

ISSN 2587 – 7496 (Online)

ISSN 2079 – 6900 (Print)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 22 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 1

2020

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 22, № 1. 2020

DOI 10.15507/2079-6900.22.202001

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 22, NO. 1. 2020

DOI 10.15507/2079-6900.22.202001

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ) и размещен на общероссийском математическом портале Math-Net.Ru.

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal "Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva" publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- "Mathematics",
- "Applied Mathematics and Mechanics",
- "Mathematical modeling and computer science".

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC) and is available on the All-Russian mathematical portal Math-Net.Ru.

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society". Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малайзийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

Ахтямов Азамат Мухтарович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Дерюгин Юрий Николаевич — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник НОЦ Политехнического института, БУ ВО «Сургутский государственный университет» (Сургут, Россия)

Матус Петр Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Спивак Семен Израилевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Терехин Михаил Тихонович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина» (Рязань, Россия)

Ион Анка Вероника — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, исполняющая обязанности ректора ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Aleksandr S. Andreev — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

Azamat M. Akhtyamov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Vyacheslav Z. Grines — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Yuriy N. Derugin — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Chief Research Scientist, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Sergey I. Martynov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Research and Educational Center of the Polytechnic Institute, Surgut State University (Surgut, Russia)

Petr P. Matus — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Olga V. Pochinka — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Semen I. Spivak — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

Mikhail T. Terekhin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

Anca V. Ion — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

EDITORIAL COUNCIL

Morozkin Nikolay Danilovich — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Senin Petr Vasilievich — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Suharev Lev Alexandrovich — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Yarushkina Nadezda Glebovna — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Acting Rector of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

М. М. Бабаев

О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с запаздывающим аргументом по времени и операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева 13

В. А. Горская, Г. М. Полотовский

О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости 24

Д. С. Малышев

Полная классификация сложности задачи о вершинной 3-раскраске для четверок порожденных 5-вершинных запретов . 38

С. И. Митрохин

Асимптотика спектра дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией 48

А. И. Морозов, О. В. Починка

Комбинаторный инвариант для поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой 71

К. Ж. Назарова, Б. Х. Турметов, К. И. Усманов

Об одной нелокальной краевой задаче с наклонной производной 81

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Р. В. Жалнин, Н. А. Кузьмин, В. Ф. Масягин	
Разработка параллельного алгоритма на основе неявной схемы для метода Галёркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений диффузионного типа	94
<hr/>	
Правила оформления рукописей (на рус. яз.)	107
Правила оформления рукописей (на англ. яз.)	111
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.)	115
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.)	121
<hr/>	
Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.)	126
Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.)	127
<hr/>	

Contents

MATHEMATICS

M. M. Babayev

On the solvability of a mixed problem for a fractional partial differential equation with delayed time argument and Laplace operators with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes . . . 13

V. A. Gorskaya, G. M. Polotovskiy

On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane 24

D.S. Malyshev

A complete classification of the complexity for the vertex 3-colourability problem for quadruples of induced 5-vertex prohibitions 38

S. I. Mitrokhin

Asymptotics of the spectrum of even-order differential operators with discontinuos weight functions 48

A.I. Morozov, O.V. Pochinka

Combinatorial invariant of Morse-Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic 71

K. Zh. Nazarova, B. Kh. Turmetov, K. I. Usmanov

On a nonlocal boundary value problem with an oblique derivative 81

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

R. V. Zhalnin, N. A. Kuzmin, V. F. Masyagin	
Development of a parallel algorithm based on an implicit scheme for the discontinuous Galerkin method for solving diffusion type equations	94
<hr/>	
The rules of article design (in Russian)	107
The rules of article design (in English)	111
The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian)	115
The rules for article layout in the LaTeX system (in English)	121
<hr/>	
Author Index (In Russian)	126
Author Index (in English)	127
<hr/>	

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.22.202001.13-23

УДК 517.984.5

О разрешимости смешанной задачи для уравнения с частными производными дробного порядка с запаздывающим аргументом по времени и операторами Лапласа с нелокальными краевыми условиями в классах Соболева

© М. М. Бабаев¹

Аннотация. В данной работе изучена задача с начальными функциями и граничными условиями для дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных с запаздывающим аргументом по времени, с операторами Лапласа с пространственными переменными и нелокальными граничными условиями в классах Соболева. Решения начально-граничной задачи построено в виде суммы ряда по системе собственных функций многомерной спектральной задачи. У спектральной задачи найдены собственные значения и построена соответствующая система собственных функций. Показано, что эта система собственных функций является полной и образует базис Рисса в подпространствах Соболева. На основании полноты системы собственных функций доказана теорема единственности решения задачи. В подпространствах Соболева доказано существование регулярного решения поставленной начально-граничной задачи.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение в частных производных с запаздывающим аргументом, дробная производная по времени, начально-граничная задача, спектральный метод, собственные значения, собственные функции, полнота, базис Рисса, единственность, существование, ряд, нелокальные краевые условия, класс Соболева, производная дробного порядка, смешанная задача

1. Постановка задачи

Известно, что в физике твердого тела изучаются т. н. фрактальные среды, в частности, явления диффузии в них. В одной из моделей диффузия в сильно пористой среде описывается уравнением типа уравнения теплопроводности, но с дробной производной по временной координате с запаздывающим аргументом. Многие задачи о колебаниях балок и пластин, которые имеют большое значение в строительной механике, приводят к дифференциальным уравнениям [1, с. 141–143], [2, с. 278–280], [3–5].

Отметим также, что к уравнению колебаний балки приходят во многих задачах при расчёте устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [4–7].

¹Бабаев Махкамбек Мадаминович, докторант кафедры дифференциальных уравнений и математической физики, Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека (100174, Узбекистан, г. Ташкент, ул. Университетская, д. 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1799-0413>, babayevm@mail.ru

В данной работе рассматривается дифференциальное уравнение с дробной производной вида

$$D_{0t}^{\alpha} u(x, t) = a^2 \Delta u(x, t) + b^2 \Delta u(x, t - \tau) + f(x, t), (x, t) \in \Pi \times (0, T), l - 1 < \alpha \leq l \quad (1.1)$$

с начальными функциями

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-k} u(x, t) |_{t=+0} = \varphi_k(x), x = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) \in \Pi, \quad k = 1, 2, \dots, l - 1, \\ D_{0t}^{\alpha-l} u(x, t) = \varphi_l(x, t), (x, t) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) \in \Pi \times (-\tau, 0), \end{cases} \quad (1.2)$$

и краевыми условиями

$$\begin{cases} \alpha_j \cdot u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) |_{x_j=0} + \beta_j \cdot u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) |_{x_j=\pi} = 0, & 1 \leq j \leq p, \\ \beta_j \cdot \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} |_{x_j=0} + \alpha_j \cdot \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} |_{x_j=\pi} = 0, & 1 \leq j \leq p, \\ u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) |_{x_j=0} = u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) |_{x_j=\pi}, & p + 1 \leq j \leq q, \\ \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} |_{x_j=0} = \frac{\partial u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t)}{\partial x_j} |_{x_j=\pi}, & p + 1 \leq j \leq q, \\ u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) |_{x_j=0} = 0, & q + 1 \leq j \leq N, \\ u(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) |_{x_j=\pi} = 0, & q + 1 \leq j \leq N, \\ 1 \leq p \leq q \leq N, \end{cases} \quad (1.3)$$

где $a, b, \tau, T > 0$ – постоянные; $l \in \mathbb{N}$; $(x, t) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) \in \Pi \times (0, T)$; $\Pi = (0, \pi) \times \dots \times (0, \pi)$; $\alpha_j = \text{const}$; $\beta_j = \text{const}$; $|\alpha_j| \neq |\beta_j|$, $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$ при $1 \leq j \leq p$ и функции $\{v_n(x), n \in \mathbb{Z}^N\}$ образуют систему собственных функций спектральной задачи:

$$\Delta v(x) + \mu v(x) = 0, \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} \alpha_j \cdot v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=0} + \beta_j \cdot v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=\pi} = 0, & 1 \leq j \leq p, \\ \beta_j \cdot \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} |_{x_j=0} + \alpha_j \cdot \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} |_{x_j=\pi} = 0, & 1 \leq j \leq p, \\ v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=0} = v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=\pi}, & p + 1 \leq j \leq q, \\ \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} |_{x_j=0} = \frac{\partial v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N)}{\partial x_j} |_{x_j=\pi}, & p + 1 \leq j \leq q, \\ v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=0} = 0, & q + 1 \leq j \leq N, \\ v(x_1, \dots, x_j, \dots, x_N) |_{x_j=\pi} = 0, & q + 1 \leq j \leq N, \\ 1 \leq p \leq q \leq N. \end{cases} \quad (1.5)$$

Здесь при $\alpha < 0$ дробная интеграл D^{α} имеет вид

$$D_{at}^{\alpha} u(x, t) = \frac{\text{sign}(t-a)}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t \frac{u(x, \tau) \cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha+1}},$$

при $\alpha = 0$ – $D_{at}^{\alpha} u(x, t) = u(x, t)$, а при $l - 1 < \alpha \leq l, l \in \mathbb{N}$, –

$$D_{at}^{\alpha} u(x, t) = \text{sign}^l(t-a) \frac{d^l}{dt^l} D_{at}^{\alpha-l} u(x, t) =$$

$$= \frac{\text{sign}^{l+1}(t-a)}{\Gamma(l-\alpha)} \frac{d^l}{dt^l} \int_a^t \frac{u(x, \tau) \cdot d\tau}{|t-\tau|^{\alpha-l+1}}.$$

Введем пространство $W_2^s(0, l)$ с нормой

$$\|f\|_{W_2^s(0, l)}^2 = \|f\|_{L_2(0, l)}^2 + \|D^s f\|_{L_2(0, l)}^2,$$

где s – произвольное натуральное число, при этом $W_2^0(0, l) = L_2(0, l)$.

Скалярное произведение в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ вводится следующим образом:

$$\begin{aligned} (f(x), g(x))_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)} &= (f(x), g(x))_{L_2(\Pi)} + \\ &+ \sum_{j_1=1}^N (D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} f(x), D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} g(x))_{L_2(\Pi)} + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N} (D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} f(x), D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} g(x))_{L_2(\Pi)} + \dots \\ &\dots + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_N \leq N} (D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} \dots D_{x_{j_N}}^{s_{j_N}} f(x), D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} \dots D_{x_{j_N}}^{s_{j_N}} g(x))_{L_2(\Pi)}. \end{aligned}$$

Соответственно норма в пространстве $W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ записывается как

$$\begin{aligned} \|f(x)\|_{W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 &= \|f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \sum_{j_1=1}^N \|D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \\ &+ \sum_{1 \leq j_1 < j_2 \leq N} \|D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2 + \dots + \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_N \leq N} \|D_{x_{j_1}}^{s_{j_1}} D_{x_{j_2}}^{s_{j_2}} \dots D_{x_{j_N}}^{s_{j_N}} f(x)\|_{L_2(\Pi)}^2. \end{aligned}$$

2. Полнота системы собственных функций в подпространствах Соболева

Обозначим через $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ множество всех функций $f(x) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$, удовлетворяющих граничным условиям (1.5).

Справедливо следующая

Т е о р е м а 2.1 Пусть $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, $|\alpha_j| \neq |\beta_j|$ – действительные числа при каждом $1 \leq j \leq p$ и

$$\rho = \max_{1 \leq j \leq p} \sqrt{\theta_j^2 + 2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j + 1)^{s_j} - 1\right)^2} \cdot \sigma(s_j) < 1,$$

где $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j) = 1$, при $s_j > 0$, $\theta_j = \sqrt{2} \cdot \max_{x \in [0, \pi]} |e^{i\varphi_j x} - 1|$, $\lambda_{m_j} = 2m_j + \varphi_j$, $\varphi_j = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$. Тогда система собственных функций

$$\begin{aligned} &\{v_{m_1 \dots m_N}(x_1, \dots, x_N)\}_{(m_1, \dots, m_p) \in Z^p \times (m_{p+1}, \dots, m_q) \in Z^{q-p} \times (m_{q+1}, \dots, m_N) \in N^{N-q}} = \\ &= \left\{ \prod_{j=1}^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\beta_j \cos \lambda_{m_j} x_j + \text{sign}(\beta_j^2 - \alpha_j^2) \cdot \alpha_j \sin \lambda_{m_j} x_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \cdot \sqrt{1 + |\lambda_{m_j}|^{2s_j}}} \right\}_{(m_1, \dots, m_p) \in Z^p \times} \end{aligned}$$

$$\times \left\{ \prod_{j=p+1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+|2m_j|^{2s_j}}} \exp(i2m_j x_j) \right\}_{(m_{p+1}, \dots, m_q) \in Z^{q-p} \times} \\ \times \left\{ \prod_{j=q+1}^N \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+|m_j|^{2s_j}}} \sin(m_j x_j) \right\}_{(m_{q+1}, \dots, m_N) \in N^{N-q}},$$

спектральной задачи (1.4)–(1.5) образует полную ортонормированную систему в классах Соболева $W_2^{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}$ (II).

Т е о р е м а 2.2 Пусть $\alpha_j \neq 0$, $\beta_j \neq 0$, $|\alpha_j| \neq |\beta_j|$ – действительные числа при каждом $1 \leq j \leq p$ и

$$\rho = \max_{1 \leq j \leq p} \sqrt{\theta_j^2 + 2\left(\frac{\theta_j}{\sqrt{2}} + (\varphi_j + 1)^{s_j} - 1\right)^2 \cdot \sigma(s_j)} < 1,$$

где $\sigma(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sigma(s_j) = 1$, при $s_j > 0$, $\theta_j = \sqrt{2} \cdot \max_{x \in [0, \pi]} |e^{i\varphi_j x} - 1|$, $\lambda_{m_j} = 2m_j + \varphi_j$, $\varphi_j = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{-2\alpha_j \beta_j}{\alpha_j^2 + \beta_j^2}$, $s_j > k + \frac{N}{2}$, $k \geq 0$, $k \in Z$. Тогда ряд Фурье функции $f(x) \in W_2^{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}$ (II) по ортонормированным собственным функциям

$$\{v_{m_1 \dots m_N}(x_1, \dots, x_N)\}_{(m_1, \dots, m_p) \in Z^p \times (m_{p+1}, \dots, m_q) \in Z^{q-p} \times (m_{q+1}, \dots, m_N) \in N^{N-q}} = \\ = \left\{ \prod_{j=1}^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\beta_j \cos \lambda_{m_j} x_j + \text{sign}(\beta_j^2 - \alpha_j^2) \cdot \alpha_j \sin \lambda_{m_j} x_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2} \cdot \sqrt{1+|\lambda_{m_j}|^{2s_j}}} \right\}_{(m_1, \dots, m_p) \in Z^p \times} \\ \times \left\{ \prod_{j=p+1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+|2m_j|^{2s_j}}} \exp(i2m_j x_j) \right\}_{(m_{p+1}, \dots, m_q) \in Z^{q-p} \times} \\ \times \left\{ \prod_{j=q+1}^N \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1+|m_j|^{2s_j}}} \sin(m_j x_j) \right\}_{(m_{q+1}, \dots, m_N) \in N^{N-q}}$$

спектральной задачи (1.4)–(1.5) сходится по норме пространства $C^k(\Pi)$ к функции $f(x)$.

Доказательство теорем 2.1 и 2.2 можно найти в работе [8].

3. Существование и единственность решения начально-граничной задачи

Регулярным решением уравнения (1.1) в области $Q = \Pi \times (0, T)$, $T > 0$ назовем функцию $u(x, t)$ из класса $u(x, t) \in C(\overline{Q})$, $D_{0t}^{\alpha-i} u(x, t) \in C(\overline{Q})$, $i = 1, 2, \dots, p$, $D_{0t}^{\alpha} u(x, t) \in C(Q)$, $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x_j} \in C(\overline{Q})$, $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x_j^2} \in C(Q)$, $j = 1, 2, \dots, N$, и удовлетворяющую уравнению (1.1) во всех точках $(x, t) \in Q$.

Обозначим через $W_2^{\circ s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ множество всех функций $u(x, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$, удовлетворяющих граничным условиям (1.3).

Функцию $u(x, t)$ назовем регулярным решением задачи (1.1)–(1.3) в области $Q = \Pi \times (0, T)$, если функция $u(x, t)$ регулярное решение уравнения (1.1) в области $Q = \Pi \times (0, T)$ и удовлетворяет начальным функциям и граничным условиям (1.2) – (1.3).

Пусть функция $u(x, t) \in W_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N = 2 + \frac{N}{2}$, $\theta = -[\alpha]$ удовлетворяет уравнению (1.1) во всех точках $(x, t) \in Q$, а также начальным и граничным условиям (1.2) – (1.3). Тогда функция $u(x, t)$ является регулярным решением задачи (1.1)–(1.3) в области $Q = \Pi \times (0, T)$.

Введем функции

$$T_{m_1 \dots m_N}(t) = \int_{\Pi} u(y, t) \tilde{v}_{m_1 \dots m_N}(y) dy, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{m_1 \dots m_N}(x_1, \dots, x_N) = & \prod_{j=1}^p \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{\beta_j \cos \lambda_{m_j} x_j + \text{sign}(\beta_j^2 - \alpha_j^2) \cdot \alpha_j \sin \lambda_{m_j} x_j}{\sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}} \times \\ & \times \prod_{j=p+1}^q \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(i 2 m_j x_j) \prod_{j=q+1}^N \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(m_j x_j) \end{aligned} \quad (3.2)$$

при $(m_1, \dots, m_p) \in Z^p$, $(m_{p+1}, \dots, m_q) \in Z^{q-p}$, $(m_{q+1}, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^{N-q}$.

В силу (1.1)–(1.3) неизвестные функции $T_{m_1 \dots m_N}(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$D_{0t}^{\alpha} T_{m_1 \dots m_N}(t) + \mu_{m_1 \dots m_N} (a^2 T_{m_1 \dots m_N}(t) + b^2 T_{m_1 \dots m_N}(t - \tau)) = f_{m_1 \dots m_N}(t) \quad (3.3)$$

и начальным функциям

$$\begin{cases} D_{0t}^{\alpha-i} T_{m_1 \dots m_N}(t) |_{t=0} = \varphi_{i, m_1 \dots m_N}, & i = 1, 2, \dots, l-1, \\ D_{0t}^{\alpha-l} u(x, t) = \varphi_l(x, t), & (x, t) = (x_1, \dots, x_j, \dots, x_N, t) \in \Pi \times (-\tau, 0), \end{cases}$$

где

$$f_{m_1 \dots m_N}(t) = \int_{\Pi} f(y, t) \tilde{v}_{m_1 \dots m_N}(y) dy, \quad \varphi_{j, m_1 \dots m_N} = \int_{\Pi} \varphi_j(y) \tilde{v}_{m_1 \dots m_N}(y) dy.$$

Следовательно, применяя метод шагов (см., например, [4]), получим:

$$D_{0t}^{\alpha} T_{m_1 \dots m_N}(t) + \mu_{m_1 \dots m_N} a^2 T_{m_1 \dots m_N}(t) = f_{m_1 \dots m_N}(t) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1 \dots m_N}(t) \quad (3.4)$$

при $0 \leq t \leq \tau$ и начальных условиях

$$D_{0t}^{\alpha-i} T_{m_1 \dots m_N}(t) |_{t=0} = \varphi_{i, m_1 \dots m_N}, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (3.5)$$

Решение задачи Коши (3.4)–(3.5) известно (см., например, [6, с. 16–17], [7]) и оно имеет вид

$$\begin{aligned} {}_1 T_{m_1 \dots m_N}(t) = & \sum_{j=1}^l \varphi_{j, m_1 \dots m_N} t^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot t^{\alpha}) + \\ & + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}[-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}] \times \\ & \times [f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1 \dots m_N}(\xi)] d\xi \end{aligned} \quad (3.6)$$

при $0 \leq t \leq \tau$, где

$$\mu_{m_1 \dots m_N} = \sum_{j=1}^N \lambda_{m_j}^2 = \sum_{j=1}^p (2m_j + \varphi_j)^2 + \sum_{j=p+1}^q (2m_j)^2 + \sum_{j=q+1}^N (m_j)^2,$$

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{z^q}{\Gamma(\alpha q + \beta)}.$$

Далее для отрезка $\tau \leq t \leq 2\tau$ из уравнения (3.3) получим:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha} T_{m_1 \dots m_N}(t) + \mu_{m_1 \dots m_N} a^2 T_{m_1 \dots m_N}(t) = \\ = f_{m_1 \dots m_N}(t) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_1 T_{m_1 \dots m_N}(t - \tau). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из решения (3.6) получим начальные условия вида

$$D_{0t}^{\alpha-i} T_{m_1 \dots m_N}(t) |_{t=\tau} = {}_1 T_{i, m_1 \dots m_N}, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (3.8)$$

Решение задачи Коши (3.7)–(3.8) также известно и имеет вид

$$\begin{aligned} {}_2 T_{m_1 \dots m_N}(t) = \sum_{j=1}^l \varphi_{j, m_1 \dots m_N}(t - \tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot (t - \tau)^{\alpha}) + \\ + \int_{\tau}^t (t - \xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}[-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 (t - \xi)^{\alpha}] \times \\ \times [f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_1 T_{m_1 \dots m_N}(\xi - \tau)] d\xi \end{aligned} \quad (3.9)$$

при $\tau \leq t \leq 2\tau$.

Далее, применяя метод шагов для каждого отрезка $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ из уравнения (3.3), получим:

$$\begin{aligned} D_{0t}^{\alpha} T_{m_1 \dots m_N}(t) + \mu_{m_1 \dots m_N} a^2 T_{m_1 \dots m_N}(t) = \\ = f_{m_1 \dots m_N}(t) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_n T_{m_1 \dots m_N}(t - n\tau). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Соответствующие начальные условия имеют вид

$$D_{0t}^{\alpha-i} T_{m_1 \dots m_N}(t) |_{t=n\tau} = {}_n T_{i, m_1 \dots m_N}, \quad i = 1, 2, \dots, l. \quad (3.11)$$

Решая задачу Коши (3.10)–(3.11), получим:

$$\begin{aligned} (n+1) T_{m_1 \dots m_N}(t) = \sum_{j=1}^l \varphi_{j, m_1 \dots m_N}(t - n\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot (t - n\tau)^{\alpha}) + \\ + \int_{n\tau}^t (t - \xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}[-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 (t - \xi)^{\alpha}] \times \\ \times [f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_n T_{m_1 \dots m_N}(\xi - n\tau)] d\xi \end{aligned} \quad (3.12)$$

при $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$.

Поскольку функции (3.1) при каждом отрезке $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ построены в явном виде с помощью формул (3.6), (3.9), (3.12), на основании полноты системы собственных функций (3.2) в $L_2(\Pi)$ нетрудно доказать единственность решения задачи (1.1)–(1.3). Пусть $f(x, t) \equiv 0$ и $\varphi_i(x) \equiv 0$, $i = 1, \bar{l}$.

Тогда из формул (3.6), (3.9), (3.12) и (3.1) следует, что

$$\int_{\Pi} u(y, t) \tilde{v}_{m_1 \dots m_N}(y) dy = 0$$

при всех $m_1, \dots, m_N \in \mathbb{N}$ и любом $t \in [0, T]$. Отсюда в силу полноты системы собственных функций (3.2) в $L_2(\Pi)$ вытекает, что $u(x, t) = 0$ почти всюду в области Π при любом $t \in [0, T]$. Как известно, по теореме вложения Соболева функция $u(x, t)$ непрерывна на \overline{Q} , то $u(x, t) \equiv 0$ в \overline{Q} . Это доказывает единственность решения задачи (1.1)–(1.3).

При каждом $t > 0$ функция $u(x, t) \in W_2^{\circ s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ по переменной x является функцией из класса $W_2^{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$. Поэтому рассматривая $t > 0$ как параметр, решение задачи (1.1)–(1.3) будем искать из класса $W_2^{\circ s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ в виде суммы ряда по системе собственных функций (3.2) спектральной задачи (1.4)–(1.5):

$$u(x, t) = \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} T_{m_1 \dots m_N}(t) \cdot \tilde{v}_{m_1 \dots m_N}(x), \quad (3.13)$$

где $\tilde{v}_{m_1 \dots m_N}(x)$ определяется по формуле (3.2), а $T_{m_1 \dots m_N}(t)$ – по формулам (3.6), (3.9) и (3.12).

После подстановки (3.6) в (3.13) получим единственное решение задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^l \varphi_{j, m_1 \dots m_N} t^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot t^{\alpha}) + \right. \\ & \left. + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}[-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}] \right. \\ & \left. \left[f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1 \dots m_N}(\xi) \right] d\xi \right] \times \\ & \times \tilde{v}_{m_1 \dots m_N}(x_1, \dots, x_N) \end{aligned} \quad (3.14)$$

при $0 \leq t \leq \tau$. Аналогично, после подстановки (3.9) в (3.13) получим в отрезке $\tau \leq t \leq 2\tau$ единственное решение задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^l \varphi_{j, m_1 \dots m_N} (t-\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot (t-\tau)^{\alpha}) + \right. \\ & \left. + \int_{\tau}^t (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}[-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}] \right. \\ & \left. [f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_1T_{m_1 \dots m_N}(\xi - \tau)] d\xi \right] \times \\ & \times \tilde{v}_{m_1 \dots m_N}(x_1, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Следовательно, после подстановки (3.12) в (3.13) получим в отрезке $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$ единственное решение задачи (1.1)–(1.3) в виде ряда

$$\begin{aligned} u(x, t) = & \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left[\sum_{j=1}^l \varphi_{j, m_1 \dots m_N} (t-n\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot (t-n\tau)^{\alpha}) + \right. \\ & \left. + \int_{n\tau}^t (t-\xi)^{\alpha-1} \cdot E_{\alpha, \alpha}[-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}] \times \right. \\ & \left. \times [f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_nT_{m_1 \dots m_N}(\xi - n\tau)] d\xi \right] \times \\ & \times \tilde{v}_{m_1 \dots m_N}(x_1, \dots, x_N). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Поскольку система собственных функций (3.2) спектральной задачи (1.4)–(1.5) образует базис Рисса в пространстве Соболева $H_{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$, то любая функция из этого класса может быть разложена единственным образом в ряд Фурье, сходящийся по норме пространства $H_{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$. Поэтому ряды (3.14)–(3.16) сходятся в $H_{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ в отрезках $t \in [0, \tau]$, $t \in [\tau, 2\tau]$ и $t \in [n\tau, (n+1)\tau]$ соответственно. Выясним условия существования решения из класса $W_2^{\circ s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$. Согласно теореме 2.1, система собственных функций (3.2) спектральной задачи (1.4)–(1.5) образует базис Рисса в пространствах Соболева $H_{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$ и $W_2^{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)$. Поэтому справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \|u(x, t)\|_{C^{2,2,\dots,2}(\Pi)}^2 \leq c_8 \|u(x, t)\|_{H_{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 \leq \\ & \leq c_9 \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^l \varphi_{j, m_1 \dots m_N} t^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot t^{\alpha}) + \right. \\ & \quad \left. + \int_0^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}] \times \right. \\ & \quad \times \left[f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1 \dots m_N}(\xi) \right] d\xi \Big|^2 \times \\ & \quad \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty \end{aligned} \quad (3.17)$$

при $0 \leq t \leq \tau$. Далее

$$\begin{aligned} & \|u(x, t)\|_{C^{2,2,\dots,2}(\Pi)}^2 \leq c_8 \|u(x, t)\|_{H_{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 \leq \\ & \leq c_9 \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^l \varphi_{j, m_1 \dots m_N} (t-\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot (t-\tau)^{\alpha}) + \right. \\ & \quad \left. + \int_{\tau}^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}] \times \right. \\ & \quad \times \left[f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_1T_{m_1 \dots m_N}(\xi - \tau) \right] d\xi \Big|^2 \times \\ & \quad \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty \end{aligned} \quad (3.18)$$

при $\tau \leq t \leq 2\tau$. Следовательно,

$$\begin{aligned} & \|u(x, t)\|_{C^{2,2,\dots,2}(\Pi)}^2 \leq c_8 \|u(x, t)\|_{H_{\circ s_1, s_2, \dots, s_N}^{s_1, s_2, \dots, s_N}(\Pi)}^2 \leq \\ & \leq c_9 \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^l \varphi_{j, m_1 \dots m_N} (t-n\tau)^{\alpha-j} E_{\alpha, \alpha-j+1}(-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 \cdot (t-n\tau)^{\alpha}) + \right. \\ & \quad \left. + \int_{n\tau}^t (t-\xi)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}[-\mu_{m_1 \dots m_N} a^2 (t-\xi)^{\alpha}] \times \right. \\ & \quad \times \left[f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_nT_{m_1 \dots m_N}(\xi - n\tau) \right] d\xi \Big|^2 \times \\ & \quad \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty \end{aligned} \quad (3.19)$$

при $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$.

По теореме вложения Соболева условия (3.17)–(3.19) являются достаточными условиями существования регулярного решения задачи (1.1)–(1.3) из класса $W_2^{\circ s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N = 2 + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$.

Если $0 < \alpha < 2$, то с учетом оценки функции Миттаг-Леффлера (см., например [7, с. 35])

$$|E_{\alpha, \alpha-j+1}(\mu_{m_1 \dots m_N} t^\alpha)| \leq \frac{C}{1 + |\mu_{m_1 \dots m_N} t^\alpha|},$$

$$|E_{\alpha, \alpha}(\mu_{m_1 \dots m_N} (t - \tau)^\alpha)| \leq \frac{C}{1 + |\mu_{m_1 \dots m_N} (t - \tau)^\alpha|}$$

можно упростить достаточные условия (3.17), (3.18) и (3.19) существования регулярного решения задачи (1.1) – (1.3) из класса $W_2^{\circ s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N = 2 + \frac{N}{2}$, $\theta = -[-\alpha]$.

Если для любого $j = 1, 2, \dots, l$ и $0 \leq t \leq \tau$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} |\varphi_{j, m_1 \dots m_N}|^2 \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} \left| f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1 \dots m_N}(\xi) \right| d\xi \right|^2 \times \\ \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty,$$

то условие (3.17) будет выполнено.

Далее, если для любого $j = 1, 2, \dots, l$ и $\tau \leq t \leq 2\tau$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} |\varphi_{j, m_1 \dots m_N}|^2 \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} \left| f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1 \dots m_N}(\xi) \right| d\xi \right|^2 \times \\ \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \int_{\tau}^t (t - \xi)^{\alpha-1} \left| f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_1T_{m_1 \dots m_N}(\xi - \tau) \right| d\xi \right|^2 \times \\ \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty,$$

то условие (3.18) будет выполнено при $\tau \leq t \leq 2\tau$.

Следовательно, если для любого $j = 1, 2, \dots, l$ и $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} |\varphi_{j, m_1 \dots m_N}|^2 \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty,$$

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} \left| f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 (D_{0t}^{l-\alpha} \varphi_l)_{m_1 \dots m_N}(\xi) \right| d\xi \right|^2 \times \\ \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty,$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \int_{\tau}^t (t-\xi)^{\alpha-1} |f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_1T_{m_1 \dots m_N}(\xi - \tau)| d\xi \right|^2 \times \\
& \quad \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty, \\
& \dots\dots\dots, \\
& \sum_{m_1=1}^{\infty} \dots \sum_{m_N=1}^{\infty} \left| \int_{n\tau}^t (t-\xi)^{\alpha-1} |f_{m_1 \dots m_N}(\xi) - \mu_{m_1 \dots m_N} b^2 \cdot {}_nT_{m_1 \dots m_N}(\xi - n\tau)| d\xi \right|^2 \times \\
& \quad \times \prod_{k=1}^N (1 + \lambda_{m_k}^{2s_k}) < \infty,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

то условие (3.19) будет выполнено.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 3.1 Пусть начальные функции $\varphi_i(x), i = 1, 2, \dots, l$, и правая часть $f(x, t)$ удовлетворяют условию (3.20) при каждом $n\tau \leq t \leq (n+1)\tau, n = 0, 1, 2, \dots, [\frac{T}{\tau}]$.

Тогда регулярное решение задачи (1.1)–(1.3) из класса $\overset{\circ}{W}_2^{s_1, s_2, \dots, s_N; \theta}(Q)$ с показателем $s_1 = s_2 = \dots = s_N = 2 + \frac{N}{2}, \theta = -[-\alpha]$ существует, единственно и представимо в виде ряда (3.14)–(3.16), где коэффициенты определяется по формулам (3.6), (3.9) и (3.12).

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РУЗФИ (проект № ОТ-Ф4-(32+36)).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. 3-е изд. М.: Наука, 1977. 736 с.
2. Рэлей Л. Теория звука. 2-е изд. М.: 1955. Т. 1. 504 с.
3. Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. М.: Машиностроение, 1985. 472 с.
4. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
5. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
6. Псху А. В. Уравнения в частных производных дробного порядка. М.: Наука, 2005. 200 с.
7. Podlubny I. Fractional differential equations. Academic Press, Vol. 198. 1998. pp. 340.
8. Kasimov Sh. G., Ataev Sh. K. On solvability of the mixed problem for a partial equation of a fractional order with Laplace operators and nonlocal boundary conditions in the Sobolev classes. // Uzbek Mathematical Journal. 2018. No. 1, pp. 73–89.

Поступила 3.12.2019

MSC2020 35K20, 35K51, 35K58

On the solvability of a mixed problem for a fractional partial differential equation with delayed time argument and Laplace operators with nonlocal boundary conditions in Sobolev classes

© M. M. Babayev¹

Abstract. In this paper, we study a problem with initial functions and boundary conditions for partial differential equations of fractional order with Laplace operators. The boundary conditions of the problem are nonlocal, and the solution is supposed to belong to one of Sobolev classes. The solution of the initial boundary value problem is constructed as the sum of a series of multidimensional spectral problem's eigenfunctions. The eigenvalues of the spectral problem are found and the corresponding system of eigenfunctions is constructed. It is shown that this system is complete and forms a Riesz basis in the subspaces of Sobolev spaces. Basing on the completeness of the eigenfunctions' system, the uniqueness theorem for the solution of the problem is proved. The existence of a regular solution of the initial boundary value problem is proved in Sobolev subspaces.

Key Words: partial differential equation with delayed argument, fractional time derivative, initial boundary value problem, spectral method, eigenvalues, eigenfunctions, completeness, Riess basis, uniqueness, existence, series, nonlocal boundary conditions, Sobolev class, fractional derivative, mixed problem

REFERENCES

1. A. N. Tikhonov, A. A. Samarskiy, *Equations of Mathematical Physics 3th ed.*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russ.).
2. L. Raleigh, *Sound Theory*, **1**, 1955.
3. S.P. Tymoshenko, D.H. Yang, U. Weaver, *Fluctuations in engineering*, Mashinostroenie Publ., Moscow, 1985 (In Russ.), 472 p.
4. L. E. Elsholz, S. B. Norkin, "Introduction to the theory of differential equations with a deviating argument", [*Applied Mathematics and Mechanics*], 1971, 296 (In Russ.).
5. M. A. Nimark, *Linear differential operators*, Nauka, Moscow, 1969 (In Russ.).
6. A. V. Pskhu, *Equations in private derivatives fractional order*, Nauka, Moscow, 2005 (In Russ.), 200 p.
7. I. Podlubny, *Academic Press*, 1998, 340 p.
8. S.G. Kasimov, S.K. Atayev, "On the determination of the mixed task for the equation with private derivatives of fractional order with the operators of Laplace with non-local boundary conditions in Sobolev class", *Uzbek Mathematical Journal*, **1** (2018), 1–16.

Submitted 3.12.2019

¹**Mahkambek M. Babayev**, Doctoral Student, Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek, (4 Universitetskaya St., Tashkent 100174, Uzbekistan), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1799-0413>, babayevm@mail.ru

УДК 512.772, 515.165.4

О расположениях кубики и пары коник в вещественной проективной плоскости

© В. А. Горская¹, Г. М. Полотовский²

Аннотация. В первой части 16-й проблемы Гильберта поставлен вопрос о топологии неособых проективных алгебраических кривых и поверхностей. К этой проблематике относится задача о топологии алгебраических многообразий с особенностями. Частный случай задачи – изучение кривых, распадающихся в произведение кривых, находящихся в общем положении. В статье рассматривается задача топологической классификации взаимных расположений в вещественной проективной плоскости неособой кривой степени 3 и двух неособых кривых степени 2 при условиях общего положения и максимальной взаимности расположения этих кривых, в частности при максимальном числе общих точек каждой пары кривых-сомножителей. Доказано, что классификация содержит не более шести конкретных типов расположений изучаемого вида, из которых четыре построены, а вопрос о реализуемости двух оставшихся открыт.

Ключевые слова: неособые плоские вещественные алгебраические кривые, 16-я проблема Гильберта, кривые с особенностями, распадающиеся кривые, топологическая классификация

1. Введение и постановка задачи

Исследование топологии распадающихся плоских вещественных алгебраических кривых входит в круг вопросов, относящихся к первой части 16-й проблемы Гильберта. Для первого нетривиального случая (кривые степени 6, распадающиеся в произведение двух M -кривых, пересекающихся без касаний в максимально возможном числе вещественных точек) эта задача была поставлена Д. А. Гудковым в предисловии к книге [1] и решена Г. М. Полотовским в [2]. В настоящее время после длинной серии работ нескольких авторов (точные ссылки можно найти в статье [3]) почти завершено решение аналогичной задачи о кривых степени 7. Кроме этого, в работе [4] была найдена топологическая классификация кривых степени 6, распадающихся в произведение любого возможного числа неприводимых сомножителей в общем положении, а в [5–7] – классификация взаимных расположений M -квинтики и пары прямых. Настоящая работа посвящена аналогичному вопросу для случая, когда неприводимые сомножители кривой степени 7 имеют степени 3, 2 и 2.

Напомним некоторые сведения из теории плоских алгебраических кривых.

О п р е д е л е н и е 1.1 *Плоской вещественной проективной алгебраической кривой C_m степени m называется однородный многочлен $C_m(x_0, x_1, x_2)$ степени m с вещественными коэффициентами от трёх переменных x_0, x_1, x_2 , рассматриваемый с точностью до ненулевого постоянного множителя.*

¹Горская Виктория Александровна, магистрант кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23); ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6898-2598>, victoriya.gorskaya@mail.ru

²Полотовский Григорий Михайлович, доцент кафедры фундаментальной математики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12), кандидат физико-математических наук; ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2503-9951>, polotovskiy@gmail.com

О п р е д е л е н и е 1.2 Множество $\mathbb{R}C_m$ ($\mathbb{C}C_m$) точек вещественной (комплексной) проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ ($\mathbb{C}P^2$) с координатами $(x_0 : x_1 : x_2)$ ($(z_0 : z_1 : z_2)$), удовлетворяющими уравнению $C_m = 0$, называется множеством вещественных (соответственно, комплексных) точек кривой C_m .

О п р е д е л е н и е 1.3 Кривая C_m называется неособой, если первые частные производные многочлена $C_m(x_0, x_1, x_2)$ по переменным x_0, x_1, x_2 не обращаются одновременно в нуль (в $\mathbb{C}P^2$).

Каждая компонента связности множества $\mathbb{R}C_m$ вещественных точек кривой C_m (коротко – вещественная ветвь кривой) в случае неособой кривой гомеоморфна окружности. Если степень кривой чётна, то каждая такая окружность называется *овалом*; каждый овал делит $\mathbb{R}P^2$ на две области: одна гомеоморфна диску, другая – листу Мёбиуса. Для данного овала область первого типа считается внутренней, а второго – внешней. Если степень кривой нечётна, то среди её вещественных ветвей имеется ровно одна, вложенная в $\mathbb{R}P^2$ односторонне; она называется *нечётной ветвью*.

