

ISSN 2587 – 7496 (Online)

ISSN 2079 – 6900 (Print)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 22 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 2

2020

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 22, № 2. 2020

DOI 10.15507/2079-6900.22.202002

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 22, NO. 2. 2020

DOI 10.15507/2079-6900.22.202002

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society". Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малайзийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

Ахтямов Азамат Мухтарович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Дерюгин Юрий Николаевич — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института, БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Спивак Семен Израилевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Терехин Михаил Тихонович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина» (Рязань, Россия)

Ион Анка Вероника — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, исполняющая обязанности ректора ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Aleksandr S. Andreev — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

Azamat M. Akhtyamov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Vyacheslav Z. Grines — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Yuriy N. Derugin — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Chief Research Scientist, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Sergey I. Martynov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Olga V. Pochinka — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Semen I. Spivak — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

Mikhail T. Terekhin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

Anca V. Ion — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

EDITORIAL COUNCIL

Morozkin Nikolay Danilovich — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Senin Petr Vasilievich — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Suharev Lev Alexandrovich — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Yarushkina Nadezda Glebovna — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Acting Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

Е. С. Алексеева, А. Э. Рассадин

Задача Дирихле для прямоугольника и новые тождества для
эллиптических интегралов и функций 145

I. V. Boykov, V. A. Ryazantsev

On an iterative method for solution of direct problem for nonlinear
hyperbolic differential equations 155

Т. Н. Драгунов, К. Е. Морозов, А. Д. Морозов

О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипе-
риодическом возмущении 164

Н. А. Кузьмин

О деревьях радиуса 2 с максимальным количеством паросоче-
таний 177

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов

Об одном методе замены переменных для волнового уравне-
ния, описывающего колебания систем с движущимися грани-
цами 188

П. А. Вельмисов, У. Д. Мизхер, В. Н. Ковальногов

Асимптотическое исследование процессов тепломассопереноса
в слабо закрученных струях 200

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

М. С. Дерябина, С. И. Мартынов	
О течении вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодические структуры	208
<hr/>	
Правила оформления рукописей (на рус. яз.)	225
Правила оформления рукописей (на англ. яз.)	229
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.)	233
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.)	239
<hr/>	
Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.)	244
Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.)	245
<hr/>	

Contents

MATHEMATICS

E. S. Alekseeva, A. E. Rassadin

The Dirichlet problem for rectangle and new identities for elliptic integrals and functions 145

I. V. Boykov, V. A. Ryazantsev

On an iterative method for solution of direct problem for nonlinear hyperbolic differential equations 155

T. N. Dragunov, K. E. Morozov, A. D. Morozov

On Global Dynamics in Duffing Equation with Quasiperiodic Perturbation 164

N. A. Kuzmin

On radius 2 trees with the maximum number of matchings 177

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

V. N. Anisimov, V. L. Litvinov

About one method for replacing variables for a wavean equation describing vibrations of systems with moving boundaries 188

P.A. Velmisov, U.J. Mizher, V.N. Kovalnogov

Asymptotic study of heat and mass transfer in weakly twisted jets 200

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

M.S. Deryabina, S.I. Martynov	
Viscous fluid microflows in cells of a porous medium in the presence of a gradient pressure	208
<hr/>	
The rules of article design (in Russian)	225
The rules of article design (in English)	229
The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian)	233
The rules for article layout in the LaTeX system (in English)	239
<hr/>	
Author Index (In Russian)	244
Author Index (in English)	245
<hr/>	

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202002.145-154

УДК 517.956.225; 517.544.8; 517.583

Задача Дирихле для прямоугольника и новые тождества для эллиптических интегралов и функций

© Е. С. Алексеева¹, А. Э. Рассадин²

Аннотация. В статье представлены итоги сравнения двух методов точного решения задачи Дирихле для прямоугольника: метода конформного отображения прямоугольника на верхнюю полуплоскость и метода разделения переменных. Данная процедура позволяет выразить нормальную производную функции Грина прямоугольной области через эллиптические функции Якоби. При приближении к границам прямоугольника эти формулы дают новые представления дельта-функции Дирака. Кроме того, в рамках предложенной идеологии получена серия новых соотношений для полного эллиптического интеграла первого рода. Данные соотношения могут быть применены к суммированию числовых и функциональных рядов, а также могут быть полезны в аналитической теории чисел. Число этих тождеств определяется числом известных значений эллиптических функций Якоби в их параллелограммах периодов.

Ключевые слова: соответствие границ, ядро интегрального оператора, модуль полного эллиптического интеграла, формула Пуассона, сигма-функция Вейерштрасса, линейное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами

1. Введение

Задача Дирихле для односвязных областей на двумерной плоскости является массовой задачей математической физики [1–2]. В стандартных университетских курсах, посвящённых методам математической физики, в качестве примера такой задачи подробно разбирается решение задачи Дирихле для круга, которое записывается в виде интеграла Пуассона, причём в курсах теории функций комплексного переменного этот интеграл получается с помощью конформного отображения круга на круг [2–3], а в курсах уравнений математической физики — с помощью метода разделения переменных [1; 4]. Вследствие симметрии круга сравнение двух способов вывода интеграла Пуассона не приводит к получению дополнительной математической информации. Однако при анализе менее симметричной области D сопоставление двух различных форм представления решения задачи Дирихле для такой области может стать источником новых нетривиальных тождеств.

В данной работе мы будем рассматривать уравнение Лапласа на прямоугольнике $D = (-a/2, a/2) \times (0, b)$:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in D, \quad (1.1)$$

¹Алексеева Елена Сергеевна, член Нижегородского математического общества (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7132-0931>, kometarella@mail.ru

²Александр Эдуардович Рассадин, член Правления Нижегородского математического общества (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5644-4012>, brat_ras@list.ru

снабжённое граничными условиями:

$$\Psi(x, 0) = \psi_B(x), \quad \Psi(x, b) = \psi_T(x), \quad \Psi(-a/2, y) = \psi_L(y), \quad \Psi(a/2, y) = \psi_R(y) \quad (1.2)$$

с функциями $\psi_B(x)$ и $\psi_T(x)$, определёнными на интервале $(-a/2, a/2)$, и функциями $\psi_L(y)$ и $\psi_R(y)$, определёнными на интервале $(0, b)$.

Далее статья имеет следующую структуру: для удобства изложения в разделе 2 приведены известные факты о решении задачи Дирихле (1.1)–(1.2) методом разделения переменных. В разделе 3 эта же задача решается с помощью конформного отображения прямоугольника D на верхнюю полуплоскость комплексной плоскости. Конструктивность предложенного подхода демонстрирует раздел 4. В Заключение суммированы полученные результаты и обсуждены перспективы дальнейших исследований.

2. Решение задачи Дирихле на прямоугольнике методом разделения переменных

Следуя логике работы [4], представим решение $\Psi(x, y)$ задачи Дирихле (1.1)–(1.2) в виде суммы четырёх слагаемых:

$$\Psi(x, y) = \Psi_B(x, y) + \Psi_R(x, y) + \Psi_T(x, y) + \Psi_L(x, y). \quad (2.3)$$

Первое слагаемое в формуле (2.3) описывает вклад в $\Psi(x, y)$ от функции $\psi_B(x)$ на нижней границе прямоугольника D — отрезке A_1A_4 на Рис. 2.1:

$$\Psi_B(x, y) = \int_{-a/2}^{a/2} \Gamma_B(x, y; \xi) \psi_B(\xi) d\xi, \quad (2.4)$$

причём ядро интегрального оператора в формуле (2.4) находится следующим образом:

$$\Gamma_B(x, y; \xi) = \Gamma_B^+(x, y; \xi) + \Gamma_B^-(x, y; \xi), \quad (2.5)$$

где

$$\Gamma_B^+(x, y; \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh((2n-1)\pi(b-y)/a)}{\sinh((2n-1)\pi b/a)} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{a} \cos \frac{(2n-1)\pi \xi}{a}$$

и

$$\Gamma_B^-(x, y; \xi) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(2n\pi(b-y)/a)}{\sinh(2n\pi b/a)} \sin \frac{2n\pi x}{a} \sin \frac{2n\pi \xi}{a}.$$

Вклад в $\Psi(x, y)$ от функции $\psi_R(y)$ на правой границе прямоугольника D — отрезке A_1A_2 на Рис. 2.1 — равен

$$\Psi_R(x, y) = \int_0^b \Gamma_R(x, y; \xi) \psi_R(\xi) d\xi, \quad (2.6)$$

где

$$\Gamma_R(x, y; \xi) = \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(n\pi(a/2+x)/b)}{\sinh(n\pi a/b)} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi \xi}{b}. \quad (2.7)$$

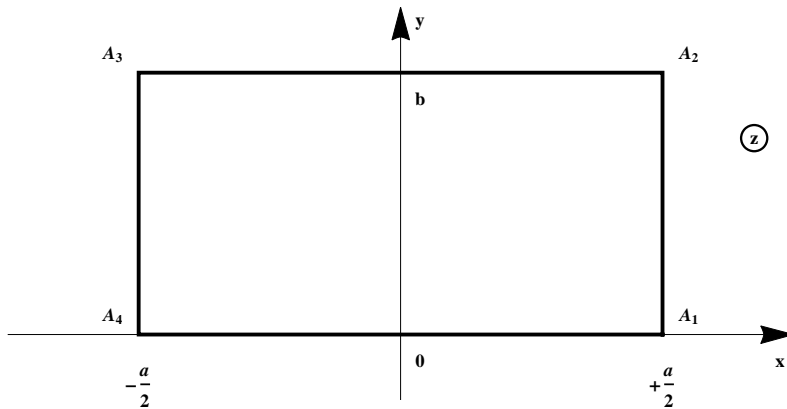


Рис. 2.1. Прямоугольная область на комплексной плоскости z

Функция $\psi_T(x)$ на верхней границе прямоугольника D — отрезке A_2A_3 на Рис. 2.1 — даёт в $\Psi(x, y)$ следующий вклад:

$$\Psi_T(x, y) = \int_{-a/2}^{a/2} \Gamma_T(x, y; \xi) \psi_T(\xi) d\xi, \quad (2.8)$$

причём распространение влияния $\psi_T(x)$ на весь прямоугольник D осуществляется с помощью ядра:

$$\Gamma_T(x, y; \xi) = \Gamma_B(x, b - y; \xi). \quad (2.9)$$

Наконец, вклад в $\Psi(x, y)$ от функции $\psi_L(x)$ на левой границе прямоугольника D — отрезке A_3A_4 на Рис. 2.1 — равен:

$$\Psi_L(x, y) = \int_0^b \Gamma_L(x, y; \xi) \psi_L(\xi) d\xi, \quad (2.10)$$

где

$$\Gamma_L(x, y; \xi) = \Gamma_R(-x, y; \xi). \quad (2.11)$$

3. Решение задачи Дирихле на прямоугольнике методом конформного отображения

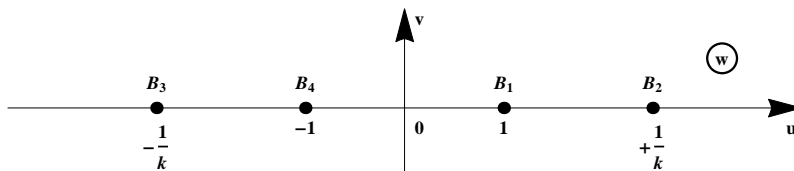


Рис. 3.2. Верхняя полуплоскость комплексной плоскости w

С другой стороны, известно, что конформное отображение верхней полуплоскости $\Im w > 0$ на Рис. 3.2 на прямоугольник D комплексной плоскости z на Рис. 2.1 с соответствием точек $A_1 \leftrightarrow B_1$, $A_2 \leftrightarrow B_2$, $A_3 \leftrightarrow B_3$ и $A_4 \leftrightarrow B_4$ описывается следующей формулой [2, с. 673]:

$$z = \frac{a}{2\mathbf{K}(k)} \int_0^w \frac{d\zeta}{\sqrt{(1-\zeta^2)(1-k^2\zeta^2)}}, \quad (3.12)$$

где $\mathbf{K}(k) = \int_0^1 (1-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}} (1-k^2\zeta^2)^{-\frac{1}{2}} d\zeta$ — полный эллиптический интеграл первого рода, модуль k которого определяется по сторонам a и b прямоугольника D соотношением [2, с. 673]:

$$s(k) \equiv \frac{\mathbf{K}(k')}{\mathbf{K}(k)} = \frac{2b}{a}, \quad (3.13)$$

где $k' = \sqrt{1-k^2}$ — дополнительный модуль.

График функции $s(k)$ представлен на Рис. 3.3.

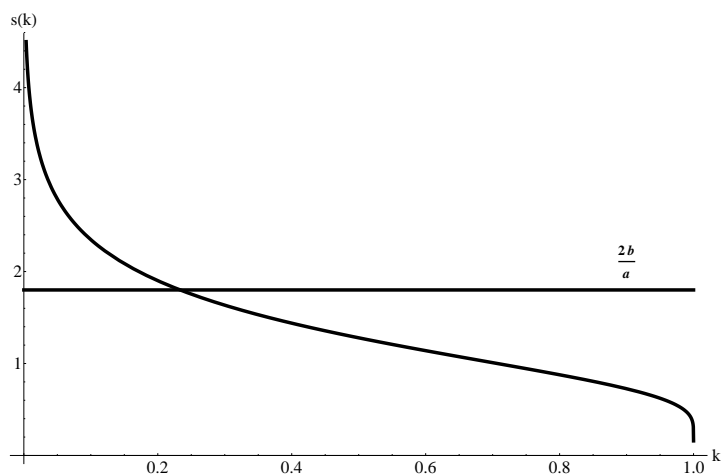


Рис. 3.3. К определению модуля k в конформном отображении прямоугольника на верхнюю полуплоскость

Применяя к функции $s(k)$ формулу для производной полного эллиптического интеграла первого рода и соотношение Лежандра [5, с. 157], легко убедиться, что при $k \in (0, 1)$ эта функция монотонно убывает, следовательно, по известному отношению b/a сторон прямоугольника D модуль k определяется единственным образом.

Конформное отображение, обратное к отображению (3.12), т. е. отображение прямоугольника $A_1A_2A_3A_4$ плоскости $z = x + iy$ на верхнюю полуплоскость плоскости $w = u + iv$, выражается через эллиптический синус:

$$w = sn\left(\frac{2\mathbf{K}(k)z}{a}, k\right). \quad (3.14)$$

Пример образа декартовой координатной сетки плоскости z при отображении (3.14) приведён на Рис. 3.4.

Далее перейдём с помощью отображения (3.12) к комплексной координате w . В этом случае искомая функция $\Psi(w) \equiv \Psi(z(w))$, записанная в новых координатах, в силу инвариантности уравнения Лапласа относительно конформных преобразований также удовлетворяет уравнению (1.1). Однако граничное условие на плоскости w на Рис. 3.2 по сравнению с граничным условием (1.2) на плоскости z выглядит гораздо проще.

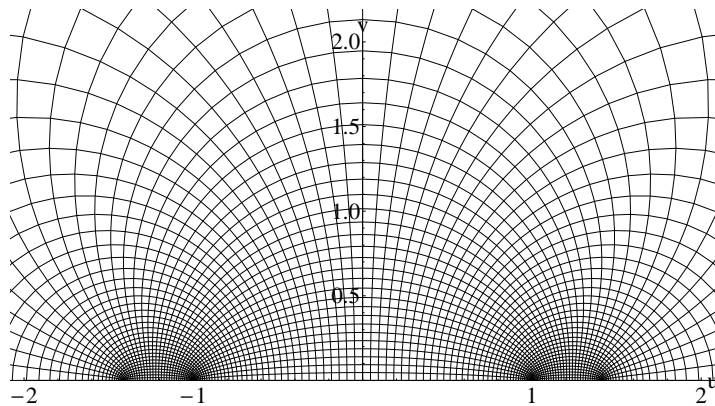


Рис. 3.4. Карта конформного отображения прямоугольника со сторонами $a = 4$ и $b = 2$ на верхнюю полуплоскость

Более того, оно даёт возможность записать общее решение исходной задачи Дирихле с помощью формулы Пуассона [3, с. 341]:

$$\tilde{\Psi}(w) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}(t)|_{\Im w=0} \cdot \Re \left\{ \frac{1}{\pi i [t - w]} \right\} dt, \quad (3.15)$$

где $\tilde{\Psi}|_{\Im w=0} = \Psi|_{\partial D}$.

Благодаря соответствию границ $A_4A_1 \leftrightarrow B_4B_1$, $A_1A_2 \leftrightarrow B_1B_2$ и т. д. при конформном отображении (3.14) (см. Рис. 2.1; 3.2) из формулы (3.15) легко выделить отдельные слагаемые, которые входят в формулу (2.3), например:

$$\tilde{\Psi}_B(w) = \int_{-1}^{+1} \tilde{\Psi}_B(t) \Re \left\{ \frac{1}{\pi i [t - w]} \right\} dt. \quad (3.16)$$

Используя явный вид конформного отображения (3.14) перепишем выражение (3.16) в исходных переменных:

$$\Psi_B(z) = \int_{-a/2}^{+a/2} \psi_B(\xi) \Re \left\{ \frac{1}{\pi i [t_B(\xi) - w(z)]} \right\} \frac{dt_B(\xi)}{d\xi} d\xi, \quad (3.17)$$

где

$$t_B(\xi) = sn \left(\frac{2\mathbf{K}(k)\xi}{a}, k \right) - \quad (3.18)$$

вещественная функция, определяющая закон, по которому пробегается отрезок B_4B_1 на плоскости w (Рис. 3.2), когда параметр ξ пробегает отрезок A_4A_1 на плоскости z (Рис. 2.1).

Применяя известное правило дифференцирования эллиптической функции Якоби (3.18) [2; 5] и сравнивая формулу (3.17) с формулой (2.4), легко видеть, что:

$$\Gamma_B(x, y; \xi) = \Re \left\{ \frac{2\mathbf{K}(k)}{\pi i a} \frac{cn(2\mathbf{K}(k)\xi/a, k) dn(2\mathbf{K}(k)\xi/a, k)}{sn(2\mathbf{K}(k)\xi/a, k) - sn(2\mathbf{K}(k)(x + iy)/a, k)} \right\}. \quad (3.19)$$

Таким образом, правая часть формулы (3.19) даёт сумму функционального ряда (2.5). Кроме того, поскольку $\Gamma_B(x, 0+; \xi) = \delta(x - \xi)$, то правая часть формулы (3.19) даёт представление дельта-функции Дирака при $z = x + i0$.

Сравнивая Рис. 2.1 и Рис. 3.2, выпишем вклад в искомую функцию от стороны A_1A_2 прямоугольника D :

$$\tilde{\Psi}_R(w) = \int_{+1}^{+1/k} \tilde{\Psi}_R(t) \Re \left\{ \frac{1}{\pi i [t - w]} \right\} dt. \quad (3.20)$$

Если $z = a/2 + i\xi$, $\xi \in [0, b]$, т. е. точка z пробегает отрезок A_1A_2 , то точка t пробегает отрезок B_1B_2 плоскости w по закону [5, с. 166]:

$$t_R(\xi) = sn \left[\frac{2\mathbf{K}(k)}{a} \left(\frac{a}{2} + i\xi \right), k \right] = \frac{1}{dn(\mathbf{K}(k')\xi/b, k')} \quad (3.21)$$

(при преобразованиях в формуле (3.21) использовалось соотношение (3.13)).

Возвращаясь в выражении (3.21) к исходным переменным, получим:

$$\Psi_R(z) = \int_0^b \psi_R(\xi) \Re \left\{ \frac{1}{\pi i [t_R(\xi) - w(z)]} \right\} \frac{dt_R(\xi)}{d\xi} d\xi. \quad (3.22)$$

Подставив в формулу (3.22) производную от функции (3.21), получим следующее соотношение:

$$\Gamma_R(x, y; \xi) = \Re \left\{ \frac{k'^2 \mathbf{K}(k')}{\pi i b dn(\mathbf{K}(k')\xi/b, k')} \frac{sn(\mathbf{K}(k')\xi/b, k') cn(\mathbf{K}(k')\xi/b, k')}{1 - dn(\mathbf{K}(k')\xi/b, k') sn(2\mathbf{K}(k)(x + iy)/a, k)} \right\}. \quad (3.23)$$

Выражение (3.23) является суммой функционального ряда (2.7). Кроме того, поскольку $\Gamma_R(a/2 - 0, y; \xi) = \delta(y - \xi)$, то правая часть формулы (3.23) при $z = iy + a/2 - 0$ даёт представление дельта-функции Дирака.

Продолжая рассматривать соответствие границ прямоугольника $A_1A_2A_3A_4$ при его конформном отображении (3.14) на верхнюю полуплоскость так, как показано выше, можно выразить ядра $\Gamma_T(x, y; \xi)$ и $\Gamma_L(x, y; \xi)$ через эллиптические функции Якоби. Однако благодаря свойствам симметрии (2.9) и (2.11) этих ядер аналогичный результат может быть получен быстрее путем замены переменных $y \rightarrow b - y$ и $x \rightarrow -x$ в правых частях формул (3.19) и (3.23) соответственно.

Наконец, вспомним, что для прямоугольника D методом отражений точно вычисляется функция Грина для всей области [6, с. 364]:

$$G(z, \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \Re \ln \frac{\sigma(z + \bar{\zeta} + a) \sigma(z - \bar{\zeta})}{\sigma(z + \zeta + a) \sigma(z - \zeta)}, \quad (3.24)$$

где $\sigma(z)$ — сигма-функция Вейерштрасса [2; 5].

Как известно [3, с. 345], с помощью этой функции решение задачи Дирихле (1.1)–(1.2) записывается следующим образом:

$$\Psi(z) = \oint_{A_1A_2A_3A_4} \frac{\partial G(z, \zeta)}{\partial n} \Psi(\zeta) |d\zeta|, \quad (3.25)$$

где оператор $\partial/\partial n$ означает дифференцирование по направлению внешней нормали к прямоугольнику $A_1A_2A_3A_4$ по комплексной переменной ζ .

Сравнивая представления решения (3.25) с представлением решения (2.3), (2.4), (2.6), (2.8) и (2.10) для исходной задачи Дирихле, легко обнаружить связь значений нормальных производных функции (3.24) на границе прямоугольника D с ядрами $\Gamma(x, y; \xi)$, задаваемыми функциональными рядами. Связь же эллиптических функций Якоби, через которые также выражаются эти ряды, с производными сигма-функции Вейерштрасса, устанавливается с помощью тэта-функций Якоби [2; 5].

4. Вывод новых тождеств для полного эллиптического интеграла первого рода

Заметим, что ядро $\Gamma_B(x, y; \xi)$ определено на прямоугольном параллелепипеде $\Pi_a = D \times [-a/2, a/2]$.

Вычислим значение этой функции в точке $(0, b/2, 0) \in \Pi_a$ двумя способами: сначала по формуле (2.5)

$$\Gamma_B(0, b/2; 0) = \frac{1}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi b/2a)}, \quad (4.26)$$

а затем – используя соотношение $sn(i\mathbf{K}(k')/2, k) = i/\sqrt{k}$ (см. [5, с. 280]) – по формуле (3.19):

$$\Gamma_B(0, b/2; 0) = \frac{2\sqrt{k}\mathbf{K}(k)}{\pi a}. \quad (4.27)$$

Сравнив формулы (4.26) и (4.27), с помощью соотношения (3.13) получим следующее тождество для полного эллиптического интеграла первого рода:

$$\frac{2\sqrt{k}\mathbf{K}(k)}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi/4 \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \quad (4.28)$$

Применение этого алгоритма к функции $\Gamma_B(x, y; \xi)$ в точке $(a/4, b/2, a/4) \in \Pi_a$ приводит к тождеству:

$$\frac{k\mathbf{K}(k)}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi/2 \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \quad (4.29)$$

Рассмотрение же точки $(a/4, b/2, -a/4) \in \Pi_a$ не даёт новой информации, потому что $\Gamma_B(0, b/2; 0) = \Gamma_B(a/4, b/2, a/4) + \Gamma_B(a/4, b/2, -a/4)$.

Далее, ядро $\Gamma_R(x, y; \xi)$ определено на прямоугольном параллелепипеде $\Pi_b = D \times [0, b]$.

Нахождение значения этой функции в точке $(0, b/2, b/2) \in \Pi_b$ как по формуле (2.7), так и по формуле (3.23) позволяет получить тождество:

$$\frac{k'^2\mathbf{K}(k')}{2\pi(1+k)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi \cdot \mathbf{K}(k)/\mathbf{K}(k'))}. \quad (4.30)$$

Для единообразия обозначений с формулами (4.28) и (4.29) в формуле (4.30) удобно заменить k на k' и наоборот:

$$\frac{k^2\mathbf{K}(k)}{2\pi(1+\sqrt{1-k^2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \quad (4.31)$$

Применение аналогичной процедуры к функции $\Gamma_R(x, y; \xi)$ в точке $(a/4, b/2, b/2) \in \Pi_b$ приводит к тождеству:

$$\frac{k\mathbf{K}(k)}{4\pi} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{1+\sqrt{1-k^2}}}{\sqrt{1+\sqrt{1-k^2}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh((2n-1) \cdot 3\pi/2 \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}{\sinh((2n-1) \cdot 2\pi \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \quad (4.32)$$

Действуя также с точкой $(3a/4, b/2, b/2) \in \Pi_b$, получим ещё одно тождество:

$$\frac{k^2 \sqrt{1-k^2} \mathbf{K}(k)}{4\pi(\sqrt{2} + \sqrt{1+k})(1 + \sqrt{1-k^2})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh((2n-1)\pi/2 \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}{\sinh((2n-1) \cdot 2\pi \cdot \mathbf{K}(k')/\mathbf{K}(k))}. \quad (4.33)$$

Функция $s(k)$, определённая соотношением (3.13), имеет обратную: $k = k(s)$ при $s \in [0, +\infty)$, то тождества (4.28), (4.29), (4.31)–(4.33) можно интерпретировать как точные суммы функциональных рядов. Например, тождество (4.28) сводится к

$$\frac{2\sqrt{k(s)} \mathbf{K}(k(s))}{\pi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi s/4)}. \quad (4.34)$$

Кроме того, при небольших натуральных p можно найти явные выражения для точных решений уравнения $s(k_p) = \sqrt{p}$, а именно $k_1 = 1/\sqrt{2}$, $k_2 = \sqrt{2} - 1$, $k_3 = \sqrt{2}(\sqrt{3}-1)/4$ и т. д. [7, с. 139], причём полные эллиптические интегралы первого рода, соответствующие этим значениям модулей, выражаются через гамма-функцию Эйлера. Это означает, что тождества (4.28), (4.29), (4.31)–(4.33) порождают большой набор точно вычисляемых сумм числовых рядов, например, $K(k_1) = \Gamma^2(1/4)/4\sqrt{\pi}$, поэтому из формулы (4.34) получим, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\cosh((2n-1)\pi/4)} = \frac{\Gamma^2(1/4)}{2^{5/4}\pi^{3/2}}. \quad (4.35)$$

5. Заключение

В данной работе в рамках сравнения точного решения задачи Дирихле для прямоугольника методом разделения переменных с решением этой же задачи методом конформного отображения просуммированы функциональные ряды (2.5) и (2.7), являющиеся значениями нормальной производной функции Грина прямоугольной области на её границе. Слабые пределы сумм этих рядов, выражающиеся через эллиптические функции Якоби, позволяют получить новые представления дельта-функции Дирака. Также с помощью этих сумм установлены новые тождества (4.28), (4.29), (4.31)–(4.33) для полного эллиптического интеграла первого рода, существенно расширяющие набор тождеств этого класса, приведённый в книге [7]. Эти тождества могут быть применены к суммированию и числовых, и функциональных рядов. По сути число этих тождеств определяется запасом известных значений эллиптических функций Якоби в их параллелограммах периодов.

Наконец, отметим, что функции $\mathbf{K}(k)$ и $\mathbf{K}(\sqrt{1-k^2})$ являются линейно независимыми решениями следующего линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами [5, с. 157]:

$$\frac{d}{dk} \left[k(1-k^2) \frac{d\Phi}{dk} \right] - k\Phi = 0, \quad (5.36)$$

и избылиие тождеств типа тождества (4.28) для этих функций указывает на скрытую симметрию уравнения (5.36). Перспективой данной работы является распространение этого подхода на другие области: эллипс, прямоугольный треугольник и т. д.

Благодарности. Исследование проведено при финансовой поддержке РФФИ, грант № 18-08-01356-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987. 688 с.
3. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1989. 480 с.
4. Бабич В. М., Капилевич М. Б., Михлин С. Г., Натансон Г. И., Риз П. М., Слободецкий Л. Н., Смирнов М. М. Линейные уравнения математической физики. М.: Наука, 1964. 368 с.
5. Ахиезер Н. И. Элементы теории эллиптических функций. М.: Наука, 1970. 304 с.
6. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.-Л.: ГТТИ, 1933. Т. 1. 525 с.
7. Borwein J. M., Borwein P. B. Pi and the AGM. A Study in analytic number theory and computational complexity. Toronto: John Wiley and Sons, 1987. 414 p.

Поступила 25.02.2020

MSC2020 30C20 33E05 35J08

The Dirichlet problem for rectangle and new identities for elliptic integrals and functions

© E. S. Alekseeva¹, A. E. Rassadin²

Abstract. In the paper, results of comparison of two different methods of exact solution of the Dirichlet problem for rectangle are presented, namely, method of conformal mapping and method of variables' separation. By means of this procedure normal derivative of Green's function for rectangular domain was expressed via Jacobian elliptic functions. Under approaching to rectangle's boundaries these formulas give new representations of the Dirac delta function. Moreover in the framework of suggested ideology a number of identities for the complete elliptic integral of the first kind were obtained. These formulas may be applied to summation of both numerical and functional series; also they may be useful for analytic number theory.

