система (4.8) имеет при $u \rightarrow \infty$ решение, сходящееся к решению системы уравнений (4.7).

4.3. Третья вычислительная схема

Обозначим через t_k узлы $t_k = \frac{k\pi}{2n+1}$, $k = -n, \dots, n$, и введем интервалы $\Delta_{-n-1} = (-\infty, t_{-n})$, $\Delta_{-k} = [t_{-k}, t_{-k+1})$, $k = n, n-1, \dots, 1$, $\Delta_k = [t_k, t_{k+1})$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, $\Delta_n = [t_n, \infty)$.

Приближенное решение уравнения (4.1) будем искать в виде функции

$$x_n(t) = \sum_{k=-n-1}^n \alpha_k \psi_k(t),$$

где

$$\psi_k(t) = \begin{cases} 1, & t \in \Delta_k, \\ 0, & t \in (-\infty, \infty) \setminus \Delta_k, \end{cases} \quad k = -n-1, -n, \dots, n.$$

Коэффициенты $\{\alpha_k\}$ будем искать из решения системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_{-n-1}}{1-v} \int_{-\infty}^{t_{-n}} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k \int_{\Delta_k} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \frac{\alpha_n}{1-v} \int_{t_n}^{\infty} \frac{d\tau}{(\tau - \bar{t}_l)^2} + \\ + \sin \frac{2\pi\alpha_l}{b} = 0, \quad l = -n-1, -n, \dots, n. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Здесь $\bar{t}_{-n-1} = t_{-n} - 1$; $\bar{t}_k = (t_k + t_{k+1})/2$, $k = -n, -n+1, \dots, n-1$, $\bar{t}_n = t_n + 1$.

Воспользовавшись определением гиперсингулярных интегралов, систему (4.9) представим в виде

$$\begin{aligned} -\frac{\alpha_{-n-1}}{1-v} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{1}{t_{k+1} - t_{-n} + 1} - \frac{1}{t_k - t_{-n} + 1} \right) + \\ + \frac{\alpha_n}{1-v} \frac{1}{2t_n + 1} + \sin \frac{2\pi\alpha_{-n-1}}{b} = 0, \\ -\frac{\alpha_{-n-1}}{1-v} \frac{1}{t_{-n} - \bar{t}_l} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{1}{t_{k+1} - \bar{t}_l} - \frac{1}{t_k - \bar{t}_l} \right) + \\ + \sin \frac{2\pi\alpha_l}{b} = 0, \quad l = -n, -n+1, \dots, n-1, \\ \frac{\alpha_{-n-1}}{1-v} \frac{1}{2t_n + 1} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k \left(\frac{1}{t_{k+1} - \bar{t}_{n+1}} - \frac{1}{t_k - \bar{t}_{n+1}} \right) - \frac{\alpha_n}{1-v} + \sin \frac{2\pi\alpha_n}{b} = 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Системе (4.10) поставим в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d\alpha_{-n-1}(u)}{du} = \lambda_{-n-1} \left(-\frac{\alpha_{-n-1}(u)}{1-v} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k(u) \left(\frac{1}{t_{k+1} - t_{-n} + 1} - \frac{1}{t_k - t_{-n} + 1} \right) + \right. \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\alpha_n(u)}{1-v} \frac{1}{2t_n+1} + \sin \frac{2\pi\alpha_{-n-1}(u)}{b} \Big) + \frac{\alpha_n(u)}{1-v} \frac{1}{2t_n+1} + \sin \frac{2\pi\alpha_{-n-1}(u)}{b} \Big), \\
\frac{d\alpha_l(u)}{du} &= \lambda_l \left(-\frac{\alpha_{-n-1}(u)}{1-v} \frac{1}{t_{-n}-\bar{t}_l} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k(u) \left(\frac{1}{t_{k+1}-\bar{t}_l} - \frac{1}{t_k-\bar{t}_l} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \sin \frac{2\pi\alpha_l(u)}{b} \right), \quad l = -n, -n, \dots, n-1, \\
\frac{d\alpha_n(u)}{du} &= \lambda_{n+1} \left(\frac{\alpha_{-n-1}(u)}{1-v} \frac{1}{2t_n+1} - \frac{1}{1-v} \sum_{k=-n}^{n-1} \alpha_k(u) \left(\frac{1}{t_{k+1}-\bar{t}_{n+1}} - \frac{1}{t_k-\bar{t}_{n+1}} \right) - \right. \\
& \quad \left. - \frac{\alpha_n(u)}{1-v} + \sin \frac{2\pi\alpha_n(u)}{b} \right) = 0.
\end{aligned}$$

где $\lambda_j = \pm 1$, $j = -n-1, \dots, n$.

Константы λ_j , $j = -n-1, \dots, n$, подбирают таким образом, чтобы логарифмическая норма якобиана оператора, стоящего в правой части системы уравнений (4.9), была бы отрицательной.

В случае, если логарифмическая норма отрицательна в некотором банахово пространстве, решение системы дифференциальных уравнений (4.11) сходится при $u \rightarrow \infty$ к решению системы уравнений (4.9).

З а м е ч а н и е 4.1 Для решения систем дифференциальных уравнений (4.5), (4.8), (4.11) может быть использован любой численный метод.

5. Модельные примеры

В качестве модельного примера возьмем уравнение уравнение Пейерлса-Набарро (4.1), т. к. известно его точное решение [14–15]: $x(t) = -\frac{b}{\pi} \arctg \frac{2(1-v)t}{b}$.

Уравнение (4.1) решалось методом сплайн-коллокации (4.7)–(4.8). Результаты вычислений при $A = 1000, n = 51$, числе итераций метода Эйлера $m = 500$ представлены на Рис. 5.1.

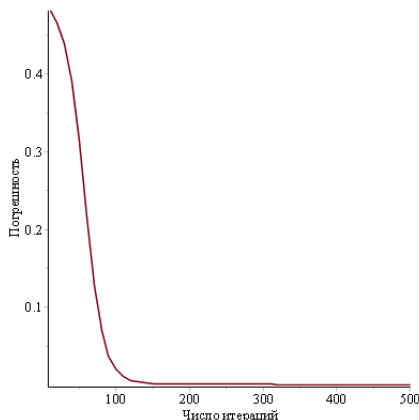


Рис. 5.1. Зависимость погрешности решения от числа итераций в методе Эйлера

Благодарности. Статья подготовлена при финансовой поддержке конкурса «Ректорские гранты», договор № 1/РГ от 08.04.2020.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. М.: Наука, 1978. 351 с.
2. Некрасов А. И. Теория крыла в нестационарном потоке. М.: Изд-во АН СССР, 1947. 65 с.
3. Бисплингхофф Р., Эшли Х., Халфмен Р. Аэроупругость. М.: Иностран. лит., 1958. 283 с.
4. Лэндал Э. Х. М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1969. 129 с.
5. Чикин Л. А. Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений // Уч. записки Казан. гос. ун-та. 1953. Т. 1136, № 10. С. 57 - 105.
6. Вайникко Г. М., Лифанов И. К., Полтавский Л. Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения. М.: Янус-К, 2001. 508 с.
7. Бойков И. В. Аналитические и численные методы решения гиперсингулярных интегральных уравнений // Динамические системы. 2019. Т. 9. №3. С. 244 - 272.
8. Gregor J.. O aproximaci obrazu v Hilbertove transformaci ortogonalnimi radami racionalnich lomenych funkci. Aplik. Matem. Ceskoslovenska Akademie VED. 1961. vol.6, No 3, pp. 214 - 240.
9. Boykov I. V., Rudnev V. A., Boykova A.I., Baulina O. A. New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations. Applied Numerical Mathematics. 2018. vol. 127. pp. 280-305.
10. Boykov I. V., Rudnev V. A., Boykova A.I., Approximate Methods for Solving Linear and Nonlinear Hypersingular Integral Equations. Axioms. 2020. vol. 9, No 3/
11. Бойков И. В. Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений // Дифференциальные уравнения. 2012. Т. 48, № 9. С. 1308-1314.
12. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 535 с.
13. Деккер К., Вервер Я. Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1988. 334 с.
14. Peierls R. The size of a dislocations. Proc. Phys. Soc. 1940. Vol. 52, pp. 34-40.
15. Karlin V., Maz'ya V. G., Movchan A. B., Willis J. R., Bullough R. Numerical Solution of Nonlinear Hypersingular Integral Equations of the Peierls Type in Dislocation Theory. SIAM J. Appl. Math. 2000. Vol. 60, No 2. pp. 664 - 678.

16. Boykov I. V., Ventsel E. S., Roudnev V. A., Boykova A. I. An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations. Applied Numerical Mathematics. 2014. vol. 86, pp. 1-21.
17. Boykov I. V., Ventsel E. S., Boykova A. I. An approximate solution of hypersingular integral equations. Applied Numerical Mathematics. 2010. vol. 60, pp. 607-628.

Поступила 2.09.2020

MSC2020 65R30

Approximate solution of hypersingular integral equations on the number axis

© I. V. Boykov¹, P. V. Aykashev², A. I. Boykova³

Abstract. In the paper we investigate approximate methods for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations defined on the number axis. We study equations with the second-order singularities because such equations are widely used in problems of natural science and technology. Three computational schemes are proposed for solving linear hypersingular integral equations. The first one is based on the mechanical quadrature method. We used rational functions as the basic ones. The second computational scheme is based on the spline-collocation method with the first-order splines. The third computational scheme uses the zero-order splines. Continuous method for solving operator equations has been used for justification and implementation of the proposed schemes. The application of the method allows to weaken the requirements imposed on the original equation. It is sufficient to require solvability for a given right-hand side. The continuous operator method is based on Lyapunov's stability for solutions of systems of ordinary differential equations. Thus it is stable for perturbations of coefficients and of right-hand sides. Approximate methods for solving nonlinear hypersingular integral equations are presented by the example of the Peierls - Naborro equation of dislocation theory. By analogy with linear hypersingular integral equations, three computational schemes have been constructed to solve this equation. The justification and implementation are based on continuous method for solving operator equations. The effectiveness of the proposed schemes is shown on solving the Peierls - Naborro equation.

Key Words: linear and nonlinear hypersingular integral equations, continuous operator method, collocation method, mechanical quadrature method

REFERENCES

1. Zh. Adamar, [*Cauchy problem for linear partial derivative equations of hyperbolic type*], Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 351 p.
2. A. I. Nekrasov, [*Wing theory in non-stationary flow*], AN SSSR Publ., Moscow, 1947 (In Russ.), 65 p.

¹**Ilya V. Boykov**, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, i.v.boykov@gmail.com

²**Pavel V. Aykashev**, assistant of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8076-4662>, aikashev.pavel@mail.ru

³**Alla I. Boykova**, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph.D.(Physics and Mathematics), ORCID: 0000-0003-0436-0460, allaboikova@mail.ru

3. R. Bisplinghoff, Kh. E. R. Khalfmen, [*Aeroelasticity*], Inostr. Lit. Publ., Moscow, 1958 (In Russ.), 283 p.
4. Kh. E. M. Lendal, [*Aerodynamics of aircraft wings and hulls*], Mashinostroyeniye Publ, Moscow, 1969 (In Russ.), 129 p.
5. L. A. Chikin, “[Special cases of the Riemann boundary value problem and singular integral equations]”, *Uchenyye zapiski Kazanskogo gosudarstvennogo universiteta*, **113**:10 (1953), 57–105 (In Russ.).
6. G. M. Vaynikko. I. K. Lifanov. L. N. Poltavskiy, [*Numerical methods in hypersingular integral equations and their applications*], Yanus-K Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 508 c.
7. I. V. Boykov, “[Analytical and numerical methods for solving hypersingular integral equations]”, *Dinamicheskoye sistemy*, **9**:3 (2009), 244–272 (In Russ.).
8. J. Gregor, “O aproximaci obrazu v Hilbertove transformaci ortogonalnimi radami racionalnich lomenych funkci”, *Applik. Matem. Ceskoslovenska Akademie VED*, **6**:3 (1961), 214–240.
9. I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, O. A. Baulina, “New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations”, *Applied Numerical Mathematics*, **127** (2018), 280–305.
10. I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, “Approximate Methods for Solving Linear and Nonlinear Hypersingular Integral Equations”, *Axioms*, **9**:3 (2020), 1–18.
11. I. V. Boykov, “[On a single continuous Method for solving nonlinear operator equations]”, *Differentsialnyye uravneniya*, **48**:9 (2012), 1308–1314 (In Russ.).
12. Yu. L. Daletskiy. M. G. Kreyn, [*Stability of solutions of differential equations in Banach space*], Nauka Publ., Moscow, 1970 (In Russ.), 535 c.
13. K. Dekker. Ya. Verver., *Ustoychivost metodov Runge-Kutty dlya zhestkikh nelineynykh differentsialnykh uravneniy* [*Stability of Runge-Kutta methods for rigid nonlinear differential equations*], Mir Publ, Moscow, 1988 (In Russ.), 334 c.
14. R. Peierls, “The size of a dislocations”, *Proc. Phys. Soc.*, **52** (1940), 34–40.
15. V. Karlin, V. G. Maz'ya, A. B. Movchan, J. R. Willis, R. Bullough, “Numerical Solution of Nonlinear Hypersingular Integral Equations of the Peierls Type in Dislocation Theory”, *SIAM J. Appl. Math.*, **60**:2 (2000), 664–678.
16. I. V. Boykov, E. S. Ventsel, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, “An approximate solution of nonlinear hypersingular integral equations”, *Applied Numerical Mathematics*, **86** (2014), 1–21.
17. I. V. Boykov, E. S. Ventsel, A. I. Boykova, “An approximate solution of hypersingular integral equations”, *Applied Numerical Mathematics*, **60**:6 (2010), 607–628.

Submitted 2.09.2020

УДК 517.96

О локальной структуре одномерных базисных множеств необратимых A -эндоморфизмов поверхностей

© В. З. Гринес¹, Е. В. Жужома²

Аннотация. Относительно недавно авторами статьи был открыт содержательный класс необратимых эндоморфизмов на двумерном торе. Замечательным свойством этих эндоморфизмов является то, что их неблуждающие множества содержат нетривиальные одномерные строго инвариантные гиперболические базисные подмножества (в терминологии С. Смейла и Ф. Пшэтицкого), которые обладают единственностью неустойчивого одномерного расслоения. Было доказано, что нетривиальные (отличные от периодических изолированных орбит) инвариантные множества могут быть только репеллерами. Заметим, что для обратимых эндоморфизмов (диффеоморфизмов) это не так. В настоящей работе доказано, что одномерные растягивающиеся однозначно гиперболические и строго инвариантные одномерные растягивающиеся аттракторы и одномерные сжимающиеся репеллеры необратимых A -эндоморфизмов замкнутых ориентируемых поверхностей имеют локальную структуру произведения интервала на нульмерное замкнутое множество (конечное или канторовское). Полученный результат контрастирует с существованием одномерных репеллеров фрактального типа, возникающих в комплексной динамике на римановой сфере и не обладающих свойствами существования единственного одномерного неустойчивого расслоения.

Ключевые слова: необратимые A -эндоморфизмы, гиперболические базисные множества, эндоморфизмы поверхностей

1. Введение и формулировка основных результатов

Под *эндоморфизмом* мы понимаем C^1 -гладкое сюръективное отображение многообразия на себя. Обозначим через $End(M)$ пространство эндоморфизмов замкнутого многообразия M , наделенное стандартной C^1 -топологией. Пусть $g \in End(M)$. Орбитой или g -орбитой точки $x_0 \in M$ называется множество $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = O(x_0)$ такое, что $g(x_i) = x_{i+1}$ для любого $i \in \mathbb{Z}$. Множество $\{x_i\}_{i=0}^{\infty} = O^+(x_0) \subset O(x_0)$ называется *положительной полу-орбитой* точки x_0 . Положительная полу-орбита определена однозначно, в то время как множество орбит, проходящих через фиксированную точку, в общем случае может быть континуальным. Для фиксированной орбиты $\{x_i\}_{i=-\infty}^{\infty} = O(x_0)$ множество $\{x_i\}_{i=0}^0 = O^-(x_0)$ называется *отрицательной полу-орбитой* орбиты $O(x_0)$.

Точка $x \in M$ эндоморфизма $f : M \rightarrow M$ называется *неблуждающей*, если для любой окрестности U точки x и любого $i_0 \in \mathbb{N}$ найдется $i \geq i_0$ такое, что $f^i(U) \cap U \neq \emptyset$. Множество неблуждающих точек образует *неблуждающее множество* эндоморфизма

¹Гринес Вячеслав Зигмундович, главный научный сотрудник международной лаборатории Динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4709-6858>, vgrines@yandex.ru

²Жужома Евгений Викторович, профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7607-2797>, zhuzhoma@mail.ru

f , и обозначается через $NW(f)$. Известно, что неблуждающее множество всегда вперед-инвариантно, то есть $f(NW(f)) \subset NW(f)$.

Орбита $O(x_0)$ называется *гиперболической*, если существует непрерывное расщепление касательного пространства

$$T_{O(x_0)}M = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T_{x_i}M = \mathbb{E}^s \oplus \mathbb{E}^u = \bigcup_{i=-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_{x_i}^s \oplus \mathbb{E}_{x_i}^u,$$

инвариантное относительно Dg , и такое, что

$$0 < \|Dg^m(v)\| \leq c\mu^m\|v\|, \quad \|Dg^m(w)\| \geq c^{-1}\mu^{-m}\|w\| \quad \text{где } v \in \mathbb{E}^s \setminus \{0\}, \quad w \in \mathbb{E}^u, \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

для некоторых постоянных $c > 0$, $0 < \mu < 1$ и римановой метрики на ТМ. Отметим, что неустойчивое подрасслоение $\mathbb{E}^u(x_0)$ зависит, вообще говоря, от отрицательной полу-орбиты $\{x_i\}_{i=-\infty}^0$, $\mathbb{E}^u(x_0) = \mathbb{E}^u(x_0, \{x_i\}_{i=-\infty}^0)$. Может оказаться $\mathbb{E}^u(x_0) \neq \mathbb{E}^u(y_0)$ для $x_0 = y_0$ с $O(x_0) \neq O(y_0)$. Такой эффект невозможен для устойчивого подрасслоения $\mathbb{E}^s(x_0)$, зависящего только от начальной точки x_0 . Множество Λ называется *гиперболическим*, если $f(\Lambda) = \Lambda$, и любая орбита, лежащая в Λ , является гиперболической, причем постоянные $c > 0$, $0 < \mu < 1$ в вышеприведенных оценках не зависят от выбора орбиты (поэтому иногда говорят о *равномерной гиперболичности*). Отметим, что равенство $f(\Lambda) = \Lambda$ гарантирует для любой точки $x_0 \in \Lambda$ наличие хотя бы одной отрицательной полу-орбиты, лежащей в Λ .

Эндоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$, называется *эндоморфизмом Аносова*, если все объемлющее многообразие M^n является гиперболическим множеством эндоморфизма f . Эндоморфизм Аносова $g: M \rightarrow M$ называется *растягивающим*, если устойчивое подрасслоение $\mathbb{E}^s = 0$. Другими словами, $\|Dg^m(w)\| \geq c^{-1}\mu^{-m}\|w\|$ для всех векторов $w \in TM$ и любых $m \in \mathbb{N}$.

Эндоморфизм $f: M \rightarrow M$ называется *A-эндоморфизмом*, если его неблуждающее множество $NW(f)$ гиперболическое, и в $NW(f)$ всюду плотны периодические точки. Напомним, что отображение $N \rightarrow N$ называется *транзитивным*, если существует точка $x \in N$, положительная полу-орбита которой плотна в N .

В работе [1] доказана Спектральная Теорема для A-эндоморфизмов, которая является обобщением Спектральной Теоремы С. Смейла [2], доказанной для A-диффеоморфизмов. Согласно [1], неблуждающее множество $NW(f)$ A-эндоморфизма $f: M \rightarrow M$ единственным образом с точностью до нумерации представляется в виде объединения замкнутых и попарно непересекающихся множеств

$$NW(f) = \Omega_1 \cup \dots \cup \Omega_l, \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{при } i \neq j,$$

таких, что $f(\Omega_j) = \Omega_j$ и $f|_{\Omega_j}: \Omega_j \rightarrow \Omega_j$ транзитивен для всех $1 \leq j \leq l$. Множества $\Omega_1, \dots, \Omega_l$ называются *базисными множествами*.

К настоящему времени имеется ряд законченных классификационных результатов для базисных множеств A-диффеоморфизмов [3–10]. Что же касается A-эндоморфизмов, которые не являются A-диффеоморфизмами, то к настоящему времени имеется небольшое число классов систем, для которых удастся описать структуру базисных множеств и получить законченные классификационные результаты. К таким классам относятся эндоморфизмы интервала и окружности, эндоморфизмы возникающие в комплексной динамике на римановой сфере и растягивающие эндоморфизмы многообразий большей размерности [11]. Следует отметить, что структура базисных множеств A-эндоморфизмов до сих пор изучена далеко не столь исчерпывающим образом даже для эндоморфизмов поверхностей.

В настоящей работе рассматриваются одномерные базисные множества A -эндоморфизмов замкнутых поверхностей. Важными с точки зрения приложений базисными множествами являются аттракторы и репеллеры. В статье выделяются специальные классы одномерных аттракторов и репеллеров, и полностью описывается их топологическая структура. Перейдем к изложению основных результатов.

Гиперболическое множество Λ называется *однозначно гиперболическим*, или множеством с *однозначно определенным неустойчивым расслоением*, если неустойчивое подрасслоение $\mathbb{E}^u(x_0)$ не зависит от отрицательной полу-орбиты $\{x_i\}_{i=-\infty}^0$ для любой точки $x_0 \in \Lambda$.

Базисное множество Ω_a называется *аттрактором*, если существует окрестность U множества Ω_a такая, что

$$\cap_{i \geq 0} f^i(U) = \Omega_a, \quad f(\text{clos } U) \subset U.$$

Аттрактор Ω_a называется *растягивающимся*, если его топологическая размерность равна размерности неустойчивого подрасслоения $\mathbb{E}^u(x_0) = \mathbb{E}^u(x_0, \{x_i\}_{i=-\infty}^0)$ для любой точки $x_0 \in \Omega_a$ и любой отрицательной полу-орбиты $\{x_i\}_{i=-\infty}^0 \subset \Omega_a$.

Базисное множество Ω_r называется *репеллером*, если существует окрестность U множества Ω_r такая, что

$$\cap_{i \geq 0} f^{-i}(U) = \Omega_r, \quad \text{clos } U \subset f(U).$$

Репеллер Ω_r называется *сжимающимся*, если его топологическая размерность равна размерности устойчивого подрасслоения $\mathbb{E}^s(x_0)$ для любой точки $x_0 \in \Omega_r$.

Базисное множество Ω называется *строго инвариантным*, если $f^{-1}(\Omega) = \Omega = f(\Omega)$. Непосредственно из определения гиперболичности вытекает, что в некоторой окрестности базисного множества эндоморфизм является локальным диффеоморфизмом. Ниже, говоря о том, что эндоморфизм не является диффеоморфизмом, мы будем для простоты считать, что **эндоморфизм является конечно кратным накрытием кратности не менее двух**. В частности, эндоморфизм является локальным гомеоморфизмом на всей поверхности.

Известно, что одномерный растягивающийся аттрактор A -диффеоморфизма $f : M^2 \rightarrow M^2$ замкнутой поверхности M^2 локально гомеоморфен произведению канторовского множества на отрезок. Следующее утверждение контрастирует с ситуацией, когда эндоморфизм является диффеоморфизмом, даже если аттрактор эндоморфизма строго инвариантен и имеет однозначно определенное неустойчивое расслоение (для диффеоморфизма это выполняется автоматически).

Теорема 1.1 Пусть $f : M^2 \rightarrow M^2$ – A -эндоморфизм замкнутой ориентруемой поверхности M^2 , и пусть Ω – одномерный растягивающийся аттрактор с однозначно определенным неустойчивым расслоением. Если Ω – строго инвариантный аттрактор, а f не является диффеоморфизмом, то Ω локально гомеоморфен произведению интервала на нульмерное конечное замкнутое множество.

Если опустить требование на строгую инвариантность, то теорема 1.1 становится неверной. Отметим также, что аналог теоремы 1.1 не имеет места, вообще говоря, для эндоморфизмов трехмерных многообразий. Достаточно рассмотреть произведение $\mathbb{T}^2 \times \mathbb{T}^1$ двумерного \mathbb{T}^2 и одномерного \mathbb{T}^1 тором. На первом множителе \mathbb{T}^2 зададим ДА-диффеоморфизм с изолированным источником и нетривиальным одномерным растягивающимся аттрактором, а на втором множителе \mathbb{T}^1 зададим линейный растягивающий эндоморфизм вида $x \mapsto 2x \bmod 1$. Результирующий эндоморфизм будет иметь

растягивающийся строго инвариантный однозначно гиперболический аттрактор, который локально гомеоморфен произведению канторовского множества на двумерную плоскость, то есть не будет конечным объединением топологических подмногообразий коразмерности один.

Следующая теорема показывает, что теорема 1.1 не верна для сжимающихся одномерных репеллеров (иногда, для краткости, одномерное базисное множество, локально гомеоморфное произведению канторовского множества на отрезок, называют базисным множеством *канторовского типа*).

Т е о р е м а 1.2 Пусть $f : M^2 \rightarrow M^2$ – A -эндоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности M^2 , и пусть Λ_r – одномерный сжимающийся репеллер с однозначно определенным неустойчивым расслоением. Если Λ_r – строго инвариантный репеллер, а f не является диффеоморфизмом, то Λ_r локально гомеоморфен произведению отрезка на канторовское множество.

Структура статьи следующая. В параграфе 2. приводятся предварительные сведения и доказываются вспомогательные результаты. В параграфе 3. доказываются основные теоремы.

2. Вспомогательные результаты

Пусть Λ – гиперболическое множество C^k -эндоморфизма $f : M \rightarrow M$ ($k \geq 1$), и пусть $p \in \Lambda$. Известно [1], [12], [13], что для достаточно малого $\delta > 0$ множество

$$W_{\delta,loc}^s(p) = \{x \in M : \varrho(f^i(p); f^i(x)) < \delta \ \forall i \geq 0\}$$

является C^k -вложенным открытым диском $\mathbb{B}^{\dim \mathbb{E}^s(p)}$ с касательным пространством $\mathbb{E}^s(p)$ в точке p , и для любой точки $x \in W_{\delta,loc}^s(p)$

$$\varrho(f^i(p); f^i(x)) \longrightarrow 0 \text{ экспоненциально быстро при } i \rightarrow \infty.$$

Множество $W_{\delta,loc}^s(p)$ называется *локальным устойчивым многообразием* в точке p . *Глобально устойчивым многообразием* (или, просто устойчивым многообразием) в точке p называется множество

$$W^s(p) = \{x \in M : \varrho(f^i(p); f^i(x)) \longrightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty\}.$$

Если Λ – компактное гиперболическое множество, то число δ можно взять так, чтобы были определены локальные устойчивые многообразия $W_{\delta,loc}^s(z)$ для всех точек $z \in \Lambda$. Тогда глобальное устойчивое многообразие $W^s(p)$ можно представить следующим образом

$$W^s(p) = \bigcup_{i \geq 0} \text{Comp}_p f^{-i} [W_{\delta,loc}^s(p_i)], \text{ где } p_i = f^i(p),$$

где через $\text{Comp}_z K$ обозначается компонента связности множества K , содержащая z .

В отличие от устойчивых расслоений \mathbb{E}^s , неустойчивые расслоения зависят не только от точки, но и от отрицательной полу-орбиты точки. Пусть $O^-(p) \subset \Lambda$ – отрицательная полу-орбита точки $p \in \Lambda$. Согласно [1], [12], [13] для достаточно малого $\delta > 0$ множество

$$W_{\delta,loc}^u(O^-(p)) = \{x \in M : \exists O^-(x), \varrho(p_{-i}; x_{-i}) < \delta \ \forall i \geq 0, p_{-i} \in O^-(p), x_{-i} \in O^-(x)\}$$

является C^k -вложенным открытым диском $\mathbb{B}^{\dim \mathbb{E}^u(O^-(p))}$ с касательным пространством, который мы будем обозначать через $\mathbb{E}^u(O^-(p))$, в точке p . Более того, для любой вышеприведенной точки $x \in W_{\delta,loc}^u(O^-(p))$

$$\varrho(p_{-i}; x_{-i}) \rightarrow 0 \text{ экспоненциально быстро при } i \rightarrow \infty.$$

Множество $W_{\delta,loc}^u(O^-(p))$ называется *локальным неустойчивым многообразием* относительно отрицательной полу-орбиты $O^-(p)$ в точке p . *Глобально неустойчивым многообразием* (или, просто неустойчивым многообразием) относительно отрицательной полу-орбиты $O^-(p)$ в точке p называется множество

$$W^u(O^-(p)) = \{x \in M : \exists O^-(x), \varrho(p_{-i}; x_{-i}) \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty,$$

$$\text{где } p_{-i} \in O^-(p), x_{-i} \in O^-(x)\},$$

которое можно представить в виде

$$W^u(O^-(p)) = \bigcup_{i \geq 0} f^i(W_{\delta,loc}^u(O^-(p_{-i}))), \text{ где } p_{-i} \in O^-(p).$$

Устойчивые и неустойчивые многообразия называются инвариантными многообразиями.

Следующее известное утверждение мы приводим для ссылок, см. [14], [15].

Предложение 2.1 *Если Ω – одномерный растягивающийся аттрактор с однозначно определенным неустойчивым расслоением, то $\Omega \subset \text{clos } W^u(x)$ для любой точки $x \in \Omega$. Если Λ_r – одномерный сжимающийся и строго инвариантный репеллер с однозначно определенным неустойчивым расслоением, то $\Lambda_r \subset \text{clos } W^s(x)$ для любой точки $x \in \Lambda_r$.*

Лемма 2.1 *Пусть $f : M^2 \rightarrow M^2$ – A -эндоморфизм замкнутой поверхности M^2 , и пусть Ω – одномерный растягивающийся аттрактор с однозначно определенным неустойчивым расслоением. Тогда множество $W^s(\Omega)$ открытое.*

Доказательство вытекает из наличия структуры произведения на Ω \square

Лемма 2.2 *Пусть $f : M^2 \rightarrow M^2$ – A -эндоморфизм замкнутой поверхности M^2 , и пусть Ω – одномерный растягивающийся аттрактор с однозначно определенным неустойчивым расслоением. Если существует трансверсально неизолированная точка $x_0 \in \Omega$, то любая точка $x \in \Omega$ также является трансверсально неизолированной.*

Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что Ω является C -плотным базисным множеством (в противном случае, перейдем к некоторой итерации f). Тогда $\Omega \subset \text{clos } W^u(x_0)$. Отсюда следует, что $W^u(x_0)$ пересекает $W_\delta^s(x)$ для произвольно малого $\delta > 0$. Из непрерывной зависимости неустойчивых многообразий (которые определены однозначно) вытекает, что все близкие к x_0 неустойчивые многообразия пересекают $W_\delta^s(x)$. Отсюда и трансверсальной неизолированности точки x_0 следует трансверсальная неизолированность точки x . \square

Следствие 2.1 *Пусть выполнены условия леммы 2.2. Тогда Ω локально гомеоморфно произведению отрезка либо на точку, либо на канторовское множество.*

Доказательство. Поскольку Ω – одномерный растягивающийся аттрактор с однозначно определенным неустойчивым расслоением, то Ω локально гомеоморфно произведению отрезка на замкнутое нульмерное (следовательно, нигде не плотное) множество. Это множество, согласно леммы 2.2, либо состоит из изолированных точек, либо из неизоллированных точек. В первом случае, число точек конечно, поскольку Ω компактно, и мы можем ограничиться одной точкой. Во втором случае, множество совершенное и, следовательно, канторовское. \square

3. Доказательство основных результатов

Напомним, что базисное множество Ω A -эндоморфизма $f : M^2 \rightarrow M^2$ называется *строго инвариантным*, если

$$f^{-1}(\Omega) = \Omega = f(\Omega).$$

Доказательство теоремы 1.1. Не уменьшая общности, можно считать, что Ω является S -плотным базисным множеством (в противном случае, перейдем к некоторой итерации f). Тогда, согласно предложению, 2.1, $\Omega \subset \text{clos} W^u(x_0)$ для любой точки $x \in \Omega$.

Согласно следствию 2.1, Ω локально гомеоморфно произведению отрезка либо на точку, либо на канторовское множество. В силу однозначности неустойчивого расслоения, Ω есть объединение неустойчивых одномерных многообразий своих точек [14], Теорема 1. Известно, что неустойчивые многообразия локально являются гладкими вложениями евклидовых пространств соответствующей размерности [1], [12]. Поэтому если предположить, что Ω локально гомеоморфно произведению отрезка на точку, то тогда Ω является замкнутым одномерным гладким многообразием, а ограничение $f_\Omega : \Omega \rightarrow \Omega$ есть растягивающий эндоморфизм [14]. В этом случае теорема доказана.

Осталось показать, что Ω не может быть локально гомеоморфным произведению отрезка на канторовское множество. Предположим противное. Дальнейшее доказательство разобьем на утверждения, которое мы будем называть *шагами*. Конец доказательства такого утверждения обозначается через \diamond .

Обозначим через \mathcal{N} множество точек $x \in \Omega$ таких, что одна из компонент множества $W^s(x) \setminus \{x\}$ не пересекается с Ω .

Шаг 1. Множество \mathcal{N} является строго инвариантным множеством, т.е.

$$f^{-1}(\mathcal{N}) = \mathcal{N} = f(\mathcal{N}).$$

Доказательство шага 1. Возьмем произвольную точку $x \in \mathcal{N} \subset \Omega$. Так как $f^{-1}(\Omega) = \Omega = f(\Omega)$, то $f(x) \cup f^{-1}(x) \subset \Omega$. Предположим, что $x_1 = f(x) \notin \mathcal{N}$. Это означает, что обе компоненты $W^{\pm s}(x_1)$ множества $W^s(x_1) \setminus \{x_1\}$ пересекаются с Ω . Обозначим через $W^{-s}(x)$ и $W^{+s}(x)$ компоненты множества $W^s(x) \setminus \{x\}$. Если образ под действием f одной из этих компонент пересекается с обоими компонентами $W^{\pm s}(x_1)$, то на этой компоненте должна быть точка, в которой нарушается условие локальной гомеоморфности f , поскольку $x_1 = f(x)$. Поэтому, не уменьшая общности, можно считать, что $f(W^{-s}(x)) = W^{-s}(x_1)$ и $f(W^{+s}(x)) = W^{+s}(x_1)$. Поскольку $f^{-1}(\Omega) = \Omega$, то на каждой из компонент $W^{-s}(x)$ и $W^{+s}(x)$ должны быть точки из Ω . Это противоречит включению $x \in \mathcal{N} \subset \Omega$. Таким образом, $f(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$.

Предположим, что точка $x_{-1} \in f^{-1}(x)$ не принадлежит \mathcal{N} . Это означает, что обе компоненты $W^{\pm s}(x_{-1})$ множества $W^s(x_{-1}) \setminus \{x_{-1}\}$ пересекаются с Ω . Аналогично предыдущему показывается, что $f(W^{-s}(x_{-1})) = W^{-s}(x)$ и $f(W^{+s}(x_{-1})) = W^{+s}(x)$. Так как $\Omega = f(\Omega)$, то на каждой компоненте $W^{\pm s}(x)$ имеются точки из Ω . Это противоречит

включению $x \in \mathcal{N} \subset \Omega$. Таким образом, $f^{-1}(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$, и следовательно, $\mathcal{N} \subset f(\mathcal{N})$. Учитывая включение $f(\mathcal{N}) \subset \mathcal{N}$, получаем $\mathcal{N} = f(\mathcal{N})$. Отсюда $f^{-1}(\mathcal{N}) = f^{-1} \circ f(\mathcal{N}) \supset \mathcal{N}$ и, следовательно $f^{-1}(\mathcal{N}) = \mathcal{N}$. \diamond

Шаг 2. Если точка $x \in \Omega$ принадлежит бесконечной орбите $O(x) \subset \Omega$, то $x \notin \mathcal{N}$. Более того, обе компоненты множества $W^s(x) \setminus \{x\}$ пересекаются с Ω сколь угодно близко к точке x .