Оценку числа N вещественных ветвей кривой степени m даёт классическая

Т е о р е м а 1.1 (Теорема Харнака (1876)) $N \leq (m-1)(m-2)/2 + 1$, и эта оценка точна для любого m .

О п р е д е л е н и е 1.4 Множество $\mathbb{R}C_m$, рассматриваемое с точностью до изотопии в $\mathbb{R}P^2$, называется вещественной схемой кривой C_m . Кривые с максимальным возможным по теореме Харнака числом ветвей называются M -кривыми, а их схемы – M -схемами.

Таким образом, вещественная схема M -кривой степени 3 состоит из нечётной ветви и одного овала, а вещественная схема M -кривой степени 2 представляет собой один овал.

Цель этой статьи – найти топологическую классификацию (т. е. список попарно различных вещественных схем) кривых степени 7, распадающихся на кубик и две коники, (т. е. определяемых многочленом вида $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$), предполагая выполнение следующих условий:

- (i) C_3 , C_2 и \tilde{C}_2 являются M -кривыми;
- (ii) каждые две из указанных в (i) кривых пересекаются без касания в максимальном (по теореме Безу) числе вещественных точек, т. е. $\#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2) = \#(\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 6$, $\#(\mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2) = 4$;
- (iii) $\mathbb{R}C_3 \cap \mathbb{R}C_2 \cap \mathbb{R}\tilde{C}_2 = \emptyset$, т. е. ни через какую точку не проходят все три кривые-сомножители;
- (iv) все точки пересечения кубики с кониками лежат на нечётной ветви кубики.
- (v) для каждой из коник C_2 , \tilde{C}_2 все шесть общих точек нечётной ветви кубики с коникой лежат на одной из четырёх дуг, на которые эта коника делится точками пересечения со второй коникой, причём эта дуга внешняя, т. е. лежит вне другой коники;
- (vi) точки пересечения нечётной ветви с разными кониками не перемежаются, т. е. можно так монотонно двигаться по нечётной ветви кубики, что сначала проходятся шесть точек пересечения с одной коникой, а затем – со второй³.

О п р е д е л е н и е 1.5 Назовём моделью расположения типа (i)–(vi) (в дальнейшем для краткости – моделью) набор четырёх топологических окружностей, ровно одна из которых вложена в $\mathbb{R}P^2$ односторонне и вместе с двумя из трёх

³Условия (v) и (vi) добавлены, чтобы сделать задачу более наглядной.

остальных окружностей ведёт себя с точки зрения числа и расположения общих точек так, как нечётная ветвь кубики и пара коник в условиях (ii)–(vi); четвёртая окружность не пересекается с первыми тремя.

Таким образом, поставленная выше задача состоит в изотопической классификации моделей, реализуемых как вещественные схемы некоторых кривых степени 7.

2. Перечисление допустимых моделей

Допустимыми мы называем модели, удовлетворяющие топологическим следствиям теоремы Безу, а также известным ограничениям на взаимные расположения кубики и коники и на взаимные расположения пары коник.

Ограничения на взаимные расположения M -кубики и неособой коники состоят в том, что существуют ровно три расположения, в которых нечётная ветвь кубики пересекает конику в шести вещественных точках – см. Рис. 2.1⁴ (доказательство есть в [4]).

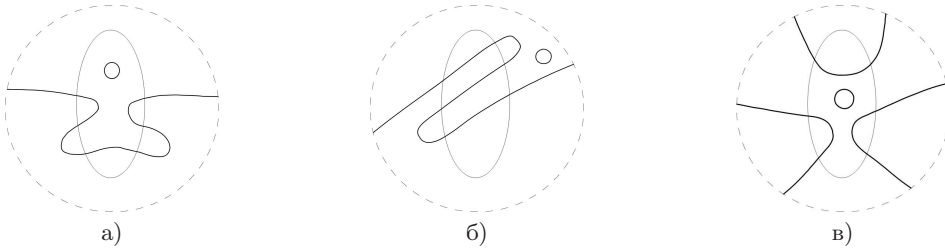


Рис. 2.1. Типы расположений M -кубики и коники.

Возможные расположения в \mathbb{RP}^2 двух неособых коник с четырьмя общими точками показаны на рис.2.2. Поскольку нельзя добавить к правому из них нечётную ветвь, удовлетворяющую условию (v), то *всюду ниже рассматривается только левое расположение* Рис. 2.2.

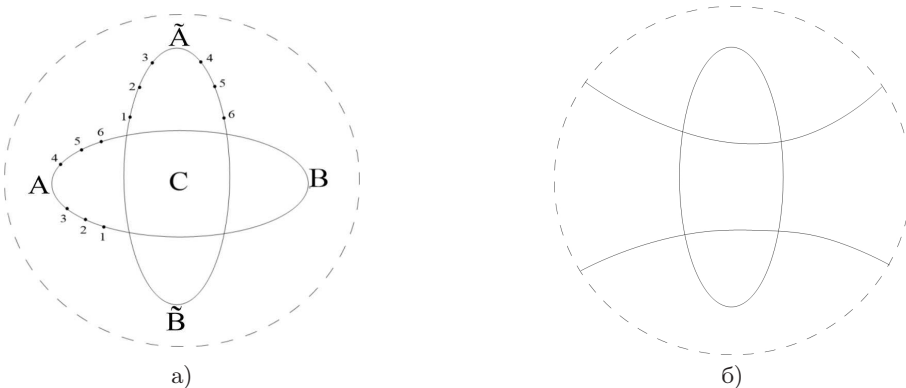


Рис. 2.2. Типы расположений двух неособых коник.

Пусть \mathbb{RC}_2 – «горизонтальный» овал на Рис. 2.2, $\mathbb{RC}_2^{\tilde{}}$ – «вертикальный», и A, \tilde{A}

⁴Здесь и даже на рисунках в качестве модели вещественной проективной плоскости используется круг, диаметрально противоположные точки граничной окружности которого, (изображаемой пунктиром) считаются отождествлёнными.

– дуги, несущие по шесть точек пересечения с нечётной ветвью кубики. Пронумеруем эти точки так, как на Рис. 2.2, и будем двигаться по нечётной ветви кубики, проходя сначала точки на дуге A , а затем – точки на дуге \tilde{A} . Записывая номера этих точек при таком движении по нечётной ветви, мы получим пару перестановок порядка 6.

Следующая лемма доказывается непосредственным перебором с учётом Рис. 2.1.

Л е м м а 2.1 *На данной дуге возможны только перестановки*

(123456), (165432), (321654), (543216) (отвечают случаю) Рис. 2.1, а);
 (123654), (165234), (321456), (345216) (отвечают случаю) Рис. 2.1, б);
 (125634), (163254) (отвечают случаю) Рис. 2.1, в),

и обратные к этим перестановкам.⁵

Л е м м а 2.2 а) случаи, когда нечётная ветвь пересекает одну из дуг A, \tilde{A} в соответствии с какой-либо перестановкой из списка леммы 2.1, а вторую – в соответствии с обратной к какой-либо перестановке из этого списка, невозможны⁶;

б) пересечения с дугами A, \tilde{A} , одновременно отвечающие перестановкам из третьей строки списка леммы 2.1 или обратным к ним, невозможны.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Отрицание утверждения а) влечёт самопересечение нечётной ветви, а отрицание утверждения б) противоречит условию (vi).

Составляя пары перестановок, допустимые леммами 2.1 и 2.2, получим $2(8 \cdot 8 + 8 \cdot 2) = 160$ случаев. Однако в силу симметрии (равноправия дуг A, \tilde{A}) не все из этих 160 случаев различны; кроме этого, как будет показано ниже, многие из них не удовлетворяют топологическим следствиям теоремы Безу при пересечении с прямой. Наконец, чтобы получить модель, каждое расположение следует дополнить четвёртой окружностью (отвечающей овалу кубики), а сделать это, как мы сейчас покажем, иногда невозможно, а иногда можно двумя способами.

Действительно, в случае Рис. 2.1, а овал кубики расположен в шестиугольной компоненте связности дополнения к объединению коники и нечётной ветви кубики внутри коники, а в случае Рис. 2.1, б) – в шестиугольной компоненте вне коники.

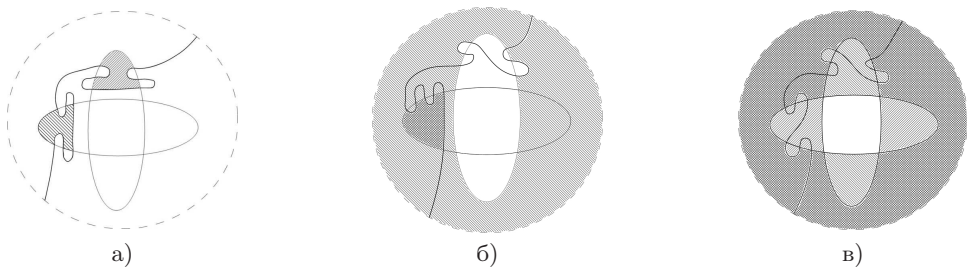


Рис. 2.3. Области для расположения овала кубики.

Если пересечение области, допустимой для овала относительно коники C_2 , с областью, допустимой для овала относительно коники \tilde{C}_2 , пусто (см. пример на Рис. 2.3,

⁵Случаи, когда нечётная ветвь кубики пересекает дугу A в порядке (123456), первоначально рассматривались в дипломной работе студентки мехмата ННГУ О. Н. Новаковской (2010 г.).

⁶Как выяснится в дальнейшем, схемы расположений, в которых нечётная ветвь пересекает обе дуги A и \tilde{A} в соответствии с обратными перестановками к перестановкам из списка леммы 2.1 (тогда эта нечётная ветвь охватывает внешние дуги B и \tilde{B} наших коник), не могут быть реализованы кривыми степени 7, но это потребует более сложного доказательства.

а), то из данного расположения модель получить невозможно. Если это пересечение состоит из одной или двух компонент связности (заштрихованы дважды на Рис. 2.3, б и Рис. 2.3 в, то получаются одна или две модели соответственно.

Запреты схем расположений кубики и двух коник, получаемые сведением к противоречию с теоремой Безу, проиллюстрируем на примерах, оформленных в виде следующих трёх лемм.

Л е м м а 2.3 *Модель, показанная на Рис. 2.4, не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени 7.*

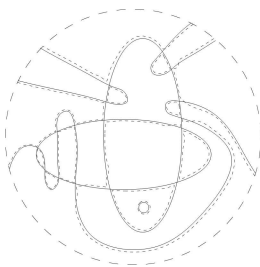


Рис. 2.4. Пример применения теоремы Брюзотти.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой степени 7. Возмутим эту кривую в классе кривых степени 7 так, чтобы после устранения её двойных точек образовалась кривая со схемой, показанной на Рис. 2.4 пунктиром, – такое возмущение найдётся в силу теоремы Брюзотти о независимости возмущений двойных точек простой кривой⁷. Схема возмущённой кривой степени 7 содержит гнездо веса три⁸ и ещё один овал, что противоречит теореме Безу⁹.

Заметим, что в других случаях применения рассуждений из доказательства этой леммы иногда получаются два гнезда веса 2, что также противоречит теореме Безу.

Л е м м а 2.4 *Модель, показанная на Рис. 2.5 а, не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени 7.*

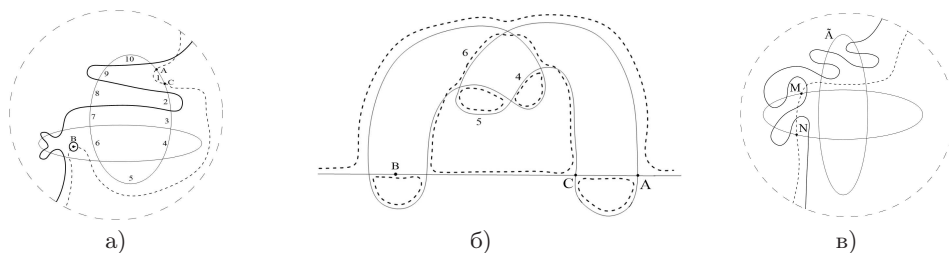


Рис. 2.5. Примеры применения теоремы Безу.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \hat{C}_2$. Пронумеруем дуги, на которые коника \hat{C}_2 делится

⁷Подробную формулировку теоремы Брюзотти см., например, в [8, с. 14]; кривая называется *простой*, если все её особенности – невырожденные двойные точки.

⁸Т. е. три последовательно вложенных друг в друга овала.

⁹Прямая, проходящая через точку, лежащую внутри самого внутреннего овала гнезда, и через точку внутри любого четвертого овала, пересечёт кривую не менее чем в девяти точках.

точками пересечения с коникой C_2 и с нечётной ветвью кубики так, как показано на Рис. 2.5а. Выберем точку A на дуге с номером 1 и точку B внутри овала кубики и посмотрим, как может проходить прямая AB , учитывая, что эта прямая не может пересекать каждую конику более чем в двух точках и нечётную ветвь кубики более чем в одной точке (поскольку в силу выбора точки B обязательно имеются две точки пересечения с овалом кубики).

Без ограничения общности считаем, что прямая AB в точке A не касается коники \tilde{C}_2 – этого всегда можно добиться малым шевелением точки A . Обозначим C вторую точку пересечения прямой AB с коникой \tilde{C}_2 и предположим, что точка C тоже лежит на дуге 1. Тогда прямая может проходить только так, как показано пунктиром на Рис. 2.5 а. Следовательно, прямая AB расположена относительно коник C_2 и \tilde{C}_2 так, как показано на Рис. 2.5 б, что невозможно: устраняя двойные точки так, как показано на Рис. 2.5 б, получим кривую степени 5, содержащую два овала внутри одного, что противоречит теореме Безу.

Аналогично доказывается невозможность расположения точки C на дугах 8–10 коники \tilde{C}_2 , а расположение точки C на любой из остальных дуг влечёт более чем однократное пересечение прямой с нечётной ветвью кубики.

Л е м м а 2.5 *Модель, показанная на Рис. 2.5 в, не может быть реализована как схема какой-либо кривой степени 7.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что эта модель реализуется как схема некоторой кривой $C_7 = C_3 \cdot C_2 \cdot \tilde{C}_2$. Выберем точки M и N так, как показано на Рис. 2.5 в. В силу теоремы Безу прямая MN может проходить только так, как показано на данном рисунке. Будем поворачивать прямую MN вокруг точки M против часовой стрелки. Тогда точка N будет двигаться против часовой стрелки по конике C_2 и в какой-то момент должна дойти до коники \tilde{C}_2 . Однако это возможно только после того, как точки пересечения прямой с дугой \tilde{A} сольются и исчезнут. При этом прямая должна будет пересечь нечётную ветвь кубики внутри коники \tilde{C}_2 , что невозможно, т. к. по крайней мере до того, как точка N дойдёт до коники \tilde{C}_2 , число точек пересечения прямой с нечётной ветвью (две из них – вблизи точки M) будет сохраняться равным трём.

С помощью приёма, описанного в доказательстве леммы 2.4, удалось запретить 15 моделей: (1R23456)(123654); (1R2345)(165234) (рассмотрена в лемме 2.4); (1236R54)(123654); (1236R54)(165234); (16R5234)(165234); (321456R)(123654); (321456R)(165234); (345216R)(165234); (345216R)(345216); (321456)(1R2*56*34); (321456)(12*56*34) \tilde{B} ; (345216)(1R2*56*34); (345216)(12*56*34) \tilde{B} ; (612543)(6L5*21*43); (654123)(6L5*21*43). Модель (123654)(16R5234) запрещается так же, как модели (123654)(1236R54), (1236R54)(123654), отвечающие рис.2.5в), в лемме 2.5.

Здесь и далее, чтобы избежать большого количества рисунков, мы применяем кодировку моделей, представляющую собой две перестановки 6-го порядка, снабжённые дополнительными символами из набора $\{R, L, B, \tilde{B}, C, *\}$. Чтобы по коду получить рисунок, нужно нарисовать «заготовку», показанную на Рис. 2.2 а, и провести нечётную ветвь, пересекающую дуги A и \tilde{A} в нумерованных точках в порядке, указанном в первой и второй перестановках соответственно, причём дуга нечётной ветви, соединяющая точки, отвечающие первым двум символам первой перестановки, расположена внутри двугрульника, ограниченного дугой A . Если между соседними (в циклическом порядке, причём скобки не замечаются) символами i и j записана буква R (L), то в области, примыкающей справа (соответственно, слева) к дуге (i, j) нечётной ветви, следует расположить овал. Если же после перестановки записана буква B (\tilde{B} , или C), то овал

следует нарисовать в двуугольнике, ограниченном дугой B (соответственно, в двуугольнике, ограниченном дугой \tilde{B} , или в четырёхугольнике внутри коник). Дуга нечётной ветви, соединяющая точки, отвечающие последнему символу второй перестановки и первому символу первой перестановки, а также дуги нечётной ветви, отвечающие символам, между которыми стоит «*», пересекают один раз граничную окружность модели проективной плоскости.

После применения методов, описанных в леммах 2.3–2.5, для дальнейшего исследования остаются 57 моделей, коды которых перечислены во вторых столбцах таблиц 1–2; смысл остальных столбцов таблиц будет объяснён ниже.

3. Построения

В работе [4] найдена классификация взаимных расположений прямой, коники и кубики при условиях максимальности и общего положения, аналогичных условиям (i)–(iii), состоящая из 163 схем. «Удвоение» прямой в некоторых расположениях, построенных в [4], даёт реализацию кривыми степени 7 четырёх моделей из таблиц 1–2.

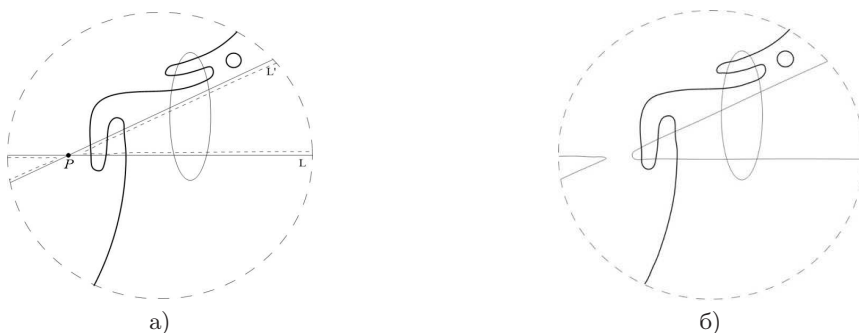


Рис. 3.1. Построение кривой с расположением (165234)(16R5234).

Рассмотрим, например, построенное в [4] расположение, показанное на Рис. 3.1 а (см. № 6 в таблице 2 в [4]), и немного повернём прямую L вокруг точки P в положение L' так, чтобы L' тоже пересекала нечётную ветвь кубики в трёх точках. Устраняя двойную точку P кривой $L \cup L'$ с помощью достаточно малого возмущения, получим неособую конику, объединение которой с исходными коникой и кубикой Рис. 3.1 а реализует модель № 28 из таблицы 2 – см. Рис. 3.1 б).

Аналогично из расположений №№ 3, 105, 126 таблицы 2 работы [4] получаются кривые, реализующие соответственно модели № 35 таблицы 2 и №№ 4, 16 таблицы 1.

4. Запреты с помощью теории кос и зацеплений

В этом параграфе опишем применение предложенного С. Ю. Оревковым в [9] метода запрета изотопических типов алгебраических кривых, основанного на использовании теории кос и зацеплений. Этот метод неоднократно излагался в литературе, поэтому приведём лишь его краткое изложение, необходимое для понимания дальнейшего.

Пусть C_m – простая кривая. Предположим, что существует точка $p \in \mathbb{R}P^2 \setminus \mathbb{R}C_m$ такая, что пучок L_p прямых с центром в этой точке обладает следующими свойствами:

а) в L_p найдется прямая l_0 , пересекающая кривую $\mathbb{R}C_m$ в m различных точках (максимальная прямая);

б) любая прямая $l \in L_p$ пересекает кривую $\mathbb{R}C_m$ не менее, чем в $(m-2)$ различных точках;

с) каждая прямая пучка имеет не более одной точки двукратного пересечения с $\mathbb{R}C_m$, т. е. каждая из таких *критических прямых* либо касается $\mathbb{R}C_m$, либо пересекает $\mathbb{R}C_m$ в её двойной точке без касания.

Пучок, удовлетворяющий условиям а)–с), будем называть *максимальным*. Заметим, что выполнения условия с) всегда можно добиться малым шевелением центра пучка.

Выберем аффинные координаты (x, y) так, чтобы прямая l_0 (а следовательно, и точка p) оказалась в бесконечности, тогда пучок L_p станет пучком параллельных прямых $\{l_t\}$ (см. Рис. 4.1 а), где l_t — прямая, заданная уравнением $x = t$. Изображение схемы кривой в таком виде будем называть *развёрткой, отвечающей прямой l_0* .

Данную развёртку удобно кодировать X-кодом $u_1 u_2 \dots u_s$, где символ u_i характеризует расположение кривой $\mathbb{R}C_m$ в окрестности критической прямой l_{t_i} и принимает одно из значений $\supset_k, \subset_k, \times_k$ ($k \in \{1, \dots, m-1\}$) в соответствии с Рис. 4.2¹⁰, а $\{l_{t_1}, \dots, l_{t_s}\}$ — набор всех критических прямых, упорядоченных по возрастанию параметра t_i .

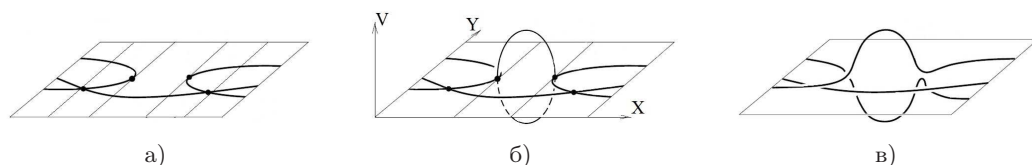


Рис. 4.1. Образование косы.

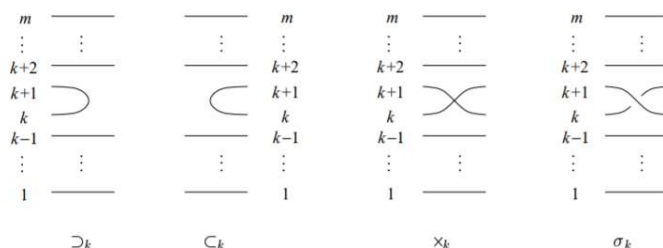


Рис. 4.2. Символы X-кода и образующие группы кос.

Пусть $\mathbb{C}L_p$ — пучок комплексных прямых с центром в точке p в комплексной проективной плоскости $\mathbb{C}P^2$ и $M = \mathbb{C}C_m \cap \mathbb{C}L_p$. Множество M гомеоморфно набору окружностей; некоторые из них попарно склеены в двойных точках кривой $\mathbb{R}C_m$ и в точках касания прямых пучка L_p с этой кривой (см. Рис. 4.1 б¹¹).

Устранив все точки склейки некоторым стандартным образом (см. Рис. 4.1 в; подробности см. в [9–10]), получим зацепление $K(C_m, p)$. Пусть $b(C_m, p)$ — коса из m нитей, замыкание которой совпадает с $K(C_m, p)$. Для дальнейшего важно, что в силу предположения о максимальности пучка коса $b(C_m, p)$ однозначно (с точностью до сопряжённости в группе B_m кос из m нитей) определяется взаимным расположением в $\mathbb{R}P^2$ кривой $\mathbb{R}C_m$ и пучка L_p , т. е. развёрткой, отвечающей максимальной прямой.

Из [11] известно, что полученная описанным выше способом коса $b(C_m, p)$ должна быть *квазиположительной*, т. е. допускать запись в виде $\prod_{j=1}^k \omega_j \sigma_{i_j} \omega_j^{-1}$, где ω_j — неко-

¹⁰Рис. 4.2 взят нами из [10], а часть Рис. 4.1 — из [9].

¹¹Этот рисунок условный — «мнимая ось» V двумерна.

торые слова в алфавите $\{\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}, \sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_{m-1}^{-1}\}$, а $\sigma_s, 1 \leq s \leq m-1$, – стандартные образующие группы B_m (см. Рис. 4.2). Следовательно, если для топологической модели гипотетической кривой $\mathbb{R}C_m$ при каждом возможном взаимном расположении пучка L_p и этой модели коса $b(C_m, p)$ не является квазиположительной, то эта модель не может быть реализована алгебраической кривой степени m .

В качестве необходимого условия квазиположительности С. Ю. Оревков в [9] предложил использовать

Неравенство Мурасуги-Тристрама. Если $b = \prod \sigma_i^{k_i}$ – квазиположительная коса из m нитей, то для её замыкания выполняется неравенство

$$|\sigma(b)| + m - e(b) - n(b) \leq 0,$$

где $\sigma(b)$ и $n(b)$ – сигнатура и дефект замыкания косы b ; $e(b) = \sum k_j$ – алгебраическая степень косы b .

Таблица 4.1. Центр пучка внутри овала кубики.

№пп	Код модели	X-код	h
1	(123456)(123456) C	x3x3x3x3x3x3x4x4x4x4x2x2x5	2
2	(123456)(123654) B	x4x4x4x3x2)3(3x4x4x4x3x3x5x4x3x3x3	2
3	(123456)(12*56*34) C	x2x2x4x3x3x4x4x5x4x4x4x4x4x3x5	0 (?)
4	(123456)(165234) B	x4x4x4x3x2)3(3x4x3x3x4x4x3x5x4x3x3x3	0 (∃)
5	(1R23456)(321456)	x4x5x2x2x2x3x3x3x4x4x4)3x3x3x3(3x2x3	4
6	(1R23456)(345216)	x4x5x2x2x2x3x4x4x3x3x4)3x3x3x3(3x2x3	2
7	(123654)(1R25634)	x2x3x3x2)3x3x2x2x3x3(3x4x4x4x3x3x3x2	2
8	(165234)(1R25634)	x2x3x3x2)3x3x2x2x3x3(3x4x3x3x4x4x3x2	2
9	(1L65432)(123654)	x4x5x5x5x5x5x4x4x4x3x3x3)4x2(4x3x4x4	2
10	(1L65432)(165234)	x4x5x5x5x5x5x4x3x3x4x4x3)4x2(3x4x4x4	0 (?)
11	(321456)(1L6*32*54)	x3x4x4x3)4x2x3x3x2x2(4x3x3x3x4x4x4x5	2
12	(321456)(1L65432)	x4x4x4)3x2x2x2x2x2(4x3x3x3x4x4x4x5x4	2
13	(321L654)(123654)	x4x5x5x5x4x4x4x3x3x3)4x2x2x2(3x4x4x4	2
14	(321L654)(165234)	x5x5x5x4x3x3x4x4x3)4x2x2x2(4x3x4x4x3	2
15	(345216)(1L6*32*54)	x4x3x2)4x3x3x2x2(4x3x4x4x3x3x4x5x4x3	4
16	(345216)(1L65432)	x4x4x4)3x2x2x2x2x2(4x3x4x4x3x3x4x5x4	0 (∃)
17	(432561)(6L5*21*43)	x3x2)3x2x2x3x3x2x2(4x3x3x3x4x4x3x5x4	2
18	(456321)(6L5*21*43)	x3x2)3x2x2x3x3x2x2(4x3x4x4x3x3x3x5x4	2
19	(654321)(65*21*43) C	x5x4x4x4x4x4x4x3x3x5x4x4x3x3x2x2	2
20	(6L54321)(654123)	x4x5x3x3x3x4x4x4)3x2x2x2x2x2x2(3x2x3	2
21	(654321)(654321) C	x5x4x4x4x4x4x4x3x3x3x3x3x3x2x2x5	2

Приведём пример применения описанного метода к моделям из таблиц 4.1–4.2. Рассмотрим модель Рис. 4.3 а, отвечающую коду (16R5234)(345216) (№ 31 в таблице 4.2), выберем точку p в области C , а прямую l_0 так, как показано на Рис. 4.3 а. Развёртка, отвечающая этой прямой, и соответствующий этой развёртке X-код показаны на Рис. 4.3 б. Вычисления дают $h = 2$, где через h мы обозначаем значение левой части неравенства Мурасуги-Тристрама. Следовательно, рассматриваемая модель не может быть реализована схемой какой-либо кривой степени 7.

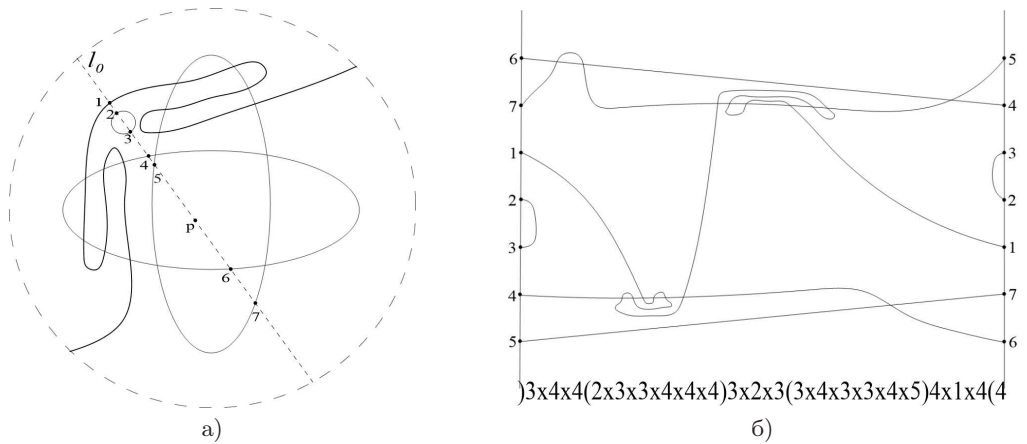


Рис. 4.3. Пример применения метода Оревкова.

Таблица 4.2. Центр пучка внутри коник.

№ПП	Код модели	X-код	h
22	(1236R54)(321456)	x2x2x2)3(3x4x4x4)5(4)4x1x1x1x4(5x4x4x4)3(3x2x2x2	6
23	(12L3654)(321456))4x2x2x2x3x3x3(3x4x4x4)5x1x1x1x4(5x4x4x4)3(3	4
24	(1236R54)(345216))3(3x2x3x3)4x2x2x2x3(3x4x3x3x4x4)5x1x1x1x4(4	2
25	(12L3654)(345216))4x2x2x2x3(4x3x3x3x4x4)5x1x1x1x4(5x4x4x4)3(3	2
26	(16R5234)(123654))3(2x3x3x4x4x4)3x2(5x4x4x3)4x3x3x3x1x1x1x4(4	4
27	(165234)(1236R54))4x2(5x4x4x4)3x3x3x3x1x1x1x4(5x4x4x3x3x3)4(3	2
28	(165234)(16R5234))3(5x4x3x3x4x4x3)4x2x1(4x3x2x4x3)4(4x5x4x4x5)6(4	0 (∅)
29	(16R5234)(321456))3(3x2x3x4x4x4)3x2x3x3x3(4x3x4x4)5x1x1x1x4(4	2
30	(1652L34)(321456))4x2x3x3x3(3x4x4x4)5x1x1x1x4(4x5x4x3x3x4)3(3	4
31	(16R5234)(345216))3x4x4(2x3x3x4x4x4)3x2x3(3x4x3x3x4x5)4x1x4(4	2
32	(1652L34)(345216))4x2x3(4x3x3x3x4x4)5x1x1x1x4(5x4x4x3x3x3)4(3	2
33	(32R1456)(123654))4(4x3x3x3)2(5x4x4x4)3x1x1x1x3x3x3x4x3x3x3(3	4
34	(32R1456)(165234))4(4x3x3x3)2(5x4x4x3x3x4)3x3x1x1x1x4x3x3x3(3	2
35	(345216)(16R5234))4(3x4x4x4x3x3)2(4x5x4x3x3x3)4x3x4x1x1x1x3(3	0 (∅)
36	(4325L61)(456321))3(5x4x4x4)3x3x3x3(3x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4(4	4
37	(432561)(45L6321))4(5x4x4x4)3x3x3x3(2x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4(3	4
38	(4325L61)(432561))3(5x4x4x3x3x3)4x3(3x2x3x4x4x3)4x2x1x1x1x4(4	4
39	(432561)(4325L61))4(5x4x4x3x3x3)4x3(2x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4(3	4
40	(4325L61)(612543))3(4x3x3x3x4x4)5(3x2x3x4x4x3)4x2x1x1x1x4x2(4	2
41	(432561L)(612543))4x3(3x4x3x3x4x5)4(2x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4(3	4
42	(4325L61)(654123))3x3x3(3x4x4x4)5(2x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4x2(4	4
43	(432561L)(654123))4x3x3x3(3x4x4x4)5(2x3x3x4x4x4)3x2x1x1x1x4(3	4
44	(45L6321)(432561))3x4(5x4x4x3x3x3)4x3(3x2x3x3)4x2x2x2x4x1x1(4	4
45	(456321)(4325L61))4(5x4x4x3x3x3)4x3(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4(3	4
46	(45L6321)(456321))3x4(5x4x4x4)3x3x3x3(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4(4	6
47	(456321)(45L6321))4(5x4x4x3)4x3x3x3(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4(3	6

№пп	Код модели	X-код	h
48	(45L6321)(612543))3(4x3x3x3x4x4)5(3x2x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4x2(4	4
49	(456321L)(612543))4x3(3x4x3x3x4x5)4(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4(3	4
50	(45L6321)(654123))3x3x3(3x4x4x5)4(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x1x4x2(4	6
51	(456321L)(654123))4x4x3x3x3(3x4x4x4)5(2x3x3x3)4x2x2x2x1x1x4(3	6
52	(65R4123)(432561))3(5x4x4x3x3x3)4x3x2x2x2(4x3x3x2)3x1x1x1x4(4	4
53	(654123)(4325L61))4(5x4x4x3x3x3)4x3x2x2x2(4x3x3x3)2x1x1x1x4(3	4
54	(6125R43)(432561))3(5x4x4x3x3x3)4x2(4x3x4x4x3x3)3x1x1x1x4(4	4
55	(612543)(4325L61))4(5x4x4x3x3x3)4x3x2(4x3x4x4x3x2)3x1x1x1x4(3	2
56	(65R4123)(456321))3(5x4x4x4)3x3x3x3x2x2x2(4x3x3x2)3x1x1x1x4(4	4
57	(654123)(45L6321))4(5x4x4x4)3x3x3x3x2x2x2(4x3x3x3)2x1x1x1x4(3	4

Аналогично были рассмотрены все остальные допустимые модели. При этом для выбора центра p пучка прямых возможны разные варианты. Мы выбирали точку p внутри окружности, отвечающей овалу кубики (эти случаи собраны в таблицу 4.1) или в какой-либо точке в пересечении внутренних областей окружностей, отвечающих коникам (область S на Рис. 2.2 а – таблица 4.2. Развёртки и X-коды нетрудно находить «вручную», но вычисления значений h вряд ли возможны без компьютера (ввиду необходимости нахождения собственных чисел больших матриц для определения сигнатур и ввиду большого количества X-кодов). Мы использовали многократно применявшуюся ранее программу, написанную специально для таких задач М. А. Гуциным в 2003 г., когда он был студентом механико-математического факультета ННГУ. На вход этой программы подаётся X-код, а на выходе получается значение h .

З а м е ч а н и е 4.1 В [6, 12] С.Ю. Оревков предложил применять для проверки квазиположительности условие Фокса-Милнора. Примеры применения этого условия можно найти также в [3]. В нашей ситуации было интересно применить его только в случаях, когда модель не удалось ни запретить с помощью неравенства Муласуги-Тристрама, ни реализовать, т. е. для моделей №№ 3, 10 в таблице 4.1. Проведённые вычисления показали, что условие Фокса-Милнора не запрещает реализуемость этих моделей, поэтому описание этих вычислений мы не приводим.

Итог проведённого исследования сформулируем следующим образом.

Т е о р е м а 4.1 Модели, отличные от шести моделей, показанных на Рис. 4.4–4.5, не могут быть реализованы как схемы кривых степени 7. Из этих шести модели Рис. 4.4 реализуются распадающимися кривыми степени 7, удовлетворяющими условиям (i) – (vi), а вопрос о реализуемости двух оставшихся (Рис. 4.5) открыт.

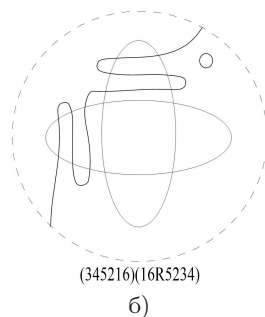
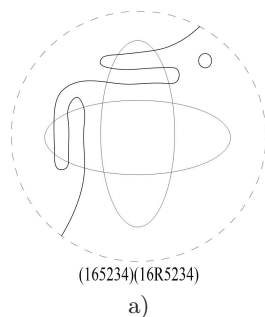




Рис. 4.4. Реализованные схемы.

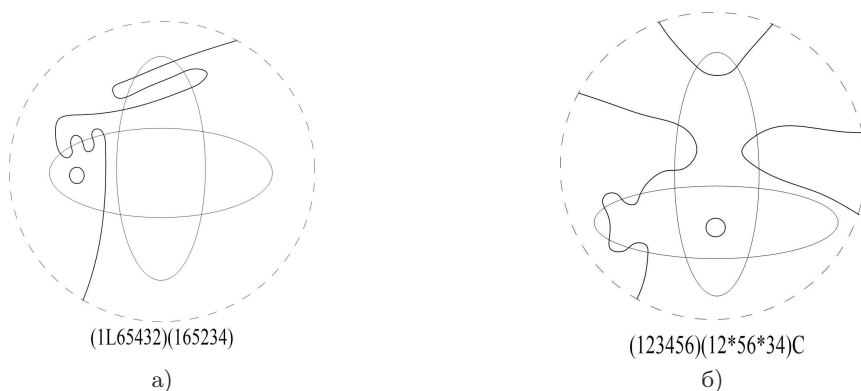


Рис. 4.5. Схемы, вопрос о реализуемости которых кривыми степени 7 открыт.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ, грант Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гудков Д. А., Уткин Г. А. Топология кривых 6-го порядка и поверхностей 4-го порядка (к 16-й проблеме Гильберта) // Ученые записки Горьковского университета. 1969. № 87. 214 с.
2. Полотовский Г. М. Каталог М-распадающихся кривых 6-го порядка // ДАН СССР. 1977. Т. 236, № 3. С. 548–551.
3. Борисов И. М., Полотовский Г. М. О топологии плоских вещественных распадающихся кривых степени 8 // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Тематические обзоры. 2020 (в печати).
4. Kuzmenko T. V., Polotovskii G. M. Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M-curves in general position // AMS Translations, Ser. 2. 1996. Vol. 173. pp. 165–177.

5. Korchagin A. B., Polotovskii G. M. On arrangements of a plane real quintic curves with respect to a pair of lines // Commun. Contemp. Math. 2003. Vol. 5, No. 1. pp. 1–24.
6. Оревков С. Ю. Расположения М-квинтики относительно коники, максимально пересекающей ее нечётную ветвь // Алгебра и анализ. 2007. Т. 19, № 4. С. 174–242.
7. Корчагин А. Б., Полотовский Г. М. О расположениях плоской вещественной квинтики относительно пары прямых // Алгебра и анализ. 2009. Т. 21, № 2. С. 92–112.
8. Гудков Д. А. Топология вещественных проективных алгебраических многообразий // УМН. 1974. Т. 29, № 4(178). С. 3–79.
9. Orevkov S. Yu. Link theory and oval arrangements of real algebraic curve // Topology. 1999. Vol. 38. pp. 779–810.
10. Оревков С. Ю., Полотовский Г. М. Проективные М-кубики и М-квартики в общем положении с максимально пересекающейся парой овалов // Алгебра и анализ. 1999. Т. 11, № 5. С. 166–184.
11. Lee R. Algebraic functions and closed braids // Topology. 1983. Vol. 22. pp. 191–202.
12. Orevkov S. Yu. Classification flexible M-curves of degree 8 up to isotopy // GAFA, Geom. Funct. Anal. 2002. Vol. 12, No. 4. pp. 723–755.