Key Words: correspondence of boundaries, kernel of integral operator, modulus of complete elliptic integral, the Poisson formula, the Weierstrass sigma-function, linear differential equation of the second order with variable coefficients

REFERENCES

1. A. N. Tihonov, A. A. Samarskii, *[Equations of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1966, 724 p.
2. M. A. Lavrentyev, B. V. Shabat, *[Methods of the theory of functions of a complex variable]*, Nauka Publ., Moscow, 1987, 688 p.
3. Yu. V. Sidorov, M. V. Fedoryuk, M. I. Shabunin, *[Lectures on the theory of functions of a complex variable]*, Nauka Publ., Moscow, 1989, 480 p.
4. V. M. Babich, M. B. Kapilevich, S. G. Mikhlin, G. I. Natanson, P. M. Riz, L. N. Slobodetskii, M. M. Smirnov, *[Linear equations of mathematical physics]*, Nauka Publ., Moscow, 1964, 368 p.
5. N. I. Ahiezer, *[Elements of the theory of elliptic functions]*, Nauka Publ., Moscow, 1970, 304 p.
6. R. Kurant, D. Gilbert, *[Methods of Mathematical Physics]*. V.1, GTTI, Moscow-Leningrad, 1933, 525 p.
7. J. M. Borwein, P. B. Borwein, *Pi and the AGM. A study in analytic number theory and computational complexity*, John Wiley and Sons, Toronto, 1987, 414 p.

Submitted 25.02.2020

¹**Helen S. Alekseeva**, Member of Nizhny Novgorod Mathematical Society (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7132-0931>, kometarella@mail.ru

²**Alexander E. Rassadin**, Member of Presidium of Nizhny Novgorod Mathematical Society (23 Gagarin Ave., Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5644-4012>, brat_ras@list.ru

MSC2020 65M32

On an iterative method for solution of direct problem for nonlinear hyperbolic differential equations

© I. V. Boykov¹, V. A. Ryazantsev²

Abstract. An iterative method for solution of Cauchy problem for one-dimensional nonlinear hyperbolic differential equation is proposed in this paper. The method is based on continuous method for solution of nonlinear operator equations. The keystone idea of the method consists in transition from the original problem to a nonlinear integral equation and its successive solution via construction of an auxiliary system of nonlinear differential equations that can be solved with the help of different numerical methods. The result is presented as a mesh function that consists of approximate values of the solution of stated problem and is constructed on a uniform mesh in a bounded domain of two-dimensional space. The advantages of the method are its simplicity and also its universality in the sense that the method can be applied for solving problems with a wide range of nonlinearities. Finally it should be mentioned that one of the important advantages of the proposed method is its stability to perturbations of initial data that is substantiated by methods for analysis of stability of solutions of systems of ordinary differential equations. Solving several model problems shows effectiveness of the proposed method.

Key words: nonlinear hyperbolic equation, nonlinear integral equation, continuous operator method, system of differential equations, stability theory

1. Introduction

Hyperbolic differential equations are a powerful instrument of mathematical modelling of different processes and phenomena which modern science collides with. Among numerous applications of hyperbolic equations we can mention acoustics, elasticity theory, field theory, aerodynamics, electrodynamics etc. At present time there are many results in the field of development of numerical methods for solution of linear and nonlinear hyperbolic equations [1–7]. A wide range of numerical methods is used for approximate solution of hyperbolic equations:

- difference methods [6; 8],
- variational and projective methods [9],
- spline-collocation methods [10],
- approximate analytical methods [11],
- finite elements methods, factorization methods, decomposition methods [7; 12],
- boundary integral equation method

¹**Il'ya V. Boykov**, Head of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), <http://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, i.v.boykov@gmail.com

²**Vladimir A. Ryazantsev**, Assistan Professor of Higher and Applied Mathematics Chair, Penza State University (40, Krasnaya St., Penza 440026, Russia), <http://orcid.org/0000-0003-0875-9823>, ryazantsevv@mail.ru

and many others.

Nevertheless, until present time there is considerable demand for further development of methods for approximate solution of such equations: there is still the important problem of devising sufficiently precise and stable numerical methods that allow to solve hyperbolic equations effectively.

The numerical method that is proposed in this paper can be briefly described in the following way. By means of the general solution formula the original problem is replaced by a nonlinear integral equation. This equation is then solved with the help of continuous operator method. For this purpose a parametric differential equation of special type is composed and then solved approximately by means of one of methods for approximate solution of differential equations. As a result of solution we have a set of approximate values of the solution of original Cauchy problem on a uniform mesh.

Let us introduce a brief description of continuous operator method following the paper [13]. Suppose it is required to find a solution of the operator equation Let us introduce a brief description of continuous operator method following the paper [13]. Suppose it is required to find a solution of the operator equation

$$\Phi(\mathbf{y}) = \mathbf{f}, \quad (1.1)$$

where $\Phi : B \rightarrow B$, $\mathbf{y} \in B$, $\mathbf{f} \in B$, B — a Banach space. The equation (1.1) is placed in correspondence with the Cauchy problem for the following auxiliary parametric differential equation

$$\frac{d\bar{\mathbf{y}}}{d\sigma} = \Phi(\bar{\mathbf{y}}(\sigma)) - \mathbf{f}, \quad (1.2)$$

$$\bar{\mathbf{y}}(0) = \chi, \quad (1.3)$$

where $\sigma \geq 0$ and χ — arbitrary element of a Banach space B .

Let $\Lambda(\Phi)$ a logarithmic norm of the operator Φ .

Remark 1.1 Recall that a logarithmic norm $\Lambda(\Phi)$ of the operator Φ in a Banach space B is defined by the formula

$$\Lambda(\Phi) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\|I + h\Phi\| - 1}{h},$$

where the symbol $h \downarrow 0$ denotes decreasing convergence to zero.

The following theorem holds [13].

Theorem 1.1 Suppose the equation (1.1) has the solution \mathbf{y}^* , and on every differentiable curve $g(s)$ located in a ball $R(\mathbf{y}^*, r)$ the following conditions hold

$$1. \text{ For every } s \ (s > 0): \int_0^s \Lambda(\Phi'(g(\tau))) \, d\tau \leq 0.$$

$$2. \lim_{s \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{s} \int_0^s \Lambda(\Phi'(g(\tau))) \, d\tau \right\} \leq \gamma_g, \quad \gamma_g > 0.$$

Then a solution of the problem (1.2)–(1.3) converges to the solution \mathbf{y}^* of the equation (1.1).

2. Description of the method

Consider the Cauchy problem for a nonlinear hyperbolic differential equation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \Psi(t, x; u), \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = \alpha(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \beta(x). \quad (2.2)$$

Here $0 \leq t \leq T$, $x \in \mathbb{R}$. A value $a > 0$ and functions $\alpha(x)$, $\beta(x)$ are supposed to be known.

Let us state the problem of approximate recovering of a function $u(t, x)$ that is the solution of the problem (2.1)–(2.2), in a finite set of points denoted as Ω .

Remark 2.1 *Parameters of the set Ω will be determined below.*

Suppose that functions $\alpha(x)$, $\beta(x)$ are known in terms of finite sets of values (precise or approximate)

$$\begin{aligned} \{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_N\} & \quad (\alpha_l = \alpha(x_l)) \\ \{\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_N\} & \quad (\beta_l = \beta(x_l)), \end{aligned}$$

where $x_l = -A + lh$, $l = \overline{0, N}$, $h = 2A/N$ — fixed step with respect to x variable.

It is known [14] that the problem (2.1)–(2.2) reduces to the problem of solving the following integral equation

$$\begin{aligned} u(t, x) = \frac{1}{2} [\alpha(x - at) + \alpha(x + at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \beta(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^t \int_{x-a(t-s)}^{x+a(t-s)} \Psi(s, \xi, u(s, \xi)) d\xi ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

A description and a realization of the proposed method could be significantly simplified with the auxiliary constraint that sets a relation between steps of a mesh. Specifically, let τ (the step with respect to t) be specified in such a way that the following condition holds.

$$\tau = \frac{h}{a}. \quad (2.4)$$

Let us define a positive integer number M so as to fulfill the condition

$$0 \leq \frac{\tilde{T} - T}{\tau} < 1,$$

where $\tilde{T} = M\tau$. Let us also denote $u_{i,j} = u(t_i, x_j)$ and write the equation (2.3) at some fixed point (t_i, x_j) .

$$\begin{aligned} u_{i,j} = \frac{1}{2} [\alpha(x_j - at_i) + \alpha(x_j + at_i)] + \frac{1}{2a} \int_{x_j-at_i}^{x_j+at_i} \beta(\xi) d\xi + \\ + \frac{1}{2a} \int_0^{t_i} \int_{x_j-a(t_i-s)}^{x_j+a(t_i-s)} \Phi(s, \xi, u(s, \xi)) d\xi ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

It is easily seen that due to the relation (2.4) we have

$$x_j \pm at_i = -A + jh \pm ih = -A + (j \pm i)h. \quad (2.6)$$

Thus for every ordered couple of indices (i, j) , where $i = \overline{1, M}$ and $j = \overline{i, N-i}$, there are such values $m \in \{0, N\}$, $n \in \{0, N\}$ that $x_j + at_i = x_m$ and $x_j - at_i = x_n$.

Hence we define the mentioned set Ω as follows.

$$\Omega = \{(t_i, x_j) : i = \overline{1, M}, j = \overline{i, N-i}\}. \quad (2.7)$$

Denote as $\varphi_{i,j}$ the approximation with the help of one of quadrature formulae of the integral function

$$\frac{1}{2a} [\alpha(x_j - at_i) + \alpha(x_j + at_i)] + \frac{1}{2a} \int_{x_j - at_i}^{x_j + at_i} \beta(\xi) d\xi.$$

In order to approximate the integral $\frac{1}{2a} \int_0^{t_i} \int_{x_j - a(t_i-s)}^{x_j + a(t_i-s)} \Psi(s, \xi, u(s, \xi)) d\xi ds$ we use compound trapezoid formula

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a} \int_0^{t_i} \int_{x_j - a(t_i-s)}^{x_j + a(t_i-s)} \Phi(s, \xi, u(s, \xi)) d\xi ds \approx \\ \approx \frac{h^2}{16a} \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=j-(i-k)}^{j+(i-k)-1} \{ \Psi(t_k, x_l, u_{k,l}) + \Psi(t_k, x_{l+1}, u_{k,l+1}) + \\ + \Psi(t_{k+1}, x_l, u_{k+1,l}) + \Psi(t_{k+1}, x_{l+1}, u_{k+1,l+1}) \}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Thus the equation (2.5) is approximated by the equation

$$\begin{aligned} u_{i,j} = \varphi_{i,j} + \frac{h^2}{16a} \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=j-(i-k)}^{j+(i-k)-1} \{ \Psi(t_k, x_l, u_{k,l}) + \Psi(t_k, x_{l+1}, u_{k,l+1}) + \\ + \Psi(t_{k+1}, x_l, u_{k+1,l}) + \Psi(t_{k+1}, x_{l+1}, u_{k+1,l+1}) \}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

where $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{i, N-i}$.

The equation (2.9) forms the basis of the proposed iterative method for approximate solution of the problem (2.1)–(2.2).

Let us introduce functions $\bar{u}_{i,j}(\sigma)$, $\sigma \geq 0$ associated with corresponding unknown values $u_{i,j}$ through the limitary equation

$$\lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{u}_{i,j}(\sigma) = u_{i,j}.$$

The auxiliary functions $\bar{u}_{i,j}(\sigma)$ form the solution of system of differential equations

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_{i,j}(\sigma)}{d\sigma} = \gamma_{i,j} \left\{ \varphi_{i,j} + \frac{h^2}{16a} \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=j-(i-k)}^{j+(i-k)-1} \{ \Phi(t_k, x_l, \bar{u}_{k,l}(\sigma)) + \Phi(t_k, x_l, \bar{u}_{k,l+1}(\sigma)) + \right. \\ \left. + \Phi(t_k, x_l, \bar{u}_{k+1,l}(\sigma)) + \Phi(t_{k+1}, x_{l+1}, \bar{u}_{k+1,l+1}(\sigma)) \} \right\}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

where $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{i, N - i}$ and constant values $\gamma_{i,j}$ take on a value of $+1$ or -1 .

Remark 2.2 The $\gamma_{i,j}$ values must be defined in such a way that the conditions of the theorem 1.1 are fulfilled and, as a consequence, iterative process based on the equation (2.10) converges. In practice values of these constants could be determined experimentally.

In order to provide uniqueness of solution of the system (2.10), we must attach to it a set of initial conditions. It is known [13] that these conditions can be defined with arbitrary numbers. In particular, we can set all conditions equal to some fixed number. Besides — for the purpose of reducing the amount of computations — it is reasonable to define the initial conditions with the following formula:

$$\bar{u}_{i,j}(0) = \bar{u}_{i-1,j}(\sigma_L). \quad (2.11)$$

Remark 2.3 The formula (2.11) is applicable for $i = \overline{2, M}$. As values $u_{0,j}$ are not defined with continuous operator method but are known from initial conditions then for $i = 1$ the formula (2.11) is replaced by the formula

$$\bar{u}_{1,j}(0) = \alpha(x_j). \quad (2.12)$$

For solving the system of equations (2.10) with the initial conditions (2.11)–(2.12) we can apply wide range of numerical methods for solving differential equations. In particular, such simple method as Euler method. We next describe its application.

Let θ — step of Euler method and L — number of iterations of Euler method. Denote $\sigma_r = r\theta$. Then the iterative process for solving the problem (2.10)–(2.11) is described by the formula

$$\begin{aligned} \bar{u}_{i,j,r} = \bar{u}_{i,j,k} + \gamma_{i,j} \bigg\{ & \theta \cdot \{ \varphi_{i,j} + \\ & + \frac{h^2}{16} \cdot \sum_{k=0}^{i-1} \sum_{l=j-(i-k)}^{j+(i-k)-1} \{ \Phi(t_k, x_l, \bar{u}_{k,l,r-1}) + \Phi(t_k, x_l, \bar{u}_{k,l+1,r-1}) + \\ & + \Phi(t_k, x_l, \bar{u}_{k+1,l,r-1}) + \Phi(t_{k+1}, x_{l+1}, \bar{u}_{k+1,l+1,r-1}) \} \} \bigg\}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

where $\bar{u}_{i,j,r} = \bar{u}$ and $r = \overline{1, L}$.

The process (2.13) results in a set of values $\bar{u}_{i,j,L}$:

$$u_{i,j} \approx \bar{u}_{i,j,L}. \quad (2.14)$$

Thus the process of approximate solution of the problem (2.1)–(2.2) consists of the following steps.

1. The main parameters of the algorithm such as M , L and θ , are defined.
2. For $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{i, N - i}$ values $\varphi_{i,j}$ are computed.
3. For $i = \overline{1, N}$ the following steps are performed successively.

- (a) For each $j = \overline{i, N - i}$ in accordance with the formula (2.11) initial values are $\bar{u}_{i,j}(0)$ defined while it is supposed that $\bar{u}_{0,j}(\sigma_L) = \alpha_j$.

- (b) Using the formula (2.12) we perform L iterations of Euler method; in this connection r -th iteration of the method involves successive computing of the values $\bar{u}_{i,j,r}$ for $j = \bar{i}, \overline{N-i}$.
- (c) Results of the iterative process for $j = \bar{i}, \overline{N-i}$ are defined with the formula (2.14).
- (d) We make transition to the next value of i (next layer with respect to t) and return to the step (a).

Consider absolutely and irrespectively the way of constructing the approximation of $\Psi(t, x; u)$. In case Φ depends only on $u(t, x)$ construction of such approximation is straightforward. But in case Φ depends on the derivative $\frac{\partial u}{\partial x}$ the question arises about the manner in which this derivative should be approximated at the point (t_i, x_j) using only a set of values $\{u_{i,j}\}_{j=0,N}$. The simplest way to do that is using difference approximations:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=t_i, x=x_j} = \begin{cases} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h} & \text{if } j = 0, \\ \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2h} & \text{if } 1 \leq j \leq N-1, \\ \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h} & \text{if } j = N. \end{cases} \quad (2.15)$$

Besides in practice there are often not exact values of the functions $\alpha(x)$, $\beta(x)$, but approximate values disturbed with some errors.

As long as using the formulae (2.15) could lead to instability of the method, it is reasonable to use another variants of difference approximations presented in the book [15]:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{t=t_i, x=x_j} = \begin{cases} \frac{-21u_{i,j} + 13u_{i,j+1} + 17u_{i,j+2} - 9u_{i,j+3}}{20h}, & \text{if } j = 0, \\ \frac{-11u_{i,j-1} + 3u_{i,j} + 7u_{i,j+1} + u_{i,j+2}}{10h}, & \text{if } j = 1, \\ \frac{-2u_{i,j-2} - u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + 2u_{i,j+2}}{10h}, & \text{if } 2 \leq j \leq N-2, \\ \frac{-11u_{i,j+1} + 3u_{i,j} + 7u_{i,j-1} + u_{i,j-2}}{20h}, & \text{if } j = N-1, \\ \frac{-21u_{i,j} + 13u_{i,j-1} + 17u_{i,j-2} - 9u_{i,j-3}}{20h}, & \text{if } j = N. \end{cases} \quad (2.16)$$

Finally it should be mentioned that although the condition (2.4) significantly simplifies the method it is not necessary for using it. Actually the condition (2.4) could be excluded and the steps h and τ could be defined independently from each other. But in this case values $x_j \pm at_i$ in the general case will not coincide with nodes of a uniform net, and in order to compute integrals on the right side of the equation (2.5) we need to use local splines: this approach will increase computational complexity of the method and at the same time decrease its accuracy.

Remark 2.4 *Implementation of the computational scheme described above requires reduction of a number of nodes by two per each successive layer with respect the t variable. In order to reconvert function values $u(t_i, x_j)$ for $i = \overline{1, M}$, $j = \overline{0, i-1}$, $j = \overline{N-i+1, N}$ at the missed nodes we can construct a special difference scheme be analogy with the scheme proposed in the paper [16] for analysis of potential fields.*

3. Solving model examples

Example 3.1 Let it be required to recover values of function $u(t, x)$ which is the solution of Cauchy problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (x^4 + 2t)u + 4tu \ln(u), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.1)$$

$$u(0, x) = 1, \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = -x^2. \quad (3.3)$$

Remark 3.1 The exact solution of the problem is given by the following formula

$$u(t, x) = e^{-tx^2}. \quad (3.4)$$

It is supposed that the functions $\alpha(x) = u(0, x)$ and $\beta(x) = \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0}$ are defined as the finite sets $\{\alpha(x_j)\}_{j=0, \overline{N}}$ and $\{\beta(x_j)\}_{j=0, \overline{N}}$, where $x_j = -A + jh$. In this example we define $A = 2$, $N = 400$, $h = 0.01$.

The stated problem is solved with the proposed method. We set the following values of parameters of the method.

$$L = 100, \quad \theta = 0.1.$$

Due to the condition (2.4) we have $\tau = 0.01$. Therefore $\tilde{T} = 1$ and consequently $T = \tilde{T}$. The values $\bar{u}_{i,j}(0)$ for all $i = 1, \overline{M}$, $j = \bar{i}, \overline{N-i}$ are set to 1.

The results of computational experiments are presented in the table 3.1.

Table 3.1. Approximate solution of the equation (3.1)

t_i	ε_i	t_i	ε_i	t_i	ε_i	t_i	ε_i
0.05	0.003421	0.30	0.012163	0.55	0.016164	0.80	0.018916
0.10	0.005983	0.35	0.013174	0.60	0.016746	0.85	0.019499
0.15	0.007992	0.40	0.014058	0.65	0.017296	0.90	0.020132
0.20	0.009627	0.45	0.014838	0.70	0.017831	0.95	0.020832
0.25	0.010995	0.50	0.015534	0.75	0.018365	1.00	0.021620

The error values for layers $t = t_i$ are listed with step equals to 0.05. The error ε_i is defined as the greatest over all nodes x_j ($j = \bar{i}, \overline{N-i}$) absolute value of difference between exact and approximate values of $u(t, x)$ at node $u(t, x)$.

Remark 3.2 Let us find approximate solutions of the following problem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \frac{x^4 + 2t}{(1 + tx^2)^2}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.5)$$

$$u(0, x) = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = x^2. \quad (3.6)$$

Remark 3.3 The exact solution of the problem (3.5)-(3.6) is defined by the formula

$$u(t, x) = \ln(1 + tx^2). \quad (3.7)$$

Suppose that values of the functions $\alpha(x)$, $\beta(x)$ are known on the interval $x \in [-3/2, 3/2]$ on a uniform mesh with the step $h = 0.01$. As far as it can be seen from (3.6) $a = 1$; then due to (2.4) we have $\tau = 0.01$. After setting $M = 100$ we get $\tilde{T} = M\tau = 1 = T$. For Euler method we set the following values of parameters: $\theta = 0.1$, $L = 100$.

The results of computational experiments are presented in the table 3.2.

Table 3.2. Approximate solution of the equation (3.5)

t_i	ε_i	t_i	ε_i	t_i	ε_i	t_i	ε_i
0.050000	0.000983	0.300000	0.002657	0.550000	0.003229	0.800000	0.004348
0.100000	0.001630	0.350000	0.002768	0.600000	0.003390	0.850000	0.004675
0.150000	0.002051	0.400000	0.002870	0.650000	0.003580	0.900000	0.005040
0.200000	0.002329	0.450000	0.002975	0.700000	0.003802	0.950000	0.005443
0.250000	0.002519	0.500000	0.003092	0.750000	0.004057	1.000000	0.005883

4. Conclusion

In the paper we propose a numerical method for approximate solution of nonlinear hyperbolic differential equations. It is based on continuous operator method for solution of nonlinear operator equations in Banach spaces. The proof of its convergence offered numerical algorithms is based on the Liapunov theory of stability of solutions of ODE. The most striking practical advantage can be revealed for nonlinear integral equations. When solving such equations within more traditional Newton-Kantorovich approach, existence of the inverse of the Frechet derivative for each iterative step is required. It also requires solving a system of linear equations at each step, which can be computationally prohibitive. In contrast, our approach allows us to calculate the solution without such a restriction. The evolutionary nature of the method makes the broad set of methods available for solving ODE — including recurrent neural network techniques — be applied to solving linear and nonlinear hypersingular integral equations. Solving model examples illustrates efficiency of the proposed method.

REFERENCES

1. J. L. Lions, [Some methods for solution of nonlinear boundary problems], Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 588 p.
2. H. Gajewski, K. Gröger, K. Zacharias, [Nonlinear operator equations and operator differential equations], Mir Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 336 p.
3. P. M. Morse, G. Feshbach, [Methods of Theoretical Physics], **2**, Izdatelstvo inostrannoy literatury Publ., Moscow, 1960 (In Russ.), 887 p.
4. N. N. Kalitkin, [Numerical methods], Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 512 p.

5. P. N. Vabischevich, [*Numerical methods of Mathematical Physics. Nonstationary problems*], Vuzovskaya kniga Publ., Moscow, 2008 (In Russ.), 195 p.
6. A. A. Samarskii, [*Theory of difference schemes*], Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russ.), 615 p.
7. A. G. Kulikovskii, N. V. Pogorelov, A. Y. Semenov, [*Mathematical problems of numerical solution of hyperbolic equations*], Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 600 p.
8. R. Courant, E. Isaacson, M. Rees, “On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences”, *Commun. Pure and Appl. Math.*, **5:3** (1952), 243–255.
9. M. D. Bragin, Y. A. Kriksin, V. F. Tishkin, “[Verification of an entropic regularization method for discontinuous Galerkin schemes applied to hyperbolic equations]”, *Keldysh Institute Preprints*, 2019, no. 18 (In Russ.), 25 p.
10. S. Singh, S. Singh, R. Arora, “Numerical solution of second order one-dimensional hyperbolic equation by exponential B-spline collocation method”, *Numerical Analysis and Applications*, **10:2** (2017), 164–176.
11. O. L. Boziev, “[Solution of nonlinear hyperbolic equations by an approximate analytical method]”, *Tomsk State University Journal of Mathematics and Mechanics*, 2018, no. 51, 5–14 (In Russ.).
12. V. M. Kovenya, D. V. Chirkov, [*Method of finite differences and finite volumes for solution of mathematical physics problems*], Izdatelstvo Novosibirskogo universiteta Publ., Novosibirsk, 2013 (In Russ.), 86 p.
13. I. V. Boykov, “On a continuous method for solving nonlinear operator equations”, *Differential Equations*, **48:9** (2012), 1288–1295.
14. A. D. Polyanin, [*A handbook on nonlinear equations of mathematical physics*], Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 576 p.
15. C. Lanczos, [*Practical methods of applied analysis*], Fizmatlit Publ., Moscow, 1961 (In Russ.), 524 p.
16. I. V. Boykov, M. V. Kravchenko, V. I. Kryuchko, “The approximate method for reconstructing the potential fields”, *Izvestiya. Physics of the Solid Earth*, **46:4** (2010), 339–349.

Submitted 04.03.2020

УДК 517.9

О глобальной динамике в уравнении Дуффинга при квазипериодическом возмущении

© Т. Н. Драгунов¹, К. Е. Морозов², А. Д. Морозов³

Аннотация. Рассмотрено уравнение Дуффинга с малым возмущением, содержащим автономную неконсервативную часть, аналогичную уравнению Ван дер Поля, и двухчастотную квазипериодическую составляющую с иррациональным соотношением частот. Применены методы анализа резонансных зон с помощью процедуры усреднения и анализа поведения решений в области сепаратрисы невозмущенной системы с помощью аналога формулы Мельникова. Установлено, что число «частично проходимых» резонансных уровней конечно, а качественное поведение решений системы в окрестности остальных резонансных уровней определяется автономной частью возмущения. Проанализировано поведение решений, соответствующих предельному циклу в автономной системе. Приведены иллюстрации качественного поведения решений усредненной системы при прохождении предельного цикла, отвечающего трехмерному тору исходной системы, через окрестности резонансных уровней. В случае невозмущенной системы с петлей сепаратрисы с помощью метода Мельникова установлено условие пересечения устойчивого и неустойчивого многообразий седлового решения, приводящего к существованию двоякоасимптотических решений и нерегулярной динамике в окрестности невозмущенной сепаратрисы. Проведенное исследование позволяет сделать выводы о глобальном поведении решений.

Ключевые слова: Динамические системы на плоскости, квазипериодическое возмущение, резонансы, формула Мельникова, метод Мельникова, уравнение Дуффинга, глобальная динамика

1. Введение

Рассмотрим уравнение⁴

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = \varepsilon f(x, \dot{x}, t), \quad (1.1)$$

где ε – малый положительный параметр; $\alpha = \pm 1$; $f = (p_1 - x^2)\dot{x} + p_2 f_1(t)$; p_1, p_2 – параметры; функция $f_1(t)$ – квазипериодическая с частотами $\omega_1, \dots, \omega_m$.

Для определенности положим $m = 2$. Например, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \sqrt{5}$. Системы типа Дуффинга с квазипериодическими возмущения рассматривались в ряде работ (см.,

¹Драгунов Тимофей Николаевич, доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0428-1850>, dtn@mm.unn.ru

²Морозов Кирилл Евгеньевич, ассистент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9089-6813>, kirwamath@gmail.com

³Морозов Альберт Дмитриевич, профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ ВО «Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3467-6319>, morozov@mm.unn.ru

⁴Статья подготовлена по материалам доклада, сделанного авторами на XIV Международной научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» (г. Саранск, 2019 г.)

например, [1–4]). В работе [5] рассмотрена задача о квазипериодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем общего вида.

Случай периодических возмущений рассмотрен наиболее полно (см., например, [7–8], где приведены решения задачи о глобальном поведении решений). Уравнение (1.1) эквивалентно системе

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\alpha x - x^3 + \varepsilon f(x, y, t).\end{aligned}\tag{1.2}$$

На Рис. 1.1 показаны фазовые портреты невозмущенной системы, когда $\varepsilon = 0$.

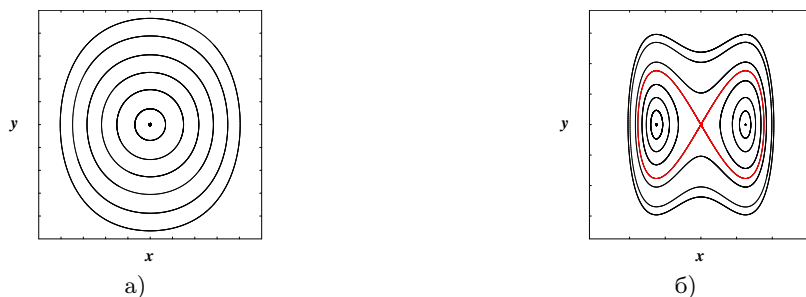


Рис. 1.1. Фазовый портрет невозмущенной системы а) при $\alpha = 1$ и б) при $\alpha = -1$

Рассмотрим поведение решений системы (1.2) с начальными условиями из области D , где: а) D – компактная часть плоскости (x, y) , из которой выброшена окрестность состояния равновесия при $\alpha = 1$; б) D – компактная область вне «восьмерки», из которой выброшена окрестность сепаратрисы или области внутри «восьмерки» с выброшенной окрестностью состояний равновесия и окрестностью сепаратрисы. В области D фазовое пространство системы заполнено замкнутыми фазовыми кривыми $H(x, y) = y^2/2 + \alpha x^2/2 + x^4/4 = h$, $h \in [h_-, h_+]$.

Глобальное исследование системы (1.2) связано с рассмотрением поведения решений как в области D , так и в окрестности невозмущенных сепаратрис. В свою очередь, исследование в ячейке D связано с резонансами. Замкнутую фазовую кривую $H(x, y) = h_{res}$ с частотой $\omega(h_{res})$ называют резонансой, если частоты $\omega(h_{res}), \omega_1, \omega_2$ целочисленно зависимы.

