

ISSN 2587 – 7496 (Online)

ISSN 2079 – 6900 (Print)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 21 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 4

2019

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 21, № 4. 2019

DOI 10.15507/2079-6900.21.201904

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 21, NO. 4. 2019

DOI 10.15507/2079-6900.21.201904

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal "Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva" publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- "Mathematics",
- "Applied Mathematics and Mechanics",
- "Mathematical modeling and computer science".

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC).

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society". Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малайзийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

Ахтямов Азамат Мухтарович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Пётр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Дерюгин Юрий Николаевич — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, генеральный директор Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, директор Политехнического института ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (Ханты-Мансийск, Россия)

Матус Петр Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

Спивак Семен Израилевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Терехин Михаил Тихонович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина» (Рязань, Россия)

Ион Анка Вероника — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Сенин Пётр Васильевич — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, первый проректор – проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Vladimir F. Tishkin — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Nikolay D. Kuzmichev — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Pavel A. Shamanaev — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Aleksandr S. Andreev — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Shavkat A. Alimov — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

Azamat M. Akhtyamov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

Shavkat A. Ayupov — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Ilya V. Boykov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

Petr A. Velmisov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Vladimir K. Gorbunov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Vyacheslav Z. Grines — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Yuriy N. Derugin — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Aleksey P. Zhabko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Valentin I. Zhegalov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Tynysbek Sh. Kalmenov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Director, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Aleksandr M. Kamachkin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Vladimir N. Krizskii — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Evgeny B. Kuznetsov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Sergey I. Martynov — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Polytechnic Institute, Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

Petr P. Matus — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Olga V. Pochinka — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Vladimir P. Radchenko — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

Irina P. Ryazantseva — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

Semen I. Spivak — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

Mikhail T. Terekhin — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

Anca V. Ion — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

EDITORIAL COUNCIL

Morozkin Nikolay Danilovich — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Senin Petr Vasilievich — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Suharev Lev Alexandrovich — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Yarushkina Nadezda Glebovna — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), First Vice-Rector – Vice-Rector for Science of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

А. В. Баландин

Тензорные поля, ассоциированные с интегрируемыми системами кирального типа 405

П. Н. Бураго, А. И. Эгамов

О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения 413

О. Е. Галкин, С. Ю. Галкина

Об обратимости решений линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых алгебрах . . . 430

А. О. Казаков, Е. Ю. Каратецкая, А. Д. Козлов, К. А. Сафонов

О классификации гомоклинических аттракторов трехмерных потоков 443

А. Е. Колобянина, В. Е. Круглов

Энергетическая функция для Ω -устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях 460

А. Н. Кувшинова

Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений 469

Е. Д. Куренков , **Д. И. Минц**

О периодических точках эндоморфизмов тора 480

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

Н. И. Еремеева, П. А. Вельмисов	
Динамика вязкоупругого элемента проточного канала	488

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

М. А. Васютин, Н. Д. Кузьмичев, Д. А. Шилкин	
Математическое моделирование вольт-амперных характери- стик высокотемпературных сверхпроводников с фрактальны- ми границами кластеров нормальной фазы	507

Правила оформления рукописей (на рус. яз.)	520
Правила оформления рукописей (на англ. яз.)	524
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.)	528
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.)	533

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.)	537
Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.)	538

Contents

MATHEMATICS

A. V. Balandin

Tensor fields associated with integrable systems of chiral type . . . 405

P. N. Burago, A. I. Egamov

On the connection between solutions of initial boundary-value problems for a some class of integro-differential PDE and a linear hyperbolic equation 413

O. E. Galkin, S. Yu. Galkina

On the invertibility of solutions of linear homogeneous differential equations in Banach algebras 430

A. O. Kazakov, E. Yu. Karatetskayia, A. D. Kozlov, K. A. Safonov

On the classification of homoclinic attractors of three-dimensional flows 443

A. E. Kolobyanina, V. E. Kruglov

Energy function for Ω -stable flows without limit cycles on surfaces 460

A. N. Kuvshinova

Dynamic identification of mixed boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements 469

E. D. Kurenkov , **D. I. Mints**

On periodic points of torus endomorphisms 480

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

N. I. Eremeeva, P. A. Velmisov	
Dynamics of viscoelastic element of flow channel	488

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

M. A. Vasyutin, N. D. Kuzmichev, D. A. Shilkin	
Mathematical modeling of current-voltage characteristics of high-temperature superconductors with fractal boundaries of normal phase clusters	507

The rules of article design (in Russian)	520
The rules of article design (in English)	524
The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian)	528
The rules for article layout in the LaTeX system (in English)	533

Author Index (In Russian)	537
Author Index (in English)	538

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.405-412

УДК 517.9

Тензорные поля, ассоциированные с интегрируемыми системами кирального типа

© А. В. Баландин¹

Аннотация. В статье получены необходимые условия для того, чтобы система кирального типа допускала представление Лакса со значениями в простой компактной алгебре Ли. Эти условия заключаются в существовании ковариантно постоянного тензорного поля с некоторым дополнительным условием. Для этого в работе предлагается построение инвариантным образом с помощью представления Лакса некоторого класса тензорных полей. Выбирая произвольную Ад-инвариантную форму на алгебре Ли и подставляя в нее линейные дифференциальные формы со значениями в алгебре Ли, построенные с помощью представления Лакса, получим тензорное поле. В работе доказано, что такие тензорные поля являются полями Киллинга или ковариантно постоянными полями. Найденные необходимые условия существования представления Лакса получены с помощью частного случая таких тензорных полей, построенных для метрики Киллинга на алгебре Ли.

Ключевые слова: системы кирального типа, интегрируемые системы, представление Лакса, ковариантно постоянные поля

1. Введение

Системой кирального типа называется система n дифференциальных уравнений с частными производными следующего вида:

$$\Delta^\alpha \equiv U_{xy}^\alpha + G_{\beta\gamma}^\alpha U_x^\beta U_y^\gamma + Q^\alpha = 0, \quad (1.1)$$

где индексы x, y – частные производные по независимым переменным; U^α – неизвестные функции; греческие индексы принимают значения $\overline{1}, \overline{n}$. Функции $G_{\beta\gamma}^\alpha$ и Q^α предполагаются гладкими необходимого порядка. Далее также предполагается суммирование по повторяющимся индексам.

Нетрудно видеть, что такие системы сохраняют вид при невырожденных преобразованиях зависимых переменных U^α , при этом коэффициенты $G_{\beta\gamma}^\alpha$ преобразуются как коэффициенты связности, а Q^α как коэффициенты векторного поля. Именно поэтому с геометрической точки зрения задание такой системы эквивалентно заданию аффинной связности и векторного поля на некотором n -мерном многообразии M^n с локальными координатами U^1, U^2, \dots, U^n . Далее в работе ковариантное дифференцирование подразумевается относительно этой связности.

В работе интегрируемые системы понимаются как системы, допускающие представление Лакса, которое для систем (1.1) определим следующим образом.

¹Баландин Александр Владимирович, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6115-7341>, balandin31@rambler.ru

О п р е д е л е н и е 1.1 Будем говорить, что система кирального типа допускает представление Лакса со значениями в полупростой вещественной матричной алгебре Ли \mathfrak{g} , если существуют \mathfrak{g} -значные функции A_α, B_α, M, N , зависящие от неизвестных U^1, U^2, \dots, U^n и удовлетворяющие следующим условиям:

$$D_y \tilde{A} - D_x \tilde{B} + [\tilde{A}, \tilde{B}] = S_\alpha \Delta^\alpha, \quad (1.2)$$

где

$$\tilde{A} = A_\alpha U_x^\alpha + \lambda M, \quad \tilde{B} = B_\alpha U_y^\alpha + \frac{1}{\lambda} N, \quad (1.3)$$

$$S_\alpha = A_\alpha - B_\alpha$$

и S_1, S_2, \dots, S_n – линейно независимы; λ – некоторый параметр; $[\cdot, \cdot]$ – матричный коммутатор, т. е. $[A, B] = AB - BA$.

Приводя подобные при разных степенях λ , получим, что для функций M, N, A_α, B_α выполнены следующие соотношения:

$$M_{,\alpha} = [B_\alpha, M], \quad (1.4)$$

$$N_{,\alpha} = [A_\alpha, N]. \quad (1.5)$$

$$Q^\alpha S_\alpha = [M, N], \quad (1.6)$$

$$A_{\alpha,\beta} - B_{\beta,\alpha} + [A_\alpha, B_\beta] - S_\gamma G_{\alpha\beta}^\gamma = 0. \quad (1.7)$$

Здесь и далее запятые обозначают частные производные, т. е. $P_{,\alpha} = \frac{\partial P}{\partial U^\alpha}$.

О п р е д е л е н и е 1.2 [1]. Набор функций S_α в уравнениях (1.2) называется характеристическим элементом представления Лакса.

Далее будет удобно записать соотношение (1.7) в эквивалентном виде

$$\nabla_\beta S_\alpha = S_{\alpha,\beta} - S_\gamma G_{\alpha\beta}^\gamma = [B_\beta, S_\alpha] + D_{\alpha\beta}, \quad (1.8)$$

где

$$D_{\alpha\beta} = [B_\beta, B_\alpha] + 2B_{[\beta,\alpha]}. \quad (1.9)$$

2. Тензорные поля, ассоциированные с представлением Лакса

В работах [2–3] предложена конструкция, позволяющая поставить в соответствие каждому представлению Лакса системы (1.1) бесконечные наборы тензорных полей Киллинга и ковариантно постоянных полей на многообразии M^n .

Оказывается, что указанная конструкция допускает следующее уточнение.

Напомним, что p -линейная форма на алгебре Ли $f : \underbrace{\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \times \dots \times \mathfrak{g}}_p \mapsto C$ называется

ad -инвариантной на \mathfrak{g} , если для всех $x_1, x_2, \dots, x_p, y \in \mathfrak{g}$ справедливо равенство:

$$f([y, x_1], x_2, \dots, x_p) + f(x_1, [y, x_2], x_3, \dots, x_p) + \dots + f(x_1, x_2, \dots, [y, x_p]) = 0.$$

В частности, для $p = 2$ такой формой является метрика Киллинга на алгебре Ли \mathfrak{g} .

Т е о р е м а 2.1 Пусть система (1.1) допускает представление Лакса. Определим по индукции на многообразии M^n линейные дифференциальные формы $\omega^0, \omega^k, k \in \mathbb{N}$ со значениями в алгебре \mathfrak{g} , полагая:

$$\omega^0 = S_\alpha dU^\alpha, \omega^k = -(ad_M)^k(S_\alpha) dU^\alpha, \quad (2.1)$$

где $ad_M(X) = [M, X]$.

Сопоставим каждой ad -инвариантной p -форме f на алгебре Ли \mathfrak{g} ковариантное тензорное поле $T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ на M^n , полагая

$$T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(k_1, k_2, \dots, k_m) dU^{\alpha_1} \otimes dU^{\alpha_2} \otimes \dots \otimes dU^{\alpha_m} = f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, \dots, \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, \dots, M}_{p-m}). \quad (2.2)$$

Тогда t раз ковариантное тензорное поле $T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ является полем Киллинга, т. е.

$$\nabla_{(\beta} T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m)}(k_1, k_2, \dots, k_m) = 0.$$

В частности, если $k_i \neq 0$ при всех i , то поле $T_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ является ковариантно постоянным.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дифференцируя уравнения (1.4) по U^β и составляя условия совместности, получим равенства:

$$[2B_{[\alpha, \gamma]}, M] = -[[B_\alpha, B_\gamma], M]. \quad (2.3)$$

Теперь, с учетом (1.9), соотношения (2.3) принимают вид:

$$[D_{\alpha\beta}, M] = 0. \quad (2.4)$$

Далее, принимая во внимание равенства (1.8), находим

$$\nabla_\beta [S_\alpha, M] = [\nabla_\beta S_\alpha, M] + [S_\alpha, M_{,\beta}] = [[B_\beta, S_\alpha], M] + [S_\alpha, [B_\beta, M]] = [B_\beta, [S_\alpha, M]]. \quad (2.5)$$

Преобразуем эти равенства с учетом форм (2.1) к виду

$$\nabla_\beta \omega^1 = [B_\beta, \omega^1]. \quad (2.6)$$

Аналогичным образом получим

$$\nabla_\beta \omega^k = [B_\beta, \omega^k]. \quad (2.7)$$

Вычисляя ковариантную производную

$$\begin{aligned} \nabla_\beta f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, \dots, \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, \dots, M}_{p-m}) &= f(\nabla_\beta \omega^{k_1}, \omega^{k_2}, \dots, \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, \dots, M}_{p-m}) + \\ &+ f(\omega^{k_1}, \nabla_\beta \omega^{k_2}, \dots, \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, \dots, M}_{p-m}) + \dots + f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, \dots, \nabla_\beta \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, \dots, M}_{p-m}) + \\ &+ (p-m)f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, \dots, \nabla_\beta \omega^{k_m}, [B_\beta, M], \underbrace{M, M, \dots, M}_{p-m-1}) \end{aligned} \quad (2.8)$$

и учитывая ad -инвариантность формы f , приходим к соотношению

$$\nabla_\beta f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, \dots, \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, \dots, M}_{p-m}) = \quad (2.9)$$

$$= \sum_{k_i=0} f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, \dots, D_{\alpha_{k_i} \beta} dU^{\alpha_{k_i}}, \dots, \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, \dots, M}_{p-m}),$$

где в сумме участвуют только те слагаемые, для которых $k_i = 0$.

Дальнейшее симметрирование поля $\nabla_\beta T_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m}(k_1, k_2, \dots, k_m)$ по всем индексам с учетом кососимметричности тензора $D_{\alpha\beta}$ завершает доказательство для общего случая.

В частном случае, когда все $k_i \neq 0$, равенство (2.9) принимает вид:

$$\nabla_\beta f(\omega^{k_1}, \omega^{k_2}, \dots, \omega^{k_m}, \underbrace{M, M, \dots, M}_{p-m}) = 0.$$

Доказательство завершено.

З а м е ч а н и е 2.1 Нетрудно видеть, что если в теореме 2.1 везде заменить M на N , то результат также будет справедлив.

З а м е ч а н и е 2.2 Формы $\omega^k, k \in \mathbb{N}$ принадлежат некоторому конечномерному подпространству над \mathbb{R} , т.к. они являются решениями системы (2.8).

П р и м е р 2.1 Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$U_{xy}^1 - \exp(U^1 + U^2) - \exp(-U^1) = 0, \quad (2.10)$$

$$U_{xy}^2 - \exp(U^1 + U^2) - \exp(-U^2) = 0.$$

Как известно [2.10], эта система допускает представление Лакса со значениями в алгебре $sl(4)$ следующего вида:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_x^2 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2}u_x^2 & \lambda e^{U^1} & 0 \\ -\frac{\lambda}{2}e^{-U^1} & 0 & \frac{1}{2}u_x^2 & \lambda \\ 0 & -\frac{\lambda}{2}e^{-U^1} & 0 & -\frac{1}{2}u_x^2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}u_y^1 & 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ -\frac{1}{2\lambda}e^{-U^2} & \frac{1}{2}u_y^1 & 0 & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \frac{1}{\lambda}e^{U^2} & -\frac{1}{2}u_y^1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2\lambda}e^{-U^2} & -\frac{1}{2}u_y^1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что в этом случае S_1, S_2 являются диагональными матрицами следующего вида $S_1 = \frac{1}{2}diag\{-1, -1, 1, 1\}$, $S_2 = \frac{1}{2}diag\{1, -1, 1, -1\}$.

Далее находим:

$$[S_1, M] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2e^{U^1} & 0 \\ -e^{-U^1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-U^1} & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad [S_2, M] = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{U^1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В качестве ad -инвариантной формы выберем форму Киллинга $f(x, y)$ на алгебре $sl(4)$. Тогда непосредственная проверка показывает, что $T_{\alpha\beta}(1, 1) = f([S_\alpha, M], [S_\beta, M]) = 0$. Аналогично проверяется, что $f([S_\alpha, N], [S_\beta, N]) = 0$.

Из предыдущего примера видно, что построенные выше тензорные поля могут обращаться в нуль. Оказывается, что условие компактности алгебры гарантирует, что построенные выше тензорные поля, по крайней мере 2-го порядка, являются ненулевыми.

Теорема 2.2 Пусть в системе (1.1) по крайней мере один из коэффициентов Q^α отличен от нуля. Для того чтобы эта система допускала представление Лакса со значениями в простой компактной алгебре Ли необходимо, чтобы на многообразии M^n существовало ненулевое ковариантно постоянное тензорное поле $K_{\alpha\beta}$, удовлетворяющее условию

$$K_{\alpha\beta}V^\alpha V^\beta \geq 0 \quad (2.11)$$

для всех векторных полей $\vec{V} = (V^\alpha)$ на многообразии M^n .

Доказательство.

Докажем, что в качестве такого поля можно выбрать любое тензорное поле вида

$$T_{\alpha\beta}dU^\alpha \otimes dU^\beta = f(\omega^k, \omega^k), \quad k \in \mathbb{N}, \quad (2.12)$$

где f – метрика Киллинга на алгебре Ли \mathfrak{g} .

Сначала заметим, что из линейной независимости S_α следует, что $S_\alpha Q^\alpha \neq 0$. Поэтому из (1.6) и компактности алгебры следует, что $f([M, N], [M, N]) \neq 0$. Учитывая ad -инвариантность формы Киллинга f , будем иметь $f([M, N], [M, N]) = -f(N, [M, [M, N]])$, т. е. $[M, [M, N]] \neq 0$. Отсюда получим, что $Q^\alpha[M, S_\alpha] \neq 0$. Таким образом, доказано, что $\omega^1 \neq 0$.

Теперь покажем, что $\omega^k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть $[M, S_\alpha] \neq 0$. Тогда в силу компактности алгебры Ли $T_{\alpha\alpha} = f([M, S_\alpha], [M, S_\alpha]) \neq 0$. Отсюда, опять учитывая ad -инвариантность формы Киллинга, получим $f([M, S_\alpha], [M, S_\alpha]) = -f(S_\alpha, [M, [M, S_\alpha]]) \neq 0$. Тем самым доказано, что $\omega^2 \neq 0$. Аналогичным образом проверяется, что $\omega^k \neq 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$.

Теперь осталось использовать знакоопределенность формы Киллинга на компактной алгебре Ли.

Доказательство завершено.

Определение 2.1 Будем говорить, что система (1.1) является системой с неприводимой метрикой, если связность, определенная системой является связностью Леви-Чивита некоторой метрики и, кроме того, все ковариантно постоянные дважды ковариантные тензорные поля отличаются от метрики постоянным множителем.

Следствие 2.1 Для того, чтобы эта система (1.1) с неприводимой метрикой, в которой по крайней мере один из коэффициентов Q^α отличен от нуля, допускала представление Лакса со значениями в простой компактной алгебре Ли необходимо чтобы метрика была знакоопределенной.

Доказательство.

При доказательстве теоремы было доказано, что все формы ω^k ненулевые. Поэтому в данном случае все тензорные поля $T_{\alpha\beta}$ вида (2.12) отличаются от метрики постоянным множителем. Опять использование условия знакоопределенности метрики Киллинга завершает доказательство.

Пример 2.2 Рассмотрим 3-компонентную вариационную систему

$$\Delta^1 = U_{xy}^1 - aU^2 e^{2U^1} + bU^3 e^{-2U^1} = 0,$$

$$\Delta^2 = U_{xy}^2 - b\psi^{-1} e^{-2U^1} - \psi U^3 U_x^2 U_y^2 = 0,$$

$$\Delta^3 = U_{xy}^3 - a\psi^{-1} e^{2U^1} - \psi U^2 U_x^3 U_y^3 = 0,$$

где $\psi = (U^2U^3 + c)^{-1}$ и a, b, c – произвольные константы, $a^2 + b^2 \neq 0$.

Эта система является системой уравнений Эйлера для лагранжиана

$$L = 2U_x^1U_y^1 + \psi(U_x^2U_y^3 + U_x^3U_y^2) + 2aU^2e^{2U^1} + 2bU^3e^{-2U^1},$$

и, как известно [5], допускает представление Лакса со значениями в алгебре $sl(3)$, которое с точностью до калибровочного преобразования имеет вид:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\frac{U_x^2U^3}{3(U^2U^3 + c)} & -bc^{-1}U^3e^{-2U^1}\lambda & 0 \\ \lambda aU^2e^{2U^1} & -\frac{U_x^2U^3}{3(U^2U^3 + c)} & \lambda ae^{2U^1} \\ 0 & bc^{-1}e^{-2U^1}(U^2U^3 + c)\lambda & \frac{2U_x^2U^3}{3(U^2U^3 + c)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3}\left(2U_y^1 + \frac{U^2U_y^3}{U^2U^3 + c}\right) & \lambda^{-1} & -\frac{U_y^3}{U^2U^3 + c} \\ -c\lambda^{-1} & \frac{1}{3}\left(4U_y^1 - \frac{U^2U_y^3}{U^2U^3 + c}\right) & 0 \\ -U_y^2 & 0 & -\frac{1}{3}\left(2U_y^1 - \frac{2U^2U_y^3}{U^2U^3 + c}\right) \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица S_1 является диагональной $S_1 = \frac{1}{3}\text{diag}\{2, -4, 2\}$,

$$S_2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -U^3\psi & 0 & 0 \\ 0 & -U^3\psi & 0 \\ 3 & 0 & 2U^3\psi \end{pmatrix}, \quad S_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} U^2\psi & 0 & 3\psi \\ 0 & U^2\psi & 0 \\ 0 & 0 & -2U^2\psi \end{pmatrix}.$$

Непосредственные вычисления показывают, что тензорное поле $T_{\alpha\beta}$, построенное с помощью метрики Киллинга f по формуле $f(\omega^1, \omega^1)$ имеет вид:

$$T_{\alpha\beta} = -ab \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi \\ 0 & \psi & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно видеть, что поле $T_{\alpha\beta}$ является ковариантно постоянным и не пропорционально метрике, заданной лагранжианом системы. Это оказывается возможным, т.к. в данном примере метрика не является неприводимой и алгебра $sl(3)$ некоммутативна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Marvan, “On zero-curvature representations of partial differential equations”, *5th International Conference on Differential Geometry and Its Applications*, Opava, 1993, 103–122.
2. A. V. Balandin, “Characteristics of conservation laws of chiral-type systems”, *Letters in Mathematical Physics*, **105**:1 (2015), 27–43.

3. A. V. Balandin, “Tensor fields defined by Lax representations”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **23**:3 (2016), 323–334.
4. E. V. Ferapontov, W. K. Schief, “Surfaces of Demoulin: differential geometry, Backlund transformation and integrability”, *Journal of Geometry and Physics*, **30** (1999), 343–363.
5. Д. К. Демской, В. Г. Марихин, А. Г. Мешков, “Представления Лакса для триплетов двумерных скалярных полей кирального типа”, *Теоретическая и математическая физика*, **148**:2 (2006), 189–205.

Поступила 10.09.2019

MSC2010 35Q51, 37K10

Tensor fields associated with integrable systems of chiral type

© A. V. Balandin¹

Abstract. This article describes necessary conditions for chiral-type systems to admit Lax representation with values in simple compact Lie algebras. These conditions state that there exists a covariant constant tensor field with an additional property. It is proposed to construct in an invariant way some covariant tensor fields using the Lax representation of the system under consideration. These fields are constructed by taking linear differential forms with values in the Lie algebra that are constructed using the Lax representation of the system and substituting them into an arbitrary Ad-invariant form on the Lie algebra. The paper proves that such tensor fields are Killing tensor fields or covariant constant fields. The discovered necessary conditions for the existence of the Lax representation are obtained using a special case of such tensor fields associated with the Killing metric of the Lie algebra.

Key Words: chiral-type systems, integrable systems, Lax representation, covariantly constant field

REFERENCES

1. M. Marvan, “On zero-curvature representations of partial differential equations”, *5th International Conference on Differential Geometry and Its Applications*, Opava, 1993, 103–122.
2. A. V. Balandin, “Characteristics of conservation laws of chiral-type systems”, *Letters in Mathematical Physics*, **105**:1 (2015), 27–43.
3. A. V. Balandin, “Tensor fields defined by Lax representations”, *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, **23**:3 (2016), 323–334.
4. E. V. Ferapontov, W. K. Schief, “Surfaces of Demoulin: differential geometry, Backlund transformation and integrability”, *Journal of Geometry and Physics*, **30** (1999), 343–363.

¹**Alexander V. Balandin**, Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Prospekt Gagarina, Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Phys. and Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6115-7341>, balandin31@rambler.ru

5. D.K. Demskoi, V.G. Marikhin, A.G. Meshkov, “[Lax representations for triplets of two-dimensional scalar fields of the chiral type]”, *Theoretical and Mathematical Physics*, **148**:2 (2006), 1034–1048 (In Russ.).

Submitted 10.09.2019

УДК 517.956.3

О связи решений начально-краевых задач для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными и линейного гиперболического уравнения

© П. Н. Бурого¹, А. И. Эгамов²

Аннотация. Рассматривается вторая начально-краевая задача для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка и интегральным оператором. Показана связь ее решения с решением стандартной второй линейной начально-краевой задачи для гиперболического уравнения. Таким образом, нелинейная задача сводится к стандартной линейной задаче, численное решение которой можно получить, например, методом разделения переменных. Для лучшего понимания рассматриваемой задачи, в качестве частных представителей изучаемого класса интегро-дифференциальных уравнений, в статье приведены примеры пяти интегро-дифференциальных уравнений для различных интегральных операторов. Показано применение к ним основной теоремы. Вследствие наложения на интегральный оператор несложного естественного требования в четырех из пяти примерах решение задачи удовлетворяет некоторому фазовому ограничению. Вид каждого из них представляет определенный интерес для дальнейших исследований.

Ключевые слова: вторая начально краевая задача, интегро-дифференциальное уравнение с частными производными, гиперболическое уравнение.

Введение

Многие математические модели описываются интегро-дифференциальными уравнениями, методы решения которых нетривиальны и, зачастую, индивидуальны [1–9]. В последнее время метод разделения переменных, ранее считавшийся применимым исключительно к линейным уравнениям, с успехом применяется и к некоторым видам нелинейных уравнений в частных производных [10, с. 23–31]. Однако, чаще всего исследователи пытаются найти закономерность между нелинейной задачей и соответствующей ей линейной. Сведение нелинейной задачи к линейной считается существенным шагом на пути к ее решению, так как решение линейной задачи, как правило, известно [11]. Этот подход применен и в настоящей статье. Теорема о связи решений приведена для некоторого класса интегро-дифференциальных уравнений. Затем, в качестве пояснения, представлены пять примеров, в которых рассмотрены частные случаи этого класса. В данной работе использован метод, аналогичный [12–13], сводящий нелинейную задачу к линейному гиперболическому уравнению 2-го порядка с начальными и краевыми условиями.

¹Бурого Павел Николаевич, аспирант кафедры дифференциальных уравнений и математического и численного анализа, ИИТММ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8010-906X>, burago.pasha@yandex.ru

²Эгамов Альберт Исмаилович, старший преподаватель кафедры дифференциальных уравнений и математического и численного анализа, ИИТММ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3630-7237>, albert810@yandex.ru

1. Вспомогательные утверждения

Известно [11, 14], что для произвольного $T > 0$ на множестве $\Omega_T = [0, l] \times [0, T]$ существует дважды непрерывно дифференцируемая по своим переменным функция $z(x, t)$ – решение гиперболического уравнения 2-го порядка

$$z''_{tt}(x, t) = z''_{xx}(x, t) + b(x)z(x, t), \quad (1.1)$$

со вторыми краевыми

$$z'_x(0, t) = z'_x(l, t) = 0, \quad (1.2)$$

и начальными условиями

$$z(x, 0) = \varphi(x), z'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (1.3)$$

где $b(x)$ – непрерывная функция, функции $\varphi(x), \psi(x)$ – достаточно гладкие, см. [14, с. 95], удовлетворяющие условиям связи (1.2). Решение этой задачи единственно и может быть получено, например, методом Фурье.

Обозначим через $P[w]$ – интегральный оператор вида

$$P[w] = \int_0^l F_1(w(x, t), w'_t(x, t), w'_x(x, t)) dx, \quad (1.4)$$

где F_1 – функция, дважды непрерывно дифференцируемая относительно своих переменных, такая что интеграл существует для любой функции $w(x, t)$, имеющей непрерывные вторые производные по обоим переменным. Введем обозначение $P_w(t) \equiv P[w(x, t)]$ (если имеется в виду производная по переменной t , то будем ставить штрих над оператором, например, $P'_t[w]$).

В случае, если в качестве $w(x, t)$ в (1.4) используется функция $z(x, t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3), то соответствующую $P[z]$ функцию переменной t будем записывать без индекса: $P(t) \equiv P_z(t)$ или просто P для простоты и удобства записи. В частности, $P(0) = P[z(x, 0)] = P[\varphi(x)]$.

Обозначим через $R[w]$ – интегральный оператор вида

$$R[w] = \int_0^l F_2(w(x, t), w'_t(x, t), w'_x(x, t)) dx, \quad (1.5)$$

где F_2 – функция непрерывная относительно своих аргументов, такая, что интеграл существует для любой функции $w(x, t)$, имеющей непрерывные вторые производные по обоим переменным. Аналогично, введем обозначение $R_w(t) \equiv R[w(x, t)]$.

Пусть функция $\tilde{q}(t), t \in [0, T]$ – решение задачи Коши для уравнения Риккати

$$\tilde{q}'_t(t) + \tilde{q}^2(t) = R_w(t), \tilde{q}(0) = 0. \quad (1.6)$$

Фактически, для любой непрерывной функции $R_w(t)$ функция $\tilde{q}(t)$ существует в некоторой окрестности нуля. В зависимости от функции $R_w(t)$ функция $\tilde{q}(t)$ может быть как ограниченной на отрезке $[0, T]$, так и неограниченной, различные типы ее поведения рассмотрены в [15, с. 193–204]. Если задана функция F_2 оператора (1.5) правая часть уравнения (1.6) будет представлять некоторую вычисляемую функцию, соответствующую F_2 . Нетрудно видеть, что если функции F_2 и $w(x, t)$ заданы, то всегда можно выбрать и зафиксировать $T > 0$ так, чтобы функция $\tilde{q}(t)$ была ограничена на отрезке $t \in [0, T]$.

2. Теорема о связи решений начально-краевых задач

В статье рассматривается класс интегро-дифференциальных уравнений вида

$$y''_{tt}(x, t) = y''_{xx}(x, t) + b(x)y(x, t) - 2q(t)y'_t(x, t) - R[y]y(x, t), \quad (2.1)$$

с краевыми и начальными условиями

$$y'_x(0, t) = y'_x(l, t) = 0, \quad (2.2)$$

$$y(x, 0) = \varphi(x), \quad y'_t(x, 0) = \psi(x), \quad (2.3)$$

где непрерывно дифференцируемая функция $q(t)$ – является решением задачи Коши (1.6) при $w(x, t) \equiv y(x, t)$.

Т е о р е м а 2.1 Пусть на отрезке $[0, T]$ функция

$$p(t) = \exp \left(\int_0^t q(\tau) d\tau \right) \quad (2.4)$$

существует и удовлетворяет неравенству

$$p(t) \neq 0. \quad (2.5)$$

Тогда на множестве Ω_T существует единственное решение задачи (2.1)–(2.3), представимое в виде

$$y(x, t) = \frac{z(x, t)}{p(t)}, \quad (2.6)$$

где $z(x, t)$ является решением задачи (1.1)–(1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Будем считать, что для данного T функция $q(t)$ существует и непрерывна на отрезке $t \in [0, T]$, тогда вследствие (2.4) $p(t)$ существует, дифференцируема и $p(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$. Верно и обратное утверждение.

Покажем, что функция $y(x, t)$, удовлетворяющая равенству (2.6) с учетом выражения (2.4), является решением уравнения (2.1). Продифференцируем равенство (2.6):

$$y'_t(x, t) = \left(\frac{z(x, t)}{p(t)} \right)'_t = \frac{z'_t}{p} - \frac{z}{p} \frac{p'_t}{p}.$$

Дифференцируя далее, получим, что

$$\begin{aligned} y''_{tt}(x, t) &= \left(\frac{z'_t}{p} - \frac{z}{p} \frac{p'_t}{p} \right)'_t = \frac{z''_{tt}}{p} - 2 \frac{z'_t}{p} \frac{p'_t}{p} - \frac{z}{p} \left(\frac{p''_{tt}}{p} - 2 \frac{p'^2_{tt}}{p^2} \right) = \\ &= \frac{z''_{xx} + b(x)z}{p} - 2 \frac{p'_t}{p} \left(\frac{z'_t}{p} - \frac{z}{p} \frac{p'_t}{p} \right) - \frac{z}{p} \frac{p''_{tt}}{p} = \\ &= y''_{xx}(x, t) + b(x)y(x, t) - 2q(t)y'_t(x, t) - \frac{p''_{tt}}{p}y(x, t). \end{aligned}$$

Следовательно, $q(t)$ выражается в виде

$$q(t) = \frac{p'_t(t)}{p(t)}. \quad (2.7)$$

Заметим, что тогда $p_t(0) = q(0) = 0$ и, решая дифференциальное уравнение (2.7), с учетом $p(0) = 1$ – равенства, необходимого для удовлетворения тождества (2.6) при начальных условиях, получим формулу (2.4). Из (2.7) следует, что

$$q'_t(t) + q^2(t) = \frac{p''_{tt}}{p} - \frac{p_t'^2}{p^2} + q^2(t) = \frac{p''_{tt}}{p} - q^2(t) + q^2(t) = \frac{p''_{tt}}{p}.$$

Поэтому, согласно (1.6), если верно равенство

$$R[y] = \frac{p''_{tt}}{p}, \quad (2.8)$$

то функция $y(x, t)$, удовлетворяющая условию (2.6), является решением уравнения (2.1).

Кроме того, выполняются граничные (2.2) условия:

$$y'_x(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{z(0, t)}{p(t)} \right) = \frac{z'_x(0, t)}{p(t)} = 0,$$

аналогично $y'_x(l, t) = 0$; и начальные (2.3) условия:

$$y(x, 0) = \frac{z(x, 0)}{p(0)} = \varphi(x), \quad y'_t(x, 0) = \frac{z'_t(x, 0)}{p(0)} = \psi(x).$$

что и требовалось доказать.

Остается только заметить, согласно (2.8), что функция $p(t)$ – решение задачи Коши

$$p''_{tt} = p(t) R[y], \quad p(0) = 1, \quad p_t(0) = 0. \quad (2.9)$$

Отсюда и из (2.7) следует, что если известна одна из трех функций $p(t)$, $q(t)$ и $R[y]$, то две другие определяются однозначно.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

С л е д с т в и е 2.1 *Предположим, что для некоторого оператора $R[y]$ существует функция $F_1(w(x, t), w'_t(x, t), w'_x(x, t))$ такая, что оператор $P[z]$, заданный выражением (1.4), удовлетворяет тождеству $P[z] \equiv p(t)$ при $t \in [0, T]$, где $z(x, t)$ является решением задачи (1.1)–(1.3). Для выполнения начальных условий задачи Коши (2.9), на начальные функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ наложены ограничения так, чтобы выполнялись условия*

$$P(0) = 1, \quad P'_t(0) = 0. \quad (2.10)$$

Причем, при любом $t \in [0, T]$,

$$P[z] \neq 0. \quad (2.11)$$

Тогда справедлива теорема 2.1 при $P[z] \equiv p(t)$, а выражение (2.6) переписывается в виде

$$y(x, t) = \frac{z(x, t)}{P[z]}. \quad (2.12)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Условия (2.10) необходимы, чтоб выполнялись равенства $p(0) = 1$ и $p_t(0) = 0$ (и, соответственно, $q(0) = 0$, см. (2.7)). Неравенство (2.11) при данных предположениях эквивалентно неравенству (2.5).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

С л е д с т в и е 2.2 Пусть оператор $P[w]$ является однородным оператором относительно функций переменной t , то есть

$$P[s(t)w(x, t)] = s(t)P[w(x, t)] \quad (2.13)$$

для любой непрерывной на $[0, T]$ функции $s(t)$ и любой, определенной в Ω_T , непрерывной по своим компонентам функции $w(x, t)$. Выполнены условия следствия 2.1. Функция $y(x, t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3) с некоторым оператором $R[y]$, соответствующим подобранному оператору $P[z]$, тогда при любом $t \in [0, T]$ выполняется фазовое ограничение:

$$P[y] = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Учитывая, указанные в начальный момент времени условия (2.10), наложенные на начальные функции, согласно формуле (2.6):

$$P[y(x, 0)] = P\left[\frac{z(x, 0)}{p(0)}\right] = P[z(x, 0)] = P(0) = 1.$$

Аналогично, учитывая (2.13), при любом $t \in (0, T]$ выполняется фазовое ограничение:

$$P[y] = P\left[\frac{z}{p}\right] = \frac{1}{P[z]}P[z] = 1.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

3. Примеры

Приведем примеры, описанного выше класса интегро-дифференциальных уравнений в частных производных вида (2.1).

П р и м е р 3.1

Пусть выполнены начальные условия:

$$\int_0^l \varphi(x) dx = 1, \int_0^l \psi(x) dx = 0, \quad (3.1)$$

и верно условие

$$\int_0^l z(x, t) dx \neq 0, \quad (3.2)$$

при любом $t \in [0, T]$, где $z(x, t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3).