Поступила 19.11.2019

MSC2020 14H50, 14P25

On the disposition of cubic and pair of conics in a real projective plane

© V. A. Gorskaya¹, G. M. Polotovskiy²

Abstract. In the first part of the 16th Hilbert problem the question about the topology of nonsingular projective algebraic curves and surfaces was formulated. The problem on topology of algebraic manifolds with singularities belong to this subject too. The particular case of this problem is the study of curves that are decomposable into the product of curves in a general position. This paper deals with the problem of topological classification of mutual positions of a nonsingular curve of degree three and two nonsingular curves of degree two in the real projective plane. Additional conditions for this problem include general position of the curves and its maximality; in particular, the number of common points for each pair of curves-factors reaches its maximum. It is proved that the classification contains no more than six specific types of positions of the species under study. Four position types are built, and the question of realizability of the two remaining ones is open.

Key Words: nonsingular plane real algebraic curves, the 16th Hilbert problem, curves with singularities, decomposable curves, topological classification

¹**Victoriya A. Gorskaya**, Undergraduate student, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Prospekt Gagarina, Nizhny Novgorod, 603950, Russia); ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6898-2598>, victoriya.gorskaya@mail.ru

²**Grigory M. Polotovskiy**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12 Bol. Pecherskaya Ulitsa, Nizhny Novgorod, 603155, Russia); Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6898-2598>, polotovskiy@gmail.com

REFERENCES

1. D. A. Gudkov, G. A. Utkin, “[Topology of 6-th degree curves and 4-th degree surfaces (to the Hilbert 16th problem)]”, *Uchenye zapiski Gorkovskogo universiteta*, **87** (1969) (In Russ.), 214 p.
2. G. M. Polotovskiy, “[A catalogue of M -decomposing curves of sixth order]”, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **236**:3 (1977), 548–551 (In Russ.).
3. I. M. Borisov, G. M. Polotovskiy, “[On the topology of plane real decomposable curves of degree 8]”, *Itogi nauki i tekhniki. Sovremennye problemy matematiki. Tematicheskie obzory*, 2019 (in press) (In Russ.).
4. T. V. Kuzmenko, G. M. Polotovskii, “Classification of curves of degree 6 decomposing into a product of M -curves in general position”, *AMS Translations, Ser. 2*, **173** (1996), 165–177.
5. A. B. Korchagin, G. M. Polotovskii, “On arrangements of a plane real quintic curves with respect to a pair of lines”, *Commun. Contemp. Math.*, **5**:1 (2003), 1–24.
6. S. Yu. Orevkov, “[Arrangements of an M -quintic with respect to a conic that maximally intersects its odd branch]”, *Algebra i Analiz*, **19**:4 (2007), 174–242 (In Russ.).
7. A. B. Korchagin, G. M. Polotovskiy, “[On positions of a real plane quintic relative to a couple of lines]”, *Algebra i Analiz*, **21**:2 (2009), 92–112 (In Russ.).
8. D. A. Gudkov, “[The topology of real projective algebraic varieties]”, *Uspekhi Mat. Nauk*, **29**:4(178) (1974), 3–79 (In Russ.).
9. S. Yu. Orevkov, “Link theory and oval arrangements of real algebraic curve”, *Topology*, **38** (1999), 779–810.
10. S. Yu. Orevkov, G. M. Polotovskiy, “[Projective M -cubics and M -quartics in general position with a maximally intersecting pair of ovals]”, *Algebra i Analiz*, **11**:5 (1999), 166–184.
11. Lee R., “Algebraic functions and closed braids”, *Topology*, 1983, no. 22, 191–202.
12. S. Yu. Orevkov, “Classification flexible M -curves of degree 8 up to isotopy”, *GAF, Geom. Funct. Anal.*, **12**:4 (2002), 723–755.

Submitted 19.11.2019

УДК 519.17

Полная классификация сложности задачи о вершинной 3-раскраске для четверок порожденных 5-вершинных запретов

© Д. С. Малышев¹

Аннотация. Задача о вершинной 3-раскраске для заданного графа состоит в том, чтобы проверить, возможно ли множество его вершин разбить на три подмножества попарно несмежных вершин. Наследственный класс графов — множество обыкновенных графов, замкнутое относительно изоморфизма и удаления вершин. Любой такой класс может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов. Известен сложностной статус задачи о вершинной 3-раскраске для всех четверок 5-вершинных запрещенных порожденных подграфов, кроме трех из них. Более того, известно, что два из этих трех случаев полиномиально эквивалентны и полиномиально сводятся к третьему. В настоящей работе доказывается, что вычислительная сложность рассматриваемой задачи во всех трех упомянутых классах является полиномиальной. Данный результат вносит вклад в алгоритмическую теорию графов.

Ключевые слова: задача о вершинной 3-раскраске, наследственный класс, полиномиальный алгоритм

1. Введение

В работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. непомеченные, неориентированные графы без петель и кратных ребер. Поэтому полный термин «обыкновенный граф» будет кратко называться «граф».

Правильной вершинной k -раскраской (или просто *k -раскраской*) графа G называется произвольное отображение $c : V(G) \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ такое, что $c(v_1) \neq c(v_2)$ для любых смежных вершин $v_1, v_2 \in V(G)$. Если граф G имеет k -раскраску, то он называется *k -раскрашиваемым*. *Задача о вершинной k -раскраске* (или, кратко, *задача k -BP*) для заданного графа G состоит в том, чтобы определить, имеет ли G правильную вершинную k -раскраску. При любом $k \geq 3$ задача k -BP является классической NP-полной задачей на графах [1].

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно изоморфизма и удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс графов \mathcal{X} может быть задан множеством своих запрещенных порожденных подграфов \mathcal{Y} : $\mathcal{X} = \text{Free}(\mathcal{Y})$.

Для задачи k -BP сложностной статус остается открытым даже для некоторых классов, определяемых одним запрещенным порожденным фрагментом. Так, алгоритмическая сложность задачи 3-BP известна для всех классов вида $\text{Free}(\{H\})$, где $|V(H)| \leq 6$

¹Малышев Дмитрий Сергеевич, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), профессор, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23); доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7529-8233>, dsmalyshev@rambler.ru

[2]. Подобный результат был получен для задачи 4-ВР и всех классов вида $Free(\{H\})$, где $|V(H)| \leq 5$ [3]. Для каждого фиксированного k задача k -ВР разрешима за полиномиальное время в классе $Free(\{P_5\})$ [4]. Задача 3-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_7\})$ [5]. Задача 4-ВР полиномиально разрешима в классе $Free(\{P_6\})$ [6]. Для каждого фиксированного $k \geq 5$ задача k -ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_6\})$ [7]. Задача 4-ВР является NP-полной в классе $Free(\{P_7\})$ [7]. Вычислительный статус задачи k -ВР является открытым для класса $Free(\{P_8\})$ и $k = 3$, а также для класса $Free(\{P_7\})$ и $k = 4$.

В настоящей работе рассматривается задача 3-ВР. В работе [8] для задачи 3-ВР получена полная сложностная дихотомия в семействе наследственных классов, определяемых парой запрещенных порожденных подграфов, каждый из которых имеет не более 5 вершин. В работе [9] был получен аналогичный результат для всех троек запретов, каждый из которых имеет не более 5 вершин. В статье [10] рассматривались четверки запрещенных порожденных подграфов, каждый из которых имеет не более пяти вершин. В той же работе для всех таких наследственных классов, кроме трех, устанавливается вычислительный статус задачи 3-ВР; для двух из трех оставшихся случаев была доказана их полиномиальная эквивалентность и полиномиальная сводимость к третьему. В данной работе завершается полная классификация сложности задачи 3-ВР для четверок 5-вершинных порожденных запретов установлением полиномиальной разрешимости задачи для трех ранее открытых случаев.

2. Некоторые обозначения, определения и факты

Для графа G через $N_G(x)$ обозначается окрестность вершины x , а через $\deg_G(x)$ — ее степень. Через $\Delta(G)$ обозначается максимальная из степеней вершин G .

Через P_n, C_n, K_n обозначается простой путь, простой цикл и полный граф на n вершинах соответственно. Через F_k ($k \geq 3$) обозначается граф, получаемый добавлением вершины v к простому пути (v_1, \dots, v_k) и ребер vv_1, vv_2, \dots, vv_k . Колесом W_k ($k \geq 3$) называется граф, получаемый добавлением вершины v к простому циклу (v_1, \dots, v_k) и ребер vv_1, vv_2, \dots, vv_k .

Пусть G — граф и $V' \subseteq V(G)$. Тогда $G[V']$ — подграф G , порожденный подмножеством V' , а $G \setminus V'$ — результат удаления из G всех элементов V' (вместе со всеми инцидентными им ребрами). Через $G_1 + G_2$ обозначается дизъюнктивное объединение графов G_1 и G_2 с непересекающимися множествами вершин.

Графы *bull*, *cricket*, *butterfly*, *crown* изображены на Рис. 2.1.

Графы *kite*, *dart*, *banner*, *house*, *sun* изображены на Рис. 2.2.

В работах [8–10] были рассмотрены следующие 9 наследственных классов и было доказано, что задача 3-ВР является NP-полной в любом наследственном классе с конечным множеством запретов, включающим хотя бы один из данных 9 классов:

- \mathcal{X}_1^* — множество всех лесов;
- \mathcal{X}_2^* — множество реберных графов лесов со степенями всех вершин не более 3;
- \mathcal{X}_3^* — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из

$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{\text{cricket}, \text{kite}, F_3 + K_1\};$$

- \mathcal{X}_4^* — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из

$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{\text{kite}, F_3 + K_1, \text{butterfly}, \text{crown}\};$$

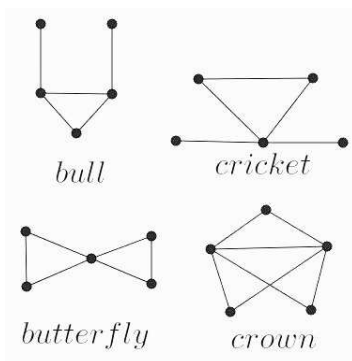


Рис. 2.1. Графы bull, cricket, butterfly, crown

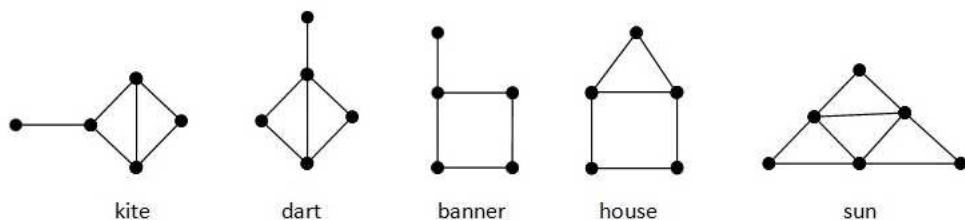


Рис. 2.2. Графы kite, dart, banner, house, sun

- \mathcal{X}_5^* — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из

$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, F_3 + K_1, house, C_4 + K_1, F_4, W_4, dart, crown\};$$

- \mathcal{X}_6^* — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из

$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, house, banner, C_4 + K_1, C_5\};$$

- \mathcal{X}_7^* — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из

$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, C_5\};$$

- \mathcal{X}_8^* — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из

$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{cricket, banner, house, C_4 + K_1\};$$

- \mathcal{X}_9^* — множество графов, в которых любые 5 вершин порождают подграф из

$$\mathcal{X}_1^* \cup \mathcal{X}_2^* \cup \{kite, F_3 + K_1, dart, C_4 + K_1, banner, W_4, C_5\}.$$

В работе [10] была установлена алгоритмическая сложность задачи 3-ВР для всех наследственных классов, определяемых четверкой 5-вершинных запрещенных порожденных фрагментов, кроме классов:

- 1) $\mathcal{X}'_1 = \text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, C_4\})$;
- 2) $\mathcal{X}'_2 = \text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, C_4 + K_1\})$;
- 3) $\mathcal{X}'_3 = \text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, W_4\})$.

Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 2.1 Пусть $\mathcal{X} \notin \{\mathcal{X}'_1, \mathcal{X}'_2, \mathcal{X}'_3\}$ — наследственный класс, определяемый четверкой запрещенных 5-вершинных порожденных подграфов. Тогда задача 3-ВР является полиномиально разрешимой в \mathcal{X} , если $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}_i^*$ для любого $1 \leq i \leq 9$, а иначе она является NP-полной.

В работе [10] было доказано, что задача 3-ВР в \mathcal{X}'_1 полиномиально эквивалентна задаче 3-ВР в \mathcal{X}'_2 и полиномиально сводится к задаче 3-ВР в \mathcal{X}'_3 .

3. Доказательство существования полиномиального алгоритма

В работе [10] было доказано (см. Лемму 7), что задача 3-ВР в \mathcal{X}'_3 полиномиально сводится к той же задаче в $\mathcal{X}'_3 \cap \text{Free}(\{\text{crown}\})$. Поскольку K_4 и W_5 не являются 3-раскрашиваемыми и их принадлежность графу в качестве порожденного подграфа может быть проверена за полиномиальное время, то задача 3-ВР в $\mathcal{X}'_3 \cap \text{Free}(\{\text{crown}\})$ полиномиально сводится к той же задаче в $\mathcal{X}^* = \mathcal{X}'_3 \cap \text{Free}(\{\text{crown}, K_4, W_5\})$.

Докажем полиномиальную разрешимость задачи 3-ВР в \mathcal{X}^* . Из Леммы 5 работы [10] следует справедливость следующего факта.

Л е м м а 3.1 Если $G \in \mathcal{X}^*$, то $\Delta(G) \leq 4$. Более того, если $\deg_G(x) = 4$, то $G[N_G(x)] \in \{P_3 + K_1, P_4\}$.

Напомним, что 2-деревом называется любой граф, который может быть получен из K_3 путем добавления новой вершины к полученному ранее графу и соединения данной вершины ребрами с двумя смежными вершинами исходного графа. Нетрудно видеть, что любое 2-дерево имеет единственную 3-раскраску, причем она может быть найдена за линейное время. Пусть H — 2-дерево из \mathcal{X}^* . Тогда $\Delta(H) \leq 4$ по Лемме 3.1.

С использованием этого факта индукцией по количеству вершин нетрудно доказать каждое из следующих трех утверждений. Если $H \notin \{K_3, F_3, F_4, \text{sun}\}$, то все его вершины, кроме некоторых четырех, имеют степень 4. Более того, две из вершин-исключений имеют в H степень 2, а другие две — степень 3, причем множество вершин-исключений порождает в H либо $K_2 + K_2$, либо P_4 . Раскраска H в 3 цвета определяется единственным образом, причем в ней все 3 цвета встречаются среди цветов вершин-исключений. В любой 3-раскраске F_3 его вершины степени 2 получают одинаковые цвета. В любой 3-раскраске F_4 вершины его пути (v_1, v_2, v_3, v_4) должны быть окрашены в два цвета: v_1 и v_3 получают один цвет, а v_2 и v_4 — другой. В любой 3-раскраске K_3 и sun их вершины степени 2 получают попарно различные цвета.

Пусть $G \in \mathcal{X}^*$. Предположим, что степень каждой вершины G не менее 3. Максимальный по включению подграф G , который является 2-деревом, назовем 2_G -деревом. Из Леммы 3.1 следует, что любые два 2_G -дерева не пересекаются по вершинам. Из нее же следует, что 2_G -деревья покрывают все вершины степени 4 в G и что каждая вершина, имеющая в 2_G -дереве степень 2 (соответственно, степень 3), имеет в G степень, равную 3 (соответственно, 3 или 4). Следовательно, у каждой вершины любой 2_G -гусеницы имеется не более одного соседа вне ее. Таким образом, любая вершина, либо имеющая не менее двух соседей в некотором 2_G -дереве и не принадлежащая ему, либо имеющая соседей в различных 2_G -гусеницах, должна обладать степенью 3.

Пусть $H \notin \{K_3, F_4, \text{sun}\}$ — некоторое 2_G -дерево и x_1, x_2, y_1, y_2 — все вершины, имеющие в H степени 2 или 3, причем в любой 3-раскраске H вершины x_1 и x_2 принимают одинаковые цвета. Предположим, что $x_1 x_2 \notin E(G)$.

Л е м м а 3.2 *Заданная 3-раскраска $G \setminus V(H)$ продолжается на весь G тогда и только тогда, когда в ней каждая из троек*

$$(N_G(x_1) \setminus V(H), N_G(y_1) \setminus V(H), N_G(y_2) \setminus V(H)),$$

$$(N_G(y_1) \setminus V(H), N_G(y_2) \setminus V(H), N_G(x_2) \setminus V(H))$$

не окрашена в один цвет.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что

$$N_G(x_1) \setminus V(H) = \{a\}, N_G(y_1) \setminus V(H) = \{b\}, N_G(y_2) \setminus V(H) = \{c\}, N_G(x_2) \setminus V(H) = \{d\},$$

т. к. остальные случаи рассматриваются аналогично. Поскольку 3-раскраска H определяется единственным образом, то можно считать, что $H = F_3$. Рассмотрим некоторую 3-раскраску $G \setminus V(H)$, в которой цвета вершин b и c совпадают. Тогда вершинам x_1 и x_2 может быть назначен только цвет вершин b и c . Значит, продолжение 3-раскраски $G \setminus V(H)$ существует тогда и только тогда, когда каждая из вершин a и d принимает цвет, отличный от цвета вершин b и c . Предположим, что вершины b и c имеют цвета 1 и 2, соответственно, в некоторой 3-раскраске $G \setminus V(H)$. Если среди цветов вершин a и d не встречается 1 или 2, то окрасим вершины x_1 и x_2 либо в цвет 1, либо в цвет 2. Соответственно, вершины y_1 и y_2 получат цвета 2 и 1 или 1 и 2. Если же множество цветов вершин b и c совпадает с $\{1, 2\}$, то окрасим вершины x_1 и x_2 в цвет 3, вершину y_1 — в цвет 2, а вершину y_2 — в цвет 1.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

Л е м м а 3.3 *Задача 3-ВР полиномиально разрешима для графов из \mathcal{X}^* .*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — произвольный граф из класса \mathcal{X}^* . Можно считать, что G является связным и не содержит вершин степени ≤ 2 , т. к. задача 3-ВР полиномиально сводится к таким графам. Удалим из G все вершины степени 3, окрестности которых порождают пустой подграф. Удалим также все такие ребра ab , что $G[N_G(a)] = K_2 + K_1$, и такие внеугловые ребра ab , что $G[N_G(a)] = P_3 + K_1$. Нетрудно видеть, что в результате получится дизъюнктное объединение всевозможных 2_G -деревьев, поэтому множество всех 2_G -деревьев может быть найдено за полиномиальное время. Если в G имеется ребро, соединяющее две одноцветные вершины некоторого 2_G -дерева, то G не является 3-раскрашиваемым. Утверждение этой леммы будем доказывать редукцией (сохраняющей 3-раскрашиваемость) к графам из \mathcal{X}^* , либо содержащим ребро между одноцветными вершинами их подграфов, являющихся 2-деревьями, либо имеющим максимальную степень вершин 3. Первые не являются 3-раскрашиваемыми, а вторые, согласно известной теореме Брукса [11], являются таковыми.

Назовем вершину $v \in V(G)$ *избыточной*, если она смежна с двумя вершинами некоторого 2_G -дерева H , которые имеют одинаковые цвета в 3-раскраске H , и не принадлежит ему. Ясно, что $\deg_G(v) = 3$. В любой 3-раскраске G имеется не более 2 цветов в $N_G(v)$, и поэтому G является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым

является $G \setminus \{v\}$. Множество всех избыточных вершин G вычисляется за полиномиальное время, поэтому далее будем считать, что G не содержит избыточных вершин.

Пусть $H \notin \{K_3, F_4, \text{sun}\}$ — 2_G -дерево и x_1, x_2, y_1, y_2 — все вершины H степени 2 или 3, причем в любой 3-раскраске H вершины x_1 и x_2 окрашены в одинаковый цвет. Предположим, что x_1 и x_2 не смежны, т. к. иначе G не является 3-раскрашиваемым. Если множество $(N_G(y_1) \cup N_G(y_2)) \setminus V(H)$ либо не содержит элементов, либо содержит 1 элемент, смежный только с одной из вершин y_1 и y_2 , либо содержит два смежных элемента, то по Лемме 3.2 граф G будет 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является $G \setminus V(H)$. Будем считать, что $N_G(y_1) \setminus V(H) = \{b\}$, $N_G(y_2) \setminus V(H) = \{c\}$ и что b и c не смежны. Если $b = c$, то $\deg_G(b) = 3$. Удалим из G все вершины множества $V(H) \setminus \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, а также все ребра между вершинами x_1, x_2, y_1, y_2 и добавим ребра $x_1y_1, x_1y_2, y_1y_2, x_2y_1, x_2y_2$. Нетрудно видеть, что получившийся граф G^* принадлежит множеству \mathcal{X}'_3 и что 3-раскрашиваемость G^* эквивалентна 3-раскрашиваемости G . В Лемме 7 из работы [10] было доказано, что в произвольном графе $\tilde{G} \in \mathcal{X}'_3$ стягивание любого его порожденного *crown* в вершину (с последующим ее удалением, если получившийся граф содержит порожденный W_4) приводит к графу $\hat{G} \in \mathcal{X}'_3$ такому, что \hat{G} является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является и \tilde{G} . Выполнив достаточное количество раз таких стягиваний, мы получим граф из класса $\mathcal{X}'_3 \cap \text{Free}(\{\text{crown}\})$, 3-раскрашиваемость которого эквивалентна 3-раскрашиваемости G . Поэтому можно считать, что $b \neq c$. Если $N_G(x_1) \setminus V(H) = \emptyset$ (соответственно, $N_G(x_2) \setminus V(H) = \emptyset$), то удалим из G все вершины из $V(H) \setminus \{x_1, x_2, y_1, y_2\}$, а также x_1 (соответственно, x_2) и добавим ребра y_1y_2, x_2y_1, x_2y_2 (соответственно, ребра y_1y_2, x_1y_1, x_1y_2). Очевидно, что получившийся граф принадлежит \mathcal{X}^* и является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является G . Поэтому считаем, что $N_G(x_1) \setminus V(H) = \{a\}$, $N_G(x_2) \setminus V(H) = \{d\}$. Если $a = d$, то a является избыточной. Поэтому считаем, что $a \neq d$.

Предположим, что $H \notin \{K_3, F_4, \text{sun}\}$ — некоторое 2_G -дерево, $x, y \notin V(H)$ — две несмежные вершины, не принадлежащие общему 2_G -дереву и смежные, соответственно, с вершинами $a, b \in V(H)$. Тогда $N(a) \setminus V(H) = \{x\}$, $N(b) \setminus V(H) = \{y\}$. Удалим ребра xa и yb , а также добавим ребро xy , получившийся граф обозначим через G' . Степени вершин x и y не изменились, поэтому $G' \in \text{Free}(\{W_5\})$. Проверим, что $G' \in \text{Free}(\{K_{1,4}\})$. Действительно, если это не так, то xy должно быть одним из ребер некоторой порожденной копии $K_{1,4}$, но тогда G содержит порожденный подграф $K_{1,4}$, одним из ребер которого является xa или yb . Очевидно, что $G' \in \text{Free}(\{\text{butterfly}\})$, т. к. иначе $G \in \text{Free}(\{\text{cricket}\})$, когда

$$\deg_{\text{butterfly}}(x) = \deg_{\text{butterfly}}(y) = 2 \text{ или } \max(\deg_{\text{butterfly}}(x), \deg_{\text{butterfly}}(y)) = 4.$$

Если G' содержит порожденную копию *cricket*, то либо $G \in \text{Free}(\{\text{cricket}\})$, когда xy инцидентно вершине степени 4 и вершине степени 1 в копии *cricket*, либо $G \in \text{Free}(\{K_{1,4}\})$.

Если G' содержит порожденный W_4 , то можно считать, что $\deg_{W_4}(x) = 3$, $\deg_{W_4}(y) = 4$, т. к. иначе x и y принадлежат общему 2_G -дереву. Тогда x является избыточной. Если G' содержит порожденный *crown*, то $\deg_{\text{crown}}(x) = 4$, $\deg_{\text{crown}}(y) = 2$ или наоборот, т. к. если $\deg_{\text{crown}}(x) = \deg_{\text{crown}}(y) = 4$, то G содержит порожденный $K_{1,4}$. Легко проверить, что $\deg_G(x) = 3$, т. к. $G \in \text{Free}(\{K_{1,4}, \text{cricket}\})$ и $x \notin V(H)$. Рассмотрим граф G'' , получающийся из G удалением ребра yb и ребра образовавшегося порожденного подграфа *crown* графа G , а также добавлением ребра xb . Нетрудно видеть, что из 3-раскрашиваемости G'' следует 3-раскрашиваемость G . Действительно, это следует из того факта, что в любой 3-раскраске G'' вершины x и b имеют различные

цвета. Также очевидно, что

$$G'' \in \text{Free}(\{K_{1,4}, \text{butterfly}, \text{cricket}, \text{crown}, W_5\}).$$

Вместе с тем, $G'' \in \text{Free}(\{K_4, W_4\})$, т. к. иначе $N_{G''}(x) \subseteq V(H)$ и $G''[N_{G''}(x)] \in \{K_3, P_3\}$, что невозможно. Можно рассматривать только случай, когда $N_{G''}(x)$ состоит из трех разноцветных элементов a, v', b множества $V(H)$, т.к. иначе $G'' \in \mathcal{X}^*$ не содержит новых 2-деревьев, в которых ребро не соединяет двух одноцветных вершин, или G содержит избыточную вершину. Тогда вершины x и b должны иметь одинаковые цвета.

В H помимо вершин a, v', b степени 2 или 3 есть еще ровно одна вершина v'' степени 2 или 3. Рассмотрим произвольную 3-раскраску $G \setminus (V(H) \cup \{x\})$ и покажем, что она продолжается до 3-раскраски G . Пусть в 3-раскраске $G \setminus (V(H) \cup \{x\})$ цвета вершин x' и x'' равны 1, где x, x', x'' — все вершины степени 2 порожденного *crown* графа G' . Назначим вершинам x и b цвет 1. Если $\deg_G(v'') = 3$, то вершинам a и v' назначим цвета 2 и 3, соответственно. Такая частичная 3-раскраска H , очевидно, продолжается до 3-раскраски графа H . Предположим, что $N_G(v'') \setminus V(H) = \{u\}$.

Если b и c не принадлежат никакому 2_G -дереву или принадлежат некоторому 2_G -дереву и имеют разные цвета в 3-раскраске данного 2_G -дерева, то удалим все вершины из $V(H)$ и добавим ребро bc . По Лемме 3.2 из 3-раскрашиваемости получившегося графа будет следовать 3-раскрашиваемость графа G . Предположим, что b и c принадлежат одному 2_G -дереву H' , которым они имеют одинаковые цвета. Очевидно, что если одна из вершин a или d принадлежит H' , то ее можно удалить из G без потери свойства 3-раскрашиваемости. Поэтому считаем, что $a \notin V(H'), d \notin V(H')$. Таким образом, вершины b и a не принадлежат общему 2_G -дереву. То же верно и для вершин d и c . Удалим из G все вершины из $V(H)$, а также добавим ребра ab и cd . По Лемме 3.2, из 3-раскрашиваемости получившегося графа, который принадлежит классу \mathcal{X}^* , будет следовать 3-раскрашиваемость G .

Итак, из рассуждений предыдущих абзацев следует, что можно рассматривать только случай, когда каждое 2_G -дерево принадлежит $\{K_3, F_4, \text{sun}\}$. Для каждого 2_G -дерева удалим его из G , затем добавим треугольник и для любого $i \in \overline{1, 3}$ вершину треугольника с номером i соединим в точности с теми вершинами полученного графа, с которыми ранее были смежны вершины цвета i удаленного 2_G -дерева. Треугольник обязательно будет содержать вершину степени 2. После эллиминации всех 2_G -деревьев в получившемся графе мы удаляем все вершины степени 2. Полученный граф обозначим через G^* . Граф G^* не содержит порожденной копии K_4 и имеет максимальную степень вершин не более 3. Ясно, что из 3-раскрашиваемости G^* следует 3-раскрашиваемость G . По теореме Брукса [11], граф G^* является 3-раскрашиваемым. Значит, граф G является 3-раскрашиваемым. Поэтому данная лемма имеет место.

Доказательство завершено.

Объединив результаты Лемм 2.1 и 3.3, получим следующее утверждение, которое является основным в данной работе.

Теорема 3.1 Пусть \mathcal{X} — наследственный класс, определяемый четверкой запрещенных 5-вершинных порожденных подграфов. Тогда задача 3-ВР является полиномиально разрешимой в классе \mathcal{X} , если $\mathcal{X} \not\supseteq \mathcal{X}_i^*$ для любого $1 \leq i \leq 9$, а иначе она является NP-полной.

Благодарности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Научного Фонда (проект № 19-71-00005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness // NY, W. H. Freeman and Co. 1979. 338 p.
2. Broersma H. J., Golovach P. A., Paulusma D., Song J. Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest // Theoretical Computer Science. 2012. Vol. 414, No 1. pp. 9–19.
3. Golovach P.A., Paulusma D., Song J. 4-coloring H -free graphs when H is small // Discrete Applied Mathematics. 2013. Vol. 161, No. 1–2. pp. 140–150.
4. Hoàng C., Kamiński M., Lozin V.V., Sawada J., Shu X. Deciding k -colorability of P_5 -free graphs in polynomial time // Algorithmica. 2010. Vol. 57. pp. 74–81.
5. Bonomo F., Chudnovsky M., Maceli P., Schaudt O., Stein M., Zhong M. Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices // Combinatorica. 2018. Vol. 38, No. 4. pp. 779–801.
6. Spirkl S., Chudnovsky M., Zhong M. Four-coloring P_6 -free graphs // Symposium on Discrete Algorithms. 2019. pp. 1239–1256.
7. Huang S. Improved complexity results on k -coloring P_t -free graphs // European Journal of Combinatorics. 2016. Vol. 51. pp. 336–346.
8. Malyshev D.S. The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs // Discrete Mathematics. 2015. Vol. 338, No. 11. pp. 1860–1865.
9. Malyshev D.S. The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs // Graphs and Combinatorics. 2017. Vol. 33, No. 4. pp. 1009–1022.
10. Sirotkin D.V., Malyshev D.S. On the complexity of the vertex 3-coloring problem for the hereditary graph classes with forbidden subgraphs of small size // Journal of Applied and Industrial Mathematics. 2018. Vol. 25, No. 4. pp. 759–769.
11. Brooks R.L. On colouring the nodes of a network // Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Mathematical and Physical Sciences. 1941. Vol. 37, No. 2. pp. 194–197.

Поступила 4.12.2019

MSC2020 05C15

A complete classification of the complexity of the vertex 3-colourability problem for quadruples of induced 5-vertex prohibitions

© D. S. Malyshev¹

Abstract. The vertex 3-colourability problem for a given graph is to check whether it is possible to split the set of its vertices into three subsets of pairwise non-adjacent vertices or not. A hereditary class of graphs is a set of simple graphs closed under isomorphism and deletion of vertices; the set of its forbidden induced subgraphs defines every such a class. For all but three the quadruples of 5-vertex forbidden induced subgraphs, we know the complexity status of the vertex 3-colourability problem. Additionally, two of these three cases are polynomially equivalent; they also polynomially reduce to the third one. In this paper, we prove that the computational complexity of the considered problem in all of the three mentioned classes is polynomial. This result contributes to the algorithmic graph theory.

Key Words: vertex 3-colourability problem, hereditary graph class, polynomial-time algorithm

REFERENCES

1. M. R. Garey, D. S. Johnson, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, NY, W. H. Freeman and Co., 1979, 338 p.
2. H. J. Broersma, P. A. Golovach, D. Paulusma, J. Song, “Updating the complexity status of coloring graphs without a fixed induced linear forest”, *Theoretical Computer Science*, **414**:1 (2012), 9–19.
3. P. A. Golovach, D. Paulusma, J. Song, “4-coloring H -free graphs when H is small”, *Discrete Applied Mathematics*, **161**:1–2 (2013), 140–150.
4. C. Hoàng, M. Kamiński, V. V. Lozin, J. Sawada, X. Shu, “ k -colorability of P_5 -free graphs in polynomial time”, *Algorithmica*, **57**:1 (2010), 74–81.
5. F. Bonomo, M. Chudnovsky, P. Macei, O. Schaudt, M. Stein, M. Zhong, “Three-coloring and list three-coloring of graphs without induced paths on seven vertices”, *Combinatorica*, **38**:4 (2018), 779–801.
6. S. Spirkl, M. Chudnovsky, M. Zhong, “Four-coloring P_6 -free graphs”, *Symposium on Discrete Algorithms*, 2019, 1239–1256.
7. S. Huang, “Improved complexity results on k -coloring P_t -free graphs”, *European Journal of Combinatorics*, **51**:1 (2016), 336–346.
8. D. S. Malyshev, “The complexity of the 3-colorability problem in the absence of a pair of small forbidden induced subgraphs”, *Discrete Mathematics*, **338**:11 (2015), 1860–1865.

¹**Dmitry S. Malyshev**, Professor, Department of Applied Mathematics and Information Science, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7529-8233>, dsmalyshev@rambler.ru

9. D. S. Malyshev, “The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs”, *Graphs and Combinatorics.*, **33**:4 (2017), 1009–1022.
10. D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev, “On the complexity of the vertex 3-coloring problem for the hereditary graph classes with forbidden subgraphs of small size”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **25**:4 (2018), 759–769.
11. R. L. Brooks, “On colouring the nodes of a network”, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Mathematical and Physical Sciences.*, **37**:2 (1941), 194–197.

Submitted 4.12.2019

УДК 517.9

Асимптотика спектра дифференциального оператора четного порядка с разрывной весовой функцией

© С. И. Митрохин¹

Аннотация. Исследована краевая задача для дифференциального оператора восьмого порядка, потенциал которого является кусочно-непрерывной функцией на отрезке задания оператора. Весовая функция является кусочно-постоянной. В точке разрыва коэффициентов оператора должны выполняться условия «сопряжения», которые следуют из физических соображений. Граничные условия изучаемой краевой задачи являются разделенными и зависят от нескольких параметров. Таким образом, мы одновременно изучаем спектральные свойства целого семейства дифференциальных операторов с разрывными коэффициентами. Асимптотика решений дифференциальных уравнений, задающих оператор, выведена при больших значениях спектрального параметра. Применяя эти асимптотические разложения, исследованы условия «сопряжения», в результате чего изучены граничные условия. Выведено уравнение на собственные значения исследуемой краевой задачи. Показано, что собственные значения являются корнями некоторой целой функции. Исследована индикаторная диаграмма уравнения на собственные значения. Найдена асимптотика собственных значений в различных секторах индикаторной диаграммы.

Ключевые слова: краевая задача, спектральный параметр, дифференциальный оператор, весовая функция, кусочно-непрерывный потенциал, асимптотика собственных значений

1. Введение. Постановка задачи

Исследуем дифференциальный оператор высокого четного порядка, задаваемый на отрезке $[0; \pi]$ дифференциальными уравнениями

$$y_1^{(8)}(x) + q_1(x)y_1(x) = \lambda a^8 y_1(x), \quad 0 \leq x < x_0, \quad a > 0, \quad (1.1)$$

$$y_2^{(8)}(x) + q_2(x)y_2(x) = \lambda b^8 y_2(x), \quad x_0 < x \leq \pi, \quad b > 0, \quad (1.2)$$

с условиями «сопряжения» в точке x_0 разрыва коэффициентов

$$y_1(x_0 - 0) = y_2(x_0 + 0); \quad \frac{y_1^{(m)}(x_0 - 0)}{a^m} = \frac{y_2^{(m)}(x_0 + 0)}{b^m}, \quad m = 1, 2, \dots, 7, \quad (1.3)$$

с разделенными граничными условиями вида

$$\begin{aligned} y_1^{(m_1)}(0) = \dots = y_1^{(m_4)}(0) = y_2^{(n_1)}(\pi) = \dots = y_2^{(n_4)}(\pi) = 0, \\ m_1 < m_2 < m_3 < m_4, \quad n_1 < n_2 < n_3 < n_4; \\ m_k, n_k \in \{0, 1, 2, \dots, 7\}, \quad k = 1, 2, 3, 4. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Дифференциальные уравнения (1.1), (1.2) можно переписать в виде одного уравнения

$$y^{(8)}(x) + q(x)y(x) = \lambda \rho(x)y(x), \quad 0 \leq x \leq \pi,$$

¹Митрохин Сергей Иванович, старший научный сотрудник, Научно-исследовательский вычислительный центр, ФГБОУ ВО «Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова» (Россия, г. Москва, Ленинские Горы, д. 6.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1896-0563>, mitrokhin-sergey@yandex.ru

где

$$y(x) = \begin{cases} y_1(x), & 0 \leq x < x_0, \\ y_2(x), & x_0 < x \leq \pi; \end{cases} \quad q(x) = \begin{cases} q_1(x), & 0 \leq x < x_0, \\ q_2(x), & x_0 < x \leq \pi; \end{cases}$$

$$\rho(x) = \begin{cases} a^8, & a > 0, & 0 \leq x < x_0, \\ b^8, & b > 0, & x_0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Число $\lambda \in \mathbb{C}$ при этом называется спектральным параметром, функция $q(x)$ — потенциалом, функция $\rho(x)$ — весовой функцией. Предполагается, что потенциал $q(x)$ удовлетворяет следующим условиям гладкости:

$$\begin{aligned} q_1(x) &\in C^8[0; x_0); \quad q_2(x) \in C^8(x_0; \pi]; \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0-0} q_1(x) &= q_1(x_0) \neq \infty; \\ \exists \lim_{x \rightarrow x_0+0} q_2(x) &= q_2(x_0) \neq \infty. \end{aligned} \tag{1.5}$$

У краевой задачи (1.1)–(1.5) потенциал $q(x)$ и весовая функция $\rho(x)$ имеют в точке x_0 разрывы первого рода.

2. Из истории вопроса

Спектральные свойства дифференциальных операторов с гладкими коэффициентами изучались в работах [1–4]. В работах [5–9] исследовались дифференциальные операторы с кусочно-гладкими коэффициентами. Краевые задачи вида (1.1)–(1.5) в случае дифференциальных операторов второго и четвертого порядков с кусочно-гладким потенциалом описывают поперечные либо продольные колебания стержней и балок, составленных из материалов различной плотности. Дифференциальные операторы порядка выше четвертого фактически еще не исследованы, их изучение является актуальной задачей настоящего времени. С возрастанием порядка дифференциального оператора многократно возрастают трудности теоретического и практического исследования таких операторов.

Исследования последних десятилетий посвящены изучению случая суммируемых коэффициентов дифференциальных операторов [10–14]. Во всех упомянутых работах весовая функция была постоянной (чаще всего равнялась единице).