Исследование системы (1.2) в окрестностях индивидуальных резонансных уровней $H(x, y) = h_{res}$ было проведено в работе [5]. Было показано, что резонансные уровни делятся на проходимые, частично проходимые и непроходимые. Если все уровни $H(x, y) = h$ являются проходимыми, то качественное поведение решений системы (1.2) в ячейке D определяется автономной системой

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \\ \dot{y} &= -\frac{\partial H(x, y)}{\partial x} + \varepsilon f_0(x, y),\end{aligned}\tag{1.3}$$

где

$$f_0(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, y, \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2.$$

В работе [5] были намечены подходы к решению задачи о глобальном поведении решений. В данной статье реализуем эти подходы и проиллюстрируем их на примере уравнения Дuffинга. Прежде всего опишем общую схему глобального исследования, затем перейдем к вычислительной части.

2. Поведение решений в области D

Система (1.2) в области D после перехода к переменным действие I - угол θ принимает вид

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \varepsilon F_1(I, \theta, \theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon F_2(I, \theta, \theta_1, \theta_2), \\ \dot{\theta}_k &= \omega_k, \quad k = 1, 2,\end{aligned}\tag{2.1}$$

где

$$\begin{aligned}F_1 &= f(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \theta_2)x'_\theta, \\ F_2 &= -f(x(I, \theta), y(I, \theta), \theta_1, \theta_2)x'_I;\end{aligned}\tag{2.2}$$

функции $x(I, \theta)$, $y(I, \theta)$ определяют замену переменных; $\omega(I)$ – частота движения на замкнутых фазовых кривых. Функция $\omega(I)$ – монотонная и отлична от нуля при $I \in (I_-, I_+)$. Далее представим выражения для этих функций.

Система (2.1) определена на прямом произведении интервала $K = [I_-(h_-), I_+(h_+)]$ и трехмерного тора, где h_-, h_+ определяют границы области D .

При $\varepsilon = 0$ четырехмерное фазовое пространство системы (2.1) расслаивается на трехмерные торы T^3 , движение на которых является условно периодическим с частотами $\omega, \omega_1, \omega_2$. При $\varepsilon \neq 0$ некоторые инвариантные торы разрушаются из-за неконсервативности возмущения и/или наличия целочисленной комбинации частот $\omega, \omega_1, \omega_2$:

$$n\omega(I) - (k_1\omega_1 + k_2\omega_2) = 0.\tag{2.3}$$

При заданных ω_1, ω_2 и фиксированных k_1, k_2, n соотношение (2.3) рассматривается как уравнение относительно I . Если данное уравнение на интервале $[I_-, I_+]$ имеет вещественное решение $I = I_{n, k_1, k_2}$, то уровень $I = I_{n, k_1, k_2}$ (замкнутую фазовую кривую $H(x, y) = h_{n, k_1, k_2}$ невозмущенной системы) будем называть резонансным. Обозначим через \mathbf{k} вектор (k_1, k_2) .

2.1. Окрестность резонансного уровня

В работе [5] была получена усредненная система, описывающая поведение решений в окрестностях $U_\mu = \{(I, \theta) : I_{n\mathbf{k}} - C\mu < I < I_{n\mathbf{k}} + C\mu, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0, \mu = \sqrt{\varepsilon}\}$ индивидуальных резонансных уровней $I = I_{n\mathbf{k}}$ ($H(x, y) = h_{n\mathbf{k}}$):

$$\begin{aligned}u' &= A(v; I_{n\mathbf{k}}) + \mu\sigma u, \\ v' &= b_1 u + \mu b_2 u^2,\end{aligned}\tag{2.4}$$

где символ со штрихом означает производную по медленному времени $\tau = \mu t$, $b_1 = d\omega(I_{n\mathbf{k}})/dI \neq 0$, $b_2 = d^2\omega(I_{n\mathbf{k}})/2dI^2$,

$$A(v; I_{n\mathbf{k}}) = \frac{1}{(2\pi n)^2} \int_0^{2\pi n} \int_0^{2\pi n} F_1(I_{n\mathbf{k}}, (v + (\sum_{j=1}^2 k_j \theta_j)/n), \theta_1, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2, \tag{2.5}$$

$$\sigma = \frac{1}{(2\pi n)^2} \int_0^{2\pi n} \int_0^{2\pi n} f'_y d\theta_1 d\theta_2. \quad (2.6)$$

Фазовым пространством системы (2.4) является цилиндр $(u, v \bmod 2\pi/n)$.

Простым состояниям равновесия усредненной системы соответствуют в исходной системе квазипериодические решения с 2 частотами (двумерные инвариантные торы). Справедлива следующая теорема [5].

Т е о р е м а 2.1 *Предположим, что усредненная система (2.4) имеет простое состояние равновесия $(v_0, 0)$, и $\sigma \neq 0$. Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ исходная система (1.2) имеет квазипериодическое решение $x(t), y(t)$ с частотами $\omega_1/n, \omega_2/n$. Это решение является асимптотически устойчивым при $b_1 A'(v_0) > 0, \sigma < 0$ и неустойчивым (седловым) при $b_1 A'(v_0) < 0$. Соответственно, система (2.1) имеет 2-мерный устойчивый (или седловой) инвариантный тор T^2 .*

Доказательство этой теоремы опирается на теорему Боголюбова [6].

Представим функцию $A(v)$ в следующем виде: $A(v; I_{nk}) = B_0(I_{nk}) + \tilde{A}(v; I_{nk})$, где B_0 – среднее значение этой функции. Уровень $I = I_{nk}$ назовем уровнем **первого типа**, если $\max|\tilde{A}(v)| < |B_0|$, $B_0 \neq 0$; **второго типа**, если $\max|\tilde{A}(v)| > |B_0|$, $|B_0| \neq 0$; **третьего типа**, если $B_0 = 0$, $\tilde{A}(v, I_{nk}) \not\equiv 0$.

Качественное поведение решений системы (2.4) в окрестностях каждого из трех типов установлено в работе [7]. Уровни первого типа были названы проходимыми, уровни второго типа – частично проходимыми, а третьего типа – непроходимыми.

Если в окрестности уровня $H(x, y) = h_{nk}$ у автономной возмущенной системы существует предельный цикл, то такой резонансный уровень является уровнем третьего типа. Действительно, для системы (1.3) функция $B_0(I)$ является порождающей функцией Пуанкаре-Потрягина [8] и, следовательно, $B_0(I_{nk}) = 0$.

2.2. Окрестность нерезонансного уровня

Исследуем систему (2.1) в окрестности индивидуального нерезонансного уровня $I = I_*$. Сделав в (2.1) замену $I = I_* + \mu W$, получим систему

$$\begin{aligned} \dot{W} &= \mu F_1(I_*, \theta, \theta_1, \theta_2) + \mu^2 [\partial F_1(\cdot) / \partial I] W + O(\mu^3), \\ \dot{\theta} &= \omega(I_*) + \mu b_1 W + \mu^2 (b_2 W^2 + F_2(I_*, \theta, \theta_1, \theta_2)) + O(\mu^3), \\ \dot{\theta}_k &= \omega_k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $b_1 = d\omega(I_*)/dI$, $b_2 = d^2\omega(I_*)/2dI^2$. Обозначим $\omega(I_*) = \omega_0$.

Согласно [5], система (2.7) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mu B_0(I_*) + \mu^2 B_1(I_*) u + (O(\mu^3)), \\ \dot{\theta} &= \omega(I_*) + \mu b_1 u + O(\mu^2), \\ \dot{\theta}_k &= \omega_k, \quad k = 1, 2, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где

$$\begin{aligned} B_0 &= F_{10} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} F_1(I_*, \theta, \theta_1, \theta_2) d\theta d\theta_1 d\theta_2, \\ B_1 &= dB_0/dI = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial F_1(I_*, \theta, \theta_1, \theta_2)}{\partial I} d\theta d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned}$$

Пренебрегая членами порядка $O(\mu^3)$, приходим к уравнению

$$\dot{u} = \mu B_0(I_*) + \mu^2 B_1(I_*)u, \quad (2.9)$$

которое совпадает с усредненной системой. В рядах замены, связанной с переходом к усредненной системе, присутствуют малые знаменатели $(\bar{k}, \bar{\omega})$, $\bar{k} = (k_0, k_1, k_2)$, $\bar{\omega} = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)$. Это приводит к оценке, необходимой для сходимости рядов в замене:

$$\left| \sum_{j=0}^2 k_j \omega_j \right| \geq C / \left(\sum_{j=0}^2 |k_j| \right)^3, \quad (2.10)$$

для всех $(k_0, k_1, k_2) \in \mathbf{Z}^3 \setminus \{0\}$; C – некоторая положительная постоянная.

Если $B_0 \neq 0$, то уровень $I = I_*$ является проходным. Если $B_0 = 0$ и $B_1 = \text{const} \neq 0$, то, согласно работе [9] простому состоянию равновесия $u = 0$ уравнения (2.9) в системе (2.1) соответствует квазипериодическое решение с частотами $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ (трехмерный тор). Итак, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 2.2 *При достаточно малых $\varepsilon > 0$ грубому предельному циклу в автономной системе (1.3) с частотой ω_0 , удовлетворяющей условию (2.10), соответствует в системе (1.2) при $B_1 \neq 0$ квазипериодическое решение с частотами $\omega_0, \omega_1, \omega_2$. В системе (2.1) этому решению соответствует трехмерный тор, асимптотически устойчивый при $B_1 < 0$.*

2.3. Глобальное поведение решений в области D

Усредненная система (2.4) по виду аналогична усредненной системе при периодических возмущениях. Для периодических возмущений была доказана ограниченность множества резонансных уровней второго типа (частично проходных) [7–8]. Это доказательство переносится на случай квазипериодических возмущений. Действительно, заменяя в соответствующих формулах из [7, с. 188 – 191] скалярные величины на векторные, приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а 2.3 *Число резонансных уровней второго типа ограничено.*

Это означает, что система $u' = A(v; I_{nk}), v' = b_1 u$ имеет простые состояния равновесия при $B_0 \neq 0$ лишь для ограниченного числа резонансных уровней $I = I_{nk}$. Для исходного уравнения (1.1) этот факт доказывается непосредственно вычислением функции $A(v; I_{nk})$ (см. раздел 4.).

Поскольку число предельных циклов системы (1.3) ограничено, то число уровней третьего типа (непроходных) также ограничено. Этот факт и теоремы 2.1 – 2.3 позволяют установить глобальное поведение решений в области D . Действительно, вне конечного множества окрестностей резонансных уровней второго и третьего типов все уровни $H(x, y) = \text{const}$ являются проходными. Поэтому, зная поведение решений в окрестностях частично проходных (второго типа) и непроходных (третьего типа) уровней, мы можем установить качественное поведение решений исходной системы в области D . Если все уровни $H(x, y) = \text{const}$ в области D являются проходными, то качественное поведение решений системы (1.2) в D определяется автономной системой (1.3).

3. Расщепление сепаратрисных многообразий

Рассмотрим случай $\alpha = -1$, в котором седло невозмущенной системы (при $\varepsilon = 0$) расположено в начале координат: $x_s = 0, y_s = 0$. Обозначим устойчивое и неустойчивое многообразия седла W_0^s и W_0^u соответственно. Тогда замкнутые фазовые кривые являются проекциями цилиндров $S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, а петля сепаратрисы является проекцией сепаратрисного многообразия. Другими словами, эти многообразия являются цилиндрами в пространстве $R^3 = (x, y, t)$. Представляет интерес изучение расстояния между сепаратрисными многообразиями W_ε^s и W_ε^u , совпадающими в невозмущенной системе. В случае периодического возмущения данная задача решена в работе [10]. В работе Дж. Сандерса [11] для достаточно гладких систем применимость формула Мельникова была расширена. В книге С. Уиггинса [12] приводится обобщение на случай квазипериодических возмущений, а в [13] обсуждается построение дискретных отображений для траекторий векторных полей, зависящих от времени; приводятся геометрические иллюстрации. Исследования работы [11] переносятся на квазипериодический случай.

Следуя [11], находим величину, характеризующую расстояние между сепаратрисными многообразиями

$$\Delta_\varepsilon(t'_0) = \varepsilon \Delta_0(t'_0) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\Delta_0(t'_0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_0(\tau - t'_0), y_0(\tau - t'_0), \tau) \dot{x}_0(\tau - t'_0) d\tau, \quad (3.11)$$

$x_0(t), y_0(t)$ – решение невозмущенной системы на сепаратрисе; $f = f(x_0(\tau - t'_0), y_0(\tau - t'_0), \omega_1\tau + \theta_{10}, \omega_2\tau + \theta_{m0})$; θ_{10}, θ_{20} – постоянные. Поскольку функция f – квазипериодическая по t , то и функция $\Delta_0(t'_0)$ также будет квазипериодической. Отметим, что Δ_0 зависит от двух параметров, определяемых гармониками квазипериодического возмущения, что приводит к разнообразию при геометрической интерпретации пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий [13].

Знакопеременность функции $\Delta_0(t'_0)$ (трансверсальность пересечения $W^s(t'_0)$ и $W^u(t'_0)$) означает существование двоякоасимптотических (гомоклинических) решений, удовлетворяющих условию $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x_\varepsilon(t) = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} y_\varepsilon(t) = 0$. Исследование поведения решений в некоторой расширенной окрестности двоякоасимптотического решения проводилось в работе [14] и связано с существованием нетривиального гиперболического множества («нерегулярной динамики»). В некоторых случаях окрестность сепаратрисы является притягивающей. Тогда получаем нерегулярный аттрактор, для которого используют термины «квазиаттрактор» или «странный аттрактор». Подобную ситуацию рассмотрим на примере уравнения (1.1).

4. Результаты вычислений и выводы

Рассмотрим уравнение (1.1)

$$\ddot{x} + \alpha x + x^3 = \varepsilon \left[(p_1 - x^2) \dot{x} + p_2 \sin t \sin \sqrt{5}t \right]. \quad (4.1)$$

В данном уравнении при $\alpha = -1$ область D состоит из трех ячеек, а при $\alpha = 1$ – из одной ячейки. Поэтому при установлении глобального поведения решений уравнения (4.1) в области D для удобства положим $\alpha = 1$, поскольку исследование в трех ячейках при $\alpha = -1$ принципиально не отличается от исследования в одной ячейке при $\alpha = 1$ и было проведено в диссипативном случае в работе [5]. Поэтому при $\alpha = -1$ проведем исследование только в окрестности невозмущенных сепаратрис.

4.1. Исследование автономного уравнения

Невозмущенная система (при $\varepsilon = 0$) обладает интегралом энергии

$$H(x, y) = y^2/2 + x^2/2 + x^4/4 = h, \quad h > 0.$$

Решение системы имеет вид

$$x(\theta, I) = x_1 \operatorname{cn}(2\mathbf{K}\theta/\pi), \quad \theta = \omega t, \quad (4.2)$$

где $\omega = \pi(1 + 4h)^{1/4}/(2\mathbf{K})$ – частота собственных колебаний системы; x_1 – положительное решение уравнения $x^2/2 + x^4/4 = h$; $\operatorname{cn}(u)$ – эллиптическая функция Якоби; \mathbf{K} – полный эллиптический интеграл первого рода; $k = k(h)$ – модуль эллиптического интеграла. Обозначим через D кольцевую область фазовой плоскости $0 < h_- < h < h_+ < \infty$.

В отсутствии квазипериодической составляющей возмущения ($p_2 = 0$) в системе

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x - x^3 + \varepsilon[(p_1 - x^2)y] \quad (4.3)$$

существует единственный предельный цикл при $p_1 > 0$. Это следует из анализа порождающей функции Пуанкаре-Понтрягина, которая с точностью до коэффициента $4/(3\pi(1 - 2\rho)^{5/2})$ имеет вид

$$B_0(\rho) = p_1 [(1 - \rho)(1 - 2\rho)\mathbf{K} - (1 - 2\rho)^2\mathbf{E}] - \frac{2}{5} [(\rho - 1)(2 - \rho)\mathbf{K} + 2(\rho^2 - \rho + 1)\mathbf{E}],$$

где \mathbf{E} – это полный эллиптический интеграл второго рода; $\rho = k^2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4h}}{2\sqrt{1 + 4h}}$.

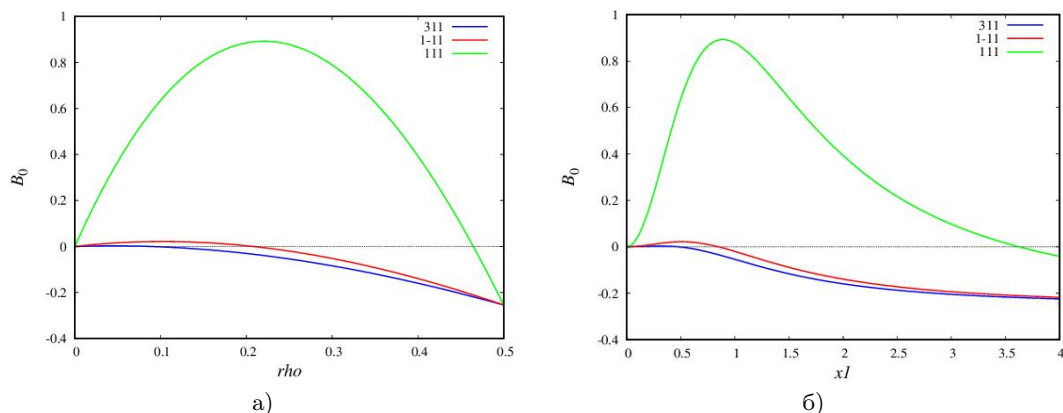


Рис. 4.1. Зависимости для значений параметра p_1 , соответствующих резонансам (3,1,1), (1,-1,1) и (1,1,1): а) $B_0(\rho)$ и б) $B_0(\rho(x_1))$

Пусть $\rho_* \in (0, 1/2)$ – простой нуль функции $B(\rho)$. Если $p_1 \rightarrow \infty$, то $\rho_* \rightarrow 0$, и при $p_1 \rightarrow +0$ имеем $\rho_* \rightarrow 1/2$. Как известно, величина ρ_* определяет уровень невозмущенной системы, который порождает грубый предельный цикл в (4.3). При $B'(\rho_*) < 0$ и $\varepsilon > 0$ цикл является устойчивым. Знак величины $B'(\rho_*)$ совпадает со знаком $\sigma(\rho_*)$, где

$$\sigma(\rho) = p_1 - \frac{2}{(1-2\rho)\mathbf{K}}[\mathbf{E} - (1-\rho)\mathbf{K}]. \quad (4.4)$$

На Рис. 4.1 показана зависимость $B_0(\rho; p_1)$ для различных значений параметра p_1 , где p_{13} находится из условия $B_0(\rho; p_{13}) = 0$ при $\rho = \rho(h_{3\mathbf{k}})$, а p_{11} – из условия $B_0(\rho; p_{11}) = 0$ при $\rho = \rho(h_{1\mathbf{k}})$; показана также соответствующая зависимость от величины x_1 . Простому состоянию равновесия уравнения $B_0(\rho; p_1) = 0$ отвечает грубый предельный цикл в системе (4.3) [8].

4.2. Вычисление усредненной системы

Поведение решений уравнения (1.1) в окрестностях индивидуальных резонансных уровней описывается усредненной системой (2.4), где

$$A(v) = B_0 + \frac{p_2}{4\pi^2 n^2} \int_0^{2\pi n} \int_0^{2\pi n} \sin \theta_1 \sin \theta_2 x'_\theta(v + (k_1 \theta_1 + k_2 \theta_2)/n) d\theta_1 d\theta_2 =$$

$$= \begin{cases} B_0 + p_2 \sqrt{2}(k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2) \frac{a^{n/2}}{1 + a^n} \sin nv & \text{при } n \text{ нечетных, } k_1 = \pm 1, k_2 = 1, \\ B_0 & \text{при } n \text{ четных или } k_1 \neq \pm 1, k_2 \neq 1. \end{cases}$$

Величина $\sigma(I_{n\mathbf{k}})$ определяется формулой (4.4).

Из условий $\omega = (\pm 1 + \sqrt{5})/n$ и $\omega > 1$ следует, что существуют только три «расщепляемых» резонансных уровня $H(x, y) = h_{311}$, $H(x, y) = h_{1,-1,1}$ и $H(x, y) = h_{111}$, причем $h_{311} < h_{1,-1,1} < h_{111}$. Это доказывает утверждение теоремы 2.3 для уравнения (4.1).

Таким образом, почти для всех резонансных уровней справедливо выражение $u' = B_0(I_{n\mathbf{k}}) + \mu \sigma u$. Если $B_0 \neq 0$, то соответствующий резонансный уровень $I = I_{n\mathbf{k}}$ является проходным; если же $B_0 = 0$, то $u' = \mu \sigma u$. Поскольку $\sigma = dB_0/dI \neq 0$, то $u \rightarrow 0$ при $\sigma < 0$. Это означает существование устойчивой инвариантной кривой, охватывающей цилиндр усредненной системы (2.4) и трехмерного устойчивого тора в системе (2.1) (теорема 2.2). Соответственно, у автономной системы (1.3) существует устойчивый предельный цикл. При изменении параметра p_1 можно наблюдать прохождение предельного цикла (отвечающего трехмерному тору системы (2.1)) через резонанс.

На Рис. 4.2 показано качественное поведение траекторий усредненной системы (2.4) в окрестностях расщепляемых резонансов с $n = 3$ и $n = 1$, а также вне этих окрестностей. При $\varepsilon = 0, 1$ и $p_1 = 0, 005$ внутри резонансной зоны с $n = 3$ существует замкнутая инвариантная кривая (устойчивый предельный цикл) у усредненной системы, Рис. 4.2, а. В исходной системе (2.1) данной кривой отвечает трехмерный тор. С увеличением p_1 этот цикл попадает в окрестность резонансного уровня $I = I_{311}$ ($H(x, y) = h_{311}$). На Рис. 4.2, б цикл отсутствует, и имеет место синхронизация квазипериодических колебаний с частотами $\omega_1/3, \omega_2/3$. Далее, при увеличении p_1 , появляется цикл вне резонансной зоны (Рис. 4.2, с, где $p_1 = 0, 06$). При дальнейшем увеличении параметра p_1 , цикл растет по величине, приближаясь к резонансной зоне с $n = 1$ ($H(x, y) = h_{1,-1,1}$) и далее проходит эту зону. Затем цикл проходит резонансную зону резонанса $H(x, y) = h_{111}$ (Рис. 4.2, d – f). Качественное поведение решений усредненной системы в окрестности резонансного уровня $H(x, y) = h_{1,-1,1}$ аналогично поведению решений в окрестности уровня $H(x, y) = h_{111}$.

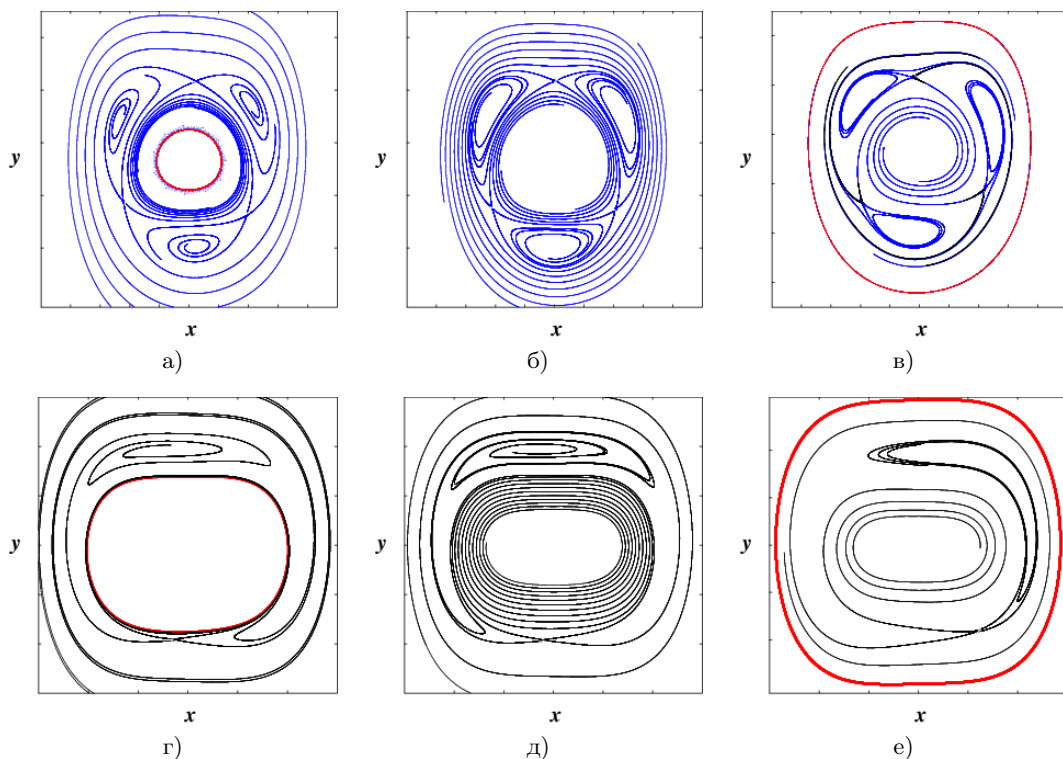


Рис. 4.2. Схематическое представление фазовых портретов системы (2.4) в окрестности уровня $H(x, y) = h_{311}$: а) цикл подходит к резонансному уровню со стороны начала координат; б) цикл совпадает с резонансным уровнем; в) цикл вне резонансного уровня и в окрестности уровня $H(x, y) = h_{111}$; г) цикл подходит к резонансному уровню; д) цикл совпадает с резонансным уровнем; е) цикл вне резонансного уровня.

4.3. Исследование в окрестности сепаратрисы

Седло невозмущенной системы расположено в начале координат. Для того чтобы зафиксировать седловое решение в начале координат при наличии возмущения, необходимо сделать замену $x = \xi + \varepsilon x_1(t) + O(\varepsilon^2)$. Затем, отбросив слагаемые порядка $O(\varepsilon^2)$, получим следующее уравнение:

$$\ddot{\xi} - \xi + \xi^3 = \varepsilon \left[(p_1 - \xi^2) \dot{\xi} - 3\xi^2 x_1(t) \right], \quad (4.5)$$

где

$$x_1(t) = \frac{p_2}{2} \left[\frac{\cos(1 - \nu)t}{1 + (1 - \nu)^2} + \frac{\cos(1 + \nu)t}{1 + (1 + \nu)^2} \right].$$

Из (3.11) следует, что

$$\Delta_\varepsilon(t_0) = \varepsilon \Delta_0(t_0) + O(\varepsilon^2),$$

где

$$\Delta_0(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} [(p_1 - \xi_s^2(t - t_0)) \dot{\xi}_s(t - t_0) - 3\xi_s^2(t - t_0) x_1(t)] \dot{\xi}_s(t - t_0) dt. \quad (4.6)$$

Здесь

$$\xi_s(t) = \pm\sqrt{2}/\cosh t, \quad \dot{\xi}_s(t) = \mp\sqrt{2}\sinh(t)/ch^2(t) \quad (4.7)$$

является решением невозмущенного уравнения для сепаратрисы. Знак «+» соответствует правой петле сепаратрисы, а знак «-» – левой.

В результате получим [15]:

$$\Delta_0(t_0) = 5p_1 - 4 + p_2 \frac{\pi\sqrt{2}}{2} [B_1 \sin(1+\nu)t_0 + B_2 \sin(1-\nu)t_0], \quad (4.8)$$

где

$$B_{1,2} = \frac{(1 \pm \nu)}{\cosh((1 \pm \nu)\pi/2)}.$$

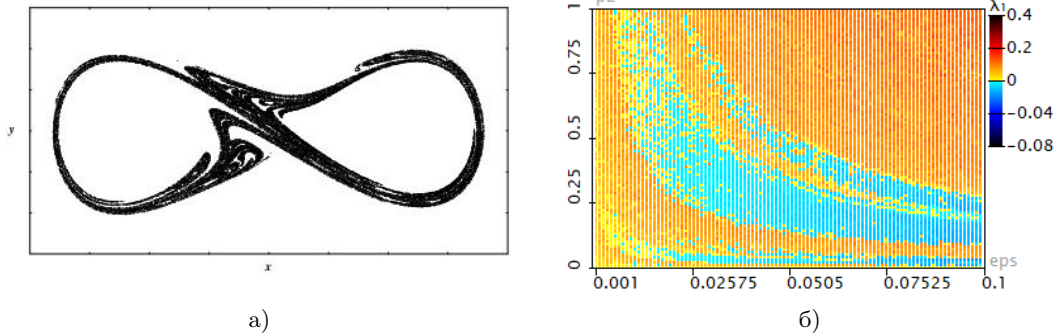


Рис. 4.3. а) нерегулярное отталкивающее множество отображения Пуанкаре;
б) диаграмма старшего ляпуновского показателя

Заметим, что функция Мельникова, как и возмущение, является квазипериодической. Из (4.8) следует, что если выполнено условие $|p_1| < (3/8)\sqrt{2}\pi|p_2|\sqrt{B_1^2 + B_2^2}$, то функция $\Delta_0(t_0)$ – знакопеременная, следовательно, $W_\varepsilon^s \cap W_\varepsilon^u \neq \emptyset$. Это означает, что существуют двоякоасимптотические решения к седловому решению. Они соответствуют гомоклиническим траекториям отображения Пуанкаре. Структура расширенной окрестности таких траекторий рассмотрена в работе Шильникова [14].

Заметим также, что неустойчивый предельный цикл автономной возмущенной системы ($p_2 = 0$) стремится к сепаратрисе и образует неустойчивую петлю сепаратрисы при $p_1 = 4/5$. В этом случае свободный член Δ_0 равен нулю, и может возникнуть нерегулярное отталкивающее множество⁵. Изображение такого множества приведено на Рис. 4.3, а для $\varepsilon = 0,1$, $p_1 = 0,799$, $p_2 = 0,8$ (дробная часть ляпуновской размерности составляет $\approx 0,826$). На Рис. 4.3, б приведена диаграмма расчета старшего ляпуновского показателя λ_1 на плоскости (ε, p_2) при $p_1 = 0,8$. На рисунке видно, что имеются области с $\lambda_1 < 0$, которые соответствуют регулярному асимптотическому поведению решений ($t \rightarrow -\infty$) в окрестности невозмущенной сепаратрисы (неустойчивых квазипериодических решений).