Пусть

$$R[y] = \int_0^l b(x)y(x, t) dx, \quad (3.3)$$

где $y(x, t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3), (3.3). Это решение существует, хотя бы на каком-то отрезке $[0, T_0]$. Непосредственной подстановкой в уравнение Риккати (1.6) с оператором $R[y]$, заданным (3.3), убеждаемся, что решением (1.6) является функция

$$q(t) = \frac{\int_0^l z'_t(x, t) dx}{\int_0^l z(x, t) dx}, \quad (3.4)$$

где $z(x, t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3).

Далее, подставляя (3.4) в формулу (2.4), находим

$$p(t) \equiv P[z] = \int_0^l z(x, t) dx. \quad (3.5)$$

Из этого равенства понятна формула (3.4), так как $q(t)$ записывается в виде (2.7). Условия (3.1) гарантируют выполнение условий (2.10), а условие (3.2) – эквивалентно неравенству (2.11). Выполнены условия следствия 2.1, поэтому из тождеств (2.6) и (3.5) получим, что на отрезке $[0, T]$ существует единственное решение задачи (2.1)–(2.3), (3.3), которое представляется в виде

$$y(x, t) = \frac{z(x, t)}{\int_0^l z(x, t) dx}.$$

Оператор $P[z]$ обладает свойством (2.13), поэтому при любом $t \in [0, T]$ верно равенство:

$$P[y] = \int_0^l y(x, t) dx = \int_0^l \frac{z(x, t)}{\int_0^l z(x, t) dx} dx = 1. \quad (3.6)$$

З а м е ч а н и е 3.1

Проверку условия (3.2) в примере 3.1 можно осуществлять следующим образом: решать линейную задачу методом Галеркина [16, с. 59], аналогично [17] посредством разложения функции $z(x, t)$ по системе косинусов [18, с. 474]: $v_k(x) = \cos(\frac{\pi k}{l}x)$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Нетрудно видеть, что они удовлетворяют краевым условиям (1.2) линейной задачи и, кроме того, $\int_0^l v_k(x) dx = 0$, $k = 1, 2, \dots$, поэтому

$$\int_0^l z(x, t) dx = \int_0^l \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k(t) v_k(x) dx = \sum_{k=0}^{+\infty} \xi_k(t) \int_0^l v_k(x) dx = l \xi_0(t),$$

где $\xi_k(t)$ – коэффициенты Галеркина функции $z(x, t)$. Интеграл и сумму можно менять местами в силу [18, с. 635–637], следовательно неравенство (3.2) эквивалентно неравенству $\xi_0(t) \neq 0$ при любом $t \in (0, T]$. Эта проверка представляется менее трудоемкой, чем проверка неравенства (3.2).

Понятно, что для практического применения теоремы 2.1 нахождение функции $p(t)$ является наиболее важной частью решаемой проблемы. Одним из вариантов ее решения является представление функции $p(t)$ в виде оператора $P[z]$ (см. следствие 2.1), так как после нахождения функции $z(x, t)$, задача "вычисления интеграла при известной функции F_1 " является менее сложной, стандартной вычислительной задачей. Подбор функции $F_1(z(x, t), z'_t(x, t), z'_x(x, t))$ при произвольной функции $F_2(y(x, t), y'_t(x, t), y'_x(x, t))$ оператора $R[y]$ является нетривиальной задачей, решение которой в общем виде не представляется осуществимым.

Для исследования возможного вида оператора $R[y]$, для задачи (1.6), (2.1)–(2.3), по которому можно найти функцию F_1 и построить соответствующий оператор $P[z]$, легче сначала определить оператор $P[z]$, а затем подобрать функцию $F_2(y(x, t), y'_t(x, t), y'_x(x, t))$ для представления оператора $R[y]$ в виде (1.5). Ниже показывается применение этого метода.

Пример 3.2

Предположим, что для некоторого оператора $R[y]$ удалось подобрать оператор $P[z] \equiv p(t)$ (см. следствие 2.1), причем оператор $P[z]$ задан в виде

$$P[z] = \left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.7)$$

где $z(x, t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3). Для выполнения условий (2.10) необходимо потребовать, чтобы начальные функции удовлетворяли равенствам

$$\int_0^l \varphi^2(x) dx = 1, \quad \int_0^l \varphi(x) \psi(x) dx = 0.$$

Найдем оператор $R[y]$. Дифференцируя (3.7), получим

$$P'_t[z] = \frac{1}{2} \left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^{-\frac{1}{2}} \times \int_0^l 2z(x, t) z'_t(x, t) dx = \frac{\int_0^l z(x, t) z'_t(x, t) dx}{\left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}}$$

и, следовательно, согласно (2.7),

$$q(t) = \frac{\int_0^l z(x, t) z'_t(x, t) dx}{\int_0^l z^2(x, t) dx};$$

из равенства (2.8) оператор

$$R[y] = \frac{P''_{tt}[z]}{P[z]},$$

где функция $y(x, t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3) с оператором $R[y]$, соответствующим заданному тождеством (3.7) оператору $P[z]$:

$$R[y] = \frac{P''_{tt}[z]}{P[z]} = \frac{1}{P} \frac{d}{dt} \left(\frac{\int_0^l z(x, t) z'_t(x, t) dx}{\left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}} \right) =$$

$$= \frac{\int_0^l (z(x, t) z''_{tt}(x, t) + z'^2_t(x, t)) dx}{\int_0^l z^2(x, t) dx} - \frac{\left(\int_0^l z(x, t) z'_t(x, t) dx \right)^2}{\left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^2}. \quad (3.8)$$

Для приведения оператора $R[y]$ к виду (1.5), сделаем следующие преобразования. Заметим, что

$$\int_0^l z(x, t) z''_{tt}(x, t) dx = \int_0^l (z(x, t) z''_{xx}(x, t) + b(x) z^2(x, t)) dx. \quad (3.9)$$

Интегрируя по частям (3.9) и учитывая краевые условия (1.2), получим

$$\int_0^l z(x, t) z''_{xx}(x, t) dx = z(x, t) z'_x(x, t) \Big|_0^l - \int_0^l z'^2_x(x, t) dx = - \int_0^l z'^2_x(x, t) dx. \quad (3.10)$$

Продифференцируем равенство (2.6) при условии (3.7):

$$y_t(x, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{z(x, t)}{\left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{z'_t(x, t)}{\left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{z(x, t) \int_0^l z(x, t) z'_t(x, t) dx}{\left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^{\frac{3}{2}}},$$

возведем в квадрат:

$$y_t^2(x, t) = \frac{z'^2_t(x, t)}{\int_0^l z^2(x, t) dx} - 2 \frac{z(x, t) z'_t(x, t) \int_0^l z(x, t) z'_t(x, t) dx}{\left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^2} + \frac{z^2(x, t) \left(\int_0^l z(x, t) z'_t(x, t) dx \right)^2}{\left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^3},$$

далее, интегрируя по переменной x от 0 до l ,

$$\int_0^l y_t^2(x, t) dx = \frac{\int_0^l z'^2_t(x, t) dx}{\int_0^l z^2(x, t) dx} - \frac{\left(\int_0^l z(x, t) z'_t(x, t) dx \right)^2}{\left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^2}.$$

Отсюда и из равенств (3.8)–(3.10) получим, что

$$R[y] = \int_0^l (b(x)y^2(x, t) - y_x'^2(x, t) + y_t'^2(x, t)) dx. \quad (3.11)$$

Из формулы (3.7) и равенства (2.6) следует, что решение исходной нелинейной задачи (2.1)–(2.3), (3.11) связано с решением линейной задачи (1.1)–(1.3) равенством:

$$y(x, t) = \frac{z(x, t)}{\left(\int_0^l z^2(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Нетрудно видеть, что оператор $P[z]$, заданный формулой (3.7) обладает свойством (2.13), поэтому при любом $t \in [0, T]$ имеет место фазовое ограничение $P[y] = 1$, равносильное выражению

$$\int_0^l y^2(x, t) dx = 1. \quad (3.12)$$

Пример 3.3

Пусть $\beta(x)$ – непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, l]$ функция, оператор

$$P[z] = \int_0^l \beta(x)z(x, t) dx, \quad (3.13)$$

где $z(x, t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3); выполняется неравенство (2.11); на начальные функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ наложены условия $\int_0^l \beta(x)\varphi(x) dx = 1$, $\int_0^l \beta(x)\psi(x) dx = 0$, чтобы выполнялись условия (2.10). Тогда

$$\begin{aligned} P_t'[z] &= \int_0^l \beta(x)z_t'(x, t) dx; \\ P_{tt}''[z] &= \int_0^l \beta(x)z_{tt}''(x, t) dx = \int_0^l \beta(x)z_{xx}''(x, t) + \beta(x)b(x)z(x, t) dx = \\ &= (\beta(l)z_x'(l, t) - \beta(0)z_x'(0, t)) - \int_0^l \beta_x'(x)z_x'(x, t)t dx + \int_0^l b(x)\beta(x)z(x, t) dx = \\ &= \int_0^l \beta(x)b(x)z(x, t) - \beta_x'(x)z_x'(x, t) dx, \end{aligned}$$

согласно краевым условиям (1.2). Таким образом, из (2.8) следует

$$R[y] = \frac{P''_{tt}}{P} = \frac{\int_0^l \beta(x)b(x)z(x,t) - \beta'_x(x)z'_x(x,t) dx}{\int_0^l \beta(x)z(x,t) dx} =$$

$$= \int_0^l \beta(x)b(x)y(x,t) - \beta'_x(x)y'_x(x,t) dx. \quad (3.14)$$

В этом случае тождество (2.6) запишется в виде:

$$y(x,t) = \frac{z(x,t)}{\int_0^l \beta(x)z(x,t) dx},$$

где $y(x,t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3), (3.14). Оператор (3.13) обладает свойством (2.13), поэтому при любом $t \in [0, T]$ имеет место фазовое ограничение:

$$P[y] = \int_0^l \beta(x)y(x,t) dx = 1. \quad (3.15)$$

Пример 3.1 – частный случай примера 3.3 при $\beta(x) \equiv 1$.

Пример 3.4

Приведем пример оператора $P[z]$, не удовлетворяющего условию (2.13). Пусть

$$P[z] = \int_0^l z'_t(x,t) dx, \quad (3.16)$$

где $z(x,t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3). В данном примере положим $b(x) \equiv b$ – константа, пусть к тому же выполнено условие (2.11).

Дифференцируем равенство (3.16)

$$P'_t[z] = \int_0^l z''_{tt}(x,t) dx = \int_0^l z''_{xx}(x,t) + bz(x,t) dx = z_x(l,t) - z_x(0,t) +$$

$$+ \int_0^l bz(x,t) dx = \int_0^l bz(x,t) dx; \quad (3.17)$$

$$P''_{tt}[z] = \int_0^l bz'_t(x,t) dx. \quad (3.18)$$

Поэтому, из (2.7)–(2.8), (3.16)–(3.18) имеем:

$$q(t) = \frac{P'_t[z]}{P[z]} = \int_0^l by(x, t) dx,$$

$$R[y] = \frac{P''_{tt}[z]}{P[z]} = b. \quad (3.19)$$

Допустим, для начальных функций выполнены равенства:

$$P(0) = \int_0^l \psi(x) dx = 1; \quad P_t(0) = \int_0^l \varphi(x) dx = 0.$$

Это необходимо для выполнения условий (2.10).

Формула (2.6) запишется в виде:

$$y(x, t) = \frac{z(x, t)}{\int_0^l z'_t(x, t) dx},$$

где $y(x, t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3), (3.19). Уравнение (2.1) переписывается в виде

$$y''_{tt}(x, t) = y''_{xx}(x, t) - 2by'_t(x, t) \int_0^l y(x, t) dx.$$

Данный случай интересен тем, что функция $q(t)$ выражается в явном виде, а не задается как решение задачи Коши.

Пример 3.5

Усилим пример 3.2. Пусть

$$P[z] = \left(\int_0^l z^\alpha(x, t) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad (3.20)$$

где $z(x, t)$ – решение задачи (1.1)–(1.3), α – натуральное число; (в примере 3.2 $\alpha = 2$); выполняются условие (2.13) и неравенство (2.11); ограничения на начальные функции (2.10) имеют вид:

$$P(0) = \int_0^l \varphi^\alpha(x) dx = 1, \quad P_t(0) = \alpha \int_0^l \varphi^{\alpha-1}(x) \psi(x) dx = 0.$$

Найдем соответствующий оператор $R[y]$. Дифференцируя равенство (3.20), получим:

$$P'_t[z] = \frac{1}{\alpha} \left(\int_0^l z^\alpha(x, t) dx \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}} \times \alpha \int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z'_t(x, t) dx = \frac{\int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z'_t(x, t) dx}{\left(\int_0^l z^\alpha(x, t) dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}$$

и, следовательно, согласно равенству (2.7):

$$q(t) = \frac{\int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z'_t(x, t) dx}{\int_0^l z^{\alpha}(x, t) dx};$$

а по формуле (2.8) оператор $R[y]$ имеет вид:

$$\begin{aligned} R[y] &= \frac{P''_{tt}}{P} = \frac{1}{P} \frac{d}{dt} \left(\frac{\int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z'_t(x, t) dx}{\left(\int_0^l z^{\alpha}(x, t) dx \right)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}} \right) = \\ &= \frac{\int_0^l (\alpha-1) z^{\alpha-2} z'^2_t + z^{\alpha-1} z''_{tt} dx}{\int_0^l z^{\alpha} dx} - (\alpha-1) \left(\frac{\int_0^l z^{\alpha-1} z'_t dx}{\int_0^l z^{\alpha} dx} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Заметим, что

$$\int_0^l z^{\alpha-1} z''_{tt} dx = \int_0^l z^{\alpha-1} (z''_{xx} + b(x)z) dx = \int_0^l (b(x)z^{\alpha} + z^{\alpha-1} z''_{xx}) dx. \quad (3.22)$$

Интегрируя (3.22) по частям и учитывая краевые условия (1.2), получим:

$$\begin{aligned} \int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z''_{xx}(x, t) dx &= z^{\alpha-1}(x, t) z'_x(x, t) \Big|_{(0,t)}^{(l,t)} - (\alpha-1) \int_0^l z^{\alpha-2}(x, t) z'^2_x(x, t) dx = \\ &= -(\alpha-1) \int_0^l z^{\alpha-2}(x, t) z'^2_x(x, t) dx. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Продифференцируем функцию $y(x, t)$ – решение задачи (2.1)–(2.3) с оператором $R[y]$, соответствующим заданному формулой (3.20) оператору $P[z]$:

$$y'_t(x, t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{z(x, t)}{\left(\int_0^l z^{\alpha}(x, t) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}} \right) = \frac{z'_t(x, t)}{\left(\int_0^l z^{\alpha}(x, t) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}} - \frac{z(x, t) \int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z'_t dx}{\left(\int_0^l z^{\alpha}(x, t) dx \right)^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}},$$

возведем в квадрат:

$$y'^2_t(x, t) = \frac{z'^2_t(x, t)}{\left(\int_0^l z^{\alpha}(x, t) dx \right)^{\frac{2}{\alpha}}} - 2 \frac{z z'_t \int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z'_t dx}{\left(\int_0^l z^{\alpha}(x, t) dx \right)^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}} + \frac{z^2 \left(\int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z'_t dx \right)^2}{\left(\int_0^l z^{\alpha}(x, t) dx \right)^{\frac{2\alpha+2}{\alpha}}}.$$

Умножим на $y^{\alpha-2}(x, t)$ и, далее, интегрируя по переменной x от 0 до l , получим

$$\int_0^l y^{\alpha-2}(x, t) y_t'^2 dx = \int_0^l \left(\frac{z^{\alpha-2} z_t'^2(x, t)}{\int_0^l z^\alpha(x, t) dx} - \frac{2z^{\alpha-1} z_t' \int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z_t' dx}{\left(\int_0^l z^\alpha(x, t) dx \right)^2} + \right. \\ \left. + \frac{z^\alpha \left(\int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z_t' dx \right)^2}{\left(\int_0^l z^\alpha(x, t) dx \right)^3} \right) dx = \frac{\int_0^l z^{\alpha-2} z_t'^2(x, t) dx}{\int_0^l z^\alpha(x, t) dx} - \frac{\left(\int_0^l z^{\alpha-1}(x, t) z_t' dx \right)^2}{\left(\int_0^l z^\alpha(x, t) dx \right)^2}.$$

Отсюда и из равенств (3.21)–(3.23) следует, что

$$R[y] = \int_0^l (b(x) y^\alpha(x, t) + (\alpha - 1) y^{\alpha-2}(x, t) (y_t'^2(x, t) - y_x^2(x, t))) dx. \quad (3.24)$$

Нетрудно убедиться, что выражение (3.24) эквивалентно (3.11) при $\alpha = 2$.

Решение исходной нелинейной задачи (2.1)–(2.3), (3.24) связано с решением линейной задачи (1.1)–(1.3) равенством типа (2.12):

$$y(x, t) = \frac{z(x, t)}{\left(\int_0^l z^\alpha(x, t) dx \right)^{\frac{1}{\alpha}}},$$

и, так как в данном примере оператор $P[z]$ обладает свойством однородности (2.13), при любом $t \in [0, T]$ имеет место фазовое ограничение $P[y] = 1$, что равносильно равенству

$$\int_0^l y^\alpha(x, t) dx = 1. \quad (3.25)$$

Заключение

Приведенные примеры показывают, что исходное интегро-дифференциальное уравнение (2.1) является перспективным для дальнейшего изучения, а полученные в примерах 3.1–3.3, 3.5 фазовые ограничения (3.6), (3.12), (3.15) и (3.25) несомненно представляют определенный интерес. Например, допустимо их использование в теории управления в задачах, где присутствует фазовое ограничение, аналогичное какому-либо из рассмотренных: его автоматическое выполнение можно гарантировать подбором специального управления с обратной связью. Переход от исходных нелинейных задач к линейным и представление решения нелинейной задачи в виде (2.12) позволяет привлечь к их решению метод Фурье или метод Галеркина, и, тем самым, получить численный метод решения для представленного класса задач.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Вайнберг, “Интегро-дифференциальные уравнения”, *Итоги науки. Сер. Мат. анализ. Теор. вероятн. Регулир.* 1962. ВИНТИ. М., 1964, 5–37.
2. С. С. Орлов, *Обобщенные решения интегро-дифференциальных уравнений высоких порядков в банаховых пространствах*, Изд-во ИГУ, Иркутск, 2014, 150 с.
3. А. А. Самарский, А. П. Михайлов, *Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2005, 320 с.
4. А. В. Калинин, С. Ф. Морозов, “О стабилизации решения нелинейной системы переноса излучения в двухуровневом приближении”, *ДАН СССР*, **331:2** (1990), 343–346.
5. А. В. Калинин, С. Ф. Морозов, “Об одной нелинейной краевой задаче теории переноса излучения”, *ЖВМ и МФ*, **30:7** (1990), 1071–1080.
6. О. А. Кузенков, А. И. Эгамов, “Обобщенная модель Вольтерра для системы с одним хищником и несколькими жертвами”, *III Международная конференция из серии «Нелинейный мир». «Экология. Экологическое образование. Нелинейное мышление».*, Тезисы докладов (г. Воронеж, 1997), 86.
7. О. А. Кузенков, “О свойствах одного класса интегро-дифференциальных уравнений в пространстве Лебега”, *Нелинейная динамика и управление. Вып. 1. Сб. статей / Под ред. С. В. Емельянова, С. К. Коровина*, 2001, 347–354.
8. О. А. Кузенков, “Об одном классе интегро-дифференциальных уравнений в пространстве Лебега”, *Дифференциальные уравнения*, **38:1** (2002), 134–135.
9. О. А. Кузенков, “Задача Коши для одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве”, *Дифференциальные уравнения*, **40:1** (2004), 24–32.
10. В. Ф. Зайцев, А. Д. Полянин, *Метод разделения переменных в математической физике. Учебное издание*, Санкт-Петербург, 2009, 92 с.
11. А. Д. Полянин, *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 576 с.
12. О. А. Кузенков, А. И. Эгамов, “Оптимальное управление для одного класса интегро-дифференциальных уравнений”, *Известия РАЕН. Серия МММИУ*, **1:2** (1997), 140–145.
13. О. А. Кузенков, А. И. Эгамов, “Оптимальное управление для колебательного процесса”, *Вестник ННГУ. «Математическое моделирование и оптимальное управление»*, 1998, № 2 (19), 174–179.
14. А. Н. Тихонов, А. А. Самарский, *Уравнения математической физики*, Наука, М., 1979, 685 с.
15. А. И. Егоров, *Уравнения Риккати. Издание второе, дополненное*, СОЛОН-Пресс, М., 2017, 448 с.

16. Э. Митчелл, Р. Уэйт, *Метод конечных элементов для уравнений с частными производными*, Мир, М., 1981, 216 с.
17. П. Н. Бурого, А. И. Эгамов, “Применение метода Галеркина ко второй начально-краевой задаче теплопроводности.”, *Наука сегодня. Проблемы и перспективы развития.*, Материалы международной научно-практической конференции. Часть 1 (г. Вологда, 29 ноября 2017 г.), 125-126.
18. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 3*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 662 с.

Поступила 3.07.2019

MSC2010 35L20

On the connection between solutions of initial boundary-value problems for a some class of integro-differential PDE and a linear hyperbolic equation

© P. N. Burago¹, A. I. Egamov²

Abstract. We consider the second initial boundary-value problem for a certain class of second-order integro-differential PDE with integral operator. The connection of its solution with the solution of the standard second linear initial boundary-value problem for the hyperbolic equation is shown. Thus, the nonlinear problem is reduced to a standard linear problem, whose numerical solution can be obtained, for example, by the Fourier method or Galerkin method. The article provides examples of five integro-differential equations for various integral operators as particular representatives of the class of integro-differential equations for a better understanding of the problem. The application of the main theorem to these examples is shown. Some simple natural requirement is imposed on the integral operator; so, in four cases out of five the problem's solution satisfies some phase constraint. The form of these constraints is of particular interest for the further research.

Key Words: the second initial boundary value problem, integro-differential equation with PDE, phase constraint, hyperbolic equation.

REFERENCES

1. M. M. Vajnberg, “Integro-differential equations”, *Itogi nauki. Ser. Mat. anal. Teor. veroyatn. Regulir.* 1962. VINITI. M., 1964, 5 — 37 (In Russ.).
2. S. S. Orlov, *Obobshchennye resheniya integro-differencial'nykh uravnenij vysokikh porjadkov v banahovykh prostranstvakh [Generalized solution integro-differential high order equations in Banach space]*, Izd-vo IGU, Irkutsk, 2014 (In Russ.), 150 p.

¹**Pavel N. Burago**, Post-graduate student, Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (23 Prospekt Gagarina, Nizhni Novgorod, 603950, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-8010-906X>, burago.pasha@yandex.ru

²**Albert I. Egamov**, Associate Professor, Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (23 Prospekt Gagarina, Nizhni Novgorod, 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3630-7237>, albert810@yandex.ru

3. A. A. Samarskij, A. P. Mihajlov, *Matematicheskoe modelirovanie: Idei. Metody. Primery. [Mathematical Modeling: Ideas. Methods. Examples]*, FIZMATLIT, M., 2005 (In Russ.), 320 p.
4. A. V. Kalinin, S. F. Morozov, “On stabilization of the solution of the nonlinear radiation transfer system in the two-level approximation”, *DAN SSSR*, **38**:1 (1990), 134–135 (In Russ.).
5. A. V. Kalinin, S. F. Morozov, “On a nonlinear boundary value problem in the theory of radiation transfer”, *JVM i MF*, **311**:2 (1990), 343–346 (In Russ.).
6. O. A. Kuzenkov, A. I. Egamov, “The generalized Volterra model for a system with one predator and several prey”, *III Mezhdunarodnaya konferenciya iz serii “Nelinejnyj mir: “Ecologiya. Ecologicheskoe obrazovanie. Nelinejnoe myshlenie”. [III international conference of the series “Nonlinear world”. “Ecology. Environmental education. Non-linear thinking”]*, Tezisy dokladov [Proceedings] (Voronezh, 1997), 86 (In Russ.).
7. O. A. Kuzenkov, “Properties of a class of integro-differential equations in Lebesgue space”, *Nelinejnaya dinamika i upravlenie. Vyp. 1. Sb. statej/Pod red. S. V. Emel’yanova, S. K. Korovina*, 2001, 347 – 354 (In Russ.).
8. O. A. Kuzenkov, “On a class of integro-differential equations in Lebesgue space”, *Differencial’nye uravneniya*, **38**: 1 (2002), 134–135 (In Russ.).
9. O. A. Kuzenkov, “The Cauchy problem for a class of nonlinear differential equations in a Banach space”, *Differencial’nye uravneniya*, **40**:1 (2004), 24–32 (In Russ.).
10. V. F. Zajcev, A. D. Polyanin, *Metod razdeleniya peremennyh v matematicheskoj fizike. Uchebnoe izdanie. [The method of separation of variables in mathematical physics. Educational edition]*, Sankt-Peterburg, 2009 (In Russ.), 92 p.
11. A. D. Polyanin, *Spravochnik po linejnym uravneniyam matematicheskoj fiziki. [Handbook of linear equations of mathematical physics]*, FIZMATLIT, M., 2001 (In Russ.), 576 p.
12. O. A. Kuzenkov, A. I. Egamov, “Optimal control for one class of integro-differential equations”, *Izvestiya RAEN. Seriya MMMIU*, **1**:2 (1997), 140–145 (In Russ.).
13. O. A. Kuzenkov, A. I. Egamov, “Optimal control for the oscillatory process”, *Vestnik NNGU. “Matematicheskoe modelirovanie i optimal’noe upravlenie”*, **2 (19)** (1998), 174–179 (In Russ.).
14. A. N. Tihonov, A. A. Samarskij, *Uravneniya matematicheskoj fiziki. [Equations of mathematical physics]*, Nauka, M., 1979 (In Russ.), 685 p.
15. A. I. Egorov, *Uravneniya Riccati. Izdanie vtoroe, dopolnennoe [Riccati Equations. Second edition, supplemented]*, SOLON-Press, M., 2017 (In Russ.), 448 p.
16. E. Mitchell, R. Uejt, *Metod konechnyh elementov dlya uravnenij s chastnymi proizvodnymi. [The finite element method for partial differential equations]*, Mir, M., 1981 (In Russ.), 216 p.

17. P. N. Burago, A. I. Egamov, “Application of the Galerkin method to the second initial-boundary value problem of heat conduction”, *Nauka segodnya. Problemy i perspektivy razvitiya. [Science today. Problems and prospects of development.]*, Proceedings of the international scientific and practical conference. Part 1. (Vologda, 29.11.2017), 125-126 (In Russ.).
18. G. M. Fihtengol’c, *Kurs differencial’nogo i integral’nogo ischisleniya. [Course of differential and integral calculus. T.3]*, FIZMATLIT, M., 2001 (In Russ.), 662 p.

Submitted 3.07.2019

УДК 517.926, 517.986

Об обратимости решений линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых алгебрах

© О. Е. Галкин¹, С. Ю. Галкина²

Аннотация. Работа посвящена изучению некоторых свойств линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых алгебрах. В ней найдено (для некоторых типов банаховых алгебр), при какой правой части такого уравнения из обратимости начального условия следует обратимость его решения в любой момент времени. Рассматриваются (ассоциативные) банаховы алгебры над полем действительных или комплексных чисел. Правые части изучаемых уравнений имеют вид $[F(t)](x(t))$, где $\{F(t)\}$ — непрерывное относительно $t \in \mathbb{R}$ семейство ограниченных операторов на алгебре. Задача состоит в том, чтобы для заданной банаховой алгебры найти все непрерывные семейства ограниченных операторов на ней, сохраняющие обратимость элементов из алгебры. В данной статье эта задача решена лишь для трех случаев. В первом случае алгебра состоит из всех квадратных матриц заданного порядка. Для этой алгебры показано, что все непрерывные семейства операторов, сохраняющие обратимость элементов из алгебры в нуле, должны иметь вид $[F(t)](y) = a(t) \cdot y + y \cdot b(t)$, где семейства $\{a(t)\}$ и $\{b(t)\}$ также непрерывны. Во втором случае алгебра состоит из всех непрерывных функций на отрезке. Для этого случая показано, что все семейства операторов, сохраняющие обратимость элементов из алгебры в любой момент, должны иметь вид $[F(t)](y) = a(t) \cdot y$, где семейство $\{a(t)\}$ также непрерывно. К третьему случаю относятся те банаховы алгебры, в которых обратимы все ненулевые элементы. Например, этим свойством обладают алгебра комплексных чисел и алгебра кватернионов. В этом случае обратимость элементов из алгебры в любой момент сохраняют любые непрерывные семейства ограниченных операторов. Предлагаемое исследование соприкасается с исследованиями основ квантовой механики. Динамика квантовых наблюдаемых описывается уравнением Гейзенберга. Полученные результаты являются косвенным аргументом в пользу того, что известная форма уравнения Гейзенберга — единственно правильная.

Ключевые слова: линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка в банаховых алгебрах, сохранение обратимости решений

1. Введение

Статья посвящена изучению некоторых свойств линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка в банаховых алгебрах.

Всюду далее \mathbb{K} — это поле вещественных или комплексных чисел; B — (ассоциативная) банахова алгебра над полем \mathbb{K} с единицей E (определение банаховой алгебры

¹Галкин Олег Евгеньевич, доцент кафедры прикладной математики, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23); лаборатория топологических методов в динамике, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1634-7792>, olegegalkin@ya.ru

²Галкина Светлана Юрьевна, доцент кафедры фундаментальной математики, ФГАОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2476-2275>, svetlana.u.galkina@mail.ru

можно найти, например, в [1–2]). Операция умножения в B будет обозначаться знаком « \cdot ». Элемент $y \in B$ называется *обратимым*, если он имеет обратный элемент $y^{-1} \in B$ (см. [2]).

В работе найдено (для некоторых типов банаховых алгебр), при какой правой части линейного однородного дифференциального уравнения первого порядка из обратимости начального условия следует обратимость решения в любой момент времени.

Для более точной формулировки постановки задачи и полученных результатов далее в разделах 1.1.–1.3. напоминаются некоторые известные факты относительно линейных дифференциальных уравнений в банаховых алгебрах (см., например, [3–4]).

1.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка с правой частью вида $a(t) \cdot x(t)$ или $x(t) \cdot b(t)$

Пусть задано семейство $\{a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ элементов из B , непрерывное относительно t . Тогда можно задать новое двухпараметрическое семейство $\{L_a(t, s)\}_{t, s \in \mathbb{R}}$ элементов из B с помощью следующего ряда:

$$L_a(t, s) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t a(t_n) \cdot \left(\int_s^{t_n} a(t_{n-1}) \cdot \dots \cdot \left(\int_s^{t_3} a(t_2) \cdot \left(\int_s^{t_2} a(t_1) dt_1 \right) dt_2 \right) \dots dt_{n-1} \right) dt_n. \quad (1.1)$$

Непосредственная проверка показывает, что при любом $s \in \mathbb{R}$ семейство $x(t) = L_a(t, s)$, где $t \in \mathbb{R}$, является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} x(t) = a(t) \cdot x(t)$$

с начальным условием $x(s) = E$. Такое решение единственно (см., например, [3–4]).

Аналогично, если задано семейство $\{b(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ элементов из B , также непрерывное относительно t , то по нему можно построить двухпараметрическое семейство $\{R_a(t, s)\}_{t, s \in \mathbb{R}}$ элементов из B с помощью ряда

$$R_b(t, s) = E + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t \left(\int_s^{t_n} \dots \left(\int_s^{t_3} \left(\int_s^{t_2} b(t_1) dt_1 \right) \cdot b(t_2) dt_2 \right) \cdot \dots \cdot b(t_{n-1}) dt_{n-1} \right) \cdot b(t_n) dt_n.$$

При любом $s \in \mathbb{R}$ семейство $x(t) = R_b(t, s)$, где $t \in \mathbb{R}$, является единственным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} x(t) = x(t) \cdot b(t)$$

с начальным условием $x(s) = E$.

1.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка в пространстве операторов

Пространство всех линейных ограниченных операторов на B , наделенное равномерной операторной нормой, будет обозначаться через $\mathcal{L}(B, B)$. Это пространство тоже является банаховой алгеброй (см. [2]). Тожественный оператор на B будет обозначаться символом I , а композиция операторов P и Q из $\mathcal{L}(B, B)$ — через $P \circ Q$.

Пусть $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — непрерывное семейство операторов на B из класса $\mathcal{L}(B, B)$. Тогда, в силу сказанного в разделе 1.1., при любом $s \in \mathbb{R}$ единственным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt} X(t) = F(t) \circ X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

с начальным условием $X(s) = I$ является семейство операторов $X(t) = L_F(t, s)$, где $t \in \mathbb{R}$, определяемое следующим рядом, аналогичным (1.1):

$$L_F(t, s) = I + \sum_{n=1}^{\infty} \int_s^t F(t_n) \circ \left(\int_s^{t_n} F(t_{n-1}) \circ \dots \circ \left(\int_s^{t_3} F(t_2) \circ \left(\int_s^{t_2} F(t_1) dt_1 \right) dt_2 \right) \dots dt_{n-1} \right) dt_n.$$

Отсюда вытекает, что для любого начального условия $x^s \in B$ единственным решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt}x(t) = [F(t)](x(t)), \quad x(s) = x^s, \quad (1.3)$$

является семейство $x(t) = [L_F(t, s)](x^s)$, где $t \in \mathbb{R}$ (см., например, [3–4]).

1.3. Линейные однородные дифференциальные уравнения первого порядка с правой частью вида $a(t) \cdot x(t) + x(t) \cdot b(t)$

Здесь будет рассмотрен важный частный случай, когда в (1.3) операторы $F(t)$ при всех $t \in \mathbb{R}$ имеют вид

$$[F(t)](y) = a(t) \cdot y + y \cdot b(t), \quad y \in B, \quad (1.4)$$

где $\{a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{b(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — непрерывные семейства элементов из B . В этом случае задача Коши (1.3) примет вид

$$\frac{d}{dt}x(t) = a(t) \cdot x(t) + x(t) \cdot b(t), \quad x(s) = x^s. \quad (1.5)$$

Как отмечено в разделе 1.2., данная задача при любых $s \in \mathbb{R}$ и $x^s \in B$ имеет единственное решение. Непосредственная проверка показывает, что это решение можно записать в виде

$$x(t) = L_a(t, s) \cdot x^s \cdot R_b(t, s), \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Отсюда вытекает, в частности, что единственным решением задачи Коши

$$\frac{d}{dt}x(t) = a(t) \cdot x(t) - x(t) \cdot a(t), \quad x(s) = E, \quad (1.7)$$

является семейство $x(t) = L_a(t, s) \cdot R_{-a}(t, s)$, $t \in \mathbb{R}$. Поскольку, очевидно, семейство $x(t) \equiv E$ также является решением задачи (1.7), то $L_a(t, s) \cdot R_{-a}(t, s) = E$ для любых $t, s \in \mathbb{R}$. Следовательно, при всех $t, s \in \mathbb{R}$ выполняются равенства $[L_a(t, s)]^{-1} = R_{-a}(t, s)$ и $[R_b(t, s)]^{-1} = L_{-b}(t, s)$. Отсюда и из (1.6) вытекает, что если элемент x^s имеет обратный в B , то при любом $t \in \mathbb{R}$ решение $x(t)$ задачи Коши (1.5) также обратимо. При этом обратный к $x(t)$ элемент имеет вид

$$[x(t)]^{-1} = [R_b(t, s)]^{-1} \cdot (x^s)^{-1} \cdot [L_a(t, s)]^{-1} = L_{-b}(t, s) \cdot (x^s)^{-1} \cdot R_{-a}(t, s).$$

1.4. О семействах операторов, сохраняющих обратимость элементов банаховой алгебры

О п р е д е л е н и е 1.1 Пусть B — банахова алгебра, $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — непрерывное семейство операторов из класса $\mathcal{L}(B, B)$.

1. Говорят, что семейство $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ сохраняет обратимость элементов из B в любой момент, если при любом $s \in \mathbb{R}$ для всякого обратимого элемента $x^s \in B$

решение $\{x(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ задачи Коши (1.3) обратимо в B (то есть элемент $x(t) \in B$ имеет обратный элемент в B) при всех $t \in \mathbb{R}$.

2. Говорят, что семейство $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ сохраняет обратимость элементов из B в нуле, если при $s = 0$ для всякого обратимого элемента $x^0 \in B$ решение $x(t)$ задачи Коши (1.3) обратимо в B при всех $t \in \mathbb{R}$.

Из этого определения вытекает, что если семейство $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, лежащее в $\mathcal{L}(B, B)$, сохраняет обратимость элементов из B в любой момент, то оно сохраняет обратимость элементов из B и в нуле.

Из сказанного в разделе 1.3. и из определения 1.1 сразу следует предложение:

Предложение 1.1 Все семейства операторов вида (1.4), где $\{a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{b(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — непрерывные семейства элементов из B , сохраняют обратимость элементов из B в любой момент.

1.5. Актуальность темы

В настоящее время линейные дифференциальные уравнения в банаховых алгебрах по-прежнему привлекают внимание ученых (см., например, [5–7]).

Предложенное исследование соприкасается с исследованиями основ квантовой механики. Ее основные положения были сформулированы еще в начале XX-го века. Тем не менее, специалисты продолжают изучение вопроса о том, насколько современная форма квантовой механики является единственно возможной или необходимой (см., например, [8–9]). Рассматриваемое в работе свойство сохранения обратимости важно, например, при изучении динамики физических величин в квантовой механике.