Дифференциальные операторы с кусочно-постоянными весовыми функциями исследовались в работах [15–18]. Исследования [19–24] посвящены различным спектральным свойствам операторов с непостоянными (гладкими) весовыми функциями либо операторы с точками разрыва внутри отрезка задания оператора. В монографии [25, с. 5] были рассмотрены операторы второго порядка с суммируемым потенциалом, весовая функция которого являлась гладкой (непостоянной) функцией, была найдена асимптотика собственных значений такого оператора. Асимптотика спектра дифференциальных операторов четвертого порядка и выше с гладкой весовой функцией до настоящего времени никем не вычислена ввиду трудностей практического характера: асимптотика решений в этом случае имеет очень сложный вид. Изучение дифференциальных операторов четвертого порядка и выше с разрывными коэффициентами является насущной математической проблемой.

3. Асимптотика решений дифференциальных уравнений (1.1)–(1.2) при $\lambda \rightarrow \infty$

Введем следующие обозначения: $\lambda = s^8$, $s = \sqrt[8]{\lambda}$, при этом для корректности дальнейших выкладок зафиксируем ту ветвь арифметического корня, для которой $\sqrt[8]{1} = +1$. Обозначим через ω_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) различные корни восьмой степени из единицы:

$$\begin{aligned} \omega_k^8 &= 1; \quad \omega_k = e^{\frac{2\pi i}{8}(k-1)} \quad (k = 1, 2, \dots, 8); \quad \omega_1 = 1; \\ \omega_2 &= e^{\frac{2\pi i}{8}} = \cos\left(\frac{2\pi}{8}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} = z; \\ \frac{4\pi i}{8} \\ \omega_3 &= e^{\frac{4\pi i}{8}} = z^2 = i, \dots, \omega_m = z^{m-1}, \quad m = 1, 2, \dots, 8; \\ \omega_{m+8} &= \omega_m; \quad \omega_8 = \bar{\omega}_2; \quad \omega_7 = \bar{\omega}_3; \quad \omega_6 = \bar{\omega}_4, \quad \omega_5 = \bar{\omega}_5 = -1. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Числа ω_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) из (3.1) делят единичную окружность на восемь равных частей (Рис. 3.1):

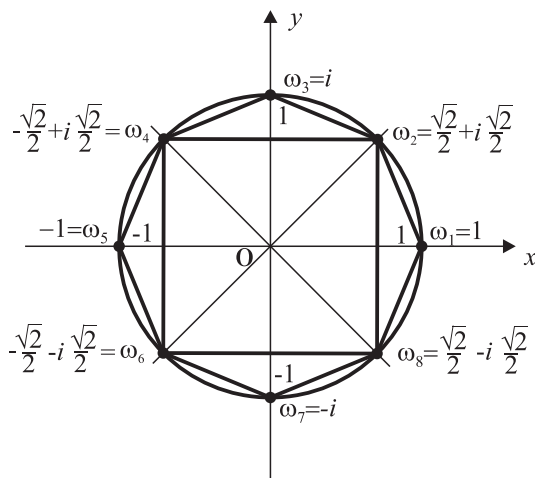


Рис. 3.1. Схема расположения корней восьмой степени из единицы.

Для чисел ω_k ($k = 1, 2, \dots, 8$) из (3.1) и Рис. 3.1 справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{k=1}^8 \omega_k^n = 0, \quad n = 1, 2, \dots, 7; \quad \sum_{k=1}^8 \omega_k^n = 8, \quad n = 0, \quad n = 8. \quad (3.2)$$

Учитывая условия гладкости (1.5), методами, примененными в монографии [26, с. 2], устанавливаются следующие утверждения.

Т е о р е м а 3.1 *Общее решение дифференциального уравнения (1.1) имеет вид*

$$y(x, s) = \sum_{k=1}^8 C_{1k} y_{1k}(x, s); \quad \frac{y_1^{(m)}(x, s)}{(as)^m} = \sum_{k=1}^8 C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m)}(x, s)}{(as)^m}, \quad m = 1, 2, \dots, 7, \quad (3.3)$$

где C_{1k} ($k = 1, 2, \dots, 8$) — произвольные постоянные, при этом для фундаментальной системы решений $\{y_{1k}(x, s)\}_{k=1}^8$ справедливы следующие асимптотические представления и оценки:

$$y_{1k}(x, s) = e^{a\omega_k s x} \left[1 + \frac{\omega_k A_{7k}(x)}{s^7} + \frac{A_{8k}^0(x)}{s^8} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^9}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 8; \quad (3.4)$$

$$y_{1k}^{(m)}(x, s) = (a\omega_k s)^m e^{a\omega_k s x} \left[1 + \frac{\omega_k A_{7k}(x)}{s^7} + \frac{A_{8k}^m(x)}{s^8} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|ax}}{s^9}\right) \right], \quad (3.5)$$

$$k = 1, 2, \dots, 8; \quad m = 1, 2, \dots, 7.$$

Для коэффициентов асимптотических разложений (3.4)–(3.5) справедливы следующие формулы:

$$A_{7k}(x) = -\frac{1}{8a^7} \int_0^x q_1(t) dt = A_7(x), \quad A_{7k}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 8; \quad (3.6)$$

$$A_{8k}^0(x) = \frac{7q_1(x) - 7q_1(0)}{16a^8}; \quad A_{8k}^1(x) = \frac{5q_1(x) - 7q_1(0)}{16a^8}; \quad A_{8k}^m(x) = \frac{(7-2m)q_1(x) - 7q_1(0)}{16a^4},$$

$$m = 0, 1, 2, \dots, 7; \quad A_{8k}^7(x) = \frac{-7q_1(x) - 7q_1(0)}{16a^8},$$

$$A_{8k}^m(x) = A_8^m(x), \quad k = 1, 2, \dots, 8. \quad (3.7)$$

При этом выполняются следующие начальные условия и свойства:

$$A_{8k}^0(0) = 0; \quad A_{7k}(0) = 0; \quad y_{1k}(0, s) = 1;$$

$$y_{1k}^{(m)}(0, s) = (as)^m \omega_k^m, \quad k = 1, 2, \dots, 8; \quad m = 1, 2, \dots, 7;$$

$$A_{8k}^0(0) = \frac{-2q_1(0)}{16a^8}; \dots; A_{8k}^m(0) = \frac{-2mq_1(0)}{16a^8}; \dots; A_{8k}^7(0) = \frac{-14q_1(0)}{16a^8};$$

$$A_{8k}^1(x) + \dots + A_{8k}^7(x) = \frac{-56q_1(0)}{16a^8}; \quad \sum_{m=0}^7 A_{8k}^m(0) = \sum_{m=0}^7 A_{8k}^m(x) = \frac{-56q_1(0)}{16a^8}, \quad (3.8)$$

$$m = 1, 2, \dots, 7.$$

Теорема 3.2 *Общее решение дифференциального уравнения (1.2) при условии гладкости (1.5) представляется в виде*

$$y_2(x, s) = \sum_{k=1}^8 C_{2k} y_{2k}(x, s); \quad \frac{y_2^{(m)}(x, s)}{(bs)^m} = \sum_{k=1}^8 C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m)}(x, s)}{(bs)^m}, \quad m = 1, 2, \dots, 7, \quad (3.9)$$

где C_{2k} ($k = 1, 2, \dots, 8$) — произвольные постоянные, при этом для фундаментальной системы решений $\{y_{2k}(x, s)\}_{k=1}^8$ справедливы асимптотические представления и оценки

$$y_{2k}(x, s) = e^{b\omega_k s x} \left[1 + \frac{\omega_k B_{7k}(x)}{s^7} + \frac{B_{8k}^0(x)}{s^8} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|bx}}{s^9}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 8; \quad (3.10)$$

$$y_{2k}^{(m)}(x, s) = (b\omega_k s)^m e^{b\omega_k s x} \left[1 + \frac{\omega_k B_{7k}(x)}{s^7} + \frac{B_{8k}^m(x)}{s^8} + O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im} s|bx}}{s^9}\right) \right], \quad (3.11)$$

$$k = 1, 2, \dots, 8; \quad m = 1, 2, \dots, 7.$$

Для коэффициентов асимптотических разложений (3.10)–(3.11) справедливы формулы

$$B_{7k}(x) = -\frac{1}{8b^7} \int_{x_0}^x q_2(t)dt = B_7(x), \quad B_{7k}(0) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, 8; \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} B_{8k}^0(x) &= \frac{7q_2(x) - 7q_2(x_0)}{16b^8}, \quad B_{8k}^1(x) = \frac{5q_2(x) - 7q_2(x_0)}{16b^8}; \dots; \\ B_{8k}^m(x) &= \frac{(7-2m)q_2(x) - 7q_2(x_0)}{16b^8}; \dots; B_{8k}^7(x) = \frac{-7q_2(x) - 7q_2(x_0)}{16b^8}, \\ B_{8k}^m(x) &= B_8^m(x), \quad k = 1, 2, \dots, 8; \quad m = 1, 2, \dots, 7. \end{aligned} \quad (3.13)$$

При этом выполняются следующие начальные условия и свойства:

$$\begin{aligned} B_{7k}^0(x_0) &= 0; \quad B_{8k}^0(x_0) = 0; \quad y_{2k}(x_0, s) = e^{b\omega_k x_0 s}; \\ y_{2k}^{(m)}(x_0, s) &= (b\omega_k s)^m e^{b\omega_k x_0 s}, \quad B_{8k}^1(x_0) = \frac{-2q_2(x_0)}{16b^8}; \dots; \\ B_{8k}^m(x_0) &= \frac{-2mq_2(x_0)}{16b^8}; \dots; B_{8k}^m(x_0) = \frac{-14q_1(x_0)}{16b^8}; \\ B_{8k}^0(x_0) + B_{8k}^1(x_0) + \dots + B_{8k}^7(x_0) &= \frac{-56q_2(x_0)}{16b^8}; \quad \sum_{m=0}^7 B_{8k}^m(x_0) = \frac{-56q_2(x_0)}{16b^8}, \\ k &= 1, 2, \dots, 8; \quad m = 1, 2, \dots, 7. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Формулы (3.3)–(3.5) и (3.9)–(3.11) позволяют изучить условия «сопряжения» (1.3).

4. Изучение условий «сопряжения» (1.3)

Из условий «сопряжения» (1.3) и формул (3.3), (3.9) получим:

$$\begin{cases} y_2(x_0 + 0, s) \stackrel{(1.3)}{=} y_1(x_0 - 0, s) \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_{2k} y_{2k}(x_0 + 0, s) = \sum_{k=1}^8 C_{1k} y_{1k}(x_0 - 0, s); \\ \frac{y_2^{(m)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^m} \stackrel{(1.3)}{=} \frac{y_1^{(m)}(x_0 - 0, s)}{(as)^m} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_{2k} \frac{y_{2k}^{(m)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^m} = \sum_{k=1}^8 C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m)}(x_0 - 0, s)}{(as)^m}, \\ m = 1, 2, \dots, 7. \end{cases} \quad (4.1)$$

Рассмотрим систему (4.1) как систему из восьми линейных уравнений с восемью неизвестными $C_{21}, C_{22}, \dots, C_{28}$ (при этом $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{18}$ – параметры). Определителем этой системы является определитель Вронского функций $y_{21}(x, s), y_{22}(x, s), \dots, y_{28}(x, s)$, который не зависит от x и не равен нулю ни в одной точке отрезка $[0; \pi]$. Применяя теорему Крамера, придем к выводу, что решение системы (4.1) единственно и находится по формулам

$$C_{21} = \frac{\Delta_{21}}{\Delta_{02}(s) \neq 0}; \quad C_{22} = \frac{\Delta_{22}}{\Delta_{02}(s)}; \dots; C_{28} = \frac{\Delta_{28}}{\Delta_{02}(s)}, \quad (4.2)$$

$$\Delta_{02}(s) = \begin{vmatrix} y_{21}(x, s) & y_{22}(x, s) & \dots & y_{27}(x, s) & y_{28}(x, s) \\ \frac{y'_{21}(x, s)}{bs} & \frac{y'_{22}(x, s)}{bs} & \dots & \frac{y'_{27}(x, s)}{bs} & \frac{y'_{28}(x, s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{21}^{(7)}(x, s)}{(bs)^7} & \frac{y_{22}^{(7)}(x, s)}{(bs)^7} & \dots & \frac{y_{27}^{(7)}(x, s)}{(bs)^7} & \frac{y_{28}^{(7)}(x, s)}{(bs)^7} \end{vmatrix} =$$

$$= \det \text{Wr}[y_{21}(x, s); y_{22}(x, s); \dots; y_{28}(x, s)] = \Delta_{02}(x, s) = \Delta_{02}(x_0, s) = \Delta_{02}(\pi, s) \neq 0, \quad (4.3)$$

определители Δ_{2n} ($n = 1, 2, \dots, 8$) из формулы (4.2) находятся из определителя $\Delta_{02}(x, s)$ формулы (4.3) заменой n -го столбца на столбец

$$\left(\sum_{k=1}^8 C_{1k} y_{1k}(x, s); \sum_{k=1}^8 C_{1k} \frac{y'_{1k}(x, s)}{as}; \dots; \sum_{k=1}^8 C_{1k} \frac{y_{1k}^{(7)}(x, s)}{(as)^7} \right)_{x=x_0-0}^*. \quad (4.4)$$

Например, определитель Δ_{21} из (4.2) вычисляется по следующей формуле:

$$\Delta_{21} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^8 C_{1k} y_{1k}(x_0 - 0, s) & y_{22}(x_0 + 0, s) & \dots & y_{28}(x_0 + 0, s) \\ \sum_{k=1}^8 C_{1k} \frac{y'_{1k}(x_0 - 0, s)}{as} & \frac{y'_{22}(x_0 + 0, s)}{bs} & \dots & \frac{y'_{28}(x_0 + 0, s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=1}^8 C_{1k} \frac{y_{1k}^{(7)}(x_0 - 0, s)}{(as)^7} & \frac{y_{22}^{(7)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^7} & \dots & \frac{y_{28}^{(7)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^7} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^8 C_{1k} \Delta_{21k},$$

$$\Delta_{21k} = \begin{vmatrix} \frac{y_{1k}(x_0 - 0, s)}{as} & \frac{y_{22}(x_0 + 0, s)}{bs} & \dots & \frac{y_{28}(x_0 + 0, s)}{bs} \\ \frac{y'_{1k}(x_0 - 0, s)}{as} & \frac{y'_{22}(x_0 + 0, s)}{bs} & \dots & \frac{y'_{28}(x_0 + 0, s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{1k}^{(7)}(x_0 - 0, s)}{(as)^7} & \frac{y_{22}^{(7)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^7} & \dots & \frac{y_{28}^{(7)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^7} \end{vmatrix}, \quad k = 1, 2, \dots, 8. \quad (4.5)$$

Аналогичным образом из (4.2)–(4.4) выведем следующие формулы:

$$\Delta_{22} = \sum_{k=1}^8 C_{1k} y_{22k}; \dots; \Delta_{2m} = \sum_{k=1}^8 C_{1k} \Delta_{2mk}, \quad m = 1, 2, \dots, 8; \dots; \Delta_{28} = \sum_{k=1}^8 C_{1k} \Delta_{28k}, \quad (4.6)$$

$$\Delta_{22k} = \begin{vmatrix} \frac{y_{21}(x_0 + 0, s)}{bs} & \frac{y_{1k}(x_0 - 0, s)}{as} & \frac{y_{23}(x_0 + 0, s)}{bs} & \dots & \frac{y_{28}(x_0 + 0, s)}{bs} \\ \frac{y'_{21}(x_0 + 0, s)}{bs} & \frac{y'_{1k}(x_0 - 0, s)}{as} & \frac{y'_{23}(x_0 + 0, s)}{bs} & \dots & \frac{y'_{28}(x_0 + 0, s)}{bs} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{21}^{(7)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^7} & \frac{y_{1k}^{(7)}(x_0 - 0, s)}{(as)^7} & \frac{y_{23}^{(7)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^7} & \dots & \frac{y_{28}^{(7)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^7} \end{vmatrix}, \quad (4.7)$$

$$k = 1, 2, \dots, 8.$$

$$\Delta_{28k} = \begin{vmatrix} \frac{y_{21}(x_0 + 0, s)}{bs} & \dots & \frac{y_{27}(x_0 + 0, s)}{bs} & \frac{y_{1k}(x_0 - 0, s)}{as} \\ \frac{y'_{21}(x_0 + 0, s)}{bs} & \dots & \frac{y'_{27}(x_0 + 0, s)}{bs} & \frac{y'_{1k}(x_0 - 0, s)}{as} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{y_{21}^{(7)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^7} & \dots & \frac{y_{27}^{(7)}(x_0 + 0, s)}{(bs)^7} & \frac{y_{1k}^{(7)}(x_0 - 0, s)}{(as)^7} \end{vmatrix}, \quad (4.8)$$

$$k = 1, 2, \dots, 8.$$

Используя асимптотические формулы (3.4)–(3.7) и (3.10)–(3.12), вычислим определители Δ_{21k} из (4.5):

$$\begin{aligned} \Delta_{21k} &= \\ &= \begin{vmatrix} e^{a\omega_k s x_0} \left[1 + \frac{\omega_k A_7(x_0)}{s^7} + \frac{A_8^0(x_0)}{s^8} + \right] & \dots & e^{b\omega_8 s x_0} \left[1 + \frac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^0(x_0)}{s^8} + \right] \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_k e^{a\omega_k s x_0} \left[1 + \frac{\omega_k A_7(x_0)}{s^7} + \frac{A_8^1(x_0)}{s^8} + \right] & \dots & \omega_8 e^{b\omega_8 s x_0} \left[1 + \frac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^1(x_0)}{s^8} + \right] \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^7 e^{a\omega_k s x_0} \left[1 + \frac{\omega_k A_7(x_0)}{s^7} + \frac{A_8^7(x_0)}{s^8} + \right] & \dots & \omega_8^7 e^{b\omega_8 s x_0} \left[1 + \frac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^7(x_0)}{s^8} + \right] \end{vmatrix} = \\ &= e^{a\omega_k s x_0} e^{b\omega_2 s x_0} (\dots) e^{b\omega_8 s x_0} \left[\Delta_{21k0} + \frac{\Delta_{21k7}}{s^7} + \frac{\Delta_{21k8}}{s^8} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad (4.9) \end{aligned}$$

$$\Delta_{21k0} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_k & \omega_2 & \omega_3 & \dots & \omega_8 \\ \omega_k^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \dots & \omega_8^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^7 & \omega_2^7 & \omega_3^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix} = \begin{cases} \Delta_{00}, & k = 1; \\ 0, & k \neq 1, \quad k = 2, 3, \dots, 8, \end{cases} \quad (4.10)$$

где Δ_{00} — определитель Вандермонда чисел $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8$,

$$\begin{aligned} \Delta_{00} &= \det \text{Wandermond}'s(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_8) = \\ &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \dots & \omega_8 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \dots & \omega_8^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^7 & \omega_2^7 & \omega_3^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix} \stackrel{(3.1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & z & z^2 & \dots & z^7 \\ 1^2 & z^2 & (z^2)^2 & \dots & (z^7)^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1^7 & z^7 & (z^2)^7 & \dots & (z^7)^7 \end{vmatrix} = \\ &= \prod_{\substack{k > n; \\ k, n = 1, 2, \dots, 8}} (\omega_k - \omega_n) = \Delta_{00} \neq 0, \end{aligned}$$

определители Δ_{21k7} и Δ_{21k8} из (4.9) можно вычислить, раскладывая определитель Δ_{21k} по столбцам на сумму определителей. Из формул (3.12)–(3.14) следует, что $B_7(x_0) = 0$, поэтому получим

$$\Delta_{21k7} = \begin{vmatrix} \omega_k A_7(x_0) & 1 & \dots & 1 \\ \omega_k \omega_k A_7(x_0) & \omega_2 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^7 \omega_k A_7(x_0) & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix} \stackrel{(4.10)}{=} \omega_k A_7(x_0) \Delta_{21k0} = \begin{cases} \omega_1 A_7(x_0) \Delta_{00}, & k = 1; \\ 0, & k = 2, 3, \dots, 7, \end{cases} \quad (4.11)$$

Пусть (δ_{ij}) ($i, j = 1, 2, \dots, 8$) — матрица алгебраических миноров к элементам (b_{ij}) ($i, j = 1, 2, \dots, 8$) определителя Δ_{00} из (4.10). Справедливо следующее утверждение.

Л е м м а 4.1

$$\begin{aligned}
(\delta_{ij}) &= \begin{pmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} & \dots & \delta_{18} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} & \dots & \delta_{28} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} & \dots & \delta_{38} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \delta_{81} & \delta_{82} & \delta_{83} & \dots & \delta_{88} \end{pmatrix} = \\
&= \frac{\Delta_{00}}{8} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots & 1 & -1 \\ -\omega_1^{-1} & \omega_2^{-1} & -\omega_3^{-1} & \omega_4^{-1} & \dots & -\omega_7^{-1} & \omega_8^{-1} \\ \omega_1^{-2} & -\omega_2^{-2} & \omega_3^{-2} & -\omega_4^{-2} & \dots & \omega_7^{-2} & -\omega_8^{-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{-6} & -\omega_2^{-6} & \omega_3^{-6} & -\omega_4^{-6} & \dots & \omega_7^{-6} & -\omega_8^{-6} \\ -\omega_1^{-7} & \omega_2^{-7} & -\omega_3^{-7} & \omega_4^{-7} & \dots & -\omega_7^{-7} & \omega_8^{-7} \end{pmatrix}. \quad (4.12)
\end{aligned}$$

В справедливости формулы (4.12) леммы можно убедиться, раскладывая определитель Δ_{00} из (4.11) на сумму определителей по строчкам или по столбцам. Идею строгого доказательства леммы можно найти в работе [17].

Используя формулу (4.12) леммы, вычислим определитель Δ_{21k8} из (4.9):

$$\begin{aligned}
\Delta_{21k8} &= \left\{ \begin{vmatrix} A_8^0(x_0) & 1 & \dots & 1 \\ \omega_k A_8^1(x_0) & \omega_2 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_7^k A_8^7(x_0) & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix}_{1k} - \begin{vmatrix} B_8^0(x_0) & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 B_8^1(x_0) & \omega_2 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_7^1 B_8^7(x_0) & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix}_2 \right. \\
&+ \begin{vmatrix} B_8^0(x_0) & 1 & \dots & 1 \\ \omega_1 B_8^1(x_0) & \omega_2 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_7^1 B_8^7(x_0) & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix}_2 + \begin{vmatrix} 1 & B_8^0(x_0) & 1 & \dots & 1 \\ \omega_k & \omega_2 B_8^0(x_0) & \omega_3 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^7 & \omega_2^7 B_8^7(x_0) & \omega_3^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix}_{3k} + \dots + \\
&+ \left. \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & B_8^0(x_0) \\ \omega_k & \omega_2 & \dots & \omega_7 & \omega_8 B_8^0(x_0) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_k^7 & \omega_2^7 & \dots & \omega_7^7 & \omega_8^7 B_8^0(x_0) \end{vmatrix}_{8k} \right\} e^{a\omega_k s x_0} e^{b\omega_2 s x_0} (\dots) e^{b\omega_8 s x_0}, \quad k = 1, 2, \dots, 8; \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|\dots|_{1k} &= A_8^0(x_0)\delta_{11} - \omega_k A_8^1(x_0)\delta_{21} + \omega_k^2 A_8^2(x_0)\delta_{31} - \dots - \omega_k^7 A_8^7(x_0)\delta_{81} \stackrel{(4.12)}{=} \\
&= \frac{\Delta_{00}}{8} \left[A_8^0(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^0 - A_8^1(x_0) \omega_k (-\omega_1^{-1}) + A_8^2(x_0) \omega_k^2 \omega_1^{-2} - \dots - A_8^7(x_0) \omega_k^7 (-\omega_1^{-7}) \right] = \\
&= \frac{\Delta_{00}}{8} \sum_{n=0}^7 A_8^n(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^n; \quad (4.14)
\end{aligned}$$

$$|\dots|_2 \stackrel{(4.13, 4.14)}{=} \frac{\Delta_{00}}{8} \sum_{n=0}^7 B_8^n(x_0) \left(\frac{\omega_1}{\omega_1} \right)^n \stackrel{(3.15)}{=} \frac{\Delta_{00} - 56q_2(x_0)}{8 \cdot 16b^8}; \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
|\dots|_2 + |\dots|_{31} + \dots + |\dots|_{81} &\stackrel{(4.13)}{=} B_8^0(x_0)[1 \cdot \delta_{11} - 1 \cdot \delta_{12} + 1 \cdot \delta_{13} - \dots - 1 \cdot \delta_{18}] + \\
&+ B_8^1(x_0)[- \omega_1 \delta_{21} + \omega_2 \delta_{22} - \omega_3 \delta_{23} + \dots + \omega_8 \delta_{28}] + \\
&+ B_8^2(x_0)[\omega_1^2 \delta_{31} - \omega_2^2 \delta_{32} + \omega_3^2 \delta_{33} - \dots - \omega_8^2 \delta_{38}] + \dots + \\
&+ B_8^7(x_0)[- \omega_1^7 \delta_{81} + \omega_2^7 \delta_{82} - \omega_3^7 \delta_{83} - \dots + \omega_8^7 \delta_{88}] = \\
&= B_8^0(x_0)\Delta_{00} + B_8^1(x_0)\Delta_{00} + B_8^2(x_0)\Delta_{00} + \dots + B_8^7(x_0)\Delta_{00} =
\end{aligned}$$

$$= \Delta_{00} \sum_{n=0}^7 B_8^n(x_0) \stackrel{(3.15)}{=} \frac{\Delta_{00}}{8} \frac{-56q_2(x_0)}{16b^8}. \quad (4.16)$$

Учитывая, что из формул (3.1) имеем $\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_8 = 0$, из формул (4.13)–(4.16) при $k = 1$ найдем

$$\begin{aligned} \Delta_{2118} &= (|\dots|_{11} - |\dots|_2) + [|\dots|_2 + |\dots|_{31} + \dots + |\dots|_{81}] e^{a\omega_1 s x_0} e^{-b\omega_1 s x_0} = \\ &= \left\{ \frac{\Delta_{00}}{8} \sum_{n=0}^7 A_8^n(x_0) - \frac{\Delta_{00}}{8} \left(\frac{-56q_2(x_0)}{16b^8} \right) + \Delta_{00} \left(\frac{-56q_2(x_0)}{16b^8} \right) = \Delta_{00} G_{11}(x_0) \right\} \times \\ &\quad \times e^{a\omega_1 s x_0} e^{-b\omega_1 s x_0}, \\ G_{11}(x_0) &= \frac{-7q_1(0)}{16a^8} - \frac{49q_2(x_0)}{16b^8}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

При $k = 2, 3, \dots, 8$ из формулы (4.13) и свойств определителей следует

$$\begin{aligned} \Delta_{21k8} &= \left\{ \begin{vmatrix} A_8^0(x_0) & 1 & \dots & 1 \\ \omega_k A_8^1(x_0) & \omega_2 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_7^k A_8^7(x_0) & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix}_{1k} - \begin{vmatrix} B_8^0(x_0) & 1 & \dots & 1 \\ \omega_k B_8^1(x_0) & \omega_2 & \dots & \omega_8 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_7^k B_8^7(x_0) & \omega_2^7 & \dots & \omega_8^7 \end{vmatrix}_{9k} \right\} \times \\ &\quad \times e^{a\omega_k s x_0} e^{-b\omega_1 s x_0} \stackrel{(4.12)}{=} \\ &= \frac{\Delta_{00}}{8} \left\{ \left[A_8^0(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^0 + A_8^1(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^1 + A_8^2(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^2 + \dots + A_8^7(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^7 \right]_{10k} - \right. \\ &\quad \left. - \left[B_8^0(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^0 + B_8^1(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^1 + B_8^2(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^2 + \dots + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_8^7(x_0) \left(\frac{\omega_k}{\omega_1} \right)^7 \right]_{11k} \right\} e^{a\omega_k s x_0} e^{-b\omega_1 s x_0}, \quad k = 1, 2, \dots, 8. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Применяя формулы (3.7)–(3.8), (3.13)–(3.14) и (3.1)–(3.2), из формулы (4.18) выведем:

$$\begin{aligned} \Delta_{21k8} &= \Delta_{00} H_{1k}, \quad H_{1k} = \frac{1}{8} \frac{D_{1k}}{16} \Delta \tilde{q}(x_0), \quad \Delta \tilde{q}(x_0) = \frac{q_1(x_0)}{a^8} - \frac{q_2(x_0)}{b^8}, \\ D_{1k} &= 7\omega_k^0 + 5\omega_k^1 + 3\omega_k^2 + \omega_k^3 - \omega_k^4 - 3\omega_k^5 - 5\omega_k^6 - 7\omega_k^7, \quad k = 2, 3, \dots, 8, \end{aligned} \quad (4.19)$$

$\Delta \tilde{q}(x_0)$ — обобщенный «скачок» потенциала $q(x)$ в точке x_0 разрыва коэффициентов.

Для определителей Δ_{22k} ($k = 1, 2, \dots, 8$) из (4.6)–(4.8) аналогично формуле (4.9)–(4.11) получим:

$$\begin{aligned} \Delta_{22k} &= e^{b\omega_1 s x_0} e^{a\omega_k s x_0} e^{b\omega_3 s x_0} (\dots) e^{b\omega_8 s x_0} \times \\ &\times \begin{vmatrix} \left[1 + \frac{\omega_1 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^0(x_0)}{s^8} + \right] & \dots & \left[1 + \frac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^0(x_0)}{s^8} + \right] \\ \omega_1 \left[1 + \frac{\omega_1 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^1(x_0)}{s^8} + \right] & \dots & \omega_8 \left[1 + \frac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^1(x_0)}{s^8} + \right] \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_7^k \left[1 + \frac{\omega_1 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^7(x_0)}{s^8} + \right] & \dots & \omega_8^k \left[1 + \frac{\omega_8 B_7(x_0)}{s^7} + \frac{B_8^7(x_0)}{s^8} + \right] \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$k = 1, 2, 3, \dots, 8.$$

Раскладывая определители формулы (4.20) по столбцам на сумму определителей, применяя свойства определителей и формулы (3.1)–(3.2), аналогично формулам (4.9)–(4.19) найдем:

$$\Delta_{22k} = e^{a\omega_k s x_0} e^{-b\omega_2 s x_0} \left[\Delta_{22k0} + \frac{\Delta_{22k7}}{s^7} + \frac{\Delta_{22k8}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right], \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad (4.21)$$

$$\Delta_{22k0} = \begin{cases} \Delta_{00}, & k = 2; \\ 0, & k \neq 2, \quad k = 1, 3, 4, \dots, 8; \end{cases} \quad (4.22)$$

$$\Delta_{22k7} = \omega_k A_7(x_0) \Delta_{22k0} = \begin{cases} \omega_2 A_7(x_0) \Delta_{00}, & k = 2; \\ 0, & k \neq 2, \quad k = 1, 3, 4, \dots, 8; \end{cases} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{22k8} &= \Delta_{00} G_{22}(x_0) e^{a\omega_2 s x_0} e^{-b\omega_2 s x_0}, \\ G_{22}(x_0) &= \frac{-7q_1(0)}{16a^8} - \frac{49q_2(0)}{16a^8} \stackrel{(4.17)}{=} G_{11}(x_0); \end{aligned} \quad (4.24)$$

$$\begin{aligned} \Delta_{22k8} &= \Delta_{00} H_{2k}, \quad H_{2k} = \frac{1}{8} \frac{D_{2k}}{16} \Delta \tilde{q}(x_0), \\ D_{2k} &= 7 \left(\frac{\omega_k}{\omega_2} \right)^0 + 5 \left(\frac{\omega_k}{\omega_2} \right)^1 + 3 \left(\frac{\omega_k}{\omega_2} \right)^2 + \left(\frac{\omega_k}{\omega_2} \right)^3 - \left(\frac{\omega_k}{\omega_2} \right)^4 - \\ &\quad - 3 \left(\frac{\omega_k}{\omega_2} \right)^5 - 5 \left(\frac{\omega_k}{\omega_2} \right)^6 - 7 \left(\frac{\omega_k}{\omega_7} \right)^7, \quad k \neq 2, \quad k = 1, 3, 4, \dots, 8. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Из формул (3.1) имеем $\frac{\omega_k}{\omega_2} = \frac{\omega_{k-1}}{\omega_1} = \omega_{k-1}$ ($k = 2, 3, \dots, 8$), поэтому из формул (4.19) и (4.25) получим:

$$D_{23} = D_{12}, \quad D_{24} = D_{13}, \dots, D_{2m} = D_{1,m-1} \quad (m = 3, 4, \dots, 8), \quad D_{21} = D_{18}. \quad (4.26)$$

Изучая аналогичным образом определители $\Delta_{23}, \Delta_{24}, \dots, \Delta_{28}$ из (4.6)–(4.8), получим формулы, аналогичные формулам (4.20)–(4.26) и придем к выводу, что справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.1 *Матрица*

$$(\Delta_{2mk}) = \begin{pmatrix} \Delta_{211} & \Delta_{212} & \dots & \Delta_{218} \\ \Delta_{221} & \Delta_{222} & \dots & \Delta_{228} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Delta_{281} & \Delta_{282} & \dots & \Delta_{288} \end{pmatrix}$$

имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} &(\Delta_{2mk}) = \Delta_{00} \times \quad (4.27) \\ &\times \begin{pmatrix} e^{(a\omega_1 - b\omega_1)sx_0} \left[1 + \frac{\omega_1 A_7(x_0)}{s^7} + \frac{G_{11}(x_0)}{s^8} + \dots \right] & \dots & e^{(a\omega_8 - b\omega_1)sx_0} \left[0 + \frac{0}{s^7} + \frac{H_{18}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] \\ e^{(a\omega_1 - b\omega_2)sx_0} \left[0 + \frac{0}{s^7} + \frac{H_{18}}{s^8} + \dots \right] & \dots & e^{(a\omega_8 - b\omega_2)sx_0} \left[0 + \frac{0}{s^7} + \frac{H_{17}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] \\ \dots & \dots & \dots \\ e^{(a\omega_1 - b\omega_7)sx_0} \left[0 + \frac{0}{s^7} + \frac{H_{13}}{s^8} + \dots \right] & \dots & e^{(a\omega_8 - b\omega_7)sx_0} \left[0 + \frac{0}{s^7} + \frac{H_{12}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] \\ e^{(a\omega_1 - b\omega_8)sx_0} \left[0 + \frac{0}{s^7} + \frac{H_{12}}{s^8} + \dots \right] & \dots & e^{(a\omega_8 - b\omega_8)sx_0} \left[1 + \frac{\omega_8 A_7(x_0)}{s^7} + \frac{G_{88}(x_0)}{s^8} + \dots \right] \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$G_{kk}(x_0) = G_{11}(x_0) = \frac{-7q_1(0)}{16a^8} - \frac{-49q_2(0)}{16b^8}, \quad k = 1, 2, \dots, 8, \quad (4.28)$$

$H_{12}, H_{13}, \dots, H_{18}$ определены формулами (4.19).

5. Изучение граничных условий (1.4)

Применяя формулы (3.3)–(3.8), (3.9)–(3.11) и (4.2)–(4.6), из граничных условий (1.4) получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} y_1^{(m_p)}(0, s) \stackrel{(1.4)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_{1k} \frac{y_{1k}^{(m_p)}(0, s)}{(as)^{m_p}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_{1k} \omega_k^{m_p} = 0, \quad p = 1, 2, 3, 4; \\ y_2^{(n_r)}(\pi, s) \stackrel{(1.4)}{=} 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_{2k} \frac{y_{2k}^{(n_r)}(\pi, s)}{(bs)^{n_r}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 \frac{\Delta_{2k}}{\Delta_{02}(s) \neq 0} \frac{y_{2k}^{(n_r)}(\pi, s)}{(bs)^{n_r}} = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 \left(\sum_{n=1}^8 C_{1n} \Delta_{2kn} \right) \frac{y_{2k}^{(n_r)}(\pi, s)}{(bs)^{n_r}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^8 C_{1k} \psi_{1k}^{(n_r)}(\pi, s) = 0, \\ \psi_{1k}^{(n_r)}(\pi, s) = \sum_{n=1}^8 \Delta_{2nk} \frac{y_{2k}^{(n_r)}(\pi, s)}{(bs)^{n_r}}, \quad r = 1, 2, 3, 4. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Система (5.1) — это система из восьми линейных однородных уравнений с восемью неизвестными $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{18}$. Из метода Крамера следует, что такая система имеет ненулевое решение только в случае, когда ее определитель равен нулю. Поэтому верна следующая теорема.

Т е о р е м а 5.1 Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1.1)–(1.5) имеет следующий вид:

$$f(s) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{18} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{41} & b_{42} & \dots & b_{48} \\ b_{51} & b_{52} & \dots & b_{58} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{81} & b_{82} & \dots & b_{88} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \dots & \omega_8^{m_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_1^{m_4} & \omega_2^{m_4} & \dots & \omega_8^{m_4} \\ \psi_{11}^{(n_1)}(\pi, s) & \psi_{12}^{(n_1)}(\pi, s) & \dots & \psi_{18}^{(n_1)}(\pi, s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \psi_{11}^{(n_4)}(\pi, s) & \psi_{12}^{(n_4)}(\pi, s) & \dots & \psi_{18}^{(n_4)}(\pi, s) \end{vmatrix} = 0, \quad (5.2)$$

$$b_{pk} = \omega_k^{m_p}, \quad p = 1, 2, 3, 4; \quad b_{pk} = \psi_{1k}^{(n_p)}(\pi, s), \quad p = 5, 6, 7, 8, \quad k = 1, 2, \dots, 8.$$

Применяя теорему Лапласа, разложим определитель $f(s)$ из (5.2) по последним четырем строкам, в результате получим:

$$f(s) = \phi_{1234} W_{5678} + \phi_{2345} W_{1678} + \phi_{3456} W_{1278} + \phi_{4567} W_{1238} + \dots - \phi_{1345} W_{2678} + \dots = 0, \quad (5.3)$$

$$\phi_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \begin{vmatrix} \psi_{1k_1}^{(n_1)}(\pi, s) & \dots & \psi_{1k_4}^{(n_1)}(\pi, s) \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi_{1k_1}^{(n_4)}(\pi, s) & \dots & \psi_{1k_4}^{(n_4)}(\pi, s) \end{vmatrix},$$

$$W_{k_1 k_2 k_3 k_4} = \begin{vmatrix} \frac{y_{1k_1}^{(m_1)}(0, s)}{(as)^{m_1}} & \cdots & \frac{y_{1k_4}^{(m_1)}(0, s)}{(as)^{m_1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{y_{1k_1}^{(m_4)}(0, s)}{(as)^{m_4}} & \cdots & \frac{y_{1k_4}^{(m_4)}(0, s)}{(as)^{m_4}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{1k_1} & \cdots & b_{1k_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{4k_1} & \cdots & b_{4k_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega_{k_1}^{m_1} & \cdots & \omega_{k_4}^{m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{k_1}^{m_4} & \cdots & \omega_{k_4}^{m_4} \end{vmatrix}, \quad (5.4)$$

$$k_1 k_2 k_3 k_4 \in \{1, 2, \dots, 8\}.$$

В уравнении (5.3) знаки слагаемых определяются знаками соответствующих перестановок индексов: перестановки (12345678), (23451678), (34561278) (45671238) четные, поэтому знак «+», перестановка (13452678) нечетная, поэтому знак «-».