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 18-01-00306) и Российского научного фонда (грант 19-11-00280).

⁵ Данное отталкивающее множество можно сделать притягивающим (т. н. квазиаттрактор [8]), если заменить t на $-t$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jing Z., Wang R. Complex dynamics in Duffing system with two external forcings // Chaos, Solitons and Fractals. 2005. Vol. 23, No. 2. pp. 399 – 411.
2. Jing Z., Huang J., Deng J. Complex dynamics in three-well duffing system with two external forcings // Chaos, Solitons and Fractals. 2007. Vol. 33, No. 3. pp. 795 – 812.
3. Yagasaki K. Second-order averaging and chaos in quasiperiodically forced weakly nonlinear oscillators // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1990, Vol. 44, No. 3. pp. 445 – 458.
4. Belogortsev A. B. Quasiperiodic resonance and bifurcations of tori in the weakly nonlinear Duffing oscillator // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1992. Vol. 59, No. 4. pp. 417 – 429.
5. Морозов А. Д., Морозов К. Е. О квазипериодических возмущениях двумерных гамильтоновых систем // Дифференциальные уравнения. 2017. Т. 53, № 12. С. 1607 – 1615
6. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М: Физматгиз, 1958. 408 с.
7. Morozov A. D. Quasi-conservative systems: cycles, resonances and chaos. World Sci. 1998. Vol. 30. 325 p.
8. Морозов А. Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. - М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика»; Институт компьютерных исследований, 2005. 424 с.
9. Митропольский Ю. А., Лыкова О. Б. Интегральные многообразия в нелинейной механике. М.: Наука, 1973. 512 с.
10. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Тр. Моск. мат. об-ва. 1963. Т. 12. С. 3 – 52
11. Sanders J. Melnikov's method and averaging // Celestial Mechanics. 1982. Vol. 28, No. 1-2, pp. 171 – 181
12. Wiggins S. Global bifurcations and chaos, analytical methods. - Springer-Verlag: New York, Heidelberg, Berlin, 1988.
13. Wiggins S. Chaotic transport in dynamical systems. New York, Heidelberg, Berlin: Springer-Verlag, 1992. 301 p.
14. Шильников Л. П. Об одной задаче Пуанкаре–Биркгофа // Матем. сб. Т. 74(116), № 3. С. 378-397.
15. Morozov A. D., Dragunov T. N. On quasi-periodic perturbations of Duffing equation // Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity. 2016. Vol. 5, No. 4. pp. 377 – 386.

Поступила 19.03.2020

MSC2020 34C15

On Global Dynamics in Duffing Equation with Quasiperiodic Perturbation

© T. N. Dragunov¹, K. E. Morozov², A. D. Morozov³

Abstract. We consider Duffing equation with small perturbation consisting of time-independent nonconservative part similar to Van der Pol equation and quasiperiodic two-frequency part with irrational frequency ratio. Similarly to the analysis of time-periodic perturbation we apply analysis of resonances implying averaging. To study solutions near unperturbed separatrix we apply adapted Melnikov's method. We establish that the number of "partly passable" resonance levels is finite and qualitative behavior of solutions near other resonance levels is determined by the autonomous part of perturbation. We also study solutions corresponding to a limit cycle generated by the autonomous part of the perturbation. We demonstrate how solutions of the averaged system behave when a limit cycle corresponding to a three-dimensional torus of the original system goes through a neighborhood of a resonance level. In the case when the unperturbed system has a separatrix loop we use Melnikov formula to establish the transversal intersection of the stable and unstable manifolds of a saddle solution. This fact implies the existence of homoclinic solutions and nonregular dynamics in a neighborhood of the unperturbed separatrix. Applying all these techniques allows us to describe the global behavior of solutions.

Key Words: two-dimensional dynamical systems, quasiperiodic perturbation, resonances, averaging, homoclinic solutions, Melnikov's formula, Melnikov method, Duffing equation, global dynamics

REFERENCES

1. Z. Jing, W. Ruiqi, "Complex dynamics in Duffing system with two external forcings", *Chaos, Solitons and Fractals*, **23**:2 (2005), 399–411.
2. Z. Jing, J. Huang, J. Deng, "Complex dynamics in three-well duffing system with two external forcings", *Chaos, Solitons and Fractals*, **33**:3 (2007), 795–812.
3. K. Yagasaki, "Second-order averaging and chaos in quasiperiodically forced weakly nonlinear oscillators", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **44**:3 (1990), 445–458.
4. A. B. Belogortsev, "Quasiperiodic resonance and bifurcations of tori in the weakly nonlinear Duffing oscillator", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **59**:4 (1992), 417–429.
5. A. D. Morozov, K. E. Morozov, "[On quasiperiodic perturbations of two-dimensional Hamiltonian systems]", *Differentsialnye uravneniya*, **53**:12 (2017), 1607–1615 (In Russ.).
6. N. N. Bogolyubov, Yu. A. Mitropolskiy, [*Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations*], Fizmatgiz Publ., Moscow, 1958 (In Russ.), 408 p.

¹**Timofey N. Dragunov**, Associate Professor, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0428-1850>, dtm@mm.unn.ru

²**Kirill E. Morozov**, Assistant Professor, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9089-6813>, kirwamath@gmail.com

³**Albert D. Morozov**, Professor, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3467-6319>, morozov@mm.unn.ru

7. A. D. Morozov, *Quasi-conservative systems: cycles, resonances and chaos.*, **30**, World Scientific, 1998, 325 p.
8. A. D. Morozov, [*Resonances, cycles and chaos in quasiconservative systems*], NIC "Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika" Publ., Institut kompyuternykh issledovaniy, Moscow-Izhevsk, 2005 (In Russ.), 424 p.
9. Ju. A. Mitropolskiy, O. B. Lykova, *Integral manifolds in nonlinear mechanics*, Nauka Publ., Moscow, 1973 (In Russ.), 512 p.
10. V. K. Melnikov, "[On stability of a center under time-periodic perturbations]", *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, **12** (1963), 3–52 (In Russ.).
11. J. Sanders, "Melnikov's method and averaging", *Celestial Mechanics*, **28**:1–2 (1982), 171–181.
12. S. Wiggins, *Global bifurcations and chaos: analytical methods*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1988, 495 p.
13. S. Wiggins, *Chaotic transport in dynamical systems*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1992, 301 p.
14. L. P. Shilnikov, "[On a Poincarè-Birkhoff problem]", *Mathematicheskiiy sbornik*, **74**:3 (1967), 378–397 (In Russ.).
15. A. D. Morozov, T. N. Dragunov, "On quasi-periodic perturbations of Duffing equation", *Discontinuity, Nonlinearity, and Complexity*, **5**:4 (2016), 377–386.

Submitted 19.03.2020

УДК 519.17

О деревьях радиуса 2 с максимальным количеством паросочетаний

© Н. А. Кузьмин¹

Аннотация. Паросочетанием в графе называется любое множество его попарно не смежных ребер. В настоящей статье рассматривается и решается задача максимизации количества паросочетаний в деревьях радиуса не более чем 2 с заданным количеством вершин. Было выявлено, что для любого $n \geq 56$, где $n = 3k + r$, $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2\}$, экстремальное дерево единственно; оно получается соединением вершины с центральными вершинами в b копиях 3-пути и с листовыми вершинами в a копиях 2-пути, где $b = k + \frac{r-1-2a}{3}$, $(r, a) \in \{(0, 1), (1, 0), (2, 2)\}$. Для любого $6 \leq n \leq 55$ соответствующее экстремальное дерево тоже единственно (кроме $n = 8$, когда имеется два таких дерева) и устроено подобным образом, при $1 \leq n \leq 5$ единственным экстремальным деревом является путь на n вершинах. Для доказательства этих фактов были предложены некоторые преобразования графов, увеличивающие количество паросочетаний и сохраняющие число вершин. Автор надеется, что данные преобразования будут полезны для решения аналогичных задач в других классах графов.

Ключевые слова: экстремальная теория графов, паросочетание, дерево, максимальное дерево, молекулярные графы, обыкновенные графы

1. Введение

Химические соединения часто рассматриваются в форме т. н. *молекулярных графов*, где атомам соответствуют вершины графа, а связям между ними — ребра графа. При этом свойства химических соединений описываются в терминах т. н. *топологических индексов*, которые представляют собой некоторые инварианты графов относительно переобозначения вершин и позволяют аналитически исследовать некоторые аспекты химической структуры вещества. Например, значение *индекса Винера*, который определяется как сумма длин кратчайших путей между всеми парами вершин графа, связано с точками кипения алканов. В работах Хосойи был представлен другой топологический индекс — количество всех паросочетаний заданного графа, который сейчас известен как *Z-индекс*, или *индекс Хосойи*. В исследованиях ученого также было показано, что значение этого индекса связано с точками кипения и другими свойствами алканов. Третий пример — *индекс Меррифилда и Симмонса*, определяемый как количество независимых множеств графа, значения которого влияют на некоторые свойства углеводородов. Поскольку топологические индексы определяют «энергию» химических соединений, то интересна задача по выявлению графов из заданных классов с экстремальным (минимальным или максимальным) значением того или иного топологического индекса.

В статье рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. неориентированные, непомеченные графы без петель и кратных ребер. *Независимым множеством* в графе называется произвольное подмножество попарно несмежных его вершин. Независимое

¹Кузьмин Никита Александрович, студент, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8478-3502>, nikita.kuz2000@gmail.com

множество графа называется *максимальным*, если оно максимально по включению, и *наибольшим*, если оно имеет максимальный размер.

В 1965 г. Дж. Мун и Л. Мозер в известной статье [1] отыскиали наибольшее количество максимальных независимых множеств в классе всех n -вершинных графов. Кроме того, ими были найдены все соответствующие экстремальные графы. В 1993 г. Дж. Лю [2] получил достижимую верхнюю оценку количества максимальных независимых множеств для класса двудольных графов и описал все соответствующие экстремальные графы, которые оказались лесами специального вида. В этом же году М. Гуйтер и З. Тужа решили аналогичную задачу для класса графов без треугольников [3]. Работы, посвященные перечислению наибольших независимых множеств в графах, встречаются значительно реже. Обзор [4] содержит несколько других результатов подобного рода. Ряд работ [5–8] посвящен выявлению деревьев с экстремальными количествами просто независимых, максимальных и наибольших независимых множеств среди деревьев с заданными ограничениями.

Паросочетанием в графе называется любое множество попарно несмежных его ребер, в т. ч. и пустое. Паросочетание называется *совершенным*, если оно покрывает все вершины графа. *Наибольшим паросочетанием* называется паросочетание с максимально возможным количеством ребер. Через F_n обозначим n -ое число Фибоначчи, где $F_0 = F_1 = 1$ и $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ при $n \geq 2$. В 1977 г. И. Гутман в работе [9] доказал, что среди деревьев с n вершинами наибольшее количество паросочетаний имеет простой путь P_n , а также что в таком пути их ровно F_n . В работе [10] было показано, что максимальное количество паросочетаний среди унициклических графов с n вершинами имеет цикл на n вершинах и что у него ровно $F_{n-2} + F_n$ паросочетаний. В работе [11] были найдены все n -вершинные ациклические графы, не содержащие совершенных паросочетаний, с максимальным количеством паросочетаний. В статье [12] было найдено максимальное количество паросочетаний в классе графов с n вершинами и $n + 1$ ребром, которое оказалось равным $2F_{n-4} + F_{n-2} + F_n$. Кроме того, в данной работе были описаны все соответствующие экстремальные графы (такой граф оказался единственным). В статье [13] найдены все n -вершинные деревья с максимальным количеством наибольших паросочетаний.

Напомним, что *эксцентриситетом вершины графа* называется максимальное из расстояний между ней и остальными вершинами. *Радиус графа* — минимальный из эксцентриситетов его вершин. *Центральная вершина графа* — вершина с эксцентриситетом, равным радиусу. *Центр графа* — множество его центральных вершин. Понятно, что единственным n -вершинным деревом радиуса 1 будет только звезда S_{n-1} , имеющая ровно n паросочетаний. В данной работе рассматривается задача максимизации количества паросочетаний в n -вершинных деревьях радиуса ≤ 2 , которая, по сведениям автора этой работы, является открытой. Любое n -вершинное дерево радиуса ≤ 2 с наибольшим количеством паросочетаний назовем *максимальным*. Можно предполагать, что $n \geq 6$, т. к. при $1 \leq n \leq 5$ единственным максимальным деревом будет P_n . В данной работе доказывается, что для любого $n \geq 56$, где $n = 3k + r$ и $k \in \mathbb{N}, r \in \{0, 1, 2\}$, максимальное дерево единственно и получается соединением вершины с центральными вершинами в b копиях P_3 и с листовыми вершинами в a копиях P_2 , где $b = k + \frac{r-1-2a}{3}$ и $(r, a) \in \{(0, 1), (1, 0), (2, 2)\}$. Оказалось, что для любого $6 \leq n \leq 55$ соответствующее максимальное дерево тоже единственно (кроме $n = 8$, когда имеется два таких дерева) и устроено похожим образом.

2. Некоторые определения и обозначения

Листом графа называется произвольная его вершина степени один. *Предлистом графа* называется его вершина, смежная с листом. Два листа, смежные с общим предлистом, называются *листьями-дубликатами*. Ребро графа называется *перешейком*, если его удаление увеличивает количество его компонент связности.

Количество паросочетаний в графе G будем обозначать через $m(G)$. Напомним, что $m(G) \geq 1$, т. к. пустое множество — тоже паросочетание. Количество паросочетаний в графе G , покрывающих (и, соответственно, не покрывающих) вершину v , обозначим через $m_+(G, v)$ (и, соответственно, через $m_-(G, v)$).

3. Вспомогательные результаты

3.1. Некоторое преобразование графов и его свойства

Предположим, что связный граф H состоит из подграфов A_1 и A_2 , причем $V(A_1) \cap V(A_2) = \emptyset$, перешейка a_1a_2 , где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2$, и листа v , смежного с a_2 (см. Рис. 3.1). В графе H выполним удаление листа v , а затем подразбиение ребра a_1a_2 , результат данных преобразований обозначим через H^* .

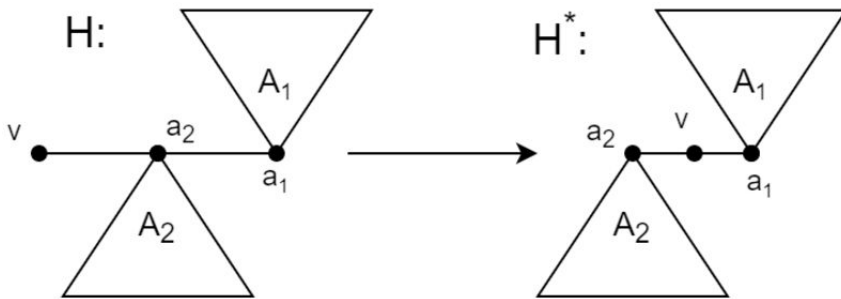


Рис. 3.1. Преобразование графа H

Л е м м а 3.1 Если $V(A_2) \neq \{a_2\}$, то $m(H) < m(H^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Понятно, что количество паросочетаний графа H , содержащих ребро a_1a_2 , равно $m_-(A_1, a_1) \cdot m_-(A_2, a_2)$. Вместе с тем, количество паросочетаний графа H , не содержащих данного ребра, равно $m(A_1) \cdot (m_-(A_2, a_2) + m(A_2))$. Таким образом, справедливо равенство:

$$m(H) = m_-(A_1, a_1) \cdot m_-(A_2, a_2) + m(A_1) \cdot (m_-(A_2, a_2) + m(A_2)).$$

Количество паросочетаний графа H^* , содержащих ребро a_1v , равно $m_-(A_1, a_1) \cdot m(A_2)$. Количество паросочетаний графа H^* , не содержащих данного ребра, равно $m(A_1) \cdot (m_-(A_2, a_2) + m(A_2))$. Таким образом, справедливо равенство:

$$m(H^*) = m_-(A_1, a_1) \cdot m(A_2) + m(A_1) \cdot (m_-(A_2, a_2) + m(A_2)).$$

Значит, $m(H^*) - m(H) = m_-(A_1, a_1) \cdot m_+(A_2, a_2)$. Напомним, что пустое множество ребер считается паросочетанием. Поэтому $m_-(A_1, a_1) > 0$. Поскольку H связан и $V(A_2) \neq \{a_2\}$, то $m_+(A_2, a_2) > 0$. Значит, $m(H^*) > m(H)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

3.2. Центр максимальных деревьев и смежные с ним поддеревья

Напомним, что по теореме Жордана центр любого дерева состоит либо из одной вершины, либо из двух смежных вершин.

Л е м м а 3.2 *Центр каждого максимального дерева состоит из одной вершины.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T — максимальное дерево, имеющее две центральные вершины a_1 и a_2 . Применим к нему преобразование, описанное в разделе 3.1, и получим дерево T^* с тем же количеством вершин. Ясно, что радиус T^* равен 2. По Лемме 3.1 имеем, что $m(T) < m(T^*)$. Следовательно, T не является максимальным. Таким образом, утверждение данной Леммы справедливо.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Л е м м а 3.3 *В любом максимальном дереве центральная вершина смежна не более чем с одним листом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть T — максимальное дерево, центральная вершина которого a_2 смежна более чем с одним листом. Предположим, что a_2 смежна с $q \geq 2$ листьями, причем $q-1$ из них вместе с a_2 образуют $V(A_2)$, а оставшийся будет вершиной v . Отсоединим листья, смежные с a_2 и принадлежащие A_2 , а затем присоединим их к листу v . Получим дерево T^* радиуса 2. Тогда из Леммы 3.1 следует, что $m(T) < m(T^*)$. **Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.**

Рассмотрим дерево T (см. Рис. 3.2), которое определяется следующим образом. Дерево T состоит из поддерева A радиуса ≤ 2 , корнем которого является вершина s , причем s смежна с вершиной c' и c' смежна с $q \geq 3$ листьями-дубликатами.

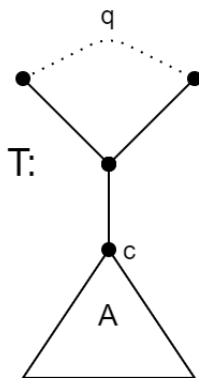


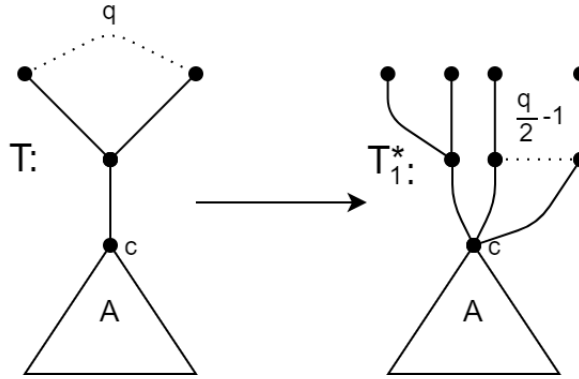
Рис. 3.2. Дерево T

Несложно проверить, что

$$m(T) = (q+1) \cdot m_+(A, c) + (q+2) \cdot m_-(A, c).$$

Случай четного q

Дерево T содержит набор из q листьев-дубликатов. Удалим $q-2$ листа-дубликата из этого набора. И прикрепим $\frac{q}{2} - 1$ путей P_3 к вершине s . Полученное дерево обозначим через T_1^* (см. Рис. 3.3). Очевидно, что радиус T_1^* равен 2 и дерево T_1^* имеет столько же вершин, что и T .

Рис. 3.3. Преобразование дерева T в случае чётного q

Л е м м а 3.4 Для каждого четного $q \geq 4$ верно, что $m(T_1^*) > m(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Количество паросочетаний дерева T_1^* , не покрывающих вершину c , равно $3 \cdot 2^{\frac{q}{2}-1} \cdot m_-(A, c)$. Количество его паросочетаний, покрывающих данную вершину, равно

$$3 \cdot 2^{\frac{q}{2}-1} \cdot m_+(A, c) + (3 \cdot (\frac{q}{2} - 1) \cdot 2^{\frac{q}{2}-2} + 2^{\frac{q}{2}-1}) \cdot m_-(A, c).$$

Таким образом, получим соотношение:

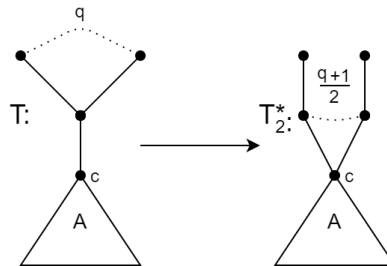
$$m(T_1^*) = 3 \cdot 2^{\frac{q}{2}-1} \cdot m_+(A, c) + (3 \cdot (\frac{q}{2} - 1) \cdot 2^{\frac{q}{2}-2} + 4 \cdot 2^{\frac{q}{2}-1}) \cdot m_-(A, c).$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты при $m_-(A, c)$ и $m_+(A, c)$ в соотношении для $m(T_1^*)$ больше, чем в соотношении для $m(T)$ уже при $q \geq 4$. При этом $m_-(A, c) > 0$. Значит, $m(T_1^*) > m(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Случай нечетного q

Из дерева T удалим $q - 1$ лист из набора q листьев-дубликатов. Затем прикрепим $\frac{q-1}{2}$ путей P_3 к вершине c . Полученное дерево обозначим через T_2^* (см. Рис. 3.4). Очевидно, что радиус T_2^* равен 2 и дерево T_2^* имеет столько же вершин, что и T .

Рис. 3.4. Преобразование дерева T в случае нечётного q

Л е м м а 3.5 Для любого нечетного $q \geq 3$ верно, что $m(T_2^*) > m(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Количество паросочетаний дерева T_2^* , не покрывающих вершины c , равно $2^{\frac{q+1}{2}} \cdot m_-(A, c)$. Количество его паросочетаний, покрывающих эту вершину, равно

$$2^{\frac{q+1}{2}} \cdot m_+(A, c) + \frac{q+1}{2} \cdot 2^{\frac{q-1}{2}} \cdot m_-(A, c).$$

Получим соотношение

$$m(T_2^*) = 2^{\frac{q+1}{2}} \cdot m_+(A, c) + \left(\frac{q+1}{2} \cdot 2^{\frac{q-1}{2}} + 2^{\frac{q+1}{2}}\right) \cdot m_-(A, c).$$

Нетрудно проверить, что коэффициенты при $m_-(A, c)$ и $m_+(A, c)$ в соотношении для $m(T_2^*)$ больше, чем в соотношении для $m(T)$ уже при $q \geq 3$. При этом $m_-(A, c) > 0$. Значит, $m(T_2^*) > m(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Из Лемм 3.2–3.5 заключаем, что каждое максимальное дерево имеет вид I или II, представленные на Рис. 3.5. Далее будем обозначать это дерево через T^* .

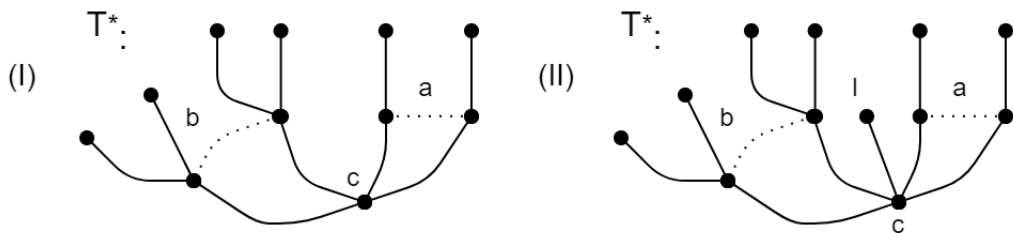


Рис. 3.5. Максимальное дерево радиуса 2

3.3. Об отсутствии листа, смежного с центральной вершиной

Предположим, что T^* содержит лист l (см. Рис. 3.5(II)).

Случай $a \neq 0$

Удалим l и добавим его в качестве листового соседа к вершине степени 2 одного из a путей P_3 в n -вершинном дереве T^* . Полученное дерево обозначим через T_1^{**} . Очевидно, что радиусы деревьев T^* и T_1^{**} равны 2 и имеют одинаковое количество вершин.

Л е м м а 3.6 Если $n \geq 12$, то $m(T_1^{**}) > m(T^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Несложно посчитать, что количество паросочетаний в дереве T^* , не покрывающих вершины c , равно $2^a \cdot 3^b$ штук. В случае, когда вершину c покрывает ребро lc , их также $2^a \cdot 3^b$. В случае же, когда вершину c покрывают остальные смежные с ней ребра, то количество паросочетаний равно $a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1}$. Таким образом, справедливо равенство:

$$m(T^*) = 2^{a+1} \cdot 3^b + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1} = 2^{a-1} \cdot 3^{b-1} \cdot (12 + 3a + 2b).$$

Аналогичным способом получим соотношение:

$$m(T_1^{**}) = 2^{a-1} \cdot 3^{b+1} + (a-1) \cdot 2^{a-2} \cdot 3^{b+1} + (b+1) \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b = 2^{a-2} \cdot 3^b \cdot (6 + 3(a-1) + 2(b+1)),$$

$$m(T_1^{**}) - m(T^*) = 2^{a-2} \cdot 3^{b-1} \cdot (3a + 2b - 9).$$

Очевидно, что $3a + 2b = n - 2$, поэтому $3a + 2b - 9 = n - 11$. Из этого следует, что $m(T_1^{**}) - m(T^*) > 0$ при $n \geq 12$.

Доказательство завершено.

Случай $a = 0$

В T^* удалим лист, отличный от l , и прикрепим его к l в качестве листового соседа. Полученное дерево обозначим через T_2^{**} .

Л е м м а 3.7 Для любого n справедливо неравенство $m(T_2^{**}) > m(T^*)$.

Доказательство. Справедливы следующие соотношения:

$$m(T^*) = 2 \cdot 3^b + b \cdot 3^{b-1}, m(T_2^{**}) = 2^3 \cdot 3^{b-1} + 4 \cdot (b-1) \cdot 3^{b-2}.$$

Очевидно, что $m(T_2^{**}) - m(T^*) = (b+2) \cdot 3^{b-2} > 0$. Значит, $m(T_2^{**}) > m(T^*)$.

Доказательство завершено.

Из Лемм 3.6–3.7 имеется очевидное следствие:

С л е д с т в и е 3.1 В любом максимальном дереве с 12 и более вершинами не содержится листьев, смежных с центральной вершиной.

3.4. Настройка параметров a и b

Итак, каждое максимальное дерево имеет вид, представленный на Рис. 3.5(I). Данное n -вершинное дерево будем обозначать через $T_{a,b}^*$. Считаем, что $n \geq 12$. Несложно проверить, что верны следующие равенства:

$$m(T_{a,b}^*) = 2^a \cdot 3^b + a \cdot 2^{a-1} \cdot 3^b + b \cdot 2^a \cdot 3^{b-1} = 2^{a-1} \cdot 3^{b-1} \cdot (6 + 3a + 2b), 2a + 3b = n - 1.$$

Пусть $f(a, b) = m(T_{a,b}^*)$. Тогда поиск максимальных деревьев сводится к нахождению глобального максимума функции f при соответствующих ограничениях. Имеем, что $b = \frac{n-1-2a}{3}$, и подставим это выражение в f (предполагая, что $a \in \mathbb{R}$):

$$f(a) = 2^{a-1} \cdot 3^{\frac{n-4-2a}{3}} \cdot \frac{2n+5a+16}{3},$$

$$f'_a = 2^{a-1} \cdot 3^{\frac{n-4-2a}{3}} \cdot \left((\ln 2 - \frac{2}{3} \ln 3) \cdot \frac{2n+5a+16}{3} + \frac{5}{3} \right),$$

$$f'_a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2 \ln 3 - 3 \ln 2} - \frac{16}{5} - \frac{2}{5}n.$$

Пусть $a^*(n) = \frac{3}{\ln \frac{9}{8}} - \frac{16}{5} - \frac{2}{5}n$. Функция f возрастает на $(-\infty, a^*(n))$ и убывает на $(a^*(n), +\infty)$. Нетрудно видеть, что $a^*(n) < 0$ уже при $n \geq 56$.

4. Полное описание максимальных деревьев

Из рассуждений раздела 3.4 и целочисленности a и b следует, что справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1 При любом $n \geq 56$, где $n = 3k + r$ и $k \in \mathbb{N}, r \in \{0, 1, 2\}$, максимальное дерево единственно и имеет вид дерева $T_{a,b}$, представленного на Рис. 3.5, где $b = k + \frac{r-1-2a}{3}$ и $(r, a) \in \{(0, 1), (1, 0), (2, 2)\}$.

С целью выявления максимальных деревьев при $12 \leq n \leq 55$ был проведен вычислительный эксперимент по поиску оптимальных целочисленных a и b , показавший следующие результаты (см. Таблицу 4.1):

Таблица 4.1. Значения параметров a, b и n , соответствующие максимальным деревьям

n	a	b	n	a	b	n	a	b	n	a	b
12	4	1	23	11	0	34	9	5	45	4	12
13	6	0	24	10	1	35	8	6	46	3	13
14	5	1	25	12	0	36	7	7	47	2	14
15	7	0	26	11	1	37	6	8	48	4	13
16	6	1	27	10	2	38	8	7	49	3	14
17	8	0	28	12	1	39	7	8	50	2	15
18	7	1	29	11	2	40	6	9	51	1	16
19	9	0	30	10	3	41	5	10	52	0	17
20	8	1	31	9	4	42	4	11	53	2	16
21	10	0	32	8	5	43	6	10	54	1	17
22	9	1	33	10	4	44	5	11	55	0	18

Напомним, что в случае $n \leq 5$ единственным максимальным деревом будет P_n . По Леммам 3.2–3.5 случай $6 \leq n \leq 11$ отличается от случая $n \geq 12$ возможным наличием листа, смежного с центральной вершиной. С целью поиска всех максимальных деревьев при $6 \leq n \leq 11$ был проведен вычислительный эксперимент, результаты которого представлены в Таблице 4.2. Параметр l в таблице отвечает за наличие листа, смежного с центральной вершиной, т. е. если $l = 1$, то такой лист существует, а если $l = 0$, то такого листа в дереве нет.