Известно (см., например, [10]), что в квантовой механике каждой физической величине (называемой также наблюдаемой) в каждый момент времени t соответствует самосопряженный оператор $X(t)$ на некотором гильбертовом пространстве. В частности, энергии квантовой системы соответствует оператор $\hat{H}(t)$, называемый квантовым гамильтонианом. Динамика квантовых наблюдаемых $X(t)$ описывается уравнением Гейзенберга, имеющим следующий вид, аналогичный (1.5) (см., например, [10]):

$$\frac{d}{dt}X(t) = \left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t)\right) \cdot X(t) - X(t) \cdot \left(\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t)\right), \quad (1.8)$$

где \hbar — постоянная Планка. Если существует оператор $[X(0)]^{-1}$, то он тоже соответствует некоторой квантовой наблюдаемой. Поэтому важно, чтобы из существования $[X(0)]^{-1}$ следовало существование $[X(t)]^{-1}$ в любой момент времени t . Иначе получится, что физическая величина $[X(t)]^{-1}$ существует в момент $t = 0$, но не существует при некотором $t \neq 0$. Опираясь на это требование, можно попытаться обосновать вид уравнения Гейзенберга (1.8), предположив, что динамика квантовых наблюдаемых $X(t)$ описывается линейным дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}X(t) = [F(t)](X(t)), \quad (1.9)$$

где $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — некоторое семейство линейных операторов, действующих в пространстве квантовых наблюдаемых. При этом из обратимости наблюдаемой $X(0)$ должна следовать обратимость наблюдаемых $X(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Как, в таком случае, должны выглядеть операторы $F(t)$? Теоремы 2.1 и 3.1 являются косвенным аргументом в пользу того, что операторы $F(t)$ должны выглядеть именно так, как в уравнении Гейзенберга (1.8).

1.6. Постановка задачи

Задача состоит в том, чтобы для заданной банаховой алгебры B найти в классе $\mathcal{L}(B, B)$ все непрерывные семейства операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, сохраняющие обратимость элементов из B (в нуле или в любой момент).

Ввиду предложения 1.1, эта задача эквивалентна следующему вопросу: какие непрерывные семейства операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ из класса $\mathcal{L}(B, B)$, кроме семейств вида (1.4), сохраняют обратимость элементов из B (в нуле или в любой момент)?

1.7. Краткая формулировка результатов и перспективы исследований

В данной статье решение задачи, поставленной в предыдущем разделе, найдено лишь для трех случаев.

В первом случае B — это алгебра $M_n(\mathbb{K})$ всех квадратных матриц заданного порядка $n \in \mathbb{N}$ с элементами из \mathbb{K} . Для этой алгебры показано (теорема 2.1), что все непрерывные семейства операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, сохраняющие обратимость элементов из B в нуле, обязательно должны иметь вид (1.4), где семейства $\{a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{b(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ тоже непрерывны.

Во втором из рассмотренных случаев B — это банахова алгебра $C([0; 1], \mathbb{K})$ всех \mathbb{K} -значных непрерывных функций на отрезке $[0; 1]$, наделенная равномерной нормой $\|x\|_\infty = \max_{\alpha \in [0; 1]} |x(\alpha)|$ (см. [2]). Эта алгебра коммутативна, и в ней обратимы все функции, не обращающиеся в ноль на $[0; 1]$. Для этого случая удалось исследовать лишь непрерывные семейства операторов, сохраняющие обратимость элементов из B в любой момент. Показано (теорема 3.1), что все такие семейства должны иметь вид $[F(t)](y) = a(t) \cdot y$, $y \in B$, где семейство $\{a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ элементов из B также непрерывно. Ввиду коммутативности алгебры $C([0; 1], \mathbb{K})$ это равносильно тому, что семейства $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ имеют вид (1.4).

К третьему случаю были отнесены те банаховы алгебры, в которых обратимы все ненулевые элементы. Например, такими алгебрами являются алгебра \mathbb{C} комплексных чисел и алгебра \mathbb{H} кватернионов (см., например, [11]). В этом случае обратимость элементов из B в любой момент сохраняют все непрерывные семейства операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ из класса $\mathcal{L}(B, B)$, а не только те, которые имеют вид (1.4) (теорема 4.1).

Операторы, соответствующие квантово-механическим наблюдаемым, обычно неограничены. Поэтому для строгого доказательства того, что вид (1.8) уравнений Гейзенберга является единственно правильным, необходимо расширить полученные результаты на случай неограниченных операторов. Помимо этого, видимо, нужно будет ответить на вопрос, как должны выглядеть операторы $F(t)$ в (1.9), чтобы из самосопряженности $X(0)$ следовала самосопряженность $X(t)$ для любого $t \in \mathbb{R}$. Кроме того, было бы интересно распространить результат теоремы 3.1 на семейства операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, сохраняющие обратимость в нуле.

2. Семейства операторов в пространстве матриц, сохраняющие их обратимость в нуле

Пусть n есть некоторое натуральное число, \mathbb{K} — поле вещественных либо комплексных чисел. Через $M_n(\mathbb{K})$ будет обозначаться банахова алгебра всех квадратных матриц порядка n с обычным матричным умножением и операторной нормой, задаваемой формулой $\|x\| = \sup_{\varkappa \in \mathbb{K}^n, \|\varkappa\|_2=1} \|x \cdot \varkappa\|_2$, где $\|\varkappa\|_2$ — это евклидова норма элемента $\varkappa \in \mathbb{K}^n$.

Т е о р е м а 2.1 Любое непрерывное семейство линейных операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, сохраняющее обратимость элементов из $M_n(\mathbb{K})$ в нуле, обязательно имеет вид (1.4), где $\{a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{b(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — некоторые непрерывные семейства матриц из $M_n(\mathbb{K})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. 1) Сначала будет доказано, что если семейство операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ сохраняет обратимость матриц в нуле, то оно сохраняет их обратимость в любой момент. Для этого достаточно показать, что для любого $s \in \mathbb{R}$ и любой обратимой матрицы x^s матрица $[L_F(0, s)](x^s)$ также обратима.

Так как семейство $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ сохраняет обратимость в нуле, то из обратимости матрицы $x^0 = [L_F(0, s)](x^s)$ следует обратимость матрицы $x^s = [L_F(s, 0)](x^0)$. Отсюда вытекает, что если $\det x^s$ равен нулю, то и $\det x^0 = \det[L_F(0, s)](x^s)$ также есть ноль. Величины $\det x^s$ и $\det[L_F(0, s)](x^s)$, как функции от матрицы x^s , являются однородными полиномами степени n от ее элементов x_{ij}^s , где $i, j = 1, \dots, n$. Если взять произвольные индексы $k, m \in \{1, \dots, n\}$ и поделить $\det[L_F(0, s)](x^s)$ с остатком на $\det x^s$ как полиномы от x_{km}^s , то получится равенство:

$$\det[L_F(0, s)](x^s) = Q_{km}(s, x^s) \cdot \det x^s + P_{km}(s, x^s). \quad (2.1)$$

При каждом $s \in \mathbb{R}$ здесь $Q_{km}(s, x^s)$ — однородная степени 0 рациональная функция от элементов матрицы x^s со знаменателем, не зависящим от x_{km}^s , а $P_{km}(s, x^s)$ — однородная степени n рациональная функция от элементов матрицы x^s , не зависящая от x_{km}^s . Пусть $M_{ij}(x^s)$ означает минор элемента x_{ij}^s при любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Определитель $\det x^s$ можно разложить по строке с номером k :

$$\det x^s = (-1)^{k+1} x_{k1}^s M_{k1}(x^s) + \dots + (-1)^{k+m} x_{km}^s M_{km}(x^s) + \dots + (-1)^{k+n} x_{kn}^s M_{kn}(x^s).$$

Отсюда видно, что при отличном от нуля миноре $M_{km}(x^s)$ можно так подобрать значение x_{km}^s , что $\det x^s$ обратится в ноль. При таком выборе, в силу вышесказанного, станет равным нулю $\det[L_F(0, s)](x^s)$, а также, согласно равенству (2.1), величина $P_{km}(s, x^s)$. Поэтому произведение $M_{km}(x^s) \cdot P_{km}(s, x^s)$ однородных рациональных функций от x^s есть тождественный ноль. Значит, $P_{km}(s, x^s) \equiv 0$, поскольку $M_{k1}(x^s)$ не равно нулю тождественно (это можно доказать по индукции). Теперь из (2.1) следует равенство $\det[L_F(0, s)](x^s) / \det x^s = Q_{km}(s, x^s)$.

Итак, получается, что при любых индексах $k, m \in \{1, \dots, n\}$ знаменатель отношения $\det[L_F(0, s)](x^s) / \det x^s$ не зависит от x_{km}^s . Следовательно, это отношение вообще не зависит от x^s . Таким образом, верно равенство $\det[L_F(0, s)](x^s) = Q(s) \cdot \det x^s$, в котором $Q(s) \in \mathbb{K}$ при каждом $s \in \mathbb{R}$. Поскольку оператор $L_F(0, s)$ является взаимнооднозначным (см. раздел 1.3.), то $Q(s)$ отлично от нуля. Поэтому если матрица x^s обратима, то матрица $[L_F(0, s)](x^s)$ также обратима.

2) Теперь будет показано, что любое семейство, сохраняющее обратимость элементов из $M_n(\mathbb{K})$ в любой момент, имеет вид (1.4). Для этого будет применен метод от противного. Пусть непрерывное семейство линейных операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ не представляется в виде (1.4) при каком-либо $s \in \mathbb{R}$. Нужно доказать, что тогда найдутся такая обратимая матрица x^s и такое $t \in \mathbb{R}$, что в момент t решение $x(t) = [L_F(t, s)](x^s)$ задачи Коши (1.3) будет необратимо.

Для любой матрицы $x^s \in M_n(\mathbb{K})$ элементы матрицы $[F(t)](x^s)$ будут обозначаться через $[F(t)](x^s)_{ij}$, где $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Если оператор $F(t)$ имеет вид (1.4), то

$$[F(t)](x^s)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t) x_{kj}^s + \sum_{l=1}^n x_{il}^s b_{lj}(t).$$

Следовательно, $F(t)$ можно задать формулой (1.4) тогда и только тогда, когда элементы $[F(t)](x^s)_{ij}$, как функции от матрицы x^s , являются линейными комбинациями элементов строки с номером i и столбца с номером j при всех $i, j \in \{1, \dots, n\}$ и любом $t \in \mathbb{R}$. Если это не так, то при некоторых $p, q \in \{1, \dots, n\}$ и $s \in \mathbb{R}$ в выражение для $[F(s)](x^s)_{pq}$ обязательно войдет линейный член, содержащий элемент x^s_{kl} с индексами $k \neq p$ и $l \neq q$. Без ограничения общности можно считать, что $p = q = 1$ и $k = l = 2$. Таким образом, будет верно равенство:

$$[F(s)](x^s)_{11} = C \cdot x^s_{22} + \theta_{22}(x^s), \quad (2.2)$$

где $C \neq 0$ — некоторая константа из \mathbb{K} , а $\theta_{22}(x^s)$ — линейный функционал на $M(\mathbb{K}, n)$, не зависящий от x^s_{22} . Тогда из уравнения (1.3) ввиду непрерывности $F(t)$ получим:

$$x(t) = [L_F(t, s)](x^s) = x^s + \Delta t \cdot \left([F(s)](x^s) + [\varphi \Delta t](x^s) \right), \quad (2.3)$$

где $\Delta t = t - s$ и нормы операторов $\varphi(\Delta t)$ стремятся к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$.

Пусть матрица x^s состоит из четырех блоков:

$$x^s = \begin{pmatrix} A_{2 \times 2} & 0_{2 \times (n-2)} \\ 0_{(n-2) \times 2} & E_{n-2} \end{pmatrix}, \quad \text{где } A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \alpha \Delta t & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Здесь $0_{2 \times (n-2)}$ и $0_{(n-2) \times 2}$ — нулевые матрицы соответствующих размеров, E_{n-2} — единичная матрица порядка $(n-2)$, α и β — некоторые числа из \mathbb{K} . Тогда, в силу формул (2.2), (2.3) и (2.4), верны равенства

$$x_{22}(t) = \beta + \Delta t \cdot [\psi_{22}(\Delta t)](\alpha, \beta);$$

$$x_{ii}(t) = 1 + \Delta t \cdot [\psi_{ii}(\Delta t)](\alpha, \beta) \quad \text{при } i = 3, \dots, n;$$

$$x_{ij}(t) = \Delta t \cdot [\psi_{ij}(\Delta t)](\alpha, \beta) \quad \text{при } i, j = 1, \dots, n, \quad i \neq j;$$

$$x_{11}(t) = \Delta t \cdot \left(\alpha + C \cdot \beta + C_1 + [\psi_{11}(\Delta t)](\alpha, \beta) \right);$$

где $C \neq 0$ и C_1 — некоторые константы из \mathbb{K} , а функции $[\psi_{ij}(\Delta t)](\alpha, \beta)$, линейно зависящие от α и β , стремятся к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$ равномерно по α и β из любого ограниченного множества в \mathbb{K} . Из последних формул получим, что

$$\det x(s + \Delta t) = \Delta t \cdot \left(\alpha + C \cdot \beta + C_1 + [\psi(\Delta t)](\beta) \right),$$

где функция $[\psi(\Delta t)](\beta)$ является аналитической относительно β и при $\Delta t \rightarrow 0$ стремится к нулю равномерно по β из любого ограниченного множества в \mathbb{K} .

Пусть $\alpha = -C_1 - |C_1| - 2$. Тогда $\alpha \neq 0$, и из предыдущего равенства вытекает:

$$\det x(s + \Delta t) = \Delta t \cdot \left(C \cdot \beta - |C_1| - 2 + [\psi(\Delta t)](\beta) \right). \quad (2.5)$$

Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то пусть S — окружность радиуса $1/|C|$ с центром в точке $(2 + |C_1|)/C$. Тогда будут иметь место следующие два свойства:

- а) для всех $\beta \in S$ выполняется равенство $|C \cdot \beta - |C_1| - 2| = 1$;
- б) для всех β , находящихся на S или внутри S , верно неравенство $|\beta| \geq 1/|C|$.

Число $\Delta t > 0$ можно выбрать настолько малым, чтобы величина $[\psi(\Delta t)](\beta)$ в правой части (2.5) по модулю не превосходила $1/2$ при всех $\beta \in S$. В таком случае из (2.5) в

силу теоремы Руше будет следовать, что внутри S найдется такое число β_0 , что при $\beta = \beta_0$ величина $\det x(s + \Delta t)$ обратится в ноль. При этом в $\beta_0 \neq 0$ по пункту б).

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ наличие такого числа $\beta_0 \neq 0$ вытекает, в силу выбора числа Δt , из противоположности знаков определителя $\det x(s + \Delta t)$ при $\beta = (2 + |C_1| \pm 1)/C$.

Итак, если взять в качестве x^s обратимую матрицу (2.4), где $\alpha = -C_1 - |C_1| - 2 \neq 0$ и $\beta = \beta_0 \neq 0$, то в момент $t = s + \Delta t$ получится необратимая матрица $x(t)$.

3) Из доказанного в пунктах 1) и 2) вытекает, что любое непрерывное семейство линейных операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$, сохраняющее обратимость элементов из $M_n(\mathbb{K})$ в нуле, должно иметь вид (1.4) для некоторых семейств матриц $\{a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{b(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$. Остается показать, что эти семейства матриц можно выбрать непрерывными.

Поскольку равенство (1.4) выполняется для семейств $a(t)$ и $b(t)$, то оно будет верным также для семейств $\tilde{a}(t) = a(t) - a_{11}(t) \cdot I$ и $\tilde{b}(t) = b(t) - a_{11}(t) \cdot I$, так как единичная матрица I коммутирует со всеми остальными матрицами. При этом для всех $t \in \mathbb{R}$ будет выполнено условие $\tilde{a}_{11}(t) = 0$. Теперь достаточно доказать, что из этого условия, непрерывности семейства $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и равенства

$$[F(t)](y) = \tilde{a}(t) \cdot y + y \cdot \tilde{b}(t), \quad y \in B, \quad (2.6)$$

следует непрерывность семейств $\{\tilde{a}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{\tilde{b}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$.

Из непрерывности семейства $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и равенства (2.6) следует, что элементы матрицы $[F(t)](y)$ при любых $i, j \in \{1, \dots, n\}$ непрерывны по t и имеют вид

$$[F(t)](y)_{ij} = \sum_{k=1}^n \tilde{a}_{ik}(t) y_{kj} + \sum_{l=1}^n y_{il} \tilde{b}_{lj}(t). \quad (2.7)$$

Пусть для произвольных индексов $p, q \in \{1, \dots, n\}$ матрица $y \in M_n(\mathbb{K})$ задана так, что все ее элементы равны нулю, кроме одного элемента $y_{pq} = 1$. Тогда при $i = p$ и $j = q$ из равенства (2.7) получится, что $[F(t)](y)_{pq} = \tilde{a}(t)_{pp} + \tilde{b}(t)_{qq}$. Так как $\tilde{a}(t)_{11} \equiv 0$, то отсюда следует непрерывность элементов $\tilde{b}(t)_{qq}$ при всех $q = 1, \dots, n$. Поэтому при всех $p = 1, \dots, n$ элементы $\tilde{a}(t)_{pp}$ также непрерывны. Если же взять $i = p$, но $j \neq q$, то из (2.7) вытекает, что $[F(t)](y)_{pj} = \tilde{b}_{qj}(t)$. Следовательно, элементы $\tilde{b}(t)_{qj}$ непрерывны при всех различных $q, j \in \{1, \dots, n\}$. Аналогично, при $i \neq p$ и $j = q$ из равенства (2.7) следует непрерывность элементов $\tilde{a}(t)_{ip}$ при всех различных $i, p \in \{1, \dots, n\}$.

Итак, все элементы матриц из семейств $\{\tilde{a}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{\tilde{b}(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ непрерывны, а значит и сами эти семейства непрерывны.

Доказательство завершено.

3. Семейства операторов в пространстве непрерывных функций на отрезке, сохраняющие их обратимость в любой момент

Теорема 3.1 Пусть B есть банахова алгебра $C([0, 1], \mathbb{K})$ всех функций, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ и принимающих значения в \mathbb{K} , наделенная равномерной нормой $\|x\|_\infty = \max_{\alpha \in [0, 1]} |x(\alpha)|$, с поточечным умножением. Тогда любое непрерывное семейство операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ из класса $\mathcal{L}(B, B)$, сохраняющее обратимость элементов из B в любой момент, обязательно имеет вид

$$[F(t)](y) = a(t) \cdot y, \quad y \in B, \quad (3.1)$$

где $\{a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ — некоторое непрерывное семейство функций из B .

Доказательство. В доказательстве будет применен метод от противного. Пусть при некотором $t = s \in \mathbb{R}$ оператор $F(t)$ нельзя записать в виде (3.1). Нужно показать, что тогда семейство операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ не может сохранять обратимость в каждой точке. Для этого достаточно найти такую обратимую функцию x^s из $C([0, 1], \mathbb{K})$, что при некотором $t \in \mathbb{R}$ решение $x(t)$ задачи Коши (1.3) будет необратимым, то есть будет обращаться в ноль хотя бы в одной точке $\alpha \in [0, 1]$.

Согласно тереме Рисса (см., например, [12–13]), любой непрерывный линейный функционал на $C([0, 1], \mathbb{R})$ можно записать через интеграл Стильтьеса по некоторой функции с ограниченным изменением (вариацией). В то же время, любая функция с ограниченным изменением является разностью двух неубывающих функций ([12]), каждая из которых порождает счетно-аддитивную меру Лебега-Стильтьеса (см. [12]). Таким образом, любой непрерывный линейный функционал на $C([0, 1], \mathbb{K})$ можно представить в виде интеграла по некоторой счетно-аддитивной (возможно, комплексной) борелевской мере. Отсюда следует, что существует такое семейство мер $\mu_{t,\alpha}(d\beta)$ (возможно, комплексных) на $[0, 1]$, где $t \in \mathbb{R}$, $\alpha \in [0, 1]$, что $[F(t)](y)(\alpha) = \int_0^1 y(\beta) \mu_{t,\alpha}(d\beta)$ при любом $y \in B$.

Возможность записать оператор $F(t)$ в виде (3.1) равносильна тому, что семейство мер $\mu_{t,\alpha}(d\beta)$ имеет следующий вид: $\mu_{t,\alpha}(d\beta) = [a(t)](\alpha) \cdot \delta(d\beta - \alpha)$, где $\delta(d\beta - \alpha)$ — это δ -мера на $[0, 1]$, сосредоточенная в точке α . В противном случае должны найтись число $s \in \mathbb{R}$, точка $\alpha_0 \in [0, 1]$ и подмножество $D \subset [0, 1]$, такие что D не содержит точку α_0 и $\mu_{s,\alpha_0}(D) \neq 0$. При этом можно считать, что подмножество D также является отрезком. Тогда, согласно (1.3), будет верно равенство:

$$[x(t)](\alpha_0) = [x^s(t)](\alpha_0) + \Delta t \cdot \left(\int_0^1 x^s(\beta) \mu_{s,\alpha_0}(d\beta) + [\varphi(\Delta t)](x^s) \right), \quad (3.2)$$

где $\Delta t = t - s$ и нормы линейных операторов $\varphi(\Delta t)$ стремятся к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$.

Для любого $\Delta t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и любого $\gamma \in \mathbb{K}$, такого что $\operatorname{Re}(\gamma) > 0$, можно построить непрерывную кусочно-линейную функцию x^s на отрезке $[0; 1]$ так, чтобы выполнялись следующие четыре условия:

- а) $x^s(\alpha_0) = 2|\Delta t|$;
- б) $x^s(\beta) = \gamma$ при $\beta \in D$;
- в) $\left| \int_{\tilde{D}} x^s(\beta) \mu_{s,\alpha_0}(d\beta) \right| \leq |\Delta t|$, где $\tilde{D} = [0, 1] \setminus (D \cup \{\alpha_0\})$;
- г) функция x^s обратима, т. е. не обращается в ноль на $[0, 1]$.

Пусть, кроме того, $\operatorname{sign}(\Delta t) = -\operatorname{sign}(\mu_{s,\alpha_0}(D))$. Тогда из (3.2) получим, что

$$[x(s + \Delta t)](\alpha_0) = |\Delta t| \cdot \left(2 - \gamma \cdot |\mu_{s,\alpha_0}(D)| + [\psi(\Delta t)](\gamma) \right), \quad (3.3)$$

где функция $[\psi(\Delta t)](\gamma)$ является аналитической относительно γ и при $\Delta t \rightarrow 0$ стремится к нулю равномерно по γ из любого ограниченного множества.

Если $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, то пусть S — окружность радиуса $1/|\mu_{s,\alpha_0}(D)|$ с центром в точке $2/|\mu_{s,\alpha_0}(D)|$. Тогда будут выполняться следующие условия:

- а) для всех $\gamma \in S$ имеет место равенство $|2 - \gamma \cdot |\mu_{s,\alpha_0}(D)|| = 1$;
- б) для всех γ , находящихся на S или внутри S , верны неравенства $\operatorname{Re}(\gamma) > 0$ и $|\gamma| \geq 1/|\mu_{s,\alpha_0}(D)|$.

Число Δt можно выбрать настолько малым по модулю, чтобы величина $|\psi(\Delta t)](\gamma)|$ в правой части (3.3) не превосходила $1/2$ при всех $\gamma \in S$. Поскольку внутри S функция $f(\gamma) = 2 - \gamma \cdot |\mu_{s,\alpha_0}(D)|$ имеет единственный корень, то согласно теореме Руше функция $\left(2 - \gamma |\mu_{s,\alpha_0}(D)| + [\psi(\Delta t)](\gamma) \right)$ также имеет внутри S один корень. А это означает, что

при некотором значении γ величина $[x(s + \Delta t)](\alpha_0)$ обращается в ноль, то есть функция $x(s + \Delta t)$ необратима.

В случае $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ наличие числа $\gamma \in \mathbb{R}$, для которого $[x(s + \Delta t)](\alpha_0) = 0$, следует из противоположности знаков величины $[x(s + \Delta t)](\alpha_0)$ при $\gamma = 1/|\mu_{s, \alpha_0}(D)|$ и при $\gamma = 3/|\mu_{s, \alpha_0}(D)|$.

Непрерывность семейства $\{a(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ в (3.1) следует из непрерывности семейства $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и равенства $a(t) = [F(t)](1)$, вытекающего из (3.1).

Доказательство завершено.

4. Семейства операторов, сохраняющие обратимость в нуле, в банаховых алгебрах с одним необратимым элементом

В данном параграфе рассматриваются семейства операторов в таких банаховых алгебрах, где единственным необратимым элементом является ноль. К алгебрам такого типа относятся, например, поле \mathbb{C} комплексных чисел, а также алгебра кватернионов \mathbb{H} с обычной евклидовой нормой.

Теорема 4.1 Пусть в банаховой алгебре B обратимы все элементы, кроме нулевого. Тогда любое непрерывное семейство линейных операторов $\{F(t)\}_{t \in \mathbb{R}}$ из класса $\mathcal{L}(B, B)$ сохраняет обратимость элементов из B в любой момент.

Доказательство. Поскольку все ненулевые элементы из B обратимы, то, с учетом определения 1.1, достаточно при всех $s \in \mathbb{R}$ доказать, что для любого ненулевого элемента $x^s \in B$ решение $x(t) = [L_F(t, s)](x^s)$ задачи Коши (1.3) отлично от нуля при каждом $t \in \mathbb{R}$.

Согласно сказанному в разделе 1.3., при всех $t, s \in \mathbb{R}$ оператор $L_F(t, s)$ имеет обратный оператор $R_{-F}(t, s)$. Поэтому $L_F(t, s)$ переводит в ноль только нулевые элементы. Следовательно, если x^s отлично от нуля, то $x(t) = [L_F(t, s)](x^s)$ также отлично от нуля. Доказательство завершено.

Благодарности. Работа выполнена в рамках проекта ЦФИ в 2019 году и при финансовой поддержке РФФИ (грант № 19-07-00782).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Э. Хилле, Р. Филлипс, *Функциональный анализ и полугруппы*, Издательство иностранной литературы, М., 1962, 830 с.
2. В. М. Тихомиров, “Банаховы алгебры”, *дополнение в книге: А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976, 513–528.
3. Х. Л. Массера, Х. Х. Шеффер, *Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства*, Мир, М., 1970, 456 с.
4. С. Г. Крейн, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1972, 544 с.
5. В. С. Dhage, “A functional integro-differential equation in Banach algebras”, *Functional differential equations*, **11**:3–4 (2004), 321–332.
6. В. П. Деревенский, “ЛОДУ с постоянными коэффициентами над банаховой алгеброй”, *Матем. заметки*, **84**:3 (2008), 365–380.

7. V. Dragan, T. Moroşan, A.-M. Stoica, “Linear differential equations with positive evolution on ordered banach spaces”, *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems*, Springer, New York, 2013, 39–120.
8. D. Aerts, B. Van Steirteghem, “Quantum axiomatics and a theorem of M. P. Solèr”, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **39**:3 (2000), 497–502.
9. V. Moretti, M. Oppio, “Quantum theory in real Hilbert space: how the complex Hilbert space structure emerges from Poincaré symmetry”, *Rev. Math. Phys.*, **29**:6 (2017), 85 с.
10. Л. Д. Ландау, Л. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Наука, М., 1989, 768 с.
11. Д. Х. Конвей, Д. А. Смит, *О кватернионах и октавах: об их геометрии, арифметике и симметриях*, МЦНМО, М., 2009, 184 с.
12. А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин, *Элементы теории функций и функционального анализа*, Наука, М., 1976, 543 с.
13. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев, *Краткий курс функционального анализа*, Высшая школа, М., 1982, 272 с.

Поступила 16.10.2019

MSC2010 34G10

On the invertibility of solutions of first order linear homogeneous differential equations in Banach algebras

© O. E. Galkin¹, S. Yu. Galkina²

Abstract. This work is devoted to the study of some properties of linear homogeneous differential equations of the first order in Banach algebras. It is found (for some types of Banach algebras), at what right-hand side of such an equation, from the invertibility of the initial condition it follows the invertibility of its solution at any given time. Associative Banach algebras over the field of real or complex numbers are considered. The right parts of the studied equations have the form $[F(t)](x(t))$, where $\{F(t)\}$ is a family of bounded operators on the algebra, continuous with respect to $t \in \mathbb{R}$. The problem is to find all continuous families of bounded operators on algebra, preserving the invertibility of elements from it, for a given Banach algebra. In the proposed article, this problem is solved for only three cases. In the first case, the algebra consists of all square matrices of a given order. For this algebra, it is shown that all continuous families of operators, preserving the invertibility of elements from the algebra at zero must be of the form $[F(t)](y) = a(t) \cdot y + y \cdot b(t)$, where the families $\{a(t)\}$ and $\{b(t)\}$ are also continuous. In the second case, the algebra consists of all continuous functions on the segment. For this case, it is shown that all families of operators, preserving the invertibility of elements from the algebra at any time must be of the form $[F(t)](y) = a(t) \cdot y$, where the family $\{a(t)\}$ is also continuous. The third case concerns those Banach algebras in which all nonzero elements are invertible. For example, the algebra of complex numbers and the algebra of quaternions have this property. In this case, any continuous families of bounded operators preserves the invertibility of the elements from the algebra at any time. The proposed study is in contact with the research of the foundations of quantum mechanics. The dynamics of quantum observables is described by the Heisenberg equation. The obtained results are an indirect argument in favor of the fact, that the known form of the Heisenberg equation is the only correct one.

Key Words: first-order linear homogeneous differential equations in Banach algebras, preserving the invertibility of solutions

REFERENCES

1. E. Hille, R. S. Phillips, *Functional analysis and semi-groups*, American Mathematical Society, Providence, 1957, 830 p.
2. V. M. Tikhomirov, "[Banach algebras]", *[addition to the book: Elements of function theory and functional analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1976, 513-528 (In Russ.).
3. J. L. Massera, J. J. Schaffer, *Linear differential equations and function spaces*, Academic Press, New York and London, 1966, 404 p.
4. S. G. Krein, "[Functional analysis]", Nauka Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 544 p.
5. B. C. Dhage, "A functional integro-differential equation in Banach algebras", *Functional differential equations*, **11**:3-4 (2004), 321-332.

¹**Oleg E. Galkin**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, National Research Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod (pr. Gagarina, 23, Nizhni Novgorod, 603950, Russia); Senior Researcher, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12 Bolshaja Pecherskaja St., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1634-7792>, olegegalkin@ya.ru.

²**Svetlana Y. Galkina**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12 Bolshaja Pecherskaja St., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2476-2275>, svetlana.u.galkina@mail.ru.

6. V. P. Derevenskii, “[Linear ordinary differential equations with constant coefficients over a Banach algebra]”, *Math. Notes*, **84**:3 (2008), 342–355.
7. V. Dragan, T. Morozan, A.-M. Stoica, “Linear differential equations with positive evolution on ordered banach spaces”, *Mathematical Methods in Robust Control of Linear Stochastic Systems*, Springer, New York, 2013, 39–120.
8. D. Aerts, B. Van Steirteghem, “Quantum axiomatics and a theorem of M. P. Solèr”, *Internat. J. Theoret. Phys.*, **39**:3 (2000), 497–502.
9. V. Moretti, M. Oppio, “Quantum theory in real Hilbert space: how the complex Hilbert space structure emerges from Poincaré symmetry”, *Rev. Math. Phys.*, **29**:6 (2017), 85 p.
10. L. D. Landau, L. M. Lifshits, “[*Quantum mechanics. Non-relativistic theory*]”, Nauka Publ., Moscow, 1989 (In Russ.), 768 p.
11. J. H. Conway, D. A. Smith, *On quaternions and octonions: their geometry, arithmetic, and symmetry*, A. K. Peters Ltd, Natick, MA, 2004, 184 p.
12. A. N. Kolmogorov, S. V. Fomin, “[*Elements of function theory and functional analysis*]”, Nauka Publ., Moscow, 1976 (In Russ.), 543 p.
13. L. A. Lyusternik, V. I. Sobolev, “[*Short course of functional analysis*]”, Visshaya shkola Publ., Moscow, 1982 (In Russ.), 272 p.

Submitted 16.10.2019

УДК 519.7

О классификации гомоклинических аттракторов трехмерных потоков

© А. О. Казаков¹, Е. Ю. Каратецкая², А. Д. Козлов³, К. А. Сафонов⁴

Аннотация. Для трехмерных динамических систем с непрерывным временем (потоков) построена классификация странных гомоклинических аттракторов, содержащих единственное седловое состояние равновесия. Структура и свойства таких аттракторов определяются тройкой собственных чисел состояния равновесия. Для классификации гомоклинических аттракторов применяется метод карт седел, суть которого состоит в построении для широкого класса трехмерных потоков (матрица линеаризации которых записывается в форме Фробениуса) расширенной бифуркационной диаграммы, на которой выделены области, отвечающие различным конфигурациям собственных чисел. В пространстве параметров, задающих линейную часть рассматриваемого класса трехмерных потоков, построены бифуркационные поверхности, ограничивающие область устойчивости состояния равновесия и 6 областей, отвечающих различным гомоклиническим аттракторам следующих типов: аттрактор Шильникова, 2 типа спиральных восьмерочный аттракторов, аттрактор лоренцевского типа, седловой аттрактор Шильникова и аттрактор Любимова-Закса-Ровеллы. Также в работе обсуждаются вопросы, связанные с псевдогиперболичностью гомоклинических аттракторов трехмерных потоков. Доказано, что псевдогиперболическими могут быть только лишь гомоклинические аттракторы двух типов: лоренцевские аттракторы, содержащие седловое состояние равновесия с двумерным устойчивым многообразием, седловая величина которого положительна; а также седловые аттракторы Шильникова, содержащие седловое состояние равновесия с двумерным неустойчивым многообразием.

Ключевые слова: странный аттрактор, гомоклиническая траектория, псевдогиперболичность, аттрактор Лоренца, спиральный хаос

1. Введение

В настоящей работе приводится классификация странных гомоклинических аттракторов трехмерных потоков – динамических систем с непрерывным временем. Напомним, что гомоклиническим называется странный аттрактор, содержащий седловое состояние равновесия, вместе с его неустойчивым многообразием.

К гомоклиническим аттракторам относятся многие известные странные аттракторы, например, аттрактор Лоренца, спиральный аттрактор, возникающий на основе петли сепаратрисы к седло-фокусному состоянию равновесия с одномерным неустойчивым

¹Казаков Алексей Олегович, ведущий научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0002-6553>, kazakovdz@yandex.ru

²Каратецкая Ефросиния Юрьевна, стажер-исследователь, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3932-9447>, eyukaratetskaya@gmail.com

³Козлов Александр Дмитриевич, младший научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1830-4769>, kozozloff@list.ru

⁴Сафонов Клим Андреевич, аспирант, институт информационных технологий, математики и механики, ННГУ им. Н.И. Лобачевского (603950, Россия, г. Н.Новгород, проспект Гагарина, 23); ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8623-4294>, safonov.klim@yandex.ru

многообразием [1] (такой, например, как в цепи Чуа [2]), аттрактор Шильникова [3], возникающий на основе петли сепаратрисы к седло-фокусу с двумерным неустойчивым многообразием и многие другие.

В основе классификации гомоклинических аттракторов лежат свойства состояния равновесия, входящего в аттрактор, определяемые его собственными числами. В зависимости от знаков действительных частей собственных чисел седловые состояния равновесия трехмерных потоков бывают только двух типов: $(2,1)$ – с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантным многообразием, и $(1,2)$ – с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. Если седловое состояние равновесия обладает парой комплексно сопряженных собственных чисел, то оно называется седло-фокусным. С топологической точки зрения седло-фокусное состояние равновесия локально не отличается от седлового (с действительными собственными числами). Однако, как показано в знаменитой работе Шильникова о счетном числе седловых предельных циклов в любой окрестности петли седло-фокуса [1], с точки зрения динамики седло-фокус принципиально отличается от седла. Другой важной характеристикой седловых состояний равновесия является сумма действительных частей собственных чисел, ближайших к мнимой оси, но лежащих от нее по разную сторону. Такая характеристика, называемая седловой величиной состояния равновесия, определяет сжимаются или растягиваются двумерные площади в окрестности седла. В зависимости от описанных характеристик странные гомоклинические аттракторы могут быть шести различных типов: аттрактор Шильникова – содержит седло-фокус $(1,2)$; восьмерочный спиральный аттрактор, содержит седло-фокус $(2,1)$ с шильниковской петлей седло-фокуса (когда седловая величина положительна); восьмерочный спиральный аттрактор с петлей седло-фокуса $(2,1)$, седловая величина которого отрицательная; аттрактор лоренцевского типа – содержит седло $(2,1)$ с положительной седловой величиной; аттрактор Любимова-Закса-Ровеллы – содержит седло $(2,1)$ с отрицательной седловой величиной; и седловой аттрактор Шильникова – содержит седловое состояние равновесия $(1,2)$.