Применяя формулы (3.1), вычислим определители $W_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ из (5.4):

$$W_{1234} = \begin{vmatrix} \omega_1^{m_1} & \omega_2^{m_1} & \omega_3^{m_1} & \omega_4^{m_1} \\ \omega_1^{m_2} & \omega_2^{m_2} & \omega_3^{m_2} & \omega_4^{m_2} \\ \omega_1^{m_3} & \omega_2^{m_3} & \omega_3^{m_3} & \omega_4^{m_3} \\ \omega_1^{m_4} & \omega_2^{m_4} & \omega_3^{m_4} & \omega_4^{m_4} \end{vmatrix} \stackrel{(3.1)}{=} \begin{vmatrix} 1^{m_1} & z^{m_1} & z^{2m_1} & z^{3m_1} \\ 1^{m_2} & z^{m_2} & z^{2m_2} & z^{3m_2} \\ 1^{m_3} & z^{m_3} & z^{2m_3} & z^{3m_3} \\ 1^{m_4} & z^{m_4} & z^{2m_4} & z^{3m_4} \end{vmatrix} =$$

$$= \det \text{Wandermond}'s(z^{m_1}, z^{m_2}, z^{m_3}, z^{m_4}) = \prod_{\substack{k > n, \\ k, n = 1, 2, 3, 4}} (z^{m_k} - z^{m_n}) = P_4 \neq 0; \quad (5.5)$$

$$W_{2345} = \begin{vmatrix} \omega_2^{m_1} & \cdots & \omega_5^{m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_2^{m_4} & \cdots & \omega_5^{m_4} \end{vmatrix} \stackrel{(3.1)}{=} \begin{vmatrix} z^{m_1} & \cdots & z^{4m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{m_4} & \cdots & z^{4m_4} \end{vmatrix} = z^{m_1} z^{m_2} z^{m_3} z^{m_4} \begin{vmatrix} 1^{m_1} & \cdots & z^{3m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1^{m_4} & \cdots & z^{3m_4} \end{vmatrix} \stackrel{(5.7)}{=} \\ = z^{M_4} P_4, \quad M_4 = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 = \sum_{k=1}^4 m_k; \quad (5.6)$$

$$W_{3456} = \begin{vmatrix} \omega_3^{m_1} & \cdots & \omega_6^{m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_3^{m_4} & \cdots & \omega_6^{m_4} \end{vmatrix} \stackrel{(3.1)}{=} \begin{vmatrix} z^{2m_1} & \cdots & z^{5m_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ z^{2m_4} & \cdots & z^{5m_4} \end{vmatrix} = z^{2M_4} P_4;$$

$$W_{4567} = z^{3M_4} P_4; \quad W_{5678} = z^{4M_4} P_4; \quad W_{6789} = (-1)W_{1678} = z^{5M_4} P_4, \dots \quad (5.7)$$

Используя формулы (5.1), (4.27), (3.10)–(3.14), выпишем определитель ϕ_{1234} из (5.3):

$$\phi_{1234} = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{vmatrix},$$

$$U_{m1} = \Delta_{211} \frac{y_{21}^{(n_m)}(\pi, s)}{(bs)^{n_m}} + \Delta_{221} \frac{y_{22}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_m}} + \Delta_{231} \frac{y_{23}^{(n_1)}(\pi, s)}{(bs)^{n_m}} + \dots;$$

$$\Delta_{mk} = \sum_{p=1}^8 \Delta_{2pk} \frac{y_{2p}^{(n_m)}(\pi, s)}{(bs)^{n_m}}, \quad m = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, 3, 4, \quad (5.8)$$

при этом из (4.27) следует, что основными по росту переменной s являются определители $\Delta_{211}, \Delta_{222}, \Delta_{233}, \Delta_{244}, \dots$

В более удобном виде определитель ϕ_{1234} перепишем следующим образом:

$$\phi_{1234} = \begin{vmatrix} U_{11} & U_{12} & U_{13} & U_{14} \\ U_{21} & U_{22} & U_{23} & U_{24} \\ U_{31} & U_{32} & U_{33} & U_{34} \\ U_{41} & U_{42} & U_{43} & U_{44} \end{vmatrix},$$

$$\begin{aligned}
U_{m1} &= e^{M\omega_1 s} \omega_1^{n_m} \left[1 + \frac{\omega_1 \psi_7}{s^7} + \frac{V_{11}^{n_m}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] + \frac{H_{18}}{s^8} \omega_2^{n_m} e^{A\omega_1 s} e^{B\omega_2 s} + \\
&+ \frac{H_{17}}{s^8} \omega_3^{n_m} e^{A\omega_1 s} e^{B\omega_3 s} + \frac{H_{16}}{s^8} \omega_4^{n_m} e^{A\omega_1 s} e^{B\omega_4 s} + \frac{H_{15}}{s^8} \omega_5^{n_m} e^{A\omega_1 s} e^{B\omega_5 s} + \dots; \\
U_{m2} &= e^{M\omega_2 s} \omega_2^{n_m} \left[1 + \frac{\omega_2 \psi_7}{s^7} + \frac{V_{11}^{n_m}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] + \frac{H_{12}}{s^8} \omega_1^{n_m} e^{A\omega_2 s} e^{B\omega_1 s} + \\
&+ \frac{H_{18}}{s^8} \omega_3^{n_m} e^{A\omega_2 s} e^{B\omega_3 s} + \frac{H_{17}}{s^8} \omega_4^{n_m} e^{A\omega_2 s} e^{B\omega_4 s} + \frac{H_{16}}{s^8} \omega_5^{n_m} e^{A\omega_2 s} e^{B\omega_5 s} + \dots; \\
U_{m3} &= e^{M\omega_3 s} \omega_3^{n_m} \left[1 + \frac{\omega_3 \psi_7}{s^7} + \frac{V_{11}^{n_m}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] + \frac{H_{13}}{s^8} \omega_1^{n_m} e^{A\omega_3 s} e^{B\omega_1 s} + \\
&+ \frac{H_{12}}{s^8} \omega_2^{n_m} e^{A\omega_3 s} e^{B\omega_2 s} + \frac{H_{18}}{s^8} \omega_4^{n_m} e^{A\omega_3 s} e^{B\omega_4 s} + \frac{H_{17}}{s^8} \omega_5^{n_m} e^{A\omega_3 s} e^{B\omega_5 s} + \dots; \\
U_{m4} &= e^{M\omega_4 s} \omega_4^{n_m} \left[1 + \frac{\omega_4 \psi_7}{s^7} + \frac{V_{11}^{n_m}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] + \frac{H_{14}}{s^8} \omega_1^{n_m} e^{A\omega_4 s} e^{B\omega_1 s} + \\
&+ \frac{H_{13}}{s^8} \omega_2^{n_m} e^{A\omega_4 s} e^{B\omega_2 s} + \frac{H_{12}}{s^8} \omega_3^{n_m} e^{A\omega_4 s} e^{B\omega_3 s} + \frac{H_{18}}{s^8} \omega_5^{n_m} e^{A\omega_4 s} e^{B\omega_5 s} + \dots, \quad (5.9)
\end{aligned}$$

$m = 1, 2, 3, 4,$

где введены следующие обозначения:

$$\psi_7 = A_7(x_0) + B_7(\pi); \quad V_{11}^{n_m} = G_{11}(x_0) + B_8^{n_m}(\pi); \quad A = ax_0, \quad B = b(\pi - x_0), \quad M = A + B. \quad (5.10)$$

Аналогичным образом выписывается определитель ϕ_{2345} из (5.3)–(5.4):

$$\begin{aligned}
\phi_{2345} &= \begin{vmatrix} U_{12} & U_{13} & U_{14} & U_{15} \\ U_{22} & U_{23} & U_{24} & U_{25} \\ U_{32} & U_{33} & U_{34} & U_{35} \\ U_{42} & U_{43} & U_{44} & U_{45} \end{vmatrix}, \\
U_{m5} &= e^{M\omega_5 s} \omega_5^{n_m} \left[1 + \frac{\omega_5 \psi_7}{s^7} + \frac{V_{11}^{n_m}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right] + \frac{H_{15}}{s^8} \omega_1^{n_m} e^{A\omega_5 s} e^{B\omega_1 s} + \\
&+ \frac{H_{14}}{s^8} \omega_2^{n_m} e^{A\omega_5 s} e^{B\omega_2 s} + \frac{H_{13}}{s^8} \omega_3^{n_m} e^{A\omega_5 s} e^{B\omega_3 s} + \frac{H_{12}}{s^8} \omega_4^{n_m} e^{A\omega_5 s} e^{B\omega_4 s} + \dots, \quad (5.11)
\end{aligned}$$

$m = 1, 2, 3, 4,$

элементы U_{m2}, U_{m3}, U_{m4} ($m = 1, 2, 3, 4$) определены формулами (5.9)–(5.10).

Из формул (5.9)–(5.11) видно, что при вычислении определителей ϕ_{1234} и ϕ_{2345} основными по росту переменной s будут экспоненты $e^{M\omega_1 s} e^{M\omega_2 s} e^{M\omega_3 s} e^{M\omega_4 s}$ и $e^{M\omega_2 s} e^{M\omega_3 s} e^{M\omega_4 s} e^{M\omega_5 s}$. Аналогичным образом при вычислении определителя $\phi_{k_1 k_2 k_3 k_4}$ из (5.2)–(5.4) основными по росту s будут экспоненты $e^{M\omega_{k_1} s} e^{M\omega_{k_2} s} e^{M\omega_{k_3} s} e^{M\omega_{k_4} s}$. Таким образом, чтобы получить индикаторную диаграмму (см. [27, с. 12]) уравнения (5.2)–(5.4) (а это нужно сделать для нахождения корней данного уравнения), необходимо изучить выпуклую оболочку множества точек $\{\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + \omega_{k_4}\}$, $k_n \in \{1, 2, \dots, 8\}$, $n = 1, 2, 3, 4$, индексы попарно различны.

Индикаторная диаграмма уравнения (5.2)–(5.4) представлена на Рис. 5.1.

Из Рис. 5.1 видно, что индикаторная диаграмма уравнения (5.2)–(5.4) — это правильный восьмиугольник с вершинами в точках $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 \stackrel{(3.1)}{=} 1 + (\sqrt{2} + 1)i$, $\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 \stackrel{(3.1)}{=} -1 + (\sqrt{2} + 1)i$, $\omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6, \dots, \omega_7 + \omega_8 + \omega_1 + \omega_2, \omega_8 + \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$. Точки $\omega_{k_1} + \omega_{k_2} + \omega_{k_3} + \omega_{k_4}$ при $|k_m - k_n| \geq 2$ попадают внутрь индикаторной диаграммы

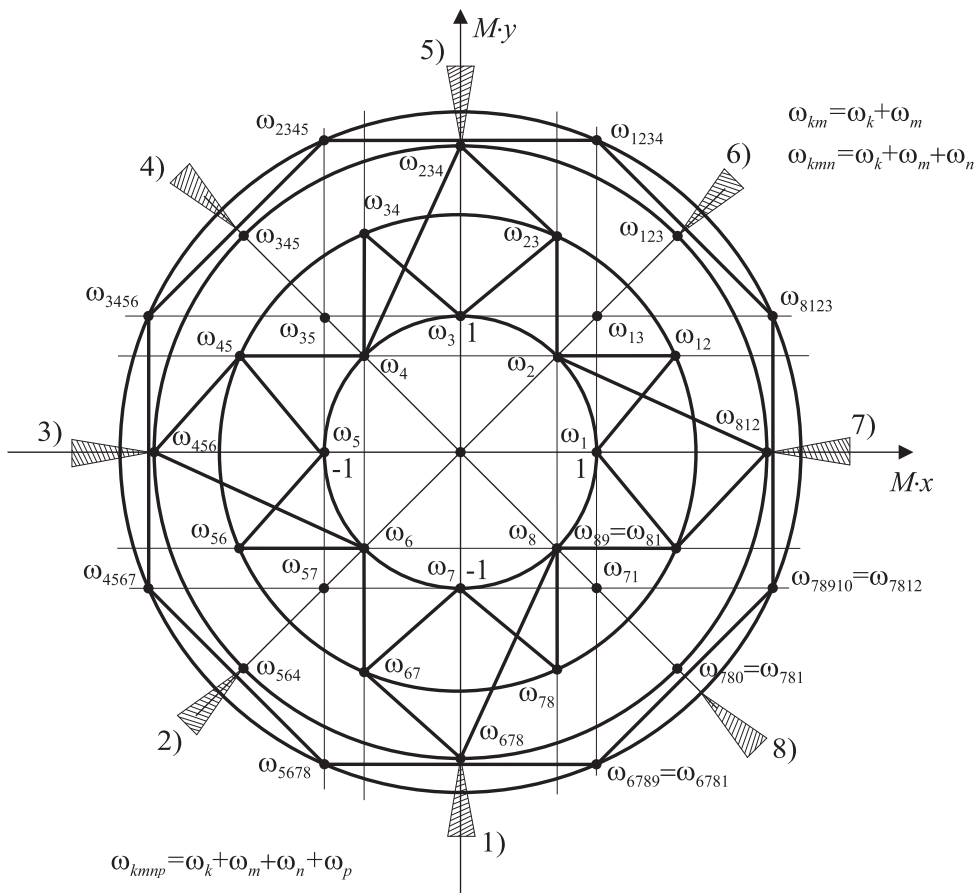


Рис. 5.1. Индикаторная диаграмма уравнения (5.2)–(5.4).

и на асимптотику корней уравнения (5.2)–(5.4) не влияют (см. [27, с. 12]). Индикаторная диаграмма показывает, что корни уравнения (5.2)–(5.4) находятся в восьми секторах 1), 2), ..., 8) бесконечно малого раствора, биссектрисы которых являются серединными перпендикулярами к сторонам этого правильного восьмиугольника.

6. Асимптотика собственных значений в секторе 1) индикаторной диаграммы

Чтобы найти асимптотику корней уравнения (5.2)–(5.4) в секторе 1) индикаторной диаграммы Рис. 5.1, в этом уравнении необходимо оставить экспоненты с показателями $\bar{\omega}_{6781} = \omega_{1234}$ и $\bar{\omega}_{5678} = \omega_{2345}$, поэтому верно следующее утверждение.

Т е о р е м а 6.1 Уравнение на собственные значения дифференциального оператора (1.1)–(1.5) в секторе 1) индикаторной диаграммы 5.1 имеет вид

$$g_1(s) = \phi_{1234} W_{5678} + \phi_{2345} W_{1678} \stackrel{(5.7), (5.9)}{=} \phi_{1234} z^{4M_4} P_4 - \phi_{2345} z^{5M_4} P_4 = 0. \quad (6.1)$$

Разделим в уравнении (6.1) на $z^{4M_4} P_4 \neq 0$ и приведем его к виду

$$g_1(s) = \phi_{1234} - z^{4M_4} \phi_{2345} = 0, \quad (6.2)$$

где ϕ_{1234} и ϕ_{2345} определены формулами (5.9)–(5.11).

Раскладывая определители ϕ_{1234} из (5.9) и ϕ_{2345} из (5.11) по столбцам на сумму определителей, используя свойства определителей, выведем

$$\phi_{1234} = R_{12340} + \frac{R_{12347}}{s^7} + \frac{R_{12348}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right), \quad (6.3)$$

$$\phi_{2345} = R_{23450} + \frac{R_{23457}}{s^7} + \frac{R_{23458}}{s^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right), \quad (6.4)$$

$$R_{12340} = \begin{vmatrix} \omega_1^{n_1} e^{M\omega_1 s} & \omega_2^{n_1} e^{M\omega_2 s} & \omega_3^{n_1} e^{M\omega_3 s} & \omega_4^{n_1} e^{M\omega_4 s} \\ \omega_1^{n_2} e^{M\omega_1 s} & \omega_2^{n_2} e^{M\omega_2 s} & \omega_3^{n_2} e^{M\omega_3 s} & \omega_4^{n_2} e^{M\omega_4 s} \\ \omega_1^{n_3} e^{M\omega_1 s} & \omega_2^{n_3} e^{M\omega_2 s} & \omega_3^{n_3} e^{M\omega_3 s} & \omega_4^{n_3} e^{M\omega_4 s} \\ \omega_1^{n_4} e^{M\omega_1 s} & \omega_2^{n_4} e^{M\omega_2 s} & \omega_3^{n_4} e^{M\omega_3 s} & \omega_4^{n_4} e^{M\omega_4 s} \end{vmatrix} = R_4 e^{M(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s}, \quad (6.5)$$

$$R_4 = \begin{vmatrix} \omega_1^{n_1} & \omega_2^{n_1} & \omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1} \\ \omega_1^{n_2} & \omega_2^{n_2} & \omega_3^{n_2} & \omega_4^{n_2} \\ \omega_1^{n_3} & \omega_2^{n_3} & \omega_3^{n_3} & \omega_4^{n_3} \\ \omega_1^{n_4} & \omega_2^{n_4} & \omega_3^{n_4} & \omega_4^{n_4} \end{vmatrix} \stackrel{(5.7)}{=} \prod_{\substack{k > m; \\ k, m = 1, 2, 3, 4}} (z^{n_k} - z^{n_m}) \neq 0, \quad (6.6)$$

$$R_{23450} = \begin{vmatrix} \omega_2^{n_1} e^{M\omega_2 s} & \dots & \omega_5^{n_1} e^{M\omega_5 s} \\ \dots & \dots & \dots \\ \omega_2^{n_4} e^{M\omega_2 s} & \dots & \omega_5^{n_4} e^{M\omega_5 s} \end{vmatrix} \stackrel{(5.8)}{=} z^{N_4} R_4 e^{M(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5)s}, \quad N_4 = \sum_{k=1}^4 n_k; \quad (6.7)$$

$$R_{12347} = (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4) \psi_7 R_4 e^{M(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s}; \quad (6.8)$$

$$R_{23457} = (\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5) \psi_7 z^{N_4} R_4 e^{M(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5)s}; \quad (6.9)$$

$$R_{12348} = R_{123481} + R_{123482}; \quad R_{23458} = R_{234581} + R_{234582}; \quad (6.10)$$

$$R_{123481} = R_4 e^{M(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s} \sum_{k=1}^4 V_{11}^{n_k}; \quad R_{234581} = R_4 z^{N_4} e^{M(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5)s} \sum_{k=1}^4 V_{11}^{n_k}; \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} R_{123482} &= H_{15} e^{A\omega_1 s} e^{B\omega_5 s} \begin{vmatrix} \omega_5^{n_1} & \omega_2^{n_1} & \omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_5^{n_4} & \omega_2^{n_4} & \omega_3^{n_4} & \omega_4^{n_4} \end{vmatrix} e^{M(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s} = \\ &= (-1) R_4 z^{N_4} H_{15} e^{A\omega_1 s} e^{B\omega_5 s} e^{M(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s}; \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} R_{234582} &= H_{15} e^{A\omega_5 s} e^{B\omega_1 s} \begin{vmatrix} \omega_2^{n_1} & \omega_3^{n_1} & \omega_4^{n_1} & \omega_1^{n_1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_2^{n_4} & \omega_3^{n_4} & \omega_4^{n_4} & \omega_1^{n_4} \end{vmatrix} e^{M(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s} = \\ &= (-1) R_4 H_{15} e^{A\omega_5 s} e^{B\omega_1 s} e^{M(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4)s}. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Подставим формулы (6.3)–(6.13) в уравнение (6.2), разделим на $R_4 e^{M(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5)s} \neq 0$ и приведем это уравнение к следующему виду:

$$\begin{aligned} g_1(s) &= \left\{ e^{M(\omega_1 - \omega_5)s} + \frac{1}{s^7} \sum_{k=1}^4 \omega_k \psi_7 e^{M(\omega_1 - \omega_5)s} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{s^8} \frac{1}{R_4} [R_{123481} + R_{123482}] e^{-M \sum_{k=2}^5 \omega_k s} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right) \right\} - \end{aligned}$$

$$-\left\{z^{M_4}z^{N_4} + \frac{1}{s^7} \sum_{k=2}^5 \omega_k \psi_7 z^{M_4}z^{N_4} + \frac{1}{s^8} \frac{1}{R_4} [R_{234581} + R_{234582}] e^{-M \sum_{k=2}^5 \omega_k s} + \underline{O}\left(\frac{1}{s^9}\right)\right\} = 0. \quad (6.14)$$

Основное приближение уравнения (6.14) имеет вид

$$e^{M(\omega_1 - \omega_5)s} - z^{M_4}z^{N_4} = 0 \stackrel{(3.1)}{\Leftrightarrow} e^{M(\omega_1 - \omega_5)s} = e^{2\pi i k} e^{\frac{2\pi i}{8}(M_4 + N_4)} \Leftrightarrow s_{k,1,\text{оч}} = \frac{2\pi i \tilde{k}}{M(\omega_1 - \omega_5)}, \quad (6.15)$$

$$\tilde{k} = k + \frac{M_4 + N_4}{8}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Основное приближение (6.15) позволяет найти асимптотику корней уравнения (6.14) в секторе 1) (см. [2, 28]).

Т е о р е м а 6.2 *Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1.1)–(1.5) в секторе 1) имеет следующий вид:*

$$s_{k,1} = \frac{2\pi i}{M(\omega_1 - \omega_5)} \left[\tilde{k} + \frac{d_{7k_1}}{\tilde{k}^7} + \frac{d_{8k_1}}{\tilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^9}\right) \right], \quad (6.16)$$

$$\tilde{k} = k + \frac{M_n + N_n}{8}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства теоремы 6.2 покажем, что все коэффициенты d_{7k_1}, d_{8k_1} асимптотического разложения (6.16) находятся единственным образом. Применяя формулы Маклорена, запишем:

$$e^{M(\omega_1 - \omega_5)s} \Big|_{s_{k,1}} = \exp \left[M(\omega_1 - \omega_5) \frac{2\pi i}{M(\omega_1 - \omega_5)} \left(\tilde{k} + \frac{d_{7k_1}}{\tilde{k}^7} + \dots \right) \right] =$$

$$= z^{M_4}z^{N_4} \left[1 + \frac{2\pi i d_{7k_1}}{\tilde{k}^7} + \frac{2\pi i d_{8k_1}}{\tilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^9}\right) \right]; \quad (6.17)$$

$$\frac{1}{s^n} \Big|_{s_{k,1}} = \frac{1}{\tilde{k}^n} \left(1 + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^8}\right) \right) \frac{M^n(\omega_1 - \omega_5)^n}{(2\pi i)^n}, \quad n = 7, n = 8. \quad (6.18)$$

Подставляя формулы (6.16)–(6.18) в уравнение (6.14), получим:

$$\begin{aligned} & \left[z^{M_4}z^{N_4} + z^{M_4}z^{N_4} \frac{2\pi i d_{7k_1}}{\tilde{k}^7} + z^{M_4}z^{N_4} \frac{2\pi i d_{8k_1}}{\tilde{k}^8} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^9}\right) - z^{M_4}z^{N_4} \right] + \\ & + \frac{1}{\tilde{k}^7} \psi_7 \sum_{k=1}^4 \omega_k z^{M_4}z^{N_4} \frac{M^7(\omega_1 - \omega_5)^7}{2^7 \pi^7 i^7} + \\ & + \frac{1}{\tilde{k}^8} \frac{1}{R_4} \frac{M^8(\omega_1 - \omega_5)^8}{2^8 \pi^8 i^8} [R_{123481} + R_{123482}] e^{-M \sum_{k=2}^5 \omega_k s} \Big|_{s_{k,1}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^9}\right) - \\ & - \frac{1}{\tilde{k}^7} \psi_7 z^{M_4}z^{N_4} \sum_{k=2}^5 \omega_k \frac{M^7(\omega_1 - \omega_5)^7}{2^7 \pi^7 i^7} - \\ & - \frac{1}{\tilde{k}^8} \frac{1}{R_4} \frac{M^8(\omega_1 - \omega_5)^8}{2^8 \pi^8 i^8} z^{M_4} [R_{234581} + R_{234582}] e^{-M(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5)s} \Big|_{s_{k,1}} + \underline{O}\left(\frac{1}{\tilde{k}^9}\right) = 0. \end{aligned} \quad (6.19)$$

При \tilde{k}^0 имеем $z^{M_4} z^{N_4} - z^{M_4} z^{N_4} = 0$ — верно, это подтверждает правильность выбора основного приближения (6.15).

Приравнявая в уравнении (6.19) коэффициенты при $\frac{1}{k^7}$ найдем

$$d_{7k_1} = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \frac{\psi_7}{z^{M_4} z^{N_4}} \frac{M^7 (\omega_1 - \omega_5)^7}{2^7 \pi^7 (-i)} z^{M_4} z^{N_4} \left[\sum_{k=1}^4 \omega_k - \sum_{k=2}^5 \omega_k \right] = \psi_7 \frac{M^7 (\omega_1 - \omega_5)^8}{2^8 \pi^8}, \quad (6.20)$$

$$k \in \mathbb{N}.$$

Из формул (3.1) имеем $\omega_1 = 1$, $\omega_5 = -1$, $\omega_1 - \omega_5 = 2$, из формул (5.10), (3.6) и (3.12) найдем

$$\begin{aligned} \psi_7 &= \left(-\frac{1}{8a^7} \right) \int_0^{x_0} q_1(t) dt + \left(-\frac{1}{8b^7} \right) \int_{x_0}^{\pi} q_2(t) dt = \\ &= \left(-\frac{1}{8} \right) \left[\frac{1}{a^7} \int_0^{x_0} q_1(t) dt + \frac{1}{b^7} \int_{x_0}^{\pi} q_2(t) dt \right], \end{aligned}$$

Подставляя эти формулы в (6.20), получим:

$$d_{7k_1} = \left(-\frac{1}{8\pi} \right) \frac{M^7}{\pi^7} \left[\frac{1}{a^7} \int_0^{x_0} q_1(t) dt + \frac{1}{b^7} \int_{x_0}^{\pi} q_2(t) dt \right], \quad k \in \mathbb{N}. \quad (6.21)$$

Приравнявая в (6.19) коэффициенты при $\frac{1}{k^8}$, получим:

$$\begin{aligned} d_{8k_1} &= \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) \frac{M^8 (\omega_1 - \omega_5)^8}{2^8 \pi^8} \frac{1}{R_4 z^{M_4} z^{N_4}} e^{-M(\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5)s} \Big|_{s_{k,1}} \{ [R_{123481} + R_{123482}] - \\ &\quad - z^{M_4} [R_{234581} + R_{234582}] \}, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Из формул (6.11) и (6.17) получим:

$$\begin{aligned} &[R_{123481} - z^{M_4} R_{234581}] e^{-M \sum_{k=2}^5 \omega_k s} \Big|_{s_{k,1, \text{оч}}} = \\ &= e^{M(\omega_1 - \omega_5)s} \Big|_{s_{k,1, \text{оч}}} R_4 \sum_{k=1}^4 V_{11}^{n_k} - z^{M_4} R_4 z^{N_4} \sum_{k=1}^4 V_{11}^{n_k} = \\ &= \sum_{k=1}^4 V_{11}^{n_k} [z^{M_4} z^{N_4} R_4 - R_4 z^{M_4} z^{N_4}] = 0. \end{aligned} \quad (6.23)$$

Из формул (6.12), (6.14), (6.17) найдем

$$\begin{aligned} &[R_{123482} - z^{M_4} R_{234582}] e^{-M \sum_{k=2}^5 \omega_k s} \Big|_{s_{k,1, \text{оч}}} = \\ &= H_{15} [R_4 z^{N_4} e^{a\omega_1 s x_0} e^{b(\pi - x_0)\omega_5 s} e^{-M\omega_5 s} - z^{M_4} R_4 e^{a\omega_5 s x_0} e^{b(\pi - x_0)\omega_1 s} e^{-M\omega_5 s}] \Big|_{s_{k,1, \text{оч}}} = \\ &= H_{15} R_4 z^{\frac{M_4 + N_4}{2}} e^{\frac{a x_0 + b(\pi - x_0)}{2} (\omega_1 - \omega_5)s} \Big|_{s_{k,1, \text{оч}}} \times \\ &\times \left[z^{-\frac{M_4 - N_4}{2}} e^{\frac{a x_0 - b(\pi - x_0)}{2} (\omega_1 - \omega_5)s} \frac{2\pi i \tilde{k}}{M(\omega_1 - \omega_5)} - z^{-\frac{M_4 - N_4}{2}} e^{-\frac{a x_0 - b(\pi - x_0)}{2} (\omega_1 - \omega_5)s} \frac{2\pi i \tilde{k}}{M} \right] = \end{aligned}$$

$$= H_{15} R_4 (-1)^k z^{M_4} z^{N_4} (-2i) \sin \left[\frac{ax_0 - b(\pi - x_0)}{M} \pi \tilde{k} - \frac{\pi}{8} (M_4 - N_4) \right]. \quad (6.24)$$

Подставив формулы (6.23), (6.24) в (6.22) и сделав необходимые преобразования, получим:

$$d_{8k_1} = (-1)^{k+1} \frac{H_{15}}{\pi} \frac{M^8 (\omega_1 - \omega_5)^8}{\pi^8 \pi^8} \sin \left[\frac{ax_0 - b(\pi - x_0)}{M} \pi \tilde{k} - \frac{\pi}{8} (M_4 - N_4) \right]. \quad (6.25)$$

Из формул (4.19) найдем

$$\begin{aligned} D_{15} &= 7\omega_5^0 + 5\omega_5^1 + 3\omega_5^2 + \omega_5^3 - \omega_5^4 - 3\omega_5^5 - 5\omega_5^6 - 7\omega_5^7 = 8; \\ H_{15} &= \frac{1}{8} \frac{D_{15}}{16} \Delta \tilde{q}(x_0) = \frac{\Delta \tilde{q}(x_0)}{16} = \frac{1}{16} \left[\frac{q_1(x_0)}{a^8} - \frac{q_2(x_0)}{b^8} \right], \end{aligned}$$

поэтому, подставляя эти формулы в (6.25), выведем:

$$\begin{aligned} d_{8k_1} &= (-1)^{k+1} \frac{M^8}{\pi^8} \frac{\Delta \tilde{q}(x_0)}{16\pi} \sin \left[\frac{ax_0 - b(\pi - x_0)}{ax_0 + b(\pi - x_0)} \pi \tilde{k} - \frac{\pi}{8} (M_4 - N_4) \right], \\ M &= ax_0 + b(\pi - x_0), \\ \Delta \tilde{q}(x_0) &= \frac{q_1(x_0)}{a^8} - \frac{q_2(x_0)}{b^8}, \quad M_4 = \sum_{k=1}^4 m_k, \quad N_4 = \sum_{k=1}^4 n_k, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (6.26)$$

Формулы (6.21) и (6.26) показывают, что все коэффициенты d_{7k_1}, d_{8k_1} формулы (6.16) находятся единственным образом. В статье приведены явные формулы для их вычисления, таким образом теорема 6.2 полностью доказана.

Изучая аналогичным образом секторы 2), 3), ..., 8) индикаторной диаграммы Рис. 5.1, придем к выводу о справедливости следующего утверждения.

Т е о р е м а 6.3 1) Асимптотика собственных значений дифференциального оператора (1.1)–(1.5) в секторах 2), 3), ..., 8) имеет следующий вид:

$$s_{k,2} = s_{k,1} e^{-\frac{2\pi i}{8}}; \quad s_{k,3} = s_{k,2} e^{-\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1} e^{-\frac{4\pi i}{8}}; \dots; s_{k,m} = s_{k,m-1} e^{-\frac{2\pi i}{8}} = s_{k,1} e^{-\frac{2\pi i}{8}(m-1)}, \quad (6.27)$$

$$m = 1, 2, \dots, 8.$$

2) При этом

$$\lambda_{k,m} = s_{k,m}^8, \quad k = 1, 2, 3, \dots; \quad m = 1, 2, \dots, 8. \quad (6.28)$$

С помощью формул (6.16), (6.21)–(6.28) можно изучить асимптотику собственных функций дифференциального оператора (1.1)–(1.5), вычислить формулы регуляризованных следов этого оператора, решить обратные спектральные задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лидский В. Б., Садовничий В. А. Асимптотические формулы для корней одного класса целых функций // Математический сборник. 1968. Т. 65, № 4. С. 558–566.
2. Садовничий В. А. О следах обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков // Математический сборник. 1967. Т. 72, № 2. С. 293–310.
3. Печенцов А. С. Краевые задачи для дифференциальных уравнений, содержащих параметр, с кратными корнями характеристического уравнения // Дифференциальные уравнения. 1984. Т. 20, № 2. С. 263–273.
4. Чернятин В. А. Асимптотики высшего порядка спектра оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 2002. Т. 38, № 2. С. 206–215.
5. Gottlieb H. P. W. Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients // Journal of Math. Anal. and Appl. 1988. Vol. 132, pp. 123–137.
6. Ильин В. А. О сходимости разложений по собственным функциям в точках разрыва коэффициентов дифференциального оператора // Математические заметки. 1977. Т. 22, № 5. С. 698–723.
7. Митрохин С. И. О формулах регуляризованных следов для дифференциальных операторов второго порядка с разрывными коэффициентами // Вестник МГУ. Сер.: «Математика, механика». 1986. № 6. С. 3–6.
8. Будаев В. Д. О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединённых функций оператора второго порядка с разрывными коэффициентами // Дифференциальные уравнения. 1987. Т. 23, № 6. С. 941–952.
9. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 22, № 12. С. 2059–2071.
10. Винокуров В. А., Садовничий В. А. Асимптотика любого порядка собственных значений и собственных функций краевой задачи Штурма-Лиувилля на отрезке с суммируемым потенциалом // Известия РАН. Серия математическая. 2000. Т. 64, № 4. С. 47–108.
11. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциального оператора четвёртого порядка с суммируемыми коэффициентами // Труды МИАН. 2010. Т. 270. С. 188–197.
12. Митрохин С. И. О спектральных свойствах дифференциальных операторов нечётного порядка с суммируемым потенциалом // Дифференциальные уравнения. 2011. Т. 47, № 12. С. 1808–1811.
13. Савчук А. М., Шкалик А. А. Операторы Штурма-Лиувилля с сингулярными потенциалами // Математические заметки. 1999. Т. 66, № 6. С. 897–912.
14. Митрохин С. И. Многоточечные дифференциальные операторы: «расщепление» кратных в главном собственных значений // Известия Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. «Математика. Механика. Информатика». 2017. Т. 17. вып. 1. С. 5–18.

15. Гуревич А. П., Хромов А. П. Операторы дифференцирования первого и второго порядков со знакопеременной весовой функцией // Математические заметки. 1994. Т. 56, № 1. С. 3–15.
16. Митрохин С. И. О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов второго порядка с разрывной весовой функцией // Доклады РАН. 1997. Т. 356, № 1. С. 13–15.
17. Митрохин С. И. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора со знакопеременной весовой функцией // Известия вузов. Математика. 2018. № 6. С. 31–47.
18. Митрохин С. И. Об асимптотике собственных значений дифференциального оператора четвёртого порядка со знакопеременной весовой функцией // Вестник МГУ. Сер.: «Математика, механика» 2018. № 6. С. 46–58.
19. Юрко В. А. Спектральный анализ дифференциальных операторов высших порядков с условиями разрыва во внутренней точке // СМФН. 2017. Т. 63, № 2. С. 362–372.
20. Айгунов Г. А., Гехтман М. М. К вопросу о максимально возможной скорости роста системы собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с непрерывной весовой функцией на конечном отрезке // УМН. 1997. Т. 52, № 3 (315). С. 161–162.
21. Юрко В. А. Об обратной задаче для квазипериодических дифференциальных пучков с условиями разрыва внутри интервала // Математические заметки. 2015. Т. 98, № 3. С. 476–480.
22. Гехтман М. М., Загиров Ю. М. О максимально возможной скорости роста ортонормированных собственных функций оператора Штурма-Лиувилля с непрерывной положительной весовой функцией // УМН. 1992. Т. 47, № 3 (285). С. 157–158.
23. Айгунов Г. А. Об ограниченности ортонормированных собственных функций нелинейной краевой задачи типа Штурма-Лиувилля с неограниченной сверху весовой функцией на конечном отрезке // УМН. 2002. Т. 57, № 1 (343). С. 145–146.
24. Юрко В. А. Об обратных узловых и спектральных задачах для краевых задач с условиями разрыва внутри интервала // Известия Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. «Математика. Механика. Информатика». 2008. Т. 8. вып. 1. С. 31–35.
25. Митрохин С. И. Спектральная теория операторов: гладкие, разрывные, суммируемые коэффициенты. М.: ИНТУИТ, 2009. 364 с.
26. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. 528 с.
27. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
28. Садовничий В. А., Любишкин В. А., Белабасси Ю. О регуляризованных суммах корней целой функции одного класса // Доклады АН СССР. 1980. Т. 254, № 6. С. 1346–1348.

Поступила 25.11.2019

MSC2020 34B09

Asymptotics of the spectrum of even-order differential operators with discontinuous weight functions

© S. I. Mitrokhin¹

Abstract. The boundary-value problem for an eighth-order differential operator whose potential is a piecewise continuous function on the segment of the operator definition is studied. The weight function is piecewise constant. At the discontinuity points of the operator coefficients, the conditions of «conjugation» must be satisfied which follow from physical considerations. The boundary conditions of the studied boundary value problem are separated and depend on several parameters. Thus, we simultaneously study the spectral properties of entire family of differential operators with discontinuous coefficients. The asymptotic behavior of the solutions of differential equations defining the operator is obtained for large values of the spectral parameter. Using these asymptotic expansions, the conditions of «conjugation» are investigated; as a result, the boundary conditions are studied. The equation on eigenvalues of the investigated boundary value problem is obtained. It is shown that the eigenvalues are the roots of some entire function. The indicator diagram of the eigenvalue equation is investigated. The asymptotic behavior of the eigenvalues in various sectors of the indicator diagram is found.

Key Words: boundary value problem, spectral parameter, differential operator, weight function, piecewise continuous potential, asymptotic behavior of eigenvalues

REFERENCES

1. V. B. Lidsky, V. A. Sadovnichiy, “[Asymptotic formulas for the roots of a class of entire functions]”, *Mathematical Collection*, **65**:4 (1968), 558–566 (In Russ.).
2. V. A. Sadovnichiy, “[On the traces of ordinary differential operators of higher orders]”, *Mathematical Collection*, **72**:2 (1967), 293–310 (In Russ.).
3. A. S. Pechentsov, “[Boundary value problems for differential equations containing a parameter with multiple roots of the characteristic equation]”, *Differential Equations*, **20**:2 (1984), 263–273 (In Russ.).
4. V. A. Chernyatin, “[Higher-order asymptotics of the spectrum of the Sturm—Liouville operator]”, *Differential Equations*, **38**:2 (2002), 206–215 (In Russ.).
5. H. P. W. Gottlieb, “[Iso-spectral Operators: Some Model Examples with Discontinuous Coefficients]”, *Journal of Math. Anal. and Appl.*, **132** (1988), 123–137 (In Engl.).
6. V. A. Ilyin, “[On the convergence of eigenfunction expansions at the points of discontinuity of coefficients of the differential operator]”, *Mathematical Notes*, **22**:5 (1977), 698–723 (In Russ.).
7. S. I. Mitrokhin, “[About the formulas of regularized traces of differential operators of second order with discontinuous coefficients]”, *Vestnik MGU. Ser.: "Mathematics, mechanics"*, 1986, no. 6, 3–6 (In Russ.).