Таблица 4.2. Описание оставшихся максимальных деревьев

n	a	b	l	n	a	b	l	n	a	b	l
6	2	0	1	8	3	0	1	11	5	0	0
7	3	0	0	9	4	0	0				
8	2	1	0	10	3	1	0				

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Moon J., Moser L. On cliques in graphs // Israel Journal of Mathematics. 1965. Vol. 3, No 1. pp. 23-28
2. Liu J. Maximal independent sets in bipartite graphs // Journal of Graph Theory. 1993. Vol. 17, No 1. pp. 495-507
3. Hujter M., Tuza Z. The number of maximal independent sets in triangle-free graphs // SIAM Journal of Discrete Mathematics. 1993. Vol. 6, No 2. pp. 284-288
4. Jou M.J., Chang G. The number of maximum independent sets in graphs // Taiwanese Journal of Mathematics. 2000. Vol. 4, No 4. pp. 685-695
5. Sagan B.E. A note on independent sets in trees // SIAM Journal of Discrete Mathematics. 1988. Vol. 1, No 1. pp. 105-108
6. Heuberger C., Wagner S. Maximizing the number of independent subsets over trees with bounded degree // Journal of Graph Theory. 2008. Vol. 58, No 1. pp. 49-68.
7. Талецкий Д. С., Малышев Д. С. О деревьях ограниченной степени с максимальным количеством наибольших независимых множеств // Дискретный анализ и исследование операций. 2018. Т. 25, № 2. С. 101–123.
8. Талецкий Д. С., Малышев Д. С. Деревья без листьев-дубликатов с наименьшим количеством максимальных независимых множеств // Дискретная математика. 2018. Т. 30, No 4. С. 115–133.
9. Gutman I. Acyclic systems with extremal Huckel π -electron energy // Theoretical Chemistry Accounts. 1977. Vol. 45, No 2. pp. 79-87
10. Ou J. On extremal unicyclic molecular graphs with maximal Hosoya index // Discrete Applied Mathematics. 2009. Vol. 157, No 2. pp. 391-397
11. Ou J. Maximal Hosoya index and extremal acyclic molecular graphs without perfect matching // Applied Mathematics Letters. 2006. Vol. 19, No 7. pp. 652-656
12. Deng H. The largest Hosoya index of $(n, n+1)$ -graphs // Computers & Mathematics with Applications. 2008. Vol. 56, No 10. pp. 2499-2506
13. Heuberger C., Wagner S. The number of maximum matchings in a tree // Discrete Mathematics. 2011. Vol. 311, No 21. pp. 2512-2542

Поступила 15.03.2020

MSC2020 05C35

On radius 2 trees with the maximum number of matchings

© N. A. Kuzmin¹

Abstract. A matching in a graph is any set of its pairwise non-adjacent edges. In this paper, we consider and solve the maximization problem of the matchings number in radius ≤ 2 trees of a given number of vertices. For any $n \geq 56$, where $n = 3k + r$ and $k \in \mathbb{N}$, $r \in \{0, 1, 2\}$, an extremal tree is unique and it is a join of a vertex with the central vertices in b copies of P_3 and with leaf vertices in a copies of P_2 , where $b = k + \frac{r-1-2a}{3}$ and $(r, a) \in \{(0, 1), (1, 0), (2, 2)\}$. For any $6 \leq n \leq 55$, a corresponding extremal tree is also unique (except $n = 8$, where there are two such trees) and it has a similar structure. For any $1 \leq n \leq 5$, a unique extremal tree is the path on n vertices. To prove these facts, we propose some graph transformations, increasing the matchings number and keeping the vertices number. The author hopes that these transformations will be useful for solving similar problems in other classes of graphs.

Key Words: extremal graph theory, matching, tree, maximum tree, molecular graphs, ordinary graphs

REFERENCES

1. J. Moon, L. Moser, "On cliques in graphs", *Israel Journal of Mathematics*, **3:1** (1965), 23–28.
2. J. Liu, "Maximal independent sets in bipartite graphs", *Journal of Graph Theory*, **17:1** (1993), 495–507.
3. M. Hujter, Z. Tuza, "The number of maximal independent sets in triangle-free graphs", *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, **6:2** (1993), 284–288.
4. M. J. Jou, G. Chang, "The number of maximum independent sets in graphs", *Taiwanese Journal of Mathematics*, **4:4** (2000), 685–695.
5. B. E. Sagan, "A note on independent sets in trees", *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, **1** (1988), 105–108.
6. C. Heuberger, S. Wagner, "Maximizing the number of independent subsets over trees with bounded degree", *Journal of Graph Theory*, **58:1** (2008), 49–68.
7. D. S. Taletskii, D. S. Malyshev, "[On trees of bounded degree with maximal number of greatest independent sets]", *Diskretnyy analiz i issledovaniye operatsiy*, **25:2** (2018), 101–123.
8. D. S. Taletskii, D. S. Malyshev, "[Trees without duplicated leaves with a minimum number of greatest independent sets]", *Diskretnaya matematika*, **30:4** (2018), 115–133.
9. I. Gutman, "Acyclic systems with extremal Huckel π -electron energy", *Theoretical Chemistry Accounts*, **45:2** (1977), 79–87.

¹**Nikita A. Kuzmin**, student, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8478-3502>, nikita.kuz2000@gmail.com

10. J. Ou, “On extremal unicyclic molecular graphs with maximal Hosoya index”, *Discrete Applied Mathematics*, **157**:2 (2009), 391–397.
11. J. Ou, “Maximal Hosoya index and extremal acyclic molecular graphs without perfect matching”, *Applied Mathematics Letters*, **19**:7 (2006), 652–656.
12. H. Deng, “The largest Hosoya index of $(n, n+1)$ -graphs”, *Computers and Mathematics with Applications*, **56**:10 (2008), 2499–2506.
13. C. Heuberger, S. Wagner, “The number of maximum matchings in a tree”, *Discrete Mathematics*, **311**:21 (2011), 2512–2542.

Submitted 15.03.2020

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202002.188-199

УДК 517.958:531.12; 534.11

Об одном методе замены переменных для волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами

© В. Н. Анисимов¹, В. Л. Литвинов²

Аннотация. Рассмотрен аналитический метод решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами. С помощью замены переменных, останавливающих границы и оставляющих уравнение инвариантным, исходная краевая задача сведена к системе функционально разностных уравнений, которая может быть решена с помощью прямого и обратного методов. Описан обратный метод, позволяющий аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи. Получены новые частные решения для достаточно широкого круга законов движения границ. Рассмотрен прямой асимптотический метод приближенного решения функционального уравнения. Произведена оценка погрешностей приближенного метода в зависимости от скорости движения границы.

Ключевые слова: волновое уравнение, краевая задача, колебание системы с движущимися границами, замена переменных, закон движения границ, функциональное уравнение

1. Введение

Одномерные системы, границы которых движутся, широко распространены в технике: канаты грузоподъемных установок [1; 4; 8; 11–15; 21], гибкие звенья передач [1; 2; 5; 16; 19; 20], стержни твердого топлива [22], бурильные колонны [8] и т. д. Наличие движущихся границ вызывает значительные затруднения при описании таких систем, поэтому в данной статье в основном используются приближенные методы решения [1–4; 8; 10; 16; 17; 20 – 22; 25]. Из аналитических методов наиболее эффективным является метод, предложенный в [5], который заключается в подборе новых переменных, останавливающих границы и оставляющих волновое уравнение инвариантным. В другом исследовании [6] решение найдено в виде суперпозиции двух волн, бегущих навстречу друг другу. Эффективен также метод, используемый в работе [7], заключающийся в замене геометрической переменной на чисто мнимую переменную, что позволяет свести

¹Анисимов Валерий Николаевич, доцент кафедры общетеоретических дисциплин, Сызранского филиала ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (446001, Россия, г. Сызрань, ул. Советская, д. 45), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1346-167X>, anisimov170159@mail.ru

²Литвинов Владислав Львович, заведующий кафедрой общетеоретических дисциплин Сызранского филиала ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (446001, Россия, г. Сызрань, ул. Советская, д. 45), докторант механико-математического факультета ФГБОУ ВО «МГУ им. М. В. Ломоносова» (119991, Россия, г. Москва, Ленинские горы, д. 1), кандидат технических наук, доцент, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>, vladlitvinov@rambler.ru

волновое уравнение к уравнению Лапласа и применить для решения методику теории функций комплексного переменного.

В данной статье рассмотрен аналитический метод решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами. С помощью замены переменных, останавливающих границы и оставляющих уравнение инвариантным, исходная краевая задача сведена к системе функционально разностных уравнений, которая может быть решена с помощью прямого и обратного методов. Описан обратный метод, позволяющий аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи. Получены новые частные решения для достаточно широкого круга законов движения границ. Рассмотрен прямой асимптотический метод приближенного решения функционального уравнения. Произведена оценка погрешностей приближенного метода в зависимости от скорости движения границы. В данном подходе удачно сочетается методика, используемая в [5; 6; 9; 18; 23; 24].

2. Постановка задачи

Рассмотрим свободные колебания в системе с движущимися границами:

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0. \quad (2.1)$$

Граничные условия на закрепленных концах имеют вид

$$\begin{aligned} u(l_1(t), t) = 0; \quad u(l_2(t), t) = 0, \\ (l_1(0) \leq x \leq l_2(0)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $u(x, t)$ – смещение точки объекта с координатой x в момент времени t ; a – скорость распространения волн в системе; $l_1(x)$, $l_2(x)$ – законы движения границ.

В работах [5–6] А. И. Веснишкин был предложен достаточно общий метод подбора новых переменных для волнового уравнения. Следуя этому методу, замена переменных производится в следующем виде:

$$\begin{aligned} \xi &= \varphi(t + x/a) - \psi(t - x/a); \\ \tau &= a^{-1} [\varphi(t + x/a) + \psi(t - x/a)], \end{aligned} \quad (2.3)$$

где φ и ψ – некоторые функции. В результате такой замены исходное уравнение остается инвариантным (волновым), а φ и ψ определяются из условия постоянства ξ на границах.

В новых переменных ξ , τ , определяемых соотношением (2.3), исходная задача (2.1), (2.2) сводится к следующей:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) = 0 \quad (2.4)$$

при граничных условиях

$$\begin{aligned} U(l_1(\tau), \tau) = 0; \quad U(l_2(\tau), \tau) = 0; \\ (l_1(\tau) \leq \xi \leq l_2(\tau)), \end{aligned} \quad (2.5)$$

где τ , ξ – безразмерное время ($\tau \geq 0$) и безразмерная пространственная координата; $U(\xi, \tau) = u(x, t)$; $l_i(\tau)$ – законы движения границ.

Граничные условия (2.5) в переменных ξ , τ задаются на новых, вообще говоря, движущихся границах, положение которых зависит от двух функций φ и ψ . Поскольку

φ и ψ произвольны, можно потребовать, чтобы граничные условия записывались на неподвижных границах, т. е. $\ell_1 = \text{const}$ и $\ell_2 = \text{const}$ ($\ell_2 > \ell_1$).

Для этого необходимо, чтобы φ и ψ удовлетворяли системе функциональных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi(\tau + \ell_1(\tau)) - \psi(\tau - \ell_1(\tau)) = \ell_1; \\ \varphi(\tau + \ell_2(\tau)) - \psi(\tau - \ell_2(\tau)) = \ell_2, \end{cases} \quad (2.6)$$

которые однозначно определяют функции φ и ψ через известные законы движения границ. При движении границ со скоростью, большей скорости распространения волн, решение волнового уравнения становится некорректным, поэтому на скорость движения границ накладывается ограничение $|\ell'_i(\tau)| < 1$. Постоянные ℓ_i могут быть произвольными, но не равными величинами (например, $\ell_1 = 0$, $\ell_2 = 1$). Тогда система (2.6) примет вид:

$$\begin{cases} \varphi(\tau + \ell_1(\tau)) = \psi(\tau - \ell_1(\tau)); \\ \varphi(\tau + \ell_2(\tau)) = \psi(\tau - \ell_2(\tau)) + 1. \end{cases} \quad (2.7)$$

Существование решения данной системы было доказано в работе [5].

Решение (2.4)–(2.5) находится методом Фурье [24]:

$$\begin{aligned} U(\xi, \tau) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sin(\omega_{0n}\xi) (D_n \cos(\omega_{0n}\tau) + E_n \sin(\omega_{0n}\tau)) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} r_n \{ \sin(\omega_{0n}(\tau + \xi) + \alpha_n) - \sin(\omega_{0n}(\tau - \xi) + \alpha_n) \}, \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\omega_{0n}(\varepsilon_0\tau) = \frac{\pi n}{\ell_2 - \ell_1}$; $r_n = \frac{1}{2}\sqrt{D_n^2 + E_n^2}$; $\alpha_n = \arctg(E_n/D_n)$.

Решение, полученное в работах [1–6, 8–10] имеет вид, аналогичный (2.8).

Возвращаясь к переменным x и t , получим

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \{ \sin(\omega_{0n}\varphi(t + x) + \alpha_n) - \sin(\omega_{0n}\psi(t - x) + \alpha_n) \}. \quad (2.9)$$

Здесь φ и ψ находятся из решений системы функциональных уравнений (2.7) по известным законам движения границ, а постоянные D_n , E_n определяются из начальных условий.

При решении системы (2.7) возможны два подхода:

- обратная задача [5; 6; 8; 9; 18; 22; 23], т. е. по заданным «фазам» собственных колебаний φ и ψ нахождение законов движения границ $\ell_i(\tau)$;
- прямая задача [17; 22], т. е. нахождение «фаз» собственных колебаний по заданным законам движения границ $\ell_i(\tau)$.

3. Решение обратной задачи

Для решения системы (2.7) А. И. Весницким [5] был использован обратный метод, при котором по заданным $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из получающейся системы уравнений находятся законы движения границ $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$. При решении обратной задачи уравнения системы (2.7) сводятся к исследованию алгебраических или трансцендентных уравнений относительно $\ell_i(\tau)$, которые во многих случаях допускают точные решения. На основе

обратной задачи А. И. Весницким и А. И. Потаповым [5–6] были получены решения для достаточно широкого круга законов движения границ.

Система (2.7) имеет бесконечно много решений, т. к. на интервале $[0, 1]$ функция $\varphi(z)$ и на интервале $[-1, 0]$ функция $\psi(z)$ могут задаваться произвольно, и с помощью метода последовательных приближений [24] находятся значения функций в других областях. В рассматриваемом же случае достаточно найти одно частное решение, определяющее взаимно-однозначное соответствие точек z и точек $y_1 = \varphi(z)$; $y_1 = \varphi(z)$. Из всех решений нас интересуют только монотонные, а монотонные решения в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн ($|\ell'_1(\tau)| < 1$; $|\ell'_2(\tau)| < 1$) могут быть только монотонно возрастающими.

Л е м м а 3.1 *Если функция $\varphi(z)$ – монотонно возрастающая (убывающая), то функция $\psi(z)$ – также монотонно возрастающая (убывающая).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из первого уравнения системы (2.7) при $\tau = \tau_0$

$$\varphi(\tau_0 + \ell_1(\tau_0)) = \psi(\tau_0 - \ell_1(\tau_0)).$$

Теперь предположим, что $\tau_1 > \tau_0$ и функция $\varphi(z)$ возрастает (убывает), тогда в случае движения границ со скоростью меньшей скорости распространения волн ($|\ell'_1(\tau)| < 1$; $|\ell'_2(\tau)| < 1$) получим:

$$\begin{aligned}\tau_1 + \ell_1(\tau_1) &> \tau_0 + \ell_1(\tau_0); \\ \tau_1 - \ell_1(\tau_1) &> \tau_0 - \ell_1(\tau_0).\end{aligned}$$

Поскольку функция $\varphi(z)$ в данном случае возрастает (убывает), то для выполнения первого равенства системы (2.7) при $\tau = \tau_1$ необходимо, чтобы возрастала (убывала) функция $\psi(z)$, т. е. функция $\psi(z)$ – также возрастающая (убывающая).

Покажем также, что монотонное решение системы (2.7) в случае движения границ со скоростью, меньшей скорости распространения волн, может быть только возрастающим.

Действительно, учитывая неравенство $\ell_1(\tau) < \ell_2(\tau)$ получим:

$$\tau + \ell_1(\tau) < \tau + \ell_2(\tau); \quad \tau - \ell_1(\tau) > \tau - \ell_2(\tau).$$

Предположим, что $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ убывают, тогда:

$$\varphi(\tau + \ell_2(\tau)) < \varphi(\tau + \ell_1(\tau)) = \psi(\tau - \ell_1(\tau)) < \psi(\tau - \ell_2(\tau)).$$

Однако данное неравенство противоречит второму уравнению системы (2.7). Следовательно, функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ могут быть только монотонно возрастающими. Лемма 3.1 доказана.

Заметим, что из системы (2.7) функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определяются с точностью до константы в том смысле, что если $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ – решение системы (2.7), то $\varphi(z) + C$ и $\psi(z) + C$ также являются решением (здесь C – произвольная постоянная). Поэтому для определенности можно выбрать такую функцию $\psi(z)$, что $\psi(-1) = -1$. При этом из второго уравнения системы (2.7) при $\tau = 0$ следует, что $\varphi(1) = 0$. Из первого уравнения системы (2.7) при $\tau = 0$ получим

$$\phi(0) = \psi(0).$$

При задании функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в них вводится несколько произвольных постоянных. Зависимость найденных законов движения $\ell_1(\tau)$ и $\ell_2(\tau)$ от величин этих констант

позволяет аппроксимировать достаточно разнообразные законы движения границ законами, полученными из решения обратной задачи.

Совокупность обратных решений достаточно широка. Приводимые ниже решения удовлетворяют соотношениям:

$$\ell_1(0) = 0; \quad \ell_2(0) = 1; \quad \psi(-1) = -1.$$

Множество полученных законов движения границ было подразделено на классы.

1. Решения, приведенные в табл. 3.1, относятся к классу А, когда левая граница неподвижна и $\phi(z) = \psi(z)$. Решения под номерами 1, 2, 3, 6, получены А. И. Весницким и А. И. Потаповым [5, 6], решения 4, 5, 7 получены впервые.

Таблица 3.1. Решения, относящиеся к классу А

№	$\ell_2(\tau)$	$\varphi(z) = \psi(z)$
1	$v\tau + 1$	$\frac{\text{Ln}[(vz + 1)/(1 - v)]}{\text{Ln}[(1 + v)/(1 - v)]} - 1$
2	$\sqrt{B\tau + B^2}/ B $	$\sqrt{Bz + B + 0,25} - \sqrt{B^2 - B + 0,25} - 1$
3	$1/(4B\tau + 1)$	$Bz^2 + 0,5z - B - 0,5$
4	$\frac{1}{\alpha} \text{arcsch} \left[\frac{0,5}{B_1 e^{\alpha\tau} - B_2 e^{-\alpha\tau}} \right]$	$B_1(e^{\alpha z} - e^{-\alpha}) + B_2(e^{-\alpha z} - e^{\alpha}) - 1,$ $B_1 = B_2 + 1/(e^{\alpha} - e^{-\alpha}), \alpha > 0$
5	$\sqrt{(\tau + B)^2(\alpha^2 - 1) + 1 + 2\alpha B + B^2} -$ $-\alpha(\tau + B)$	$\frac{\text{Ln}[(z + B)^2 + 1 + 2\alpha B + B^2]}{\text{Ln}[(1 + \alpha)/(1 - \alpha)]} -$ $\frac{\text{Ln}[(B - 1)^2 + 1 + 2\alpha B + B^2]}{\text{Ln}[(1 + \alpha)/(1 - \alpha)]} - 1$
6	$\frac{1}{\alpha} \left[-d + \sqrt{1 + d^2 + (\alpha\tau + B)^2} \right],$ $d = \frac{1 + B^2 - \alpha^2}{2\alpha}$	$\frac{\text{arctg}(\alpha z + B)}{\text{arctg}[(1 + B^2 - \alpha^2)/(2\alpha)]} -$ $\frac{\text{arctg}(B - \alpha)}{\text{arctg}[(1 + B^2 - \alpha^2)/(2\alpha)]} - 1$
7	$\frac{1}{\alpha} \left(\ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4A^2 e^{2\alpha\tau}}}{2A} \right) - \tau$	$Ae^{\alpha z} + B, \alpha = \ln \frac{1 + \sqrt{1 + 4A^2}}{2A}$

2. Следующий класс В определяется тем, что границы движутся по одинаковому закону:

$$\ell_1(\tau) = \ell(\tau); \quad \ell_2(\tau) = 1 + \ell(\tau); \quad \ell(0) = 0.$$

Поскольку движение границ взаимосвязано, то между функциями $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ также существует взаимосвязь. Она выражается функциональным уравнением:

$$\varphi(\bar{\varphi}(\psi(z)) + 1) - \psi(z - 1) = 1. \quad (3.1)$$

Система (2.7) в данном случае может удовлетворяться только функциями, которые являются решениями уравнения (3.1). Приведем два ранее не известных решения класса В:

$$1) \ell = v\tau; \quad \varphi(z) = (1 - v)z/2 + (1 + v)/2 - 1; \quad \psi(z) = (1 + v)z/2 + (1 + v)/2 - 1;$$

$$2) \ell(\tau) = \frac{1}{\alpha} \ln [(Be^{-\alpha\tau} - Ce^{\alpha\tau})/(B - C)]; \quad \varphi(z) = B(e^{-\alpha z} - 1) - C(e^{-\alpha} - 1) - 1;$$

$$B = C + 1/(e^{-\alpha} - 1); \quad \psi(z) = C(e^{\alpha z} - 1) - C(e^{-\alpha} - 1) - 1.$$

3. Для решений класса С границы движутся симметрично в разные стороны, т. е.

$$\ell_1(\tau) = -\ell(\tau); \quad \ell_2(\tau) = \ell(\tau).$$

Уравнение взаимосвязи функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ здесь имеет вид:

$$\varphi(z) = \psi(z) + 0,5.$$

Решения класса С получаются из решений класса А по следующим формулам:

$$\ell(\tau) = \ell_A(\tau); \quad \psi(z) = \frac{1}{2}\psi_A(z); \quad \varphi(z) = \psi(z) + 0,5,$$

где индексом А обозначены соответствующие функции решений класса А.

4. Решение класса D получено для случая, когда обе границы движутся равномерно:

$$\begin{aligned} \ell_1(\tau) &= (B_2 - B_1)\tau / (B_2 + B_1); \quad \ell_2(\tau) = (B_2 e^{1/c} - B_1)\tau / (B_1 + B_2 e^{1/c}) + 1; \\ \varphi(z) &= C \ln(B_1 z + D) - C \ln(D - B_2) - 1; \\ \psi(z) &= C \ln(B_1 z + D) - C \ln(D - B_2) - 1; \\ D &= (B_1 + B_2 e^{1/c}) / (e^{1/c} - 1). \end{aligned}$$

Решение под номером 1 в табл. 3.1 может быть использовано при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок при равномерном подъеме (спуске) [1, 4, 11 – 15, 21]. Приведенные решения класса В могут быть использованы при изучении колебаний гибких звеньев передач [16, 19, 20]. Остальные решения являются модельными.

Класс обратных решений ограничен: например, не получено решение для равноускоренного движения границы $l(\tau) = 1 + v\tau^2$. Получение указанного решения актуально при описании продольных и поперечных колебаний канатов грузоподъемных установок на стадии разгона [1].

4. Решение прямой задачи

Решение прямой задачи, как правило, сопряжено с большими трудностями, т. к. известные методы решения функциональных уравнений хотя и позволяют иногда находить φ и ψ по известным $\ell_i(\tau)$, но в ограниченном интервале значений аргумента и в виде, мало пригодном для аналитического исследования.

В связи с этим рассмотрим приближенное решение функционального уравнения

$$\varphi(\tau + l(\tau)) - \varphi(\tau - l(\tau)) = 1. \quad (4.1)$$

Для приближенного решения уравнения (4.1) предлагается использовать асимптотический метод [17].

При неподвижных границах $\ell(\tau) = \ell$ решением (4.1) является линейная функция

$$\varphi_s(z) = \frac{1}{2\ell}z + \text{const.}$$

В случае медленного движения границы $\ell(\tau)$ «фаза» волны $\varphi(z)$ за время ее пробега через систему изменяется незначительно относительно $\varphi_s(z)$. Предполагается, что $\varphi(z)$ имеет производные любого порядка, и записывая $\varphi(\tau + \ell(\tau))$ в виде степенных рядов по $\ell(\tau)$, после их подстановки в (2.1) получим дифференциальное уравнение для медленно изменяющейся «фазы» $\varphi(\tau)$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\ell^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{d^{k+1}\varphi}{d\tau^{k+1}} = 1. \quad (4.2)$$

Поскольку $\varphi(\tau)$ мало отклоняется от линейного закона $\varphi_s(z = \tau)$ за время пробега волны, то каждый следующий член в левой части уравнения (4.2) много меньше предыдущего и его решение нужно искать в виде ряда

$$\varphi(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(\tau). \quad (4.3)$$

Подставив (4.3) в (4.2) и приравняв члены одинакового порядка малости по отдельности к нулю, получим для нулевого приближения

$$\varphi_0(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\tau} \frac{\partial t}{\ell(t)}.$$

В случае линейного закона движения границы $\ell(t) = 1 + vt$ фаза динамических собственных колебаний равна

$$\varphi(z) = \frac{\ln[(vz + 1)/(1 + v)]}{2v}. \quad (4.4)$$

Значения (4.4) сравнивались со значениями, полученными с помощью точного решения (табл. 3.1):

$$\varphi(z) = \frac{\text{Ln}[(vz + 1)/(1 - v)]}{\text{Ln}[(1 + v)/(1 - v)]} - 1. \quad (4.5)$$

Значения максимальных абсолютных погрешностей Δ асимптотического метода в зависимости от скорости движения границы v приведены в таблице 4.1.

Таблица 4.1. Погрешность асимптотического метода в зависимости от скорости движения границы

v	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Δ	0,002	0,006	0,013	0,023	0,036	0,053	0,073	0,100	0,139

В интервале $v \in [0, 1; 0, 6]$ погрешности приближенного метода малы. Увеличение погрешности при приближении v к единице объясняется тем, что функция (4.5) при $v \rightarrow 1$ становится бесконечно большой.

Незначительные погрешности позволяют применять описанный метод для решения функционального уравнения (4.1) в случаях, когда его точное решение неизвестно.

5. Заключение

С помощью аналитического метода замены переменных исходная краевая задача сведена к системе функционально разностных уравнений. Решение исходной задачи зависит от того, возможно ли решить рассматриваемую систему (2.7). А. И. Весницкий предложил решать её обратным методом, т. е. задавать функции φ и ψ и из получившейся системы уравнений находить законы движения границ. В работе приведены пять новых обратных решений системы.

Рассмотрен приближенный асимптотический метод решения функциональных уравнений системы (2.7). В условиях медленного движения границ незначительные погрешности позволяют применять указанный метод в случаях, когда точное решение системы функциональных уравнений неизвестно.

Приведенные решения могут быть использованы при изучении колебаний канатов грузоподъемных установок при равномерном подъеме (спуске), гибких звеньев передач (например, ременная передача) и т. д.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Савин Г. Н., Горошко О. А. Динамика нити переменной длины. Киев: Наукова думка, 1962. 332 с.
2. Самарин Ю. П. Об одной нелинейной задаче для волнового уравнения в одномерном пространстве // Прикладная математика и механика. 1964. Т. 26, Вып. 3. С. 77–80.
3. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Исследование резонансных свойств механических объектов с движущимися границами при помощи метода Канторовича-Галеркина // Вестник Самарского государственного технического университета. Сер. «Физико-математические науки». 2009. Т. 18, № 1. С. 149–158
4. Горошко О. А., Савин Г. Н. Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины. Киев: Наукова думка, 1971. 270 с.
5. Весницкий А. И. Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. М.: Физматлит, 2001. 320 с.
6. Весницкий А. И. Обратная задача для одномерного резонатора изменяющего во времени свои размеры // Изв. вузов. Радиофизика. 1971. № 10. С. 1538–1542.
7. Барсуков К. А., Григорян Г. А. К теории волновода с подвижными границами // Изв. вузов. Радиофизика. 1976. № 2. С. 280–285.
8. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. Математическое моделирование и исследование колебаний одномерных механических систем с движущимися границами. Самара: Самар. гос. техн. ун-т, 2017. 149 с.
9. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л., Корпен И. В. Об одном методе получения аналитического решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами // Вестник Самарского государственного технического университета (Сер. «Физико-математические науки»). 2012. Т. 28, № 3. С. 145–151.
10. Лежнева А. А. Изгибные колебания балки переменной длины // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1970. № 1. С. 159–161.
11. Колосов Л. В., Жигула Т. И. Продольно-поперечные колебания струны каната подъемной установки // Изв. Вузов. Горный журнал. 1981. № 3. С. 83–86.
12. Zhu W. D., Chen Y. Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control // Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust. 2006. Vol. 128, No. 1. pp. 66–78.
13. Shi Y., Wu L., Wang Y. Нелинейный анализ собственных частот тросовой системы // J. Vibr. Eng. 2006. № 2. С. 173–178.