Идея классификации гомоклинических аттракторов по типу состояния равновесия была предложена в [4]. В работе [5] эта идея была оформлена в виде метода карт седел и применена для поиска и классификации гомоклинических аттракторов, содержащих неподвижную точку $O(0,0,0)$ трехмерных отображений Эно вида $\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y, z)$. Суть метода карт седел заключается в построении в пространстве параметров A, B, C разбиения на области, отвечающие различным возможным наборам мультипликаторов (собственных чисел) неподвижной точки $O(0,0,0)$, определяющих различные типы гомоклинических аттракторов. Таким образом, тип гомоклинического аттрактора определяется только лишь значениями параметров A, B и C , а их реализация в классе рассматриваемых систем достигается за счет подходящего выбора нелинейной функции $g(y, z)$. В работе [6] метод карт седел был также успешно применен для поиска и классификации гомоклинических аттракторов меняющих ориентацию трехмерных отображениях Эно.

В настоящей работе мы применяем метод карт седел для классификации гомоклинических аттракторов, содержащих состояние равновесие $O(0,0,0)$ трехмерных потоков вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y + g_1(x, y, z), \\ \dot{y} = z + g_2(x, y, z), \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x, y, z), \end{cases} \quad (1.1)$$

где A, B и C – параметры системы, а $g_i, i = 1, 2, 3$ – нелинейные функции, удовлетво-

ряющие соотношениям

$$g_i(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial z}(0, 0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

В разделе 2 в пространстве параметров A, B и C , определяющих тип состояния равновесия O , построена расширенная бифуркационная диаграмма для систем вида (1.1), которая состоит из семи областей, в шести из которых могут возникать гомоклинические аттракторы.

Вторая часть работы (раздел 3) посвящена вопросам псевдогиперболичности гомоклинических аттракторов трехмерных потоков. Напомним, что к псевдогиперболическим относится широкий класс настоящих хаотических аттракторов, любая траектория которых обладает положительным показателем Ляпунова, и это свойство сохраняется при малых возмущениях (изменении параметров). Определение псевдогиперболичности было введено Тураевым и Шильниковым в [7]. В разделе 3 мы приводим это определение в виде эффективно проверяемых условий, а также описываем численный метод проверки псевдогиперболичности, предложенный нами ранее в работах [8], [9].

Согласно PQ-гипотезе (pseudohyperbolic or quasiattractor), сформулированной в работе [8], все странные аттракторы могут быть разделены на псевдогиперболические и квазиаттракторы. В отличие от псевдогиперболических аттракторов, хаотическая динамика квазиаттракторов не является устойчивой к малым возмущениям (изменению параметров). Такие аттракторы либо содержат устойчивые периодические траектории высоких периодов с малыми бассейнами притяжения, не уловимые при проведении экспериментов (в т.ч. численных), либо такие траектории появляются при сколь угодно малых возмущениях [10].

В настоящей работе мы показываем, что в трехмерных потоках псевдогиперболическими могут быть лишь аттракторы лоренцевского типа и седловые аттракторы Шильникова. Кроме того, с помощью численных методов мы демонстрируем псевдогиперболичность несимметричного аттрактора лоренцевского типа, а также подтверждаем тот хорошо известный факт [11], что восьмерочный спиральный аттрактора в системе Арнеодо-Калле-Трессе [12] является квазиаттрактором. Отметим, что существует целый ряд систем, демонстрирующих псевдогиперболические аттракторы лоренцевского типа. Однако какие-нибудь примеры псевдогиперболических седловых аттракторов Шильникова на данный момент нам не известны.

2. Метод карты седел и возможные типы гомоклинических аттракторов

Заметим, что матрица линеаризации системы (1.1) в состоянии равновесия $O(0, 0, 0)$ записывается в форме Фробениуса

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ A & B & C \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Важно отметить, что с помощью линейной замены к виду (2.1) можно свести довольно широкий класс трехмерных потоков. Для более точной формулировки этого утверждения воспользуемся следующим алгебраическим фактом. Напомним, что минимальным многочленом матрицы M называется многочлен $p(x) = x^m + p_{m-1}x^{m-1} \dots + p_1x + p_0$ наименьшей возможной степени, удовлетворяющий тождеству

$$p(M) = M^m + p_{m-1}M^{m-1} \dots + p_1M + p_0E = 0.$$

Из линейной алгебры известен следующий критерий приводимости матрицы к форме Фробениуса.

Предложение 2.1 (критерий Гантмахера, [13]) *Квадратная матрица M размера $n \times n$ приводится к форме Фробениуса*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_0 & A_1 & A_2 & \dots & A_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

тогда и только тогда, когда степень t минимального многочлена $p(x)$ матрицы M совпадает с размерностью n этой матрицы.

В частности, данному критерию удовлетворяют матрицы, собственные значения которых различных, так как в этом случае минимальный многочлен совпадает с характеристическим многочленом.

Несложно проверить, что характеристический полином матрицы вида (2.2) равен

$$\chi(\lambda) = \lambda^n - A_{n-1}\lambda^{n-1} - \dots - A_1\lambda - A_0.$$

В частности, для системы (1.1) характеристическое уравнение матрицы линеаризации состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ имеет вид:

$$\chi(\lambda) = \lambda^3 - C\lambda^2 - B\lambda - A. \quad (2.3)$$

Значительную роль при описании и классификации гомоклинических аттракторов играет тип состояния равновесия, принадлежащего аттрактору. В связи с этим классификация странных аттракторов, предлагаемая в настоящей работе, основана на типе состояния равновесия $O(0, 0, 0)$, который в свою очередь определяется корнями характеристического уравнения (2.3). При записи матрицы линеаризации в форме Фробениуса связь между параметрами системы и типом состояния равновесия получается наиболее простой, что позволяет эффективно применять метод карты седел и определять тип гомоклинического аттрактора.

Идея метода карты седел заключается в построении расширенной бифуркационной диаграммы в области параметров (A, B, C) для состояния равновесия $O(0, 0, 0)$. На бифуркационной диаграмме выделяются области, соответствующие различным наборам наборам корней характеристического уравнения (2.3), а именно, учитываются следующие условия:

- B1) Расположение собственных значений относительно мнимой оси: является ли точка O устойчивой или седловой типа (2,1) или (1,2) (первый индекс соответствует размерности устойчивого многообразия, а второй - неустойчивого).
- B2) Являются ли собственные значения вещественными или комплексными, тем самым различаются седла и седло-фокусы.
- B3) В случае седловой точки типа (2,1) важен также знак его седловой величины ν , равной сумме действительных частей устойчивого и неустойчивого собственных значений, ближайших к мнимой оси.

Далее мы найдем условия для параметров (A, B, C) , определяющие границы областей с различными наборами характеристических корней, и построим двумерные

расширенные бифуркационные диаграммы на плоскости (A, B) при фиксированном значении C . Отметим, что параметр C равен значению дивергенции векторного поля (1.1) в точке $O(0, 0, 0)$. Поэтому всюду далее мы будем полагать $C < 0$, что является необходимым условием для того, чтобы состояние равновесия $O(0, 0, 0)$ принадлежало аттрактору. Стоит отметить, что расширенная бифуркационная диаграмма не зависит от выбора нелинейных функций $g_i(x, y, z)$, поэтому полученные нами результаты являются универсальными для систем вида (1.1). Данную расширенную бифуркационную диаграммы мы будем называть *картой седел* и в следующем параграфе опишем принцип ее построения.

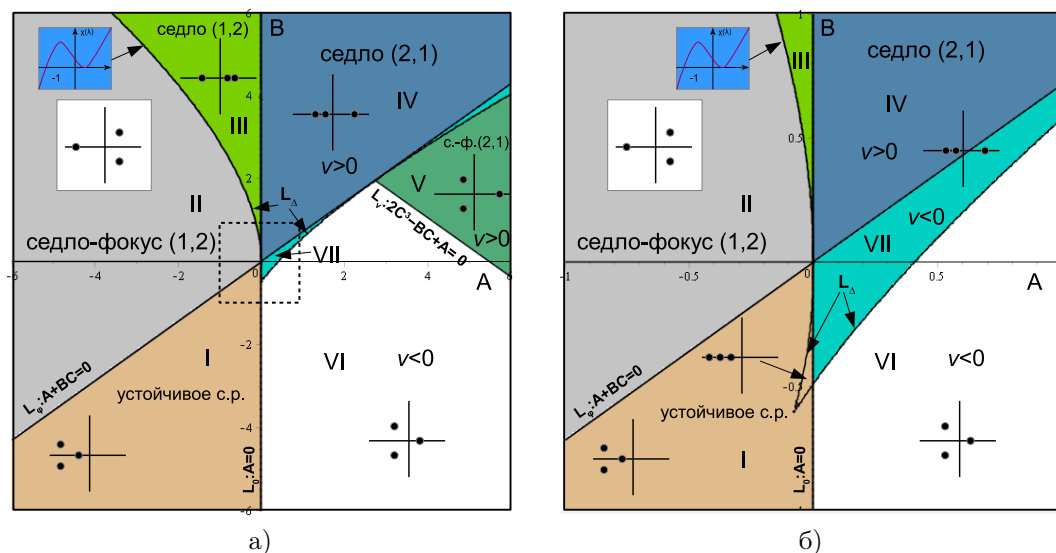


Рис. 2.1. Карты седел при $C = -1.4$: а) карта седла для состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ системы (1.1); б) увеличенный фрагмент карты седла в окрестности точки $(0, 0)$ на плоскости параметров (A, B)

2.1. Построение карты седел

Для начала найдем соотношения на коэффициенты (A, B, C) , соответствующие границам областей карты седел. Обозначим $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ корни характеристического уравнения (2.3). Нас интересуют следующие граничные условия:

- существование характеристического корня, лежащего на мнимой оси: $\operatorname{Re} \lambda_i = 0$;
- существование пары кратных корней: $\lambda_i = \lambda_j$;
- обнуление седловой величины: $\nu = 0$.

Соответствующие аналитические соотношения на коэффициенты (A, B, C) представлены в следующей лемме.

Л е м м а 2.1 Условия (2.4) разбивают пространство параметров (A, B, C) на несколько областей, границы которых определяются поверхностями:

- (a) $L_\Delta: -4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 = 0$ ($\lambda_1 = \lambda_2$),
 (b) $L_0: A = 0$ ($\lambda = 0$),
 (c) $L_\phi: A + BC = 0$ ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$ при $A < 0$, $\lambda_1 = -\lambda_2$ при $A > 0$)
 (d) $L_\nu: 2C^3 - BC + A = 0, A > -C^3$ ($\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega, \lambda_3 = \gamma$,
 где $\gamma > 0, \omega > 0$)

Доказательство. Первое уравнение представляет собой дискриминантную поверхность, которая разделяет пространство параметров на области, в которых характеристическое уравнение (2.3) имеет один действительный и два комплексных корня, и область, в которой все корни являются действительными. На границе между этими областями уравнение (2.3) имеет кратный корень, т.е. существует число λ_* , для которого выполняются равенства

$$\begin{aligned}\chi(\lambda_*) &= \lambda_*^3 - C\lambda_*^2 - B\lambda_* - A = 0 \\ \chi'(\lambda_*) &= 3\lambda_*^2 - 2C\lambda_* - B = 0.\end{aligned}$$

Вычислив из второго уравнение возможные значения λ_\pm

$$\lambda_\pm = \frac{C \pm \sqrt{C^2 + 3B}}{3}$$

и подставив в первое уравнение, получим поверхность 2.4а.

При условии 2.4b $A = 0$ одним из корней характеристического уравнения (2.3) является $\lambda = 0$. Учитывая, что система (1.1) при любых значения параметров имеет состояние равновесия $O(0, 0, 0)$, то этот момент соответствует так называемой бифуркации трансляции, при котором равновесие сохраняется, но меняет свой тип за счет перехода собственного значения через ноль.

Третья поверхность 2.4с отвечает условию $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Действительно, в этом случае последний корень характеристического полинома равен $\lambda_3 = C$, что эквивалентно равенству

$$\chi(C) = -BC - A = 0.$$

Отметим, что при $A < 0$ условие (с), соответствует наличию у состояния равновесия $O(0, 0, 0)$ пары чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega$. Последнее означает, что при переходе через эту кривую (с) происходит бифуркация Андронова-Хопфа (в общем случае из этого состояния равновесия рождается предельный цикл, устойчивый или седловой, это зависит от нелинейностей). При этом само состояние равновесия меняет свой тип с асимптотически устойчивого в обл. I на седло-фокус типа (1,2) в обл. II. Поверхность $A = -BC$ соответствует седловому состоянию равновесия $O(0, 0, 0)$ с набором собственных значений $\lambda_3, -\lambda_1, \lambda_1$, где $\lambda_3 < -\lambda_1 < 0 < \lambda_1$. В этом случае условие 2.4с задает поверхность обнуления седловой величины $\nu = 0$.

Последнее уравнение 2.4d является условием равенства седловой величины нулю для состояния равновесия типа седло-фокус. В этом случае состояние равновесия O имеет собственные значения $\lambda_{1,2} = C \pm i\omega$ и $\lambda_3 = -C$ (т.е. O – это седло-фокус типа (2,1)). Таким образом, должны выполняться условия

$$\chi(-C) = 2C^3 - BC + A = 0, A > C^3.$$

Последнее неравенство гарантирует то, что собственные значения λ_1, λ_2 являются комплексными.

Доказательство завершено.

На рис. 2.1 на плоскости (A, B) построены кривые, представленные в лемме 2.1, при фиксированном значении $C = -1.4$. Данными кривыми плоскость параметров разбивается на следующие 7 областей:

1. **Область I.** Данная область определяется неравенствами: $A < 0, CB + A > 0$. Здесь точка O является асимптотически устойчивым состоянием равновесия.
2. **Область II.** Данная область определяется неравенствами: $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 < 0, A < 0, CB + A < 0$. Здесь точка O является седло-фокусом $(1,2)$. Соответственно, ожидаемый здесь странный гомоклинический аттрактор – это аттрактор Шильникова, сценарий возникновения которого хорошо известен, см. [3].
3. **Область III.** Определяется неравенствами: $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 > 0, A < 0$. В данной области точка O является седлом с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым многообразиями. Существование странных гомоклинических аттракторов в данной области также возможно. Однако, поскольку у седла имеется неведущее неустойчивое собственное значение, то вдоль соответствующего направления траектории могут легко покинуть окрестность седла. Поэтому существование странного гомоклинического аттрактора, который можно назвать седловым аттрактором Шильникова, можно ожидать лишь для значений параметров вблизи границы между областями II и III.
4. **Область IV.** Данная область задается неравенствами: $0 < A < -CB$. В этой области точка O является седлом типа $(2,1)$ с седловой величиной $\nu > 0$. Возникновение гомоклинического аттрактора здесь связано с образованием гомоклинических восьмерок седла. Однако, если неустойчивые сепаратрисы седла входят в него, касаясь ведущего устойчивого направления с разных сторон (обычная гомоклиническая восьмерка), то аттрактора нет, поскольку каждая из гомоклинических петель является неустойчивой на соответствующем C^1 -гладком глобальном центральном инвариантном многообразии (в силу того, что $\nu > 0$). Существование аттрактора можно ожидать только в случае, когда у седла появляется гомоклиническая восьмерка-бабочка, то есть когда аттрактор является аттрактором лоренцевского типа. При этом такой аттрактор в случае системы (1.1) не является, вообще говоря, симметричным, так как сама система не обладает симметрией вида $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$, характерной для системы Лоренца.⁵
5. **Область V.** Определяется следующими неравенствами: $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 < 0, A > 0, 2C^3 - CB + A > 0$. В этой области точка O является седло-фокусом типа $(2,1)$ с $\nu > 0$. Соответственно, здесь можно ожидать существование *спирального аттрактора*, даже симметричного, поскольку система (1.1) может допускать центральную симметрию (в случае когда нелинейности являются нечетными функциями координат).
6. **Область VI.** Задается неравенствами: $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 < 0, A > 0, 2C^3 - CB + A < 0$. Здесь точка O является также седло-фокусом $(2,1)$, но

⁵Однако, интересно, что саму систему Лоренца можно привести к виду (1.1), но соответствующая линейная замена координат разрушает ее симметрию. Соответственно, область IV следует рассматривать как область (потенциального) существования *несимметричного аттрактора Лоренца*, содержащего состояние равновесия $O(0, 0, 0)$.

уже с $\nu < 0$. Как показано в [14], здесь из петли сепаратрисы седло-фокуса рождается устойчивая периодическая орбита. Тем не менее в этой области также могут возникать странные гомоклинические аттракторы, сложная хаотическая динамика которых, по всей видимости, образуется за счет существования отделенного от петли седло-фокуса нетривиального гиперболического множества (счетного числа седловых периодических орбит), сохраняющегося в аттракторе при переходе от $\nu > 0$ к $\nu < 0$.

7. **Область VII.** Данная область задается неравенствами: $-4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2 > 0$, $A > 0$, $A + CB > 0$. В этой области точка O является седлом типа $(2,1)$ с $\nu < 0$. Здесь можно ожидать, например, появление гомоклинических аттракторов Любимова-Закса-Ровеллы [15], [16], то есть гомоклинических аттракторов похожих на аттрактор Лоренца, но содержащих седловое состояние равновесия с отрицательной седловой величиной.

Дальше мы покажем, что данное разбиение на области качественно не меняется и при изменении параметра $C < 0$, то есть справедлив следующий результат.

Теорема 2.1 *Для системы дифференциальных уравнений вида (1.1) расширенная бифуркационная диаграмма (карта седел) состояния равновесия $O(0,0,0)$ на плоскости параметров (A,B) при любом фиксированном $C < 0$ состоит из 7 областей, соответствующих различным наборам собственных значений точки O , выделенных на основе условий $B1)$ – $B3)$.*

Доказательство. На рис. 2.1 показано, что при $C = -1.4$ карта седел состоит из 7 областей. Докажем, что данное разбиение сохраняется при изменении параметра $C < 0$. Основная идея заключается в том, что в системе (1.1) заменой координат и времени коэффициент C можно сделать равным -1 .

Действительно, проведем следующую замену

$$x_{new} = |C|^2 \cdot x, \quad y_{new} = |C| \cdot y, \quad z_{new} = z, \quad \tau = |C| \cdot t.$$

В новых координатах, полагая $C < 0$, система (1.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_{new} = y_{new} + |C| \cdot g_1(x, y, z), \\ \dot{y}_{new} = z_{new} + g_2(x, y, z), \\ \dot{z}_{new} = A \cdot |C|^{-3} x_{new} + B \cdot |C|^{-2} y_{new} - z_{new} + |C|^{-1} \cdot g_3(x, y, z), \end{cases}$$

Несложно заметить, что при данной замене координат тип состояния равновесия $O(0,0,0)$ не меняется и преобразование вида

$$\tilde{A} = A \cdot |C|^{-3}, \quad \tilde{B} = B \cdot |C|^{-2}$$

устанавливает взаимно-однозначное соответствие между расширенной бифуркационной диаграммой на плоскости (A,B) для произвольного значения C и бифуркационной диаграммой на плоскости (\tilde{A}, \tilde{B}) при $C = -1$. Таким образом, показана эквивалентность карт седел для различных значений параметра $C < 0$, что и завершает доказательство теоремы 2.1.

Доказательство завершено.

3. О методах проверки псевдогиперболичности гомоклинических аттракторов трехмерных потоков

В данном разделе мы дадим определение псевдогиперболического аттрактора, а также покажем, что в классе систем вида (1.1) псевдогиперболические гомоклинические аттракторы, содержащие точку O , могут существовать только в областях IV и V расширенной бифуркационной диаграммы, изображенной на рис. 2.1 Гомоклинические аттракторы в областях II, III, VI и VII относятся к классу квазиаттракторов.

Определение псевдогиперболического аттракторов было дано в работе [7]. Далее приведем это определение в виде эффективно проверяемых условий, см. также [8], [9].

О п р е д е л е н и е 3.1 *Аттрактор A n -мерного C^r гладкого потока F , $r \geq 1$, называется псевдогиперболическим если для него выполняются следующие условия.*

- 1) *Для каждой точки x аттрактора A существует разложение касательного пространства T_x на прямую сумму двух линейных подпространств, $T_x = E^{cu}(x) \oplus E^{ss}(x)$ ($\dim E^{cu} = k$, $\dim E^{ss} = n - k$), инвариантных относительно дифференциала DF потока:*

$$DF_t E^{cu}(x) = E^{cu}(F_t(x)), \quad DF_t E^{ss}(x) = E^{ss}(F_t(x)),$$

для любого $t \geq 0$ и любой точки $x \in A$.

- 2) *Подпространства $E^{cu}(x)$ и $E^{ss}(x)$ зависят непрерывно от точки $x \in A$.*
- 3) *Разложение на подпространства E^{cu} и E^{ss} является доминантным, т.е., существуют такие константы $C > 0$ и $\beta > 0$ что*

$$\|DF_t(x)|_{E^{ss}}\| \cdot \|(DF_t(x)|_{E^{cu}})^{-1}\| \leq C e^{-\beta t}$$

для любого $t \geq 0$ и любого $x \in A$. (Это означает, что любое возможное сжатие в $E^{cu}(x)$ слабее любого сжатия в $E^{ss}(x)$, а любое возможное растяжение в E^{cu} сильнее любого растяжения в E^{ss}).

- 4) *Дифференциал потока DF в ограничении на E^{cu} экспоненциально растягивает k -мерные объемы, т.е., существуют константы $C > 0$ и $\sigma > 0$, такие что*

$$\det(DF_t(x)|_{E^{cu}}) \geq C e^{\sigma t}$$

для любого $t \geq 0$ и любой точки $x \in A$.

Условия 1, 3 и 4 данного определения проверяются с помощью расчета спектра показателей Ляпунова $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_n$ аттрактора. При этом условия 1 и 3 означают, что $\Lambda_k > \Lambda_{k+1}$, условие растяжение объемов 4 равносильно соотношению $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_k > 0$. Для проверки условия 2 требуется расчет ляпуновских векторов.

Для любого хаотического аттрактора трехмерного потока выполняются следующие условия на показатели Ляпунова:

- $\Lambda_1 > 0$ – аттрактор является хаотическим;
- $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0$ – сжимаются трехмерные объемы.

Таким образом, условия 1 и 3 выполняются автоматически.

В трехмерных потоковых системах для псевдогиперболических аттракторов удобно полагать, что E^{ss} отвечает подпространству экспоненциально сильного сжатия. Тогда подпространство E^{ss} является одномерным ($\dim E^{ss} = 1$), а подпространство растяжения объемов E^{cu} – двумерным ($\dim E^{cu} = 2$).

Из условия 2 непрерывности разложения на подпространства E^{ss} и E^{cu} следует, что в окрестности седлового состояния равновесия O двумерные площади должны растягиваться, т.е. $\Lambda_1(O) + \Lambda_2(O) > 0$. Это означает, что либо седловая величина состояния равновесия должна быть положительной, либо у состояния равновесия должны быть два корня с положительными действительными частями. Таким образом, псевдогиперболические аттракторы не могут возникать в областях I, V, VI, VII. Спиральные аттракторы Шильникова трехмерных потоков (когда у состояния равновесия O имеется пара комплексно сопряженных собственных чисел с положительной действительной частью) также не могут быть псевдогиперболическими, так как вблизи петли седло-фокуса в этом случае неизбежно возникают устойчивые периодические траектории [11].

Т е о р е м а 3.1 Пусть трехмерный поток вида (1.1) имеет странный псевдогиперболический аттрактор, содержащий состояние равновесия O при некотором $C < 0$. Тогда параметры A и B должны принадлежать только одной из областей III или IV.

Проверка условий 2 непрерывности подпространств E^{ss} и E^{cu} выполняется с помощью расчета ляпуновских векторов, отвечающих сильному сжатию и, соответственно, растяжению объемов [8], см. также [9], [17]. Для непрерывности E^{ss} подпространства необходимо, чтобы угол $d\varphi$ между любыми парами векторов в E^{ss} был малым для любых близких точек x и y , лежащих на аттракторе (теоретически, $d\varphi \rightarrow 0$ при $x \rightarrow y$). Вместо проверки непрерывности E^{cu} удобно проверять непрерывность вектора v^{cu} , ортогонального к E^{cu} , используя тот же подход, что для проверки непрерывности E^{ss} [8]. Далее подробнее опишем эти процедуры.

Работа метода проверки непрерывности E^{ss} стоит из двух этапов. Первый этап стандартный: производится расчет набора показателей Ляпунова $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$ для проверки условий 1, 3 и 4 определения псевдогиперболическости. В процессе расчета набора показателей Ляпунова мы сохраняем набор точек $\{x_n\}$, где $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, \dots, k$, вдоль траектории аттрактора. На втором этапе мы рассчитываем максимальный показатель Ляпунова для системы в обратном времени, двигаясь вдоль траектории $\{x_n\}$, полученной на первом этапе. Отметим, что использование набора точек $\{x_n\}$ является необходимым условием работы алгоритма, так как очевидно, что если мы возьмем любую точку на аттракторе и начнем итерировать, то ее обратные итерации рано или поздно покинут его окрестность, и мы можем потерять информацию об аттракторе.

Заметим, что максимальный показатель Ляпунова для обратных итераций исходной системы совпадает с минимальным показателем Ляпунова Λ_3 , взятым со знаком минус. В свою очередь минимальный показатель Ляпунова Λ_3 отвечает за сильное сжатие на аттракторе. На втором этапе работы алгоритма, помимо расчета Λ_3 , мы находим и запоминаем направление векторов $E^{ss}(x_n)$, отвечающих этому сжатию.

По окончании работы алгоритма строится график на плоскости $(dx, d\varphi)$, где dx – расстояние между любыми двумя точками x_i и x_j в наборе $\{x_n\}$, а $d\varphi$ – угол между соответствующими этим точкам векторами $E^{ss}(x_i)$ и $E^{ss}(x_j)$. Если исследуемый аттрактор является псевдогиперболическим, то поле $E^{ss}(x_n)$ является непрерывным, а огибающая точек на соответствующем графике касается вертикальной оси $d\varphi$ только в начале координат. Таким образом, если построенный график удовлетворяет такому

свойству, мы делаем вывод, что сильно сжимающее подпространство E^{ss} непрерывно зависит от точки, а исследуемый аттрактор, с большой вероятностью, является псевдогиперболическим. С другой стороны, если огибающая набора точек на построенной диаграмме пересекает ось $d\varphi$ в нескольких точках или же между этой огибающей и осью $d\varphi$ нет видимого промежутка, исследуемый аттрактор определенно является квазиаттрактором. Для проверки непрерывности вектора v^{cu} применяется аналогичная процедура, только при этом расчет траектории на аттракторе осуществляется только в прямом времени, а ляпуновский вектор, отвечающий максимальному показателю Ляпунова вычисляется для транспонированной матрицы в вариациях в обратном времени, см. [8]. Также в этой работе отмечено, что непрерывность E^{ss} влечет за собой непрерывность E^{cu} , поэтому далее мы будем проверять лишь непрерывность подпространства E^{ss} .

Далее продемонстрируем работу метода проверки непрерывности E^{ss} на примере восьмерочного спирального квазиаттрактора и несимметричного аттрактора Лоренца.

3.1. Восьмерочный спиральный аттрактор в системе Арнеодо-Калле-Трессе

В качестве системы, демонстрирующей спиральный аттрактор, содержащей седло-фокусное состояние равновесия типа (2,1), существование которого возможно в области V карты седел, рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = Ax + By - 0.4z - 0.5x^3 \end{cases} \quad (3.1)$$

Наличие странных аттракторов в рассматриваемой системе было установлено в работе [12]. В работе Арнеодо-Калле-Трессе [18] было показано, что хаотическая динамика в рассматриваемой системе связана с возникновением шильниковской петли седло-фокуса. По всей видимости именно эти работы обратили внимание ученых на Западе на открытие Шильниковым спирального хаоса [1].

На рисунке 3.1a изображен спиральный аттрактор системы (3.1) при $(A, B) = (0.612, -1)$. При выбранных значениях параметров численно установлено, что седло-фокус O вместе с петлей сепаратрисы принадлежит аттрактору. А значит рассматриваемому аттрактору также принадлежит нетривиальное гиперболическое множество, существующее в любой окрестности петли седло-фокуса. Согласно работе [11], в любой окрестности петли седло-фокуса существуют устойчивые периодические орбиты, а значит рассматриваемый аттрактор относится к классу квазиаттракторов и не может быть псевдогиперболическим, что хорошо согласуется с результатами проверки рассматриваемого аттрактора на непрерывность подпространства E^{ss} . Соответствующий график изображен на рис. 3.1b. Огибающая точек на этом графике практически не отделена от вертикальной оси $dx = 0$, что означает отсутствие непрерывности поля сильно устойчивых направлений E^{ss} .

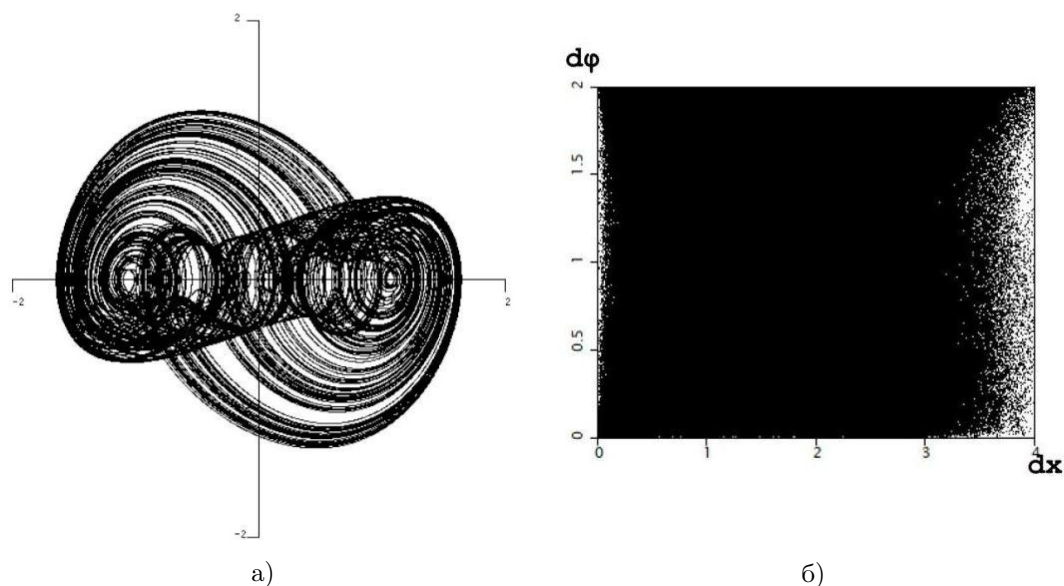


Рис. 3.1. а) Спиральный аттрактор системы (3.1) при значениях параметров $A = 0.612, B = -1, C = -0.4$; б) результаты проверки непрерывности подпространства E^{ss} .

3.2. Система с несимметричным аттрактором Лоренца

Заметим, что система вида (2.1) не обладает характерной лоренцевской симметрией $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$. Поэтому, в общем случае, гомоклинические аттракторы, содержащие седловую точку O , при параметрах из области IV (рис. 1.1), относятся к классу несимметричных аттракторов лоренцевского типа [19].

С помощью перебора нам не удалось подобрать функции g_1, g_2, g_3 , при которых в системе вида (2.1) существует несимметричный аттрактор Лоренца. Для построения соответствующий системы мы воспользовались теоремой 2. и с помощью линейных замен свели классическую систему Шимицу-Мориока к виду (2.1). После чего, в полученной системе, отбросили некоторые члены, разрушив симметрию возникновения петель. В результате преобразований получается система

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (0.2xy + 0.3xz + 0.5y^2 + 1.2yz + 0.7z^2) \\ \dot{y} = z + (-0.1x^2 - 0.6xy - 0.7xz + 0.3y^2 + 0.6yz + 0.4z^2) \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + (0.1x^2 + 0.5xy + 0.6xz - 0.3y^2 - 0.7yz - 0.4z^2). \end{cases} \quad (3.2)$$

Подробнее с результатами исследования полученной системы можно ознакомиться по работе [17]. На рисунке 3.2а изображен портрет аттрактора при параметрах $(A, B, C) = (0.42, 0.58, -1.4)$. Собственные числа состояния равновесия O при этих параметрах: $\lambda_1 = 0.57, \lambda_2 = -0.32, \lambda_3 = -1.64$, то есть седловая величина положительная ($\nu = 0.25 > 0$). Таким образом, все необходимые условия псевдогиперболичности аттрактора выполняются. Для проверки условия непрерывности подпространства E^{ss} воспользуемся описанным выше методом. Соответствующий график изображен на рис. 3.2б. Огибающая точек на представленном графике касается вертикальной оси $dx = 0$ только лишь в точке $(0, 0)$, что говорит о непрерывности подпространства сжатия направлений E^{ss} , а значит о псевдогиперболичности обнаруженного аттрактора.

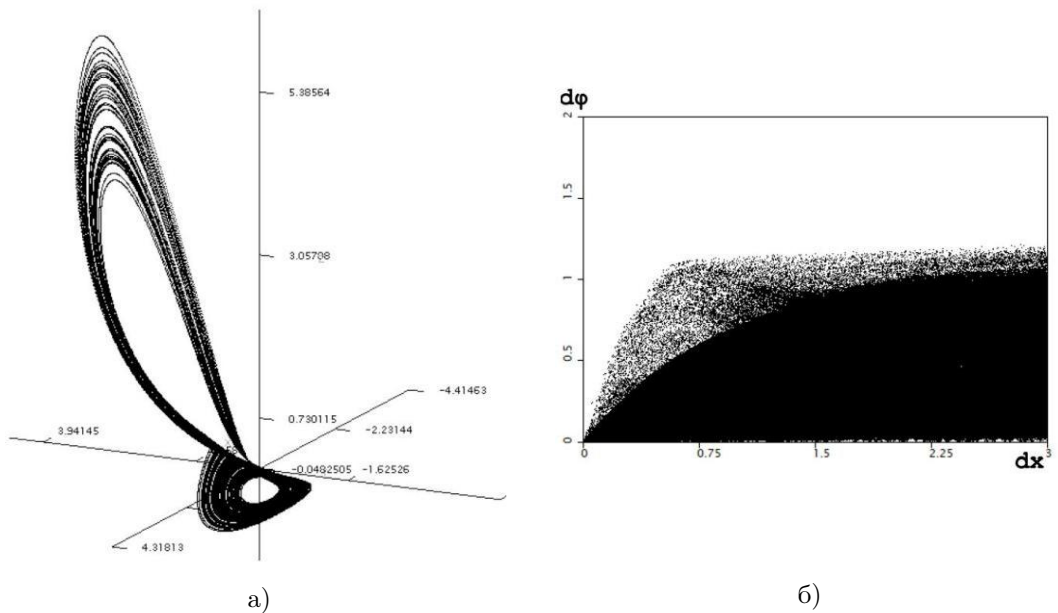


Рис. 3.2. а) Несимметричный аттрактор Лоренца системы (3.2) при значениях параметров $A = 0.42, B = 0.58, C = -1.4$; б) результаты проверки непрерывности подпространства E^{ss} .

4. Заключение

В настоящей работе предложена классификация странных гомоклинических аттракторов по типу седлового состояния равновесия, принадлежащего аттрактору. Показано, что в общем случае, таких аттракторов может быть шесть типов: аттрактор Шильникова, восьмерочный спиральный аттрактор, восьмерочный спиральный аттрактор с отрицательной седловой величиной, седловой аттрактор Шильникова, аттрактор лоренцевского типа, аттрактор Любимова-Закса-Ровеллы. Показано, что к классу настоящих хаотических (псевдогиперболических) аттракторов может относиться только лишь аттрактор Лоренца. Остальные аттракторы обязательно являются квази-аттракторами по Афраймовичу-Шильникову.

Аналогичный подход может быть применен для построения классификации гомоклинических аттракторов четырехмерных потоков. Так как в четырехмерных потоках седловые и седло-фокусные состояния равновесия могут быть трех типов: (3,1), (2,2) и (1,3), здесь будет гораздо больше возможных типов гомоклинических аттракторов. Большое разнообразие возможных гомоклинических аттракторов четырехмерных потоков связано еще с тем, что здесь проявляется еще одна важная характеристика аттрактора – т.н. вторая седловая величина, отвечающая за растяжение трехмерных объемов в окрестности седлового состояния равновесия. Среди новых гомоклинических аттракторов здесь важно отметить возможность возникновения дикого спирального аттрактора Тураева-Шильникова [7], содержащего седло-фокус (3,1) и дикое гиперболическое множество [20] с неустраиваемыми гомоклиническими касаниями.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ 17-11-01041. Результаты численных экспериментов, представленные в разделе 3, выполнены в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2019 году.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.П. Шильников, “Об одном случае существования счетного множества периодических движений”, *ДАН СССР*, **160**:3 (1965), 558–561.
2. L.O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, “The double scroll family”, *Circuits and Systems, IEEE Transactions on.*, **33**(11) (1986), 1072–1118.
3. Л.П. Шильников, *Теория бифуркаций и турбулентность*, Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб./Е. А. Леонтович (отв. ред.) и др., Горький: ГГУ, 1986.
4. Л.П. Шильников, А.Л. Шильников, Д.В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике*, **2**, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2009.
5. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **337** (2016), 43–57.
6. А.Д. Козлов, “Примеры странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **19**:2 (2017), 62–75.
7. Д.В. Тураев, Л.П. Шильников, “Пример дикого странного аттрактора”, *Матем. сб.*, **189** (1998), 137–160.
8. S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, D. Turaev, “Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system”, *arXiv preprint arXiv:1809.07250*, 2018.
9. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, A.D. Kozlov, “Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I Pseudohyperbolic Attractors”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **28**:11 (2018), 291–314.
10. V.S. Afraimovich, L.P. Shilnikov, *Strange attractors and quasiattractors.*, Nonlinear Dynamics and Turbulence, eds G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph, Boston, Pitmen, 1983.
11. И.М. Овсянников, Л.П. Шильников, “О системах с гомоклинической кривой седло-фокуса”, *Матем. сб.*, **130**(172):4(8) (1986), 552–570.
12. P. Coullet, C. Tresser, A. Arneodo, “Transition to stochasticity for a class of forced oscillators”, *Physics letters A.*, **72**:4–5 (1979), 268–270.
13. Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, Издательство "Наука", Москва, 1966.
14. Л.П. Шильников, “Некоторые случаи рождения периодических движений в n -мерном пространстве”, *Докл. АН СССР*, **143**:2 (1962), 289–292.
15. D.V. Lyubimov, M.A. Zaks, “Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **9**:1–2 (1983), 52–64.