¹**Sergey I. Mitrokhin**, Researcher Computing Center, Lomonosov Moscow State University (6, Leninskiye Gory, Moscow, 119991, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1896-0563>, mitrokhin-sergey@yandex.ru

8. V. D. Budaev, “[On unconditional basis property on a closed interval of systems of eigenfunctions and associated functions of a second-order operator with discontinuous coefficients]”, *Differential equations*, **23**:6 (1987), 941–952 (In Russ.).
9. V. A. Ilyin, “[Necessary and sufficient conditions for the Riesz basis property of root vectors of discontinuous operators of second order]”, *Differential Equations*, **22**:12 (1980), 2059–2071 (In Russ.).
10. V. A. Vinokurov, V. A. Sadovnichy, “[Asymptotics of any order of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm—Liouville boundary value problem on an interval with summable potential]”, *Bulletin of the Russian Academy of Sciences. Mathematical series*, **64**:4 (2000), 47–108 (In Russ.).
11. S. I. Mitrokhin, “[On spectral properties of a fourth-order differential operator with summable coefficients]”, *Trudy MIAN*, **270** (2010), 188–197 (In Russ.).
12. S. I. Mitrokhin, “[On spectral properties of odd-order differential operators with summable potential]”, *Differential Equations*, **47**:12 (2011), 1808–1811 (In Russ.).
13. A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, “[Sturm—Liouville operators with singular potentials]”, *Mathematical Notes*, **66**:6 (1999), 897–912 (In Russ.).
14. S. I. Mitrokhin, “[Multipoint differential operators: “splitting” of eigenvalues, which are mainly in the main]”, *Izvestia Saratovskogo Universiteta. Novaya seriya.*, **17**:1 (2017), 5–18 (In Russ.).
15. A. P. Gurevich, A. P. Khromov, “[Differentiation operators of first and second orders with alternating weight function]”, *Mathematical Notes*, **56**:1 (1994), 3–15 (In Russ.).
16. S. I. Mitrokhin, “[On some spectral properties of second-order differential operators with a discontinuous weight function]”, *Reports of the Russian Academy of Sciences*, **356**:1 (1997), 13–15 (In Russ.).
17. S. I. Mitrokhin, “[Asymptotics of the eigenvalues of a differential operator with an alternating weight function]”, *News of Universities. Mathematics*, 2018, no. 6, 31–47 (In Russ.).
18. S. I. Mitrokhin, “[On the asymptotics of the eigenvalues of the differential operator of fourth order with alternating weighting function]”, *Vestnik MGU. Ser. *ij*Mathematics, Mechanics*ŝŝ**, 2018, no. 6, 46–58 (In Russ.).
19. V. A. Yurko, “[Spectral analysis of higher-order differential operators with discontinuity conditions at an internal point]”, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, **63**:2 (2017), 362–372 (In Russ.).
20. G. A. Aigunov, M. M. Gekhtman, “[On the question of the maximum possible growth rate of the system of eigenfunctions of the Sturm—Liouville operator with a continuous weight function on a finite interval]”, *Uspekhi Matematiki*, **52**:3(315) (1997), 161–162 (In Russ.).
21. V. A. Yurko, “[On the inverse problem for quasiperiodic differential beams with discontinuity conditions within an the interval]”, *Mathematical Notes*, **98**:3 (2015), 476–480 (In Russ.).

22. M. M. Gekhtman, Yu. M. Zagirov, “[On the maximum possible growth rate of orthonormal eigenfunctions of the Sturm-Liouville operator with continuous positive weight function]”, *Uspekhi matematiki*, **47**:3(285) (1992), 157–158 (In Russ.).
23. G. A. Aigunov, “[On the boundedness of orthonormal eigenfunctions of a nonlinear boundary value problem of the Sturm—Liouville type with a weight function unbounded above on a finite interval]”, *Uspekhi matematiki*, **57**:1(343) (2002), 145–146 (In Russ.).
24. V. A. Yurko, “[On inverse nodal and spectral problems for boundary value problems with discontinuity conditions within an interval]”, *Izvestiya Saratovskogo universiteta. Novaya seria.*, **8**:1 (2008), 31–35 (In Russ.).
25. S. I. Mitrokhin, *[Spectral theory of operators: smooth, discontinuous, summable coefficients]*, INTUIT Publ., Moscow, 2009 (In Russ.), 364 p.
26. M. A. Naimark, *[Linear differential operators]*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 528 p.
27. R. Bellman, K. L. Cook, *[Differential-difference equations]*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 548 p.
28. V. A. Sadovnichy, V. A. Lyubishkin, Yu. Belabassi, “[On regularized sums of roots of an entire function of one class]”, *Reports of the USSR Academy of Sciences*, **254**:6 (1980), 1346–1348 (In Russ.).

Submitted 25.11.2019

УДК 517.938.5, 512.721

Комбинаторный инвариант для поверхностных диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемой гетероклиникой

© А. И. Морозов¹, О. В. Починка²

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла f , заданных на ориентируемой поверхности M^2 . В работах А. А. Безденежных и В. З. Гринеса показано, что такие диффеоморфизмы имеют конечное число гетероклинических орбит. Кроме того, задача классификации рассматриваемых диффеоморфизмов сведена к проблеме различения ориентируемых графов с подстановками, описывающими полиномиальных различающих алгоритмов. В настоящей статье предлагается новый подход к классификации данных каскадов. Для этого каждому рассматриваемому диффеоморфизму f ставится в соответствие граф, вложимость которого в объемлющую поверхность дает возможность построения эффективного алгоритма различения таких графов.

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, топологический инвариант диффеоморфизма, поверхностный диффеоморфизм, ориентируемая гетероклиника

1. Порядок Смейла

Диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$, заданный на гладком замкнутом связном n -многообразии ($n \geq 1$) M^n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если

- 1) неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических орбит;
- 2) многообразия W_p^s, W_q^u пересекаются трансверсально для любых неблуждающих точек p, q .

Обозначим через $MS(M^n)$ множество таких диффеоморфизмов. В множестве периодических орбит любого диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ можно ввести отношение полного порядка, являющееся продолжением частичного порядка, введенное С. Смейлом [1], а именно, пусть $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ — периодические орбиты диффеоморфизма Морса-Смейла f . Говорят, что орбиты $\mathcal{O}_i, \mathcal{O}_j$ *находятся в отношении* \prec ($\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$), если

$$W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u \neq \emptyset.$$

Последовательность, состоящая из различных периодических орбит $\mathcal{O}_i = \mathcal{O}_{i_0}, \mathcal{O}_{i_1}, \dots, \mathcal{O}_{i_k} = \mathcal{O}_j$ ($k \geq 1$), такая что $\mathcal{O}_{i_0} \prec \mathcal{O}_{i_1} \prec \dots \prec \mathcal{O}_{i_k}$ называется *цепью длины*

¹Морозов Андрей Игоревич, стажер-исследователь Международной лаборатории динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3125-1825>, morozov-lux@yandex.ru

²Починка Ольга Витальевна, заведующая Международной лабораторией динамических систем и приложений, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, olga-pochinka@yandex.ru

k , соединяющей периодические орбиты \mathcal{O}_i и \mathcal{O}_j . В силу конечности неблуждающего множества для любого диффеоморфизма $f \in MS(M^n)$ корректно определено число, равное длине максимальной седловой цепи, которое обозначается $beh(f)$.

2. Ориентируемость гетероклинического пересечения

Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла f , заданных на ориентируемой поверхности M^2 , введем понятие ориентируемой гетероклиники следующим образом.

Пусть σ_i, σ_j — седловые точки диффеоморфизма f такие, что $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u \neq \emptyset$. Для любой гетероклинической точки $x \in W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$ определим упорядоченную пару векторов $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$, где:

- \vec{v}_x^u — касательный вектор к неустойчивому многообразию точки σ_j в точке x ;
- \vec{v}_x^s — касательный вектор к устойчивому многообразию точки σ_i в точке x .

Гетероклиническое пересечение диффеоморфизма f называется *ориентируемым* (Рис. 2.1), если упорядоченные пары векторов $(\vec{v}_x^u, \vec{v}_x^s)$ задают одинаковую ориентацию несущей поверхности M^2 . В противном случае гетероклиническое пересечение называется *неориентируемым* (Рис. 2.2).

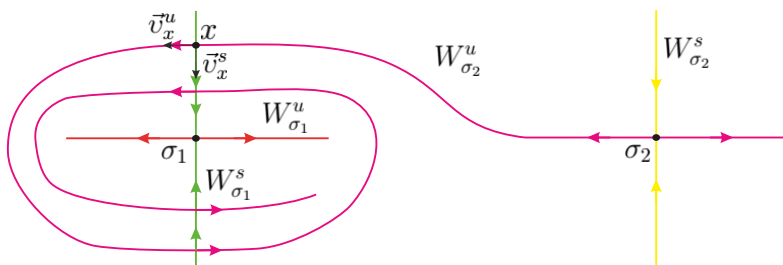


Рис. 2.1. Ориентируемое гетероклиническое пересечение

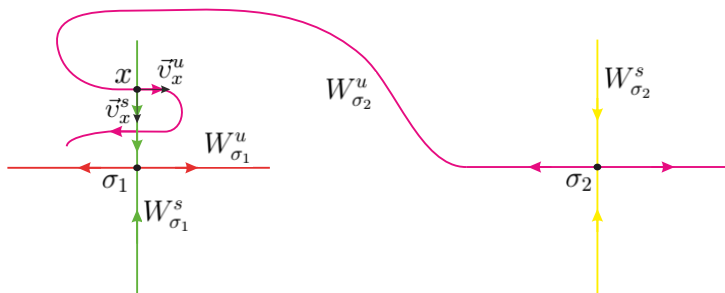


Рис. 2.2. Неориентируемое гетероклиническое пересечение

Обозначим через $G \subset MS(M^2)$ класс диффеоморфизмов с ориентируемым гетероклиническим пересечением.

Задача классификации рассматриваемых диффеоморфизмов в работе [2] сведена к проблеме различения ориентируемых графов с подстановками, описывающими геометрию гетероклинического пересечения. Однако такие графы в общем случае не допускают полиномиальных различающих алгоритмов. В настоящей статье предлагается новый подход к классификации данных каскадов.

Для построения эффективно различаемого графа, соответствующего диффеоморфизму $f \in G$, будем использовать метод факторизации, позволяющий представить динамику диффеоморфизма в виде некоторого набора топологических объектов — схемы диффеоморфизма.

3. Схема диффеоморфизма $f \in G$

Везде далее $f \in G$. В работах [3–4] показано, что $beh(f) = 1$, т. е. диффеоморфизм f имеет конечное число гетероклинических орбит. Поэтому множество Σ_f периодических орбит отображения f можно разбить на подмножества $\Sigma_f^i, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ следующим образом:

- Σ_f^0 — множество всех стоковых орбит;
- Σ_f^1 — множество седловых орбит, чьи неустойчивые многообразия не содержат гетероклинических точек;
- Σ_f^2 — множество оставшихся седловых орбит системы;
- Σ_f^3 — множество источников орбит.

Из свойств введенного порядка \prec следует, что если орбиты $\mathcal{O}_i \in \Sigma_f^i, \mathcal{O}_j \in \Sigma_f^j$ связаны отношением $\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j$, то $i < j$.

Положим

$$\mathcal{A}_f = \Sigma_f^0 \cup W_{\Sigma_f^1}^u, \mathcal{R}_f = \Sigma_f^3 \cup W_{\Sigma_f^2}^s, V_f = M^2 \setminus (\mathcal{A}_f \cup \mathcal{R}_f).$$

В работе [5] показано, что множества $\mathcal{A}_f, \mathcal{R}_f$ являются аттрактором и репеллером системы соответственно. Положим

$$\hat{V}_f = V_f / f.$$

Согласно работе [6], каждая компонента связности пространства орбит \hat{V}_f гомеоморфна двумерному тору. Обозначим через $p_f : V_f \rightarrow \hat{V}_f$ естественную проекцию, которая также является накрывающим отображением для пространства \hat{V}_f .

Обозначим через $\hat{V}_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ компоненты связности пространства орбит \hat{V}_f . Рассмотрим одну из них — \hat{V}_f^i . Положим $V_i = p_f^{-1}(\hat{V}_i)$ и обозначим через $p_i : V_i \rightarrow \hat{V}_i$ естественную проекцию. Накрытие p_i индуцирует нетривиальный гомоморфизм $\eta_i : \pi_1(\hat{V}_i) \rightarrow m_i \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие элементу $[\hat{c}] \in \pi_1(\hat{V}_i)$ число μm_i такое, что любое поднятие кривой \hat{c} соединяет точку $x \in V_i$ с точкой $f^{\mu m_i}(x)$.

Обозначим через b_i замкнутую не гомотопную нулю кривую на \hat{V}_i такую, что $\eta_i([\hat{b}_i]) = 0$. Положим

$$\hat{V}_f = \{(\hat{V}_i, [\hat{b}_i], m_i), i = 1, \dots, n\}.$$

Введем следующие обозначения:

- $\ell_\sigma^s = W_\sigma^s \setminus \sigma$, где $\sigma \in \Sigma_f^1$, аналогично $\ell_\sigma^u = W_\sigma^u \setminus \sigma$, где $\sigma \in \Sigma_f^2$;
- $L_f^s = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_f^1} \ell_\sigma^s$ и $L_f^u = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_f^2} \ell_\sigma^u$;
- $\mathcal{L}_f^s = \{\ell_\sigma^s, \sigma \in \Sigma_f^1\}$ и $\mathcal{L}_f^u = \{\ell_\sigma^u, \sigma \in \Sigma_f^2\}$;
- $\hat{\ell}_\sigma^s = p_f(W_\sigma^s \setminus \sigma)$ и $\hat{\ell}_\sigma^u = p_f(W_\sigma^u \setminus \sigma)$;
- $\hat{L}_f^s = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_f^1} \hat{\ell}_\sigma^s$ и $\hat{L}_f^u = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_f^2} \hat{\ell}_\sigma^u$;
- $\hat{\mathcal{L}}_f^s = \{\hat{\ell}_\sigma^s, \sigma \in \Sigma_f^1\}$ и $\hat{\mathcal{L}}_f^u = \{\hat{\ell}_\sigma^u, \sigma \in \Sigma_f^2\}$.

Обозначим через k_σ период седловой точки σ . Напомним, что *типом ориентации* седловой точки σ называется число ν_σ , равное -1 ($+1$), если диффеоморфизм $f^{k_\sigma}|_{W_\sigma^u}$ меняет (сохраняет) ориентацию. Из монографии [7] следует, что множество $\hat{\ell}_\sigma^s$ ($\hat{\ell}_\sigma^u$) состоит из двух компонент (одной компоненты) связности, если седловая точка σ имеет положительный (отрицательный) тип ориентации. При этом каждая компонента связности l этого множества является гладкой замкнутой кривой, не гомотопной нулю на некотором торе \hat{V}_i и такой, что $\eta_i([l]) = k_\sigma$, $\eta_i(l) = 2k_\sigma$.

Напомним определение схемы, введенное в работе [6].

О п р е д е л е н и е 3.1 Набор $\mathcal{S}_f = (\hat{V}_f, \hat{\mathcal{L}}_f^s, \hat{\mathcal{L}}_f^u)$ назовем *схемой диффеоморфизма* $f \in G$.

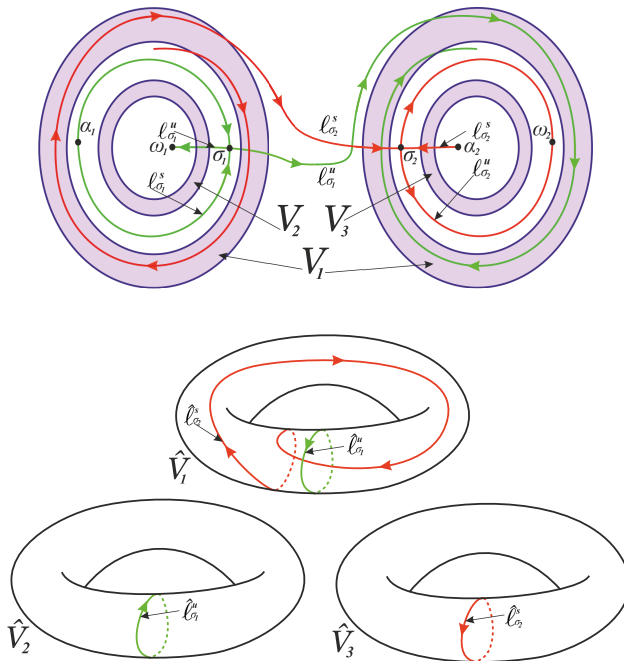


Рис. 3.3. Схема сохраняющего ориентацию диффеоморфизма Морса-Смейла на сфере \mathbb{S}^2

Покажем, что схему \mathcal{S}_f можно привести к каноническому виду.

Для этого для каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ положим $\hat{L}_i^s = \hat{V}_i \cap \hat{L}_f^s$ и $\hat{L}_i^u = \hat{V}_i \cap \hat{L}_f^u$. Обозначим через $\hat{\mathcal{L}}_i^s$ и $\hat{\mathcal{L}}_i^u$ множество компонент связности множеств \hat{L}_i^s и \hat{L}_i^u , соответственно. Обозначим через r_i^s, r_i^u мощности этих множеств. Положим $\hat{V}_i = (\hat{V}_i, m_i)$. Таким образом, схема любого диффеоморфизма $f \in G$ является коллекцией схем

$$\mathcal{S}_i = (\hat{V}_i, \hat{\mathcal{L}}_i^s, \hat{\mathcal{L}}_i^u).$$

Рассмотрим накрытие тора $q : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$, связанное с представлением тора в виде факторгруппы по действию группы целочисленных сдвигов на \mathbb{R}^2 . Положим

$$a = q(Ox), b = q(Oy).$$

Тогда кривые a, b являются образующими (параллель, меридиан) на торе с положительным направлением обхода, индуцированным положительным направлением координатных осей. Гомотопический класс $[c]$ любой простой замкнутой кривой $c \subset \mathbb{T}^2$ может быть описан как $[c] = \langle \mu, \nu \rangle$, $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$, где меридиан имеет класс $\langle 1, 0 \rangle$, а параллель $\langle 0, 1 \rangle$. При этом числа μ, ν являются взаимно простыми, $(\mu, \nu) = 1$.

Пусть $\phi_i : \hat{V}_i \rightarrow \mathbb{T}^2$ – диффеоморфизм такой, что $\phi_{i*}([b_i]) = [b]$. Положим $\tilde{L}_i^s = \phi_i(\hat{L}_i^s)$, $\tilde{L}_i^u = \phi_i(\hat{L}_i^u)$. Поскольку кривые в множестве \tilde{L}_i^s (\tilde{L}_i^u) попарно не пересекаются, то для любой кривой $\hat{l}_i^s \subset \hat{L}_i^s$ ($\hat{l}_i^s \subset \hat{L}_i^s$) кривая $\tilde{l}_i^s = \phi_i(\hat{l}_i^s)$ ($\tilde{l}_i^u = \phi_i(\hat{l}_i^u)$) имеет гомотопический тип $\langle \mu_i^s, \nu_i^s \rangle$ ($\langle \mu_i^u, \nu_i^u \rangle$), где $\mu_i^s = \eta_i(\hat{l}_i^s)/m_i$ ($\mu_i^u = \eta_i(\hat{l}_i^u)/m_i$) и числа μ_i^s, ν_i^s (μ_i^u, ν_i^u) являются взаимно простыми.

Таким образом, число μ_i^s (μ_i^u) определено однозначно диффеоморфизмом f и не зависит от выбора сепаратрисы и диффеоморфизма ϕ_i , тогда как число ν_i^s (ν_i^u) определено только с точностью до слагаемого кратного μ_i^s (μ_i^u), как показывает следующая лемма, доказанная в [8].

Л е м м а 3.1 Пусть $c \subset \mathbb{T}^2$ не гомотопная нулю простая замкнутая кривая на торе такая, что $[c] = \langle \mu, \nu \rangle$, и $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – гомеоморфизм такой, что $\varphi_*([b]) = [b]$. Тогда $\varphi(c)$ имеет гомотопический тип $\langle \mu, \tilde{\nu} \rangle$, где $\tilde{\nu} \equiv \nu \pmod{\mu}$. Обратно, для любого $\tilde{\nu} \equiv \nu \pmod{\mu}$ существует единственный (с точностью до изотопии) гомеоморфизм $\varphi : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ такой, что $\varphi(c)$ имеет гомотопический тип $\langle \mu, \nu \rangle$.

Таким образом, существует диффеоморфизм $\phi_i : \hat{V}_i \rightarrow \mathbb{T}^2$ такой, что $\phi_{i*}([b_i]) = [b]$, и кривая \tilde{l}_i^s имеет гомотопический тип $\langle \mu_i^s, \nu_i^s \rangle$, где $(\mu_i^s, \nu_i^s) = 1$ и $0 \leq \nu_i^s < \mu_i^s$. Такой диффеоморфизм однозначно определяет гомотопический тип $\langle \mu_i^u, \nu_i^u \rangle$ кривой \tilde{l}_i^u . При этом поскольку множества \hat{L}_i^s, \hat{L}_i^u пересекаются ориентируемым образом, то $\frac{\nu_i^s}{\mu_i^s} \neq \frac{\nu_i^u}{\mu_i^u}$.

Везде далее используем однозначно определенные для схемы \mathcal{S}_i пары взаимно простых целых чисел $\mu_i^s, \nu_i^s; \mu_i^u, \nu_i^u$ такие, что

$$0 \leq \nu_i^s < \mu_i^s; \quad \mu_i^u > 0; \quad \frac{\nu_i^s}{\mu_i^s} \neq \frac{\nu_i^u}{\mu_i^u}.$$

Для $r \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathbb{N}$, $\nu \in \mathbb{Z}$ зададим на плоскости \mathbb{R}^2 семейство прямых $\Gamma_{r, \mu, \nu}$ следующим образом:

$$\Gamma_{r, \mu, \nu} = \left\{ (x, y) : y(x) = \left(\frac{\nu}{\mu}x + \frac{k}{\mu r} \right), k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Положим $\hat{\Gamma}_{r, \mu, \nu} = q(\Gamma_{r, \mu, \nu})$.

Используя результаты работ [8–9], докажем следующий факт.

Л е м м а 3.2 *Существует диффеоморфизм $\phi_i : \hat{V}_i \rightarrow \mathbb{T}^2$ такой, что $\phi_{i*}([b_i]) = [b]$ и $\phi_i(\hat{L}_i^s) = \hat{\Gamma}_{r_i^s, \mu_i^s, \nu_i^s}$, $\phi_i(\hat{L}_i^u) = \hat{\Gamma}_{r_i^u, \mu_i^u, \nu_i^u}$.*

Обозначим через Φ отображение, составленное из диффеоморфизмов ϕ_1, \dots, ϕ_n . Положим

$$\mathbf{V}_i = (\mathbb{T}^2, [b], m_i), \mathbf{S}_i = (\mathbf{V}_i, \hat{\Gamma}_{r_i^s, \mu_i^s, \nu_i^s}, \hat{\Gamma}_{r_i^u, \mu_i^u, \nu_i^u}).$$

Назовем коллекцию

$$\mathbf{S}_f = (\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2, \dots, \mathbf{S}_n)$$

стандартной схемой диффеоморфизма f класса G .

Две окружности в стандартной схеме, являющиеся образом относительно Φ элемента множества $\mathcal{L}_f^s \cup \mathcal{L}_f^u$, назовем *парными*.

4. Граф диффеоморфизма $f \in G$

Конечным графом называется упорядоченная пара (B, E) , для которой выполнены следующие условия: B – непустое конечное множество *вершин*; E – множество пар вершин, называемых *ребрами*.

Построим граф T_f , соответствующий диффеоморфизму f класса G , следующим образом (см. Рис. 4.4).

1. Геометрическая составляющая графа T_f .

1. Если множество $\hat{\Gamma}_{r_i^s, \mu_i^s, \nu_i^s}$ не пусто, то на плоскости \mathbb{R}^2 для каждой компоненты \mathbf{S}_i стандартной схемы \mathbf{S}_f выберем окружность

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 5(i - 1))^2 + y^2 = 1\}$$

и для $j \in \{1, \dots, r_i^s\}$ разместим на ней вершины графа $\alpha_{i,j}^s$, взаимно однозначно соответствующие окружностям множества $\hat{\Gamma}_{r_i^s, \mu_i^s, \nu_i^s}$ в порядке, соответствующем порядку пересечения этих окружностей с параллелью \hat{b} в положительном направлении обхода. Каждую пару вершин $\alpha_{i,j}^s, \alpha_{i,j+1}^s$ ($\alpha_{i,r_i^s+1}^s = \alpha_{i,1}^s$) соединим ребром $\rho_{i,j}^s$. Положим

$$c_i^s = \{\alpha_{i,1}^s \rho_{i,1}^s, \alpha_{i,2}^s \rho_{i,2}^s \dots, \rho_{i,r_i^s}^s, \alpha_{i,1}^s\}, C_f^s = \{c_i^s | i \in \{1, \dots, n\}\},$$

$$A_f^s = \{\alpha_{i,j}^s | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, r_i^s\}\}, R_f^s = \{\rho_{i,j}^s | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, r_i^s\}\}.$$

Окрасим ребра множества R_f^s в цвет s .

2. Если множество $\hat{\Gamma}_{r_i^u, \mu_i^u, \nu_i^u}$ не пусто, то аналогичным образом разместим вершины графа $\alpha_{i,j}^u, j \in \{1, \dots, r_i^u\}$ на окружности $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 5(i - 1))^2 + y^2 = 4\}$ и соединим их ребрами $\rho_{i,j}^u$. Положим

$$c_i^u = \{\alpha_{i,1}^u \rho_{i,1}^u, \alpha_{i,2}^u \rho_{i,2}^u \dots, \rho_{i,r_i^u}^u, \alpha_{i,1}^u\}, C_f^u = \{c_i^u | i \in \{1, \dots, n\}\},$$

$$A_f^u = \{\alpha_{i,j}^u | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, r_i^u\}\}, R_f^u = \{\rho_{i,j}^u | i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, r_i^u\}\}.$$

Окрасим ребра множества R_f^u в цвет u .

3. Если множество $\hat{\Gamma}_{r_i^u, \mu_i^u, \nu_i^u}$ не пусто и множество $\hat{\Gamma}_{r_i^s, \mu_i^s, \nu_i^s}$ не пусто, то разместим вершину графа δ_i на окружности $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | (x - 5(i - 1))^2 + y^2 = 3\}$ и соединим ее ребром с каждой вершиной циклов c_i^s и c_i^u . Обозначим через P_f множество таких ребер. Положим

$$D_f = \{\delta_i, i \in \{1, \dots, n\}\}.$$

4. Вершины $v, w \in R_f^s(R_f^u)$ соединим ребром $q_{v,w}$, если соответствующие им окружности на торах являются парными. Обозначим через Q_f множество таких ребер.

Таким образом, $B_f = A_f^s \cup A_f^u \cup D_f$ — множество вершин графа T_f и $E_f = R_f^s \cup R_f^u \cup P_f \cup Q_f$ — множество его ребер.

II. Оснащение графа T_f .

1. Оснастим каждый цикл $c = c_i^s$ весом $M_c = (m_c, \mu_c, \nu_c) = (m_i, \mu_i^s, \nu_i^s)$. Аналогичным образом оснастим весом M_c каждый цикл $c = c_i^u$.

2. Если вершины v^s, w^s , инцидентные ребру $q^s \in Q_f$, принадлежат циклу c_i^s и $\mu_i^s m_i > 1$, то оснастим вершину v^s весом $M_{v^s} = (k_{v^s}, l_{v^s})$, где $k_{v^s} \in \{0, \dots, m_i - 1\}$, $l_{v^s} \in \{1, \dots, \mu_i^s\}$, по следующему правилу: для устойчивой сепаратрисы ℓ_{w^s} седла σ , принадлежащей компоненте связности W множества V_i , вторая устойчивая сепаратриса ℓ_{v^s} седла σ принадлежит компоненте $f^{k_{v^s}}(W)$ множества V_i и лежит в компоненте связности множества $f^{k_{v^s}}(W) \setminus (\bigcup_{j=0}^{\mu_i^s-1} f^{k_{v^s}+jm_i}(\ell_{w^s}))$ с номером l_{v^s} , считая от сепаратрисы

$f^{k_{v^s}}(\ell_{w^s})$ в положительном направлении обхода вдоль кривой $p_i^{-1}(\hat{b}_i)$. Аналогичным образом оснастим весом $M_{w^s} = (k_{w^s}, l_{w^s})$ вершину w^s . Оснастим аналогичными весами вершины v^u, w^u , инцидентные ребру $q^u \in Q_f$ и принадлежащие циклу c_i^u , для которого $\mu_i^u m_i > 1$.

3. Если вершины v^s, w^s , инцидентные ребру $q^s \in Q_f$, принадлежат различным циклам c_i^s, c_j^s и $\mu_i^s m_i > 1$, то оснастим ребро q^s весом $m_{q^s} \in \mathbb{N}$ по следующему правилу: удалим из аттрактора неустойчивое многообразие орбиты седловой точки σ , соответствующее вершинам v^s, w^s . Получим новый аттрактор \mathcal{A}_f , его бассейн W_f и пространство орбит \hat{W}_f . Тогда проекция неустойчивого многообразия точки σ лежит в одной компоненте связности W , период которой равен m_{q^s} . Положим $\mu_{q^s} = \frac{\mu_i^s m_i}{m_{q^s}}$. Далее, аналогично п. 2, оснастим вершины v^s, w^s весами $M_{v^s} = (k_{v^s}, l_{v^s})$, $M_{w^s} = (k_{w^s}, l_{w^s})$, где $k_{v^s}, k_{w^s} \in \{0, \dots, m_{q^s} - 1\}$, $l_{v^s}, l_{w^s} \in \{1, \dots, \mu_{q^s}\}$. Оснастим аналогичными весами вершины v^u, w^u , инцидентные ребру $q^u \in Q_f$ и принадлежащие разным циклам c_i^u, c_j^u , для которых $\mu_i^u m_i > 1$.

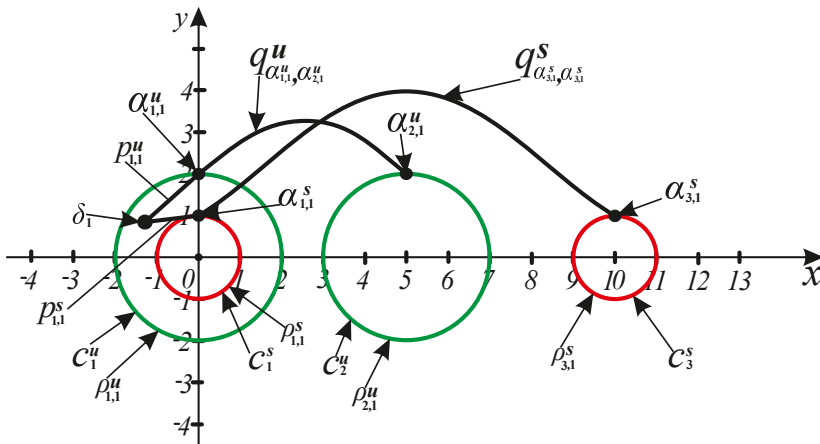


Рис. 4.4. Пример графа T_f для диффеоморфизма $f \in G$, фазовый портрет которого изображен на Рис. 3.3; здесь $M_{c_1^s} = (1, 1, 1)$, $M_{c_1^u} = (1, 1, 0)$, $M_{c_2^u} = (1, 1, 0)$, $M_{c_3^s} = (1, 1, 0)$

О п р е д е л е н и е 4.1 Графы $T_f, T_{f'}$, $f, f' \in G$ назовем изоморфными, если существует изоморфизм ξ , переводящий вершины и ребра графа T_f в вершины и ребра графа $T_{f'}$ с сохранением цветности и весов.

Т е о р е м а 4.1 Диффеоморфизмы f, f' из класса G топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их графы изоморфны.

Благодарности. Исследование поддержано Международной Лабораторией динамических систем и приложений, НИУ ВШЭ, грант правительства РФ, договор 075-15-2019-1931. Работа также поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики «БАЗИС».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smale S. Differentiable dynamical systems // Bull. Amer. Math. Soc. 1967. Vol. 6. No. 73. pp. 747–817.
2. Grines V. Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces // Math. Notes. 1993. Vol. 54, No. 3. pp. 881–889.
3. Безденежных А.Н. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с ориентируемым гетероклиническим множеством на двумерных многообразиях. : дисс.... канд. физ.-мат. наук. Горький: Горьковский гос. ун. им. Н. И. Лобачевского, 1985. 124 с.
4. Pochinka O., Morozov A. Morse-Smale surfaced diffeomorphisms with orientable heteroclinic. // Journal of Dynamical and Control Systems. 2020.
5. Гринес В., Медведев В., Починка О., Жужома Е. Глобальный аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса-Смейла // Труды Математического института имени В. А. Стеклова. 2010. Т. 271, № 1. С. 103–124.
6. Grines V., Pochinka O., Strien S. Van. On 2-diffeomorphisms with one-dimensional basic sets and a finite number of moduli // Moscow Mathematical Journal. 2016. Vol. 16. No. 4. pp. 727–749.
7. Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Switzerland : Springer, 2016. 295 p.
8. Rolfsen D. Knots and links. Math. Lecture Series 7., Vancouver: University of British Columbia, 1990.
9. Hirsch M.W. Differential topology. Switzerland : Springer, 1976. 222 p.

Поступила 25.12.2019

MSC2020 05C62, 14J80, 37D15

Combinatorial invariant of Morse-Smale diffeomorphisms on surfaces with orientable heteroclinic

© A. I. Morozov¹, O. V. Pochinka²

Abstract. In this paper we consider class of orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms f , given on orientable surface M^2 . In their articles A.A. Bezdenezhnic and V.Z. Grines has shown, that such diffeomorphisms contain finite number of heteroclinic orbits. Moreover, the problem of classification for such diffeomorphisms is reduced to the problem of distinguishing orientable graphs with substitutions describing the geometry of heteroclinic intersections. However, these graphs generally do not allow polynomial distinguishing algorithms. In this paper, we propose a new approach to the classification of such cascades. To this end, each considered diffeomorphism f is associated with a graph whose embeddability in the ambient surface makes it possible to construct an effective algorithm for distinguishing such graphs.

Key Words: Morse-Smale diffeomorphism, orientation-preserving diffeomorphism, topological invariant of diffeomorphism, surface diffeomorphism, orientable heteroclinic

REFERENCES

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **6**:73 (1967), 747–817.
2. V. Grines, “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with finite set of heteroclinic trajectories on surfaces.”, *Math. Notes.*, **54**:3 (1993), 881–889.
3. A.N. Bezdenezhnic, *Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms with orientable heteroclinical sets on 2-manifolds : Dissertation.*, Lobachevsky University., Gorkiy, 1985, 124 p.
4. O. Pochinka, A. Morozov, “Morse-Smale surfaced diffeomorphisms with orientable heteroclinic.”, *Journal of Dynamical and Control Systems.*, 2020.
5. V. Grines, V. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, “Global attractor and repeller of Morse-Smale diffeomorphisms”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.*, **271**:1 (2010), 103–124 (In Russ.).
6. V. Grines, O. Pochinka, S. Van Strien, “On 2-diffeomorphisms with one-dimensional basic sets and a finite number of moduli”, *Moscow Mathematical Journal.*, **16**:4 (2016), 727–749.
7. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds.*, Springer, Switzerland, 2016, 295 p.

¹**Andrey I. Morozov**, Research Trainee, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-3125-1825>, morozov-lux@yandex.ru

²**Olga V. Pochinka**, Laboratory Head, International Laboratory of Dynamical Systems and Applications, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, olga-pochinka@yandex.ru

8. D. Rolfsen, *Knots and links. Mathematics Lecture Series 7.*, University of British Columbia, Vancouver, 1990.
9. M.W. Hirsch,, *Differential topology*, Springer, Switzerland, 1976.

Submitted 25.12.2019

УДК 517.9

Об одной нелокальной краевой задаче с наклонной производной

© К. Ж. Назарова¹, Б. Х. Турметов², К. И. Усманов³

Аннотация. Работа посвящена исследованию вопросов разрешимости нелокальной краевой задачи для уравнения Лапласа. Нелокальное условие вводится с помощью преобразований в пространстве R^n , осуществляемых некоторой ортогональной матрицей. Приведены примеры и свойства таких матриц. Для исследования основной задачи сначала решается вспомогательная нелокальная задача типа Дирихле для уравнения Лапласа. Данная задача сводится к векторному уравнению, элементами которого являются решения классической задачи Дирихле. При выполнении некоторых условий для коэффициентов в граничном условии доказаны теоремы о единственности и существовании решения задачи типа Дирихле. Для решения этой задачи получено также интегральное представление, которое является обобщением классического интеграла Пуассона. Далее основная задача сводится к решению нелокальной задачи типа Дирихле. Доказаны теоремы о существовании и единственности решения исследуемой задачи. С помощью известных утверждений о решениях краевой задачи с наклонной производной для классического уравнения Лапласа найдены точные порядки гладкости решения данной задачи. Приведены также примеры невыполнения условий теоремы; при этом решение рассматриваемой задачи не единственно.

Ключевые слова: наклонная производная, нелокальная задача, уравнение Лапласа, ортогональная матрица, класс Гельдера, гладкость, существование, единственность

1. Введение

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ — единичный шар, $n \geq 3$, $\partial\Omega = \{x \in \partial\Omega : |x| = 1\}$ — единичная сфера; $\Gamma = \{x \in \partial\Omega : x_n = 0\}$.

Пусть S — действительная ортогональная матрица $S \cdot S^T = E$; E — единичная матрица. Предположим также, что существует натуральное число l такое, что $S^l = E$. Заметим, что если $x \in \Omega$ или $x \in \partial\Omega$, то для любого натурального числа k имеет место включение $S^k x \in \Omega$, или $S^k x \in \partial\Omega$.

Приведем примеры таких отображений.

Пример 1.1 Для любой точки $x \in \Omega$ поставим в соответствие точку $Sx = -x$. В этом случае $S = -E$. Ясно, что $S \cdot S^T = -E(-E) = E$ и $S^2 = E$, т. е. $l = 2$.

Пример 1.2 Пусть $n = 2$, $\varphi = \frac{2\pi}{l}$, $l \geq 1$. Тогда для отображения

$$S = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

¹Назарова Кулзина Жаркимбековна, доцент кафедры математики, МКТУ имени Х. А. Ясави (161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, д. 29), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2093-1879>, gjnazarova@mail.ru

²Турметов Батирхан Худайбергенович, профессор, МКТУ имени Х. А. Ясави (161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, д. 29), доктор физико-математических наук, <http://orcid.org/0000-0001-7735-6484>, turmetovbh@mail.ru

³Усманов Кайрат Идрисович, доцент кафедры математики, МКТУ имени Х. А. Ясави (161200, Казахстан, г. Туркестан, пр. Б. Саттарханова, д. 29), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1377-4633>, y_kairat@mail.ru

получим

$$S^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что $S \cdot S^T = E$ и $S^l = E$.

Перейдем к постановке задачи, которую будем исследовать в настоящей работе. Введем оператор $I_S[u](x) \equiv u(Sx)$. Пусть a_1, a_2, \dots, a_l – некоторые действительные числа; $g(x)$ и $\phi(x)$ – функции, заданные на $\partial\Omega$ и Γ соответственно. Рассмотрим в области Ω следующую задачу:

$$\Delta u(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad (1.1)$$

$$a_1 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(Sx) + \dots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n}(S^{l-1}x) = g(x), \quad x \in \partial\Omega; \quad (1.2)$$

$$u(\tilde{x}) = \phi(\tilde{x}), \quad \tilde{x} \in \Gamma. \quad (1.3)$$

Решением задачи (1.1)–(1.3) назовем функцию $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям (1.1)–(1.3) в классическом смысле.