Доказательство шага 2. Ясно, что отрицательная полуорбита $O^-(x) \subset \Omega$ также бесконечная. Из $O^-(x) \subset \Omega$ выберем сходящуюся последовательность $x_i \in f^{-n_i}(x) \rightarrow x_* \in M^2$, где $f^{n_i}(x_i) = x$, $n_i \rightarrow \infty$. Поскольку $f^{-1}(\Omega) = \Omega$, то такая последовательность существует. Так как множество Ω замкнутое, то $x_* \in \Omega$. В силу предположения о противном, обе компоненты множества $W^s(x_*) \setminus \{x_*\}$ пересекаются с Ω . Из непрерывной зависимости устойчивых многообразий от начальных условий вытекает, что существует число $\alpha > 0$ такое, что $W_{\pm\alpha}^s(x_i) \cap \Omega \neq \emptyset$ для всех достаточно больших i , где $W_{\pm\alpha}^s(x_i)$ означает дуги кривой $W^s(x)$ длины α (во внутренней топологии кривой $W^s(x)$) с концевой точкой x . Поскольку множество Ω инвариантное, а f^{n_i} равномерно сжимает $W_{\pm\alpha}^s(x_i)$, то в силу шага 1 имеем

$$f^{n_i}(W_{\pm\alpha}^s(x_i)) \cap \Omega = W_{\pm\varepsilon_i}^s(f^{n_i}(x_i)) \cap \Omega = W_{\pm\varepsilon_i}^s(x) \cap \Omega \neq \emptyset, \text{ и } \varepsilon_i \rightarrow 0 \text{ при } i \rightarrow \infty.$$

Это означает, что обе компоненты множества $W^s(x) \setminus \{x\}$ пересекаются с Ω сколь угодно близко к точке x . Полученное противоречие доказывает утверждение. \diamond

Поскольку f не является диффеоморфизмом, то любая точка из Ω принадлежит бесконечной орбите, которая лежит в Ω . Следовательно, $\mathcal{N} = \emptyset$. Покажем, для любой точки $y \in \Omega$ устойчивое многообразие $W^s(y)$ принадлежит Ω . Предположим противное. Так как Ω суть замкнутое множество, то множество $W^s(y) \setminus \Omega$ состоит из непустых (нетривиальных) интервалов. Поскольку Ω локально гомеоморфно произведению отрезка на канторовское множество, то имеются концевые точки $z \in W^s(y) \cap \Omega$ этих интервалов, к которым с одной из сторон на кривой $W^s(z)$ не накапливаются точки из Ω . Это противоречит шагу 2. Таким образом, $W^s(y) \subset \Omega$ для любой точки $y \in \Omega$. Тогда из теоремы о непрерывной зависимости неустойчивых многообразий от начальных условий и предложения 2.1 вытекает равенство $W^s(\Omega) = \Omega$. Согласно лемме 2.1, множество $W^s(\Omega) = \Omega$ является открытым. Поскольку множество Ω замкнутое, то $\Omega = M^2$. Это противоречит тому, что Ω является аттрактором и следовательно, имеет притягивающую область, т.е. $\Omega \neq M^2$. Полученное противоречие доказывает, что Ω не может быть локально гомеоморфным произведению отрезка на канторовское множество. \square

Доказательство теоремы 1.2. Не уменьшая общности, можно считать, что Λ_r является C -плотным базисным множеством (в противном случае, перейдем к некоторой итерации f). Согласно предложению, 2.1, $\Lambda_r \subset \text{clos } W^s(x)$ для любой точки $x \in \Lambda_r$. Тогда полностью аналогично доказательству следствия 2.1 показывается, что Λ_r локально гомеоморфно произведению отрезка либо на точку, либо на канторовское множество. Покажем, что первая возможность не реализуется. Предположим противное. Тогда Λ_r есть гладкое одномерное замкнутое многообразие. В силу гиперболичности, Λ_r не имеет границы и, следовательно, Λ_r является гладко вложенной окружностью. Поскольку Λ_r суть сжимающийся репеллер и состоит из устойчивых многообразий своих точек, то из равномерного сжатия вытекает, что существует итерация f^l , $l \in \mathbb{N}$, такая, что отображение $f^l|_{\Lambda_r} : \Lambda_r \rightarrow \Lambda_r$ имеет производную $0 < Df^l|_{\Lambda_r} \leq \alpha < 1$ для некоторого $\alpha > 0$ (если ввести ляпуновскую метрику, то $l = 1$). Обозначим через $|\Lambda_r|$ длину окружности Λ_r . Учитывая равенство $f^l|_{\Lambda_r}(\Lambda_r) = \Lambda_r$, получаем

$$|\Lambda_r| = |f^l|_{\Lambda_r}(\Lambda_r)| = \left| \int_{\Lambda_r} Df^l|_{\Lambda_r} dx \right| \leq \alpha \cdot |\Lambda_r|,$$

чего не может быть. Полученное противоречие показывает, что Λ_r локально гомеоморфен произведению отрезка на канторовское множество. \square

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (РНФ, проект № 17-11-01041).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Przytycki F. On Omega-stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A. *Studia Math.* 1977. vol. 60. pp. 61 - 77.
2. Smale S. Differentiable dynamical systems. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. vol. 73. pp. 747 - 817.
3. Гринес В.З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах // *Успехи мат. наук.* 1974. Т. 29, № 6. С. 163 - 164.
4. Гринес В.З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I // *Труды ММО.* 1975. Т. 32. С. 35 - 60.
5. Гринес В.З. О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах II // *Труды ММО.* 1977. Т. 34. С. 243 - 252.
6. Гринес В.З. О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами // *Матем. сборник.* 1997. Т. 188. С. 57 - 94.
7. Гринес В.З., Жужома Е.В. О топологической классификации ориентируемых аттракторов на n -мерном торе // *Успехи мат. наук.* 1979. Т. 34, № 4. С. 185 - 186.
8. Гринес В.З., Жужома Е.В. О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один // *Доклады РАН.* 2000. Т. 374. С. 274 - 276.
9. Плыкин Р.В. Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей // *Матем. сб.* 1974. Т. 94.
10. Grines V., Zhuzhoma E. On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors. *Trans. Amer. Math. Soc.* 2005. vol. 357, No.2. pp. 617 - 667.
11. Shub M. Endomorphisms of compact differentiable manifolds. *Amer. Journ. Math.* 1969. vol. 91. pp. 175 - 199.
12. Ikegami G. Hyperbolic sets and axiom A for endomorphisms. *Proc. of Inst. of Natural Sciences, Nihon Univ.* 1991. vol. 26. pp. 69 - 86.
13. Przytycki F. Anosov endomorphisms. *Studia Math.* 1976. vol. 58, No. 3. pp. 249 - 285.
14. Гринес В., Куренков Е. Д. О гиперболических аттракторах и репеллерах эндоморфизмов // *Нелинейная динамика.* 2017. Т. 13, № 4. С. 557 - 571.

15. Newhouse S. On codimension one Anosov diffeomorphisms. Amer. J. of Math. 1970. vol. 92, No. 3. pp. 761 - 770.

Поступила 7.10.2020

MSC2020 37D05

On local structure of one-dimensional basic sets of non-reversible A-endomorphisms of surfaces

© V. Z. Grines¹, E. V. Zhuzhoma²

Abstract. Recently the authors of the article discovered a meaningful class of non-reversible endomorphisms on a two-dimensional torus. A remarkable property of these endomorphisms is that their non-wandering sets contain nontrivial one-dimensional strictly invariant hyperbolic basic sets (in the terminology of S. Smale and F. Pshetitsky) which have the uniqueness of an unstable one-dimensional bundle. It was proved that nontrivial (other than periodic isolated orbits) invariant sets can only be repellers. Note that this is not the case for reversible endomorphisms (diffeomorphisms). In the present paper, it is proved that one-dimensional expanding uniquely hyperbolic and strictly invariant one-dimensional expanding attractors and one-dimensional contracting repellers of non-reversible A-endomorphisms of closed orientable surfaces have the local structure of the product of an interval by a zero-dimensional closed set (finite or Cantor). This result contrasts with the existence of one-dimensional fractal repellers arising in complex dynamics on the Riemannian sphere and not possessing the properties of the existence of a single one-dimensional unstable bundle.

Key Words: non-reversible A-endomorphisms, hyperbolic basic set, endomorphisms of surfaces

REFERENCES

1. F. Przytycki, "On Ω -stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A", *Studia Math.*, **60** (1977), 61 – 77.
2. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747 – 817.
3. V. Z. Grines, "The topological equivalence of one-dimensional basic sets of diffeomorphisms on two-dimensional manifolds", *Uspehi Mat. Nauk*, **29:6** (1974), 163 – 164 (In Russ.).
4. V. Z. Grines, "On topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold onto one-dimensional orientable basic sets I", *Trans. Moscow Math. Soc.*, **32** (1977), 31 – 56.
5. V. Z. Grines, "On topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold onto one-dimensional orientable basic sets II", *Trans. Moscow Math. Soc.*, **34** (1978), 237 – 245.

¹**Vyacheslav Z. Grines**, Chief Researcher, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University Higher School of Economics (603155, Nizhnii Novgorod, B. Pechyorskaya str., 25/12), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4709-6858>, vgrines@yandex.ru

²**Evgenii V. Zhuzhoma**, professor of Fundamentals Mathematics Department, National Research University Higher School of Economics (603155, Nizhnii Novgorod, B. Pechyorskaya str., 25/12), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7607-2797>, zhuzhoma@mail.ru

6. V. Z. Grines, “On the topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional attractors and repellers”, *Sb. Math.*, **188**:4 (1997), 537 – 569.
7. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, “The topological classification of orientable attractors on an n -dimensional torus”, *Russian Math. Surveys*, **34**:4 (1979), 163 – 164.
8. V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, “On rough diffeomorphisms with expanding attractors and contracting repellers of codimension one”, *Doklady RAN*, **374** (2000), 274 – 276 (In Russ.).
9. R. V. Plykin, “Sinks and Sources of A-diffeomorphisms of surfaces”, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **23**:2 (1974), 233 – 254.
10. V. Grines, E. Zhuzhoma, “On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **357**:2 (2005), 617 – 667.
11. M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds.”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175 – 199.
12. G. Ikegami, “Hyperbolic sets and axiom A for endomorphisms”, *Proc. of Inst. of Natural Sciences, Nihon Univ.*, **26** (1991), 69 – 86.
13. F. Przytycki, “Anosov endomorphisms”, *Studia Math.*, **58**:3 (1976), 249 – 285.
14. V. Z. Grines, E. V. Kurenkov, “On hyperbolic attractors and repellers of endomorphisms”, *Nelineinaya dynamika*, **13**:4 (2017), 557 – 571 (In Russ.).
15. S. Newhouse, “On codimension one Anosov diffeomorphisms”, *Amer. J. of Math.*, **92**:3 (1970), 761 – 770.

Submitted 7.10.2020

УДК 517.9

Энергетическая функция Морса-Ботта для поверхностных Ω -устойчивых потоков

© А. Е. Колобянина¹, В. Е. Круглов²

Аннотация. В настоящей работе рассмотрен класс Ω -устойчивых потоков на поверхностях, т. е. потоков на поверхностях с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических предельных циклов. Класс Ω -устойчивых потоков является обобщением класса потоков Морса-Смейла, допускающим наличие седловых связок, не образующих циклы. Авторами построена энергетическая функция Морса-Ботта для любого такого потока. Полученные результаты являются идейным продолжением классических работ С. Смейла, доказавшего существование энергетической функции Морса для градиентно-подобных потоков, и К. Мейера, установившего существование энергетической функции Морса-Ботта для потоков Морса-Смейла. Специфика Ω -устойчивых потоков выводит их за рамки структурной устойчивости, однако убывание вдоль траекторий таких потоков по-прежнему отслеживается регулярной функцией Ляпунова.

Ключевые слова: Ω -устойчивый поток, энергетическая функция, предельный цикл, функция Морса-Ботта, поверхность

1. Введение

В работе А. А. Андропова и Л. С. Понтрягина [1] впервые были введены потоки плоскости, называемые сейчас *потоками Морса-Смейла*. Они обладают конечным числом гиперболических неподвижных точек и замкнутых траекторий, составляющих все неблуждающее множество системы, и не имеют *связок*, т. е. траекторий, соединяющих седловые точки. С. Смейл в работе [2] показал, что локально градиентный поток Морса-Смейла без предельных циклов (поток Морса-Смейла без предельных циклов называется *градиентно-подобным*) в подходящей метрике является градиентным, порожденным некоторой *функцией Морса* – гладкой функцией с невырожденными критическими точками. В этом случае функция Морса убывает вдоль неособых траекторий потока, а множество неподвижных точек потока совпадает с множеством критических точек функции Морса. Так была впервые построена т. н. *энергетическая функция* для динамических систем, т. е. гладкая функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий, множество критических точек которой совпадает с неблуждающим множеством системы.

К. Мейер в работе [3] построил энергетическую функцию для произвольного потока Морса-Смейла, обобщив таким образом результат Смейла. В силу наличия у такого потока в общем случае периодических траекторий энергетическая функция уже не

¹Колобянина Анна Евгеньевна, студент факультета информационных технологий, математики и механики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5312-4478>, akolobyannina@mail.ru

²Круглов Владислав Евгеньевич, аспирант, преподаватель кафедры фундаментальной математики, научный сотрудник лаборатории динамических систем и приложений, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

могла быть функцией Морса, а являлась ее обобщением – *функцией Морса-Ботта*, имеющей точки первой степени вырождения вдоль предельных циклов.

В работе [4] был сделан первый шаг в обобщении результатов К. Мейера, а именно была построена энергетическая функция для Ω -устойчивого потока с одной седловой связкой на сфере. В работе [5] было продолжено обобщение результатов К. Мейера применительно к классу Ω -устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях.

В настоящей работе построена энергетическая функция Морса-Ботта для произвольных поверхностных Ω -устойчивых потоков.

2. Основные определения и понятия

Поток $f^t: M \rightarrow M$, заданный на замкнутом многообразии M , называется Ω -устойчивым, если существует такая окрестность потока f^t , что для любого потока g^t из этой окрестности существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, осуществляющий эквивалентность потоков на их неблуждающих множествах Ω_{f^t} и Ω_{g^t} .

Ω -устойчивые потоки на поверхности характеризуются гиперболическим неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа неподвижных точек и конечного числа предельных циклов.

Пусть $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ – C^2 -гладкая функция, заданная на многообразии M . Точка $p \in M$ называется *критической точкой* функции $\varphi(x)$, если $\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)|_p = \frac{d\varphi}{dx_1}(p) = \dots \frac{d\varphi}{dx_n}(p) = 0$, а $\varphi(p)$ называется *критическим значением* функции $\varphi(x)$. В противном случае точка p называется *регулярной точкой*, а $\varphi(p)$ – *регулярным значением* функции $\varphi(x)$.

Обозначим через Cr_φ множество критических точек функции φ .

Точка $p \in Cr_\varphi$ называется *невыврожденной критической точкой индекса* $q_p \in \{0, \dots, n\}$, если в точке p существует локальная карта (V_p, ϕ_p) такая, что $\phi_p(y) = (x_1(y), \dots, x_n(y))$, $y \in V_p$ и

$$\varphi(y) = \varphi(p) - \sum_{i=1}^{q_p} x_i^2(y) + \sum_{i=q_p+1}^n x_i^2(y).$$

Связное подмногообразие $C \subset Cr_\varphi$ размерности $k \in \{1, \dots, n-1\}$ многообразия M называется *невыврожденным критическим подмногообразием индекса* $q_p \in \{0, \dots, n-k\}$, если в любой точке $p \in C$ существует локальная карта (V_p, ϕ_p) такая, что $\phi_p(y) = (x_1(y), \dots, x_n(y))$, $y \in V_p$, $\phi_p(V_p \cap C) \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \dots = x_{n-k} = 0\}$ и

$$\varphi(y) = \varphi(p) - \sum_{i=1}^{q_p} x_i^2(y) + \sum_{i=q_p+1}^{n-k} x_i^2(y).$$

Функция φ называется *функцией Морса-Ботта*, если любая компонента связности множества Cr_φ является либо невырожденной критической точкой, либо принадлежит невырожденному критическому подмногообразию.

Обозначим через S замкнутую поверхность и через G – класс Ω -устойчивых потоков на S .

Энергетической функцией потока $f^t \in G$ назовём функцию Морса-Ботта $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

1) $Cr_\varphi = \Omega_{f^t}$, при этом функция φ имеет невырожденные критические точки в неподвижных точках потока f^t , а предельные циклы потока f^t являются ее невырожденными одномерными критическими подмногообразиями;

2) функция φ убывает вдоль блуждающих траекторий потока f^t ($\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$) для любой $x \notin \Omega_{f^t}$ и любого $t > 0$) и постоянна на компонентах связности неблуждающего множества.

3. Построение энергетической функции

Пусть $f^t \in G$. Энергетическая функция $\varphi : S \rightarrow \mathbb{R}$ для потока f^t будет построена в несколько этапов.

Т е о р е м а 3.1 *Для любого потока $f^t \in G$ существует энергетическая функция.*

Д о к а з а т е л ь с т в о.

1. Введем отношение Смейла на множестве неподвижных точек и периодических траекторий, являющихся компонентами связности неблуждающего множества Ω_{f^t} : для двух компонент связности β_1 и β_2 неблуждающего множества Ω_{f^t} положим, что $\beta_1 < \beta_2$ тогда и только тогда, когда $W_{\beta_1}^s \cap W_{\beta_2}^u \neq \emptyset$. В силу отсутствия циклов у Ω -устойчивого потока отношение Смейла является отношением частичного порядка и, следовательно, может быть продолжено до отношения линейного порядка. Перенумеруем неподвижные точки и предельные циклы согласно этому порядку.

Каждой компоненте связности неблуждающего множества присвоим индексы q, j , где $q = 0, 1, 2, 3$ или 4, если компонента является стоком, седлом, источником, устойчивым или неустойчивым предельным циклом соответственно; j – номер компоненты в линейном порядке (см. Рис. 3.1). Обозначим каждую такую компоненту $\beta_{q,j}$.

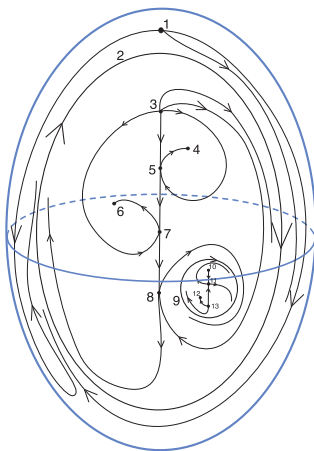


Рис. 3.1. Фазовый портрет потока $f^t \in G$ на сфере S^2 с упорядоченными компонентами неблуждающего множества

2. Поскольку $\beta_{q,j}$, где $q = \overline{0, 2}$ – гиперболическая неподвижная точка потока f^t , то в локальных координатах $X = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ касательное к траекториям потока векторное поле имеет вид

$$\dot{X} = A_{q,j}X + g_{q,j}(X),$$

где $A_{q,j}$ матрица с собственными значениями с ненулевой действительной частью и $g_{q,j}(0) = dg_{q,j}(0) = 0$. Согласно теории Ляпунова, существуют симметрические матрицы $B_{q,j}$ и $C_{q,j}$ такие, что квадратичная форма $w_{q,j}(X) = X^T B_{q,j} X$ положительно определена, а квадратичная форма $v_{q,j}(X) = X^T C_{q,j} X$ невырождена, при этом

$A_{q,j}^T C_{q,j} + C_{q,j} A_{q,j} = -B_{q,j}$. Кроме того, индекс $C_{q,j}$ равен числу собственных значений матрицы $A_{q,j}$ с положительной вещественной частью.