14. Wang L., Zhao Y. Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations // J. Sound Vib. 2009. № 1–2. pp. 1–14.
15. Zhao Y., Wang L. On the symmetric modal interaction of the suspended cable: three-to one internal resonance // J. Sound Vib. 2006. № 4–5. С. 1073–1093.
16. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. Поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении // Известия Самарского научного центра Российской академии наук. 2017. Т. 19, № 4. С. 161–165.
17. Литвинов В. Л. Исследование свободных колебаний механических объектов с движущимися границами при помощи асимптотического метода // Журнал Средне-волжского математического общества. 2014. Т. 16, № 1. С. 83–88.
18. Литвинов В. Л. Решение краевых задач с движущимися границами при помощи метода замены переменных в функциональном уравнении // Журнал Средне-волжского математического общества. 2013. Т. 15, № 3. С. 112–119.
19. Ерофеев В. И., Колесов Д. А., Лисенкова Е. Е. Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой // Вестник научно-технического развития. 2013. № 6 (70). С. 18–29.
20. Литвинов В. Л. Поперечные колебания вязкоупругого каната, лежащего на упругом основании, с учетом влияния сил сопротивления среды // Вестник научно-технического развития. 2015. № 4 (92). С. 29–33.
21. Литвинов В. Л. Продольные колебания каната переменной длины с грузом на конце // Вестник научно-технического развития. 2016. № 1 (101). С. 19–24.
22. Литвинов В. Л. Точное и приближенное решения задачи о колебаниях стержня переменной длины // Вестник научно-технического развития. 2017. № 9 (121). С. 46–57.
23. Анисимов В. Н., Литвинов В. Л. Аналитический метод решения волнового уравнения с широким классом условий на движущихся границах // Вестник научно-технического развития. 2016. № 2 (102). С. 28–35.
24. Кошляков Н. С., Глинер Э. Б., Смирнов М. М. Уравнения в частных производных математической физики. М.: Высшая школа, 1970. 712 с.
25. Литвинов В. Л., Анисимов В. Н. Применение метода Канторовича-Галеркина для решения краевых задач с условиями на движущихся границах // Известия Российской академии наук. Механика твердого тела. 2018. № 2. С. 70–77.

Поступила 01.03.2020

MSC2020 2010 35R37; 35G30, 35Q70

About one method for replacing variables for a wavean equation describing vibrations of systems with moving boundaries

© V. N. Anisimov¹, V. L. Litvinov²

Abstract. An analytical method for solving the wave equation describing the oscillations of systems with moving boundaries is considered. By replacing variables that set boundaries and leave the equation invariant, the original boundary value problem is reduced to a system of functional – difference equations that can be solved using forward and reverse methods. The inverse method is described, which allows us to apply sufficiently diverse laws of boundary motion to the laws obtained from the solution of the inverse problem. New partial solutions for a fairly wide range of boundary motion laws are obtained. A direct asymptotic method for approximating the solution of a functional equation is considered. The errors of the approximate method are estimated depending on the speed of the border movement.

Key Words: wave equation, boundary value problems, oscillation of system with moving boundarie, substitution of variables, law of boundary motion, functional equation

REFERENCES

1. G. N. Savin, O. A. Goroshko, *Dynamics of a thread of variable length*, Naukova Dumka, Kiev, 1962 (In Russ.), 332 p.
2. Yu. P. Samarin, “On a nonlinear problem for a wave equation in a one-dimensional space”, *Applied Mathematics and Mechanics*, **26**, 3 (1964), 77–80 (In Russ.).
3. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “Investigation of resonant properties of mechanical objects with moving boundaries using the Kantorovich-Galerkin method”, *Bulletin of Samara State Technical University (Ser. “Physical and Mathematical Sciences”)*, **1(18)** (2009), 149–158 (In Russ.).
4. O. A. Goroshko, G. N. Savin, *Introduction to the mechanics of deformable one-dimensional bodies of variable length*, Naukova Dumka, Kiev, 1971 (In Russ.), 270 p.
5. A. I. Vesnitsky, *Waves in systems with moving boundaries and loads*, Fizmatlit, Moscow, 2001 (In Russ.), 320 p.
6. A. I. Vesnitsky, “Inverse problem for a one-dimensional resonator changing its dimensions in time”, *Izv. vuzov. Radiofizika*, **10** (1971), 1538–1542 (In Russ.).
7. K. A. Barsukov, G. A. Grigoryan, “On the theory of a waveguide with movable boundaries”, *Izv. vuzov. Radiofizika*, **2** (1976), 280–285 (In Russ.).

¹**Valery N. Anisimov**, Associate Professor., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran’ Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya st., Syzran’ 446001, Russian Federation), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1346-167X>, anisimov170159@mail.ru

²**Vladislav L. Litvinov**, Head of Dept., Dept. of General–Theoretical Disciplines, Syzran’ Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya st., Syzran’ 446001, Russian Federation); doctoral student, Moscow State University (GSP-1, Leninskie Gory, Moscow 119991, Russian Federation), Ph.D. (Technical), Associate Professor., ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>, vladlitvinov@rambler.ru

8. V. L. Litvinov, V. N. Anisimov, *Mathematical modeling and research of vibrations of one-dimensional mechanical systems with moving boundaries: monograph*, Samar. State Tech. University, Samara, 2017 (In Russ.), 149 p.
9. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, I. V. Korpen, "On a method for obtaining an analytical solution of a wave equation describing vibrations of systems with moving faces", *Bulletin of the Samara State Technical University (Ser. "Physical and Mathematical Sciences")*, 2012, no. 3(28), 145–151 (In Russ.).
10. A. A. Lezhneva, "Flexural vibrations of beams of variable length", *Izv. Akad. Nauk SSSR. Mekh. tverd. tela*, 1970, no. 1, 159–161 (In Russ.).
11. L. B. Kolosov, T. I. Zhigula, "Longitudinal and transverse vibrations of the rope string of the lifting installation", *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Gorn. Zh.*, 1981, no. 3, 83–86 (In Russ.).
12. W. D. Zhu, Y. Chen, "Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control", *J. Vibr. Acoust.*, 2006, no. 1, 66–78.
13. Y. Shi, L. Wu, Y. Wang, "Nonlinear analysis of natural frequencies of a cable system", *J. Vibr. Eng.*, 2006, no. 2, 173–178.
14. L. Wang, Y. Zhao, "Multiple internal resonances and non-planar dynamics of shallow suspended cables to the harmonic excitations", *J. Sound Vib.*, 2009, no. 1-2, 1–14.
15. Y. Zhao, L. Wang, "On the symmetrical modal interaction of the suspended cable: three-to-one internal resonance", *J. Sound Vib.*, 2006, no. 4-5, 1073–1093.
16. V. L. Litvinov, V. N. Anisimov, "Transverse vibrations of a rope moving in the longitudinal direction", *Proceedings of the Samara scientific center of the Russian Academy of Sciences*, **19:4** (2017), 161–165 (In Russ.).
17. V. L. Litvinov, "Investigation of free vibrations of mechanical objects with moving boundaries using the asymptotic method", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **16:1** (2014), 83–88 (In Russ.).
18. V. L. Litvinov, "Solving boundary value problems with moving boundaries using the method of replacing variables in a functional equation", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **15:3** (2013), 112–119 (In Russ.).
19. V. I. Erofeev, D. A. Kolesov, E. E. Lisenkova, "Investigation of wave processes in a one-dimensional system lying on an elastic-inertial base with a moving load", *Bulletin of Scientific and Technical Development*, 2013, no. 6(70), 18–29 (In Russ.).
20. V. L. Litvinov, "Transverse vibrations of a viscoelastic rope lying on an elastic base, taking into account the influence of the resistance forces of the medium", *Bulletin of Scientific and Technical Development*, 2015, no. 4(92), 29–33 (In Russ.).
21. V. L. Litvinov, "Longitudinal vibrations of a rope of variable length with a load at the end", *Bulletin of Scientific and Technical Development*, 2016, no. 1(101), 19–24 (In Russ.).
22. V. L. Litvinov, "Exact and approximate solutions to the problem of vibrations of a rod of variable length", *Bulletin of Scientific and Technical Development*, 2017, no. 9(121), 46–57 (In Russ.).

23. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “Analytical method for solving a wave equation with a wide class of conditions on moving boundaries”, *Bulletin of Scientific and Technical Development*, 2016, no. 2(102), 28–35 (In Russ.).
24. N. S. Koshlyakov, E. B. Gliner, M. M. Smirnov, *Equations in partial derivatives of mathematical physics*, Vysshaya shkola, Moscow, 1970 (In Russ.).
25. V. L. Litvinov, V. N. Anisimov, “Application of the Kantorovich-Galerkin method for solving boundary value problems with conditions on moving boundaries”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Solid mechanics*, 2018, no. 2, 70–77 (In Russ.).

Submitted 01.03.2020

УДК 532.5:536.4:517.9

Асимптотическое исследование процессов тепломассопереноса в слабо закрученных струях

© П. А. Вельмисов¹, У. Д. Мизхер², В. Н. Ковальногов³

Аннотация. Струйные течения жидкостей и газов применяются в различных областях техники как средство управления процессами тепло- и массообмена; интенсификации и стабилизации процесса горения; защиты конструкций от воздействия тепловых полей, а также для нанесения покрытий и т. д. Струи жидкостей и газов в технике формируются источниками- насадками конечных размеров с разнообразными распределениями начальных скоростей истечения в выходном сечении насадка, поэтому расчет аэродинамических и тепловых характеристик струйных течений сводится к решению неавтономных задач. Однако одним из методов решения таких задач является метод асимптотического разложения скоростей и давления в ряды по малому параметру, когда первым членом этого ряда служит автомодельное решение задачи о струе- источнике. В данной статье предлагается асимптотическое разложение для осесимметричных слабозакрученных течений в модели вязкой несжимаемой среды, которое приводит к нелинейным уравнениям «пограничного слоя», отличающимся от известных классических уравнений для течений с конечной закруткой. Построены автомодельные решения этих уравнений, описывающие распределение скорости, давления и температуры в слабозакрученной струе. Представленные в статье результаты дополняют результаты работ расчетом теплового поля в струе.

Ключевые слова: аэрогидродинамика, закрученная струя, вязкость, асимптотическое разложение, автомодельное решение, тепломассоперенос

1. Вывод асимптотических уравнений

Система уравнений Навье-Стокса (уравнения движения, неразрывности и энергии), описывающая осесимметричное движение жидкости (газа) в модели вязкой несжимаемой среды, в цилиндрической системе координат имеет вид [1–2]

$$u_t + uu_x + vu_r = -\frac{1}{\rho}P_x + \nu(u_{xx} + u_{rr} + \frac{1}{r}u_r), \quad (1.1)$$

$$v_t + uv_x + vv_r - \frac{1}{r}w^2 = -\frac{1}{\rho}P_r + \nu(v_{xx} + v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \frac{1}{r^2}v), \quad (1.2)$$

$$w_t + uw_x + vw_r + \frac{1}{r}vw = \nu(w_{xx} + w_{rr} + \frac{1}{r}w_r - \frac{1}{r^2}w), \quad (1.3)$$

¹Вельмисов Петр Александрович, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, профессор, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

²Мизхер Усама Джавад, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8950-9772>, usama.mizher@gmail.com

³Ковальногов Владислав Николаевич, заведующий кафедрой теплоэнергетики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор технических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1907-3790>, kvn@ulstu.ru

$$u_x + v_r + \frac{v}{r} = 0, \quad (1.4)$$

$$\rho c_v(T_t + uT_x + vT_r) = \lambda(T_{xx} + T_{rr} + \frac{1}{r}T_r) + \mu\Phi, \quad (1.5)$$

где $u(x, r, t)$, $v(x, r, t)$, $w(x, r, t)$ – продольная (вдоль горизонтальной оси Ox), поперечная (радиальная, перпендикулярная оси Ox) и тангенциальная (вращательная) составляющие вектора скорости \bar{V} жидкости соответственно; $T(x, r, t)$ – температура; $P(x, r, t)$ – давление; $\rho, \mu, \nu = \mu\rho^{-1}$ – плотность, динамическая и кинематическая вязкости среды соответственно; c_v, λ – коэффициенты теплоемкости и теплопроводности среды; x, r – цилиндрические координаты; t – время, индексы снизу обозначают частные производные. Диссипативная функция Φ определяется выражением

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{(y)}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{(z)}}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial y} + \frac{\partial V_{(y)}}{\partial x} \right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial V_{(x)}}{\partial z} + \frac{\partial V_{(z)}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_{(y)}}{\partial z} + \frac{\partial V_{(z)}}{\partial y} \right)^2, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $V_{(x)}, V_{(y)}, V_{(z)}$ – проекции вектора \bar{V} на оси декартовой системы координат x, y, z , при этом имеет место следующая связь между проекциями вектора скорости в декартовой и цилиндрической системах координат:

$$V_{(x)} = u, \quad V_{(y)} = v \sin \theta + w \cos \theta, \quad V_{(z)} = v \cos \theta - w \sin \theta.$$

Здесь $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dr}{dt}$, $w = r \frac{d\theta}{dt}$, при этом r, θ – полярные координаты в плоскости, перпендикулярной оси Ox ($y = r \sin \theta$, $z = r \cos \theta$).

Используя метод малого параметра [3–5], получим асимптотические уравнения для течений с малой радиальной составляющей v вектора скорости. Предполагая составляющую v малой, положим

$$\begin{aligned} u = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, r_*, t) \varepsilon^{k-1}, \quad v = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x, r_*, t) \varepsilon^{k-1}, \quad w = \sum_{k=0}^{\infty} w_k(x, r_*, t) \varepsilon^k, \\ P - P_0 = \sum_{k=1}^{\infty} P_k(x, r_*, t) \varepsilon^{k-1}, \quad T - T_0 = \sum_{k=1}^{\infty} T_k(x, r_*, t) \varepsilon^{k-1}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь P_0 – давление в покоящейся среде, $r = \varepsilon r_*$, где ε – малый параметр, определяющий порядок величины кинематической вязкости ν ($\nu = \varepsilon^2 \nu_*$), при этом новая переменная r_* и постоянная ν_* имеют порядок единицы. Подставляя (1.7) в (1.1)–(1.6) и оставляя в каждом из уравнений старшие по порядку члены, получим систему уравнений пограничного слоя [1–2].

Предположим, что вращательная составляющая w скорости потока также мала и имеет, как и v , порядок ε , тогда в (1.7) следует положить $w_0 = 0$. В этом случае, задавая дополнительно $\lambda\rho^{-1} = \varepsilon^2 \lambda_*$, из (1.1)–(1.5) с учетом (1.6) получим при $\varepsilon \rightarrow 0$ асимптотическую систему уравнений

$$u_{1t} + u_1 u_{1x} + v_1 u_{1r_*} = -\frac{1}{\rho} P_{1x} + \nu_* (u_{1r_* r_*} + \frac{1}{r_*} u_{1r_*}), \quad (1.8)$$

$$v_{1t} + u_1 v_{1x} + v_1 v_{1r_*} - \frac{1}{r_*} w_1^2 = -\frac{1}{\rho} P_{3r_*} + \nu_* (v_{1r_* r_*} + \frac{1}{r_*} v_{1r_*} - \frac{1}{r_*^2} v_1), \quad (1.9)$$

$$w_{1t} + u_1 w_{1x} + v_1 w_{1r_*} + \frac{1}{r_*} v_1 w_1 = \nu_* (w_{1r_* r_*} + \frac{1}{r_*} w_{1r_*} - \frac{1}{r_*^2} w_1), \quad (1.10)$$

$$v_{1r_*} + \frac{1}{r_*} v_1 + u_{1x} = 0, \quad (1.11)$$

$$c_v (T_{1t} + u_1 T_{1x} + v_1 T_{1r_*}) = \lambda_* (T_{1r_* r_*} + \frac{1}{r_*} T_{1r_*}) + \nu_* u_{1r_*}^2. \quad (1.12)$$

При этом из уравнения (1.2) следует

$$P_{1r_*} = 0, \quad P_{2r_*} = 0,$$

значит, P_1 и P_2 зависят от x, t , при этом $P_1(x, t)$ в (1.8) – заданная функция, определяющая продольный градиент давления в первом приближении.

2. Построение решений, описывающих поля скоростей и давления в струе

Рассмотрим стационарные течения, тогда в уравнениях (1.8)–(1.12) следует опустить производные по времени t . Решение системы уравнений (1.8)–(1.11) в этом случае будем искать в виде

$$u_1 = \nu_* x^{1-2a} f(\eta), \quad v_1 = \nu_* x^{-a} g(\eta), \quad w_1 = \zeta \nu_* x^b h(\eta), \\ \frac{1}{\rho} P_3 = \zeta^2 \nu_*^2 x^{2b} Q(\eta) + \nu_*^2 x^{-2a} R(\eta), \quad \frac{1}{\rho} P_1 = c x^{2-4a}, \quad (2.1)$$

где $\eta = \frac{r_*}{x^a}$ – автомодельная переменная; постоянные a, b, c, ζ – произвольные. Предположим, что градиент давления в направлении оси Ox отсутствует ($c = 0$). Подставляя (2.1) в (1.8)–(1.11), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для $f(\eta), g(\eta), h(\eta), Q(\eta), R(\eta)$, которая для струйных течений ($a = 1, b = -2$) принимает вид

$$\begin{aligned} -f(f + \eta f') + g f' &= f'' + \frac{1}{\eta} f', \\ -f(2h + \eta h') + g h' + \frac{1}{\eta} g h &= h'' + \frac{1}{\eta} h' - \frac{1}{\eta^2} h, \\ f + \eta f' &= g' + \frac{1}{\eta} g, \\ Q' &= \frac{1}{\eta} h^2, \\ -R' &= -f(g + \eta g') + g g' - (g'' + \frac{1}{\eta} g' - \frac{1}{\eta^2} g). \end{aligned}$$

Решение этой системы, соответствующее струйному течению, имеет вид

$$f(\eta) = \frac{2\gamma^2}{\theta^2}, \quad g(\eta) = \frac{\gamma^2 \eta}{\theta^2} (1 - \frac{1}{4} \gamma^2 \eta^2), \quad h(\eta) = \frac{\gamma \eta}{\theta^2}, \quad (2.2)$$

$$Q(\eta) = -\frac{2}{3\theta^3}, \quad R(\eta) = \frac{2\gamma^2}{\theta^2} (1 - \frac{1}{4} \gamma^2 \eta^2), \quad (2.3)$$

где $\theta = 1 + \frac{1}{4}\gamma^2\eta^2$; постоянная γ – произвольная. Выражение (2.1) для давления содержит, в отличие от [6–7], два слагаемых. Первое из них, содержащее $Q(\eta)$, определяет часть давления, вызванного закруткой потока w_1 [6–7], а второе слагаемое, содержащее $R(\eta)$, есть часть давления, вызванного продольной u_1 и радиальной v_1 составляющими скорости. Это дополнительное слагаемое возникает в связи с тем, что при малой (порядка ε) закрутке в уравнении (1.2) остаются слагаемые с u_1, v_1 . Итак, распределения скорости и давления в струе определяются формулами (2.1)–(2.3).

3. Построение решений, описывающих тепловое поле в струе

Решение уравнения (1.12) для температуры $T_1(x, r_*)$ будем искать в виде

$$T_1(x, r_*) = T_1^0(x, r_*) + \nu_*^2 x^{2-4a} H(\eta), \quad (2.4)$$

где функция T_1^0 удовлетворяет уравнению (1.12), в котором нужно опустить слагаемое $\nu_* u_{1r_*}^2$, а функция $H(\eta)$ находится из обыкновенного дифференциального уравнения, которое для струйного течения ($a = 1$) принимает вид

$$-c_v [f(2H + \eta H') - gH'] = \frac{\lambda_*}{\nu_*} (H'' + \frac{1}{\eta} H') + f'^2(\eta). \quad (2.5)$$

Уравнение для $T_1^0(x, r_*)$ имеет вид

$$c_v x^{-1} [f(\eta) T_{1x}^0 + g(\eta) T_{1r_*}^0] = \frac{\lambda_*}{\nu_*} (T_{1r_* r_*}^0 + \frac{1}{r_*} T_{1r_*}^0). \quad (2.6)$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (2.4) при $\lambda_* = 0$ определяется выражением

$$H(\eta) = \frac{c_0 \theta^2}{\eta^4} + \frac{32}{15c_v \eta^4 \theta^4} (15\theta^2 - 24\theta + 10),$$

где c_0 – произвольная постоянная. При $\eta \rightarrow 0$

$$H(\eta) \sim \frac{1}{\eta^4} \left(C_0 + \frac{32}{15c_v} \right) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \pm \infty.$$

Из условия конечности значений температуры на оси Ox ($\eta \rightarrow 0, r \rightarrow 0$) найдем $c_0 = -\frac{32}{15c_v}$, тогда

$$H(\eta) = -\frac{32}{15c_v \theta^4 \eta^4} (\theta^6 - 15\theta^2 + 24\theta - 10). \quad (2.7)$$

Согласно (2.7), при $\eta \rightarrow 0$ имеем

$$H(\eta) = -\frac{2\gamma^6(\eta^2 + O(\eta^4))}{3c_v \theta^4}.$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.5) при $\lambda_* \neq 0$. Запишем его, с учетом (2.2), в виде

$$-\frac{\gamma^2 c_v}{\theta} (\eta H' + \frac{4}{\theta} H) - \frac{\lambda_*}{\nu_*} (H'' + \frac{1}{\eta} H') = \frac{4\gamma^8 \eta^2}{\theta^6}. \quad (2.8)$$

Введем новую независимую переменную [7]

$$y = \frac{\frac{1}{4}\gamma^2\eta^2}{1 + \frac{1}{4}\gamma^2\eta^2}. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.8) примет вид

$$-c_v(2yH' + 4H) - \frac{1}{2} \frac{\lambda_*}{\nu_*} [2y(1-y)H'' + (2-4y)H'] = 16\gamma^4 y(1-y)^3. \quad (2.10)$$

Частное решение уравнения (2.10) будем искать в виде

$$H(y) = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4. \quad (2.11)$$

Для постоянных a, b, c, d, e получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (5 \frac{\lambda_*}{\nu_*} - 3c_v)e &= -4\gamma^4, \\ (6 \frac{\lambda_*}{\nu_*} - 5c_v)d &= 8 \frac{\lambda_*}{\nu_*} e + 24\gamma^4, \\ (6 \frac{\lambda_*}{\nu_*} - 8c_v)c &= 9 \frac{\lambda_*}{\nu_*} d - 48\gamma^4, \\ (\frac{\lambda_*}{\nu_*} - 3c_v)b &= 2 \frac{\lambda_*}{\nu_*} c + 8\gamma^4, \\ -4c_v a &= \frac{\lambda_*}{\nu_*} b, \end{aligned}$$

из которой последовательно находятся e, d, c, b, a .

Таким образом, распределение температуры в струе определяется формулой $T = \nu_* x^{-2} H(\eta)$, где $H(\eta)$ задается выражением (2.7) при $\lambda_* = 0$, выражением (2.11) при $\lambda_* \neq 0$.

Замечание. Укажем некоторые решения уравнения (2.6), которые могут быть полезными при решении различных тепловых задач для струйных течений. Введем в (2.6) новые переменные $x, \eta = r_*/x$:

$$\frac{\gamma^2 c_v}{\theta^2} (2xT_{1x}^0 - \eta\theta T_{1\eta}^0) = \frac{\lambda_*}{\nu_*} (T_{1\eta\eta}^0 + \frac{1}{\eta} T_{1\eta}^0). \quad (2.12)$$

В случае $\lambda_* = 0$ общее решение уравнения (2.12) имеет вид $T_1^0 = F(\xi)$, $\xi = \frac{x\eta^2}{\theta}$, где $F(\xi)$ – произвольная функция. Если $\lambda_* \neq 0$, то решение уравнения (2.12) можно найти в виде

$$T_1^0(x, \eta) = \sum_{n=1} x^{\alpha_n} T_{1n}(\eta), \quad (2.13)$$

где α_n – произвольные постоянные, а функции $T_{1n}(\eta)$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{\lambda_*}{\nu_*} T_{1n}'' + (\frac{\lambda_*}{\nu_* \eta} + \frac{c_v \gamma^2 \eta}{\theta}) T_{1n}' - \frac{2c_v \gamma^2 \alpha_n}{\theta^2} T_{1n} = 0.$$

Сумма в (2.13) может быть как конечной, так и бесконечной. Тепловое поле в струе при этом определяется формулами (2.4), (2.11), (2.13).

Аналогичные исследования для струйных течений с конечной вращательной составляющей скорости и без построения теплового поля проводились в [6–10]. Для исследования струйных течений на основе полной (неусеченной) системы уравнений Навье–Стокса (1.1)–(1.6) эффективными являются численные методы [11–12], в т. ч. с использованием системы ANSYS Fluent [13].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ и Ульяновской области (проекты № 18-41-730015, №19-41-730006), гранта Президента РФ (проект НШ-2493.2020.8).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука; Физматлит, 1978. 736 с.
2. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 742 с.
3. Ван-Дайк М. Методы возмущений в механике жидкости. М.: Мир, 1967. 296 с.
4. Коул. Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
5. Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1976. 456 с.
6. Лойцянский Л. Г. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // Прикладная математика и механика. 1953. Т. 27, вып. 1. С. 3–16.
7. Фалькович С. В. Распространение закрученной струи в безграничном пространстве, затопленном той же жидкостью // Прикладная математика и механика. 1967. Т. 31, вып. 2. С. 282–288.
8. Коробко В. И. Теория неавтономных струй вязкой жидкости. Саратов: Изд-во Саратов. ун-та, 1977. 216 с.
9. Velmisov P. A., Mizher U. J., Semenova E. P. Asymptotic study of nonlinear viscous gas flows // Proceedings of the 44th International Conference on Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'18). AIP Conference Proceedings. 2018. Vol. 2048, Issue 1. pp. 040012-1–040012-11.
10. Вельмисов П. А., Мизхер У. Д., Семенова Е. П. Исследование струйных течений методом малого параметра // Материалы XIII Международной научной конференции (г. Саранск, 12–16 июля 2017 г.). Саранск: СВМО, 2017. С. 470–475.
11. Hoffman K. A., Chiang S. T. Computational fluid dynamics. – 4th ed. Wichita: Engineering Education System, 2000. Vol. II. 479 p.
12. Chung T. J. Computational fluid dynamics. New York: Cambridge University Press, 2010. 1034 p.
13. Ansys Fluent 12.0. Theory Guide. April, 2009.

Поступила 27.04.2020

MSC2020 76D05 80A19 35B40

Asymptotic study of heat and mass transfer in weakly twisted jets

© P. A. Velmisov¹, U. J. Mizher², V. N. Kovalnogov³

Abstract. Jet flows of liquids and gases are used in various fields of technology as means of controlling the processes of heat and mass transfer, for the intensification and stabilization of the combustion process, as means of protecting structures from exposure to thermal fields, for coating, etc. The jets of liquids and gases in technology are formed by sources-nozzles of finite sizes with various distributions of the initial outflow velocities in the outlet section of the nozzle, therefore, the calculation of the aerodynamic and thermal characteristics of jet flows is reduced to solving non-self-similar problems. However, one of the methods for solving such problems is the method of asymptotic expansion of velocities and pressure in series in a small parameter, when the first member of this series is a self-similar solution to the jet source problem. This article proposes an asymptotic expansion for axisymmetric weakly swirling flows in a model of a viscous incompressible medium, which leads to nonlinear «boundary layer» equations that differ from the well-known classical equations [1]–[4] for flows with finite swirl. Self-similar solutions of these equations are constructed that describe the distribution of speed, pressure, and temperature in a weakly swirling jet. The results presented in the article complement the results of [3]–[7] by calculating the thermal field in the jet.

Key Words: aerohydrodynamics, swirling jet, viscosity, asymptotic expansion, self-similar solutions, heat and mass transfer

REFERENCES

1. L. G. Loitsyansky, [*Mechanics of fluid and gas*], Nauka Publ., Fizmatlit Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 736 p.
2. G. Schlichting, [*The theory of the boundary layer*], Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 742 p.
3. M. Van Dyke, [*Methods of perturbations in fluid mechanics*], Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 296 p.
4. J. Cole, [*Methods of perturbations in applied mathematics*], Mir Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 274 p.
5. A. Nayfe, [*Methods of perturbations*], Mir Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 456 p.
6. L. G. Loitsyansky, “[Propagation of a swirling jet in an unlimited space flooded by the same liquid]”, *PMM*, **27**:1 (1953), 3–16 (In Russ.).
7. S. V. Falkovich, “[Propagation of a swirling jet in an unlimited space flooded by the same liquid]”, *PMM*, **31**:2 (1967), 282–288 (In Russ.).

¹**Peter A. Velmisov**, Head of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Professor, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

²**Usama J. Mizher**, Postgraduate Student, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Postgraduate Student, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8950-9772>, usama.mizher@gmail.com

³**Vladislav N. Kovalnogov**, Head of the Department of Thermal Power Engineering, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets St., Ulyanovsk 432027, Russia), Doctor of Technical Sciences, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1907-3790>, kvn@ulstu.ru

8. V. I. Korobko, [*Theory of non-self-propelled viscous fluid jets*], Saratov State University Publ., Saratov, 1977 (In Russ.), 216 c.
9. P. A. Velmisov, U. J. Mizher, E. P. Semenova, “[Asymptotic study of nonlinear viscous gas flows]”, *AIP Conference Proceedings*, **2048**:1 (2018), 040012-1–040012-11.
10. P. A. Velmisov, U. J. Mizher, E. P. Semenova, “[Investigation of jet flows by the small parameter method]”, 2017, 470–475 (In Russ.).
11. K. A. Hoffman, S. T. Chiang, [*Computational Fluid Dynamics*]. – 4th ed., **II**, Engineering Education System, Wichita, 2000, 479 c.
12. T. J. Chung, [*Computational fluid dynamics*], Cambridge University Press, New York, 2010, 1034 c.
13. *ANSYS FLUENT 12.0. Theory Guide*, April, 2009.