16. A. Rovella, "The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor", *Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, **24**:2 (1993), 233-259.
17. А.О. Казаков, А.Д. Козлов, "Несимметричный аттрактор Лоренца как пример нового псевдогиперболического аттрактора в трехмерных системах", *Журнал СВМО*, **20**:2 (2018), 187-198.
18. P. Coullet, C. Tresser, A. Arneodo, "Possible new strange attractors with spiral structure", *Communications in Mathematical Physics*, **79**:4 (1981), 573-579.
19. A.L. Shilnikov, L.P. Shilnikov, "On the nonsymmetrical Lorenz model", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **1**:4 (1991), 773-776.
20. S.E. Newhouse, "The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms", *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, **50** (1979), 101-151.

Поступила 12.10.2019

MSC2010 34C23, 34D45, 65P20

On the classification of homoclinic attractors of three-dimensional flows

© A. O. Kazakov¹, E. Yu. Karatetskaia², A. D. Kozlov³, K. A. Safonov⁴

Abstract. For three-dimensional dynamical systems with continuous time (flows), a classification of strange homoclinic attractors containing an unique saddle equilibrium state is constructed. The structure and properties of such attractors are determined by the triple of eigenvalues of the equilibrium state. The method of a saddle charts is used for the classification of homoclinic attractors. The essence of this method is in the construction of an extended bifurcation diagram for a wide class of three-dimensional flows (whose linearization matrix is written in the Frobenius form). Regions corresponding to different configurations of eigenvalues are marked in this extended bifurcation diagram. In the space of parameters defining the linear part of the considered class of three-dimensional flows bifurcation surfaces bounding 7 regions are constructed. One region corresponds to the stability of the equilibrium states while other 6 regions correspond to various homoclinic attractors of the following types: Shilnikov attractor, 2 types of spiral figure-eight attractors, Lorenz-like attractor, saddle Shilnikov attractor and attractor of Lyubimov-Zaks-Rovella. The paper also discusses questions related to the pseudohyperbolicity of homoclinic attractors of three-dimensional flows. It is proved that only homoclinic attractors of two types can be pseudohyperbolic: Lorenz-like attractors containing a saddle equilibrium with a two-dimensional stable manifold whose saddle value is positive and saddle Shilnikov attractors containing a saddle equilibrium state with a two-dimensional unstable manifold.

Key Words: strange attractor, homoclinic trajectory, pseudohyperbolicity, Lorenz attractor, spiral chaos

¹**Kazakov Alexey Olegovich**, leading researcher, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhni Novgorod 603155, Russia); PhD, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0002-6553>, kazakovdz@yandex.ru

²**Karatetskaia Efrosiniia Yuryevna**, intern researcher, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhni Novgorod 603155, Russia); PhD, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3932-9447>, eyukaratetskaya@gmail.com

³**Kozlov Alexander Dmitrievich**, junior researcher, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhni Novgorod 603155, Russia); ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1830-4769>, kozzzloff@list.ru

⁴**Safonov Klim Andreevich**, PhD student, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (603950, Russia, N.Novgorod, Gagarin Avenue, 23); ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8623-4294>, safonov.klim@yandex.ru

REFERENCES

1. L.O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, "The double scroll family", *Circuits and Systems, IEEE Transactions on.*, **33**(11) (1986), 1072-1118.
2. L.P. Shilnikov, "On a case of existence of a countable set of periodic motions", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **160**:3 (1965), 558-561.
3. L.P. Shilnikov, *Teoriya bifurkatsiy i turbulentnost' [The theory of bifurcations and turbulence]*, Metody kachestvennoy teorii differentsial'nykh uravneniy: Mezhdvuz. sb./E.A. Leontovich (otv. red.) i dr. [Methods of qualitative theory of differential equations], Gorkiy: GGU, 1986.
4. L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics*, **2**, World Scientific Publishing Co Pte Ltd, Singapore, Singapore, 2001.
5. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, "Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Henon maps", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **337** (2016), 43-57.
6. A.S. Gonchenko, A.D. Kozlov, "On scenarios of chaos appearance in three-dimensional nonorientable maps", *J. SVMO*, **18** (2016), 4.
7. A.D. Kozlov, "Examples of strange attractors in three-dimensional nonoriented maps", *J. SVMO*, **19**:2 (2017), 62-75.
8. D.V. Turaev, L.P. Shilnikov, "An example of a wild strange attractor", *Sb. Math.*, **189** (1998), 291314.
9. S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, D. Turaev, "Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system", *arXiv preprint arXiv:1809.07250*, 2018.
10. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, A.D. Kozlov, "Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I Pseudohyperbolic Attractors", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **28**:11 (2018), 291-314.
11. V.S. Aframovich, L.P. Shilnikov, *Strange attractors and quasiattractors.*, Nonlinear Dynamics and Turbulence, eds G.I.Barenblatt, G.Iooss, D.D.Joseph, Boston, Pitmen, 1983.
12. I.M. Ovsyannikov, L.P. Shilnikov, "On systems with homoclinic curves of saddle-focus type", *Mat. Sb.*, **130**:4 (1986), 552-570.
13. P. Coullet, C. Tresser, A. Arneodo, "Transition to stochasticity for a class of forced oscillators", *Physics letters A.*, **72**:4-5 (1979), 268-270.
14. F.R. Gantmacher, *The theory of matrices*, Chelsea Pub. Co., New York, 1959.
15. L.P. Shilnikov, "Some instances of generation of periodic motions in n-space", *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, **143**:2 (1962), 289-292.
16. D.V. Lyubimov, M.A. Zaks, "Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **9**:1-2 (1983), 52-64.

17. A. Rovella, “The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor”, *Boletim da Sociedade Brasileira de Matematica-Bulletin/Brazilian Mathematical Society*, **24:2** (1993), 233-259.
18. A.O. Kazakov, A.D. Kozlov, “The asymmetric Lorenz attractor as an example of a new pseudohyperbolic attractor of three-dimensional systems”, *Zhurnal SVMO*, **20:2** (2018), 187–198.
19. P. Coullet, C. Tresser, A. Arneodo, “Possible new strange attractors with spiral structure”, *Communications in Mathematical Physics*, **79:4** (1981), 573-579.
20. A.L. Shilnikov, L.P. Shilnikov, “On the nonsymmetrical Lorenz model”, *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **1:4** (1991), 773-776.
21. S.E. Newhouse, “The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms”, *Publ. Math. Inst. Hautes Etudes Sci.*, **50** (1979), 101-151.

Submitted 12.10.2019

УДК 517.9

Энергетическая функция для Ω -устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях

© А. Е. Колобянина¹, В. Е. Круглов²

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию класса Ω -устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях, то есть потоков на поверхностях с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа гиперболических неподвижных точек. Данный класс является обобщением класса градиентно-подобных потоков, для потоков которого запрещены седловые точки, соединённые сепаратрисами. Результатами работы являются доказательство существования у любого потока рассматриваемого класса энергетической функции Морса и построение такой функции для произвольного потока рассматриваемого класса. Поскольку результаты являются обобщением соответствующих результатов К. Мейера для потоков Морса-Смейла и, в частности, для градиентно-подобных потоков, методы построения энергетической функции для случая данной статьи являются дальнейшей разработкой методов, использованных К. Мейером, с учётом специфики Ω -устойчивых потоков, имеющих более сложную структуру, чем градиентно-подобные потоки, благодаря наличию “цепочек” седловых точек, соединённых седловыми сепаратрисами.

Ключевые слова: энергетическая функция, Ω -устойчивый поток, функция Морса, поток без предельных циклов, поток на поверхности

1. Введение

В работе [1] А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин впервые ввели на плоскости т. н. *потоки Морса-Смейла*, обладающие конечным числом гиперболических неподвижных точек и замкнутых траекторий, составляющих всё неблуждающее множество системы, и не имеющие *связок*, т. е. траекторий, соединяющих седловые точки. С. Смейл в работе [2] показал, что локально градиентный поток Морса-Смейла без предельных циклов (поток Морса-Смейла без предельных циклов называется *градиентно-подобным*) в подходящей метрике является градиентным, порождённым некоторой функцией Морса. В этом случае функция Морса убывает вдоль неособых траекторий потока, а множество неподвижных точек потока совпадает с множеством критических точек функции Морса. Так была впервые построена так называемая *энергетическая функция* для динамических систем, т. е. гладкая функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий, чьё множество критических точек даёт неблуждающее множество системы.

К. Мейер в работе [3] построил энергетическую функцию для произвольного потока Морса-Смейла, обобщив таким образом результат Смейла. В силу наличия у такого

¹Колобянина Анна Евгеньевна, студентка факультета информационных технологий, математики и механики, стажер-исследователь, лаборатория Топологических методов в динамике, Нижегородский филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5312-4478>, akolobyuanina@mail.ru

²Круглов Владислав Евгеньевич, аспирант кафедры фундаментальной математики, стажер-исследователь, лаборатория Топологических методов в динамике, Нижегородский филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

потока в общем случае периодических траекторий энергетическая функция уже не могла быть функцией Морса, а являлась её обобщением — функцией Морса-Ботта, имеющей точки первой степени вырождения вдоль предельных циклов.

В работе [4] был сделан первый шаг в обобщении результатов С. Смейла, а именно была построена энергетическая функция для Ω -устойчивого потока с одной седловой связкой на сфере.

В настоящей работе мы продолжаем обобщать результаты С. Смейла на класс G Ω -устойчивых потоков без предельных циклов на поверхностях.

Т е о р е м а 1.1 *Для любого потока в классе G существует энергетическая функция Морса.*

В следующих параграфах изложено доказательство теоремы 1.1.

2. Вспомогательные факты и определения

Гладким потоком на многообразии M называется гладкое отображение

$$f: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$$

со свойствами

$$1) f(x, 0) = x, x \in M;$$

$$2) f(f(x, t), s) = f(x, t + s), x \in M, t \in \mathbb{R};$$

обозначим его $f(x, t) = f^t(x)$.

Множество $\mathcal{O}_p = \{f^t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$ называется *траекторией*, или *орбитой* точки x . Точка x является неподвижной, если её траектория содержит только саму точку x . Траектории полагают ориентированными в направлении возрастания параметра t .

Неподвижная точка p потока f^t (отображения f) является *гиперболической* тогда и только тогда, когда среди собственных чисел матрицы Якоби $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)|_p$ нет чисел с нулевой действительной частью (чисел, равных 1). Если при этом все действительные части собственных чисел матрицы Якоби меньше 0 (меньше 1), то p называется *стоковой точкой*; если больше 0 (больше 1), то *источниковой*. Притягивающая или отталкивающая точка называется *узловой*. Гиперболическая неподвижная точка, не являющаяся *узловой*, называется *седловой точкой*, или *седлом* (см. Рис. 2.1).

Для гиперболической точки p существуют т. н. *устойчивое* $W^s(p)$ и *неустойчивое* $W^u(p)$ многообразия, которые можно определить как множества точек $y \in M$ таких, что $\varrho_M(f^k x_0, f^k y) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$ и $k \rightarrow -\infty$, соответственно, где ϱ_M — метрика на M . Заметим, что неустойчивое многообразие $W^u(p)$ есть устойчивое многообразие относительно f^{-1} .

Для потока f^t точка x называется *блуждающей*, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f^t(U_x) \cap U_x = \emptyset$ для всех $t > 1$. В противном случае точка называется *неблуждающей*. Множество всех неблуждающих точек потока f^t называется его *неблуждающим множеством* Ω_{f^t} .

Если для точки x существует значение $t_0 \in \mathbb{R}$ такое, что $f^{t_0}(x) = x$, то траектория точки x называется *замкнутой траекторией*.

Предельным циклом с потока f^t называется замкнутая траектория, в некоторой окрестности которой нет других замкнутых траекторий.

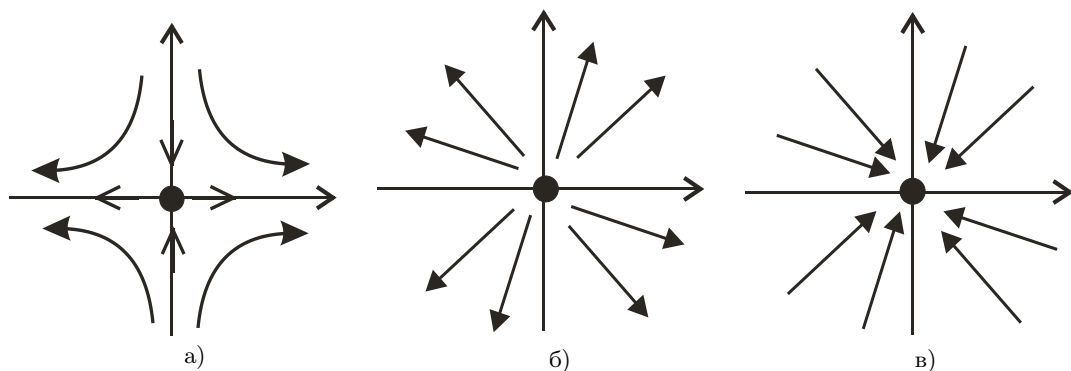


Рис. 2.1. Виды гиперболических неподвижных точек: а) седловая точка (седло); б) источниковая точка (источник); в) стоковая точка (сток)

Пусть q – некоторая точка предельного цикла s , а Σ_q – некоторая гладкая секущая, пересекающая s в точке q , трансверсальная к траекториям потока f^t вблизи q . Пусть $V_q \subset \Sigma_q$ – некоторая окрестность q такая, что для любой точки $x \in V_q$ существует значение $\tau_x \in \mathbb{R}^+$, удовлетворяющее свойству $f^{\tau_x}(x) \in V_q$ и $f^t(x) \notin V_q$ для $0 < t < \tau_x$. Тогда Σ_q – это *сечение Пуанкаре*, а отображение $F_q: V_q \rightarrow \Sigma_q$, заданное формулой $F_q(x) = f^{\tau_x}(x)$, $x \in V_q$, называется *отображением Пуанкаре*.

Если любая точка q предельного цикла s является гиперболической точкой отображения F_q , то цикл s называется *гиперболическим предельным циклом*.

Два потока $f^t: M \rightarrow M$, $f'^t: M' \rightarrow M'$ называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M'$, переводящий траектории f^t в траектории f'^t с сохранением направления движения.

Поток f^t называется *поток Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и гиперболических предельных циклов, и инвариантные многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ пересекаются *трансверсально* для любых точек $x, y \in \Omega_{f^t}$. Поток Морса-Смейла является структурно устойчивым в смысле следующего определения.

Поток f^t называется *структурно-устойчивым*, если существует окрестность $U(f^t)$ в $C^1(M \times \mathbb{R}, M)$, в которой все потоки будут топологически эквивалентны f^t .

Поток f^t называется *Ω -устойчивым*, если существует окрестность $U(f^t)$ в $C^1(M \times \mathbb{R}, M)$ такая, что если некоторый поток $\phi^t \in U(f^t)$, то существует гомеоморфизм $h: M \rightarrow M$, переводящий *неблуждающие* траектории потока f^t в *неблуждающие* траектории потока ϕ^t с сохранением направления движения по траекториям. В силу критерия структурной устойчивости [5–6] это означает, что Ω -устойчивый поток отличается от потока Морса-Смейла тем, что инвариантные многообразия различных седловых точек могут касаться, на поверхности это означает совпадение седловых сепаратрис различных седловых точек, появление сепаратрис, – соединяющих седловые точки.

Обозначим через S замкнутую поверхность, напомним, что G – класс Ω -устойчивых потоков f^t класса гладкости C^2 на S без предельных циклов.

Напомним, что мы называем *энергетической функцией* потока $f^t \in G$ функцию $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}$ со следующими свойствами:

- 1) φ является функцией Морса, т. е. C^2 -функция с невырожденными критическими

точками;

- 2) множество критических точек функции φ совпадает с Ω_{f^t} ;
- 3) $\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$ для любой $x \notin \Omega_{f^t}$ и любого $t > 0$.

3. Построение энергетической функции

Докажем основную теорему.

Положим $f^t \in G$.

Далее будем строить энергетическую функцию $\varphi: S \rightarrow \mathbb{R}$ в несколько этапов.

1. На неблуждающем множестве Ω_{f^t} потока f^t вводится отношение Смейла, являющееся отношением частичного порядка: для двух точек p и q положим, что $p < q$ тогда и только тогда, когда $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$. Согласно известному факту из дискретной математики – это отношение продолжается до некоторого отношения линейного порядка. Перенумеруем неподвижные точки согласно этому порядку и положим, что $\varphi|_{\Omega_{f^t}}$ принимает значения, равные номерам точек.

2. Положим i_{max} , j_{max} , k_{max} – число стоков, седел, источников соответственно. После этого для удобства переобозначим неподвижные точки: $\omega_i = \beta_{0,i}$, $\sigma_j = \beta_{1,j}$, $\alpha_k = \beta_{2,k}$, где $i = \overline{1, i_{max}}$, $j = \overline{1, j_{max}}$, $k = \overline{1, k_{max}}$. Также положим $b_{l_1, l_2} = \varphi(\beta_{l_1, l_2})$, где $l_1 = \overline{0, 2}$, l_2 – номер точки в множестве точек её типа.

Поскольку β_{l_1, l_2} – гиперболическая неподвижная точка потока f^t , то в локальных координатах $X = (x, y)$ касательное к траекториям потока векторное поле имеет вид

$$\dot{X} = A_{l_1, l_2} X + g_{l_1, l_2}(X),$$

где A_{l_1, l_2} матрица с собственными значениями с ненулевой действительной частью и $g_{l_1, l_2}(0) = dg_{l_1, l_2}(0) = 0$. Согласно теории Ляпунова, существуют симметрические матрицы B_{l_1, l_2} и C_{l_1, l_2} такие, что квадратичная форма $w_{l_1, l_2}(X) = X^T B_{l_1, l_2} X$ положительно определена, а квадратичная форма $v_{l_1, l_2}(X) = X^T C_{l_1, l_2} X$ невырождена, при этом $A_{l_1, l_2}^T C_{l_1, l_2} + C_{l_1, l_2} A_{l_1, l_2} = -B_{l_1, l_2}$. Тогда существует окрестность U_{l_1, l_2} неподвижной точки β_{l_1, l_2} , в которой функция

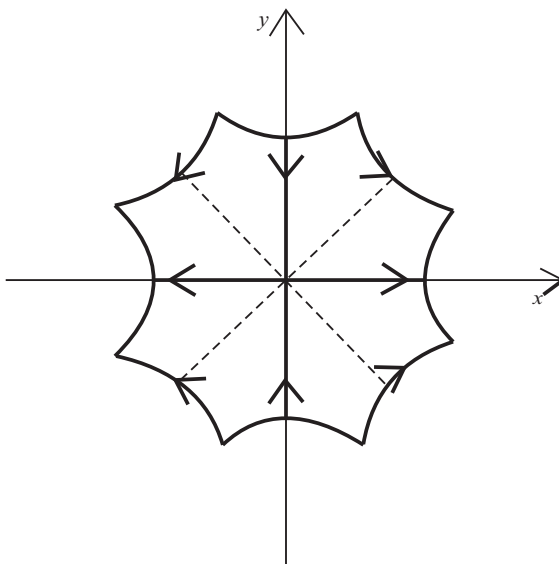
$$\varphi_{l_1, l_2}(X) = b_{l_1, l_2} + v_{l_1, l_2}(X)$$

является энергетической функцией Морса для потока f^t . Не уменьшая общности, будем считать, что окрестности U_{l_1, l_2} попарно не пересекаются для различных l_1, l_2 .

3. Выберем около каждой неподвижной точки линеаризующую окрестность удобной для нас формы. Для этого рассмотрим пары соседних седловых точек в различных цепочках и найдём такие две соседние в некоторой цепочке седловые точки, значения функции в которых имеют наименьшую разницу w , и положим $r \in (0, \frac{1}{3}w)$. Тогда $[n - r, n] \subset \varphi_{2,k}(U_{2,k})$ для источниковых точек $\beta_{2,k}$, $[0, r] \subset \varphi_{0,i}^{-1}(U_{0,i})$ для стоковых точек $\beta_{0,i}$ и $[b_{1,j} - r, b_{1,j} + r] \subset \varphi_{1,j}(U_{1,j})$ для седловых точек $\beta_{1,j}$, где k, i, j – номера источников, стоков и седел соответственно. Положим $\widetilde{U}_{2,k} = \varphi_{2,k}^{-1}([n - r, n])$ и $\widetilde{U}_{0,i} = \varphi_{0,i}^{-1}([0, r])$. В качестве окрестности $\widetilde{U}_{1,j}$ седловой точки $\beta_{1,j}$ выберем криволинейный восьмиугольник, четыре стороны которого лежат на четырех компонентах связности линий уровня $\varphi_{1,j}^{-1}(b_{1,j} \pm r)$, а остальные четыре – на различных траекториях потока f^t (см. Рис. 3.1).

4. Опишем построение глобальных линий уровня, продолжающих отрезки границы окрестности седла $\beta_{1,j}$, не являющиеся отрезками траекторий (см. Рис. 3.2). По построению множество

$$\varphi_{1,j}^{-1}(b_{1,j} \pm r) \cap \partial \widetilde{U}_{1,j}$$

Рис. 3.1. Окрестность $U_{\beta_{1,j}}$

состоит из дуг $\delta_{j\pm}^1, \delta_{j\pm}^2$, при этом будем считать, что обозначения выбраны так, что $\delta_{j-}^1, \delta_{j-}^2 \cap W_{\beta_{1,j}}^s, \delta_{j+}^1, \delta_{j+}^2 \cap W_{\beta_{1,j}}^u$. На множестве $S \setminus (\bigcup_{k=1}^{k_{max}} \widetilde{U}_{2,k} \cup \bigcup_{i=1}^{i_{max}} \widetilde{U}_{0,i})$ продолжим эти дуги до глобальных линий уровня $\gamma_{j\pm}^1 \supset \delta_{j\pm}^1, \gamma_{j\pm}^2 \supset \delta_{j\pm}^2$, где линии с одинаковым знаком могут совпадать. Назовём $\gamma_j^s, s = 1, 2$, глобальными седловыми линиями уровня.

Проведем построение фрагмента γ_0 линии уровня γ_j^s , где $s = 1, 2$, для остальных случаев построения аналогичные. Данные построения были описаны в статье [4]. Обозначим через a_1, a_2 граничные точки дуги δ_{j+}^2 . Пусть $t_1 > 0$ и $t_2 > 0$ значения времени такие, что $a_1^0 = f^{-t_1}(a_1) \in \partial \widetilde{U}_{2,k}$ и $a_2^0 = f^{-t_2}(a_2) \in \partial \widetilde{U}_{2,\bar{k}}$. Обозначим через $[a_1^0, a_2^0]$ дугу окружности $\partial \widetilde{U}_{2,k}$, ограниченную точками a_1^0 и a_2^0 и не пересекающую $W_{\beta_{1,j}}^s$. Для любых точек $z_1, z_2 \in [a_1^0, a_2^0]$ обозначим через $[z_1, z_2]$ дугу окружности $\partial \widetilde{U}_{2,k}$. Для любой точки $z \in [a_1^0, a_2^0]$ обозначим через ℓ_z длину дуги $[a_1^0, z]$. Положим $L = \ell_{a_2^0}$. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что на отрезке $[0, L]$ в односторонних ε -окрестностях точек 0 и L корректно определена C^2 -гладкая функция τ_1 формулой

$$f^{\tau_1(\ell_z)}(z) \in \delta_{k+}^2.$$

Определим функцию τ_2 на отрезке $[0, L]$ формулой

$$\tau_2(\ell) = t_1 + \frac{t_2 - t_1}{L} \ell.$$

Обозначим через $\psi : [0, L] \rightarrow [0, 1]$ C^2 -гладкую функцию такую, что $\psi = 0$ в $\frac{\varepsilon}{2}$ -окрестностях точек 0 и L , $\psi = 1$ вне ε -окрестностей этих точек. Определим функцию τ_3 на отрезке $[0, L]$ формулой

$$\tau_3(\ell) = \psi(\ell)\tau_2(\ell) + (1 - \psi(\ell))\tau_1(\ell).$$

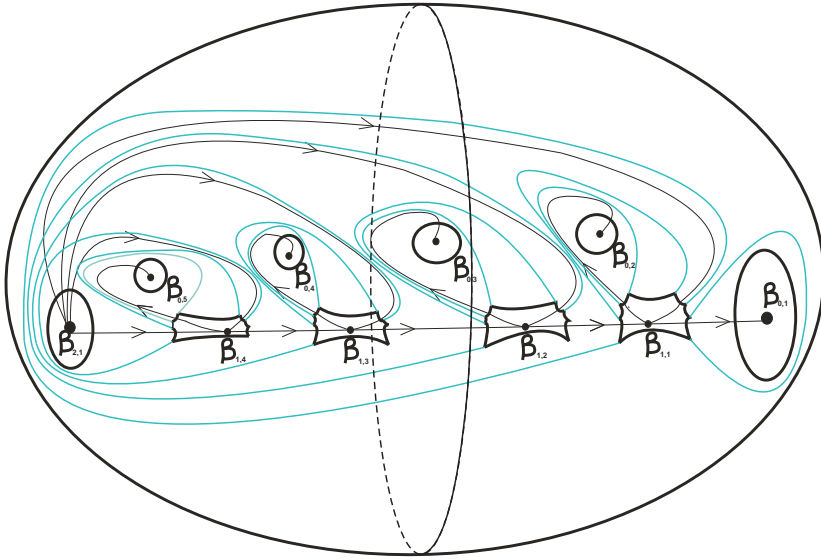


Рис. 3.2. Сфера S^2 , фазовый портрет потока f^t , окрестности неподвижных точек и разбиение сферы на области линиями уровня функции φ

Положим $\gamma_0 = \delta_{j+}^2 \cup \{f^{\tau_3(\ell_z)}(z), z \in [a_1^0, a_2^0]\}$.

5. Обозначим все построенные глобальные линии уровня, включая границы узловых окрестностей, через γ_μ , $\mu = \overline{1, M}$, где M – их число. Введем следующие обозначения для подмножеств множества $S \setminus (\bigcup_{k=1}^{k_{max}} \widetilde{U_{2,k}} \cup \bigcup_{i=1}^{i_{max}} \widetilde{U_{0,i}} \cup \bigcup_{j=1}^{j_{max}} \widetilde{U_{1,j}})$: положим V_{μ_1, μ_2} – множество, ограниченное γ_{μ_1} , γ_{μ_2} и, возможно, границей седловой окрестности, при этом траектория идет от γ_{μ_1} к γ_{μ_2} , не пересекая других линий уровня (см. Рис. 3.2).

Определим искомую энергетическую функцию φ на границах перечисленных множеств следующим образом: $\varphi(\partial \widetilde{U_{0,i}}) = r$, $\varphi(\gamma_{j\pm}^s) = \varphi(\delta_{j\pm}^s) = n - r$, $s = 1, 2$. Продолжим функцию φ внутрь каждого множества по траекториям. Поскольку такие множества могут быть лишь кольцами и дисками, объясним построение на кольце V_{μ_1, μ_2} и на диске V_{μ_3, μ_4} , для остальных колец и дисков построение аналогичное.

На кольце V_{μ_1, μ_2} для любой точки $z \in \gamma_{\mu_1}$ существует время $t_z > 0$ такое, что $f^{t_z}(z) \in \gamma_{\mu_2}$. Для любого $t \in [0, t_z]$ положим

$$\varphi(f^t(z)) = \varphi(\gamma_{\mu_1})(1 - \frac{t}{t_z}) + \frac{t}{t_z} \varphi(\gamma_{\mu_2}).$$

Для диска V_{μ_3, μ_4} без уменьшения общности положим, что $\mathcal{O}_{a_1^0} \cap V_{\mu_3, \mu_4} \neq \emptyset$ и $\mathcal{O}_{a_2^0} \cap V_{\mu_3, \mu_4} \neq \emptyset$. Согласно п. 2 определены функции τ_4 и τ_5 (которые строятся аналогично τ_3) на отрезке $[0, L]$ такие, что

$$\gamma_{\mu_3} \cap V_{\mu_3, \mu_4} = \{f^{\tau_4(\ell_z)}(z), z \in [a_1^0, a_2^0]\}, \gamma_{\mu_4} \cap V_{\mu_3, \mu_4} = \{f^{\tau_5(\ell_z)}(z), z \in [a_1^0, a_2^0]\},$$

где $\tau_5(\ell_z) > \tau_4(\ell_z)$ для любого $z \in [a_1^0, a_2^0]$. На криволинейных прямоугольниках $\Pi_1 = \{0 \leq \ell \leq \varepsilon, \tau_4(\ell) \leq t \leq \tau_5(\ell)\}$, $\Pi_2 = \{L - \varepsilon \leq \ell \leq L, \tau_4(\ell) \leq t \leq \tau_5(\ell)\}$ корректно

определена C^2 -гладкая функция ϕ_1 формулой

$$\phi_1(\ell_z, t) = \varphi_{1,j}(f^t(z)).$$

Определим функцию ϕ_2 на прямоугольнике $\Pi = \{0 \leq \ell \leq L, \tau_4(\ell) \leq t \leq \tau_5(\ell)\}$ формулой

$$\phi_2(\ell, t) = \varphi(\gamma_{\mu_3}) - 2r \frac{t - \tau_4(\ell)}{\tau_5(\ell) - \tau_4(\ell)}.$$

Обозначим через $\Psi : \Pi \rightarrow [0, 1]$ C^2 -гладкую функцию такую, что $\Psi = 0$ на прямоугольниках $\{0 \leq \ell \leq \frac{\varepsilon}{2}, \tau_4(\ell) \leq t \leq \tau_5(\ell)\} \cup \{L - \frac{\varepsilon}{2} \leq \ell \leq L, \tau_4(\ell) \leq t \leq \tau_5(\ell)\}$ и $\Psi = 1$ вне $\Pi_1 \cup \Pi_2$. Определим функцию ϕ_3 на Π формулой

$$\phi_3(\ell, t) = \Psi(\ell, t)\phi_2(\ell, t) + (1 - \Psi(\ell, t))\phi_1(\ell, t).$$

Положим

$$\varphi(f^t(z)) = \phi_3(\ell_z, t).$$

6. Построенная функция является гладкой всюду, кроме, возможно, на линиях уровня в окрестности границ линеаризующих окрестностей неподвижных точек. Стандартной процедурой переопределения значений функции в некоторой окрестности этих линий уровня (смотрите, например [9]) можно построить C^2 -гладкую функцию, которая является искомой энергетической функцией.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 17-11-01041, за исключением локальной энергетической функции, которая построена при поддержке ЦФИ НИУ ВШЭ в 2019 г. Авторы благодарят Починку Ольгу Витальевну за внимательное прочтение рукописи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.
2. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Annals of Mathematics*, **74** (1961), 199–206.
3. K. R. Meyer, “Energy function for Morse-Smale systems”, *American Journal of Mathematics*, **90**:4 (1968), 1031–1040.
4. А. А. Босова, В. Е. Круглов, О. В. Починка, “Энергетическая функция для Ω -устойчивого потока с седловой связкой на поверхности”, *Таврический вестник информатики и математики*, **4**(37) (2017), 51–58.
5. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds”, *Topology*, **1** (1962), 101–120.
6. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks)”, *Topology*, **2** (1963), 179–180.
7. К. Г. Валеев, Г. С. Финин, *Построение функций Ляпунова*, Наукова думка, Киев, 1981, 411 с.

8. C. Pugh, M. Shub, “The Ω -stability theorem for flows”, *Inventiones Math.*, **11** (1970), 150–158.
9. В. З. Гринес, О. В. Починка, “Построение энергетических функций для Ω -устойчивых диффеоморфизмов на 2- и 3- многообразиях”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **63:2** (2017), 191–222.

Поступила 8.10.2019

MSC2010 37D05

Energy function for Ω -stable flows without limit cycles on surfaces

© A. E. Kolobyatina¹, V. E. Kruglov²

Abstract. The paper is devoted to the study of the class of Ω -stable flows without limit cycles on surfaces, i.e. flows on surfaces with non-wandering set consisting of a finite number of hyperbolic fixed points. This class is a generalization of the class of gradient-like flows, differing by forbiddance of saddle points connected by separatrices. The results of the work are the proof of the existence of a Morse energy function for any flow from the considered class and the construction of such a function for an arbitrary flow of the class. Since the results are a generalization of the corresponding results of K. Meyer for Morse-Smale flows and, in particular, for gradient-like flows, the methods for constructing the energy function for the case of this article are a further development of the methods used by K. Meyer, taking in sense the specifics of Ω -stable flows having a more complex structure than gradient-like flows due to the presence of the so-called “chains” of saddle points connected by their separatrices.

Key Words: energy function, Ω -stable flow, Morse function, a flow without limit cycles, a flow on a surface

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, “Rough systems”, *Doklady Akademii nauk SSSR*, **14:5** (1937), 247–250 (In Russ.).
2. S. Smale, “On gradient dynamical systems”, *Annals of Mathematics*, **74** (1961), 199–206.
3. K. R. Meyer, “Energy function for Morse-Smale systems”, *American Journal of Mathematics*, **90:4** (1968), 1031–1040.
4. A. A. Bosova, V. E. Kruglov, O. V. Pochinka, “Energy function for an Ω -stable flow with a saddle connection on a sphere”, *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, **4(37)** (2017), 51–58 (In Russ.).

¹Anna E. Kolobyatina, Student, Faculty of Informatics, Mathematics and Computer Science, Research Assistant of Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12, Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5312-4478>, akolobyatina@mail.ru

²Vladislav E. Kruglov Doctoral Student, Department of Fundamental Mathematics, Research Assistant of Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12, Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

5. M. Peixoto,, “Structural stability on two-dimensional manifolds” , *Topology*, **1** (1962), 101–120.
6. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds (a further remarks)”, *Topology*, **2** (1963), 179–180.
7. K. G. Valeev, G. S. Finin, *Liapunov functions constructing*, Naukova dumka, Kiev, 1981 (In Russ.), 411 p.
8. C. Pugh, M. Shub, “The Ω -stability theorem for flows”, *Inventiones Math.*, **11** (1970), 150–158.
9. V. Z. Grines, O. V. Pochinka, “Construction of energetic functions for Ω -stable diffeomorphisms on 2- and 3-manifolds”, *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, **63**:2 (2017), 191–222 (In Russ.).

Submitted 8.10.2019

УДК 681.5.075

Динамическая идентификация смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений

© А. Н. Кувшинова¹

Аннотация. В статье рассматривается задача динамической идентификации смешанных граничных условий для одномерной модели конвективно-диффузионного переноса по данным зашумленных измерений искомой функции. С помощью метода конечных разностей осуществляется переход от исходной модели с уравнением в частных производных к дискретной линейной динамической системе с зашумленными мультисенсорными измерениями, в которую граничные условия входят в качестве неизвестного вектора входных воздействий. Для решения поставленной задачи применяется алгоритм одновременного оптимального оценивания векторов состояния и входных воздействий. Приводятся результаты численных экспериментов, показывающие практическую применимость предложенного подхода.

Ключевые слова: уравнения в частных производных, граничные задачи, дискретная линейная стохастическая система, параметрическая идентификация, оптимальное оценивание

1. Введение и постановка задачи

В последние десятилетия в различных областях науки и техники наблюдается возросший интерес к обратным задачам для уравнений в частных производных, связанный с необходимостью разработки новых методов решения прикладных проблем, требующих обработки и интерпретации экспериментальных данных [1]. Среди различных типов обратных задач важную роль в приложениях играют граничные обратные задачи, связанные с определением поведения искомой функции на границе рассматриваемой области.

Одним из важных классов моделей, широко используемых при описании природных и техногенных процессов и явлений, являются модели конвективно-диффузионного переноса [2–3]. В простейшем одномерном случае модель конвективно-диффузионного переноса со смешанными граничными условиями первого и третьего рода может быть описана уравнениями (1.1)–(1.4):

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v \frac{\partial c}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad a < x < b, 0 < t < +\infty, \quad (1.1)$$

$$c(x, 0) = \varphi(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1.2)$$

$$c(a, t) = f(t), \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(b, t) = -\lambda[c(b, t) - g(t)], \quad 0 < t < +\infty, \quad (1.4)$$

¹Кувшинова Анастасия Николаевна, аспирант кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный педагогический университет имени И. Н. Ульянова» (430071, Россия, г. Ульяновск, пл. Ленина, д. 4/5), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3496-5981>, KUVANulspu@yandex.ru

где $c(x, t)$ — искомая функция; x — пространственная координата; t — время; a, b — границы рассматриваемого отрезка.