Тогда существует окрестность $U_{q,j}$ неподвижной точки $\beta_{q,j}$, в которой функция

$$\varphi_{q,j}(x, y) = j + v_{q,j}(x, y)$$

является локальной энергетической функцией Морса для потока f^t .

3. Поскольку $\beta_{q,j}$, где $q = \overline{3, 4}$, j – гиперболический предельный цикл, то в локальных координатах (ϑ, x) касательное к траекториям потока векторное поле имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega_{q,j} + \theta_{q,j}(\vartheta, x) \\ \dot{x} = a_{q,j}(\vartheta)x + g_{q,j}(\vartheta, x), \end{cases}$$

где $a_{q,j}$ – периодическая функция периода 1; $\theta, g_{q,j}$ – периодические функции периода 1 по координате ϑ , где $\theta_{q,j}(\vartheta, 0) = 0$ и $g_{q,j} = o(\|x\|)$. Рассмотрим линейную часть полученной системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\vartheta} = \omega_{q,j}, \\ \dot{x} = a_{q,j}(\vartheta)x. \end{cases}$$

Решение уравнения $\dot{\vartheta} = \omega_{q,j}$ выглядит следующим образом $\vartheta_{q,j}(t) = \omega_{q,j}t + \vartheta_{q,j}(0)$. Согласно теории Флоке, решение уравнения $\dot{x} = a_{q,j}(\vartheta)x$ может быть записано в виде $x_{q,j}(\vartheta) = e^{s_{q,j}\vartheta} P_{q,j}(\vartheta)$, где $s_{q,j}$ – константа, а $P_{q,j}$ – периодическая функция периода 1 такая, что $P_{q,j}(\vartheta) = P_{q,j}(\vartheta + 1)$ или $P_{q,j}(\vartheta) = -P_{q,j}(\vartheta + 1)$.

Положим $\varphi_{q,j}(\vartheta, x) = s_{q,j}x_{q,j}^2(\vartheta)P_{q,j}^2(\vartheta) = sx^2p^2$. Тогда

$$\dot{\varphi} = 2sxp(\dot{x}p + x\dot{p}).$$

Поскольку $\dot{x} = e^{s\vartheta}(sp + \dot{p}) = e^{s\vartheta}p\left(s + \frac{\dot{p}}{p}\right) = x\left(s + \frac{\dot{p}}{p}\right)$ и $\dot{x} = ax$, то $a = s + \frac{\dot{p}}{p}$, следовательно $\dot{p} = ap - sp$. Тогда

$$\varphi = 2sxp(axp + xap - sxp) = -2s^2x^2p^2 + 4sx^2p^2a,$$

где $v_{q,j}(\vartheta, x) = -2s^2x^2p^2 = -2s_{q,j}^2x_{q,j}^2(\vartheta)P_{q,j}^2(\vartheta)$, а $o(\vartheta) = 4sx^2p^2a$.

Тогда существует окрестность $U_{q,j}$ предельного цикла $\beta_{q,j}$, в которой функция

$$\varphi_{q,j}(\vartheta, x) = b_{q,j} + v_{q,j}(\vartheta, x)$$

является локальной энергетической функцией Морса-Ботта для потока f^t .

4. Не уменьшая общности, будем считать, что окрестности $U_{q,j}$, построенные в пунктах 2 и 3 попарно не пересекаются для различных q, j . Более того (Рис. 3.2),

$$U_{0,j} = \varphi_{0,j}^{-1}([j, j + 1/4]), U_{2,j} = \varphi_{2,j}^{-1}([j, j - 1/4]),$$

$$U_{3,j} = \varphi_{3,j}^{-1}([j, j + 1/4]), U_{4,j} = \varphi_{4,j}^{-1}([j, j - 1/4]),$$

а окрестность $U_{1,j}$ седловой точки $\beta_{1,j}$ имеет вид криволинейного восьмиугольника, четыре стороны которого лежат на четырех компонентах связности линий уровня $\varphi_{1,j}^{-1}(j \pm 1/4)$, а остальные четыре лежат на различных траекториях потока f^t (Рис. 3.3).

Положим $U_+ = \bigcup_{q=0,3} U_{q,j}$, $U_- = \bigcup_{q=2,4} U_{q,j}$ и обозначим через φ_+ , φ_- построенные на этих множествах локальные энергетические функции.

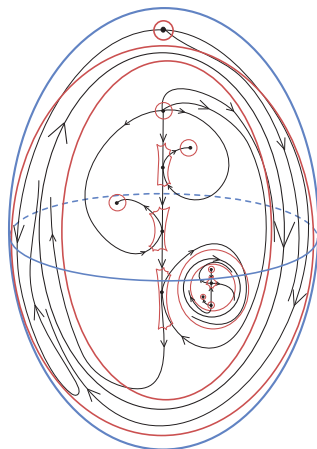


Рис. 3.2. Фазовый портрет потока f^t на 2-сфере с окрестностями неподвижных точек и предельных циклов

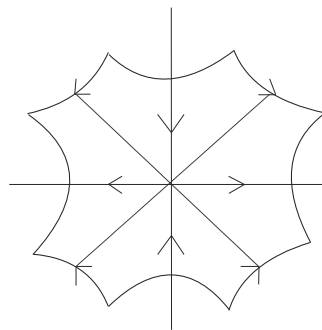


Рис. 3.3. Окрестность $U_{\beta_{1,j}}$

5. По построению множество $\varphi_{1,j}^{-1}(j \pm 1/4) \cap \partial U_{1,j}$ состоит из дуг $\delta_{j\pm}^1, \delta_{j\pm}^2$, при этом будем считать, что обозначения выбраны так, что $\delta_{j-}^1, \delta_{j-}^2$ пересекают $W_{\beta_{1,j}}^s$, $\delta_{j+}^1, \delta_{j+}^2$ пересекают $W_{\beta_{1,j}}^u$. Для каждой точки a дуги δ_{j+}^1 обозначим через $t_a > 0$ значения времени такое, что $a_+ = f^{t_a}(a) \in \partial U_+$. Положим

$$\Delta_{j+}^1 = \bigcup_{a \in \delta_{j+}^1} \left(\bigcup_{t \in [0, t_a]} f^t(a) \right).$$

Определим функцию $\varphi_{\Delta_{j+}^1}$ на множестве Δ_{j+}^1 формулой

$$\varphi_{\Delta_{j+}^1}(f^t(a)) = t\varphi_+(a_+) + \frac{t_a - t}{t_a} (j - 1/4), \quad t \in [0, t_a].$$

Аналогичным образом определяются множества $\Delta_{j+}^2, \Delta_{j-}^1, \Delta_{j-}^2$ и функции $\varphi_{\Delta_{j+}^2}, \varphi_{\Delta_{j-}^1}, \varphi_{\Delta_{j-}^2}$. Положим $\Delta_{1,j} = \Delta_{j+}^1 \cup \Delta_{j+}^2 \cup \Delta_{j-}^1 \cup \Delta_{j-}^2$, $\tilde{U}_{1,j} = U_{1,j} \cup \Delta_{1,j}$ и $\tilde{U}_1 = \bigcup_j \tilde{U}_{1,j}$. Обозначим через φ_1 построенные на множестве \tilde{U}_1 энергетические функции.

6. Каждая компонента связности V_i множества $V = S \setminus (U_0 \cup U_2 \cup U_3 \cup U_4 \cup \tilde{U}_1)$ ограничена либо 1) двумя окружностями $c_- \subset \partial U_-$, $c_+ \subset \partial U_+$, либо 2) двумя окружностями $c_- \subset \partial U_-$, $c_+ \subset \partial U_+$ и двумя траекториями γ_- , γ_+ потока f^t .

В случае 1) для каждой точки $a_- \in c_-$ обозначим через $t_{a_-} > 0$ значения времени такое, что $a_+ = f^{t_{a_-}}(a_-) \in c_+$. Определим функцию φ_{V_i} на множестве V_i формулой

$$\varphi_{V_i}(f^t(a_-)) = t\varphi_+(a_+) + \frac{t_{a_-} - t}{t_{a_-}}\varphi_-(a_-), t \in [0, t_{a_-}].$$

В случае 2) существует диффеоморфизм $g : V_i \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ такой, что $g([0, 1] \times \{0\}) = c_-$, $g([0, 1] \times \{1\}) = c_+$, $g(\{0\} \times [0, 1]) = \gamma_-$, $g(\{1\} \times [0, 1]) = \gamma_+$. Положим $\tilde{\varphi}_- = g^{-1}|_{\{0\} \times [0, 1]} \circ \varphi_1$, $\tilde{\varphi}_+ = g^{-1}|_{\{1\} \times [0, 1]} \circ \varphi_1$. Определим функцию $\varphi_{[0, 1] \times [0, 1]}$ на $[0, 1] \times [0, 1]$ формулой

$$\varphi_{[0, 1] \times [0, 1]}(s, t) = s\tilde{\varphi}_+(t) + (1 - s)\tilde{\varphi}_-(t).$$

Положим $\varphi_{V_i} = g \circ \varphi_{[0, 1] \times [0, 1]}$.

Обозначим через φ_V функции, построенные на всех компонентах связности V_i .

7. Искомая энергетическая функция является сглаживанием (путем переопределения значений на линиях уровня) функции φ , следующий вид (Рис. 3.4):

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_+(x), & x \in U_+; \\ \varphi_-(x), & x \in U_-; \\ \varphi_1(x), & x \in \tilde{U}_1; \\ \varphi_V(x), & x \in V. \end{cases}$$

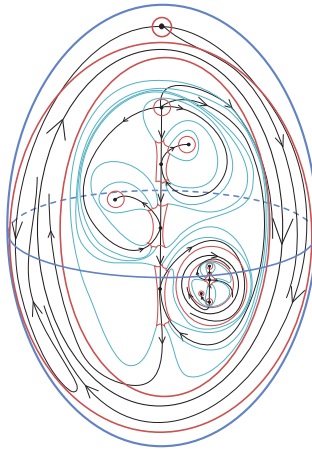


Рис. 3.4. Фазовый портрет потока f^t на 2-сфере с разбиением сферы на области линиями уровня функции φ

Доказательство завершено.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ, проект № 17-11-01041, за исключением локальной энергетической функции, которая построена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ, соглашение № 075-15-2019-1931. Авторы благодарят Починку Ольгу Витальевну за внимательное прочтение рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. Т. 14, № 5. С. 247-250.
2. Smale S. On gradient dynamical systems. *Annals of Mathematics*. 1961. vol. 74. pp. 199-206.
3. Meyer K. R. Energy function for Morse-Smale. *American Journal of Mathematics*. 1968. vol. 90, No. 4. pp. 1031-1040.
4. Босова А. А., Круглов В. Е., Починка О. В. Энергетическая функция для Ω -устойчивого потока с седловой связкой на поверхности // Таврический вестник информатики и математики. 2017. Т. 4, № 37. С. 51-58.
5. Колобянина А. Е., Круглов В. Е. Энергетическая функция для Ω -устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях // Журнал СВМО. 2019. Т. 21, № 4. С. 460-468.

Поступила 21.10.2020

MSC2020 37D05

Morse-Bott energy function for surface Ω -stable flows

© А. Е. Kolobyanina¹, V. E. Kruglov²

Abstract. In this paper, we consider the class of Ω -stable flows on surfaces, i.e. flows on surfaces with the non-wandering set consisting of a finite number of hyperbolic fixed points and a finite number of hyperbolic limit cycles. The class of Ω -stable flows is a generalization of the class of Morse-Smale flows, admitting the presence of saddle connections that do not form cycles. The authors have constructed the Morse-Bott energy function for any such flow. The results obtained are an ideological continuation of the classical works of S. Smale, who proved the existence of the Morse energy function for gradient-like flows, and K. Meyer, who established the existence of the Morse-Bott energy function for Morse-Smale flows. The specificity of Ω -stable flows takes them beyond the framework of structural stability, but the decrease along the trajectories of such flows is still tracked by the regular Lyapunov function.

Key Words: Ω -stable flow, energy function, limit cycle, Morse-Bott function, surface

REFERENCES

1. A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, "[Gough systems]", *Dokl. AN SSSR*, **14:5** (1937), 247–250 (in Russ.).

¹**Anna E. Kolobyanina**, student of Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, National Research University Higher School of Economics, Russian Federation (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5312-4478>, akolobyanina@mail.ru

²**Vladislav E. Kruglov**, graduate Student, Lecturer, Department of Fundamental Mathematics, Research Fellow, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, National Research University Higher School of Economics, Russian Federation (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

2. S. Smale, “[On gradient dynamical systems]”, *Annals of Mathematics*, **74** (1961), 199–206.
3. K. R. Meyer, “[Energy function for Morse-Smale]”, *American Journal of Mathematics*, **90**:4 (1968), 1031–1040.
4. A. A. Bosova, V. E. Kruglov, O. V. Pochinka, “[Energy funtion for Ω -stable flow with a saddle connection on a surface]”, *Tavrisheskiy vestnik informatiki i matematiki*, **4**:37, 51–58 (in Russ.).
5. A. E. Kolobyanina, V. E. Kruglov, “Energy function for Ω -stable flows without limit cycles on surfaces”, *SVMO*, **21**:4 (2019), 460–468 (in Russ.).

Submitted 21.10.2020

УДК 519.17

О новых алгоритмических приемах для задачи о взвешенной вершинной раскраске

© О. О. Развенская¹

Аннотация. Классическая NP-трудная задача о взвешенной вершинной раскраске состоит в минимизации количества цветов в раскрасках вершин задаваемого графа так, что для каждой вершины назначаются цвета, количество которых равно задаваемому весу вершины, причем смежным вершинам назначаются различные цвета. Соответствующее наименьшее количество цветов называется взвешенным хроматическим числом графа. Известно несколько полиномиальных алгоритмических приемов для построения эффективных алгоритмов для задачи о взвешенной вершинной раскраске. Например, стандартными приемами такого рода являются модульное разложение графов и разложение графов посредством разделяющих клик. В данной статье предлагаются новые полиномиальные способы редукции графов в форме удаления избыточных вершин и пересчета весов остальных вершин так, что взвешенное хроматическое число изменяется контролируемым образом. Приводится способ сведения задачи о взвешенной вершинной раскраске к ее невзвешенному варианту и его приложение. Эта работа вносит вклад в алгоритмическую теорию графов.

Ключевые слова: задача о взвешенной вершинной раскраске, эффективный алгоритм, вычислительная сложность

1. Введение

В работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. немеченные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Поэтому полный термин «обыкновенный граф» будет кратко называться «граф».

Вершинной раскраской графа $G = (V, E)$ называется произвольное отображение $c : V \rightarrow \mathbb{N}$ такое, что $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любых смежных вершин $v_1, v_2 \in V$. *Хроматическое число графа* G , которое обозначается через $\chi(G)$, – это минимальное число цветов в раскрасках вершин графа G . Хроматическое число графа определяется как наименьшее количество множеств попарно несмежных вершин (*независимых множеств*), на которые можно разбить множество его вершин. *Задача о вершинной раскраске* (*задача ВР*) для заданного графа состоит в вычислении его хроматического числа.

Для данного графа $G = (V, E)$ и функции $w : V \rightarrow \mathbb{N}_0$ пара (G, w) называется *взвешенным графом*. Для взвешенного графа (G, w) задача о *взвешенной вершинной раскраске* (далее, кратко задача ВВР) состоит в нахождении минимального числа k , обозначаемого через $\chi_w(G)$, такого, что существует функция $c : V \rightarrow 2^{\{1, 2, \dots, k\}}$, где $|c(v)| = w(v)$ для любой $v \in V$ и $c(v_1) \cap c(v_2) = \emptyset$ для любого ребра $v_1 v_2$ графа G . При этом предполагается, что вершины нулевого веса не окрашиваются, и поэтому их можно удалить из графа G . Элементы множества $\bigcup_{v \in V} c(v)$ называются *цветами*. Множество вершин, содержащих общий цвет, называется *цветовым классом*. Число $\chi_w(G)$

¹Развенская Ольга Олеговна, аспирант, кафедра прикладной математики и информатики, ФГАОУ ВО «НИУ ВШЭ» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1440-9910>, olga-olegov@yandex.ru

называется *взвешенным хроматическим числом* взвешенного графа (G, w) . Для любого графа G имеем $\chi_w(G) = \chi(G)$, где w задает вес каждой вершины, равный 1. Таким образом, задача ВВР обобщает задачу ВР. Задачи ВР и ВВР являются классическими NP-трудными задачами на графах.

Известно несколько полиномиальных алгоритмических приемов для построения эффективных алгоритмов для задачи ВВР. Например, стандартными такого рода приемами являются модульное разложение графов и разложение графов посредством разделяющих клик, которые подробно описываются в разделах 3.1-3.2 данной работы. В этой статье предлагаются новые полиномиальные способы редукции графов в форме удаления избыточных вершин и пересчета весов остальных вершин так, что взвешенное хроматическое число изменяется контролируемым образом. Приводится способ сведения задачи ВВР к задаче ВР и его приложение. Они представлены в разделах 3.4-3.6.

2. Некоторые обозначения

Пусть $G = (V, E)$ — граф и $V' \subseteq V$. Через \bar{G} обозначается граф, дополнительный к G , через $G(V')$ обозначается подграф G , порожденный подмножеством V' , а через $G \setminus V'$ обозначается результат удаления из G всех элементов V' (вместе со всеми инцидентными им ребрами).

3. Алгоритмические приемы построения эффективных алгоритмов для задачи ВВР

3.1. Модульное разложение графов

Пусть $G = (V, E)$ — граф. Множество $M \subseteq V$ называется *модулем* графа G , если для любой $x \in V \setminus M$ вершина x либо смежна со всеми вершинами M , либо не смежна ни с одной из них. Модуль графа называется *тривиальным*, если он содержит либо одну вершину, либо все вершины исходного графа. В противном случае он называется *нетривиальным*. Граф, не содержащий нетривиальных модулей, называется *примарным*. Например, 4-путь, в отличие от 4-цикла, является примарным.