В условии (1.2) выражение $\frac{\partial u}{\partial x_n}(S^k x)$, $k = 1, 2, \dots, l-1$ означает

$$\frac{\partial u(S^k x)}{\partial x_n} = I_{S^k} \left[\frac{\partial}{\partial x_n} u(x) \right], \quad k = 1, 2, \dots, l-1,$$

и при этом надо отметить, что

$$I_{S^k} \left[\frac{\partial}{\partial x_n} u(x) \right] \neq \frac{\partial}{\partial x_n} [I_{S^k} u(x)].$$

Поскольку краевое условие (1.2) задано в виде связи значений производной функции $u(x)$ в различных точках, то рассматриваемая задача входит в класс нелокальных задач типа Бицадзе–Самарского [1].

В случае $a_1 = 1$, $a_j = 0$, $j = 2, 3, \dots, l$, получим известную задачу с наклонной производной [2]. Отметим, что вырождающиеся краевые задачи с наклонной производной для эллиптических уравнений исследованы в работах многочисленных авторов (см. например, [3–7]). Отметим, что для уравнения Лапласа в двумерном случае краевые задачи с отображениями из примера 1.2 изучены в работе [8], а в работах [9–10] аналогичные задачи исследованы для полигармонического уравнения. Кроме того, в работах [11–12] для нелокального уравнения Лапласа с отображениями S исследованы вопросы разрешимости основных краевых задач.

2. Вспомогательные утверждения

В данном пункте мы изложим некоторые свойства отображения S , а также приведем вспомогательные утверждения из теории систем алгебраических уравнений. Рассмотрим следующую матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_l \\ a_l & a_1 & \dots & a_{l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix}.$$

Следующие утверждения доказаны в работе [11].

Л е м м а 2.1 Пусть $\varepsilon_1 = e^{i\frac{2\pi}{l}}$ – примитивный корень степени l из единицы. Тогда $\det A = \prod_{k=1}^l (a_1 \varepsilon_0^k + \dots + a_l \varepsilon_{l-1}^k)$, где $\varepsilon_k = e^{i\frac{2\pi k}{l}}$, $k = 0, 1, \dots, l-1$.

Л е м м а 2.2 Пусть $\mu_k = a_1\varepsilon_0^k + \dots + a_l\varepsilon_{l-1}^k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, l$, где $\varepsilon_k = e^{i\frac{2k\pi}{l}}$. Тогда существует обратная матрица к матрице A :

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_l \\ b_l & b_1 & \dots & b_{l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & b_3 & \dots & b_1 \end{pmatrix},$$

где

$$b_j = \frac{1}{l} \sum_{k=1}^l \frac{1}{\varepsilon_k^{j-1} \mu_k}, \quad j = 1, 2, \dots, l. \quad (2.1)$$

Л е м м а 2.3 Если $u(x)$ – гармоническая функция в Ω , то функция $u(Sx) = I_{Su}(x)$ также – гармоническая в Ω .

Л е м м а 2.4 Если $u(x)$ – гармоническая функция, то она удовлетворяет уравнению

$$a_1 \Delta u(x) + a_2 \Delta u(Sx) + \dots + a_l \Delta u(S^{l-1}x) = 0. \quad (2.2)$$

Л е м м а 2.5 Пусть $u(x) \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (2.2). Тогда при выполнении условия $\det A \neq 0$ функция $u(x)$ является гармонической в области Ω .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $u(x) \in C^2(\Omega)$ удовлетворяет уравнению (2.2). Обозначим

$$v(x) = \sum_{k=1}^l a_k u(S^{k-1}x). \quad (2.3)$$

Очевидно, что $v(x) \in C^2(\Omega)$ и $\Delta v(x) = 0$, $x \in \Omega$, т. е. функция $v(x)$ является гармонической в области Ω . В силу утверждения леммы 2.3, функции $v(S^k x)$, $k = 1, 2, \dots, l$ также являются гармоническими в Ω . С другой стороны, из равенства (2.3), в силу условия $S^l = E$, следуют равенства

[illegible]

Таким образом, для функций $u(x)$, $u(Sx), \dots, u(S^{l-1}x)$ получим систему алгебраических уравнений (2.3) – (2.4) с матрицей A :

$$\begin{pmatrix} v(x) \\ v(Sx) \\ \dots \\ v(S^{l-1}x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_l \\ a_l & a_1 & \dots & a_{l-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x) \\ u(Sx) \\ \dots \\ u(S^{l-1}x) \end{pmatrix}.$$

По условию леммы, определитель этой системы $\det A$ не обращается в нуль. Если обозначим

$$U = (u(x), u(Sx), \dots, u(S^{l-1}x))^T, V = (v(x), v(Sx), \dots, v(S^{l-1}x))^T,$$

то система алгебраических уравнений $AU = V$ имеет единственное решение $U = A^{-1}V$. В частности

$$u(x) = \sum_{j=1}^l b_j v(S^{j-1}x), \quad (2.5)$$

где b_j определяются равенством (2.1). Поскольку $v(S^{j-1}x)$ гармонические функции в Ω , то функция $u(x)$ из (2.5) также является гармонической в Ω . Лемма доказана.

3. Нелокальная задача типа Дирихле

В этом пункте мы исследуем следующую нелокальную задачу типа Дирихле:

$$\Delta v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=1}^l a_k v(S^{k-1}x)|_{\partial\Omega} = g(x), \quad x \in \partial\Omega. \quad (3.2)$$

Решением задачи (3.1) – (3.2) назовем функцию $v(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, удовлетворяющую условиям (3.1) – (3.2) в классическом смысле.

В случае $a_1 \neq 0$, $a_k = 0$, $k = 2, 3, \dots, l$, получим классическую задачу Дирихле, для уравнения Лапласа.

Т е о р е м а 3.1 Пусть при всех $k = 1, 2, 3, \dots, l$ выполняются условия $\mu_k = a_1 \varepsilon_0^k + \dots + a_l \varepsilon_{l-1}^k \neq 0$. Тогда если решение задачи (3.1) – (3.2) существует, то оно единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что однородная задача (3.1) – (3.2) имеет только нулевое решение. Пусть $v(x)$ – решение однородной задачи (3.1) – (3.2). Как было отмечено выше, если функция $v(x)$ гармоническая, то функции $v(S^{k-1}x)$, $k = 2, 3, \dots, l$, – также гармонические. Тогда функция $v(x)$ удовлетворяет и уравнению (2.2).

Рассмотрим функцию

$$w(x) = \sum_{k=1}^l a_k v(S^{k-1}x), \quad x \in \Omega.$$

Очевидно, что $w(x) \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Если $\mu_k = a_1 \varepsilon_0^k + \dots + a_l \varepsilon_{l-1}^k \neq 0$ при $k = 1, 2, \dots, l$, то по лемме 2.1 справедливо условие $D = \det A \neq 0$. Тогда по лемме 2.3 функция $w(x)$ – гармоническая в области Ω и, следовательно, является решением следующей задачи Дирихле:

$$\Delta w(x) = 0, \quad x \in \Omega; \quad w(x)|_{\partial\Omega} = 0.$$

В силу единственности решения задачи Дирихле имеем $w(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}$. Тогда функция $v(x)$, найденная по формуле (2.3), тождественно равна нулю, т. е. $v(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3.1 Если $\mu_k = 0, k = 1, 2, \dots, l \iff \text{Det} A = 0$, то однородная задача имеет бесконечно много решений. Например, если $Sx = -x$, т. е. $l = 2$, то $u(x) = H_{2p}(x)$ – однородные гармонические полиномы степени $2p, p = 0, 1, \dots$, удовлетворяют граничному условию

$$u(x) - u(Sx) = 0, x \in \partial\Omega.$$

Далее исследуем существование решения задачи (3.1) – (3.2). Пусть

$$P(x, y) = \frac{1}{\omega_n} \frac{1 - |x|^2}{|x - y|^n}$$

ядро Пуассона; ω_n – площадь единичной сферы.

Доказательство следующего утверждения приведено в работе [11] .

Л е м м а 3.1 Пусть функция $g(x)$ непрерывна на $\partial\Omega$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\int_{\partial\Omega} g(S^k y) ds_y = \int_{\partial\Omega} g(y) ds_y.$$

Справедливо следующее утверждение относительно задачи (3.1) – (3.2).

Т е о р е м а 3.2 Пусть числа $\{a_k : k = 1, \dots, l\}$ такие, что $\mu_k = a_1 \varepsilon_0^k + \dots + a_l \varepsilon_{l-1}^k \neq 0$ при $k = 1, \dots, l$, где ε_k – корни степени l из единицы; $g \in C^\lambda(\partial\Omega)$, $0 < \lambda$ и λ – нецелое. Тогда решение задачи (3.1) – (3.2) существует, единственно, принадлежит классу $C^\lambda(\bar{\Omega})$ и представляется в виде

$$v(x) = \int_{\partial\Omega} P_S(x, y) g(y) ds_y, \quad (3.3)$$

где

$$P_S(x, y) = \sum_{q=1}^l b_q P(S^{q-1} x, y), \quad (3.4)$$

$a b_q$ при $q = 1, \dots, l$ находится из (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим в области Ω для функции $w(x)$ следующую задачу Дирихле:

$$\Delta w(x) = 0, x \in \Omega; \quad w(x)|_{\partial\Omega} = g(x), x \in \partial\Omega. \quad (3.5)$$

Известно (см. например [13]), что если $g(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$, то решение задачи Дирихле (3.5) существует, единственно, принадлежит классу $C^\lambda(\bar{\Omega})$ и представляется в виде

$$w(x) = \int_{\partial\Omega} P(x, y) g(y) ds_y. \quad (3.6)$$

Рассмотрим вектор $W = (w(x), w(Sx), \dots, w(S^{l-1}x))^T$. По лемме 2.2 матрица A^{-1} обладает структурой матрицы A . Поэтому из векторного равенства $V = A^{-1}W$ определим вектор $V = (v(x), v(Sx), \dots, v(S^{l-1}x))^T$. Поскольку $\mu_k = a_1 \varepsilon_0^k + \dots + a_l \varepsilon_{l-1}^k \neq 0$, то по лемме 2.1 $\det A \neq 0$ и, значит, $\det A^{-1} \neq 0$. Поскольку $AV = W$, то функция $v(x)$ однозначно определяется через функцию $w(x)$ из (2.3) по формуле

$$v(x) = \sum_{j=1}^l b_j w(S^{j-1}x), \quad (3.7)$$

где b_j находится из (2.1). Проверим, что функция $v(x)$, определяемая из (3.7), является решением задачи (3.1) – (3.2). Действительно, $g \in C^\lambda(\partial\Omega) \Rightarrow w \in C^\lambda(\bar{\Omega}) \Rightarrow v(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$. Поэтому, согласно лемме 2.3 и равенству (3.5), в области Ω получим

$$\Delta v(x) = \sum_{j=1}^l b_j \Delta w(S^{j-1}x) = 0.$$

Проверим выполнение граничного условия задачи (3.1) – (3.2). При $x \in \partial\Omega$ из равенства (3.7) запишем:

$$\begin{aligned} v(x)|_{\partial\Omega} &= \sum_{q=1}^l b_q w(S^{q-1}x) \Big|_{\partial\Omega} = \sum_{q=1}^l b_q g(S^{q-1}x), \\ v(Sx)|_{\partial\Omega} &= I_S v(x)|_{\partial\Omega} = I_S \left(\sum_{q=1}^l b_q g(S^{q-1}x) \right) = \sum_{q=1}^l b_q g(S^q x) = b_l g(x) + \sum_{q=1}^{l-1} b_q g(S^q x) = \\ &= b_0 g(x) + \sum_{q=2}^l b_{q-1} g(S^{q-1}x) = \sum_{q=1}^l b_{q-1} g(S^{q-1}x). \end{aligned}$$

Тогда по индукции

$$v(S^{k-1}x) = \sum_{q=1}^l b_{q-k+1} g(S^{q-1}x), \quad k = 1, 2, \dots, l.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^l a_k v(S^{k-1}x)|_{\partial\Omega} = \sum_{k=1}^l a_k \sum_{q=1}^l b_{q-k+1} g(S^{q-1}x) = \sum_{q=1}^l g(S^{q-1}x) \sum_{k=1}^l a_k b_{q-k+1}.$$

Поскольку по определению чисел b_k

$$\sum_{k=1}^l a_k b_{q-k+1} = \begin{cases} 1 & q = 1 \\ 0 & q \neq 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

то окончательно получим

$$\sum_{k=1}^l a_k v(S^{k-1}x)|_{\partial\Omega} = g(x),$$

т. е. граничное условие (3.2) также выполняется.

Далее, подставляя представление функции $w(x)$ из (3.6) в равенство (3.7) и учитывая при этом формулу (3.4) получим

$$\begin{aligned} v(x) &= \sum_{q=1}^l b_q w(S^{q-1}x) = \sum_{q=1}^l b_q \int_{\partial\Omega} P(S^{q-1}x, y) g(y) \, ds_y = \\ &= \int_{\partial\Omega} \left[\sum_{q=1}^l b_q P(S^{q-1}x, y) \right] g(y) \, ds_y = \int_{\partial\Omega} P_S(x, y) g(y) \, ds_y. \end{aligned}$$

Таким образом, представление (3.3) для функции $v(x)$ доказано. Теорема доказана.

4. Исследование основной задачи

Приступим к изучению основной краевой задачи. Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.1 Пусть в задаче (1.1) – (1.3) коэффициенты a_j , $j = 1, 2, \dots, l$, такие, что $\mu_k = a_1 \varepsilon_0^k + \dots + a_l \varepsilon_{l-1}^k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, l$. Тогда если решение задачи (1.1) – (1.3) существует, то оно единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $u(x)$ – решение однородной задачи (1.1) – (1.3). Обозначим $v(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}$, $x \in \Omega$. Очевидно, что функция $v(x)$ – гармоническая в области Ω . Далее, для любого $k = 1, 2, \dots, l$ справедливо равенство

$$v(S^k x) = I_{S^k} v(x) = I_{S^k} \frac{\partial}{\partial x_n} u(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_n} u(S^k x).$$

Тогда из однородного краевого условия (1.2) следует

$$a_1 v(x) + a_2 v(Sx) + \dots + a_n v(S^{l-1}x) = 0, \quad x \in \partial\Omega.$$

Итак, если $u(x)$ – решение однородной задачи (1.1) – (1.3), то функция $v(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}$, $x \in \Omega$, будет решением однородной задачи (3.1) – (3.2). В силу утверждения теоремы 3.1 решение этой задачи единственно, и, следовательно, $v(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega} \Leftrightarrow \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}$. Тогда $u(x) = u(\tilde{x}, 0)$ – гармоническая функция зависящая от переменной $\tilde{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$. По условию (1.3) $u(x)|_{\Gamma} = 0$, тогда $u(x) \equiv 0$, $x \in \bar{\Omega}$. Теорема доказана.

Перейдем к исследованию существования и гладкости решения задачи (1.1)–(1.3). Сначала приведем некоторые вспомогательные утверждения, доказанные в работе [3].

В дальнейшем будем считать, что функция $w(x)$ принадлежит классу $C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Для любой точки $x \in \Omega$ обозначим символом \tilde{x} точку $\partial\Omega$, наименее удаленную от x .

В работе [3] доказаны следующие утверждения.

Л е м м а 4.1 Пусть $\lambda \geq 0$ и $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ – мультииндекс с $|\beta| > \lambda$. Пусть $\Delta w(x) = 0$, $x \in \Omega$. Если $w(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, то

$$|D^\beta u(x)| \leq C|x - \tilde{x}|^{\lambda - \beta}.$$

Л е м м а 4.2 Пусть функция $w(x)$ является решением задачи $\Delta w(x) = f(x)$, $x \in \Omega$; $w(x)|_{\partial\Omega} = 0$ с функцией $f(x)$, удовлетворяющей условию

$$|f(x)| \leq C|x - \tilde{x}|^{\lambda - 1}.$$

Тогда для любого $\mu < \lambda$ функция $w(x)$ принадлежит классу $C^{\mu+1}(\bar{\Omega})$.

Л е м м а 4.3 Пусть $w(x)$ – решение задачи (3.5). Если $g(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$, то

$$h(x) = \int_0^{x_n} w(\tilde{x}, t) dt$$

принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$.

Т е о р е м а 4.2 Пусть $\mu_k = a_1\varepsilon_0^k + \dots + a_l\varepsilon_0^k \neq 0$, $k = 1, 2, \dots, l$, $\lambda + \frac{1}{2} > 1$, причем число $\lambda + \frac{1}{2}$ – нецелое, $g(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$, $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$. Тогда решение задачи (1.1) – (1.3) существует и принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $u(x)$ – решение задачи (1.1) – (1.3).

Обозначим $v(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}$, $x \in \Omega$. Очевидно, что функция $v(x)$ – гармоническая в области Ω , и для любого $k = 1, 2, \dots, l$ справедливо равенство

$$v(S^k x) = I_{S^k} \frac{\partial}{\partial x_n} u(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_n} u(S^k x).$$

Тогда из условия (1.2) для функции $v(x)$ получим задачу (3.1) – (3.2).

Таким образом, если $u(x)$ – решение задачи (1.1) – (1.3), то функция $v(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}$, $x \in \Omega$ будет удовлетворять условиям задачи (3.1) – (3.2). Если $g(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$, то по теореме 3.1 решение этой задачи существует, единственно и принадлежит классу $C^\lambda(\bar{\Omega})$.

Покажем, что по функцию $v(x)$ можно построить по решению задачи (1.1) – (1.3). Пусть $v(x)$ удовлетворяет условиям задачи (3.1) – (3.2). Решение задачи (1.1) – (1.3) будем искать в следующем виде:

$$u(x) = \int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t) dt + z(\tilde{x}), \quad (4.1)$$

где функция $z(\tilde{x})$ подлжит определению. Пусть $\tilde{\Delta} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$. Тогда для интеграла в правой части равенства (4.1) получим:

$$\begin{aligned} \Delta \left(\int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t) dt \right) &= \int_0^{x_n} \tilde{\Delta} v(\tilde{x}, t) dt + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t) dt = \\ &= - \int_0^{x_n} \frac{\partial^2 v(\tilde{x}, t)}{\partial t^2} dt + \frac{\partial v(\tilde{x}, x_n)}{\partial x_n} = \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

Отсюда, применяя оператор Лапласа к левой и правой частям равенства (4.1), запишем:

$$\Delta u(x) = \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n} + \tilde{\Delta} z(\tilde{x})$$

Следовательно, для функции $z(\tilde{x})$ получим следующую задачу Дирихле:

$$\tilde{\Delta} z(\tilde{x}) = - \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}, |\tilde{x}| < 1, z(\tilde{x})|_\Gamma = \phi(\tilde{x}). \quad (4.2)$$

При гладких данных $\frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}$ и $\phi(\tilde{x})$ решение этой задачи существует. Покажем, что функция (4.1) формально удовлетворяет всем условиям задачи (1.1) – (1.3). Действительно, по построению $\Delta u(x) = 0$, $x \in \Omega$; $u(x)|_\Gamma = z(\tilde{x})|_\Gamma = \phi(\tilde{x})$, т. е. условия (1.1) и (1.3) выполняются. Далее

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = v(x), \frac{\partial u(S^k x)}{\partial x_n} = I_{S^k} \left[\frac{\partial}{\partial x_n} u(x) \right] = I_{S^k} v(x) = v(S^k x), k = 1, 2, \dots, l-1.$$

Значит,

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_n}(Sx) + \dots + a_n \frac{\partial u}{\partial x_n}(S^{l-1}x) = \\ = a_1 v(x) + a_2 v(Sx) + \dots + a_n v(S^{l-1}x) = g(x), x \in \partial\Omega, \end{aligned}$$

т. е. граничное условие (1.2) также выполняется.

Остается исследовать гладкость решения задачи (4.2).

Введем функцию

$$h(x) = \int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t) dt. \quad (4.3)$$

Далее, используя формулу (3.7), представим функцию $v(x)$ из (4.3) через решение задачи (3.5). Тогда

$$h(x) = \sum_{j=1}^l b_j \int_0^{x_n} w_j(\tilde{x}, t) dt,$$

где $w_j(\tilde{x}, t) = w(S^{j-1}(\tilde{x}, t))$. Очевидно, что функции $w(S^k x)$, $k = 1, 2, \dots, l-1$, будут решениями задачи

$$\Delta w(x) = 0, x \in \Omega; w(S^k x)|_{\partial\Omega} = g(S^k x), x \in \partial\Omega. \quad (4.4)$$

Поскольку задача (4.4) эквивалентна задаче Дирихле, то по утверждению леммы (4.3) функции $\int_0^{x_n} w_j(\tilde{x}, t) dt$, $j = 1, 2, \dots, l-1$, принадлежат классу $C^{\lambda+\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$, а значит, функция $h(x)$ из (4.3) также принадлежит классу $C^{\lambda+\frac{1}{2}}(\bar{\Omega})$.

Остается исследовать гладкость решения задачи (4.2). Если $\lambda > 1$, то при условии $g(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$ функция $v(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$, и поэтому $\frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n} \in C^{\lambda-1}(\bar{\Omega})$. Тогда решение задачи (4.2) существует, единственно и при выполнении условия $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$ принадлежит классу $C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ (см., например, [13]).

Пусть $\lambda < 1$. Представим функцию $z(x)$ в виде $z(x) = z_1(x) + z_2(x)$, где

$$\tilde{\Delta} z_1(\tilde{x}) = 0, |\tilde{x}| < 1, z_1(\tilde{x})|_\Gamma = \phi(\tilde{x}). \quad (4.5)$$

$$\tilde{\Delta} z_2(\tilde{x}) = -\frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}, |\tilde{x}| < 1, z_2(\tilde{x})|_\Gamma = 0. \quad (4.6)$$

Если $\phi(x) \in C^{\lambda+1}(\Gamma)$, то решение задачи (4.5) существует и принадлежит классу $C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$. Для функции $v(x)$ в этом случае в силу леммы 4.1 получим оценку

$$\left| \frac{\partial v(x)}{\partial x_n} \right| \leq C|x - \bar{x}|^{\lambda-1}.$$

Тогда для задачи (4.6), применяя лемму 4.2 с функцией $f(x) = \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}$, получим $z_2 \in C^{\lambda+1-\varepsilon}(|x| \leq 1)$, и если положим $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $z_2 \in C^{\lambda+1/2}(|x| \leq 1)$. Таким образом, решение задачи (1.1) – (1.3) принадлежит классу $C^{\lambda+1/2}(\bar{\Omega})$. Теорема доказана.

Можно доказать, что показатель гладкости решения задачи (1.1)-(1.3) полученный в теореме 4.2, нельзя улучшить. Данное утверждение докажем на примере отображения $Sx = -x$. Справедливо следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.3 Пусть $Sx = -x$, $\lambda > 0$, причем число $\lambda + \frac{1}{2}$ – нецелое. Существует функция $g(x) \in C^\lambda(\bar{\Omega})$ такая, что решение задачи (1.1) – (1.3) при любом $\varepsilon > 0$ не принадлежит классу $C^{\lambda+1/2+\varepsilon}(\bar{\Omega})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $Sx = -x$. Предположим, что функция $v(\tilde{x})$ является решением задачи

$$\Delta v(\tilde{x}) = 0, |x| < 1; v(\tilde{x})|_\Gamma = \phi(\tilde{x}). \quad (4.7)$$

Выберем функцию $\phi(\tilde{x}) \in C^\lambda(\Gamma)$ так, чтобы $v(\tilde{x}) \in C^\lambda(|x| \leq 1)$ и чтобы для любого $\varepsilon > 0$ выполнялось условие $v(\tilde{x}) \notin C^{\lambda+\varepsilon}(|x| \leq 1)$. Что касается функции $u(x) = x_n v(\tilde{x})$, то она будет удовлетворять условиям следующей задачи:

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega; \quad \left. \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right|_{\partial\Omega} = \phi, \quad u(x)|_\Gamma = 0.$$

В работе [3] доказано, что при выборе такой функции $v(\tilde{x})$ функция $u(x)$ принадлежит классу $C^{\lambda+1/2}(\bar{\Omega})$ и $u(x) \notin C^{\lambda+1/2+\varepsilon}(\bar{\Omega})$, $\varepsilon > 0$.

Справедливы следующие равенства

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = v(\tilde{x}), \quad \frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n} = v(-\tilde{x}).$$

Из них следует, что

$$a_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + a_2 \frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n} = a_1 v(\tilde{x}) + a_2 v(-\tilde{x})|_\Gamma = a_1 \phi(\tilde{x}) + a_2 \phi(-\tilde{x}) \equiv g(x).$$

Таким образом, функция $u(x) = x_n v(\tilde{x})$ принадлежит классу $C^{\lambda+1/2}(\bar{\Omega})$ и $u(x) \notin C^{\lambda+1/2+\varepsilon}(\bar{\Omega})$, $\varepsilon > 0$, а также удовлетворяет условиям

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega; \quad a_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + a_2 \frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n} \Big|_{\partial\Omega} = g(x), \quad u(x)|_\Gamma = 0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

З а м е ч а н и е 4.1 Если в задаче (1.1)-(1.3) коэффициенты a_k , $k = 1, 2, \dots, l$ такие, что $\det A = 0$, то можно показать, что однородная задача имеют ненулевые решения. Например, пусть $Sx = -x$ и $0 = \det A = a_1^2 - a_2^2 \Leftrightarrow a_1 = \pm a_2$. Если рассмотрим функцию $u(x) = x_n v(\tilde{x})$, где $v(\tilde{x})$ – решение задачи 4.7, то $\Delta u(x) = 0$, $x \in \Omega$; $u(x)|_\Gamma = 0$.

Если функция $v(\tilde{x})$ дополнительно обладает свойством четности $v(\tilde{x}) = v(-\tilde{x})$, то функция $u(x) = x_n v(\tilde{x})$ будет удовлетворять граничному условию

$$a_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + a_2 \frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{когда } a_1 = -a_2,$$

а если $v(-\tilde{x}) = -v(\tilde{x})$, то

$$a_1 \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + a_2 \frac{\partial u(Sx)}{\partial x_n} \Big|_{\partial\Omega} = 0, \quad \text{когда } a_1 = a_2.$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Министерства образования и науки Республики Казахстан (грант № AP05131268).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Доклады АН СССР. 1969. Т. 185, № 4. С. 739–740.
2. Бицадзе А. В. Об однородной задаче наклонной производной для гармонических функций в трехмерных областях // Доклады АН СССР. 2003. Т. 148, № 4. С. 749–752.
3. Алимов Ш. А. Об одной задаче с наклонной производной // Дифференциальные уравнения. 1981. Т. 17, № 10. С. 1738–1751.
4. Бояркин Д. И. Краевая задача с вырождением на границе вдоль многообразия соразмерности $k > 2$ // Журнал СВМО. 2016. Т. 18, № 2. С. 7–10.
5. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А. О задаче с косой производной // Математический сборник. 1969. Т. 78 (120), № 1. С. 148–176.
6. Мазья В. Г. О вырождающейся задаче с косой производной // Журнал УМН. 1970. Т. 25, № 2 (152). С. 275–276.
7. Popivanov P. Boundary value problems for the biharmonic operator in the unit ball // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2159, no. 030028. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5127493>
8. Przeworska-Rolewicz D. Some boundary value problems with transformed argument // Commentationes Mathematicae. 1974. Vol. 17, no. 2. pp. 451–457.
9. Karachik V. V., Turmetov B. Kh. On solvability of some nonlocal boundary value problems for polyharmonic equation // Kazakh Mathematical Journal. 2019. Vol. 19, no. 1. pp. 39–49.
10. Turmetov B. Kh., Muratbekova M., Ahmedov A. On solvability of some boundary value problems for the non-local polyharmonic equation with boundary operators of the Hadamard Type // Journal of Physics: Conference Series. 2019. Vol. 1366, 012065.
11. Karachik V. V., Sarsenbi A., Turmetov B. Kh. On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation // Turkish Journal of Mathematics. 2019. Vol. 43, no. 3. pp. 1604–1625.
12. Turmetov B. Kh., Shamsiev R. N. On a boundary problem for a non-local Poisson equation with boundary operators of the Hadamard type // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2183, no. 070027. DOI: <https://doi.org/10.1063/1.5136189>
13. Гилбарг Д., Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука ; Гл. ред. физ.-мат. лит., 1989. 464 с.

Поступила 07.01.2020

MSC2020 35J25

On a nonlocal boundary value problem with an oblique derivative

© K. Zh. Nazarova¹, B. Kh. Turmetov², K. I. Usmanov³

Abstract. The work studies the solvability of a nonlocal boundary value problem for the Laplace equation. The nonlocal condition is introduced using transformations in the R^n space carried out by some orthogonal matrices. Examples and properties of such matrices are given. To study the main problem, an auxiliary nonlocal Dirichlet-type problem for the Laplace equation is first solved. This problem is reduced to a vector equation whose elements are the solutions of the classical Dirichlet problem. Under certain conditions for the boundary condition coefficients, theorems on uniqueness and existence of a solution to a problem of Dirichlet type are proved. For this solution an integral representation is also obtained, which is a generalization of the classical Poisson integral. Further, the main problem is reduced to solving a non-local Dirichlet-type problem. Theorems on existence and uniqueness of a solution to the problem under consideration are proved. Using well-known statements about solutions of a boundary value problem with an oblique derivative for the classical Laplace equation, exact orders of smoothness of a problem's solution are found. Examples are also given of the cases where the theorem conditions are not fulfilled. In these cases the solution is not unique.

Key Words: oblique derivative, nonlocal problem, Laplace equation, orthogonal matrix, Helder class, smoothness of solution, existence of solution, uniqueness of solution

REFERENCES

1. A. V. Bitsadze, A. A. Samarskii, "Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems", *Doklady AN SSSR*, **185**:4 (1969), 739–740 (In Russ.).
2. A. B. Bitsadze, "[On the homogeneous problem of the inclined derivative of harmonic functions in three-dimensional domains]", *Doklady AN SSSR*, **148**:4 (2003), 749–752 (In Russ.).
3. Sh. A. Alimov, "On a problem with an oblique derivative", *Differentsialnye uravneniya*, **17**:10 (1981), 1738–1751 (In Russ.).
4. D. I. Boyarkin, "A boundary value problem with degeneration on the boundary along the manifold of codimension $k > 2$ ", *Zhurnal SVMO*, **18**:2 (2016), 7–10 (In Russ.).
5. Yu. V. Egorov., V. A. Kondratev, "The oblique derivative problem", *Math. USSR-Sb.*, **7**:1 (1969), 139–169.
6. V. G. Mazya, "[The degenerate problem with oblique derivative]", *UMN*, **25**:2 (152) (1970), 275–276 (In Russ.).

¹**Kulzina Zh. Nazarova**, Associate Professor of Mathematics, Akhmet Yassawi University (29 Sattarkhanov Av., Turkistan 161200, Kazakhstan), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2093-1879>, gjnazarova@mail.ru

²**Batirkhan Kh. Turmetov**, Professor of Mathematics, Akhmet Yassawi University (29 Sattarkhanov Av., Turkistan 161200, Kazakhstan), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2093-1879>, turmetovbh@mail.ru

³**Kairat Id. Usmanov**, Associate Professor of Mathematics, Akhmet Yassawi University (29 Sattarkhanov Av., Turkistan 161200, Kazakhstan), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2093-1879>, y_kairat@mail.ru

7. P. Popivanov, “Boundary value problems for the biharmonic operator in the unit ball”, *AIP Conference Proceedings*, **2159**:030028, <https://doi.org/10.1063/1.5127493> (2019).
8. D. Przeworska-Rolewicz, “Some boundary value problems with transformed argument”, *Commentationes Mathematicae*, **17**:2 (1974), 451 – 457.
9. V. V. Karachik , B. Kh. Turmetov, “On solvability of some nonlocal boundary value problems for polyharmonic equation”, *Kazakh Mathematical Journal*, **19**:1 (2019), 39 – 49..
10. B. Kh. Turmetov, M. Muratbekova , A. Ahmedov, “On solvability of some boundary value problems for the non-local polyharmonic equation with boundary operators of the hadamard type”, *Journal of Physics: Conference Series*, **1366** (2019).
11. V. V. Karachik , A. Sarsenbi, B. Kh. Turmetov, “On solvability of the main boundary value problems for a non-local Poisson equation”, *Turkish Journal of Mathematics*, **43**:3 (2019), 1604 – 1625.
12. B. Kh. Turmetov, R. N. Shamsiev, “On a boundary problem for a nonlocal Poisson equation with boundary operators of the Hadamard type”, *AIP Conference Proceedings*, **2183**:070027, <https://doi.org/10.1063/1.5136189> (2019).
13. D. Gilbarg , N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 401 p.

Submitted 07.01.2020

УДК 517.9

Разработка параллельного алгоритма на основе неявной схемы для метода Галёркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений диффузионного типа

© Р. В. Жалнин¹, Н. А. Кузьмин², В. Ф. Масягин³

Аннотация. В статье представлен параллельный численный алгоритм на основе неявной схемы для метода Галёркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений диффузионного типа на треугольных сетках. Для применения метода Галёркина с разрывными базисными функциями исходное уравнение параболического типа преобразуется к системе дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Для этого вводятся вспомогательные переменные, представляющие собой компоненты градиента искомой функции. Для хранения разреженных матриц и векторов в работе используется формат CSR. Полученная система решается численно с помощью параллельного алгоритма, основанного на библиотеке Nvidia AmgX. Численное исследование проводится на примере решения двумерных тестовых параболических начально-краевых задач. Приведенные численные результаты показывают эффективность применения предложенного алгоритма для решения параболических задач.

Ключевые слова: параболические уравнения, метод Галёркина с разрывными базисными функциями, неявная схема, Nvidia AmgX

1. Введение

При численном решении многих задач математической физики (например, задач теплообмена, газовой динамики и гидродинамики) необходимо учитывать процессы теплопроводности и диффузионные процессы, а значит, на определенном этапе возникает необходимость в решении уравнений диффузионного типа. Такие уравнения часто встречаются на практике и описывают распространение растворяемого вещества вследствие диффузии, перераспределение температуры тела в результате теплопроводности и другие процессы [1].

¹Жалнин Руслан Викторович, заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

²Кузьмин Никита Александрович, студент факультета математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5723-1545>, h0las@outlook.com

³Масягин Виктор Федорович, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6738-8183>, vmasyagin@gmail.com

Как правило, данные задачи рассматриваются в областях сложной геометрической формы, и их решение требуется находить с высоким порядком точности. Для того, чтобы при математическом моделировании учесть сложную структуру рассматриваемой области и как можно ближе приблизиться к ней, необходимо использовать неструктурированные сетки. Таким образом, для решения задач подобного типа нужен численный метод, который бы обладал высоким порядком точности и при этом справлялся с неструктурированными сетками. Одним из таких методов является широко известный метод Галеркина с разрывными базисными функциями. Данный метод обладает целым рядом конкурентных достоинств: характеризуется высоким порядком точности получаемого решения, слабо зависит от вида используемой расчетной сетки, что позволяет работать с неструктурированными сеточными структурами, и при этом обладает компактным вычислительным шаблоном. Это означает, что при произвольном порядке точности на каждом шаге вычислений данному методу требуются значения из текущей ячейки сетки и ее соседей по ребру. При всех перечисленных достоинствах метод Галеркина с разрывными базисными функциями требует существенных вычислительных затрат, что при использовании явных схем приводит к значительным временным затратам расчета. Одним из перспективных направлений исследований является разработка эффективных неявных алгоритмов для разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках. Однако данный подход, несмотря на снятие существенных ограничений с шага по времени, требует значительных ресурсов для работы со СЛАУ огромных размерностей, поэтому встает вопрос о максимально эффективном использовании всех возможностей вычислительной техники [2].

Данная работа посвящена разработке неявной схемы разрывного метода Галёркина для решения уравнений диффузионного типа на треугольных сетках. Численный алгоритм решения при таком подходе сводится к решению одной системы линейных уравнений на каждом слое по времени. Для параллельного исполнения этой операции на сегодняшний день разработано много эффективных решений для различных архитектур параллельного программирования. Однако стоит отметить, что неявная схема, при всех её достоинствах, имеет значительную сложность в реализации. Это связано с тем, что такая схема требует существенно более сложного численного алгоритма, эффективного подхода при работе с памятью и особого внимания к матричным структурам, возникающим при выполнении расчётов.

В настоящий момент все более популярными становятся параллельные вычисления на устройствах GPU. Несмотря на то что перенос алгоритмов на архитектуру графических процессоров, существенно отличающуюся от архитектуры центральных процессоров, представляет собой достаточно сложную задачу, GPU все чаще используются в вычислительной механике, задачах газовой динамики и в вычислительной математике в целом [3]. Благодаря своей архитектуре, основанной на большом числе вычислительных ядер, и новому подходу к организации вычислений, применение GPU в вычислениях является очень востребованным. Организация таких вычислений требует мощной, гибкой и при этом простой по своей логике технологии, которая бы дала возможность использовать все возможности GPU в уже существующих алгоритмах. В данной работе для этих целей будем использовать библиотеку NVidia AMGx, написанную на языке CUDA C.

При решении систем с большой разреженной матрицей важно учитывать такое понятие как обусловленность матрицы, которое является одним из решающих признаков при исследовании задачи на устойчивость. В библиотеке AMGx, помимо стандартных алгоритмов решения систем линейных уравнений, реализованы ещё и необходимые предобуславливающие алгоритмы, которые позволяют получать решение в таких случаях,

где стандартные алгоритмы решения не дают. Библиотека предоставляет реализацию семейства классических многосеточных (AMG) [4–5] методов, которые являются хорошим выбором для более сложных линейных систем. Библиотека позволяет использовать многосеточные методы в качестве предобуславливающих для семейства итерационных методов Крылова [6–7]. К этому семейству относится метод гибких обобщенных минимальных невязок (FGMRES). Данный метод может использоваться для решения несимметричных и даже неопределенных линейных систем, и именно он используется в данной работе.

К достоинствам библиотеки также можно отнести поддержку параллелизма как на уровне нескольких графических процессоров, так и на уровне нескольких вычислительных кластеров, что обеспечивается посредством поддержки технологии MPI. Также библиотека AMGX предоставляет гибкую систему конфигурации, и благодаря этому появляется возможность создавать иерархию решающих алгоритмов с произвольной глубиной, в которой внешний решающий алгоритм будет использовать внутренние в качестве предобработчиков и предобуславливателей, которые сами могут быть обработаны другими методами. Такой подход позволяет пользователю быстро экспериментировать с различными схемами [8].

В настоящий момент библиотека находит всё более широкое применение в современном промышленном и научном численном анализе. В частности, AMGX является составляющей коммерческого вычислительного программного обеспечения ANSYS Fluent [9]. Показателем актуальности и эффективности библиотеки является и тот факт, что на данный момент она используется в качестве стандарта для сравнения эффективности и скорости работы новых численных алгоритмов для решения систем линейных уравнений, наряду с такими мощными средствами как библиотека HYPRE [9–10].

2. Неявная схема разрывного метода Галёркина для решения уравнений диффузионного типа

Рассматривается следующая параболическая начально-краевая задача [11]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div} Q &= 0, \quad (x, y) \in D, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, t) &= 0, \quad (x, y) \in \partial D, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in D, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где D – область двумерного пространства с границей ∂D ; u – определяемая величина; $Q = \nabla u$ – поток; $u_0(x, y)$ – заранее заданная функция.