Пусть функция $\varphi(x)$ в начальном условии (1.2) задана скорость конвекции v , коэффициент диффузии α в уравнении (1.1) и коэффициент λ в граничном условии (1.4) известны. Рассмотрим задачу динамического (в реальном времени) оценивания значений функций $f(t)$ и $g(t)$, входящих в граничные условия (1.3)–(1.4) по результатам зашумленных измерений значений функции $c(x, t)$ в нескольких точках рассматриваемого отрезка в последовательные моменты времени. Подобные задачи могут возникать на практике, когда измерения значений искомой функции на отдельных участках границы объекта или за ее пределами недоступны или сопряжены с высокими затратами. В отличие от классических постановок нас интересуют не аналитические выражения для функций $f(t)$ и $g(t)$, а оценки их численных значений в дискретные моменты времени.

2. Дискретная линейная динамическая модель

Для решения поставленной задачи перейдем от исходной модели (1.1)–(1.4) к дискретной линейной динамической системе в пространстве состояний с зашумленными измерениями, которая в общем случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} c_k = F_{k-1}c_{k-1} + B_{k-1}u_{k-1} + w_{k-1}, \\ z_k = H_k c_k + \xi_k, \quad k = 1, 2, \dots, \end{cases}$$

где $c_k \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы; $u_k \in \mathbb{R}^r$ — вектор входных воздействий; $z_k \in \mathbb{R}^m$ — вектор измерений; шумы $w_k \in \mathbb{R}^q$ и $\xi_k \in \mathbb{R}^m$ образуют независимые нормально распределенные последовательности с нулевым математическим ожиданием и ковариационными матрицами $Q \geq 0$ и $R > 0$.

Рассмотрим в плоскости Oxt регулярную сетку с пространственным шагом Δx , временным шагом Δt и узлами (x_i, t_k) :

$$x_i = a + i\Delta x, t_k = k\Delta t, \quad i = 0, 1, \dots, N, k = 0, 1, \dots$$

Обозначим $c_i^k = c(x_i, t_k)$, $\varphi_i = \varphi(x_i)$, $f^k = f(t_k)$, $g^k = g(t_k)$ и запишем конечно-разностную схему для (1.1)–(1.4):

$$\frac{c_i^k - c_i^{k-1}}{\Delta t} + v \frac{c_{i+1}^{k-1} - c_{i-1}^{k-1}}{2\Delta x} = \alpha \frac{c_{i+1}^{k-1} - 2c_i^{k-1} + c_{i-1}^{k-1}}{\Delta x^2}, \quad (2.1)$$

$$i = 1, 2, \dots, N-1, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$c_i^0 = \varphi_i, \quad i = 0, 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

$$c_0^k = f^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.3)$$

$$\frac{c_N^k - c_{N-1}^k}{\Delta x} = -\lambda[c_N^k - g^k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

Из уравнения (2.1) следует, что значение функции $c(x, t)$ в узловой точке k -го временного ряда определяется ее значениями в трех точках $(k-1)$ -го временного ряда:

$$c_i^k = (r_1 + r_2)c_{i-1}^{k-1} + (1 - 2r_2)c_i^{k-1} + (r_2 - r_1)c_{i+1}^{k-1}, \quad (2.5)$$

где $r_1 = \frac{v\Delta t}{2\Delta x}$, $r_2 = \frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}$. Перепишем (2.5) в виде

$$c_i^k = a_1 c_{i-1}^{k-1} + a_2 c_i^{k-1} + a_3 c_{i+1}^{k-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N-1, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.6)$$

где $a_1 = r_1 + r_2$, $a_2 = 1 - 2r_2$, $a_3 = r_2 - r_1$.

Положим $a_4 = \frac{1}{1 + \lambda\Delta x}$, $a_5 = \frac{\lambda\Delta x}{1 + \lambda\Delta x}$. Тогда из (2.4) получим:

$$\begin{aligned} c_N^k &= \frac{c_{N-1}^k + \lambda\Delta x g^k}{1 + \lambda\Delta x} = a_4 c_{N-1}^k + a_5 g^k = a_4 (a_1 c_{N-2}^{k-1} + a_2 c_{N-1}^{k-1} + a_3 c_N^{k-1}) + a_5 g^k = \\ &= a_4 a_1 c_{N-2}^{k-1} + a_4 a_2 c_{N-1}^{k-1} + a_4 a_3 c_N^{k-1} + a_5 g^k, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.7)$$

Искомая дискретная линейная система может быть записана в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\begin{array}{c} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ \vdots \\ c_{n-2}^k \\ c_{n-1}^k \\ c_n^k \end{array} \right] = \underbrace{\left[\begin{array}{ccccccc} a_2 & a_3 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_4 a_1 & a_4 a_2 & a_4 a_3 \end{array} \right]}_{F_{k-1}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ \vdots \\ c_{n-2}^{k-1} \\ c_{n-1}^{k-1} \\ c_n^{k-1} \end{array} \right]}_{c_{k-1}} + \underbrace{\left[\begin{array}{cc} a_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & a_5 \end{array} \right]}_{B_{k-1}} \underbrace{\left[\begin{array}{c} f^{k-1} \\ g^k \end{array} \right]}_{u_{k-1}}, \end{array} \right. \quad (2.8)$$

$$\left[\begin{array}{c} z_1^k \\ z_2^k \\ \vdots \\ z_m^k \end{array} \right] = H_k \left[\begin{array}{c} c_1^k \\ c_2^k \\ \vdots \\ c_n^k \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} \xi_1^k \\ \xi_2^k \\ \vdots \\ \xi_m^k \end{array} \right], \quad k = 1, 2, \dots,$$

где $n = N$ (вектор состояния c_k состоит из всех внутренних узлов пространственной сетки и правой границы); $H_k \in \mathbb{R}^{m \times n}$ — матрица наблюдения; m — количество измеряемых компонент вектора состояния.

Модель (2.8) является детерминированной (шум w_k в объекте отсутствует) дискретной линейной динамической системой с зашумленными измерениями, в которой неизвестные граничные условия входят в двумерный вектор входных воздействий ($r = 2$). Матрица системы $F_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$ и матрица входных воздействий $B_k \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ являются постоянными.

Для идентификации неизвестных параметров полученной модели могут быть использованы различные подходы, основанные на методах оптимального оценивания. Например, в работе [4] был использован алгоритм одновременного оптимального оценивания вектора состояния и входных воздействий для оценивания значений искомой функции и коэффициентов разложения граничных условий первого рода по базисным функциям в двумерной задаче теплопроводности.

В работе [5] для определения скорости конвекции в уравнении (1.1) при известных граничных условиях применялись метаэвристические алгоритмы оптимизации критерия идентификации. В работе [6] алгоритм [7] применялся для решения задачи динамической идентификации граничных условий первого рода в модели конвективно-диффузионного переноса. В данной статье предлагается использовать этот алгоритм для динамической идентификации смешанных граничных условий.

3. Алгоритм одновременного оценивания векторов состояния и входных воздействий

Один из первых подходов к оценке вектора входных воздействий в дискретных динамических системах заключался во включении неизвестных входных воздействий в вектор состояния, что предполагает наличие априорной информации о динамике входных воздействий. Работа [7] является развитием результатов, полученных в [8–9], но отличается тем, что в ней предложен рекуррентный фильтр с отдельной оценкой векторов состояния и входных воздействий.

Пусть для любого k выполняется условие

$$\text{rank } H_k B_{k-1} = \text{rank } B_{k-1} = r. \quad (3.1)$$

Обозначим через I_n , I_m , I_p единичные матрицы порядка n , m и p соответственно ($p = m - r$).

Пусть идентификация проводится на отрезке времени $[0, T]$ с шагом дискретизации $\Delta t = \frac{T}{K}$, где K – достаточно большое целое неотрицательное число.

АЛГОРИТМ 1. (С.Джиллинс, Б. Мур [7]).

Для $k = 1, 2, \dots, K$ ВЫПОЛНЯТЬ

НАЧАЛО

1) прогноз c_k и P_k без учета оценки вектора входных воздействий

$$\hat{c}_{k|k-1} = F_{k-1} \hat{c}_{k-1|k-1},$$

$$P_{k|k-1} = F_{k-1} P_{k-1|k-1} F_{k-1}^T + Q_{k-1},$$

2) оценка вектора входных воздействий u_{k-1}

$$\tilde{R}_k = H_k P_{k|k-1} H_k^T + R_k,$$

$$D_k = H_k B_{k-1},$$

$$M_k = (D_k^T \tilde{R}_k^{-1} D_k)^{-1} D_k^T \tilde{R}_k^{-1},$$

$$\hat{u}_{k-1} = M_k (z_k - H_k \hat{c}_{k|k-1}), \quad (3.2)$$

3) прогноз c_k и P_k с учетом оценки вектора входных воздействий

$$\hat{c}_{k|k}^* = \hat{c}_{k|k-1} + B_{k-1} \hat{u}_{k-1},$$

$$P_{k|k}^* = (I_n - B_{k-1} M_k H_k) P_{k|k-1} (I_n - B_{k-1} M_k H_k)^T + B_{k-1} M_k R_k M_k^T B_{k-1}^T,$$

4) коррекция c_k и P_k

$$\tilde{R}_k^* = (I_m - H_k B_{k-1} M_k) \tilde{R}_k (I_m - H_k B_{k-1} M_k)^T,$$

$$S_k^* = -B_{k-1} M_k R_k,$$

$$\alpha_k = [0 \ I_p] U_k^T \tilde{S}_k^{-1}, \quad (3.3)$$

$$K_k = (P_{k|k}^* H_k^T + S_k^*) \alpha_k^T (\alpha_k \tilde{R}_k^* \alpha_k^T)^{-1} \alpha_k,$$

$$\hat{c}_{k|k} = \hat{c}_{k|k}^* + K_k (z_k - H_k \hat{c}_{k|k}^*), \quad (3.4)$$

$$P_{k|k} = P_{k|k}^* - K_k (P_{k|k}^* H_k^T + S_k^*)^T.$$

КОНЕЦ

В формуле (3.3) матрица \tilde{S}_k такова, что $\tilde{S}_k \tilde{S}_k^T = \tilde{R}_k$, а U_k – ортогональная матрица, составленная из левых сингулярных векторов матрицы $\tilde{S}_k^{-1} H_k B_{k-1}$.

4. Численные эксперименты

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial c}{\partial t} + 2 \frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial^2 c}{\partial^2 x}, \quad 0 < x < 1, 0 < t < +\infty, \quad (4.1)$$

$$c(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (4.2)$$

$$c(0, t) = f(t), \quad 0 < t < +\infty, \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial x}(1, t) = -[c(1, t) - g(t)], \quad 0 < t < +\infty, \quad (4.4)$$

где $c(x, t)$ — концентрация загрязняющего вещества в одномерном потоке, текущем слева направо,

$$f(t) = 4 |2t - [2t + 0.5]|, \quad g(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0.25, \\ 2t - 0.5, & 0.25 < t < 0.75, \\ 1, & t \geq 0.75. \end{cases}$$

Условие (4.2) означает, что начальная концентрация вещества равна нулю на всем отрезке, граничное условие (4.3) соответствует периодическому изменению концентрации на левом конце отрезка по закону треугольной волны с периодом 0.5, а граничное условие (4.4) — кусочно-линейному изменению концентрации в окружающей среде на правом конце.

Зададим пространственную сетку с шагом $\Delta x = 0.2$, состоящую из четырех внутренних ($x_1 = 0.2, x_2 = 0.4, x_3 = 0.6, x_4 = 0.8$) и двух граничных ($x_0 = 0, x_5 = 1$) узлов. Шаг Δt с учетом условия сходимости конечно-разностной схемы выберем равным $\frac{\Delta x^2}{4\alpha} = 0.01$.

На рис. 4.1 приведен график решения задачи (4.1)–(4.3) методом конечных разностей для $t \in [0; 1]$ ($k = 1, 2, \dots, 100$).

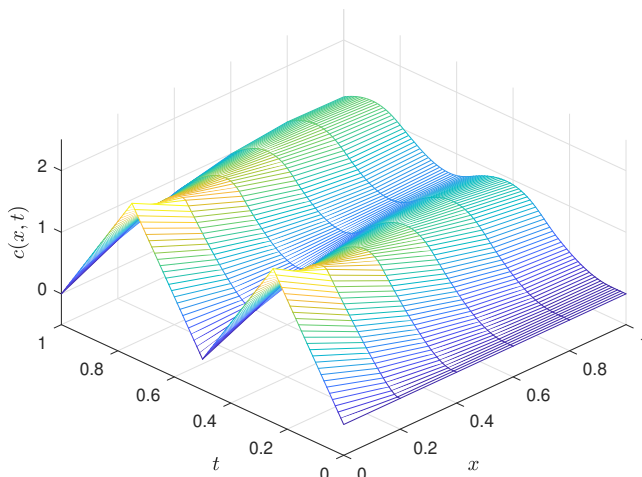


Рис. 4.1. Решение задачи методом конечных разностей

Рассмотрим модель измерений с двумя сенсорами ($m = 2$) в узлах x_1 и x_5 . Заметим, что при такой модели измерений условие (3.1) выполняется. Система (2.8) в этом случае будет иметь следующий вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ c_4^k \\ c_5^k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0 & 0 & 0 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0.4167 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^{k-1} \\ c_2^{k-1} \\ c_3^{k-1} \\ c_4^{k-1} \\ c_5^{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{k-1} = c_0^{k-1} \\ g^k \end{bmatrix}, \\ \\ \begin{bmatrix} z_1^k \\ z_2^k \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1^k \\ c_2^k \\ c_3^k \\ c_4^k \\ c_5^k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \xi_1^k \\ \xi_2^k \end{bmatrix}, \\ k &= 1, 2, \dots \end{aligned} \right. \quad (4.5)$$

На рис. 4.2 приведены графики зашумленных измерений, на рис. 4.3 – 4.4 – результаты оценивания значений функций $f(t)$ и $g(t)$, а на рис. 4.5 – график оценки решения, полученного алгоритмом 1 с ковариацией шума $R = \text{diag}\{0.02^2, 0.02^2\}$. Заметим, что для рассматриваемой нами модели на каждой итерации алгоритма по формуле (3.2) вычисляется оценка вектора входных воздействий u_{k-1} , состоящего из значения функции $f(t)$ в предыдущий момент времени и значения функции $g(t)$ в текущий момент времени, а по формуле (3.4) получается оценка вектора состояния для текущего момента времени. Таким образом, оценка значений функции $f(t)$ производится с запаздыванием на один такт и на последней итерации алгоритма ее значение оказывается не определено.

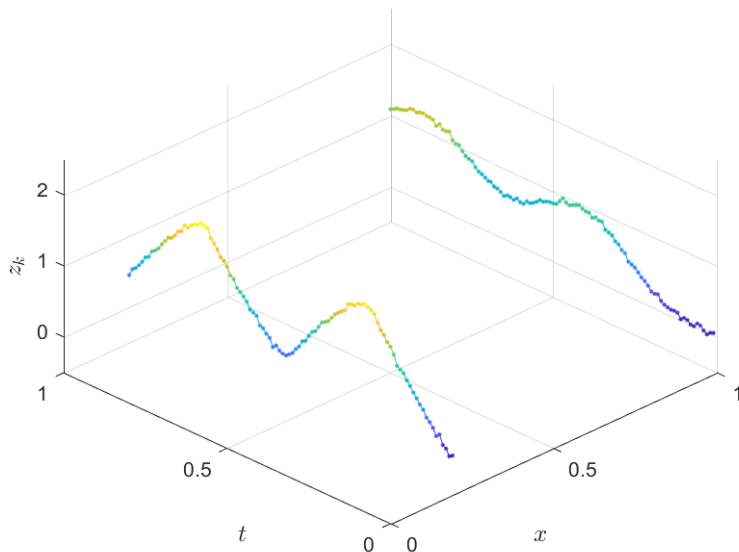
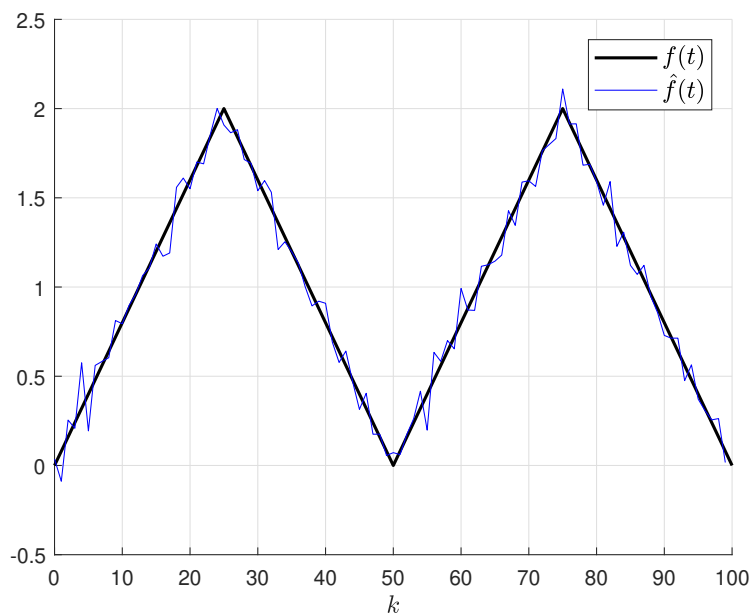
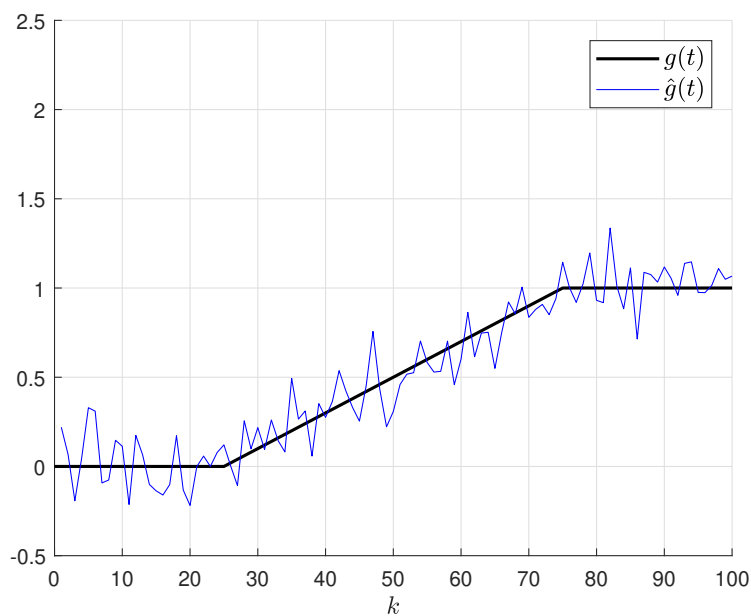


Рис. 4.2. Зашумленные измерения

Рис. 4.3. Оценка $f(t)$ Рис. 4.4. Оценка $g(t)$

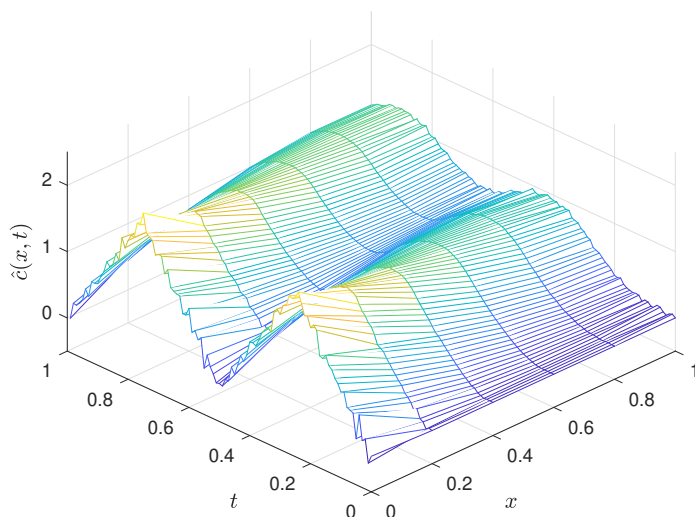


Рис. 4.5. Оценка решения

В таблице 4.1 приведены среднеквадратические ошибки оценивания значений функции $c(x, t)$ в узлах сетки (RMSE_i) и нормализованная среднеквадратическая ошибка (nRMSE_c), а также среднеквадратические ошибки оценивания функции $g(t)$ (RMSE_g) при различных ковариациях шума ($R_1 = \text{diag}\{0.2^2, 0.2^2\}$, $R_2 = \text{diag}\{0.02^2, 0.02^2\}$, $R_3 = \text{diag}\{0.002^2, 0.002^2\}$). Из приведенной таблицы видно, что с уменьшением шума качество идентификации граничных условий возрастает.

Таблица 4.1. Ошибки оценивания

	RMSE_0	RMSE_1	RMSE_2	RMSE_3	RMSE_4	RMSE_5	nRMSE_c	RMSE_g
R_1	0.8187	0.2165	0.0826	0.0481	0.0557	0.2178	0.8814	1.3284
R_2	0.0819	0.0217	0.0083	0.0048	0.0056	0.0218	0.0881	0.1328
R_3	0.0082	0.0022	0.0008	0.0005	0.0006	0.0022	0.0088	0.0133

5. Заключение

В работе предложен новый подход к динамической идентификации смешанных граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений, основанный на использовании методов дискретной фильтрации.

Новизна предлагаемого подхода заключается в переходе от исходной модели, описываемой уравнением в частных производных, к дискретной линейной динамической системе, в которой граничные условия представлены как неизвестные входные воздействия, для идентификации которых применяется алгоритм [7].

Дальнейшие исследования будут направлены на развитие предложенного подхода и разработку новых методов решения задач идентификации моделей конвективно-

диффузионного переноса по экспериментальным данным.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области в рамках научного проекта № 19-41-730009.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. М. Денисов, *Введение в теорию обратных задач : учеб. пособие*, Изд-во МГУ, М., 1994, 208 с.
2. А. И. Леонтьев, *Теория теплообмена : учеб. для машиностроит. спец. техн. ун-тов и вузов*, МГТУ, М., 1997, 683 с.
3. С. Фарлоу, *Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров*, Мир, М., 1985, 384 с.
4. S. Gillijns, B.D. Moor, “Joint state and boundary condition estimation in linear data assimilation using basis function expansion”, *Proceedings of the 26th IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control*, 2007, 458–463.
5. A.V. Tsyganov, Yu.V. Tsyganova, A.N. Kuvshinova, H.R. Tapia Garza, “Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport model”, *Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference “Fuzzy Technologies in the Industry – FTI 2018”*, 2018, 188–196.
6. А. В. Цыганов, Ю. В. Цыганова Ю. В., А. Н. Кувшинова, “Динамическая идентификация граничных условий в модели конвективно-диффузионного переноса в условиях зашумленных измерений”, *Сб. тр. V междунар. конф. и молодеж. шк. «Информационные технологии и нанотехнологии» (ИТНТ-2019)* (Самара, 21-24 мая 2019), Новая техника, 169–177.
7. S. Gillijns, B.D. Moor, “Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems”, *Automatica*, **43** (2007), 111–116.
8. P.K. Kitanidis, “Unbiased minimum-variance linear state estimation”, *Automatica*, **23:6** (1987), 775–778.
9. M. Darouach, M. Zasadzinski, “Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs”, *Automatica*, **33:4** (1997), 717–719.

Поступила 15.08.2019

MSC2010 93A30

Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements

© A. N. Kuvshinova¹

Abstract. The paper addresses the problem of dynamic identification of mixed boundary conditions for one-dimensional convection-diffusion transport model based on noisy measurements of the function of interest. Using finite difference method the original model with the partial differential equation is replaced with the discrete linear dynamic system with noisy multisensor measurements in which boundary conditions are included as unknown input vector. To solve the problem, the algorithm of simultaneous estimation of the state and input vectors is used. The results of numerical experiments are presented which confirm the practical applicability of the proposed method.

Key Words: partial differential equations, boundary problems, discrete linear stochastic system, parameter identification, optimal estimation

REFERENCES

1. A. M. Denisov, *[Introduction to the theory of inverse problems: Studies. benefit]*, Publishing House of Moscow State University, Moscow, 1994 (In Russ.), 208 p.
2. A. I. Leontyev, *[Theory of heat and mass transfer : studies. for machine building. spets. Techn. universities and higher education institutions]*, MGTU, Moscow, 1997 (In Russ.), 683 p.
3. S. Farlou, *[Partial differential equations for scientists and engineers]*, Mir, Moscow, 1985 (In Russ.), 384 p.
4. S. Gillijns, B. D. Moor, “Joint state and boundary condition estimation in linear data assimilation using basis function expansion”, *Proceedings of the 26th IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control*, 2007, 458–463.
5. A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, A. N. Kuvshinova, H. R. Tapia Garza, “Metaheuristic algorithms for identification of the convection velocity in the convection-diffusion transport model”, *Proceedings of the II International Scientific and Practical Conference «Fuzzy Technologies in the Industry – FTI 2018»*, 2018, 188–196.
6. A. V. Tsyganov, Yu. V. Tsyganova, A. N. Kuvshinova, “[Dynamic identification of boundary conditions for convection-diffusion transport model in the case of noisy measurements]”, *[Proceedings of the V International Conference and Youth School «Information Technologies and Nanotechnologies»]*, New technique, 2019, 169–177 (In Russ.).
7. S. Gillijns, B. D. Moor, “Unbiased minimum-variance input and state estimation for linear discrete-time systems”, *Automatica*, **43** (2007), 111–116.

¹Anastasia N. Kuvshinova, postgraduate student of the Department of higher mathematics, Ulyanovsk State Pedagogical University named after I. N. Ulyanov (Lenin square, d. 4/5, Ulyanovsk 432071, Ulyanovsk oblast, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3496-5981>, KUVANulspu@yandex.ru

8. P. K. Kitanidis, “Unbiased minimum-variance linear state estimation”, *Automatica*, **23:6** (1987), 775–778.
9. M. Darouach, M. Zasadzinski, “Unbiased minimum variance estimation for systems with unknown exogenous inputs”, *Automatica*, **33:4** (1997), 717–719.

Submitted 15.08.2019

УДК 517.9

О периодических точках эндоморфизмов тора

© Е. Д. Куренков¹, Д. И. Минц²

Аннотация. Известно, что ановские эндоморфизмы n -мерного тора, отличные от автоморфизмов и растягивающих эндоморфизмов, не являются структурно устойчивыми и в общем случае не сопряжены с алгебраическими эндоморфизмами. Тем не менее гиперболические алгебраические эндоморфизмы тора сопряжены со своими C^1 -возмущениями на множестве периодических точек. Поэтому изучение алгебраических эндоморфизмов тора представляет особый интерес. Настоящая работа посвящена изучению структуры множества периодических и предпериодических точек алгебраических эндоморфизмов тора. Изучаются различные групповые свойства указанного множества точек. Доказана плотность периодических и предпериодических точек для алгебраических эндоморфизмов n -мерного тора. Исследована зависимость между числом периодических и предпериодических точек с фиксированным знаменателем и свойствами характеристического многочлена. Основным результатом работы является теорема 1.1. В ней приводится алгоритм, который позволяет различать множества периодических и предпериодических точек заданного алгебраического эндоморфизма двумерного тора.

Ключевые слова: ановский эндоморфизм, алгебраический эндоморфизм тора, периодические точки, полусопряженность

1. Введение

Хорошо известно, что произвольный диффеоморфизм Аносова, заданный на n -мерном торе, является структурно устойчивым и сопряжен с алгебраическим гиперболическим автоморфизмом [1–3]. Что же касается ановских эндоморфизмов, не являющихся диффеоморфизмами и растягивающими эндоморфизмами, то такой результат, не имеет места, что следует из работ [4–5]. Более того, в работе [6] было показано, что во множестве эндоморфизмов Аносова на n -мерном торе множество эндоморфизмов, не сопряженных с алгебраическим, образует массивное множество. Из работы Ф. Пшетьцкого [4] следует, что гиперболические алгебраические эндоморфизмы тора сопряжены со своими C^1 -возмущениями на множестве периодических точек. Именно поэтому изучение алгебраических эндоморфизмов тора представляет особый интерес.

В настоящей работе исследуются свойства алгебраических эндоморфизмов n -мерного тора \mathbb{T}^n . Мы будем представлять n -мерный тор как фактор-пространство $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Тогда алгебраический эндоморфизм $f_A: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ задается $(n \times n)$ -матрицей A с целочисленными коэффициентами. Если $|\det A| = 1$, то эндоморфизм $f_A: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$, индуцированный матрицей A , является автоморфизмом. Если собственные значения матрицы A отличны от 0 и 1, то алгебраический эндоморфизм называется гиперболическим.

¹ **Куренков Евгений Дмитриевич**, стажер-исследователь, лаборатория Топологических методов в динамике, Нижегородский филиал ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3544-1143>, ekurenkov@hse.ru

² **Минц Дмитрий Ильич**, стажёр-исследователь, лаборатория топологических методов в динамике НИУ ВШЭ НН (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Б. Печерская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0329-6946>, dmincz@hse.ru

Известно, что в случае произвольного алгебраического эндоморфизма множество периодических и предпериодических точек может включать в себя как точки с рациональными, так и точки с иррациональными координатами. Но в случае гиперболического алгебраического эндоморфизма периодическими и предпериодическими точками являются все точки с рациональными координатами и только они. Встаёт вопрос о классификации точек с рациональными координатами на периодические и предпериодические для конкретно заданного алгебраического эндоморфизма. Легко видеть, что для алгебраического автоморфизма тора (см., например, [7]) любая точка с рациональными координатами является периодической. В данной работе для двумерного тора приведен алгоритм, позволяющий различать периодические и предпериодические точки заданного алгебраического эндоморфизма.

Пусть P_q — множество рациональных точек на n -мерном торе вида $(s_1/q, \dots, s_n/q)$, где $0 \leq s_i < q, i = \overline{1, n}$. Легко видеть, что объединение $\bigcup_{q \in \mathbb{N}} P_q$ совпадает с множеством всех периодических точек на торе, имеющих рациональные координаты. Для произвольного алгебраического эндоморфизма $f_A: \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$ данное множество является инвариантным, т. е. $f_A(P_q) \subset P_q$. Тогда корректно определено ограничение $f_A|_{P_q}$. Рассмотрим кольцо вычетов \mathbb{Z}_q по модулю q . Пусть A_q — матрица с коэффициентами a'_{ij} в \mathbb{Z}_q такая, что $a'_{ij} = a_{ij} \bmod q$. Матрица A_q естественным образом индуцирует эндоморфизм³ абелевой группы $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$, причем справедлива следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} P_q & \xrightarrow{f_A|_{P_q}} & P_q \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi \\ \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q & \xrightarrow{A_q} & \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q \end{array},$$

где $\varphi(s_1/q, \dots, s_n/q) = (s_1, \dots, s_n)$.

Т е о р е м а 1.1 Пусть даны произвольный алгебраический эндоморфизм $f_A: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ и ненулевая рациональная точка M с координатами $(s_1/q, s_2/q)$, где числа s_1, s_2, q взаимно просты в совокупности. Пусть $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ — разложение на простые сомножители числа q . Точка M является периодической точкой эндоморфизма f_A тогда и только тогда, когда для любого $i = \overline{1, t}$ точка $(s_1, s_2) \bmod p_i^{\alpha_i}$ является периодической точкой эндоморфизма $A_{p_i^{\alpha_i}}$.

При этом точка $(s_1, s_2) \bmod p_i^{\alpha_i}$ является периодической для эндоморфизма $A_{p_i^{\alpha_i}}$ тогда и только тогда, когда характеристический многочлен оператора A_p либо не имеет нулевых корней, либо имеет ровно один нулевой корень, и существует $\lambda \in \mathbb{Z}_{p^k}$, обратимое в кольце \mathbb{Z}_{p^k} , такое, что $A_{p^k} x = \lambda x$.

2. Доказательство основных результатов

Рассмотрим введённый в разделе 1 эндоморфизм $A_q: \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$. Из его определения непосредственно вытекает, что для любого w , являющегося делителем q , эн-

³Здесь и далее мы для удобства обозначений не делаем различий между матрицей A_q и индуцированным ею эндоморфизмом группы $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$.

доморфизм A_q полусопряжен с эндоморфизмом $A_w: \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_w \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_w$, т. е. справедлива следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q & \xrightarrow{A_q} & \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q \\ \varphi_w \downarrow & & \downarrow \varphi_w \\ \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_w & \xrightarrow{A_w} & \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_w \end{array}$$

где $\varphi_w(s_1, \dots, s_n) = (s_1, \dots, s_n) \bmod w$.

Л е м м а 2.1 Пусть $q = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_t^{\alpha_t}$ — разложение на простые сомножители числа q . Тогда точка $(s_1, \dots, s_n) \in \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$ является периодической точкой эндоморфизма A_q тогда и только тогда, когда для любого $i = \overline{1, t}$ точка $\varphi_{p_i^{\alpha_i}}(s_1, \dots, s_n)$ является периодической точкой эндоморфизма $A_{p_i^{\alpha_i}}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Результат немедленно следует из китайской теоремы об остатках, утверждающей, что гомоморфизм $\psi: \mathbb{Z}_{n_1 n_2 \dots n_k} \rightarrow \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_k}$, $\psi(x) = (x \bmod n_1, x \bmod n_2, \dots, x \bmod n_k)$ является изоморфизмом при попарно взаимно простых n_1, n_2, \dots, n_k .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а в е р ш е н о.

З а м е ч а н и е 2.1 Пусть точка $(s_1, \dots, s_n) \in \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$ — периодическая точка эндоморфизма A_q , a_i — период точки $\varphi_{p_i^{\alpha_i}}(s_1, \dots, s_n)$, где $i = \overline{1, t}$. Тогда период точки (s_1, \dots, s_n) равен $[a_1, a_2, \dots, a_t]^4$.

Л е м м а 2.2 Пусть A — целочисленная матрица и u_1, u_2, \dots, u_n — ее элементарные делители⁵, тогда система сравнений $Ax \equiv 0 \pmod{q}$ имеет ровно $\prod_{i=1}^n (u_i, q)$ различных по модулю q решений⁶.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть U — целочисленная унимодулярная матрица. Легко видеть, что x является решением системы сравнений $Ax \equiv 0 \pmod{q}$ тогда и только тогда, когда x является решением системы сравнений $UAX \equiv 0 \pmod{q}$.

Известно [8], что для любой целочисленной матрицы A существуют такие унимодулярные матрицы U и V , что матрица $A' = UAV$ имеет диагональный вид $\begin{pmatrix} u_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & u_n \end{pmatrix}$, где u_1, \dots, u_n — элементарные делители матрицы A . Тогда любое решение исходной системы сравнений имеет вид Vy , где y — решение системы сравнений $A'y \equiv 0 \pmod{q}$.

⁴ $[m, n]$ обозначает наименьшее общее кратное чисел m и n .

⁵Напомним, что u_i может быть вычислено, как отношение наибольшего общего делителя миноров матрицы A порядка i к наибольшему общему делителю миноров матрицы A порядка $i - 1$.

⁶ (m, n) обозначает наибольший общий делитель чисел m и n .

Легко видеть, что система сравнений $A'y \equiv 0 \pmod{q}$ имеет ровно $\prod_{i=1}^n (u_i, q)$ различных решений по модулю q . Однако в силу унимодулярности матрицы V исходная система сравнений также имеет ровно $\prod_{i=1}^n (u_i, q)$ различных решений по модулю q .
Доказательство завершено.

С л е д с т в и е 2.1 *Справедливо равенство $|\ker A_q| = \prod_{i=1}^n (u_i, q)$, где u_1, \dots, u_n — элементарные делители матрицы A .*

Л е м м а 2.3 *Эндоморфизм A_q является автоморфизмом тогда и только тогда, когда $(\det(A), q) = 1$.*

Доказательство. Если $(\det(A), q) = 1$, то существуют такие числа w и v , что $v \cdot \det(A) + wq = 1$. Перепишем равенство в виде $v \cdot \det(A) = 1 - wq$. Отсюда получим, что $v \cdot \det(A) \equiv 1 \pmod{q}$. Значит, $\det(A)$ есть обратимый элемент кольца \mathbb{Z}_q , следовательно, существует A_q^{-1} .

Обратно, если $(\det(A), q) \neq 1$, то в силу того, что $\det(A) = \prod_{i=1}^n u_i$, где u_1, \dots, u_n — элементарные делители матрицы A , хотя бы для одного i верно неравенство $(u_i, q) > 1$. Однако тогда $|\ker A_q| > 1$, и эндоморфизм A_q необратим.
Доказательство завершено.

С л е д с т в и е 2.2 *Если $(\det(A), q) = 1$, то любая точка $(s_1, \dots, s_n) \in \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$ является периодической точкой отображения A_q .*

С л е д с т в и е 2.3 *Если $\det A \neq 0$, то множество периодических точек отображения, индуцированного матрицей A , всюду плотно.*

Л е м м а 2.4 *Множество периодических точек F_q эндоморфизма A_q есть подгруппа в $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$. Кроме того, существует такая подгруппа $K_q \subset \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$, что $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q \cong F_q \oplus K_q$.*

Доказательство. Так как в $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$ существует конечное число элементов, то найдётся такое целое число k , при котором все элементы $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$ являются неподвижными точками эндоморфизма A_q^k . Легко видеть, что $F_q = \text{Im } A_q^k$, следовательно, F_q является подгруппой. Положим $K_q = \ker A_q^k$. Рассмотрим произвольный элемент $x \in \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q$. Тогда $x = A_q^k(x) + (x - A_q^k(x))$, причем $A_q^k(x) \in \text{Im } A_q^k$ и $x - A_q^k(x) \in \ker A_q^k$. Следовательно, $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_q \cong F_q \oplus K_q$.
Доказательство завершено.