Модульное разложение графа — это алгоритм, в основе которого лежит следующий результат Т. Галлаи о разложении (см. работу [1]):

Л е м м а 3.1 Пусть $G = (V, E)$ — граф, содержащий минимум две вершины. Тогда только в точности одно из следующих утверждений верно:

- 1) G — несвязный;
- 2) \bar{G} — несвязный;
- 3) G и \bar{G} — связные графы и существует множество вершин V' , содержащее не менее четырех вершин, а также единственное разбиение $P(G)$ множества V такое, что:
 - а) $G(V')$ — максимальный примарный порожденный подграф графа G ;
 - б) для любого $V'' \in P(G)$ множество V'' является модулем (возможно, тривиальным) графа G и $|V'' \cap V'| = 1$.

Согласно Лемме 3.1, существует три типа операций разложения. Первый: если G — несвязный граф, то разложим его на компоненты связности G_1, \dots, G_p . Второй: если \bar{G} имеет компоненты связности $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_q$, то разложим G на G_1, \dots, G_q . Третий: если G и \bar{G} — связные графы, то максимальные модули попарно не пересекаются, т. е. не

имеют общих вершин, и порождают разбиение $P(G)$. Таким образом, граф G разложен на подграфы $\{G(V'') : V'' \in P(G)\}$. Кроме того, стянем каждый элемент разбиения $P(G)$ в вершину и получим граф, изоморфный $G(V')$. Другими словами, $G(V')$ — порожденный подграф графа G , полученный путем взятия по одной вершине из каждого элемента $P(G)$.

Процесс разбиения, описанный выше, может быть представлен в виде дерева, определенного единственным образом, называемого *деревом модульного разложения* и обозначаемого через $T(G)$ для графа G . Его вершины соответствуют порожденным подграфам графа G . Для первых двух типов операций разложения корень дерева $T(G)$, соответствующий графу G , имеет детей, соответствующих каждой компоненте связности графа G или \bar{G} соответственно. Для третьего типа операции разложения дети этой вершины соответствуют графам из $\{G(V'') : V'' \in P(G)\}$. Кроме этого, ассоциируем граф $G(V')$ с корнем дерева $T(G)$. Иными словами, $G(V')$ — «правило», по которому графы, соответствующие детям корневого узла дерева $T(G)$, будут связываться в граф, соответствующий корню $T(G)$. Дерево модульного разложения может быть построено за время $O(n + m)$ для любого графа на n вершинах с m ребрами [2].

Очевидно, что для любой функции w имеем $\chi_w(G) = \max_i (\chi_w(G_i))$, где G_1, \dots, G_p — компоненты связности графа G . Аналогично, если $\bar{G}_1, \dots, \bar{G}_q$ — компоненты связности графа \bar{G} , то $\chi_w(G) = \sum_{i=1}^q \chi_w(G_i)$.

Л е м м а 3.2 Пусть (G, w) — взвешенный граф и $P(G)$ — его модульное разложение. Тогда $\chi_w(G) = \chi_{w^*}(G(V'))$, где $w^*(v) = \chi_w(G(V''))$ для любых вершины $v \in V'$ и множества $V'' \in P(G)$, где $\{v\} = V' \cap V''$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Стягивание множества $V'' \in P(G)$ в вершину v и присвоение $w(v) = \chi_w(G(V''))$ порождает взвешенный подграф графа G , чье взвешенное хроматическое число не превышает $\chi_w(G)$. Для этого подграфа любой элемент из $N(v)$ не может иметь цвет, совпадающий с одним из $\chi_w(G(V''))$ цветов вершины v . Следовательно, взвешенное хроматическое число подграфа имеет значение не менее, чем $\chi_w(G)$. Таким образом, $\chi_w(G) = \chi_{w^*}(G(V'))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Пусть $[\mathcal{X}]_P$ — множество всех графов, у которых каждый их примарный порожденный подграф принадлежит классу \mathcal{X} . Далее приводится Лемма, которая следует из Леммы 3.2 и возможности построения дерева модульного разложения за линейное время [2]:

Л е м м а 3.3 Задача ВВР для графов из $[\mathcal{X}]_P$ сводится за полиномиальное время к той же задаче для графов из класса \mathcal{X} .

3.2. Разложение посредством разделяющих клик

Разделяющей кликой в графе называется подмножество его вершин, порождающее полный подграф, удаление которого приводит к увеличению количества компонент связности. Например, результат удаления из n -вершинного полного графа одного ребра имеет разделяющую клику на $(n - 2)$ вершинах.

Если граф $G = (V, E)$ имеет разделяющую клику Q , тогда $V \setminus Q$ может быть разбито произвольным образом на непустые подмножества A и B так, что каждая вершина из A не смежна ни с какой вершиной из B . Пусть $G_1 = G(A \cup Q)$ и $G_2 = G(B \cup Q)$. Продолжим процесс декомпозиции до тех пор, пока это возможно. Весь этот процесс может

быть представлен в виде бинарного дерева, которое определяется не единственным образом. Листья этого дерева соответствуют некоторым порожденным подграфам графа G без разделяющих клик. Существует алгоритм, имеющий вычислительную сложность $O(m \cdot n)$, для построения некоторого такого бинарного дерева для любого графа на n вершинах с m ребрами [3].

Л е м м а 3.4 Для любого взвешенного графа (G, w) имеем

$$\chi_w(G) = \max(\chi_w(G_1), \chi_w(G_2)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть c_1 и c_2 — оптимальные взвешенные раскраски графов $(G_1 = (V_1, E_1), w)$ и $(G_2 = (V_2, E_2), w)$ соответственно. Пусть $\bigcup_{v \in V_1} c_1(v) = \{col_1, \dots, col_p\}$ и $\bigcup_{u \in V_2} c_2(u) = \{col'_1, \dots, col'_q\}$. Не умаляя общности, можно считать, что $q \geq p$, что для любой вершины v из множества Q имеем $c_1(v) = \{col_{i_1(v)}, \dots, col_{i_k(v)}\}$ и $c_2(v) = \{col'_{i_1(v)}, \dots, col'_{i_k(v)}\}$. Определим вершинную раскраску c графа (G, w) следующим образом. Для любой вершины $x \in V_2$ положим $c(x) = c_2(x)$. Для любых $y \in V_1 \setminus V_2$ и $i \in \{1, \dots, p\}$ имеем $col'_i \in c(y)$ тогда и только тогда, когда $col_i \in c_1(y)$. Таким образом, граф (G, w) может быть раскрашен в $\chi_w(G_2)$ цветов, поэтому $\chi_w(G) = \chi_w(G_2)$. **Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.**

Для данного графа любой его максимальный порожденный подграф, не имеющий собственной разделяющей клики, называется C -блоком графа. Листья бинарного дерева разложения посредством разделяющих клик любого графа соответствуют его C -блокам. Пусть \mathcal{X} — некоторый класс графов. Если любой C -блок некоторого графа принадлежит классу \mathcal{X} , то говорим, что этот граф принадлежит C -замыканию класса \mathcal{X} , обозначаемому через $[\mathcal{X}]_C$.

Л е м м а 3.5 Задача ВБР для графов из $[\mathcal{X}]_C$ сводится за полиномиальное время к той же задаче для графов из класса \mathcal{X} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждый C -блок любого графа $G \in [\mathcal{X}]_C$ принадлежит классу \mathcal{X} . Дерево разложения посредством разделяющих клик для графа $G = (V, E)$ может быть построено за время $O(|V| \cdot |E|)$. Таким образом, по Лемме 3.4 имеет место обозначенное выше сведение.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

3.3. Атомарные графы и их значение

Связный примарный граф без разделяющих клик называется *атомарным*. *Наследственный класс* графов — множество графов, замкнутое относительно удаления вершин. Из Лемм 3.3 и 3.5 следует справедливость следующего утверждения:

Л е м м а 3.6 Для любого наследственного класса графов задача ВБР сводится за полиномиальное время к той же задаче для его атомарных графов.

3.4. Неприводимые графы и их значение

Анти-окрестностью вершины $v \in V$ назовем множество $V \setminus N(v)$, обозначаемое через $\overline{N(v)}$.

Л е м м а 3.7 Пусть (G, w) — взвешенный граф, содержащий вершину v такую, что $\overline{N(v)} = \{v, v_1, \dots, v_k\}$ является независимым множеством. Тогда $\chi_w(G) = \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$, где $w'(u) = w(u)$ для любой вершины $u \notin \overline{N(v)}$ и $w'(u) = \max(w(u) - w(v), 0)$ для любой вершины $u \neq v$, принадлежащей множеству $\overline{N(v)}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку $\overline{N(v)}$ является независимым, то любой цвет, используемый для v , может быть также использован для каждой вершины из $\overline{N(v)} \setminus \{v\}$ с сохранением допустимости раскраски и общего количества используемых цветов. Таким образом, достаточно рассматривать такие раскраски графа (G, w) , в которых для любой вершины $u \in \overline{N(v)}$ некоторые из $\min(w(v), w(u))$ цветов для u совпадают с некоторыми из $\min(w(v), w(u))$ цветов для v . Удаление v из G и уменьшение $w(u)$ на $\min(w(v), w(u))$ для каждого $u \in \overline{N(v)} \setminus \{v\}$ приводит к взвешенному графу $(G \setminus \{v\}, w')$, который может быть раскрашен в $\chi_w(G) - w(v)$ цветов. Следовательно, $\chi_w(G) \geq \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$. С другой стороны, любая раскраска $(G \setminus \{v\}, w')$ может быть дополнена до раскраски (G, w) путем использования новых $w(v)$ цветов для окрашивания вершины v и добавления любых новых $w(u) - w'(u)$ цветов для окрашивания каждой вершины $u \in \overline{N(v)} \setminus \{v\}$. Следовательно, $\chi_w(G) \leq \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Атомарный граф назовем *неприводимым*, если анти-окрестность каждой его вершины не является независимым множеством. Из Лемм 3.6 и 3.7 следует справедливость следующего результата:

Л е м м а 3.8 Для любого наследственного класса графов задача ВВР сводится за полиномиальное время к той же задаче для его неприводимых графов.

3.5. Переборная элиминация вершин специального типа и ее значение

Переборный аналог Леммы 3.7 для случая, когда $\overline{N(v)} \setminus \{v\}$ является кликой, представлен в следующем очевидном утверждении:

Л е м м а 3.9 Пусть (G, w) — взвешенный граф, содержащий вершину v такую, что $\overline{N(v)} \setminus \{v\} = \{v_1, \dots, v_k\}$ является кликой. Пусть Ω — совокупность таких назначений w' весов вершинам графа $G \setminus \{v\}$, что:

- $w'(u) = w(u)$ для любой вершины $u \notin \overline{N(v)}$;
- для некоторых целых неотрицательных чисел w_1, w_2, \dots, w_k , в сумме дающих $w(v)$, имеем $w'(v_i) = \max(w(v_i) - w_i, 0)$ для любого $1 \leq i \leq k$.

Тогда $\chi_w(G) = \min_{w' \in \Omega} \chi_{w'}(G \setminus \{v\}) + w(v)$.

В Лемме 3.9 переменная w_i означает количество общих цветов у вершин v и v_i . Количество решений уравнения $w_1 + w_2 + \dots + w_k = w(v)$ в целых неотрицательных числах равно $\binom{k}{w(v)+k-1}$. Следовательно, задача ВВР для пары (G, w) сводится к $\binom{k}{w(v)+k-1}$ задачам ВВР, каждая на графе $G \setminus \{v\}$, причем переход к каждой такой задаче выполняется за полиномиальное время.

Пусть $G = (V, E)$ — некоторый граф, где $|V| \geq 2$. Образует по нему новый граф $G' = (V', E')$ следующим образом. Добавляются вершины v_1, v_2, u_1, u_2 и все ребра вида vv_i , где $v \in V, i \in \{1, 2\}$, а также ребра v_1u_1, u_1u_2, u_2v_2 . Очевидно, что G' содержит в точности один порожденный 4-путь, в котором две внутренние вершины имеют в G степень 2. Таким образом, восстановить G по G' можно за время $O(|V'|^4)$.

Л е м м а 3.10 Для любой функции $w : V' \rightarrow \mathbb{N}_0$ имеет место соотношение:

$$\chi_w(G') = \min_{x \leq w(v_2)} (w(v_1) + w(v_2) - x + \max(\chi_w(G), \chi'_x)),$$

где $\chi'_x = \max(w(u_1) - w(v_2) + x, 0) + \max(w(u_2) - w(v_1) + x, 0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соображений симметрии можно считать, что $w(v_1) \geq w(v_2)$. Пусть x означает количество общих цветов вершин v_1 и v_2 в рассматриваемой вершинной раскраске взвешенного графа (G', w) . Таким образом, имеется в точности $w(v_1) + w(v_2) - x$ различных цветов для окрашивания вершин $\{v_1, v_2\}$, каждый из которых нельзя использовать для окрашивания вершин графа G . Чтобы минимизировать общее количество цветов, используемых для $\{u_1, u_2\}$, каждый из оставшихся $w(v_1) - x$ цветов для v_1 можно использовать для окрашивания u_2 . Аналогично, каждый из оставшихся $w(v_2) - x$ цветов для v_2 можно использовать для окрашивания u_1 . Следовательно, для окрашивания u_1 и u_2 необходимо χ'_x цветов. Таким образом, справедливо соотношение:

$$\chi_w(H) = \min_{x \leq w(v_2)} (w(v_1) + w(v_2) - x + \max(\chi_w(G), \chi'_x)).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

3.6. Юнитизация весов и ее значение

Для взвешенного графа $(G' = (V', E'), w')$, где $V' = \{v'_1, \dots, v'_n\}$, определим операцию *юнитизации весов*. Результатом данной операции будет граф $G_{w'}$ с множеством вершин, разбитым на клики Q_1, \dots, Q_n , где $|Q_i| = w'_i$ для любого $1 \leq i \leq n$. Для любых i и j каждая вершина клики Q_i смежна (и, соответственно, не смежна) с каждой вершиной клики Q_j тогда и только тогда, когда $v'_i v'_j \in E'$ (соответственно, $v'_i v'_j \notin E'$). Будем говорить, что операция юнитизации весов *сохраняет класс графов* \mathcal{X} , если для любых графа $G' \in \mathcal{X}$ и весовой функции w' справедливо $G_{w'} \in \mathcal{X}$. Очевидно, что справедливо следующее утверждение:

Л е м м а 3.11 Для любого класса графов, сохраняемого при юнитизации весов, задача ВВР сводится за полиномиальное от суммы весов вершин время к задаче ВР для графов из того же класса.

Идея сохранения класса графов при юнитизации весов также используется при доказательстве следующего утверждения:

Л е м м а 3.12 Задача ВВР для любого графа $(G = (V, E), w)$ без трех попарно несмежных вершин может быть решена за время $O((\sum_{v \in V} w(v))^3)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим невзвешенный граф $G' = (V', E')$ на $\sum_{v \in V} w(v)$ вершинах путем применения операции юнитизации весов к графу $(G = (V, E), w)$. Очевидно, что $\chi_w(G) = \chi(G')$ и что G' является графом без трех попарно несмежных вершин. Более того, $\chi(G') = |V'| - \pi(G')$, где $\pi(G')$ — количество ребер в наибольшем паросочетании графа G' . Это количество может быть найдено за время $O(|V'|^3)$ (см. работу [4]).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gallai T. Transitiv orientierbare graphen. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*. 1967. vol. 18, pp. 25–66.
2. Cournier A., Habib M. A new linear algorithm for modular decomposition. *Lecture Notes in Computer Science*. 1994. vol. 787, pp. 68–84.
3. Tarjan R. Decomposition by clique separators. *Discrete Mathematics*. 1985. vol. 55, pp. 221–232.
4. Edmonds J. Paths, trees, and flowers. *Canadian Journal of Mathematics*. 1965. vol. 17, pp. 449–467.

Поступила 11.09.2020

MSC2020 05C15

On new algorithmic techniques for the weighted vertex coloring problem

© O. O. Razvenskaya¹

Abstract. The classical NP-hard weighted vertex coloring problem consists in minimizing the number of colors in colorings of vertices of a given graph so that, for each vertex, the number of its colors equals a given weight of the vertex and adjacent vertices receive distinct colors. The weighted chromatic number is the smallest number of colors in these colorings. There are several polynomial-time algorithmic techniques for designing efficient algorithms for the weighted vertex coloring problem. For example, standard techniques of this kind are the modular graph decomposition and the graph decomposition by separating cliques. This article proposes new polynomial-time methods for graph reduction in the form of removing redundant vertices and recomputing weights of the remaining vertices so that the weighted chromatic number changes in a controlled manner. We also present a method of reducing the weighted vertex coloring problem to its unweighted version and its application. This paper contributes to the algorithmic graph theory.

Key Words: weighted vertex coloring problem, efficient algorithm, computational complexity

REFERENCES

1. T. Gallai, “Transitiv orientierbare graphen”, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **18** (1967), 25–66.
2. A. Cournier, M. Habib., “A new linear algorithm for modular decomposition”, *Discrete Mathematics*, **787** (1994), 68–84.
3. R. Tarjan, “Decomposition by clique separators”, *Discrete Mathematics*, **55** (1985), 221–232.
4. E. Edmonds, “Paths, trees, and flowers”, *Canadian Journal of Mathematics*, **17** (1965), 449–467.

Submitted 11.09.2020

¹**Olga O. Razvenskaya**, graduate student, Department of Applied Mathematics and Information Science, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1440-9910>, olga-olegov@yandex.ru

УДК 519.624

Итеративный метод второго порядка с постоянными коэффициентами для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве

© И. П. Рязанцева¹

Аннотация. Исследована сходимость неявного итеративного метода второго порядка с постоянными коэффициентами для нелинейных монотонных уравнений в гильбертовом пространстве. Для неотрицательных решений разностного числового неравенства второго порядка установлена оценка сверху. Эта оценка используется при доказательстве сходимости изучаемого итеративного метода. Сходимость итеративного метода установлена в предположении, что оператор уравнения на гильбертовом пространстве является монотонным и удовлетворяет условию Липшица. Достаточные условия сходимости предложенного метода включают также некоторые соотношения, связывающие параметры, определяющие указанные свойства оператора решаемого уравнения и коэффициенты разностного уравнения второго порядка, определяющего изучаемый метод. Параметрическое обеспечение предложенного метода подтверждено примером. Предложенный метод второго порядка с постоянными коэффициентами имеет лучшую оценку сверху скорости сходимости по сравнению с тем же методом с переменными коэффициентами, который изучался ранее.

Ключевые слова: гильбертово пространство, сильно монотонный оператор, условие Липшица, разностное уравнение, итеративный процесс второго порядка, оценка сверху решения числового разностного неравенства второго порядка, теорема Штольца, сходимость

1. Постановка задачи

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, (u, v) – скалярное произведение элементов u и v из H , $A : H \rightarrow H$ – нелинейный оператор, обладающий свойствами:

а) A – сильно монотонный оператор, т. е. справедливо неравенство

$$(Au - Av, u - v) \geq M\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H, \quad M > 0; \quad (1.1)$$

б) A удовлетворяет условию Липшица, т. е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in H, \quad L > 0. \quad (1.2)$$

Рассмотрим в H уравнение

$$Ax = f, \quad f \in H. \quad (1.3)$$

В рассматриваемых предположениях оно имеет единственное решение x в H (см., например, [1–2]).