Submitted 27.04.2020

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202002.208-224

УДК 532.529:541.182

О течении вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодические структуры

© М. С. Дерябина¹, С. И. Мартынов²

Аннотация. Проведено моделирование течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления через пористую структуру, которая представлялась в виде системы неподвижных частиц. Внутри пористой структуры имеются подвижные частицы, являющиеся маркерами микротечений жидкости в ячейках. Течение вязкой жидкости происходит вдоль плоской стенки, ограничивающей с одной стороны пористую структуру. В расчётах учитывается гидродинамическое взаимодействие всех частиц, (как подвижных, так и неподвижных) между собой и с плоскостью. Проведено компьютерное моделирование такого рода течения через модельные структуры, образованные, соответственно, из 441, 567 периодически и 478 случайно расположенных неподвижных частиц эффективного размера и различным положением плоской стенки. Размеры подвижных частиц, помещённой в вязкую жидкость, составляли 0,2 от размера эффективных частиц. Результаты численного моделирования показали, что внутри структуры реализуются микротечения с противоположным направлением скорости, что следует из закона Дарси. Такая сложная динамика течения внутри пористой структуры означает, что использование осреднённых уравнений фильтрации жидкости даёт неверную картину течения на размерах пор и может служить объяснением нелинейной зависимости средней скорости фильтрации от приложенного градиента давления.

Ключевые слова: численное моделирование, вязкая жидкость, пористая структура, гидродинамическое взаимодействие частиц, микротечение

1. Введение

В XIX в. были открыты линейные законы теплопроводности (закон Фурье [1]), диффузии (законы Фика [2]), фильтрации (закон Дарси [3]), которые являются основой для различных расчетов и в настоящее время. В интегральном виде они имеют подобную форму записи, связывающую расход определяемой величины через площадь сечения образца среды с разностью значений скалярного параметра, определяющего этот расход, на длине этого образца. Переход к дифференциальному виду также даёт подобную форму записи этих законов. Однако имеются и существенные отличия закона Дарси от первых двух, связанные как с формой записи (коэффициент пропорциональности содержит два параметра), так и с масштабом, на котором он имеет смысл. Все законы получены в предположении о движении одной сплошной среды в другой и содержат

¹Дерябина Мария Сергеевна, исполнитель гранта РФФИ, ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет», (628000, Россия, г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д. 16.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5588-6740>, deryabinams@mail.ru

²Мартынов Сергей Иванович, главный научный сотрудник, БУ ВО «Сургутский государственный университет», (628412, Россия, г. Сургут, пр. Ленина, д. 1.), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

коэффициент, характеризующий это относительное движение: коэффициенты теплопроводности, диффузии и проницаемости. Однако в законе Дарси присутствует также параметр, характеризующий движущуюся среду – коэффициент вязкости жидкости.

Кроме того, характерный минимальный масштаб, на котором можно применять закон фильтрации, существенно (на порядки) больше, чем для первых двух. Этот масштаб определяется размерами пор в среде, по которой движется жидкость, и которые на несколько порядков больше соответствующих микроразмеров, используемых в первых двух законах. Характерный минимальный масштаб должен быть намного больше этих размеров для применения гипотезы сплошной среды, используемой при записи этих законов, поэтому закон Дарси не применим на масштабах пор.

Между тем, современные технологии добычи нефти и очистки с помощью фильтров требуют более глубокого понимания механизмов процессов, происходящих именно на размерах пор (процесс вытеснения нефти с использованием поверхностно-активных веществ, динамика многофазного течения). Используемые для этого модели отдельных пор не дают полного представления о течении на этих масштабах, т. к. рассматриваются изолированно от других пор, движение жидкости в которых влияет также и на течение в выделенной. Таким образом, проблема моделирования течения вязкой жидкости в пористой среде по-прежнему является одной из актуальных в механике жидкости. Это обусловлено не только математической сложностью самой задачи, но и чрезвычайно широкой областью возможных приложений результатов моделирования: извлечение нефти и газа из пласта, создание бытовых и промышленных фильтров для очистки жидкости и газа и другие подобные прикладные задачи.

В настоящее время с развитием информационных технологий стало возможным моделирование течения жидкости в пористой среде на масштабе пор [4–7]. Задача в этом случае сводится к нахождению численного решения уравнений гидродинамики для течения жидкости в некоторой пористой среде, геометрия которой воспроизводит структуру реального пористого материала. При решении такой задачи используются как известные методы численного решения уравнений гидродинамики, так и методы компьютерной томографии образца материала для моделирования его структуры. Проблема данного подхода состоит в том, что его реализация требует значительных вычислительных ресурсов как на стадии решения уравнений гидродинамики, так и на стадии создания цифрового образца пористого материала. Например, реальный образец пористого материала в виде кубика размерами в 600 мкм по каждой стороне требует 109 пикселей для его цифровой модели [8]. Кроме того, реализация самих численных методов интегрирования уравнений гидродинамики с граничными условиями на сложных геометрических поверхностях представляет собой не менее трудную задачу, связанную с созданием расчетных сеток, учитывающих такую геометрию границ поровых каналов. Поэтому несмотря на то, что современные возможности вычислительной техники существенно выросли и используются новые алгоритмы создания расчетных сеток, применение такого подхода все еще представляет собой сложную вычислительную задачу, для решения которой требуется большой объем вычислений. В связи с этим в настоящее время ставится задача получения более простых цифровых моделей пористой среды, сохраняющих ее основные средние характеристики, такие как пористость и проницаемость, но упрощающие ее геометрию.

Для решения этой задачи используются различные подходы [9–17], однако и в этом случае для их реализации требуются значительные вычислительные затраты. Поэтому в работе [18] для понимания гидродинамических процессов, происходящих на масштабах ячеек пористой среды, предлагается использовать модель фиктивного грунта, состоящего из большого числа твердых неподвижных сферических частиц, образующих

случайную структуру в некотором конечном объеме и помещенных в безграничную несжимаемую вязкую жидкость. Возможно учитывать наличие в жидкости плоской стенки вблизи от рассматриваемой структуры частиц в качестве модели непроницаемой поверхности, вдоль которой происходит течение жидкости с определенной скоростью.

Для визуализации микротечений внутри такой структуры в нее помещаются частицы меньшего радиуса, чем эффективный радиус частиц, образующих пористую структуру, которые могут свободно перемещаться в жидкости. При расчете течения жидкости внутри рассматриваемой структуры и динамики системы свободных частиц записываются уравнения движения жидкости и каждой частицы с учетом всех сил и моментов, связанных как с гидродинамическим взаимодействием всех частиц – подвижных и неподвижных, так и с внешним воздействием. Задача решается в приближении малых чисел Рейнольдса.

Гидродинамическое взаимодействие частиц вычисляется с использованием результатов работ [19], позволяющих учитывать такое взаимодействие для большого числа частиц в различных потоках жидкости. При численном моделировании динамики подвижных частиц при течении вязкой жидкости через такую пористую среду вместо реальных размеров частиц и параметров жидкости задаются их модельные значения. Это связано с увеличением точности численных расчетов, когда вместо реального параметра, например, размера частиц, имеющего порядок 10^4 см, задается модельный размер 1 см. Формулы перехода от модельных параметров к реальным и наоборот приводятся в работах [18]. Полученные результаты моделирования [18] показали, что при заданном вдали от структуры однородном потоке жидкости движение свободных частиц, а следовательно, и течение жидкости в пористой среде, происходит главным образом поперек заданного направления потока (извилистость траектории). Кроме того, было показано возможность закупорки выхода из ячейки (кальматация) движущейся в ней частицей, когда она оказывается в ловушке между эффективными частицами и не может дальше двигаться.

Согласно закону Дарси, фильтрация жидкости через пористую среду происходит при наличии градиента давления в жидкости. Поэтому представляет интерес рассмотреть задачу о течении вязкой жидкости через ячейки пористой среды при заданном градиенте давления. Сложность такой задачи заключается в том, что известное решение Пуазейля реализуется для течений с ограниченным размером поперечного сечения. При увеличении характерного поперечного размера увеличивается и поперечная составляющая скорости жидкости и известное одномерное решение перестает иметь физический смысл. В работе [20] подробно рассмотрен этот случай и найдено приближенное периодическое решение течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодические решетки пластин и стержней при продольной и поперечной их ориентации относительно вектора градиента давления. В настоящей работе с использованием результатов работ [18–19], моделируется течение вязкой жидкости через ограниченную по размерам пористую структуру при заданном градиенте давления и наличии плоской стенки, вдоль которой происходит течение. Цель моделирования – определить характер возможных микротечений, возникающих в пористой структуре при наличии заданного градиента давления.

2. Постановка задачи

Рассматривается модель фиктивного грунта, состоящего из N_1 твердых сферических частиц, образующих случайную структуру в объеме V в несжимаемой жидкости плотности ρ и вязкости η . Случайное распределение частиц в жидкости происходит

ло по следующему алгоритму: выделялся некоторый ограниченный объем в жидкости и считалось, что каждая частица с равной вероятностью может оказаться в любой точке выделенного объема, если эта точка еще не занята другой частицей. В качестве ограниченного объема выбирался прямоугольный параллелепипед со сторонами $V = 2l \times 2h \times 2d$ вдоль осей OX , OY , OZ , соответственно. Эффективный радиус частиц равен b . Для того чтобы полученная структура была жесткой и моделировала пористое тело, на частицы накладываются связи, препятствующие их поступательному и вращательному перемещению. Объем жидкости ограничен плоскостью, проходящей вдоль одной из граней выделенного объема и моделирующей непроницаемую поверхность, вдоль которой происходит течение жидкости со скоростью \mathbf{U} . Внутри полученной случайной структуры определенным образом помещаются N_2 частиц меньшего радиуса $c < b$, которые могут свободно перемещаться в жидкости. Данные частицы служат маркерами для визуализации микротечений в пористой структуре, а также моделируют наличие дисперсной фазы в жидкости. В приближении малых чисел Рейнольдса система уравнений течения вязкой жидкости имеет вид:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p. \quad (2.1)$$

На поверхности неподвижной частицы с номером k должны выполняться следующие граничные условия:

$$u_i = 0, \quad |\mathbf{x}^k| = b, \quad k = 1, \dots, N_1. \quad (2.2)$$

На поверхности подвижной частицы с номером k должны выполняться следующие граничные условия:

$$u_i = V_i^k + \Gamma_{ij}^k x_j^k, \quad |\mathbf{x}^k| = c, \quad k = 1, \dots, N_2. \quad (2.3)$$

Условия для скорости жидкости на поверхности S плоской стенки имеют вид:

$$u_i = 0, \quad \mathbf{x}^k \in S, \quad (2.4)$$

где \mathbf{V}^k – абсолютная линейная скорость; Γ_{ij}^k – тензор угловой скорости; \mathbf{x}^k – положение произвольной точки жидкости относительно центра частицы с номером k .

Далеко от частиц скорость и давление жидкости равны:

$$u_i \rightarrow 0, \quad p \rightarrow p_0 \quad \text{при} \quad |\mathbf{X}| \rightarrow \infty, \quad (2.5)$$

где p_0 – невозмущенное давление в жидкости.

Для расчета динамики системы свободных частиц записываются уравнения движения каждой частицы с учетом всех сил и моментов, связанных с гидродинамическим взаимодействием всех частиц и сил реакции связей. Для неподвижных частиц получим:

$$\mathbf{F}_1^k + \mathbf{R}^k = 0, \quad \mathbf{M}_1^k + \mathbf{T}^k = 0, \quad (2.6)$$

где \mathbf{F}_1^k – сумма внешних сил; \mathbf{R}^k – реакции связей, удерживающих частицы в заданном положении; \mathbf{M}_1^k – сумма моментов внешних сил; \mathbf{T}^k – сумма моментов реакций связей, наложенных на неподвижную частицу с номером k .

В квазистационарном приближении уравнения динамики подвижных частиц записываются в виде:

$$\mathbf{F}_2^k = 0, \quad \mathbf{M}_2^k = 0, \quad (2.7)$$

где \mathbf{F}_2^k – сумма сил; \mathbf{M}_2^k – сумма моментов сил, действующих на подвижную частицу с номером k со стороны жидкости.

Скорость жидкости \mathbf{U} вдоль плоскости вдали от структуры имеет вид:

$$U_y = U_{0y} + \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} z^2, \quad U_x = 0, \quad U_z = 0.$$

Градиент давления считался направленным вдоль плоскости, ограничивающей вязкую жидкость, а постоянная скорости u_{0y} выбиралась таким образом, чтобы на этой плоскости выполнялись граничные условия $U_y = 0$.

Полученная система гидродинамических уравнений 2.1 и уравнений динамики частиц 2.6–2.7 с граничными условиями 2.2–2.5 решалась методом, разработанным в работе [19]. Метод позволяет учитывать гидродинамическое взаимодействие всех частиц – подвижных и неподвижных, и вычислять силы и моменты, действующие на частицы со стороны жидкости. Согласно этому методу, решение системы уравнений 2.1, удовлетворяющих условию 2.5 представляется в виде мультипольного разложения возмущений скорости и давления несущего потока каждой частицей. Мультиполя содержат тензорные коэффициенты, которые находятся из решения алгебраической системы уравнений, получаемой из граничных условий для скорости на поверхности частиц 2.2–2.3. При наличии плоской стенки для каждой реальной частицы вводится фиктивная, расположенная симметрично реальной относительно плоскости [19]. Возмущение скорости и давления от фиктивной частицы выражаются через тензорные коэффициенты реальных частиц и такие, что граничные условия для скорости на плоскости 2.4 выполняются точно. При наличии двух и более плоскостей количество фиктивных частиц необходимо брать еще больше, но граничные условия на каждой плоскости в этом случае выполняются приближенно [19]. Поэтому в работе был рассмотрен случай только одной плоской поверхности, ограничивающей объем жидкости. Аналитические выражения для давления и скорости жидкости, удовлетворяющих уравнениям 2.1 и граничным условиям 2.2–2.5 можно найти в работе [19], и в данной статье из-за их громоздкости не приведены.

Как следует из работы [19], нахождение тензорных коэффициентов сводится к решению алгебраической системы уравнений, получаемой из условий 2.2, 2.2), 2.3. Скорости подвижных частиц находятся из условия 2.5, а реакции связей – из 2.6.

Из-за большого количества тензорных коэффициентов в выражениях для определения скорости жидкости и частиц, а также реакций связей, при численном решении применялся специальный программный комплекс [18–19], который позволяет визуализировать движение подвижных частиц.

3. Результаты моделирования течения в ячейках пористой среды

Поскольку значения реальных параметров пористой среды, а следовательно, и параметров фиктивного грунта, достаточно малы, то это затрудняет как нахождение численного решения системы уравнений, так и визуализацию динамики подвижных частиц. Поэтому, аналогично работе [18], применялся метод подобия: вместо реальных

размеров частиц b , c и таких параметров жидкости как ее вязкость η и скорость \mathbf{U} течения, при компьютерном моделировании задаются их модельные значения \hat{b} , \hat{c} , $\hat{\eta}$, $\hat{\mathbf{U}}$. Плотность жидкости ρ считается одинаковой для модельной и реальной жидкостей. Из условия подобия реального и модельного течений получаем формулы перехода от модельных к реальным параметрам и наоборот [18], в зависимости от того, что требуется. Модельные значения параметров равны: $\hat{b} = 1$ см, $\hat{\eta} = 1\text{г}/(\text{см}\cdot\text{сек})$.

Были рассмотрены структуры из периодически и случайно расположенных частиц в объеме V жидкости. Первая периодическая структура представляет собой кубическую решетку частиц, расположенных в прямоугольной призме со сторонами, образованными 7 частицами по оси OX , 9 – по оси OY и 7 – по оси OZ . Всего структура содержит 441 частицу. Начало системы координат XYZ находится в центре тяжести призмы, и оси направлены вдоль ее сторон. Подвижные частицы размера $\hat{c} = 0.2\hat{b}$ располагались внутри периодической структуры, и всего было рассмотрено 6 таких частиц. Моделирование динамики подвижных частиц через такую структуру проводилось с целью определения микротечений вязкой жидкости внутри нее. Для этого их положение выбиралось таким образом, чтобы определить скорость вблизи и вдали от плоской поверхности, ограничивающей течение вязкой жидкости, на краях и в центре периодической структуры (Рис. 3.1).

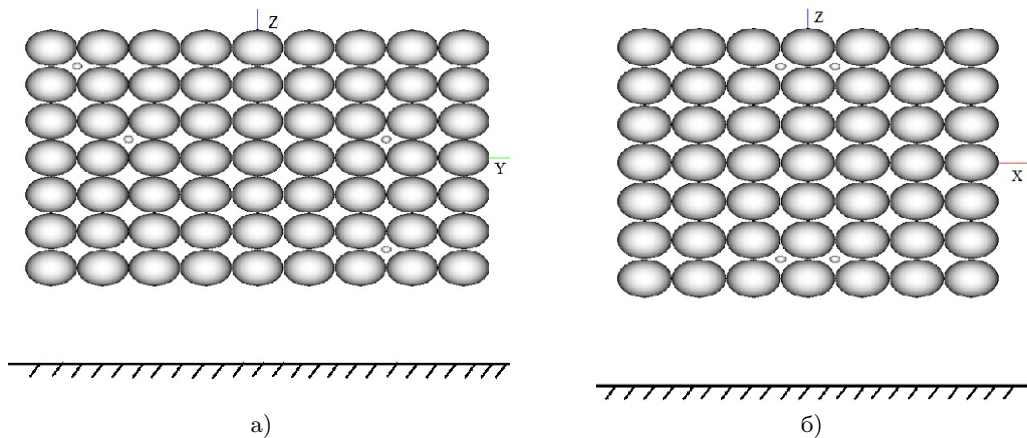


Рис. 3.1. Характерная периодическая структура неподвижных частиц с подвижными частицами внутри и плоской стенкой при $z = -9$ относительно скорости потока а) в продольной проекции; б) в поперечной проекции

Для контроля полученных результатов были рассмотрены случаи симметричного расположения части частиц относительно плоскости YOZ (результаты вычислений должны давать симметричные скорости их движения), а также вариант, при котором отсутствует симметрия в их расположении. Вторым случаем получался из первого путем переноса части симметричных частиц в новое положение, при этом остальные сохраняли свои прежние начальные координаты. Для изучения влияния плоской поверхности на микро течения вязкой жидкости внутри периодической структуры были рассмотрены следующие случаи ее расположения: 1) плоская поверхность, ограничивающая вязкую жидкость, расположена сверху структуры ($z = 11$); 2) плоская поверхность отсутствует; 3) плоскость расположена снизу структуры ($z = -11$); 4) плоскость расположена снизу структуры ($z = -9$). С целью изучения влияния градиента давления на микро течения в последнем случае расположения плоской поверхности рассматри-

валось течение с удвоенным градиентом давления. Результаты моделирования первых трех случаев расположения плоской поверхности для симметричного расположения части подвижных частиц приведены в сводной таблице (табл. 3.1). Скорость внешнего потока жидкости равна $\hat{U}_y = 0.121 - 0.001z^2$.

Таблица 3.1. Сводные результаты расчетов скорости подвижных частиц в периодической структуре из 441 частицы (1 строка – стенка сверху, 2 строка – стенки нет, 3 строка – стенка снизу)

№	x_0	y_0	z_0	u	v	w	δt
1	-1	-7	5	-4.576e-3	10.09e-3	8.085e-03	0.4
				-5.105e-3	7.48e-3	6.299e-3	
				-4.304e-3	7.638e-3	7.339e-3	
2	1	-7	5	4.476e-3	10.089e-3	8.085e-3	0.4
				5.105e-3	7.48e-3	6.299e-3	
				4.304e-3	7.638e-3	7.339e-3	
3	0	-5	1	0	-1.487e-3	-0.667e-3	0.4
				0	-1.673e-3	-0.9e-3	
				0	-2.036e-3	-0.732e-3	
4	0	5	1	0	-1.137e-3	0.899e-3	0.4
				0	-1.319e-3	0.995e-3	
				0	-1.447e-3	1.111e-3	
5	-1	5	-5	1.159e-3	0.696e-3	-2.15e-3	0.4
				1.578e-3	0.39e-3	-2.22e-3	
				1.115e-3	1.673e-3	-3.468e-3	
6	1	5	-5	-1.1587e-3	0.696e-3	-2.15e-3	0.4
				-1.5781e-3	0.39e-3	-2.22e-3	
				-1.115e-3	1.673e-3	-3.468e-3	

На Рис. 3.2 представлены полученные результаты для скоростей частиц в двух проекциях. Необходимо отметить, что четыре частицы располагались в точках пересечения осей продольных и поперечных каналов, образованных частицами в периодической решетке. Поперечные размеры каналов больше размеров подвижных частиц, примерно, в два раза, что подразумевает возможность их прямолинейного движения. Тем не менее скорость частиц, а следовательно, и скорость жидкости внутри структуры имеет явно выраженное отклонение от прямолинейного направления движения. Расположение двух частиц, имеющих отрицательные проекции скорости относительно направления внешнего потока, отличалось от других тем, что одна из осей, а именно проходящая вдоль продольного канала, была сдвинута на величину \hat{b} так, что центр подвижной и одного из слоев неподвижных частиц лежат в одной плоскости, параллельной YOZ . Другими словами эти подвижные частицы не имели возможности двигаться прямо по потоку, но могли двигаться по оси поперечного внешнему потоку канала. Тем не менее расчеты дали отрицательные проекции скорости таких частиц на оси OY и OZ , что означает наличие внутреннего микротечения в противоположном внешнему потоку направлении.

Более четко наличие таких внутренних микротечений видно в случае несимметрично расположенных частиц, для которых результаты расчетов динамики приведены в табл. 3.2 и на Рис. 3.3.

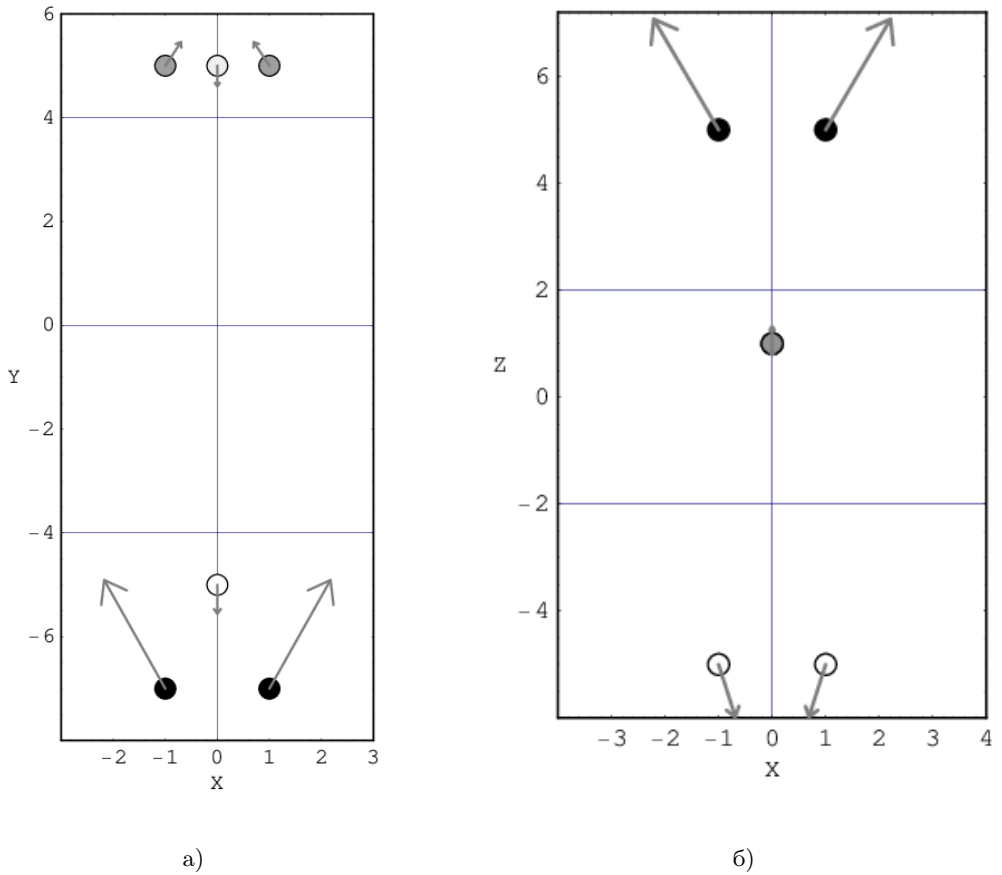


Рис. 3.2. Скорости симметрично расположенных подвижных частиц относительно скорости потока: а) в продольной проекции; б) в поперечной проекции

Картина полученных внутренних микротечений качественно не меняется для всех случаев расположения плоской поверхности относительно периодической структуры, что следует из результатов, приведенных в табл. 3.1 и табл. 3.2. Во всех случаях имеются микротечения, направленные против внешнего потока.

Влияние на динамику подвижных частиц положения плоскости и изменение градиента давления представлено в табл. 3.2. Новое положение плоскости соответствует $z = -9$, а внешний поток задается как $\hat{U}_y = 0.081 - 0.001z^2$ и с удвоенным градиентом давления $\hat{U}_y = 0.162 - 0.002z^2$. Как видно из таблицы, качественных изменений в динамике подвижных частиц не происходит: во всех случаях присутствуют микротечения, направленные против основного потока. Следует отметить, что с удвоением градиента давления удваиваются и скорости микротечений, в т. ч. направленных против внешнего потока. Это свидетельствует о неизменности структуры микропотоков внутри пористой среды.

Кроме того, в случае расположения плоскости при $z = -11$ моделировалась динамика подвижных частиц при увеличении размеров структуры. Для этого сверху и снизу

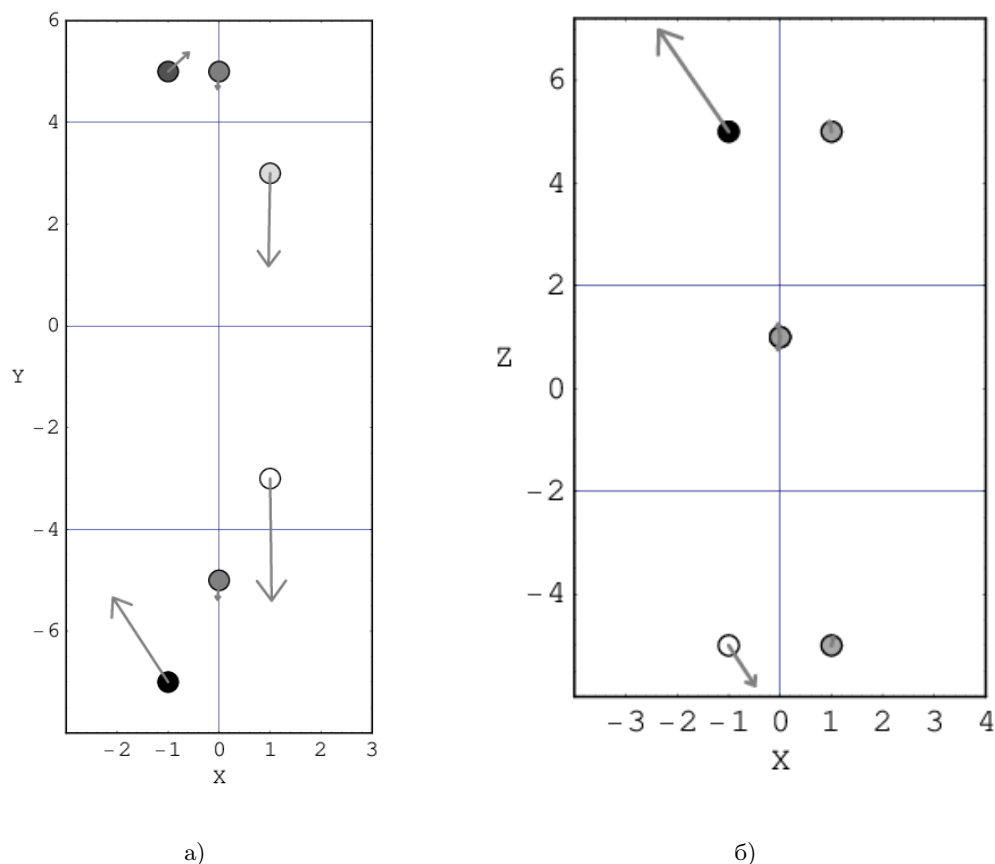


Рис. 3.3. Скорости асимметрично расположенных подвижных частиц относительно скорости потока: а) в продольной проекции; б) в поперечной проекции

имеющейся структуры из 441 частицы добавлялись слои по 63 частиц. Полученная структура содержала уже 567 частиц. Положение подвижных частиц такое же, как и в случае несимметрично расположенных. Рассматривалось течение вязкой жидкости с такой же скоростью, как и в случае первоначальной периодической структуры из 441 частицы $\hat{U}_y = 0.121 - 0.001z^2$, так и с удвоенным по величине значением градиента давления $\hat{U}_y = 0.241 - 0.002z^2$. Результаты расчетов скорости подвижных частиц приведены в табл. 3.3. Микротечения с отрицательной составляющей скоростью также образуются и в этом случае.

Аналогичные результаты были получены и для периодических решеток с числом неподвижных частиц 27 и 75, что позволило проводить расчеты на имеющейся вычислительной технике с точностью не менее 10^{-7} , в то время как в настоящей работе точность расчетов составляла 10^{-4} . В данной работе эти результаты не приводятся.