С л е д с т в и е 2.4 *Пусть p^k — степень простого числа p . Тогда множество периодических точек эндоморфизма A_{p^k} есть подгруппа в $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_{p^k}$, изоморфная одной из групп $\bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}_{p^k}$, где $t = \overline{0, n}$.*

Доказательство. Доказательство немедленно следует из теоремы о классификации конечнопорожденных абелевых групп.

Доказательство завершено.

Заметим, что $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_p$ является n -мерным векторным пространством над полем \mathbb{Z}_p , а A_p является линейным оператором, действующим в этом пространстве. Его характеристический многочлен может иметь t корней ($t = \overline{0, n}$), лежащих в \mathbb{Z}_p .

Лемма 2.5 Пусть χ_p — характеристический многочлен линейного оператора A_p . Тогда эндоморфизм A_p имеет подгруппу периодических точек, изоморфную $\bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}_p$ в том и только том случае, когда его характеристический многочлен χ_p имеет ноль своим корнем кратности $(n - t)$.

Доказательство.

Из леммы 2.4 следует, что $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_p \cong F_p \oplus K_p$, где F_p и K_p — образ и ядро линейного оператора A_p^k соответственно. Они являются инвариантными относительно оператора A_p , поскольку являются ядром и образом некоторого многочлена от оператора A_p . Значит, существует базис, в котором матрица оператора A_p имеет вид $\begin{pmatrix} M_K & 0 \\ 0 & M_F \end{pmatrix}$, где M_K и M_F — матрицы ограничений оператора A_p на инвариантные подпространства K_p и F_p соответственно. Обозначим ограничения оператора A_p на подпространства K_p и F_p за A_K и A_F соответственно. Заметим, что все точки подпространства K_p являются предпериодическими (кроме точки $(0, \dots, 0)$), а все точки подпространства F_p являются периодическими.

Из конструкции подгруппы K_p следует, что существует такое число n , что $A_K^n = 0$. Значит, оператор A_K — нильпотентный, и все собственные значения его матрицы равны 0.

Покажем, что характеристический многочлен оператора A_F не имеет нулевых собственных значений. Из леммы 2.3 и того, что число p — простое, следует, что все точки пространства $\bigoplus_{i=1}^n \mathbb{Z}_p$ являются периодическими тогда и только тогда, когда $\det(A_p) \bmod p \neq 0$. Данный факт является верным и для эндоморфизма A_F , который действует в подпространстве F_p . Поскольку все точки подпространства F_p являются периодическими точками эндоморфизма A_F , то $\det(M_F) \bmod p \neq 0$. Так как характеристический многочлен χ_p линейного оператора A_F имеет вид $\chi = (-1)^n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + a_0$, где $a_0 = \det(M_F)$ и $\det(M_F) \bmod p \neq 0$, то характеристический многочлен оператора A_F не имеет нулевых собственных значений.

Доказательство завершено.

Опираясь на полученные выше результаты, перейдём к исследованию множества периодических и предпериодических точек алгебраических эндоморфизмов двумерного тора.

Лемма 2.6 Подгруппа периодических точек эндоморфизма A_p изоморфна $\bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}_p$, $t = \overline{0, 2}$ тогда и только тогда, когда подгруппа периодических точек эндоморфизма A_{p^k} изоморфна $\bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}_{p^k}$.

Доказательство. 1) Случай при $t = 2$ немедленно следует из леммы 2.3 (Все точки $\mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ являются периодическими точками эндоморфизма A_p тогда и только тогда, когда $(\det(A), p) = 1$. Кроме того, $(\det(A), p) = 1$ тогда и только тогда, когда $(\det(A), p^k) = 1$).

2) Пусть $\varphi_k: \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k} \rightarrow \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$ — естественный гомоморфизм, полусопрягающий эндоморфизмы A_{p^k} и A_p . Из существования данного полусопряжения и конечности числа элементов в $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k}$ непосредственно следует, что эндоморфизм A_{p^k} имеет не меньше периодических точек, чем эндоморфизм A_p , поскольку для любой периодической точки эндоморфизма A_p найдется хотя бы одна периодическая точка эндоморфизма A_{p^k} , проектирующаяся в нее в силу φ_k . Таким образом, доказана необходимость при $t = 1$.

Докажем достаточность. Предположим, что A_p имеет единственную периодическую точку, и при некотором $k > 1$ эндоморфизм A_{p^k} имеет подгруппу периодических точек, изоморфную \mathbb{Z}_{p^k} . Данная подгруппа имеет вид $H = \{h(x_1, x_2): h \in \mathbb{Z}_{p^k}\}$ при некотором $(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k}$.

Покажем, что хотя бы один из элементов x_1, x_2 является обратимым элементом кольца \mathbb{Z}_{p^k} . Предположим, что оба элемента x_1 и x_2 необратимы. Тогда множество H представимо в виде $H = \{p(hy_1, hy_2): h \in \mathbb{Z}_{p^k}\}$, где $x_1 = py_1, x_2 = py_2$. Отсюда следует, что в множестве H не более p^{k-1} элементов. Однако множество H изоморфно \mathbb{Z}_{p^k} , поэтому в нём p^k элементов. Получили противоречие.

Таким образом, хотя бы один из элементов x_1, x_2 является обратимым элементом кольца \mathbb{Z}_{p^k} . Пусть для определенности этот элемент есть x_1 . Тогда в множестве H найдется элемент вида $(1, h_1)$. Заметим, что:

$$\varphi_k((1, h_1)) = (1 \bmod p^{k-1}, h_1 \bmod p^{k-1}) = (1, h_1 \bmod p^{k-1}) \neq 0.$$

В силу полусопряженности A_{p^k} и A_p элемент $\varphi_k((1, h_1))$ есть периодическая точка эндоморфизма A_p , что противоречит тому, что $(0, 0)$ есть единственная периодическая точка эндоморфизма A_p . Полученное противоречие доказывает достаточность при $t = 1$.

3) Верность леммы для $t = 0$ следует непосредственно из того, что она верна при $t = 1$ и $t = 2$.

Доказательство завершено.

Следствие 2.5 Эндоморфизм A_{p^k} имеет подгруппу периодических точек, изоморфную $\bigoplus_{i=1}^t \mathbb{Z}_{p^k}$ в том и только том случае, когда его характеристический многочлен χ_{p^k} имеет ноль своим корнем кратности $2 - t$.

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из леммы 2.6 и леммы 2.5 при $n = 2$.

Доказательство завершено.

Лемма 2.7 Пусть эндоморфизм $A_{p^k}: \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k} \rightarrow \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k}$ имеет подгруппу периодических точек, изоморфную \mathbb{Z}_{p^k} . Тогда точка $x \in \mathbb{Z}_{p^k} \oplus \mathbb{Z}_{p^k}$ является периодической в том и только том случае, когда существует $\lambda \in \mathbb{Z}_{p^k}$, обратимое в кольце \mathbb{Z}_{p^k} , такое, что $A_{p^k}x = \lambda x$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть x принадлежит подгруппе P периодических точек эндоморфизма A_{p^k} . Из того, что подгруппа P изоморфна циклической группе \mathbb{Z}_{p^k} следует, что ограничение A_{p^k} на P имеет вид $x \mapsto \lambda x$, а из того, что все точки P периодические следует, что λ обратимо в кольце \mathbb{Z}_{p^k} .

Докажем достаточность. Пусть $A_{p^k}x = \lambda x$ при некотором обратимом $\lambda \in \mathbb{Z}_{p^k}$. Так как λ обратимо, то найдется такое число m , что $\lambda^m = 1$ в кольце \mathbb{Z}_{p^k} . Тогда, $A_{p^k}^m x = A_{p^k}^{m-1} \lambda x = \lambda A_{p^k}^{m-1} x = \lambda^m x = x$, следовательно x является периодической точкой.

Доказательство завершено.

Доказательство теоремы 1.1. Утверждение теоремы немедленно следует из лемм 2.1, 2.5, 2.7.

Доказательство завершено.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01041), за исключением доказательства лемм 2.4 и 2.5, полученных в рамках выполнения программы ЦФИ (проект ТЗ-100) НИУ ВШЭ за 2019 г.

Авторы выражают благодарность В. З. Гринесу за постановку задачи и полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Franks, “Anosov diffeomorphisms on tori”, *Proc. Symp. in Pure Math.*, **14** (1970), 61–93.
2. S. Newhouse, “On codimension one Anosov diffeomorphisms”, *Am. J. Math.*, **92**:3 (1970), 761–770.
3. A. Manning, “There are no new Anosov diffeomorphisms on tori”, *American Journal of Mathematics*, **96**:3 (1974), 422–429.
4. F. Przytycki, “Anosov endomorphisms”, *Stud. Math.*, **58**:3 (1976), 249–285.
5. R. Mane, C. Pugh, “Stability of endomorphisms”, *Lecture Notes in Math.*, **468** (1975), 175–184.
6. M. Zhang, “On the topologically conjugate classes of Anosov endomorphisms on tori”, *Chin Ann Math Ser B.*, **10** (1989), 416–425.
7. А. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999, 768 с.
8. Э. Б. Винберг, *Курс алгебры*, МЦНМО, М., 2011, 592 с.

Поступила 12.11.2019

MSC2010 37D05

On periodic points of torus endomorphisms

© E. D. Kurenkov¹, D. I. Mints²

Abstract. It is a well-known fact that Anosov endomorphisms of n -torus which are different from automorphisms and expanding endomorphisms are not structurally stable and, in general, are not conjugated to algebraic endomorphisms. Nevertheless, hyperbolic algebraic endomorphisms of torus are conjugated with their C^1 perturbations on the set of periodic points. Therefore the study of algebraic toral endomorphisms is very important. This paper is devoted to study of the structure of the sets of periodic and pre-periodic points of algebraic toral endomorphisms. Various group properties of this sets of points are studied. The density of periodic points for algebraic endomorphisms of n -torus is proved; it is clarified how the number of periodic and pre-periodic points with a fixed denominator depends on the properties of the characteristic polynomial. The Theorem 1.1 is the main result of this paper. It contains an algorithm that allows to split the sets of periodic and pre-periodic points of a given algebraic endomorphism of two-dimensional torus.

Key Words: Anosov endomorphism, algebraic toral endomorphism, periodic points, semiconjugacy

REFERENCES

1. J. Franks, “Anosov diffeomorphisms on tori”, *Proc. Symp. in Pure Math.*, **14** (1970), 61–93.
2. S. Newhouse, “On codimension one Anosov diffeomorphisms”, *Am. J. Math.*, **92**:3 (1970), 761–770.
3. A. Manning, “There are no new Anosov diffeomorphisms on tori”, *American Journal of Mathematics*, **96**:3 (1974), 422–429.
4. F. Przytycki, “Anosov endomorphisms”, *Stud. Math.*, **58**:3 (1976), 249–285.
5. R. Mane, C. Pugh, “Stability of endomorphisms”, *Lecture Notes in Math.*, **468** (1975), 175–184.
6. M. Zhang, “On the topologically conjugate classes of Anosov endomorphisms on tori”, *Chin Ann Math Ser B.*, **10** (1989), 416–425.
7. A. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, **54**, Cambridge University Press, 1995, 824 p.
8. E. B. Vinberg, *[Course of algebra]*, MCNMO, Moscow, 2011, 592 p.

Submitted 12.11.2019

¹Evgeniy D. Kurenkov, Doctoral Student, Department of Fundamental Mathematics, Research Assistant of Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12, Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3544-1143>, ekurenkov@hse.ru

²Dmitriy I. Mints, Research Assistant of Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics in Nizhny Novgorod (25/12, Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0329-6946>, dmincz@hse.ru

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201904.488-506

УДК 532.5: 539.3: 517.968.74

Динамика вязкоупругого элемента проточного канала

© Н. И. Еремеева¹, П. А. Вельмисов²

Аннотация. Рассматривается плоская задача аэрогидроупругости о малых колебаниях, возникающих при двустороннем обтекании вязкоупругого элемента, расположенного на прямолинейной стенке бесконечного канала. Сформулирована математическая модель, описывающая задачу в линейной постановке и соответствующая малым возмущениям однородных дозвуковых потоков и малым прогибам вязкоупругого элемента. С помощью методов теории функций комплексного переменного решение задачи сведено к исследованию интегро-дифференциального уравнения с частными производными относительно функции прогиба элемента. Для решения этого уравнения предложен численный метод, основанный на применении метода Бубнова-Галеркина, с последующим сведением получаемой системы интегро-дифференциальных уравнений к векторному уравнению Вольтерра второго рода. На основе разработанного численного метода проведено моделирование на ЭВМ динамики деформируемого элемента.

Ключевые слова: аэрогидродинамическое воздействие, вязкоупругий элемент, аэрогидроупругость, интегро-дифференциальное уравнение, метод Бубнова-Галеркина, векторное уравнение Вольтерра второго рода, теория функции комплексного переменного

1. Введение

При проектировании конструкций и устройств, обтекаемых потоком жидкости или газа, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости деформируемых элементов.

Теории взаимодействия деформируемых тел с потоком жидкости или газа посвящено много теоретических и экспериментальных исследований. Среди работ по данной тематике отметим [1–9].

Предметом исследований в данной статье являются совместные малые колебания идеальной несжимаемой жидкости и вязкоупругого элемента, расположенного на прямолинейной стенке проточного канала бесконечной длины. При этом на вязкоупругий элемент воздействует как неограниченный поток над стенкой (распространяющийся в верхней полуплоскости), так и поток внутри канала, поперечный разрез которого имеет вид прямолинейной бесконечной полосы (Рис. 1.1)

Предполагаемая математическая модель может быть основой для решения задачи о динамике части ледяного покрова, толщина которого значительно меньше толщины

¹Еремеева Нина Игоревна, доцент кафедры высшей математики, Димитровградский инженерно-технологический институт – филиал ФГБОУ ВО Национальный исследовательский ядерный университет «МИФИ» (433351, г. Димитровград, ул. Куйбышева, д. 294), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6160-2572>, NIEremeeva@mephi.ru

²Вельмисов Петр Александрович, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО Ульяновский государственный технический университет (432027, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmiso@ulstu.ru

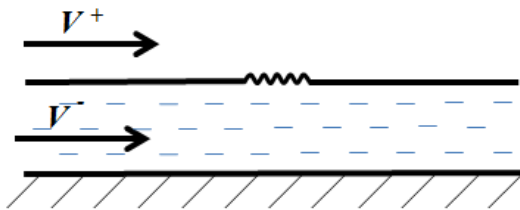


Рис. 1.1. Бесконечный резервуар с вязкоупругой вставкой

основной (бесконечно простирающейся) части ледяной поверхности. При этом учитывается взаимодействие ледяного покрова как с подлёдным течением, так и с ветровым потоком, распространяющимся над ледяной поверхностью.

2. Математическая модель

Введем систему координат, как показано на Рис. 2.1. На плоскости xOy , в которой происходят совместные колебания вязкоупругой вставки и жидкости, на прямой $y = h$ недеформируемым прямолинейным участкам стенки соответствуют промежутки $x \in (-\infty; 0] \cup [a; +\infty)$, вставке – $x \in (0; a)$. В бесконечно удаленных точках скорости жидкости (газа) сверху и снизу равны соответственно v^+ и v^- , и имеют направления, совпадающие с направлением Ox .

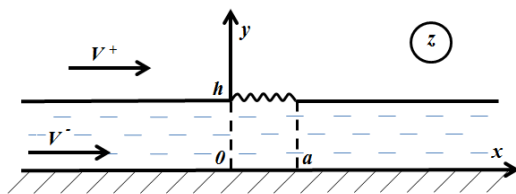


Рис. 2.1. Схема задачи

Обозначим через $\bar{w}(x, t)$ прогиб деформируемого элемента; $\bar{\phi}_1(x, y, t)$ – потенциал возмущенного потока жидкости над стенкой; $\bar{\phi}_2(x, y, t)$ – потенциал возмущенного течения в полосе. Будем считать изменения этих величин малыми, т. е. $\bar{w}(x, t) = \epsilon w(x, t)$, $\bar{\phi}_1(x, y, t) = v^+x + \epsilon \phi_1(x, y, t)$, $\bar{\phi}_2(x, y, t) = v^-x + \epsilon \phi_2(x, y, t)$, $\epsilon \ll 1$.

Тогда математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta \phi_1 \equiv \phi_{1xx} + \phi_{1yy} = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y > h; \quad (2.1)$$

$$\Delta \phi_2 \equiv \phi_{2xx} + \phi_{2yy} = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty), \quad y \in (0, h); \quad (2.2)$$

$$\phi_{1y}(x, h, t) = 0, \quad x \in (-\infty; 0] \cup [a; +\infty); \quad (2.3)$$

$$\phi_{1y}(x, h, t) = w_t + v^+ w_x, \quad x \in (0; a); \quad (2.4)$$

$$\phi_{2y}(x, h, t) = 0, \quad x \in (-\infty; 0] \cup [a; +\infty); \quad (2.5)$$

$$\phi_{2y}(x, h, t) = w_t + v^- w_x, \quad x \in (0; a); \quad (2.6)$$

$$\phi_{2y}(x, 0, t) = 0, \quad x \in (-\infty; +\infty); \quad (2.7)$$

$$|\nabla\phi_1|^2 = \left(\phi_{1_x}^2 + \phi_{1_y}^2 + \phi_{1_t}^2\right) = 0, \quad y > h, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty; \quad (2.8)$$

$$|\nabla\phi_2|^2 = \left(\phi_{2_x}^2 + \phi_{2_y}^2 + \phi_{2_t}^2\right) = 0, \quad y \in (0, h), x \rightarrow -\infty; \quad (2.9)$$

$$L(w) = \rho_1 (\phi_{1_t} + v^+ \phi_{1_x}) - \rho_2 (\phi_{2_t} + v^- \phi_{2_x}) + P_2 - P_1 + \frac{1}{2} \rho_1 v^{+2} - \frac{1}{2} \rho_2 v^{-2}, \quad x \in (0, a), y = h; \quad (2.10)$$

где ρ_1, ρ_2 – плотности потоков; P_1, P_2 – давления в этих потоках в состоянии покоя, а оператор $L(w)$ задаётся формулой (см. [10–11])

$$L(w) = D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \int_0^t R_1(\tau, t) \frac{\partial^4 w(x, \tau)}{\partial x^4} d\tau \right] + P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \beta_1 \frac{\partial w}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} + \beta_0 \left[w - \int_0^t R_2(\tau, t) w(x, \tau) d\tau \right], \quad (2.11)$$

где D – изгибная жесткость; m – погонная масса; P – сжимающая (растягивающая) сила; $R_1(\tau, t), R_2(\tau, t)$ – ядра релаксации, характеризующие вязкоупругие свойства материала вставки и ее основания; β_1, β_2 – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 – коэффициент жёсткости основания.

3. Решение аэрогидродинамической задачи

Для решения задачи введем два комплексных потенциала (аналогичные задачи рассмотрены в работе [11]):

1) $f_1(z, t) = \phi_1(x, y, t) + i\psi_1(x, y, t)$ для точек $\mathcal{K}_1 = \{z = x + iy, \operatorname{Im} z > h\}$ над прямой $y = h$;

2) $f_2(z, t) = \phi_2(x, y, t) + i\psi_2(x, y, t)$ для точек $\mathcal{K}_2 = \{z = x + iy, 0 < \operatorname{Im} z < h\}$ внутри полосы.

Из условий Коши-Римана [12] для функции $f_1(z, t)$ получим

$$\psi_{1_x} = -\phi_{1_y} \Rightarrow -\psi_1(x, h, t) = \int_{-\infty}^x \phi_{1_y}(\tau, h, t) d\tau.$$

Обозначая

$$\psi_1(x, h, t) = -\omega_1(x, t)$$

и используя (2.3) и (2.4), получим:

$$\omega_1(x, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in (-\infty; 0] \cup [a; +\infty), \\ \int_0^x (w_t(\tau, t) + v^+ w_\tau(\tau, t)) d\tau, & \text{если } x \in (0; a). \end{cases} \quad (3.1)$$

При этом было учтено, что $\int_0^a (w_t + v^+ w_x) dx = 0$ (следствие несжимаемости).

Рассмотрим функцию $F(z, t) = i f_1(z, t)$. Заметим, что

$$\operatorname{Re}(F(z, t))|_{z=x+ih} = -\operatorname{Im}(f_1(z, t))|_{z=x+ih} = \omega_1(x, t).$$

Тогда, согласно интегралу Шварца для верхней полуплоскости [12]:

$$F(z, t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_1(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z} + i C(t), \quad C(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow f_1(z, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \omega_1(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z} + C(t).$$

Дифференцируя функцию $f_1(z, t)$ по z и по t , получим:

$$f_{1z}(z, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \omega_1(\tau, t) \left(\frac{1}{\tau - z} \right)_z d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^a \omega_1(\tau, t) \left(\frac{1}{\tau - z} \right)_\tau d\tau = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \omega_{1\tau}(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z},$$

$$f_{1t}(z, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \omega_{1t}(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z} + C'(t).$$

Воспользовавшись формулами Сохоцкого [12], найдем

$$\lim_{z \rightarrow x+hi} f_{1t}(z, t) = -\frac{1}{\pi} \lim_{z \rightarrow x+hi} \int_0^a \frac{\omega_{1t}(\tau, t)}{\tau - z} d\tau + C'(t) = -i\omega_{1t}(x, t) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\omega_{1t}(\tau, t)}{\tau - x} d\tau + C'(t).$$

Аналогично:

$$\lim_{z \rightarrow x+hi} f_{1z}(z, t) = -i\omega_{1x}(x, t) - \frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\omega_{1\tau}(\tau, t)}{\tau - x} d\tau.$$

С другой стороны,

$$f_{1t}(x, h, t) = \phi_{1t}(x, h, t) + i\psi_{1t}(x, h, t), \quad f_{1z}(x, h, t) = \phi_{1x}(x, h, t) + i\psi_{1x}(x, h, t).$$

Тогда, приравняв действительные части $f_{1t}(x, h, t)$ и $f_{1z}(x, h, t)$, получим:

$$\phi_{1x}(x, h, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\omega_{1\tau}(\tau, t)}{\tau - x} d\tau, \quad (3.2)$$

$$\phi_{1t}(x, h, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\omega_{1t}(\tau, t)}{\tau - x} d\tau + \operatorname{Re} C'(t).$$

Заметим, что из условия (2.8) следует, что $\operatorname{Re} C'(t) = 0$, тогда:

$$\phi_{1t}(x, h, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{\omega_{1t}(\tau, t)}{\tau - x} d\tau. \quad (3.3)$$

Рассмотрим теперь второй комплексный потенциал $f_2(z, t) = \phi_2(x, y, t) + i\psi_2(x, y, t)$, заданный в $\mathcal{X}_2 = \{z = x + iy, 0 < \operatorname{Im} z < h\}$.

Найдем функцию, которая конформно отображает бесконечную полосу на верхнюю полуплоскость. В качестве такой функции можно взять $\zeta = -e^{-\frac{\pi}{h}z}$ (Рис. 3.1).

При этом отображении точки нижней границы полосы $\{z = x + 0i, x \in (-\infty, +\infty)\}$ переходят в отрицательную часть действительной оси $\{\zeta = \xi + 0i, \xi \in (-\infty, 0)\}$, левая часть верхней границы полосы $\{z = x + hi, x \in (-\infty, 0)\}$ — в

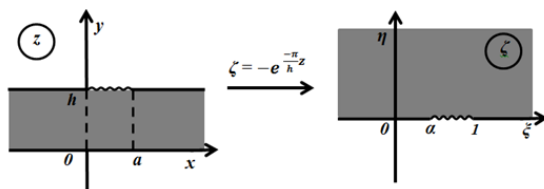


Рис. 3.1. Отображение бесконечной полосы на верхнюю полуплоскость

луч $\{\zeta = \xi + 0i, \xi \in (1, +\infty)\}$, правая часть верхней границы полосы $\{z = x + hi, x \in (0, +\infty)\}$ – в интервал $\{\zeta = \xi + 0i, \xi \in (0, 1)\}$. Заметим, что точки вязкоупругой вставки $\{z = x + hi, x \in (0, a)\}$ отражаются в $\{\zeta = \xi + 0i, \xi \in (\alpha, 1)\}$, $\alpha = e^{-\frac{\pi}{h}a}$.

Пусть

$$G(z, t) = i f_2(z, t) = i \phi_2(x, y, t) - \psi_2(x, y, t).$$

Тогда

$$G_z(z, t) = i \phi_{2x}(x, y, t) - \psi_{2x}(x, y, t) = i \phi_{2x}(x, y, t) + \phi_{2y}(x, y, t).$$

Следовательно, $Re(G_z(z, t)) = \phi_{2y}(x, y, t)$, а значит,

$$Re(G_z(z(\zeta), t))|_{\zeta=\xi+0i} = \begin{cases} \phi_{2y}(x, 0, t), & x \in (-\infty, +\infty), & \text{если } \xi \in (-\infty; 0], \\ \phi_{2y}(x, h, t), & x \in (0, a), & \text{если } \xi \in (\alpha; 1), \\ \phi_{2y}(x, h, t), & x \in (-\infty, 0] \cup [a, +\infty), & \text{если } \xi \in [0, \alpha] \cup [1, +\infty). \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \in (-\infty; 0], \\ w_t(x(\xi), t) + v^- w_x(x(\xi), t), & \text{если } \xi \in (\alpha; 1), \\ 0, & \text{если } \xi \in [0, \alpha] \cup [1, +\infty). \end{cases}$$

Обозначим

$$\omega_2(\xi, t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \xi \in (-\infty; \alpha] \cup [1, +\infty), \\ w_t(x(\xi), t) + v^- w_x(x(\xi), t), & \text{если } \xi \in (\alpha; 1). \end{cases} \quad (3.4)$$

Тогда по лемме Шварца для верхней полуплоскости:

$$G_z(z(\zeta), t) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + i C(t), \quad C(t) \in \mathbb{R}.$$

Значит,

$$f_{2z}(z(\zeta), t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \zeta} + C(t), \quad C(t) \in \mathbb{R}.$$

По формуле Сохоцкого:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \xi + 0i} f_{2z}(z(\zeta), t) = -i \omega_2(\xi, t) - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{\tau - \xi} d\tau + C(t).$$

С другой стороны,

$$f_{2_z}(x(\xi), h, t) = \phi_{2_x}(x(\xi), h, t) + i\psi_{2_x}(x(\xi), h, t).$$

Приравняв действительные части с учётом того, что $C(t) \in \mathbb{R}$, получим:

$$\phi_{2_x}(x(\xi), h, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \xi} + C(t).$$

Отметим, что если $z = x + ih$, $x \rightarrow -\infty$, то $\zeta \rightarrow \xi + 0i$, $\xi \rightarrow +\infty$, значит,

$$\phi_{2_x}(-\infty, h, t) = -\lim_{\xi \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \xi} + C(t) = C(t).$$

При этом $C(t) = 0$, т. к. из условия (2.9) следует $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi_{2_x}(x, h, t) = 0$.

Тогда

$$\phi_{2_x}(x(\xi), h, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \xi}, \quad (3.5)$$

а также

$$f_{2_z}(z(\zeta), t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \zeta}. \quad (3.6)$$

Отметим еще один факт, следующий из условия несжимаемости:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t) d\tau}{\tau} &= \int_{\alpha}^1 \frac{w_t(x(\xi), t) + v^- w_x(x(\xi), t)}{\xi} d\xi = \left[\begin{array}{l} \xi = e^{-\frac{\pi}{h}x} \\ dx(\xi) = -\frac{h}{\pi\xi} d\xi \\ x \in (a, 0) \end{array} \right] = \\ &= \frac{\pi}{h} \int_0^a (w_t(x, t) + v^- w_x(x, t)) dx = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для нахождения $\phi_{2_t}(x(\xi), 0, t)$ восстановим функцию $f_2(z(\zeta), t)$ по известной производной $f_{2_z}(z(\zeta), t)$. Поскольку

$$\frac{d\zeta}{dz} = \frac{\pi}{h} e^{-\frac{\pi}{h}z} = -\frac{\pi}{h} \zeta,$$

то, используя (3.6), получим:

$$f_{2_{\zeta}}(z(\zeta), t) = f_{2_z}(z(\zeta), t) \cdot \frac{dz}{d\zeta} = \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - \zeta} \cdot \frac{h}{\pi \zeta} = \frac{h}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{(\tau - \zeta) \zeta} d\tau.$$

Поскольку

$$\frac{1}{(\tau - \zeta) \zeta} = \frac{1}{\tau - \zeta} + \frac{1}{\zeta},$$

то

$$f_{2\zeta}(z(\zeta), t) = \frac{h}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{(\tau - \zeta)\tau} d\tau + \frac{h}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{\zeta\tau} d\tau = \frac{h}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{(\tau - \zeta)\tau} d\tau.$$

Найдем функцию $f_2(z(\zeta), t)$, интегрируя по ζ :

$$f_2(z(\zeta), t) = -\frac{h}{\pi^2} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\tau, t)}{\tau} \ln(\tau - \zeta) d\tau + \hat{C}(t).$$

Введем обозначение

$$\tilde{\omega}_2(\tau, t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} d\theta. \quad (3.8)$$

Интегрируем по частям, учитывая, что $\tilde{\omega}_2(1, t) = \tilde{\omega}_2(\alpha, t)$ (см. (3.7)):

$$\begin{aligned} f_2(z(\zeta), t) + \hat{C}(t) &= -\frac{h}{\pi} \left(\ln(\tau - \zeta) \tilde{\omega}_2(\tau, t) \Big|_{\alpha}^1 - \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_2(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau \right) + \\ &+ \hat{C}(t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_2(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau + \hat{C}(t). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$f_{2t}(z(\zeta), t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2t}(\tau, t)}{\tau - \zeta} d\tau + \hat{C}'(t). \quad (3.9)$$

По формуле Сохоцкого:

$$\lim_{\zeta \rightarrow \xi + 0i} f_{2t}(z(\zeta), t) = i h \tilde{\omega}_{2t}(\xi, t) + \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2t}(\tau, t)}{\tau - \xi} d\tau + \hat{C}'(t).$$

Значит,

$$\phi_{2t}(x(\xi), h, t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2t}(\tau, t)}{\tau - \xi} d\tau + \operatorname{Re} \hat{C}'(t).$$

Если $z = x + hi$, $x \rightarrow -\infty$, то $\zeta = \xi + 0i$, $\xi \rightarrow +\infty$, тогда $\operatorname{Re} \hat{C}'(t) = 0$, следовательно,

$$\phi_{2t}(x(\xi), h, t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2t}(\tau, t)}{\tau - \xi} d\tau. \quad (3.10)$$

4. Исследование поведения найденного решения при $x \rightarrow +\infty$

Оценим величины ϕ_{2x}^2 , ϕ_{2y}^2 , ϕ_{2t}^2 при $x \rightarrow +\infty$. Если $z = x + iy$, $x \rightarrow +\infty$, $y \in (0, h)$, то $\zeta = -e^{-\frac{\pi}{h}x} \cdot e^{-\frac{\pi i}{h}y} \rightarrow 0$, т. е. $\xi \rightarrow 0$, $\eta \rightarrow 0$ для $\forall y \in (0, h)$.

Используя (3.6) и (3.7), получим:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2_z}(z(\zeta), t) = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \omega_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau} = 0 \Rightarrow \phi_{2_x}(+\infty, y, t) = 0, \phi_{2_y}(+\infty, y, t) = 0,$$

значит,

$$(\phi_{2_x}^2 + \phi_{2_y}^2)_{+\infty} = 0. \quad (4.1)$$

Из равенств (3.9)–(3.10) следует:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_{2_t}(z(\zeta), t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2_t}(\tau, t)}{\tau} d\tau + \hat{C}'(t), \phi_{2_t}(+\infty, y, t) = \frac{h}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2_t}(\tau, t)}{\tau} d\tau.$$

Рассмотрим интеграл $\int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2_t}(\tau, t)}{\tau} d\tau$. Используя (3.8) и меняя порядок интегрирования, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^1 \frac{\tilde{\omega}_{2_t}(\tau, t)}{\tau} d\tau &= -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{1}{\tau} d\tau \int_{\tau}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} d\theta \int_{\alpha}^{\theta} \frac{1}{\tau} d\tau = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} \cdot \ln \tau|_{\alpha}^{\theta} d\theta = \\ &= \frac{\ln \alpha}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} d\theta - \frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} \cdot \ln \theta d\theta = -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 \frac{\omega_2(\theta, t)}{\theta} \cdot \ln \theta d\theta = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{\alpha}^1 (w_t(x(\xi), t) + v^- w_x(x(\xi), t)) \cdot \frac{\ln \xi}{\xi} d\xi = \left[\begin{array}{l} \xi = e^{-\frac{\pi}{h}x} \\ dx(\xi) = -\frac{h}{\pi \xi} d\xi \\ x \in (a, 0) \end{array} \right] = \\ &= \frac{\pi}{h^2} \int_0^a (w_t(x, t) + v^- w_x(x, t)) \cdot x dx. \end{aligned}$$

Заметим, что $\int_0^a (w_t(x, t) + v^- w_x(x, t)) dx = 0$ для любого значения t , т. е.

$$\forall t: \Omega(t) = \int_0^a (w_t(x, t) + v^- w_x(x, t)) dx = 0,$$

следовательно,

$$\forall t: \frac{\partial \Omega(t)}{\partial t} = \int_0^a (w_{tt}(x, t) + v^- w_{xt}(x, t)) dx = 0.$$

Тогда $\forall y \in (0, h), \forall t \phi_{2_t}(+\infty, y, t)$ – ограниченная величина.

Таким образом, учитывая (4.1), можно утверждать, что на бесконечном удалении справа в канале имеет место однородный поток, давление в котором является ограниченной величиной.

5. Сведение задачи к решению интегро-дифференциального уравнения

Используя равенства (3.1)–(3.3), получим:

$$\phi_{1t}(x, 0, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a d\tau \int_0^\tau \frac{w_{tt}(\theta, t)}{\tau - x} d\theta - \frac{v^+}{\pi} \int_0^a \frac{w_t(\tau, t)}{\tau - x} d\tau, \quad (5.1)$$

$$\phi_{1x}(x, 0, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^a \frac{w_t(\tau, t) + v^+ w_\tau(\tau, t)}{\tau - x} d\tau. \quad (5.2)$$

Учитывая (3.4), а также то, что точки вставки $\{z = x + i h, x \in (0, a)\}$ отражаются в интервал $\{\zeta = \xi + i 0, \xi \in (\alpha, 1)\}$, $\xi = e^{-\frac{\pi}{h}x}, \alpha = e^{-\frac{\pi}{h}a}$, запишем (3.5) в виде:

$$\begin{aligned} \phi_{2x}(x, 0, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_\alpha^1 (w_t(\theta, t) + v^- w_\theta(\theta, t)) \Big|_{\theta = -\frac{h}{\pi} \ln \tau} \frac{d\tau}{\tau - e^{-\frac{\pi}{h}x}} = \\ &= -\frac{1}{h} \int_0^a (w_t(\theta, t) + v^- w_\theta(\theta, t)) \frac{d\theta}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\theta - x)}} = -\frac{1}{h} \int_0^a (w_t(\tau, t) + v^- w_\tau(\tau, t)) \frac{d\tau}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\tau - x)}}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Аналогично преобразуем (3.10), используя (3.8):

$$\begin{aligned} \phi_{2t}(x, 0, t) &= -\frac{h}{\pi} \int_\alpha^1 d\theta \int_\alpha^\theta \frac{w_{tt}(\varpi(\theta), t) + v^- w_{\varpi t}(\varpi(\theta), t)}{(\tau - \xi(x)) \theta} d\tau = \left[\begin{array}{l} \xi(x) = e^{-\frac{\pi}{h}x} \\ \varpi(\theta) = -\frac{h}{\pi} \ln \theta \end{array} \right] = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^a (w_{tt}(\tau, t) + v^- w_{\tau t}(\tau, t)) \ln |e^{-\frac{\pi}{h}\tau} - e^{-\frac{\pi}{h}x}| d\tau. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Подставив (5.1)–(5.4) в правую часть уравнения (2.10), запишем это уравнение в виде:

$$\begin{aligned} L(w) &= -\frac{\rho_1}{\pi} \int_0^a d\tau \int_0^\tau \frac{w_{tt}(\theta, t)}{\tau - x} d\theta - \frac{\rho_1 v^+}{\pi} \int_0^a \frac{2w_t(\tau, t) + v^+ w_\tau(\tau, t)}{\tau - x} d\tau + \frac{1}{2} \rho_1 v^{+2} - \frac{1}{2} \rho_2 v^{-2} + \\ &+ \frac{\rho_2 v^-}{h} \int_0^a (w_t(\tau, t) + v^- w_\tau(\tau, t)) \frac{d\tau}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\tau - x)}} + \frac{\rho_2}{\pi} \int_0^a (w_{tt}(\tau, t) + \\ &+ v^- w_{\tau t}(\tau, t)) \ln |e^{-\frac{\pi}{h}\tau} - e^{-\frac{\pi}{h}x}| d\tau + P_2 - P_1. \end{aligned}$$

Таким образом, учитывая вид оператора $L(w)$ (2.11), приведём решение задачи к решению интегро-дифференциального уравнения относительно функции прогиба вязкоупругого элемента $w(x, t)$:

$$-\frac{\rho_1}{\pi} \int_0^a d\tau \int_0^\tau \frac{w_{tt}(\theta, t)}{\tau - x} d\theta - \frac{\rho_1 v^+}{\pi} \int_0^a \frac{2w_t(\tau, t) + v^+ w_\tau(\tau, t)}{\tau - x} d\tau + \frac{1}{2} \rho_1 v^{+2} - \frac{1}{2} \rho_2 v^{-2} + P_2 - P_1 +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\rho_2 v^-}{h} \int_0^a (w_t(\tau, t) + v^- w_\tau(\tau, t)) \frac{d\tau}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\tau-x)}} + \\
& + \frac{\rho_2}{\pi} \int_0^a (w_{tt}(\tau, t) + v^- w_{\tau t}(\tau, t)) \ln |e^{-\frac{\pi}{h}\tau} - e^{-\frac{\pi}{h}x}| d\tau - \\
& - D \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \int_0^t R_1(\tau, t) \frac{\partial^4 w(x, \tau)}{\partial x^4} d\tau \right] - \beta_0 \left[w - \int_0^t R_2(\tau, t) w(x, \tau) d\tau \right] - P \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \\
& - \beta_1 \frac{\partial w}{\partial t} - \beta_2 \frac{\partial^5 w}{\partial x^4 \partial t} = 0, \quad x \in (0, a).
\end{aligned} \tag{5.5}$$

6. Сведение задачи к системе интегро-дифференциальных уравнений методом Бубнова-Галеркина

Для численного решения уравнения (5.5) применим метод Бубнова-Галёркина [13]. Будем считать, что концы вязкоупругой вставки закреплены шарнирно, тогда

$$w(0, t) = w(a, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w(0, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(a, t)}{\partial x^2} = 0.$$

Пусть, кроме того, выполняются начальные условия:

$$w(x, 0) = h_1(x), \quad \frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} = h_2(x).$$

Отметим, что функция $h_2(x)$ для обеспечения выполнения условия несжимаемости должна обладать некоторым свойством. Поскольку

$$\int_0^a (w_t(x, t) + v^\pm w_x(x, t)) dx = \int_0^a w_t(x, t) dx + v^\pm (w(a, t) - w(0, t)) = 0,$$

то при любых фиксированных \tilde{t} площадь, ограниченная графиком $y = w_t(x, \tilde{t})$, $x \in (0, a)$, равна нулю, т. е. $\int_0^a h_2(x) dx = 0$.