Построим в H итеративный процесс второго порядка следующего вида

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau} \right) + \lambda \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} + \mu[Ay_n - f] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

¹Рязанцева Ирина Прокофьевна, профессор кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6215-1662>, lryazantseva@applmath.ru

где элементы y_{-1} , y_0 из H задаются, τ , λ и μ – некоторые положительные постоянные. Методы вида (1.4) рассматривались ранее в предположении, что $\lambda = \lambda_n$, $\tau = \tau_n$, где $\{\lambda_n\}$ и $\{\tau_n\}$ – бесконечно малые последовательности (см., например, [3]; регуляризованный вариант в [4]).

Уравнение (1.4) перепишем в следующем виде:

$$\mu\tau Ay_n + \left(\frac{1}{\tau} + \lambda\right) y_n = \mu\tau f + \frac{2y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau} + \lambda y_{n-1}. \quad (1.5)$$

Таким образом, для нахождения элемента y_n при любом $n \geq 1$ имеем уравнение с сильно монотонным непрерывным оператором. Следовательно (см., например, [1–2]), элемент y_n определяется из (1.4) однозначно при всех $n \geq 1$.

В данной работе получены достаточные условия сильной сходимости в H процесса (1.4) к решению (1.1) и установлена оценка скорости его сходимости, которая выше, чем для итерационного процесса с переменным коэффициентом $\lambda = \lambda_n$ и переменным $\tau = \tau_n$, изученного в [3].

2. Вспомогательные утверждения

В данном разделе построим оценки сверху для решений разностных числовых неравенств первого и второго порядка.

Здесь и далее $\{\omega_k\}$ и $\{b_k\}$ – последовательности неотрицательных чисел; τ – положительное число.

Справедливо утверждение (см. [5]).

Л е м м а 2.1 Пусть члены последовательности $\{\omega_k\}$ удовлетворяют разностному неравенству первого порядка вида

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} - d\omega_k \leq b_k, \quad d < 0, \quad b_k \geq 0,$$

где элемент $\omega_0 \geq 0$ задаётся, тогда

$$\omega_k \leq \omega_0 \exp(-ck) + \tau \sum_{i=1}^k b_i \exp(c(i-k)), \quad k \geq 1, \quad c = \frac{d\tau}{d\tau - 1}. \quad (2.6)$$

Пусть теперь члены последовательности $\{\omega_n\}$ удовлетворяют разностному неравенству второго порядка следующего вида

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} (1 + p\tau) - \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{\tau} + q\tau\omega_k \leq b_k\tau, \quad k \geq 1, \quad (2.7)$$

где $\tau_0 > 0$; и неотрицательные значения ω_0 и ω_{-1} задаются; p и q – некоторые действительные числа.

Предположим, что квадратное уравнение

$$s^2 + ps + q = 0 \quad (2.8)$$

имеет различные отрицательные корни d_1 и d_2 , тогда $p = -(d_1 + d_2)$, $q = d_1 d_2$, и неравенство (2.7) перепишем в следующей форме:

$$\left(\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} - d_1\omega_k\right) (1 - d_2\tau) \leq \frac{\omega_{k-1} - \omega_{k-2}}{\tau} - d_1\omega_{k-1} + b_k\tau. \quad (2.9)$$

Введём обозначение

$$u_k = \frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} - d_1 \omega_k, \quad k \geq 1, \quad (2.10)$$

тогда (2.9) примет вид

$$\frac{u_k - u_{k-1}}{\tau} - d_2 u_k \leq b_k, \quad k \geq 1.$$

Отсюда, предположив, что $u_k \geq 0$ при $k \geq 1$, на основании Леммы 2.1 имеем

$$u_k \leq u_0 \exp(-h_2 k) + \tau \sum_{i=1}^k b_i \exp(h_2(i-k)), \quad k \geq 1, \quad h_j = \frac{d_j \tau}{d_j \tau - 1}, \quad j = 1, 2. \quad (2.11)$$

Далее, из (2.10) с учетом установленной оценки (2.11) имеем

$$\frac{\omega_k - \omega_{k-1}}{\tau} - d_1 \omega_k \leq |u_0| \exp(-h_2 k) + \tau \sum_{i=1}^k b_i \exp(h_2(i-k)), \quad k \geq 1.$$

Это неравенство тем более верно, если какие-то $u_k \leq 0$. Теперь Лемма 2.1 приводит к неравенству

$$\begin{aligned} \omega_k &\leq \omega_0 \exp(-h_1 k) + \\ &+ \tau \sum_{i=1}^k \left[|u_0| \exp(-h_2 i) + \tau \sum_{j=1}^i b_j \exp(h_2(j-i)) \right] \exp(h_1(i-k)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким образом, установлено утверждение.

Л е м м а 2.2 Пусть p и q в (2.7) таковы, что уравнение (2.8) имеет различные отрицательные корни d_1 и d_2 . Тогда имеет место оценка (2.12).

3. Сходимость итеративного метода

Уравнение (1.4) с учётом (1.3) перепишем в виде

$$\frac{1}{\tau} \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau} \right) + \lambda \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} + \mu [Ay_n - Ax] = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.13)$$

Умножив (3.13) скалярно на $y_n - x$, придем к равенству

$$\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau} - \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau}, y_n - x \right) + \lambda (y_n - y_{n-1}, y_n - x) + \mu \tau (Ay_n - Ax, y_n - x) = 0. \quad (3.14)$$

Пусть

$$r_n = \frac{\|y_n - x\|^2}{2}, \quad \xi_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{\tau}, \quad \rho_n = \frac{\|\xi_n\|^2}{2}.$$

Используя неравенство

$$(\varphi'(v), v - u) \geq \varphi(v) - \varphi(u) \quad \forall u, v \in H, \quad (3.15)$$

для выпуклого дифференцируемого функционала $\varphi(u) = \|u\|^2/2$, получим

$$(y_n - x, y_n - y_{n-1}) \geq \frac{\|y_n - x\|^2}{2} - \frac{\|y_{n-1} - x\|^2}{2} = r_n - r_{n-1}. \quad (3.16)$$

Аналогично получаем

$$\begin{aligned} (y_n - x, y_{n-2} - y_{n-1}) &= (y_{n-2} - x, y_{n-2} - y_{n-1}) + \\ &+ (y_n - y_{n-2}, y_{n-2} - y_{n-1}) \geq \frac{\|y_{n-2} - x\|^2}{2} - \frac{\|y_{n-1} - x\|^2}{2} + \\ &+ (y_n - y_{n-2}, y_{n-2} - y_{n-1}) = r_{n-2} - r_{n-1} + (y_n - y_{n-2}, y_{n-2} - y_{n-1}). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Теперь, приняв во внимание свойство (1.1) оператора A , (3.16)–(3.17) и числовое неравенство $ab \leq a^2/2 + b^2/2$, от (3.14) приходим к оценке

$$\begin{aligned} \frac{r_n - r_{n-1}}{\tau} - \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{\tau} + \lambda(r_n - r_{n-1}) + 2\mu M\tau r_n &\leq \\ &\leq \frac{1}{\tau}(y_n - y_{n-2}, y_{n-1} - y_{n-2}) = \tau \left(\frac{y_n - y_{n-1}}{\tau}, \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau} \right) + \\ &+ \tau \left\| \frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{\tau} \right\|^2 \leq \tau(\rho_n + 3\rho_{n-1}) = F_n. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Следовательно, для получения из последнего неравенства оценки сверху для r_n на основе Леммы 2.2 необходимо исключить из (3.18) величины ρ_n и ρ_{n-1} . Используя величину ξ_n , равенство (3.13) перепишем в следующей форме:

$$\frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{\tau} + \lambda\xi_n + \mu(Ay_n - Ax) = 0.$$

Умножив последнее равенство скалярно на ξ_n , с учетом условия Липшица (1.2) получим

$$\frac{1}{\tau}(\xi_n - \xi_{n-1}, \xi_n) + 2\lambda\rho_n \leq \mu L\|y_n - x\| \|\xi_n\|. \quad (3.19)$$

Вновь используя (3.15), имеем

$$(\xi_n - \xi_{n-1}, \xi_n) \geq \rho_n - \rho_{n-1},$$

и применив в правой части (3.19) приведённое выше числовое неравенство, установим следующую оценку:

$$\frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{\tau} + 2\lambda\rho_n \leq \mu L(r_n + \rho_n),$$

т. е.

$$\frac{\rho_n - \rho_{n-1}}{\tau} + \mu_1\rho_n \leq \mu Lr_n, \quad \mu_1 = 2\lambda - \mu L. \quad (3.20)$$

Далее считаем, что $\mu_1 > 0$.

Пусть

$$\tilde{\mu}_1 = \frac{\mu_1}{\mu_1\tau + 1}.$$

Теперь Лемма 2.1 на основании (3.20) позволяет записать оценку

$$\rho_n \leq c_1 \exp(-\tilde{\mu}_1 n) + \mu L\tau \sum_{k=1}^n r_k \exp(\tilde{\mu}_1(k-n)). \quad (3.21)$$

Здесь c_1 – некоторая положительная постоянная. Далее через c_k обозначаем положительные постоянные при $k = 1, 2, 3, \dots$. Применив к последнему слагаемому в правой части (3.21) теорему Штольца, приходим к оценке

$$\rho_n = c_1 \exp(-\tilde{\mu}_1 n) + \mu L\tau \alpha_1 \lambda_1 r_n, \quad \alpha_1 > 1, \quad \lambda_1 = \frac{1}{1 - \exp(-\tilde{\mu}_1)}. \quad (3.22)$$

Используя (3.22), получим следующую оценку сверху для величины F_n (см. (3.18)):

$$F_n \leq c_2 \exp(-\tilde{\mu}_1 n) + \mu L \tau^2 \alpha_1 \lambda_1 (r_n + 3r_{n-1}).$$

Теперь от (3.18) приходим к неравенству

$$\frac{r_n - r_{n-1}}{\tau} - \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{\tau} + \lambda(r_n - r_{n-1}) + 2\mu M \tau r_n \leq c_2 \exp(-\tilde{\mu}_1 n) + \mu L \tau^2 \alpha_1 \lambda_1 (r_n + 3r_{n-1})$$

или

$$\begin{aligned} \frac{r_n - r_{n-1}}{\tau} - \frac{r_{n-1} - r_{n-2}}{\tau} + (\lambda + 3\lambda_1 \mu L \alpha_1 \tau^2)(r_n - r_{n-1}) + \\ + (2\mu M \tau - 4\lambda_1 \mu L \alpha_1 \tau^2)r_n \leq c_2 \exp(-\tilde{\mu}_1 n). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Пусть

$$p = \lambda + 3\lambda_1 \mu L \alpha_1 \tau^2, \quad q = 2M\mu\tau - 4\lambda_1 \mu L \alpha_1 \tau^2, \quad (3.24)$$

тогда корни квадратного уравнения (2.8) определяются равенствами

$$s_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}, \quad s_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

и если $q > 0$, $p^2 - 4q > 0$, то $s_1 < 0$, $s_2 < 0$, $s_1 \neq s_2$. Неравенство $p^2 - 4q > 0$ выполняется при достаточно больших λ , а неравенство $q > 0$ справедливо при достаточно малом τ .

Используя Лемму 2.2, из (3.23) получим оценку вида

$$\begin{aligned} r_n \leq r_0 \exp(-\sigma_1 n) + \\ + \tau \sum_{i=1}^n \left[c_3 \exp(-\sigma_2 i) + c_2 \tau \sum_{j=1}^i \exp(-\tilde{\mu}_1 j) \exp(\sigma_2(j-i)) \right] \exp(\sigma_1(i-n)), \end{aligned} \quad (3.25)$$

где

$$\sigma_k = \frac{s_k \tau}{s_k \tau - 1}, \quad k = 1, 2, \quad 0 < \sigma_1 < \sigma_2.$$

Применив теорему Штольца к членам правой части последнего неравенства, содержащим суммы, получим

$$r_n \leq r_0 \exp(-\sigma_1 n) + c_4 \exp(-\sigma_2 n) + c_5 \exp(-\tilde{\mu}_1 n) \leq c_6 \exp(-\sigma n), \quad \sigma = \min\{\sigma_1, \tilde{\mu}_1\} > 0. \quad (3.26)$$

Следовательно, в рассматриваемых предположениях доказана сходимость последовательности $\{r_n\}$ к нулю при $n \rightarrow \infty$, т. е. $y_n \rightarrow x$ при $n \rightarrow +\infty$.

Сформулируем полученный результат.

Т е о р е м а 3.1 Пусть H – вещественное гильбертово пространство, оператор $A : H \rightarrow H$ обладает свойствами (1.1)–(1.2). Тогда уравнение (1.4) при любых элементах y_{n-1} , y_{n-2} из H и любых положительных постоянных λ, μ, τ однозначно разрешимо относительно элемента y_n . Пусть коэффициенты уравнения λ, μ и параметр τ удовлетворяют условиям $q > 0$, $p^2 - 4q > 0$, где p и q определяются равенствами (3.24), тогда последовательность $\{y_n\}$, определяемая из уравнения (3.13), сходится по норме пространства H при $n \rightarrow +\infty$ к единственному решению уравнения (1.4).

В работе [3], как уже отмечалось, метод вида (1.4) изучался при $\lambda = \lambda_n$, где $\{\lambda_n\}$ – бесконечно малая, и $\tau = \tau_n$, причём последовательность $\{\tau_n\}$ обладает некоторыми свойствами, где вместо (3.26) была получена оценка

$$r_n \leq O(\exp(-\beta\lambda_n T_n)), \quad T_n = \sum_{k=1}^n \tau_k,$$

β – некоторая положительная постоянная. Метод типа (1.4) изучался в [4], при этом оценка скорости его сходимости не была установлена. Оценки, полученные в Леммах 2.1 и 2.2, позволили в данной работе построить более простую схему доказательства сходимости итеративного метода (1.4), чем в [4], и получить оценку скорости сходимости метода.

Применяя простые расчёты для $M = 1, L = 2, \alpha_1 = 1.2$ найдём, например, $\sigma = 0.0000631$ при $\lambda = 15, \mu = 9, \tau = 0.01$ и $\sigma = 0.000934$ при $\lambda = 39, \mu = 25, \tau = 0.1$.

Заметим, что принять $\tau = 1$ (что упростило бы (1.4)) не удаётся, т. к. в условиях доказанной теоремы τ должно быть достаточно мало.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг М. М. Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М.: Наука, 1972. 416 с.
2. Alber Ya., Ryazantseva I. Nonlinear ill-posed problems of monotone type. Dordrecht: Springer. 2006. 410 p.
3. Рязанцева И. П. Итеративные процессы второго порядка для монотонных включений в гильбертовом пространстве // Изв. вузов. Математика. 2013. №7. С. 52-61.
4. Рязанцева И. П. Метод второго порядка для аккретивных включений в банаховом пространстве // Дифференц. уравнения. 2014. Т.50, №9. С. 1264-1275.
5. Апарцин А. С. К построению сходящихся итерационных процессов в гильбертовом пространстве // Труды по прикладной математике и кибернетике. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1972. С. 7-14.

Поступила 10.10.2020

MSC2020 65J15

Continuous method of second order with constant coefficients for monotone equations in Hilbert space

© I. P. Ryazantseva¹

Abstract. Convergence of an implicit second-order iterative method with constant coefficients for nonlinear monotone equations in Hilbert space is investigated. For non-negative solutions of a second-order difference numerical inequality, a top-down estimate is established. This estimate is used to prove the convergence of the iterative method under study. The convergence of the iterative method is established under the assumption that the operator of the equation on a Hilbert space is monotone and satisfies the Lipschitz condition. Sufficient conditions for convergence of proposed method also include some relations connecting parameters that determine the specified properties of the operator in the equation to be solved and coefficients of the second-order difference equation that defines the method to be studied. The parametric support of the proposed method is confirmed by an example. The proposed second-order method with constant coefficients has a better upper estimate of the convergence rate compared to the same method with variable coefficients that was studied earlier.

Key Words: hilbert space, strongly monotone operator, Lipschitz condition, difference equation, second-order iterative process, top-down estimate of the solution of a second-order numerical difference inequality, Stolz's theorem, convergence

REFERENCES

1. M. M. Vainberg, *[Variational methods and method of monotone operators in theory of nonlinear equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 416 p.
2. Ya. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Publ., Dordrecht, 2006 (In Neth.), 410 p.
3. I. P. Ryazantseva, "[Second-order iterative process of monotone inclusions in a Hilbert space]", *Izvestiya vuzov. Matematika*, **7** (2013), 52–61 (In Russ.).
4. I. P. Ryazantseva, "[Second-order iterative process for monotone inclusions in a Banach space]", *Differential Equation*, **50:9** (2014), 1264–1275. (In Russ.).
5. A. S. Aparcin, *Trudy po prikladnoy matematike i kibernetike*, Irkutsk University Publ., Irkutsk, 1972 (In Russ.).

Submitted 10.10.2020

¹**Irina P. Ryazantseva**, Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev (24 Minina St., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6215-1662>, lryazantseva@applmath.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

Идентификатор DOI 10.15507/2079-6900.22.202004.456-462

УДК 517.9

Математическое моделирование магнитных свойств осесимметричных сверхпроводников второго рода в модели Кима

© Н. Д. Кузьмичев¹, А. А. Шушпанов², М. А. Васютин³

Аннотация. В работе выполнено математическое моделирование магнитных свойств, таких как распределение тока, собственное магнитное поле и намагниченность ряда осесимметричных сверхпроводников второго рода, например, сферы с зависимостью критической плотности тока от локального магнитного поля в модели Кима. Моделирование произведено на основе уравнения: интегрального по координатам и дифференциального по времени, – описывающего временную эволюцию критической плотности тока, которое решается численно для равномерно изменяющегося внешнего магнитного поля. Форма образца задается с помощью искаженной прямоугольной неравномерной сетки с уплотнением к краям образца. В процессе решения уравнения движения тока производится расчет суммарного магнитного поля в точках сверхпроводника для расчета величины критической плотности тока. Полученные в статье решения используются для визуализации распределения тока в объеме сверхпроводника и построения петлей гистерезиса намагниченности. Также, благодаря расчетам магнитного поля, в центре образца получены зависимости поля полного проникновения для образцов с различным соотношением сторон.