Кроме периодической, также была рассмотрена структура из 478 случайно расположенных неподвижных частиц, внутри которой располагались подвижные частицы. Случайное распределение частиц в жидкости происходило по следующему алгоритму: выделялся некоторый ограниченный объем в жидкости и считалось, что каждая части-

Таблица 3.2. Сводные результаты расчетов скорости подвижных частиц в периодической структуре из 441 частицы (1 строка – стенка снизу $z = -11$, 2 строка – стенки снизу $z = -9$, 3 строка – стенка снизу $z = -9$ и градиент давления в 2 раза больше)

№	x_0	y_0	z_0	u	v	w	δt
1	-1	-7	5	-5.218e-3 -1.724e-3 -3.45e-3	7.976e-3 0.528e-3 1.05e-3	7.597e-03 0.829e-3 1.67e-3	0.4
2	0	-5	1	0 0 0	-1.838e-3 -1.504e-3 -3.008e-3	-0.954e-3 0 0	0.4
3	1	-3	-5	0.134e-3 1.331e-3 2.662e-3	-11.55e-3 -3.074e-3 -6.163e-3	-0.610e-3 -0.133e-3 -0.268e-3	0.4
4	1	3	5	-0.145e-3 -0.283e-3 -0.566e-3	-8.784e-3 -0.873e-3 -1.764e-3	0.771e-3 0.141e-3 0.282e-3	0.4
5	0	5	1	0 0 0	-1.653e-3 -1.42e-3 -2.839e-3	0.992e-3 0 0	0.4
6	-1	5	-5	1.964e-3 2.084e-3 4.17e-3	1.804e-3 0.471e-3 9.318e-3	-2.992e-3 -0.61e-3 -1.223e-3	0.4

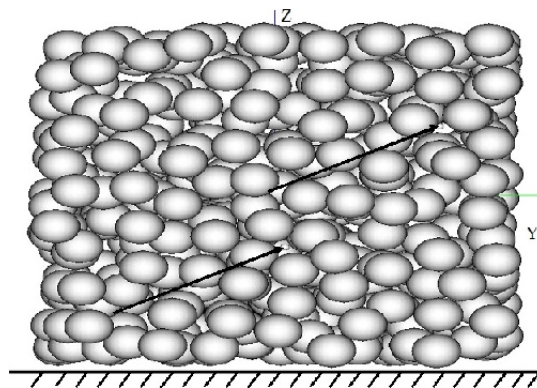


Рис. 3.4. Характерная случайная структура неподвижных частиц с подвижными частицами внутри и плоской стенкой при $z = -10$

ца с равной вероятностью может оказаться в любой точке выделенного объема, если данная точка еще не занята другой частицей. В качестве заданного объема жидкости выбирался параллелепипед, ограниченный в пространстве координатами $-10 \leq x \leq 10$, $-10 \leq y \leq 10$, $-10 \leq z \leq 10$. Полученная структура представлена на Рис. 3.4, стрелками указаны две из шести подвижных частиц. Рассматривались случаи положения плоскости, вдоль которой задано течение вязкой жидкости: 1) плоская поверхность,

Таблица 3.3. Сводные результаты расчетов скорости подвижных частиц в периодической структуре из 567 частицы (1 строка – стенка снизу $z = -11$, 2 строка – стенки снизу $z = -11$ и градиент давления в 2 раза больше)

№	x_0	y_0	z_0	u	v	w	δt
1	-1	-7	5	0	1.13e-3	0.91e-03	0.4
				0	2.25e-3	1.81e-3	
2	0	-5	1	0	-1.48e-3	0.47e-3	0.4
				0	-2.96e-3	0.95e-3	
3	1	-3	-5	0	0.599e-3	0	0.4
				-0.107e-3	1.186e-3	0	
4	1	3	5	-0.21e-3	-1.104e-3	-0.26e-3	0.4
				-0.419e-3	2.22e-3	-0.528e-3	
5	0	5	1	0	-1.47e-3	-0.48e-3	0.4
				0	-2.942e-3	-0.96e-3	
6	-1	5	-5	-0.445e-3	-0.196e-3	0.597e-3	0.4
				-0.891e-3	-0.406e-3	1.19e-3	

ограничивающая вязкую жидкость, расположена сверху структуры ($z = 10$); 2) плоская поверхность отсутствует; 3) плоскость расположена снизу структуры ($z = -10$). Скорость внешнего потока равна $\hat{U}_y = 0.1 - 0.001z^2$. Результаты расчетов, приведенные в таблице табл. 3.4 и на Рис. 3.5, свидетельствуют о наличии микротечений, направленных против внешнего потока, и в этом случае.

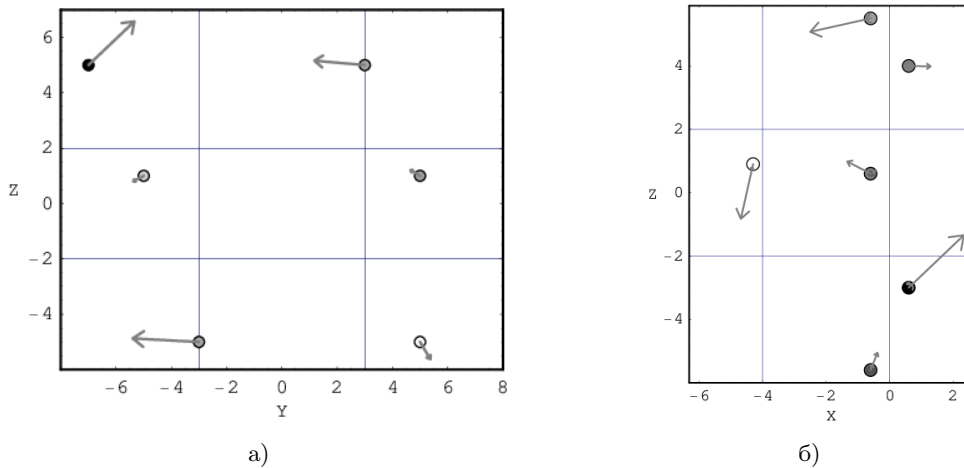


Рис. 3.5. Скорости подвижных частиц относительно скорости потока: а) в продольной проекции; б) в поперечной проекции

Значения реальных параметров можно определить согласно формулам пересчета, приведенных в [18]. Так, реальное значение скорости определяется из условия подобия

Таблица 3.4. Сводные результаты расчетов скорости подвижных частиц в структуре из 478 случайно расположенных частиц (1 строка – стенка сверху, 2 строка – стенки нет, 3 строка – стенка снизу)

№	x_0	y_0	z_0	u	v	w	δt
1	-0.6	-7.3	0.6	-10.36e-3 -3.185e-3 -6.56e-3	-8.774e-3 -2.221e-3 -6.59e-3	-3.96e-03 1.04e-3 3.4e-3	0.4
2	-0.6	7.3	-5.6	-0.795e-3 1.6751e-3 1.669e-3	7.939e-3 2.393e-3 9.583e-3	15.28e-3 4.85e-3 4.98e-3	0.4
3	0.6	6.6	4	-20.66e-3 3.388e-3 6.2263e-3	-4.58e-3 0.209e-3 17.33e-3	2.390e-3 0.98e-3 0	0.4
4	-0.6	-7.3	5.5	-1.2e-3 -2.16e-3 -17.10e-3	-1.5e-3 -1.41e-3 -3.96e-3	-5.79e-3 0.11e-3 -3.53e-3	0.4
5	-4.3	0.5	0.9	1.553e-3 2.08e-3 -3.57e-3	0.889e-3 0.36e-3 1.797e-3	-3.13e-3 -2.82e-3 -15.23e-3	0.4
6	0.6	0.4	-3	23.08e-3 -1.21e-3 15.6e-3	-26.59e-3 -7.682e-3 -35.94e-3	-32.39e-3 -2.1e-3 14.41e-3	0.4

модельного и реального течения при равенстве плотностей жидкостей по формуле:

$$v = \hat{v} \frac{\hat{b}\eta}{b\hat{\eta}}.$$

Для реальных размеров частиц $b = 10^{-4}$ см и значения вязкости жидкости $\eta = 10^{-2}$ г/(см сек) получим, что табличные значения скорости частиц необходимо увеличить в 100 раз и это позволит получить реальные значения скорости. Реальный градиент давления внешнего потока связан с модельным соотношением:

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \hat{y}} \frac{\hat{b}^3 \eta^2}{b^3 \hat{\eta}^2}.$$

С учетом того, что модельное значение градиента давления в рассматриваемых потоках было равно $2 \cdot 10^{-3}$ дин/см³ или его удвоенному значению, получим реальное значение градиента давления, равное $2 \cdot 10^6$ Па/м.

Наличие разнонаправленных микропотоков предполагает наличие переходных областей, в которых происходит изменение направления скорости течений, в т. ч., возможно, наличие застойных зон. При изменении градиента давления, как следует из приведенных выше расчетов, скорости микротечений меняются, что предполагает изменение геометрии переходных областей и должно сказываться на такой интегральной величине как расход жидкости через сечение образца пористой среды. Поскольку при этом не меняются такие характеристики как проницаемость пористой среды и вязкость жидкости, то можно предполагать, что изменение расхода жидкости от

перепада давления будет иметь нелинейный характер. Это означает, что наличие разнонаправленных микротечений в пористой среде может служить объяснением нелинейности закона фильтрации.

4. Заключение

Проведено моделирование течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления через пористую структуру, представляющую собой систему неподвижных частиц, внутри которой находятся подвижные частицы, ограниченную с одной стороны плоской поверхностью. Учитывалось гидродинамическое взаимодействие всех частиц (как подвижных, так и неподвижных) как между собой, так и с плоскостью.

Компьютерное моделирование течения проводилось на модельных структурах, образованных, соответственно, из 441, 567 периодически и 478 случайно расположенных частиц эффективного размера при различном положении плоской поверхности. Размеры подвижных дисперсных частиц, находящихся внутри неподвижной структуры, составляли 0,2 от размера эффективных частиц. Подвижные частицы рассматривались как маркеры микротечений внутри пористой структуры.

Результаты численного моделирования во всех рассмотренных случаях показывают, что динамика подвижных частиц в потоке с градиентом давления количественно и качественно отличается от динамики жидкости в пористой среде на основе линейного закона фильтрации. В частности, обнаружено, что скорость подвижных частиц в градиентном потоке может иметь составляющую, противоположно направленную потоку жидкости вне структуры. Такое поведение подвижных частиц свидетельствует о наличии в пористой среде разнонаправленных микротечений, что может служить объяснением нелинейной зависимости такой интегральной характеристики как расход жидкости от перепада давления. Поэтому необходимо учитывать наличие и структуру микротечений для более качественного прогноза массопереноса в пористой среде и определять способы его увеличения.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-0007).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Fourier J. Theorie analytique de la chaleur. Paris: Firmin Didot Pere et Fils, 1822. 676 p.
2. Fick A. Die medizinische Physik. Braunschweig: F. Vieweg, 1856. 537 p.
3. Darcy H. Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes a suivre et des formules a employer dans les questions de distribution d'eau.... Paris: V. Dalmont, 1856. Vol. VII. 647 p.
4. Zaretskiy Y., Geiger S., Sorbie K. Direct numerical simulation of pore-scale re-active transport: applications to wettability alteration during two-phase flow // Int. Journal of Oil, Gas and Coal Technology. 2012. Vol. 5, No. 2/3. pp. 142–156.
5. Ma J., Sanchez J. P., Wu K., Couples G. D., Jiang Z. A pore network model for simulating non-ideal gas flow in micro- and nano-porous materials // Fuel. 2014. Vol. 116. pp. 498–508.

6. Molins S. Reactive interfaces in direct numerical simulation of pore-scale processes // *Reviews in Mineralogy & Geochemistry*. 2015. Vol. 80. pp. 461–481.
7. El-Zehairy A. A., Nezhad M., Joekear-Niasar V., Guymer I., Kourra N., Williams M. A Pore-network modelling of non-Darcy flow through heterogeneous porous media // *Advances in Water Resources*. 2019. Vol. 131. Article 103378.
8. Gray W. G., Miller C. T. Introduction to the thermodynamically constrained averaging theory for porous medium systems. Switzerland: Springer, 2014. 582 p.
9. Hughes R. G., Blunt M. J. Network modeling of multiphase flow in fractures // *Advances in Water Resources*. 2001. Vol. 24. pp. 409–421.
10. Jiang Z., van Dijke R., Wu K., Couples G. D., Sorbie K. S., Ma J. Stochastic pore network generation from 3D rock images // *Transport in Porous Media*. 2012. Vol. 94, Issue 2. pp. 571–593.
11. Mukunoki T., Miyata Y., Mikami K., Shiota E. X-ray CT analysis of pore structure in sand // *Solid Earth*. 2016. Vol. 7. pp. 929–942.
12. Xiong Q., Baychev T. G., Jivkov A. P. Review of pore network modelling of porous media: Experimental characterisations, network constructions and applications to reactive transport // *Journal of Contaminant Hydrology*. 2016. Vol. 192. pp. 101–117.
13. Raeini A. Q., Bijeljic B., Blunt M. J. Generalized network modeling: Network extraction as a coarse-scale discretization of the void space of porous media // *Phys. Rev. E*. 2017. Vol. 96. Article 013312.
14. Gharedaghloo B., Price J. S., Rezanezhad F., William L. Quinton W. L. Evaluating the hydraulic and transport properties of peat soil using pore network modeling and X-ray micro computed tomography // *Journal of Hydrology*. 2018. Vol. 561. pp. 494–508.
15. Khan Z. A., Tranter T., Agnaou M., Elkamel A., Gostick J. Dual network extraction algorithm to investigate multiple transport processes in porous materials: Image-based modeling of pore and grain scale processes // *Computers & Chemical Engineering*. 2019. Vol. 123. pp. 64–77.
16. Wang Y., Teng Q., He X., Feng J., Zhanget T. CT-image of rock samples super resolution using 3D convolutional neural network // *Computers & Geosciences*. 2019. Vol. 133. Article 104314.
17. Weishaupt K., Joekear-Niasar V., Helmig R. An efficient coupling of free flow and porous media flow using the pore-network modeling approach // *Journal of Computational Physics: X*. 2019. Vol. 1. Article 100011.
18. Дерябина М. С., Мартынов С. И. Моделирование течения вязкой жидкости с частицами через ячейки пористой среды // *Вычислительная механика сплошных сред*. 2016. Т. 9, № 4. С. 420–429.
19. Баранов В. Е., Мартынов С. И. Моделирование динамики частиц в вязкой жидкости при наличии плоской стенки // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2010. Т. 50, № 9. С. 1669–1686.

20. Дерябина М. С., Мартынов С. И. О течении вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодические структуры // Журнал Средневолжского математического общества. 2019. Т. 21, № 2. С. 222–243.

Поступила 21.04.2020

MSC2020 76D07, 76D09, 76D17

Viscous fluid microflows in cells of a porous medium in the presence of a gradient pressure

© M. S. Deryabina¹, S. I. Martynov²

Abstract. A simulation of the flow of a viscous fluid with a given pressure gradient through a porous structure, which was represented as a system of fixed particles, was carried out. Inside the porous structure there are moving particles, which are markers of microflows in the cells. The viscous fluid flows along a flat wall bounding the porous structure on one side. The calculations take into account the hydrodynamic interaction of all particles, both moving and stationary between themselves and with the plane. Computer simulations of this kind of flows through model structures formed, respectively, of 441, 567 periodically and 478 randomly located motionless particles of effective size and different positions of the flat wall, were carried out. The size of the moving particles placed in a viscous liquid was 0.2 of the size of the effective particles. The results of numerical simulation showed that microflows with an opposite direction of velocity are realized inside the structure, which follows from Darcy's law. Such a complex dynamics of the flow inside the porous structure means that the use of averaged equations of fluid filtration gives an incorrect picture of the flow at the pore size and can serve as an explanation of the nonlinear dependence of the average filtration rate on the applied pressure gradient.

Key Words: numerical simulation, viscous fluid, porous structure, hydrodynamic interaction of particles, microflows

REFERENCES

1. J. Fourier, *Theorie analytique de la chaleur*, Firmin Didot Pere et Fils, Paris, 1822, 676 p.
2. A. Fick, *Die medizinische Physik*, F. Vieweg, Paris, 1856, 537 p.
3. H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon: exposition et application des principes a suivre et des formules a employer dans les questions de distribution d'eau....*, V. Dalmont, Paris, 1856, VII 647 p.
4. Y. Zaretskiy, S. Geiger, K. Sorbie S.M. Underwood, P. Bartlett and R.H. Ottewill, "Direct numerical simulation of porescale reactive transport: applications to wettability alteration during two-phase flow", *Int. Journal of Oil, Gas and Coal Technology*, **5:2/3** (2012), 142–146.
5. J. Ma, J. P. Sanchez, K. Wu, G. D. Couples, Z. Jiang, "A pore network model for simulating nonideal gas flow in micro- and nano-porous materials", *Fuel*, **116** (2014), 498–508.

¹Member of the grant team of the Russian Foundation for Basic Research at Ugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk 628000, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4331-3675>

²Chief Researcher, Surgut State University (1 Lenina av., Surgut 628412, Russia), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

6. S. Molins, “Reactive interfaces in direct numerical simulation of pore-scale processes”, *Reviews in Mineralogy & Geochemistry*, **80** (2015), 461–481.
7. A. A. El-Zehairy, M. Nezhad, V. Joeekar-Niasar, I. Guymmer, N. Kourra, M. A. Williams, “Pore-network modelling of non-Darcy flow through heterogeneous porous media”, *Advances in Water Resources*, **131** (2019), 10337881–94.
8. W. G. Gray, C. T. Miller, *Introduction to the thermodynamically constrained averaging theory for porous medium systems.*, Springer, Switzerland, 2014, 582 p.
9. R. G. Hughes, M. J. Blunt, “Network modeling of multiphase flow in fractures”, *Advances in Water Resources*, **24** (2001), 409–421.
10. Z. Jiang, R. van Dijke, K. Wu, G. D. Couples, K. S. Sorbie, J. Ma, “Stochastic pore network generation from 3D rock images”, *Transport in Porous Media*, **94**:2 (2012), 571–593.
11. T. Mukunoki, Y. Miyata, K. Mikami, E. Shiota, “E. X-ray CT analysis of pore structure in sand”, *Solid Earth*., **7** (2016), 929–942.
12. Q. Xiong, T. G. Baychev, A. P. Jivkov, “Review of pore network modelling of porous media: Experimental characterisations, network constructions and applications to reactive transport”, *Journal of Contaminant Hydrology*, **192** (2016), 101–117.
13. A. Q. Raeini, B. Bijeljic, M. Blunt, “Generalized network modeling: Network extraction as a coarse-scale discretization of the void space of porous media”, *Phys. Rev. E.*, **96** (2017), 013312.
14. B. Gharedaghloo, J. S. Price, F. Rezanezhad, W. L. Quinton, “Evaluating the hydraulic and transport properties of peat soil using pore network modeling and X-ray micro computed tomography”, *Journal of Hydrology*, **561** (2018), 494–508.
15. Z. A. Khan, T. Tranter, M. Agnaou, A. Elkamel, J. Gostick, “Dual network extraction algorithm to investigate multiple transport processes in porous materials: Image-based modeling of pore and grain scale processes”, *Computers & Chemical Engineering*, **123** (2019), 64–77.
16. Y. Wang, Q. Teng, X. He, J. Feng, T. Zhanget, “CT-image of rock samples super resolution using 3D convolutional neural network”, *Computers & Geosciences*, **133** (2019), 104314.
17. K. Weishaupt, V. Joeekar-Niasar, R. Helmig, “An efficient coupling of free flow and porous media flow using the pore-network modeling approach”, *Journal of Computational Physics: X.*, **1** (2019), 100011.
18. M. S. Deryabina, S. I. Martynov, “Simulation of the flow of a viscous fluid with particles through porous medium cells”, *Computational Continuum Mechanics*, **9**:4 (2016), 420–429.
19. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “Simulation of Particle Dynamics in a Viscous Fluid near a Plane Wall”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:9 (2010), 1588–1604.

20. M. S. Deryabina, S. I. Martynov, “The flow of a viscous fluid with a predetermined pressure gradient through periodic structures”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **21**:2 (2019), 222–243.

Submitted 21.04.2020

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Если статья на русском языке, то она должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC2020;
- название статьи;
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском);
- список литературы.

Если же статья на английском языке, то соответствующие разделы излагаются только на английском. Код УДК не используется.

Коды УДК и MSC2020. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);

б) должность, подразделение (указывается при наличии);

в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, почтовый адрес организации. Почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улицы, город индекс, страна (на англ.).

г) ученая степень (указывается при наличии);

д) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>.

е) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);

- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);

- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 100 до 250 слов**.

Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

Текст статьи. При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;
- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты – основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение — выводы и рекомендации.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*, который можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом* (*American Mathematical Society*) и *Европейским математическим обществом* (*European Mathematical Society*). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.

Статьи в журналах на русском языке.

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6–11 July 2018), 218–219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The author(s) should send to the editor source text of the article (LaTeX format), files with figures (EPS format) and the compiled version of the article (PDF format).

If the article is in English, then it should contain the following sections only in English:

- MSC2020 codes;
- article title;
- information about every author;
- abstract;
- keywords;
- text of the article;
- references.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Name O. Surname;
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted, the postal address of the organization. The mailing address is indicated in the form: house street, city postcode, country.
- d) academic degree (indicated if available);
- e) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- e) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Results of work are described extremely precisely and informatively. Main theoretical and experimental results, factual data, detected relationships and patterns are presented. In the description preference is given to new results and data of long-term value, important discoveries, conclusions that refute existing theories, as well as data that, in the author's opinion, are of practical importance.

Conclusions may be accompanied by recommendations, estimates, suggestions, hypotheses described in the article.

The information contained in the article's title should not be repeated in the text of the author's summary.

It is better to avoid unnecessary introductory phrases (for example, «the author of the article considers ... »). Author(s) should not include in the abstract historical references (if

they do not constitute the main content of the document) as well as description of previously published works and well-known provisions.

The text of the author's abstract should use syntactic constructions typical for the language of scientific and technical documents. Also it is better to avoid complicated grammatical constructions.

Significant words from the article's text should be used in the text of the abstract.

Abbreviations and conventions, excluding commonly used (in English special texts also), are used in exceptional cases or their definitions must be given when first used.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

In the text of English abstract author(s) should use the terminology typical to foreign special texts. They should avoid usage of terms that are direct tracing of Russian-language terms. It is necessary to preserve the unity of terminology within the abstract.

English abstracts to Russian-language articles should be written in high-quality English.

The average volume of abstracts in Russian and in English should be from 100 to 250 words.

Keywords should reflect the main content of the article. If it is possible they should not repeat the terms of the title and abstracts. It is better for keywords to use the terms from the article's text, as well as terms defining the subject area and including other important concepts that will expand the possibilities of finding an article by means of information retrieval system. Section **Keywords** must contain from 5 to 15 words.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is necessary to adhere to the following structure:

- introduction - a brief overview of the state of the issue under consideration and the formulation of the problem solved in the article;
- materials and methods for solving the problem and accepted assumptions;
- results – the main content of the article;
- discussion and analysis of the results obtained and their comparison with previously known ones;
- conclusion — conclusions and recommendations.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmobib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number

should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book's name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B.F. Bylov, R.E. Vinograd, D.M. Grobman, V.V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются три файла: файл-преамбула, файл-шаблон и стилевой пакет `svmobib.sty`. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем `<ФамилияИО>.tex`. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то заголовок статьи оформляется только на английском языке. Для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова

нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления многострочных формул рекомендуется использовать окружение `equation` с вложенным окружением `array`:

```
\begin{equation}
\begin{array}{c}\label{shamanaev1}
x + y = 2, \\
x * y = 1. \\
\end{array}
\end{equation}
```

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы}
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```
\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком}
```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```
\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись}
```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```
\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {общая_подпись_под_рисунком}
```


г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```
\inserttwopictureswithcompression {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {степень_сжатия} {общая_подпись}
```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись}
```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись_под_рисунком}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись_под_рисунком}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись_под_рисунком}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmbib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}  
\by П. А. Шаманаев  
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов  
\jour Труды Средневожского математического общества  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151
```

В разделе `thebibliographyEn`:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]  
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151  
\lang In Russ.
```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах `thebibliography` и `thebibliographyEn` оформляются одинаково):

```
\Bibitem{shamanaevBib2}  
\by M. J. Berger, J. Oliger  
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations  
\jour Journal of Computational Physics  
\yr 1984  
\vol 53  
\pages 484–512
```

Статьи в электронном журнале на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib3}  
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,  
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции  
\jour Огарёв-online  
\vol 20  
\yr 2016
```

\elink Доступно по адресу: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib3En}
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
 \jour Ogarev-online
 \vol 20
 \yr 2016
 \lang In Russ.
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib4}
 \by A. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
 \paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
 \inbook Прикладная математика и механика
 \publaddr Ульяновск
 \publ УлГТУ
 \yr 2014
 \issue 10
 \pages 4–13

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
 \publaddr Ulyanovsk
 \publ UlGTU Publ.
 \yr 2014
 \issue 10
 \pages 4–13
 \lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib5}
 \by Ю. Н. Бибигов
 \book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
 \publaddr М.

\publ Вышш. шк.
 \yr 1991
 \totalpages 303

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
 \by Yu. N. Bibikov
 \book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
 \publaddr Moscow
 \publ Visshay shkola Publ.
 \yr 1991
 \totalpages 303
 \lang In Russ.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib6}
 \by В. Г. Малинов
 \paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
 \inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
 \bookvol II
 \procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
 \yr 2016
 \pages 48–50
 \publ ФИЦ ИУ РАН
 \publaddr М.

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
 \by V. G. Malinov
 \paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
 \inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
 \bookvol II
 \procinfo Moscow, October 17-22, 2016
 \yr 2016
 \pages 48–50
 \publ FRC CSC RAS Publ.
 \publaddr Moscow

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

Three files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package `svmobib.sty`. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named `<LastName>.tex`. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file **can not be changed**. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The authors}} {Author1 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail. }, Author2 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors}} {Author1 \footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail}, Author2 \footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLast NameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For multi-line formulas, it is recommended to use the **equation** environment with the nested **array** environment:

```
\begin{equation}
\begin{array}{c}\label{shamanaev1}
x + y = 2,\\
x * y = 1.\\
\end{array}
\end{equation}
```

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name} \label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```
\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```
\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption}
```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```
\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} {common_caption}
```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```
\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {degree_of_compression} {file name.eps} {caption_of_the_figure}
{degree_of_compression} {common_caption}
```

e) insert two pictures with common caption only

```
\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file name.eps}
{common_caption}
```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption}
```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file name.eps}
{common_caption}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file name.eps} {degree_of_compression} {file name.eps}
{degree_of_compression} {common_caption}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the svmobib.sty style package. The basis of this package is the amsbib.sty style file. These commands are described in more detail in the amsbib.pdf instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the svmobib.sty package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in
the form of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

\issue 1
 \pages 145–151
 \lang In Russ.

Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib2}
 \by M. J. Berger, J. Oliger
 \paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
 \jour Journal of Computational Physics
 \yr 1984
 \vol 53
 \pages 484–512

Articles in the electronic journals in Russian

\Bibitem{shamanaevBib3En}
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
 \jour Ogarev-online
 \vol 20
 \yr 2016
 \lang In Russ.
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
 \publaddr Ulyanovsk
 \publ UIGTU Publ.
 \yr 2014
 \issue 10
 \pages 4–13
 \lang In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
 \by Yu. N. Bibikov
 \book Kurs obyknennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
 \publaddr Moscow
 \publ Visshay shkola Publ.
 \yr 1991

\totalpages 303

\lang In Russ.

Conference proceedings in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib6En}

\by V. G. Malinov

\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator

\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings

\bookvol II

\procinfo Moscow, October 17-22, 2016

\yr 2016

\pages 48–50

\publ FRC CSC RAS Publ.

\publaddr Moscow

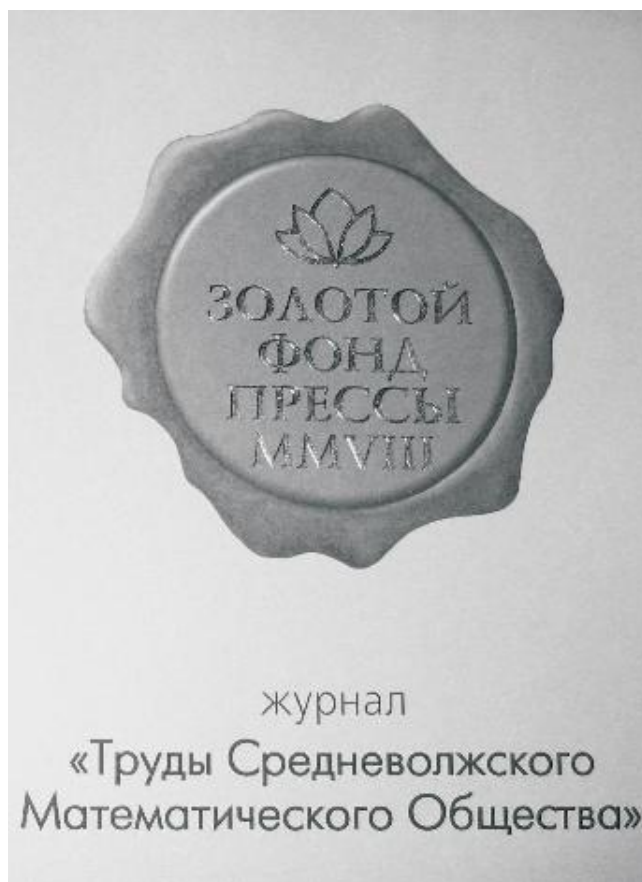
Алфавитный указатель авторов

Алексеева Е. С.	145	Кузьмин Н. А.	177
Анисимов В. Н.	188	Литвинов В. Л.	188
Бойков И. В.	155	Мартынов С. И.	208
Вельмисов П. А.	201	Мизхер У. Д.	200
Дерябина М. С.	208	Морозов А. Д.	164
Драгунов Т. Н.	164	Морозов К. Е.	164
Ковальногов В. Н.	200	Рассадин А. Э.	145
Рязанцев В. А.	155		

Author Index

Alekseeva E. S.	145	Litvinov V. L.	188
Anisimov V. N.	188	Martynov S. I.	208
Boykov I. V.	155	Mizher U. J.	200
Deryabina M. S.	208	Morozov A. D.	164
Dragunov T. N.	164	Morozov K. E.	164
Kovalnogov V. N.	200	Rassadin A. E.	145
Kuzmin N. A.	177	Ryazantsev V. A.	155
Velmisov P. A.	201		

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Редактор: *Зинина С. Х.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 15.06.2020. Дата выхода в свет 30.06.2020. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 10,15 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 857.

Типография: Издательство Мордовского университета

Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Atryahin V. A.*

Editor: *Zinina S. Kh.*

Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 15.06.2020. Date of publishing 30.06.2020. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 10,15.

Number of copies 100. Order no. 857.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24