Согласно разрывному методу Галёркина для решения уравнений второго порядка, уравнения параболического типа записываются в виде системы уравнений первого порядка, и затем полученная система решается на каждом временном слое относительно введенных вспомогательных переменных и определяемой функции [11].

Чтобы применить метод Галёркина, область решения $D \cup \partial D$ покрывается треугольной сеткой T_h . Каждый из треугольников $T_k \in T_h$ имеет ненулевую площадь и пересекается с другими не более чем по образующим их вершинам или рёбрам. В каждом из треугольников определяется центр и середины сторон. В треугольнике T_k центр определим как:

$$x_c^k = \frac{x_1^k + x_2^k + x_3^k}{3}, y_c^k = \frac{y_1^k + y_2^k + y_3^k}{3}, \quad (2.2)$$

где $(x_1^k, y_1^k), (x_2^k, y_2^k), (x_3^k, y_3^k)$ – координаты вершин соответствующего треугольника.

Для аппроксимации первого уравнения из (2.1) необходимо его привести к системе дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка [12]. Для этого отдельно рассматриваются потоковые переменные [13]. Тогда первое уравнение в исходной системе (2.1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}, \quad (x, y) \in D, \quad 0 < t \leq T, \\ q_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x, y) \in D, \quad 0 < t \leq T, \\ q_y &= \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x, y) \in D, \quad 0 < t \leq T.\end{aligned}\tag{2.3}$$

Решение системы (2.3) находится с использованием разрывного метода Галёркина. Для этого на каждом треугольнике $T_k \in T_h$ вводится система линейных базисных функций $\{\phi_i^k\} \in P^1(T^k), i = \overline{0, 2}$, $\phi_0^k = 1, \phi_1^k = \frac{x - x_c^k}{\Delta x^k}, \phi_2^k = \frac{y - y_c^k}{\Delta y^k}$, где (x_c^k, y_c^k) – центр соответствующего треугольника T_k ; $\Delta x^k, \Delta y^k$ – проекции ячейки на соответствующие координатные оси.

Приближенное решение u^k в разрывном методе Галеркина ищется в каждом треугольнике в виде разложение по соответствующему базису [13]:

$$u^k = u_0^k + u_1^k \frac{x - x_c^k}{\Delta x^k} + u_2^k \frac{y - y_c^k}{\Delta y^k},\tag{2.4}$$

где $u_i^k = u_i^k(t); \phi_i^k = \phi_i^k(x, y) \in T_k; i = \overline{0, 2}$.

Приближенные решения q_x^k, q_y^k будем искать в каждой ячейке T_k в виде разложения по соответствующему базису:

$$q_x^k = q_{x0}^k + q_{x1}^k \frac{x - x_c^k}{\Delta x^k} + q_{x2}^k \frac{y - y_c^k}{\Delta y^k},\tag{2.5}$$

$$q_y^k = q_{y0}^k + q_{y1}^k \frac{x - x_c^k}{\Delta x^k} + q_{y2}^k \frac{y - y_c^k}{\Delta y^k},\tag{2.6}$$

где $q_{xi}^k = q_{xi}^k(t); q_{yi}^k = q_{yi}^k(t); \phi_i^k = \phi_i^k(x, y) \in T_k; i = \overline{0, 2}$.

Первое уравнение из (2.3) умножается на пробную базисную функцию $\phi_i^k, i = \overline{0, 2}$, и далее произведение интегрируется по треугольнику $T_k, k = \overline{1, N}$, где N – число треугольников в сетке. Точное решение u заменяется приближенным решением u^k [13]. Аналогично находится решение для вспомогательных переменных q_x, q_y . Таким образом получается следующая система для вычисления коэффициентов разложения u^k, q_x^k, q_y^k на каждом шаге по времени.

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 \frac{\partial u_i^k}{\partial t} \int_{T_k} \phi_i^k \phi_m^k ds &= \oint_{\partial T_k} n_x \widehat{q}_x^{n+1} \phi_m^k dl + \oint_{\partial T_k} n_y \widehat{q}_y^{n+1} \phi_m^k dl - \\ &- \int_{T_k} q_x^{k, n+1} \frac{\partial \phi_m^k}{\partial x} ds - \int_{T_k} q_y^{k, n+1} \frac{\partial \phi_m^k}{\partial y} ds, \quad m = \overline{0, 2},\end{aligned}\tag{2.7}$$

$$\sum_{i=0}^2 q_{xi}^{k,n+1} \int_{T_k} \phi_i^k \phi_m^k ds = \oint_{\partial T_k} n_x \hat{u}^{n+1} \phi_m^k dl - \int_{T_k} q_x^{k,n+1} \frac{\partial \phi_m^k}{\partial x} ds, \quad m = \overline{0, 2}, \quad (2.8)$$

$$\sum_{i=0}^2 q_{yi}^{k,n+1} \int_{T_k} \phi_i^k \phi_m^k ds = \oint_{\partial T_k} n_y \hat{u}^{n+1} \phi_m^k dl - \int_{T_k} u^{k,n+1} \frac{\partial \phi_m^k}{\partial y} ds, \quad m = \overline{0, 2}. \quad (2.9)$$

Величину $\frac{\partial u_i^k}{\partial t}$ из (2.7) можно аппроксимировать с помощью частной производной величины u по переменной t методом Эйлера:

$$\frac{\partial u_i^k}{\partial t} = \frac{u_i^{k,n+1} - u_i^{k,n}}{\tau}, \quad (2.10)$$

где τ – шаг по времени.

Потоковые величины \hat{u}^{n+1} , \hat{q}_x^{n+1} , \hat{q}_y^{n+1} на границе соответствующих элементов будут определены далее.

Вычисления будут организованы таким образом, что из систем (2.7)–(2.9) будет составлена одна общая система линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой будут постоянны на каждом временном слое. При этом столбец правой части СЛАУ будет рассчитываться на каждом временном слое. На каждом шаге по времени n решается система и вычисляются значения $u^{k,n}$, $q_x^{k,n}$, $q_y^{k,n}$.

Работа с разреженной матрицей организована таким образом, что на процессоре в отдельной функции заполняется статичная матрица системы. Элементы статичной матрицы хранятся в формате CSR. В этом формате данные передаются на вход методам библиотеки Nvidia AmgX. Аналогичным образом организована работа и с вектором правой части, с тем лишь различием, что он будет пересчитываться и передаваться библиотеке на каждом шаге по времени.

3. Нахождение численных потоков на границах элементов

Для нахождения потоковых величин для начала условимся, что на каждом ребре задана нормаль. Если относительно треугольника нормаль является внешней, то для данного ребра ячейка считается внутренней, в противном случае будем считать ячейку внешней.

3.1. Метод полусуммы

В системе (2.7) на границе между элементами необходимо вычислять потоковые значения \hat{q}_x^{n+1} и \hat{q}_y^{n+1} .

Первый способ предполагает вычислять их как среднее арифметическое [13]:

$$\begin{aligned} \hat{q}_x^{n+1}(q_x^{-,n+1}, q_x^{+,n+1}) &= \frac{q_x^{+,n+1} + q_x^{-,n+1}}{2}, \\ \hat{q}_y^{n+1}(q_y^{-,n+1}, q_y^{+,n+1}) &= \frac{q_y^{+,n+1} + q_y^{-,n+1}}{2}, \end{aligned}$$

где $q_x^{-,n+1}$, $q_y^{-,n+1}$ вычисляются на ребре по значениям из внутренней ячейки, в то время как величины, обозначенные через $q_x^{+,n+1}$, $q_y^{+,n+1}$ вычисляются по значениям из внешней ячейки. Для граничных ребер значения \hat{q}_x^{n+1} и \hat{q}_y^{n+1} берутся значения из внутренней ячейки.

В системах (2.8 – 2.9) потоковые значения величины \hat{u}^{n+1} вычисляются следующим образом: на граничных ребрах определим значения исходя из граничных условий, т. е. $\hat{u}^{n+1} = 0$; на внутренних – полусумму значений величины в соседних ячейках сетки:

$$\hat{u}^{n+1} = \frac{u^{+,n+1} + u^{-,n+1}}{2}.$$

3.2. Метод переменных потоков

Рассмотрим вычисление потоковых величин с помощью метода переменных потоков [14–15].

В этом методе потоковая величина на ребре определяется значением из внешней ячейки, а значение искомой величины – из внутренней ячейки:

$$\begin{aligned}\hat{u} &= u^-, \\ \hat{q} &= q^+.\end{aligned}$$

В случае, когда потоковая величина определяется на граничном ребре, для \hat{u} значение – исходя из граничного условия, а для \hat{q} определяется значением во внутренней ячейке.

4. Алгоритм работы программы

Для демонстрации логики работы программы ниже представлен псевдокод.

```
Data: config.json, NX, NY, Tmax,  $\tau$ 
Result: *.vtk
ИнициализацияСетки(NX, NY);
ИнициализацияСтруктурДанныхНаПроцессоре();
ЗаданиеНачальныхУсловий();
ИнициализацияАМГХ(config.json);
РасчётСтатичнойМатрицыНаПроцессоре();
РасчётПравойЧастиНаПроцессоре();
КопированиеДанныхНаАМГХ();
 $step \leftarrow 0$ ;
 $t \leftarrow 0$ ;
while  $t < T_{max}$  do
     $step \leftarrow step + 1$ ;
     $t \leftarrow t + \tau$ ;
    РешениеСистемыНаАМГХ();
    КопированиеРешенияНаПроцессор();
    РасчётПравойЧастиНаПроцессоре();
    КопированиеПравойЧастиНаАМГХ();
    if  $step \bmod SAVE\_STEP == 0$  then
        | ВыводVTK(*.vtk);
    end
end
```

Листинг 4.1. Основной алгоритм программы

Основной алгоритм работы программы включает в себя генерацию или загрузку уже существующей сетки, инициализацию библиотеки AMGX, выделение памяти и заполнение необходимых структур на процессоре и графическом устройстве, заполнение матрицы коэффициентов и правой части системы, обмен данными между процессором и графическим устройством. В свою очередь, шаг с расчётом статичной матрицы на процессоре включает в себя расчёт матрицы жесткости и матриц, полученных при расчёте интегралов по области и границе ячеек сеточной структуры. На каждом шаге выполнения алгоритма на графическом процессоре с помощью библиотеки AMGX решается система линейных алгебраических уравнений, соответствующая текущему слою по времени. После этого решение копируется на центральный процессор, происходит перерасчет правой части системы, после чего итерация повторяется.

5. Численный эксперимент

В качестве первой тестовой задачи была выбрана следующая начально-краевая задача:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(\nabla u) &= 0, \quad (x, y) \in D, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, t) &= 0, \quad (x, y) \in \partial D, \\ u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in D, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где D – область двумерного пространства с границей ∂D ; u – определяемая величина; $u_0(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$; $T = 0,2$; $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$.

Были произведены вычисления на двух вариантах сеток: структурированной и неструктурированной. В первом случае соблюдается условие устойчивости решения для явной схемы, во втором это условие нарушается. В обоих случаях в качестве метода аппроксимации потоковых величин были выбраны метод полусуммы и метод переменных направлений. Результаты представлены ниже в таблицах 5.1 – 5.4.

Таблица 5.1. Структурированная сетка, $N = 32$, $t = 0.0001$,
вычисление потоков методом полусуммы

Шаг по времени	Явная схема, L2	Неявная схема, L2
0.01	0.0367712975	0.0251843555
0.05	0.0289862012	0.0153121561
0.10	0.0169462427	0.0074206413
0.15	0.0089552638	0.0033855313
0.20	0.0038157489	0.0014852004

Таблица 5.2. Структурированная сетка, $N = 32$, $t = 0.0001$,
вычисление потоков методом переменных потоков

Шаг по времени	Явная схема, L2	Неявная схема, L2
0.01	0.1093203225	0.0212839243
0.05	0.1870973733	0.0157270182
0.10	0.1942025693	0.0086913082
0.15	0.1593426925	0.0042473021
0.20	0.1144607499	0.0016471690

Таблица 5.3. Неструктурированная сетка, $N = 38$, $t = 0.01$,
вычисление потоков методом полусуммы

Шаг по времени	Явная схема, L2	Неявная схема, L2
0.01	расходится	0.0121641983
0.05	расходится	0.0040143752
0.10	расходится	0.0043248552
0.15	расходится	0.0028194743
0.20	расходится	0.0015354149

Таблица 5.4. Неструктурированная сетка, $N = 38$, $t = 0.01$,
вычисление потоков методом переменных потоков

Шаг по времени	Явная схема, L2	Неявная схема, L2
0.01	расходится	0.0108102692
0.05	расходится	0.0047485251
0.10	расходится	0.0038959187
0.15	расходится	0.0023667227
0.20	расходится	0.0012464113

В качестве второй тестовой задачи была выбрана задача с разрывным коэффициентом теплопроводности:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(K \nabla u) &= 0, \quad (x, y) \in D, \quad 0 < t \leq T, \\
 u(x, y, t) &= 0, \quad (x, y) \in \partial D, \\
 u(x, y, 0) &= u_0(x, y), \quad (x, y) \in D,
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

где D – область двумерного пространства с границей ∂D ; u – определяемая величина; $u_0(x, y) = \sin(\pi x) \sin(\pi y)$; $T = 0.2$; $0 \leq x \leq 1$; $0 \leq y \leq 1$; K – коэффициент теплопроводности.

Коэффициент теплопроводности K определяется своими координатами внутри расчётной области следующим образом:

$$K(x, y) = \begin{cases} 3, & \text{если } 0.25 \leq x \leq 0.75, 0.25 \leq y \leq 0.75, \\ 1 & - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Поскольку эта задача не имеет точного решения, в данной работе проводится сравнение явной и неявной схем с конечно-разностной неявной схемой на подробной сетке. Решение задачи рассматривалось на структурированной сетке из 32 ячеек с шагом по времени, равным 0.0001 и 0.01. Результаты расчётов представлены в таблицах 5.5 – 5.8.

Таблица 5.5. Структурированная сетка, $N = 32$, $t = 0.0001$,
вычисление потоков методом полусуммы

Шаг по времени	Явная схема, L2	Неявная схема, L2
0.01	0.1445232078	0.1459002157
0.05	0.0785507949	0.0788258979
0.10	0.0301633319	0.0308140417
0.15	0.0104866618	0.0108624378
0.20	0.0044613386	0.0046017249

Таблица 5.6. Структурированная сетка, $N = 32$, $t = 0.0001$,
вычисление потоков методом переменных потоков

Шаг по времени	Явная схема, L2	Неявная схема, L2
0.01	0.1679411631	0.1374027738
0.05	0.1299189154	0.0760682724
0.10	0.0615927804	0.0301344246
0.15	0.0206975411	0.0107390802
0.20	0.0074884107	0.0045729096

Таблица 5.7. Результаты для структурированной сетки, $N = 32$,
 $t = 0.01$, вычисление потоков методом полусуммы

Шаг по времени	Явная схема, L2	Неявная схема, L2
0.01	расходится	0.1290872118
0.05	расходится	0.0749038288
0.10	расходится	0.0325960242
0.15	расходится	0.0126442897
0.20	расходится	0.0057173853

Таблица 5.8. Результаты для структурированной сетки, $N = 32$,
 $t = 0.01$, вычисление потоков методом переменных потоков

Шаг по времени	Явная схема, L2	Неявная схема, L2
0.01	расходится	0.1189084461
0.05	расходится	0.0720197914
0.10	расходится	0.0315816221
0.15	расходится	0.0123754942
0.20	расходится	0.0046131613

6. Заключение

Был разработан численный алгоритм неявной схемы разрывного метода Галеркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на треугольных сетках. Для решения СЛАУ использовались предобуславливатели и решатели из библиотеки Nvidia AmgX. Для верификации численного алгоритма была произведена серия расчётов на для тестовых задач. Результаты численных экспериментов показывают, что предложенная схема работает, и для нее нет ограничений на шаг по времени, актуальных для явной схемы. Однако стоит отметить, что на данный момент остаются вопросы, которые требуют дальнейшего исследования. В частности, подробного изучения требует вопрос о более эффективной работе с памятью средствами библиотеки Nvidia AmgX, о наиболее эффективном способе передачи данных в методы библиотеки и ряд других.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (№ 1.6958.2017/8.9), РНФ (проект 19-71-00131) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-2007.2018.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладонкина М. Е., Милокова О. Ю., Тишкин В.Ф. Численный метод решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточного метода // Вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т. 50, № 8. С. 1367–1390.
2. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования / М. М. Краснов [и др.] // Матем. моделирование. 2017. Т. 29, № 2. С. 3–22.
3. Богданов П. Б., Горобец А. В., Суков С. А. Адаптация и оптимизация базовых операций газодинамического алгоритма на неструктурированных сетках для расчетов на массивно-параллельных ускорителях // Вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т. 53, № 8. С. 1360–1373.
4. Parallel unsmoothed aggregation algebraic multigrid algorithms on GPUs / J. Brannick [et al.] // Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Algorithms, and Their Applications. Springer Proc. Math. Stat., 2013. Vol. 45. pp. 81–102.
5. De Sterck H., Yang U. M., Heys J. Reducing complexity in parallel algebraic multigrid preconditioners // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. 2006. Vol. 27, No. 4. pp. 1019–1039.

6. Templates for the solution of linear systems: building blocks for iterative methods / R. Barrett [et al.]. Philadelphia: SIAM, 1993. 117 p.
7. Saad Y. A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm // SIAM J. Sci. Comput. 1993. Vol. 14, No. 2. pp. 461–469.
8. Simoncini V., Szyld D. B. Flexible inner-outer Krylov subspace methods // SIAM J. Numer. Anal. 2003. Vol. 40, No. 6. pp. 2219–2239.
9. AmgX: a library for GPU accelerated algebraic multigrid and preconditioned iterative methods / M. Naumov [et al.] // SIAM J. Sci. Comput. 2015. Vol. 37, No. 5. pp. 602–626.
10. GPU-accelerated preconditioned GMRES method for two-dimensional Maxwell's equations / J. Gao [et al.] // International Journal of Computer Mathematics. 2017. Vol. 94, No. 10. pp. 2122–2144.
11. Применение разрывного метода Галёркина для решения параболических задач в анизотропных средах на треугольных сетках / Р. В. Жалнин [и др.] // Вестник ЮУрГУ. Сер. «Матем. моделирование и программирование». 2016. Т. 9, № 3 С. 144–151.
12. Флетчер К. Численные методы на основе метода Галеркина. М.: Мир, 1988. 352 с.
13. Bassi F. A., Rebay S. High-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier – Stokes equations // Journal of Computational Physics. 1997. Vol. 131, No. 2. pp. 267–279.
14. Cockburn B., Shu C.-W. The local discontinuous Galerkin method for time-dependent convection-diffusion systems // SIAM J. Numer. Anal. 1998. Vol. 35, No. 6. pp. 2440–2463.
15. Wang H., Shu C.-W., Zhang Q. Local discontinuous Galerkin methods with implicit-explicit time-marching for multi-dimensional convection-diffusion problems // ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2016. Vol. 50, No. 4. pp. 1083–1105.

Поступила 9.12.2019

MSC2020 35K51

Development of a parallel algorithm based on an implicit scheme for the discontinuous Galerkin method for solving diffusion type equations

© R. V. Zhalnin¹, N. A. Kuzmin², V. F. Masyagin³

Abstract. The paper presents a numerical parallel algorithm based on an implicit scheme for the Galerkin method with discontinuous basis functions for solving diffusion-type equations on triangular grids. To apply the Galerkin method with discontinuous basis functions, the initial equation of parabolic type is transformed to a system of partial differential equations of the first order. To do this, auxiliary variables are introduced, which are the components of the gradient of the desired function. To store sparse matrices and vectors, the CSR format is used in this study. The resulting system is solved numerically using a parallel algorithm based on the Nvidia AmgX library. A numerical study is carried out on the example of solving two-dimensional test parabolic initial-boundary value problems. The presented numerical results show the effectiveness of the proposed algorithm for solving parabolic problems.

Key Words: parabolic equations, discontinuous Galerkin method, implicit scheme, Nvidia AmgX

REFERENCES

1. M. E. Ladonkina, O. Yu. Milyukova, V. F. Tishkin, “Numerical algorithm for solving diffusion-type equations on the basis of multigrid methods”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **50**:8 (2010), 1367—1390 (In Russ.).
2. M. M. Krasnov, P. A. Kuchugov, M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin, “Discontinuous Galerkin method on three-dimensional tetrahedral grids: Using the operator programming method”, *Math. Models Comput. Simul.*, **9**:5 (2017), 529–543.
3. P. B. Bogdanov, A. V. Gorobets, S. A. Sukov, “Adaptation and optimization of basic operations for an unstructured mesh CFD algorithm for computation on massively parallel accelerators”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:8 (2013), 1183–1194 (In Russ.).
4. J. Brannick, Y. Chen, X. Hu, L. Zikatanov, “Parallel unsmoothed aggregation algebraic multigrid algorithms on GPUs, in Numerical Solution of Partial Differential Equations: Theory, Algorithms, and Their Applications”, *Springer Proc. Math. Stat.*, **45** (2013), 81–102.
5. H. De Sterck, U. M. Yang, J. Heys, “Reducing complexity in parallel algebraic multigrid preconditioners”, *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **27**:4 (2006), 1019–1039.

¹**Ruslan V. Zhalnin**, Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

²**Nikita A. Kuzmin**, student, Faculty of Mathematics and Information Technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), h0las@outlook.com

³**Victor F. Masyagin**, Senior Researcher, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6738-8183>, masyaginvf@mrsu.ru

6. R. Barrett, M. W. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. van der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods*, SIAM., Philadelphia, PA., 1993, 117 p.
7. Y. Saad, “A flexible inner-outer preconditioned GMRES algorithm”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **14**:2 (1993), 461–469.
8. V. Simoncini, D. B. Szyld, “Flexible inner-outer Krylov subspace methods”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **40**:6 (2003), 2219–2239.
9. M. Naumov, M. Arsaev, J. Cohen, P. Castonguay, J. Eaton, J. Demouth, S. Layton, N. Markovskiy, I. Z. Reguly, N. Sakharlykh, V. Sellappan, R. Strzodka, “AmgX: A Library for GPU Accelerated Algebraic Multigrid and Preconditioned Iterative Methods”, *SIAM J. Sci. Comput.*, **37**:5 (2015), 602–626.
10. J. Gao, K. Wu, Y. Wang, P. Qi, G. He, “GPU-accelerated preconditioned GMRES method for two-dimensional Maxwell’s equations”, *International Journal of Computer Mathematics*, **94**:10 (2017), 1–24.
11. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of parabolic problems in anisotropic media on triangle grids”, *Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming & Computer Software*, **9**:3 (2016), 144–151 (In Russ.).
12. C. Fletcher, *Chislennyye metody na osnove metoda Galerkina [Computational Galerkin methods]*, Mir, Moscow, 1988 (In Russ.), 352 p.
13. F. A. Bassi, S. Rebay, “High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier – Stokes Equations”, *Journal of Computational Physics*, **131**:2 (1997), 267–279 (In Russ.).
14. B. Cockburn, C.-W. Shu, “The local discontinuous Galerkin method for timedependent convection-diffusion systems”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **35**:6 (1998), 2440–2463.
15. H. Wang, C.-W. Shu, Q. Zhang, “Local discontinuous Galerkin methods with implicit-explicit time-marching for multi-dimensional convection-diffusion problems”, *ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **50**:4 (2016), 1083–1105.

Submitted 9.12.2019

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Если статья на русском языке, то она должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC2020;
- название статьи;
- информация об авторе(-ах);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском);
- список литературы.

Если же статья на английском языке, то соответствующие разделы излагаются только на английском. Код УДК не используется.

Коды УДК и MSC2020. Универсальная десятичная классификация (УДК) является системой классификации информации, широко используется во всём мире для систематизации произведений науки, литературы и искусства, периодической печати.

Индекс предметной классификации (Mathematics Subject Classification) используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH).

Справочники кодов УДК и MSC2020 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Информация об авторе(-ах). Раздел содержит следующие сведения по каждому автору:

а) Фамилия Имя Отчество (для раздела на рус.), Имя О. Фамилия (для раздела на англ.);

б) должность, подразделение (указывается при наличии);

в) аффилиация автора: название организации по месту основной работы или организации, где проводились исследования, почтовый адрес организации. Почтовый адрес указывается в виде: индекс, страна, город, улица, дом (на рус.) и дом улица, город индекс, страна (на англ.).

г) ученая степень (указывается при наличии);

д) ORCID. Для получения идентификационного номера ORCID необходимо зарегистрироваться на сайте <https://orcid.org/>.

е) электронная почта автора.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);

- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);

- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем **от 100 до 250 слов**.

Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

Текст статьи. При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;
- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты – основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение — выводы и рекомендации.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

Список литературы на русском языке оформляется в соответствии с требованиями *ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*, который можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Список литературы на русском языке так же необходимо оформить в формате AMSBIB (см. ниже) и привести в закомментированном виде после списка, оформленного по стандарту ГОСТ.

Список литературы на английском языке оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики *Американским математическим обществом* (*American Mathematical Society*) и *Европейским математическим обществом* (*European Mathematical Society*). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmbib.sty*. Этот пакет разработан на основе пакета *amsbib.sty*.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Если статья или книга на русском языке и нет параллельного заглавия на английском языке, то необходимо привести в квадратных скобках перевод заглавия на английский язык.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Параллельное заглавие статьи на английском языке (без квадратных скобок) или [перевод заглавия статьи на английском языке (в квадратных скобках)];
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- [Перевод названия книги на английском языке в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке (например, Moscow, St. Petersburg); издательство на английском языке, если это организация ((например, Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация с указанием на английском, что это издательство, если издательство имеет собственное название (например, Nauka Publ.);
- Количество страниц в издании;
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Для транслитерации русского алфавита латиницей можно воспользоваться сайтом <https://translit.ru/ru/bgn/>. Здесь необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names).

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.

Статьи в журналах на русском языке.

а) отсутствует параллельное название на английском языке:

Р. А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

б) параллельное название на английском языке имеется:

Р. А. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal SVMO*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке.

M. J. Berger, J. Olinger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке.

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке.

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке.

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке.

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, *Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam* [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], *Tezisy dokladov* [Abstract] (Suzdal, 6–11 July 2018), 218–219 (In Russ.).

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The author(s) should send to the editor source text of the article (LaTeX format), files with figures (EPS format) and the compiled version of the article (PDF format).

If the article is in English, then it should contain the following sections only in English:

- MSC2020 codes;
- article title;
- information about every author;
- abstract;
- keywords;
- text of the article;
- references.

MSC2020 codes The Subject Classification Index (MSC 2020) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of MSC 2020 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

Information about the author(s). The section contains the following information for each author:

- a) Name O. Surname;
- b) Position, Department (indicated if available);
- c) the affiliation of the author: the name of the organization at the place of the main work or organization where the research was conducted, the postal address of the organization. The mailing address is indicated in the form: house street, city postcode, country.
- d) academic degree (indicated if available);
- e) ORCID. To obtain an ORCID, you must register at <https://orcid.org/>.
- e) email of the author.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Results of work are described extremely precisely and informatively. Main theoretical and experimental results, factual data, detected relationships and patterns are presented. In the description preference is given to new results and data of long-term value, important discoveries, conclusions that refute existing theories, as well as data that, in the author's opinion, are of practical importance.

Conclusions may be accompanied by recommendations, estimates, suggestions, hypotheses described in the article.

The information contained in the article's title should not be repeated in the text of the author's summary.

It is better to avoid unnecessary introductory phrases (for example, «the author of the article considers ... »). Author(s) should not include in the abstract historical references (if

they do not constitute the main content of the document) as well as description of previously published works and well-known provisions.

The text of the author's abstract should use syntactic constructions typical for the language of scientific and technical documents. Also it is better to avoid complicated grammatical constructions.

Significant words from the article's text should be used in the text of the abstract.

Abbreviations and conventions, excluding commonly used (in English special texts also), are used in exceptional cases or their definitions must be given when first used.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

In the text of English abstract author(s) should use the terminology typical to foreign special texts. They should avoid usage of terms that are direct tracing of Russian-language terms. It is necessary to preserve the unity of terminology within the abstract.

English abstracts to Russian-language articles should be written in high-quality English.

The average volume of abstracts in Russian and in English should be from 100 to 250 words.

Keywords should reflect the main content of the article. If it is possible they should not repeat the terms of the title and abstracts. It is better for keywords to use the terms from the article's text, as well as terms defining the subject area and including other important concepts that will expand the possibilities of finding an article by means of information retrieval system. Section **Keywords** must contain from 5 to 15 words.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is necessary to adhere to the following structure:

- introduction - a brief overview of the state of the issue under consideration and the formulation of the problem solved in the article;
- materials and methods for solving the problem and accepted assumptions;
- results – the main content of the article;
- discussion and analysis of the results obtained and their comparison with previously known ones;
- conclusion — conclusions and recommendations.

References formatted according to the citation style adopted for use in mathematics *American Mathematical Society* (*American Mathematical Society*) and *European Mathematical Society* (*European Mathematical Society*). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the svmobib.sty style package. This package is developed based on the amsbib.sty package.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number

should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Parallel title of the article in English (without square brackets) or [translation of the title of the article in English (in square brackets)];
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for journal one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
- An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book's name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book;
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian.

a) there is no parallel name in English:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

b) a parallel name in English is available:

P. A. Shamanaev, “The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Oliger, “Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations”, *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences”, *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B.F. Bylov, R.E. Vinograd, D.M. Grobman, V.V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются три файла: файл-преамбула, файл-шаблон и стилевой пакет svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то заголовок статьи оформляется только на английском языке. Для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова

нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для оформления многострочных формул рекомендуется использовать окружение `equation` с вложенным окружением `array`:

```
\begin{equation}
\begin{array}{c}\label{shamanaev1}
x + y = 2, \\
x * y = 1. \\
\end{array}
\end{equation}
```

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для оформления таблиц следует использовать окружение `table` с вложенным окружением `tabular`:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Название таблицы}
\label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
Название первого столбца & Название второго столбца \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

```
\insertpicturewcap {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рисунком}
```

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```
\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}{подпись}
```

в) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками и общей подписью

```
\inserttwopictures {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {общая_подпись_под_рисунком}
```

г) вставка двух рисунков с двумя подписями под рисунками, с указанием степени сжатия каждого рисунка и общей подписью.

```
\inserttwopictureswithcompression {метка} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {подпись_под_рис} {степень_сжатия} {общая_подпись}
```

д) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononly {метка} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись}
```

е) вставка двух рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {метка} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись_под_рисунком}
```

ж) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками.

```
\insertthreepictures{метка}{имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {имя_файла.eps} {общая_подпись_под_рисунком}
```

з) вставка трех рисунков только с общей подписью под рисунками и с указанием степени сжатия каждого рисунка.

```
\insertthreepictureswithcompression{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {имя_файла.eps} {степень_сжатия} {общая_подпись_под_рисунком}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

```
\RBibitem{метка для ссылки на источник},
```

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

```
\Bibitem{метка для ссылки на источник}.
```

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmbib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}  
\by П. А. Шаманаев  
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов  
\jour Труды Средневожского математического общества  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151
```

В разделе `thebibliographyEn`:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]  
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151  
\lang In Russ.
```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах `thebibliography` и `thebibliographyEn` оформляются одинаково):

```
\Bibitem{shamanaevBib2}  
\by M. J. Berger, J. Oliger  
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations  
\jour Journal of Computational Physics  
\yr 1984  
\vol 53  
\pages 484–512
```

Статьи в электронном журнале на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib3}  
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,  
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции  
\jour Огарёв-online  
\vol 20  
\yr 2016
```


\elink Доступно по адресу: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticznogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib3En}
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
 \jour Ogarev-online
 \vol 20
 \yr 2016
 \lang In Russ.
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticznogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib4}
 \by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
 \paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
 \inbook Прикладная математика и механика
 \publaddr Ульяновск
 \publ УлГТУ
 \yr 2014
 \issue 10
 \pages 4–13

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
 \publaddr Ulyanovsk
 \publ UlGTU Publ.
 \yr 2014
 \issue 10
 \pages 4–13
 \lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib5}
 \by Ю. Н. Бибилов
 \book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
 \publaddr М.

\publ Вышш. шк.
 \yr 1991
 \totalpages 303

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
 \by Yu. N. Bibikov
 \book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
 \publaddr Moscow
 \publ Visshay shkola Publ.
 \yr 1991
 \totalpages 303
 \lang In Russ.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib6}
 \by В. Г. Малинов
 \paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
 \inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
 \bookvol II
 \procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
 \yr 2016
 \pages 48–50
 \publ ФИЦ ИУ РАН
 \publaddr М.

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
 \by V. G. Malinov
 \paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
 \inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
 \bookvol II
 \procinfo Moscow, October 17-22, 2016
 \yr 2016
 \pages 48–50
 \publ FRC CSC RAS Publ.
 \publaddr Moscow

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

Three files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package `svmobib.sty`. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named `<LastName>.tex`. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file **can not be changed**. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The authors}} {Author1 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail. }, Author2 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors}} {Author1 \footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail}, Author2 \footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLast NameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

For multi-line formulas, it is recommended to use the **equation** environment with the nested **array** environment:

```
\begin{equation}
\begin{array}{c}\label{shamanaev1}
x + y = 2,\\
x * y = 1.\end{array}
\end{equation}
```

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

To format tables, use the **table** environment with the nested **tabular** environment:

```
\begin{table}[h!]
\caption{Table name} \label{shamanaevtable1}
\begin{center}
\begin{tabular}{|C{6cm}|C{6cm}|}
\hline
First column name & Second column name \\
\hline
1 & 2 \\
\hline
3 & 4 \\
\hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

a) insert a numbered picture with the signature

```
\insertpicturewcap {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure}
```

b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

```
\insertpicturecapscale {label} {file_name.eps} {degree_of_compression}
{caption}
```

c) insert two pictures with two captions under the pictures and common caption

```
\inserttwopictures {label} {file_name.eps} {caption_of_the_figure} {file
name.eps} {caption_of_the_figure} {common_caption}
```

d) insert two pictures with two captions under the pictures, the compression ratio of each picture and common caption

```
\inserttwopictureswithcompression {label} {file_name.eps} {caption_of_the
figure} {degree_of_compression} {file name.eps} {caption_of_the_figure}
{degree_of_compression} {common_caption}
```

e) insert two pictures with common caption only

```
\inserttwopictureswithonecaptiononly {label} {file_name.eps} {file name.eps}
{common_caption}
```

f) insert two pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\inserttwopictureswithonecaptiononlywithcompression {label} {file_name.eps}
{degree_of_compression} {file name.eps} {degree_of_compression}
{common_caption}
```

g) insert of three pictures with common caption only

```
\insertthreepictures {label} {file_name.eps} {file_name.eps} {file name.eps}
{common_caption}
```

h) insert of three pictures with common caption and the compression ratio of each picture

```
\insertthreepictureswithcompression {label} {file_name.eps} {degree_of
compression} {file name.eps} {degree_of_compression} {file name.eps}
{degree_of_compression} {common_caption}
```

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

```
\RBibitem{label for a link to the source },
```

and every English reference – by a command

```
\Bibitem{label for a link to the source }.
```

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the `svmobib.sty` package

Journal articles in Russian:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}
```

```
\by P. A. Shamanaev
```

```
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in
the form of homogeneous vector polynomials]
```

```
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
```

```
\yr 2003
```

```
\vol 5
```

\issue 1
 \pages 145–151
 \lang In Russ.

Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib2}
 \by M. J. Berger, J. Olinger
 \paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
 \jour Journal of Computational Physics
 \yr 1984
 \vol 53
 \pages 484–512

Articles in the electronic journals in Russian

\Bibitem{shamanaevBib3En}
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
 \jour Ogarev-online
 \vol 20
 \yr 2016
 \lang In Russ.
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadrachnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
 \publaddr Ulyanovsk
 \publ UIGTU Publ.
 \yr 2014
 \issue 10
 \pages 4–13
 \lang In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
 \by Yu. N. Bibikov
 \book Kurs obyknennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
 \publaddr Moscow
 \publ Visshay shkola Publ.
 \yr 1991

\totalpages 303

\lang In Russ.

Conference proceedings in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib6En}

\by V. G. Malinov

\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator

\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings

\bookvol II

\procinfo Moscow, October 17-22, 2016

\yr 2016

\pages 48–50

\publ FRC CSC RAS Publ.

\publaddr Moscow

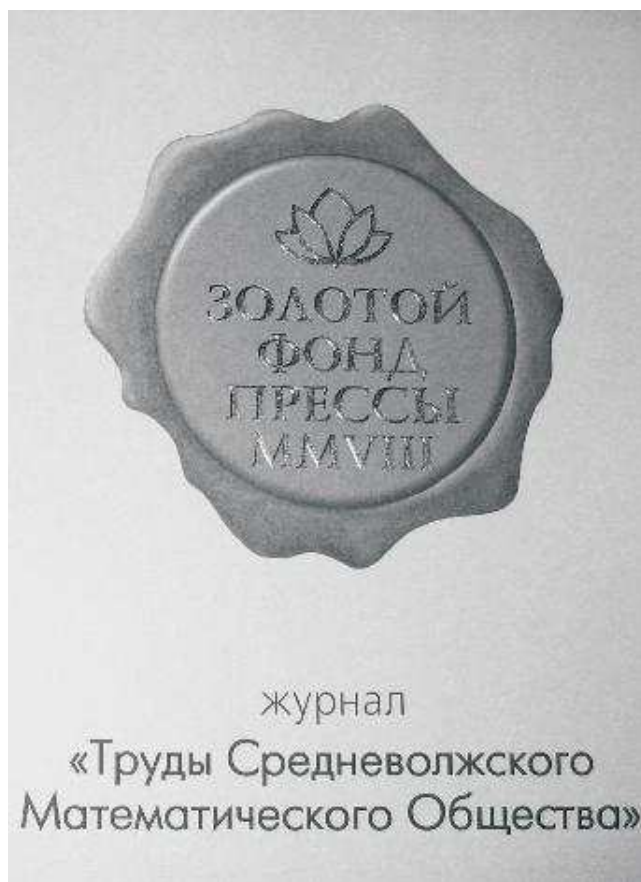
Алфавитный указатель авторов

Бабаев М. М.	13	Митрохин С. И.	48
Горская В. А.	24	Морозов А. И.	71
Жалнин Р. В.	94	Назарова К. Ж.	81
Кузьмин Н. А.	94	Полотовский Г. М.	24
Мальшев Д. С.	38	Починка О. В.	71
Масягин В. Ф.	94	Турметов Б. Х.	81
Усманов К. И.		81	

Author Index

Babayev M. M.	13	Morozov A. I.	71
Gorskaya V. A.	24	Nazarova K. Zh.	81
Kuzmin N. A.	94	Pochinka O. V.	71
Malyshev D. S.	38	Polotovskiy G. M.	24
Masyagin V. F.	94	Turmetov B. Kh.	81
Mitrokhin S. I.	48	Usmanov K. I.	81
Zhalnin R. V.	94		

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Редактор: *Зинина С. Х.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 13.03.2020. Дата выхода в свет 31.03.2020. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 11,55 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 684.

Типография: Издательство Мордовского университета

Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Atryahin V. A.*

Editor: *Zinina S. Kh.*

Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 13.03.2020. Date of publishing 31.03.2020. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 11,55.

Number of copies 100. Order no. 684.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24

Для заметок

Для заметок