Ключевые слова: намагниченность, сверхпроводник 2-го рода, модель Кима, осесимметричное тело, интегро-дифференциальное уравнение, петля гистерезиса

1. Введение

В настоящее время сверхпроводники 2-го рода (СВР) как низкотемпературные (НТСР), так и высокотемпературные (ВТСР) – всё активнее используются в различных слаботочных и сильноточных приложениях. Для использования сверхпроводников важны их критические параметры. При получении таких основных характеристик СВР, как критическая плотность тока или напряженность критического магнитного поля, пользуются обычно бесконтактными измерениями. Используются образцы в виде

¹Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева» (430005, Россия, г.Саранск, ул.Большевистская, д.68), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

²Шушпанов Алексей Александрович, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева» (430005, Россия, г.Саранск, ул.Большевистская, д.68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5005-9831>, aashushpanov@gmail.com

³Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева» (430005, Россия, г.Саранск, ул.Большевистская, д.68), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

дисков, цилиндров, параллелепипедов, эллипсоидов и других симметричных тел. Кроме того, используются сверхпроводники, имеющие гранулярную структуру, которые представляют систему сильно- или слабосвязанных гранул. Гранулы в первом приближении можно считать эллипсоидами, сферами или в более грубом приближении короткими цилиндрами. Поэтому отклик СВР на внешнее магнитное поле является актуальной и практически важной задачей. Однако вычисление полной, трехмерной реакции сверхпроводника на магнитное поле является сложной задачей, поскольку в общем виде неясно, какие уравнения следует записывать, если невозможно определить направления токов в произвольном случае. Существуют упрощенные тривиальные задачи для подобного расчета магнитных свойств, это длинные тонкие стержни с осевым полем, где токи текут по соосным окружностям. В этих двух случаях можно упростить задачу до двухмерной или одномерной, где плотность тока \mathbf{J} , векторный потенциал \mathbf{A} и электрическое поле \mathbf{E} параллельны друг другу и имеют только z и φ компоненты или только одну φ компоненту [1–2]. Удобная модель для описания магнитных свойств жестких СВР (ЖСВР – СВР с сильным пиннингом) в магнитных полях, превышающих первое критическое поле H_{c1} , была представлена Ч. Бином [3]. Модель предполагала постоянную и одинаковую критическую плотность тока в областях, куда проникло в виде вихрей Абрикосова магнитное поле. В реальности в образцах могут содержаться микроскопические дефекты, с которыми взаимодействуют вихри Абрикосова, что понижает энергию системы. Сила данного эффекта будет зависеть от типа дефектов, а также от величины магнитного поля в данной точке образца. Эти явления приводят к тому, что плотность критического тока может зависеть от индукции внешнего поля. Основной качественной моделью, описывающей взаимодействие вихрей и индуцированного тока, используется обратно пропорциональная зависимость

$$J_c = J_{c0} / (1 + |B|/B_0), \quad (1.1)$$

предложенную Кимом [4]. Существуют и другие модели [5–6].

Целью данной работы является численное моделирование магнитных свойств ЖСВР с осевой симметрией (короткий цилиндр и эллипсоид вращения) в однородном магнитном поле, параллельном оси симметрии с использованием полевых зависимостей плотностей тока в модели Кима.

2. Теоретические основы

Будем рассматривать материал с зависимостью $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$. Также введем зависимость напряженности электрического поля от плотности тока $\mathbf{E} = E(J)\mathbf{J}/J$, где величина $\rho = E/J$ есть удельное сопротивление образца. Сопротивление образца может подчиняться линейному или нелинейному закону, в частности, хорошей аппроксимацией для ЖСВР является степенная зависимость вида $E = E_c (J/J_c)^n$, с показателем степени $n \geq 1$. $J_c = J_c(B)$ является функцией индукции магнитного поля в точке (локальный случай).

Введем границы для величин: $-b \leq y \leq b, r = (x^2 + z^2)^{0.5} \leq a(y)$.

Уравнение движения плотности тока, интегральное по координатам и дифференциальное по времени (интегро-дифференциальное) приведено в работах [1; 7] и имеет вид:

$$\frac{dJ(\mathbf{r}, t)}{dt} = \mu_0^{-1} \int_0^a dr \int_0^b dy' Q_{cyl}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[E(J) - \frac{r'}{2} \dot{B}_a \right]. \quad (2.1)$$

Локальная индукция магнитного поля:

$$B(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A} = \nabla \times (-\mu_0) \int_0^a dr' \int_0^b dy' Q_{cyl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') - \frac{r}{2} \dot{B}_a. \quad (2.2)$$

Уравнение (2.1) можно применять в рамках цилиндрической геометрии, как для цилиндров конечной длины и радиуса a , так и для тел с нелинейной функцией боковой границы $a(y)$.

3. Метод вычисления

Для удобства положим $a = J_c = E_c = \mu_0 = 1$. Тогда векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' будут являться функциями (r_i, y_i) , где

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(u_i) = \sin(u_i) \cdot a(y_i) & y_i &= y_i(v_i) = \sin(v_i) \cdot b, \\ u_i &= \frac{\pi/2(i-1/2)}{N_y}, & v_i &= \frac{\pi/2(j-1/2)}{N_r}, \\ i &= 1, \dots, N_y, & j &= 1, \dots, N_r. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Сведение уравнения к виду, необходимому для численного решения, описано в работе [7]. Результатом является уравнение:

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &= \frac{b}{N} Q^{-1} \cdot \left[\left(J^T(t) \oslash J_c^T(t) \right)^{\circ n} - \frac{R}{2} \dot{B}_a(t) \right], \\ J(t) &= J(t-dt) + \dot{J}(t) \cdot dt, \quad R_i = r_i, \quad i = 1, \dots, N_r N_y. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для расчета индукции магнитного поля в точке подобным образом преобразовываем уравнение (2.2) к виду:

$$B(t)_i = \mathbf{rot} \left(-\mu_0 Q \cdot J(t)_i - \frac{R}{2} \dot{B}_a \right). \quad (3.3)$$

Критическая плотность тока в точке определяется выражением

$$J_c(t)_i = J_c(B(t)_i),$$

где J , R , B , J_c — матрицы строки для плотности тока, координаты r , индукции магнитного поля и критической плотности тока в каждой точке сетки.

Магнитный момент образца в момент времени t будет равен

$$\begin{aligned} m(t) &= 2\pi \int_0^a dr r^2 \int_0^b dy J(r, y, t) \rightarrow m(t) = (W \circ R \circ R) \cdot J(t), \\ W_i &= w_j \cdot w_y. \end{aligned}$$

Также выполнен численный расчет поля полного проникновения H_p . Для этого рассматривалось магнитное поле в центральной ячейке образца и при достижении минимального порогового значения фиксировалось внешнее магнитное поле H_a .

4. Результаты расчетов

Для расчетов был выбран образец сферической формы радиуса a , т. е.

$$b(y) = a \cdot \sqrt{1 - y^2}.$$

Размер сетки расчета выбран в 15 ячеек на единицу размера. Скорость нарастания внешнего магнитного поля примем $\dot{H}_a = 1$. Степень в уравнении сопротивления образца (3.2) возьмем достаточно большой, для соответствия модели Кима $n = 51$. Расчеты проводились в среде MATLAB, поскольку она достаточно оптимизирована для решения матричных уравнений и предоставляет широкий выбор визуализации расчетов. В качестве единицы магнитного поля используется величина $J_{c0} \cdot a$, а для единицы магнитного момента величина $J_{c0} \cdot a^4$.

На Рис. 4.1 показаны результаты расчета профилей плотности тока для сферы в модели Кима (1.1) при различных значениях индукции внешнего поля.

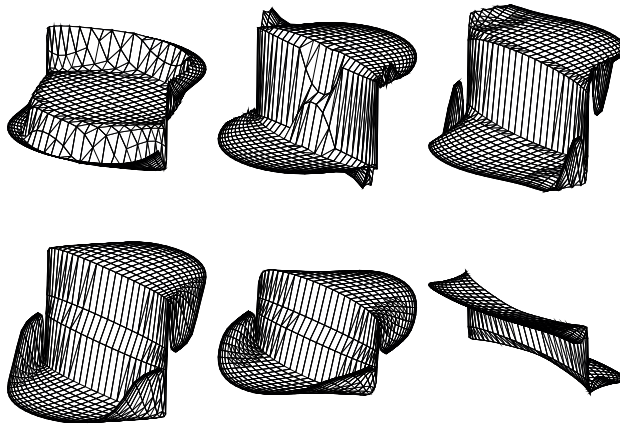


Рис. 4.1. Профили плотности тока для сферы для модели Кима при различных значениях индукции внешнего поля, слева направо, сверху вниз: $H_p/J_{c0} \cdot a = 0.2, 0.8, 1.4, 2, 1.2, 0.6$

На Рис. 4.2 представлены петли гистерезиса для намагниченности образца в модели Кима при различных значениях B_0 (1.1).

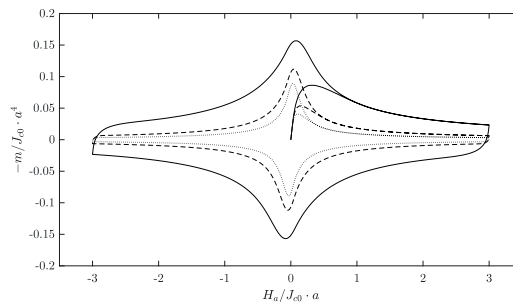


Рис. 4.2. Петли гистерезиса для магнитного момента сферического образца в модели Кима при различных значениях B_0 : сплошная — $0.4J_{c0} \cdot a$, пунктирная — $0.1J_{c0} \cdot a$, точечная — $0.05J_{c0} \cdot a$.

На Рис. 4.3 представлены зависимости поля полного проникновения для образцов с различным соотношением полуосей для модели Кима.

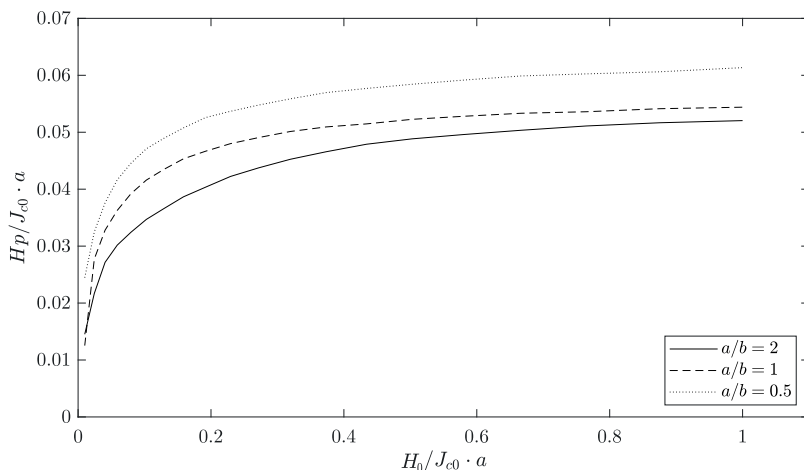


Рис. 4.3. Зависимости поля полного проникновения H_p для образцов с различным соотношением полуосей в модели Кима (1.1) от $H_0 = B_0/\mu_0$

5. Заключение

В работе с использованием явной зависимости вольт-амперной характеристики $E(J)$ численно решено уравнение движения критической плотности сверхтока J в жестком сверхпроводнике второго рода с полевой зависимостью критической плотности тока в модели Кима для эллипсоидов вращения. Интегральное уравнение итеративно решается методом обратной матрицы с учетом изменения критической плотности тока в зависимости от индукции магнитного поля. В результате найдено распределение плотности экранирующего сверхтока в жестких сверхпроводниках второго рода, имеющих форму эллипсоидов вращения в осевом переменном магнитном поле в модели Кима. Разработанную программу можно применять для расчета любых образцов с цилиндрической симметрией, а также для различных сценариев изменения внешнего магнитного поля. Результаты работы имеют важное практическое и теоретическое значение для различных применений сверхпроводников, например, в электротехнике (мощные электродвигатели, экраны), магнитометрии (датчики магнитного поля), вычислительной технике (криотроны, джозефсоновские переходы), криоэлектронике и в других технических областях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brandt E. H. Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves. Phys. rev. B. 1997. vol. 58, No. 1.
2. Zhu J., Mester J., Lockhart J., Turneure J. Critical states in 2D disk-shaped type-II superconductors in periodic external magnetic field. Physica C. 1993. vol. 212, No. 1, pp. 216-222.

3. Been C. P. Magnetization of hard superconductors. Phys. rev. 1962 vol. 8., No. 6. 1962. pp. 250-251.
4. Kim Y. B., Hempstead C. F., Strnad A. R. Magnetization and Critical Supercurrents. Phys. Rev. American Physical Society Publ. 1963. vol. 129. Issue 2, pp. 528-535. DOI:<https://doi.org/10.1103/PhysRev.129.528>
5. Kusayanagi E., Kawashima T., Yamafuji K. Theory of Flux Motion in Non-Ideal Type-II Superconductors. Journal of the Physical Society of Japan. 1967. vol. 33. Issue 2, pp. 551-560. DOI:<https://doi.org/10.1143/JPSJ.33.551>
6. Гохвельд Д. М. Магнитный гистерезис и плотность критического тока неоднородных сверхпроводников в сильных магнитных полях: дис. ... физ.-мат. наук. Красноярск. 2019. 208 с.
7. Кузьмичев Н. Д., Шушпанов А. А., Васютин М. А. Математическое моделирование магнитных свойств эллипсоидов вращения жёстких сверхпроводников второго рода в модели Бина // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 3. С. 353–362. DOI: <https://doi.org/10.15507/2079-6900.21.201903.353-362>.

Поступила 16.10.2020

MSC2020 78-10

Mathematical modeling of the magnetic properties of axisymmetric hard superconductors of the second kind in the Kim model

© N. D. Kuzmichev¹, A. A. Shushpanov², M. A. Vasyutin³

Abstract. Authors perform mathematical modeling of magnetic properties, such as current distribution, intrinsic magnetic field and magnetization of a number of axisymmetric superconductors of the second kind, for example, of a sphere with the dependence of the critical current density on the local magnetic field in the Kim model. The simulation is based on equation that is integral with respect to coordinate and differential with respect to time. The equation describes time evolution of the critical current density and is solved numerically for a uniformly varying external magnetic field. The shape of the sample is set using a distorted rectangular irregular mesh with compaction to the edges of the sample. While solving the equation of current motion, the total magnetic field is calculated at the points of the superconductor to calculate the value of the critical current density. In the article, the obtained solutions are used to visualize the current distribution in the volume of a superconductor and to construct magnetization hysteresis loops. Also, thanks to the calculations of the magnetic field in the center of the sample, the dependencies of the total penetration field for samples with different aspect ratios are obtained.

Key Words: magnetization, hard II-type superconductors, Kim model, axisymmetric body, integro-differential equation, hysteresis loop

¹**Nikolay D. Kuzmichev**, Professor of Department of Design and Technology Informatics, Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Dr. Sci.(Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

²**Aleksey A. Shushpanov**, Post-Graduate Student of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5005-9831>, aashushpanov@gmail.com

³**Mihail A. Vasyutin**, Associate Professor of Department of Design and Technology Informatics, Mordovia State University (68 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

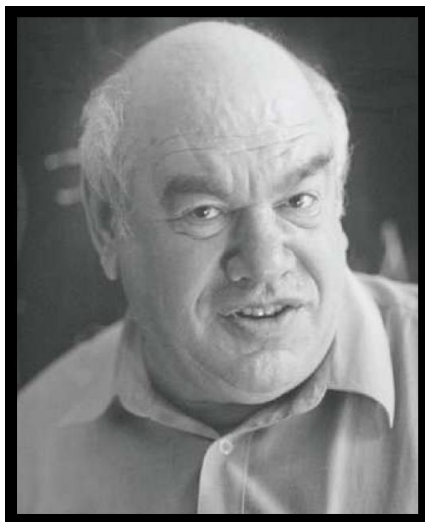
REFERENCES

1. E. H. Brandt, “Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves”, *Phys. rev. B*, **58**:1 (1997), 17 p.
2. J. Zhu, J. Mester, J. Lockhart, J. Turneaure, “Critical states in 2D disk-shaped type-II superconductors in periodic external magnetic field”, *Physica C.*, **212**:1 (1993), 216-222.
3. C. P. Been, “Magnetization of hard superconductors”, *Phys. rev.*, **8**:6 (1962), 250-251.
4. Y. B. Kim, C. F. Hempstead, A. R. Strnad, “Magnetization and Critical Supercurrents”, *Phys. Rev.*, **129**:2 (Jan 1963), 528–535.
5. E. Kusayanagi, T. Kawashima, K. Yamafuji, “Theory of Flux Motion in Non-Ideal Type-II Superconductors”, *Journal of the Physical Society of Japan*, **33**:2 (1967), 551-560.
6. D. M. Gohveld, *Magnetic hysteresis and critical current density of inhomogeneous superconductors in strong magnetic fields*, Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk, Krasnoyarsk, 2019 (In Russ.), 208 p.
7. N. D. Kuzmichev, A. A. Shushpanov, M. A. Vasyutin, “Mathematical modeling of the magnetic properties of spheroid of hard superconductors of the second kind in the Bean model”, *SVMO journal*, **21**:3 (2019), 353–362 (In Russ.).

Submitted 16.10.2020

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ПАМЯТИ СПИВАКА СЕМЕНА ИЗРАИЛЕВИЧА



Семен Израилевич Спивак
(4.02.1945 - 25.07.2020)

25 июля 2020 г. ушел из жизни замечательный ученый и прекрасный человек Семен Израилевич Спивак.

Семен Израилевич родился 4 февраля 1945 г. в г. Днепропетровске. Отец – Спивак Израиль Яковлевич, учитель математики, мать – Плоткина Элька Геселевна, инженер-химик-технолог. В 1962 г. окончил с серебряной медалью среднюю школу № 80 г. Днепропетровска. Будучи старшеклассником, стал принимать активное участие в математических олимпиадах, в 1962 г. дошел до финальной части 1-ой Всесибирской физико-математической олимпиады (Новосибирский Академгородок), организованной по инициативе академика М. А. Лаврентьева. По результатам Олимпиады был принят на механико-математический факультет Новосибирского государственного университета.

Обучаясь на механико-математическом факультете Новосибирского государственного университета, С. И. Спивак специализировался по кафедре дифференциальных уравнений, заведующим которой в те годы был выдающийся математик академик Сергей Львович Соболев. Непосредственным руководителем С. И. Спивака в студенческие годы стал ученик С. Л. Соболева, в будущем известный специалист по качественной теории дифференциальных уравнений Тоддей Иванович Зеленьяк.

По рекомендации С. Л. Соболева группа студентов мехмата НГУ была направлена на специализацию в отдел математического моделирования Института катализа Сибирского отделения АН СССР, что предопределило научную судьбу С. И. Спивака. В 1967 г. после окончания университета он был направлен на работу в Институт катализа, где

проработал до 1976 г. сначала в должности стажера-исследователя, затем младшего научного сотрудника отдела математического моделирования. В те годы Институт катализа был основным центром становления математического моделирования в химии в СССР. Учителями С. И. Спивака стали выдающиеся ученые в области химических технологий, катализа, химической кинетики: академик Георгий Константинович Боресков и член-корреспондент АН СССР Михаил Гаврилович Слинько. Основной темой научных исследований С. И. Спивака стали обратные задачи химической кинетики и термодинамики для сложных реакций. В годы работы в Институте катализа им были развиты методы определения интервалов вариации констант скоростей химических реакций, описывающих измерения в пределах их погрешности. Дальнейшее развитие исследований в этой области стали результатом участия С. И. Спивака в научном семинаре академика Леонида Витальевича Канторовича. Задачи интерпретации кинетических измерений были сформулированы С. И. Спиваком как задачи математического программирования, введено понятие значимости измерений как решение соответствующих двойственных задач. Работа в химическом институте способствовала тому, что все теоретические результаты использовались при интерпретации конкретных измерений, полученных при проведении реальных промышленно значимых каталитических процессов. Результатом этих работ стала защита в 1976 г. диссертации «Методы построения кинетических моделей каталитических стационарных реакций» в Совете Института катализа по специальности «Процессы и аппараты химической технологии» на соискание ученой степени кандидата технических наук.

В 1976 г. С. И. Спивак переезжает на работу в г. Уфу, в Научно-исследовательский институт нефтехимических производств, где работает сначала в должности старшего научного сотрудника отдела математического моделирования, а затем заведующего сектором математической интерпретации измерений. Параллельно читает серию спецкурсов по математическому моделированию и оптимизации сложных химических процессов на математическом факультете Башкирского государственного университета. В 1985 г. в Институте химической физики АН СССР С. И. Спивак защитил диссертацию «Информативность эксперимента и проблема неединственности решения обратных задач химической кинетики» на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности «Химическая физика».

Как уже отмечалось, сразу по приезду в г. Уфу С. И. Спивак начал сотрудничество с математическим факультетом Башкирского государственного университета. И совершенно естественным был его переход в 1986 г. на постоянную работу в Башкирский государственный университет на должность заведующего кафедрой математического моделирования. В 1988 г. ему было присвоено ученое звание профессора по кафедре математического моделирования.

Одним из основных результатов деятельности Семена Израилевича на кафедре математического моделирования стало возникновение и развитие научных направлений по исследованиям в области финансовой и актуарной математики. Это направление развивалось совместно с Лондонским Институтом актуариев, при непосредственном участии правительственного актуария Великобритании К. Дейкина. При участии С. И. Спивака была создана одна из первых в стране система курсов по финансовой математике, совместно с Лондонским Институтом актуариев организован первый в регионе Дипломный актуарный курс (Diploma Actuarial Course).

В 1992 г. НИИ Нефтехим был преобразован в Институт нефтехимии и катализа Академии наук Республики Башкортостан, а позже – РАН. В Институте была создана лаборатория математической химии, заведующим которой и стал С. И. Спивак.

Широкий научный кругозор, разнообразие научных интересов, свойства харак-

тера (общительность, доброжелательность и энергичность) служили основой работы С. И. Спивака с учениками. К моменту защиты докторской диссертации он был руководителем нескольких кандидатских диссертаций. В дальнейшем под его руководством сформировалась научная школа по математическому моделированию в химии и задачам финансовой математики в Республике Башкортостан. Среди учеников С. И. Спивака – 10 докторов и более 50 кандидатов наук.

Успешно развивается созданное им новое перспективное научное направление – анализ решений обратных задач при математическом моделировании технологических процессов, информативность измерений в области химической кинетики и термодинамики сложных химических реакций.

Исследования С. И. Спивака характеризуются глубокими связями с практическими потребностями химической промышленности. Разработанные методы математического моделирования и программное обеспечение использовались при расчете и оптимизации сложных химических технологий самых разных типов: гетерогенный катализ, гомогенный катализ, ферментативный катализ, межфазный катализ, жидкофазное окисление углеводородов и т. д. Его работы нашли применение на предприятиях топливно-энергетического комплекса, в частности на промышленных предприятиях Уфы, Стерлитамака, Салавата при непосредственном участии Семена Израилевича внедрены новые технологии в разработке оптимальных режимов.

Много лет под его руководством проводились научные семинары на кафедре математического моделирования Башкирского госуниверситета, в лаборатории математической химии ИНК УФИЦ РАН. На этих семинарах выступали многие известные ученые РФ, ближнего и дальнего зарубежья. С. И. Спивак был членом двух докторских диссертационных советов, работающих в БашГУ, в одном из них являлся заместителем председателя.

Более 30 лет он активно руководил научными исследованиями в Стерлитамакской государственной педагогической академии, Стерлитамакском, Нефтекамском и Бирском филиалах БашГУ в области математического моделирования и внес существенный вклад в подготовке научных кадров. С. И. Спивак – член отделения физико-математических наук АН РБ, член редколлегии журнала «Вестник Башкирского государственного университета».

С. И. Спивак является автором несколько монографий, свыше 900 научных статей различной направленности в области математического моделирования в химии, биологии и теории финансов. Не раз ученый выступал с докладами на международных, всесоюзных и российских конференциях самого высокого уровня. Семен Израилевич входил в состав оргкомитетов нескольких крупных международных и отечественных конференций по прикладной математике, математическому моделированию технологических процессов.

Начиная с 1998 года, Семен Израилевич Спивак – активный участник научных конференций и школ-семинаров по математическому моделированию, проводимых Мордовским государственным университетом им. Н. П. Огарёва, регулярно входил в состав их программных комитетов. Неоднократно оппонировал диссертационные работы соискателей из Мордовского госуниверситета, входил в редколлегию научного рецензируемого журнала «Журнал Средневолжского математического общества».

Активная научная и научно-преподавательская деятельность С. И. Спивака получила свое признание: в 1998 г. ученому было присвоено почетное звание «Заслуженный деятель науки Республики Башкортостан». Начиная с 1995 года, четыре раза он становился лауреатом гранта «Соросовский профессор». Также С. И. Спивак являлся членом правления Европейского общества прикладной математики и механики (GAMM), чле-

ном Международного общества по системному анализу (International Society of System Analysis), Международного общества по химической технологии (International Society of Chemical Engineering), членом Лондонского института актуариев (London Institute of Actuaries).

Особую роль в его жизни играла активная общественная деятельность в области укрепления и развития межнациональных связей народов Башкортостана. В течение многих лет он возглавлял Еврейскую общину Башкортостана, являлся председателем Совета Еврейской национально-культурной автономии республики, членом Совета Ассамблеи народов Башкортостана, членом правления Федерации еврейских общин России. Семен Израилевич Спивак был человеком кристально честным, добрым и отзывчивым. Он всегда был готов прийти на помощь, оказать поддержку. Широта его души не знала границ. Преданность науке, своему делу, ученикам и необыкновенное трепетное и заботливое отношение к своей семье — вот те качества, которые отличали этого замечательного человека.

Российская наука и все его коллеги понесли невосполнимую утрату. Светлая память о Семене Израилевиче навсегда пребудет в наших сердцах.

*И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, Э. Р. Гиззатова, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, И. М. Губайдуллин, Ю. Н. Дерюгин, Е. В. Десяев,
Д. К. Егорова, А. П. Жабко, Р. В. Жалнин, А. С. Исмагилова,
В. Н. Кризский, Е. Б. Кузнецов, Т. Ф. Мамедова, Н. Д. Морозкин,
С. М. Мурюмин, С. А. Мустафина, О. В. Починка,
И. П. Рязанцева, К. Б. Сабитов, Л. А. Сухарев,
В. Ф. Тишкин, И. И. Чучаев, П. А. Шаманаев*

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Если статья на русском языке, то она должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC2020;
- название статьи;
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском);
- список литературы.

Если же статья на английском языке, то соответствующие разделы излагаются только на английском. Код УДК не используется.

Коды УДК и MSC2020. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);

б) должность, подразделение (указывается при наличии);

в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, почтовый адрес организации. Почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улицы, город индекс, страна (на англ.).

г) ученая степень (указывается при наличии);

д) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>.

е) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);

- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);

- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 100 до 250 слов**.

Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

Текст статьи. При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;
- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты – основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение — выводы и рекомендации.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*, который можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом* (*American Mathematical Society*) и *Европейским математическим обществом* (*European Mathematical Society*). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.

Статьи в журналах на русском языке.

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6–11 July 2018), 218–219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The author(s) should send to the editor source text of the article (LaTeX format), files with figures (EPS format) and the compiled version of the article (PDF format).

If the article is in English, then it should contain the following sections only in English:

- MSC2020 codes;
- article title;
- information about every author;
- abstract;
- keywords;
- text of the article;
- references.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Name O. Surname;
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted, the postal address of the organization. The mailing address is indicated in the form: house street, city postcode, country.
- d) academic degree (indicated if available);
- e) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- e) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Results of work are described extremely precisely and informatively. Main theoretical and experimental results, factual data, detected relationships and patterns are presented. In the description preference is given to new results and data of long-term value, important discoveries, conclusions that refute existing theories, as well as data that, in the author's opinion, are of practical importance.

Conclusions may be accompanied by recommendations, estimates, suggestions, hypotheses described in the article.

The information contained in the article's title should not be repeated in the text of the author's summary.

It is better to avoid unnecessary introductory phrases (for example, «the author of the article considers ... »). Author(s) should not include in the abstract historical references (if

they do not constitute the main content of the document) as well as description of previously published works and well-known provisions.

The text of the author's abstract should use syntactic constructions typical for the language of scientific and technical documents. Also it is better to avoid complicated grammatical constructions.

Significant words from the article's text should be used in the text of the abstract.

Abbreviations and conventions, excluding commonly used (in English special texts also), are used in exceptional cases or their definitions must be given when first used.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

In the text of English abstract author(s) should use the terminology typical to foreign special texts. They should avoid usage of terms that are direct tracing of Russian-language terms. It is necessary to preserve the unity of terminology within the abstract.

English abstracts to Russian-language articles should be written in high-quality English.

The average volume of abstracts in Russian and in English should be from 100 to 250 words.

Keywords should reflect the main content of the article. If it is possible they should not repeat the terms of the title and abstracts. It is better for keywords to use the terms from the article's text, as well as terms defining the subject area and including other important concepts that will expand the possibilities of finding an article by means of information retrieval system. Section **Keywords** must contain from 5 to 15 words.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is necessary to adhere to the following structure:

- introduction - a brief overview of the state of the issue under consideration and the formulation of the problem solved in the article;
- materials and methods for solving the problem and accepted assumptions;
- results – the main content of the article;
- discussion and analysis of the results obtained and their comparison with previously known ones;
- conclusion — conclusions and recommendations.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmobib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number

should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book's name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B.F. Bylov, R.E. Vinograd, D.M. Grobman, V.V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются три файла: файл-преамбула, файл-шаблон и стилевой пакет `svmobib.sty`. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем `<ФамилияИО>.tex`. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то заголовок статьи оформляется только на английском языке. Для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова

нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления многострочных формул рекомендуется использовать окружение `equation` с вложенным окружением `array`:

```
\begin{equation}
\begin{array}{c}\label{shamanaev1}
x + y = 2, \\
x * y = 1. \\
\end{array}
\end{equation}
```

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы}
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```
\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком}
```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```
\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись}
```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```
\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {общая_подпись_под_рисунком}
```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```
\inserttwopictureswithcompression {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {степень_сжатия} {общая_подпись}
```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись}
```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись_под_рисунком}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись_под_рисунком}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись_под_рисунком}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmbib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}  
\by П. А. Шаманаев  
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов  
\jour Труды Средневожского математического общества  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151
```

В разделе `thebibliographyEn`:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]  
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151  
\lang In Russ.
```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах `thebibliography` и `thebibliographyEn` оформляются одинаково):

```
\Bibitem{shamanaevBib2}  
\by M. J. Berger, J. Oliger  
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations  
\jour Journal of Computational Physics  
\yr 1984  
\vol 53  
\pages 484–512
```

Статьи в электронном журнале на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib3}  
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,  
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции  
\jour Огарёв-online  
\vol 20  
\yr 2016
```


\elink Доступно по адресу: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib3En}
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
 \jour Ogarev-online
 \vol 20
 \yr 2016
 \lang In Russ.
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib4}
 \by A. B. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
 \paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
 \inbook Прикладная математика и механика
 \publaddr Ульяновск
 \publ УлГТУ
 \yr 2014
 \issue 10
 \pages 4–13

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
 \publaddr Ulyanovsk
 \publ UlGTU Publ.
 \yr 2014
 \issue 10
 \pages 4–13
 \lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib5}
 \by Ю. Н. Бибилов
 \book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
 \publaddr М.

\publ Вышш. шк.
 \yr 1991
 \totalpages 303

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
 \by Yu. N. Bibikov
 \book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
 \publaddr Moscow
 \publ Visshay shkola Publ.
 \yr 1991
 \totalpages 303
 \lang In Russ.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib6}
 \by В. Г. Малинов
 \paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
 \inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
 \bookvol II
 \procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
 \yr 2016
 \pages 48–50
 \publ ФИЦ ИУ РАН
 \publaddr М.

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
 \by V. G. Malinov
 \paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
 \inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
 \bookvol II
 \procinfo Moscow, October 17-22, 2016
 \yr 2016
 \pages 48–50
 \publ FRC CSC RAS Publ.
 \publaddr Moscow

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

Three files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package `svmobib.sty`. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named `<LastName>.tex`. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file **can not be changed**. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The authors}} {Author1 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail. }, Author2 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors}} {Author1 \footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail}, Author2 \footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLast NameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For multi-line formulas, it is recommended to use the **equation** environment with the nested **array** environment:

```
\begin{equation}
\begin{array}{c}\label{shamanaev1}
x + y = 2,\\
x * y = 1.\\
\end{array}
\end{equation}
```

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name} \label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```
\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```
\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption}
```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```
\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} {common_caption}
```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```
\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {degree_of_compression} {file name.eps} {caption_of_the_figure}
{degree_of_compression} {common_caption}
```

e) insert two pictures with common caption only

```
\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file name.eps}
{common_caption}
```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption}
```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file name.eps}
{common_caption}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file name.eps} {degree_of_compression} {file name.eps}
{degree_of_compression} {common_caption}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmobib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmobib.sty package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in
the form of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

\issue 1
 \pages 145–151
 \lang In Russ.

Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib2}
 \by M. J. Berger, J. Oliger
 \paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
 \jour Journal of Computational Physics
 \yr 1984
 \vol 53
 \pages 484–512

Articles in the electronic journals in Russian

\Bibitem{shamanaevBib3En}
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
 \jour Ogarev-online
 \vol 20
 \yr 2016
 \lang In Russ.
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
 \publaddr Ulyanovsk
 \publ UIGTU Publ.
 \yr 2014
 \issue 10
 \pages 4–13
 \lang In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
 \by Yu. N. Bibikov
 \book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
 \publaddr Moscow
 \publ Visshay shkola Publ.
 \yr 1991

\totalpages 303

\lang In Russ.

Conference proceedings in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib6En}

\by V. G. Malinov

\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator

\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings

\bookvol II

\procinfo Moscow, October 17-22, 2016

\yr 2016

\pages 48–50

\publ FRC CSC RAS Publ.

\publaddr Moscow

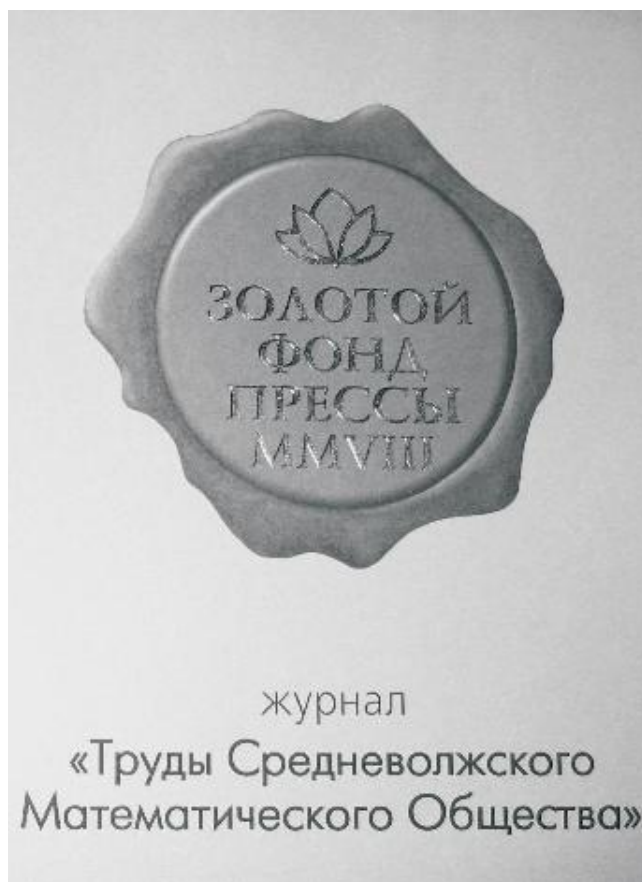
Алфавитный указатель авторов

Айкашев П. В.	405	Колобянина А. Е.	434
Бойков И. В.	405	Круглов В. Е.	434
Бойкова А. И.	405	Кузмичев Н. Д.	456
Васютин М. А.	456	Развенская О. О.	442
Гринес В. З.	424	Рязанцева И. П.	449
Жужома Е. В.	424	Шушпанов А. А.	456

Author Index

Aykashev P. V.	405	Kuzmichev N. D.	456
Boykov I. V.	405	Razvenskaya O. O.	442
Boykova A. I.	405	Ryazantseva I. P.	449
Grines V. Z.	424	Shushpanov A. A.	456
Kolobyanina A. E.	434	Vasyutin M. A.	456
Kruglov V. E.	434	Zhuzhoma E. V.	424

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Редактор: *Зинина С. Х.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 9.12.2020. Дата выхода в свет 31.12.2020. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 8,75 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1518.

Типография: Издательство Мордовского университета

Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Atryahin V. A.*

Editor: *Zinina S. Kh.*

Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 9.12.2020. Date of publishing 31.12.2020. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 8,75.

Number of copies 100. Order no. 1518.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24

Для заметок

Для заметок