Кроме того, $\frac{d}{dt} \int_0^a w(x, t) dx = 0$, а значит, при любых фиксированных \tilde{t} площадь, ограниченная графиком $y = w(x, \tilde{t})$, $x \in (0, a)$, остается неизменной, а именно равной площади, ограниченной графиком $y = h_1(x)$.

Согласно методу Бубнова-Галёркина, решение задачи будем искать в виде

$$w(x, t) = \sum_{k=1}^N y_k(t) \sin \frac{\pi k x}{a}. \tag{6.1}$$

Подставим разложение (6.1) в уравнение (5.5), умножим полученную невязку уравнения на $\sin \frac{\pi n x}{a}$ и проинтегрируем по отрезку $[0, a]$. В результате получим систему N

интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N \tilde{a}_{nk} y_k''(t) + \sum_{k=1}^N \tilde{b}_{nk} y_k'(t) + \sum_{k=1}^N \tilde{d}_{nk} y_k(t) = \\ & = \tilde{m}_n^{(1)} \int_0^t R_1(\tau, t) y_n(\tau) d\tau + \tilde{m}_n^{(2)} \int_0^t R_2(\tau, t) y_n(\tau) d\tau + \tilde{c}_n, \end{aligned} \quad (6.2)$$

в которой

$$\begin{aligned} \tilde{a}_{nk} &= \frac{a\rho_1}{\pi^2 k} \int_0^a dx \int_0^a \frac{(\cos \frac{\pi k \tau}{a} - 1) \sin \frac{\pi n x}{a}}{\tau - x} d\tau + \\ &+ \frac{\rho_2}{\pi} \int_0^a dx \int_0^a \sin \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a} \ln |e^{-\frac{\pi}{h} \tau} - e^{-\frac{\pi}{h} x}| d\tau - \\ &\quad - \frac{a}{2} m \cdot \delta_{kn}; \\ \tilde{b}_{nk} &= -\frac{2v^+ \rho_1}{\pi} \int_0^a dx \int_0^a \frac{\sin \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a}}{\tau - x} d\tau + \frac{\rho_2 v^-}{h} \int_0^a dx \int_0^a \frac{\sin \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a}}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\tau-x)}} d\tau + \\ &+ \frac{k\rho_2 v^-}{a} \int_0^a dx \int_0^a \cos \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a} \ln |e^{-\frac{\pi}{h} \tau} - e^{-\frac{\pi}{h} x}| d\tau - \frac{a}{2} \left(\beta_2 \left(\frac{\pi k}{a} \right)^4 + \beta_1 \right) \delta_{kn}; \\ \tilde{d}_{nk} &= -\frac{kv^{+2} \rho_1}{a} \int_0^a dx \int_0^a \frac{\cos \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a}}{\tau - x} d\tau + \frac{\rho_2 v^{-2} \pi k}{ah} \int_0^a dx \int_0^a \frac{\cos \frac{\pi k \tau}{a} \sin \frac{\pi n x}{a}}{1 - e^{\frac{\pi}{h}(\tau-x)}} d\tau - \\ &\quad - \frac{a}{2} \left(D \left(\frac{\pi k}{a} \right)^4 - P \left(\frac{\pi k}{a} \right)^2 + \beta_0 \right) \delta_{kn}; \\ \tilde{m}_n^{(1)} &= -\frac{aD}{2} \left(\frac{\pi n}{a} \right)^4; \quad \tilde{m}_n^{(2)} = -\frac{a}{2} \beta_0; \quad \delta_{kn} = \begin{cases} 1, & \text{если } n = k, \\ 0, & \text{если } n \neq k, \end{cases} \quad n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

7. Приведение системы интегро-дифференциальных уравнений к векторному уравнению Вольтера II рода

Пусть

$$\begin{aligned} \vec{v}_1(t) &= \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \dots \\ y_N(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2(t) = \begin{pmatrix} y_1'(t) \\ y_2'(t) \\ \dots \\ y_N'(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_3(t) = \begin{pmatrix} y_1''(t) \\ y_2''(t) \\ \dots \\ y_N''(t) \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \dots \\ \tilde{c}_N \end{pmatrix}, \\ \tilde{A} &= \begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1N} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{a}_{N1} & \tilde{a}_{N2} & \dots & \tilde{a}_{NN} \end{pmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \dots & \tilde{b}_{1N} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \dots & \tilde{b}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{b}_{N1} & \tilde{b}_{N2} & \dots & \tilde{b}_{NN} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{d}_{11} & \tilde{d}_{12} & \dots & \tilde{d}_{1N} \\ \tilde{d}_{21} & \tilde{d}_{22} & \dots & \tilde{d}_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{d}_{N1} & \tilde{d}_{N2} & \dots & \tilde{d}_{NN} \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_i = \begin{pmatrix} \tilde{m}_1^{(i)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \tilde{m}_2^{(i)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{m}_N^{(i)} \end{pmatrix},$$

$$P = \tilde{A}^{-1} \tilde{B}, \quad Z = \tilde{A}^{-1} \tilde{D}, \quad \vec{c}_3 = \tilde{A}^{-1} \vec{c}, \quad G_i = \tilde{A}^{-1} \tilde{M}_i, \quad i = 1, 2.$$

Тогда система (6.2) приводится к матричному уравнению

$$\vec{v}_3(t) + P \cdot \vec{v}_2(t) + Z \cdot \vec{v}_1(t) = G_1 \int_0^t R_1(\tau, t) \vec{v}_1(\tau) d\tau + G_2 \int_0^t R_2(\tau, t) \vec{v}_1(\tau) d\tau + \vec{c}_3,$$

которое, в свою очередь, можно записать в виде интегральной системы

$$\begin{cases} \vec{v}_1(t) = \int_0^t \vec{v}_2(\tau) d\tau + \vec{c}_1, \\ \vec{v}_2(t) = \int_0^t \vec{v}_3(\tau) d\tau + \vec{c}_2, \\ \vec{v}_3(t) = \int_0^t [(G_1 R_1(\tau, t) + G_2 R_2(\tau, t)) \vec{v}_1(\tau) - P \vec{v}_3(\tau) - Z \vec{v}_2(\tau)] d\tau + \vec{c}_3. \end{cases},$$

$$\vec{c}_i = \begin{pmatrix} c_1^{(i)} \\ \dots \\ c_N^{(i)} \end{pmatrix}, \quad c_k^{(i)} = \frac{2}{a} \int_0^a \sin \frac{\pi k x}{a} h_i(x) dx, \quad i = 1, 2.$$

После введения обозначений:

$$\vec{V}(t) = \begin{pmatrix} \vec{v}_1(t) \\ \vec{v}_2(t) \\ \vec{v}_3(t) \end{pmatrix}, \quad R(\tau, t) = \begin{pmatrix} O & E & O \\ O & O & E \\ G_1 R_1(\tau, t) + G_2 R_2(\tau, t) & -Z & -P \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} \vec{c}_1 \\ \vec{c}_2 \\ \vec{c}_3 \end{pmatrix},$$

где O и E – нулевая и единичная квадратные матрицы порядка N , приходим к векторному уравнению Вольтерра второго рода:

$$\vec{V}(t) = \int_0^t R(\tau, t) \vec{V}(\tau) d\tau + \vec{C}. \quad (7.1)$$

Применение подобного метода решения можно найти в работах [14], [15].

8. Решение уравнения Вольтерра II рода методом итераций

В качестве метода численного решения уравнения Вольтерра II рода выберем метод итераций [16].

Для организации итерационного процесса нулевое приближения примем равным нулевому вектору:

$$\vec{V}^0 = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^0 \\ \vec{v}_2^0 \\ \vec{v}_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \\ \vec{0} \end{pmatrix},$$

а каждое следующее приближение $\vec{V}^{k+1} = \begin{pmatrix} \vec{v}_1^{k+1} \\ \vec{v}_2^{k+1} \\ \vec{v}_3^{k+1} \end{pmatrix}$ будем находить по формулам

$$\begin{cases} \vec{v}_1^{k+1}(t) = \int_0^t \vec{v}_2^k(\tau) d\tau + \vec{c}_1, \\ \vec{v}_2^{k+1}(t) = \int_0^t \vec{v}_3^k(\tau) d\tau + \vec{c}_2, \\ \vec{v}_3^{k+1}(t) = \int_0^t [(G_1 R_1(\tau, t) + G_2 R_2(\tau, t)) \vec{v}_1^k(\tau) - P \vec{v}_3^k(\tau) - Z \vec{v}_2^k(\tau)] d\tau - Z \vec{c}_1 - P \vec{c}_2 + \vec{c}_3. \end{cases}$$

9. Примеры численного расчета задачи

Получим на основе описанного метода численное решение задачи при фиксированных исходных данных.

Пусть высота прямоугольного резервуара $h = 1$, вязкоупругая вставка изготовлена из алюминия, имеет длину $a = 1$ и толщину $h_* = 0,001$ (все величины приведены в СИ [кг, м, с]). Плотность алюминия $\rho_* = 2700$, модуль Юнга $E = 7 \cdot 10^{10}$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,35$, следовательно, погонная масса вставки и коэффициент её изгибной жесткости равны $m = h_* \rho_* = 2,7$ и $D = EJ = \frac{E h_*^3}{12(1-\nu^2)} = 6,648$ соответственно.

Сверху вставку обтекает поток воздуха ($\rho_1 = 1,3$), скорость которого в бесконечно удалённой точке $v^+ = 1,0$, а снизу на вставку воздействует поток воды ($\rho_2 = 998$) со скоростью на бесконечности $v^- = 0,05$, при этом давления потоков в состоянии покоя равны соответственно $P_1 = 100000$, $P_2 = 101100$.

Другие параметры задачи примем равными $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = 1$, $R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}$, $P = -9000$, $h_1(x) = 0$, $h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$.

На рисунке 9.1 изображен график второго галёркинского приближения $w_2(x_0, t) = \sum_{k=1}^2 y_k(t) \sin \frac{\pi k x}{a}$, при фиксированном $x_0 = 0,1a$.

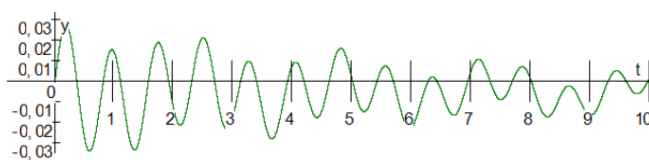


Рис. 9.1. График $w_2(0, 1a; t)$ при $a = 1$, $h = 1$, $D = 6,648$,
 $P = -9000$, $\rho_1 = 1,3$, $\rho_2 = 998$, $v^+ = 1$, $v^- = 0,05$, $P_1 = 100000$,
 $P_2 = 101100$, $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$,
 $R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}$, $h_1(x) = 0$, $h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$

Пусть теперь высота прямоугольного резервуара $h = 50$, вязкоупругая вставка изготовлена из льда, имеет длину $a = 50$ и толщину $h_* = 0,02$. Плотность льда $\rho_* = 948$, модуль Юнга $E = 5 \cdot 10^8$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,45$, тогда погонная масса вставки равна $m = h_* \rho_* = 18,98$, а коэффициент изгибной жёсткости $D = 606,06$.

На вставку воздействуют те же потоки воздуха и воды, для которых $v^+ = 1,0$, $v^- = 0,05$, $P_1 = 100000$, $P_2 = 100500$.

Другие коэффициенты примем равными $\beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, P = -20000, h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$.

На Рис. 9.2 изображен график второго галёркинского приближения $w_2(x_0, t) = \sum_{k=1}^2 y_k(t) \sin \frac{\pi k x}{a}$, при фиксированном $x_0 = 0,05a$.

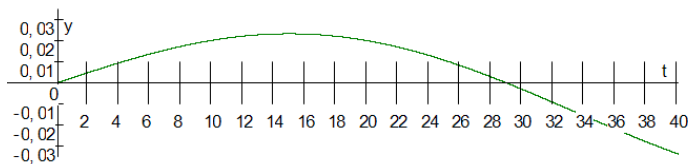


Рис. 9.2. График $w_2(0,05a; t)$ при $a = 50, h = 50, D = 606,06, P = -20000, \rho_1 = 1,3, \rho_2 = 998, v^+ = 1, v^- = 0,05, P_1 = 100000, P_2 = 100500, \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$

Одним из наиболее важных вопросов, возникающих при исследовании динамики деформируемых элементов конструкций, является вопрос устойчивости ([17–20]). Численное моделирование позволяет оценивать характер колебаний вязкоупругого элемента, а именно выяснять, являются ли колебания затухающими, или амплитуда неограниченно возрастает.

На Рис. 9.3 изображен график второго галёркинского приближения $w_2(x_0, t) = \sum_{k=1}^2 y_k(t) \sin \frac{\pi k x}{a}$, при фиксированном $x_0 = 0,7a$ и следующих значениях коэффициентов: $h = \pi, m = 18,96, \rho_* = 948, D = 606,06, \rho_1 = 1,3, v^+ = 0,5, \rho_2 = 998, v^- = 0,05, P_1 = 100000, P_2 = 102500, \beta_0 = 1, \beta_1 = 1, \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, P = 100, h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$.

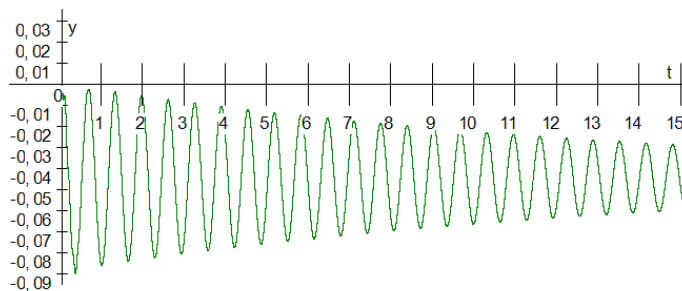


Рис. 9.3. График $w_2(0,7a; t)$ при $a = 1, h = \pi, D = 606,06, P = 100, \rho_1 = 1,3, \rho_2 = 998, v^+ = 0,5, v^- = 0,05, P_1 = 100000, P_2 = 102500, \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1, R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}, h_1(x) = 0, h_2(x) = 0,04 \sin 2\pi x$

Заметим, что амплитуда колебаний на этом графике уменьшается, то есть колебания имеют устойчивый характер.

На Рис. 9.4 представлены графики рассматриваемого галёркинского приближения при фиксированных t_n , полученные при тех же значениях коэффициентов.

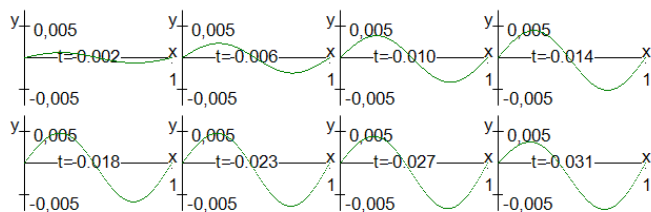


Рис. 9.4. График $w_2(x, t_n)$ при $a = 1$, $h = \pi$, $D = 606,06$, $P = 100$, $\rho_1 = 1,3$, $\rho_2 = 998$, $v^+ = 0,5$, $v^- = 0,05$, $P_1 = 100000$, $P_2 = 102500$, $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$, $R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}$, $h_1(x) = 0$, $h_2(x) = 0,05 \sin 2\pi x$

Изменим в условиях предыдущей задачи скорости потоков а на $v^- = 0,8$, $v^+ = 2$. График соответствующего второго галеркинського приближения изображен на Рис.

9.5. На Рис. 9.6 показаны соответствующие графики $w_2(x, t_n) = \sum_{k=1}^2 y_k(t_n) \sin \frac{\pi k x}{a}$ при фиксированных t_n .

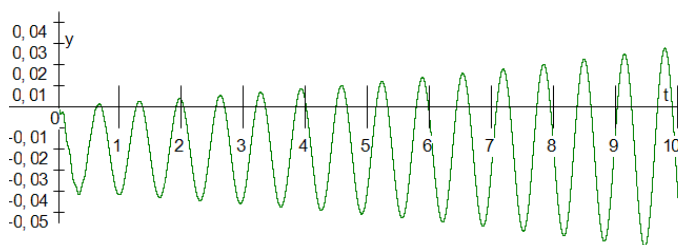


Рис. 9.5. График $w_3(0, 7a; t)$ при $a = 1$, $h = \pi$, $D = 606,06$, $P = 100$, $\rho_1 = 1,3$, $\rho_2 = 998$, $v^+ = 2$, $v^- = 0,8$, $P_1 = 100000$, $P_2 = 102500$, $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$, $R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}$, $h_1(x) = 0$, $h_2(x) = 0,05 \sin 2\pi x$

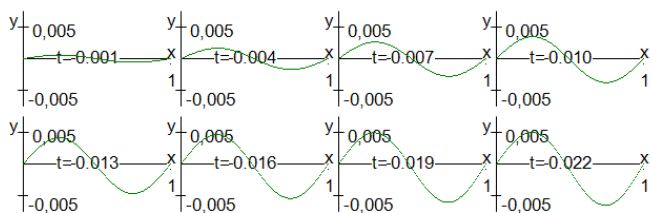


Рис. 9.6. График $w_2(x, t_n)$ при $a = 1$, $h = \pi$, $D = 606,06$, $P = 100$, $\rho_1 = 1,3$, $\rho_2 = 998$, $v^+ = 2$, $v^- = 0,8$, $P_1 = 100000$, $P_2 = 102500$, $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = 1$, $R_1(\tau, t) = R_2(\tau, t) = 0,0001 \cdot e^{20(\tau-t)}$, $h_1(x) = 0$, $h_2(x) = 0,05 \sin 2\pi x$

Очевидно, что при данном наборе исходных данных динамика упругого элемента является неустойчивой.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и Ульяновской области в рамках научного проекта №18-41-730015

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. В. Агеев, Л. И. Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова, “Движение вязкой жидкости в плоском канале, образованном вибрирующим штампом и шарнирно опертой пластиной”, *Тр. МАИ*, **78** (2014), 1–13.
2. Л. И. Могилевич, В. С. Попов, А. А. Попова, А. В. Христофорова, “Математическое моделирование динамики взаимодействия сильновязкой жидкости со стенками канала, установленного на упругом основании”, *Динамика систем, механизмов и машин*, **3:1** (2016), 350–354.
3. E. Askari, K. H. Jeong, M. Amabili, “Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface”, *Journal of Sound and Vibration*, **332:12** (2013), 3064–3085.
4. R. T. Fall, D. Derakhshan, “Flow-induced vibration of pipeline on elastic support”, *Procedia Engineering*, **14:1** (2011), 2986–2993.
5. G. N. Gatica, N. Heuer, S. Meddahi, “Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D”, *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, **30:4** (2014), 1211–1233.
6. K. Kontzialis, K. Moditis, M. P. Paidoussis, “Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions”, *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, **139:3** (2017), 1–8.
7. K. Moditis, M. Paidoussis, J. Ratigan, “Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow”, *Journal of Fluids and Structures*, **63** (2016), 120–139.
8. П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов, “Динамическая устойчивость деформируемых элементов конструкций при сверхзвуковом режиме обтекания”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: физико-математические науки*, **22:1** (2018), 96–115.
9. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
10. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2013, 322 с.
11. П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, *Устойчивость вязкоупругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, СГУ, Саратов, 1994, 176 с.

12. М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1987, 688 с.
13. К. Флетчер, *Численные методы на основе метода Галёркина*, Мир, М., 1988, 143 с.
14. N.I. Ereemeeva, P.A. Velmisov, “Numerical method for solving of a problem about oscillations of viscoelastic plates in subsonic stream of gas”, *Applications of Mathematics in Engineering and Economics*, 2002, 344–355.
15. N.I. Ereemeeva, P.A. Velmisov, “Numerical solution of a problem about oscillations of viscoelastic plates under aerohydrodynamical action”, *Bulletin Scientific University din Pitesti, Romai - Mathematics and Informatics Seria*, **9** (2003), 349–358.
16. Н. К. Калиткин, *Численные методы*, Наука, М., 1978, 512 с.
17. П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов, Е. П. Семенова, “Динамическая устойчивость нелинейных аэроупругих систем”, *Автоматизация процессов управления*, **4(50)** (2017), 48–58.
18. П. А. Вельмисов, А. В. Анкилов, “О динамической устойчивости нелинейной аэроупругой системы”, *Известия Иркутского государственного университета. Серия: Математика.*, **23** (2018), 3–19.
19. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem”, *Journal of Mathematical Sciences*, **219**:1 (2016), 14–26.
20. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Mathematical modelling of dynamics and stability of elastic elements of vibration devices”, *Proceeding of 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems*, **48**:11 (2015), 970–975.

Поступила 20.10.2019

MSC2010 76E99

Dynamics of viscoelastic element of flow channel

© N. I. Ereemeeva¹, P. A. Velmisov²

Abstract. We consider the plane problem of aerohydroelasticity on small oscillations arising during bilateral flow around a viscoelastic element located on the rectilinear wall of an infinite channel. A mathematical model describing the problem in a linear formulation and corresponding to small perturbations of homogeneous subsonic flows and small deflections of a viscoelastic element is formulated. Using the methods of the theory of functions of a complex variable, the solution of the problem is reduced to the study of the integro-differential equation with partial derivatives with respect to the deflection function of the element. To solve this equation, a numerical method based on the application of the Bubnov-Galerkin method is proposed, followed by the reduction of the resulting system of integro-differential equations to the Volterra vector equation of the second kind. On the basis of the developed numerical method the computer simulation of the dynamics of the deformable element is carried out.

Key Words: Aerohydrodynamic impacts, viscoelastic element, aerohydroelasticity, integro-differential equation, Bubnov-Galerkin method, Volterra vector equation of the second kind, theory of complex variable function

REFERENCES

1. R. V. Ageev, L. I. Mogilevich, V. S. Popov, A. A. Popova, "Movement of viscous fluid in a flat channel formed by a vibrating die and a hinged plate", *Trudy MAI*, 2014, no. 78, 1–13 (In Russ.).
2. L. I. Mogilevich, V. S. Popov, A. A. Popova, A. V. Xristoforova, "Mathematical modeling of the dynamics of interaction of a highly viscous fluid with the walls of a channel mounted on an elastic base", *Dinamika sistem, mexanizmov i mashin*, **3:1** (2016), 350–354 (In Russ.).
3. E. Askari, K. H. Jeong, M. Amabili, "Hydroelastic vibration of circular plates immersed in a liquid-filled container with free surface", *Journal of Sound and Vibration*, **332:12** (2013), 3064–3085.
4. R. T. Fall, D. Derakhshan, "Flow-induced vibration of pipeline on elastic support", *Procedia Engineering*, **14:1** (2011), 2986–2993.
5. G. N. Gatica, N. Heuer, S. Meddahi, "Coupling of mixed finite element and stabilized boundary element methods for a fluid-solid interaction problem in 3D", *Numer. Methods Partial Differ. Equations*, **30:4** (2014), 1211–1233.
6. K. Kontzialis, K. Moditis, M. P. Paidoussis, "Transient simulations of the fluid-structure interaction response of a partially confined pipe under axial flows in opposite directions", *Journal of Pressure Vessel Technology, Transactions of the ASME*, **139:3** (2017), 1–8.

¹**Nina I. Ereemeeva**, Associate Professor Department of Higher Mathematics, Dimitrovgrad Engineering and Technological Institute of the National Research Nuclear University MEPhI (294 Kuibyshev str., Dimitrovgrad, 433351, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6160-2572>, NIEreemeeva@mephi.ru

²**Petr A. Velmisov**, Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk state technical University (32 North Crown str., Ulyanovsk, 432027, Russia), Dr.Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, velmisov@ulstu.ru

7. K. Moditis, M. Paidoussis, J. Ratigan, “Dynamics of a partially confined, discharging, cantilever pipe with reverse external flow”, *Journal of Fluids and Structures*, **63** (2016), 120–139.
8. P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, “Dynamic stability of deformable structural elements under supersonic flow regime”, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta. Seriya: fiziko-matematicheskie nauki*, **22**:1 (2018), 96–115.
9. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, [*Dynamics and stability of elastic plates under Aero-hydrodynamic influence*], Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2009 (In Russ.), 220 p.
10. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Matematicheskoe modelirovanie v zadachax dinamicheskoy ustojchivosti deformiruemyykh elementov konstrukcij pri aerogidrodinamicheskom vozmeystviy* [Mathematical modeling in problems of dynamic stability of deformable structural elements under Aerohydrodynamic influence], Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2013 (In Russ.), 322 p.
11. P. A. Velmisov, Yu. A. Reshetnikov, [*Stability of viscoelastic plates under Aerohydrodynamic influence*], Saratov State University, Saratov, 1994 (In Russ.), 176 p.
12. M. A. Lavrent'ev, B. V. Shabat, [*Methods of the theory of functions of a complex variable*], Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 688 p.
13. K. Fletcher, [*Numerical methods based on the Galerkin method*], Mir Publ., Moscow, 1988 (In Russ.), 143 p.
14. N. I. Ereemeeva, P. A. Velmisov, “Numerical method for solving of a problem about oscillations of viscoelastic plates in subsonic stream of gas”, *Applications of Mathematics in Engineering and Economics*, 2002, 344–355.
15. N. I. Ereemeeva, P. A. Velmisov, “Numerical solution of a problem about oscillations of viscoelastic plates under aerohydrodynamical action”, *Bulletin Scientific Universitatea din Pitesti, Romai – Seria Matematica si Informatica*, **9** (2003), 349–358.
16. N. K. Kalitkin, [*Numerical methods*], Nauka Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 512 p.
17. P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, E. P. Semenova, “Dynamic stability of nonlinear aeroelastic systems”, *Avtomatizatsiya processov upravleniya*, **4(50)** (2017), 48–58 (In Russ.).
18. P. A. Velmisov, A. V. Ankilov, “On the dynamic stability of a nonlinear aeroelastic system”, *Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Matematika*, **23** (2018), 3–19 (In Russ.).
19. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem”, *Journal of Mathematical Sciences*, **219**:1 (2016), 14–26.
20. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Mathematical Modelling of Dynamics and Stability of Elastic Elements of Vibration Devices”, *Proceeding of 1st IFAC Conference on Modelling, Identification and Control of Nonlinear Systems*, **48**:11 (2015), 970–975.

Submitted 20.10.2019

УДК 519.67; 538.945

Математическое моделирование вольт-амперных характеристик высокотемпературных сверхпроводников с фрактальными границами кластеров нормальной фазы

© М. А. Васютин¹, Н. Д. Кузьмичев², Д. А. Шилкин³

Аннотация. Исследовано влияние фрактальности границ кластеров нормальной фазы высокотемпературного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ (YBCO) на крип магнитного потока. Получены экспериментальные вольт-амперные и магниторезистивные характеристики YBCO при температуре кипения азота. На основе модели межгранульных кластеров с фрактальными границами проведена аппроксимация экспериментальных данных после геометрико-вероятностного анализа микрофотографий образцов. Предложена модель магниторезистивного состояния, обусловленного крипом потока, для разных транспортных токов и найдены экспериментальная и эмпирическая зависимости фрактальной размерности границ кластеров нормальной фазы YBCO от постоянного магнитного поля. Определена напряжённость магнитного поля для данной фрактальной размерности, при которой начинается проникновение вихрей в гранулы. Показано, что состояние образцов соответствует метастабильной фазе вихревого стекла. Вычислен индекс связности путей срыва связей вихрей на пороге перколяции.

Ключевые слова: высокотемпературные сверхпроводники, кластеры нормальной фазы, фрактальные границы, крип потока.

1. Введение

Моделирование разнообразных природных и общественных процессов на основе фрактальных объектов было предложено Б. Мандельбротом в конце прошлого столетия [1] и с тех пор используется во многих областях науки, в частности в физике [2]. Учёт влияния фрактальности различных структур на их свойства, в т. ч. в высокотемпературных сверхпроводниках (ВТСП) [3], позволяет строить модели явлений,

¹Васютин Михаил Александрович, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

²Кузьмичев Николай Дмитриевич, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

³Шилкин Дмитрий Алексеевич, инженер кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9061-3174>, dwi8hi@outlook.com

которые в значительной степени обусловлены топологией перколирующего фрактального множества. ВТСП начинают применяться в промышленных масштабах, поэтому актуальным остаётся вопрос о повышении их критического тока, что, в свою очередь, связывается с необъяснёнными явлениями в ВТСП, накладывающими сильные ограничения на их дальнейшее внедрение [4–6].

Исследуемый образец ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ (YBCO) представляет собой естественную модель слабосвязанной сети, в которой реализуются самоподобные области (фракталы) [7]. Статистическое подобие этих структур обусловлено как равновероятным изменением их кислородного заполнения, так и наличием разномасштабных пустот, дефектов и т. п.

Дефекты в ВТСП рассматриваются как фрактальные кластеры со специфическими магнитными и транспортными свойствами, сильно влияющими на его вольт-амперную характеристику (ВАХ) [8–9]. Депиннинг вихрей в ВТСП определяется перколяцией [10], которая происходит по сверхпроводящему кластеру (ток) и по слабым связям (магнитный поток). Слабые связи легко образуются на структурных дефектах вследствие малой длины когерентности ВТСП. Магнитное поле приводит к еще большему появлению слабых связей, т. к. уменьшает длину когерентности [11]. При пиннинге и движении вихрей основной характеристикой является меняющаяся фрактальная размерность системы каналов транспорта вихрей D , которая увеличивается с увеличением напряженности магнитного поля при фиксированном токе [12] (в данном случае оставлены те же обозначения, что и для перколяции тока).

Функцию распределения кластеров нормальной фазы по площадям, а значит и функцию распределения критических токов этих кластеров, находят визуально. Так же определяют и фрактальную размерность границ кластеров [13]. Однако если границы существенно зависят от внешних условий (например, от магнитного поля), то их фрактальная размерность будет меняться, что чрезвычайно сложно зафиксировать обычными наблюдениями. Именно поэтому в данной работе, кроме неметрико-вероятностного анализа микрофотографий образцов, функция распределения критических токов и магнитополевая зависимость фрактальной размерности границ кластеров нормальной фазы найдены на основе модели ВАХ тонких пленок с искусственными центрами пиннинга [9]. Поскольку магнитное поле способствует появлению сильной токовой анизотропии [13], то двумерную модель можно применять и к массивному ВТСП.

Кроме фрактальной размерности D , которая является “внешней” характеристикой структуры, применяется понятие индекса связности θ – топологического инварианта объекта. В качестве “смешанной” характеристики выступает спектральная фрактальная размерность D_s , связанная с D и θ формулой:

$$D_s = 2 \cdot D / (2 + \theta). \quad (1.1)$$

Из теоремы об универсальном значении [2] следует, что спектральная размерность стягиваемого фрактального множества на пороге перколяции равна $C \approx 1,327 \dots$ для размерностей пространства $2 \leq n \leq 5$, т. е. $D_s = C \approx 1,327$. Параметр C (постоянная протекания) является фундаментальной топологической константой, характеризующей геометрию перколяционного перехода. При рассмотрении перколяции как критического явления из формулы (1.1) можно определить индекс связности фрактала по его фрактальной размерности на пороге перколяции.

2. Теоретическая модель сопротивления сверхпроводника с фрактальными границами кластеров нормально фазы

Как установлено в работе [8], кластеры нормальной фазы могут иметь фрактальные границы, что существенно влияет на динамику захваченного магнитного потока [7, 9]. При увеличении транспортного тока через образец в некоторый момент начинается срыв вихрей с кластеров, сила пиннинга которых меньше силы Лоренца, создаваемой током. Вихри пересекают сверхпроводящее пространство по слабым связям, соединяющим кластеры и играющим роль каналов транспорта магнитного потока. Движение вихрей приводит к появлению электрического напряжения и образец переходит в резистивное состояние. Критический ток каждого кластера пропорционален силе пиннинга. Наиболее общим распределением критических токов для кластеров с фрактальными границами является гамма-распределение [14–15]:

$$f(i) = \frac{2G^{g+1}}{D\Gamma(g+1)} \cdot i^{\frac{-2}{D}(g+1)-1} \cdot \exp(-Gi^{\frac{-2}{D}}), \quad (2.1)$$

где

$$G \equiv \frac{\theta^{\frac{2}{D}(g+1)+1}}{[\theta^{g+1} - \frac{D}{2} \cdot \exp(\theta)\Gamma(g+1, \theta)]^{\frac{2}{D}}}, \quad \theta \equiv \frac{D}{2} + g + 1 \quad (2.2)$$

$\Gamma(\nu)$ – гамма-функция Эйлера; $g > -1$ – параметр гамма-распределения, определяющий среднеквадратичное отклонение площади кластера; $\Gamma(\nu, z)$ – дополнительная неполная гамма-функция; $i \equiv I/I_c$ – безразмерный ток, нормированный на критический ток перехода в резистивное состояние $I_c = a(CS)^{-D/2}$; I – транспортный ток; $C = ((2+D)/2)(2/D) + 1$ – константа, зависящая от фрактальной размерности, S – средняя площадь кластера; a – фактор формы кластера.

Для YBCO было получено экспоненциально-гиперболическое распределение [8–9]:

$$f(i) = (2 \cdot C/D)i^{(-2/D)-1}\exp(-C \cdot i^{-2/D}). \quad (2.3)$$

Фрактальная размерность определяет соотношение между периметром и площадью кластера:

$$P^{1/D} \propto S^{1/2}. \quad (2.4)$$

На плоскости фрактальная размерность границы кластера строго больше единицы и достигает максимума ($D = 2$) для кластеров максимальной степени фрактальности (изрезанности границ).

Напряжение на сверхпроводнике определяется выражением:

$$u = r_f \int_0^i (i - i') f(i') di', \quad (2.5)$$

где u – безразмерное напряжение; r_f – безразмерное сопротивление течения потока.

Используя интеграл свёртки (2.5), можно получить вольт-амперные характеристики и зависимости сопротивления от тока различных сверхпроводящих фрактальных

структур. Стандартными параметрами при этом являются сопротивление постоянно-му току $r = u/i$ (статическое) и дифференциальное сопротивление $r_d = du/di$ (динамическое). Соответствующие размерные сопротивления вычисляются по формулам: $R = rR_f/r_f$, $R_d = r_dR_f/r_f$, где R_f – размерное сопротивление течения потока.

Экспоненциально-гиперболическое распределение критических токов (2.3) приводит к выражениям для сопротивлений сверхпроводника с фрактальными границами кластеров нормальной фазы:

$$r = r_f(\exp(-Ci^{-2/D}) - (C^{D/2}/i)(1 - D/2, Ci^{-2/D})), r_d = r_f \exp(-Ci^{-2/D}). \quad (2.6)$$

3. Эксперимент и обсуждение

Поликристаллы YBCO с температурой перехода в сверхпроводящее состояние $T_c \approx 92,0$ К и шириной перехода $\Delta T_c \approx 1,5$ К исследовались четырёхзондовым методом. Через токовые контакты пропускались переменный и постоянный токи. Измерялся начальный участок ВАХ в постоянном магнитном поле при температуре $T \approx 77$ К. Подробнее техника эксперимента изложена в [16].

Зависимость первой гармоники напряжения от постоянного тока $V_1(I_d)$ пропорциональна (в случае слабого тока) дифференциальному сопротивлению. Экспериментальные $V_1(i)$, снятые на одном из трёх исследованных образцов для разных магнитных полей (рис. 3.4), аппроксимировались с помощью функции (2.6):

$$V_1 = R_d \cdot I_a = I_a \cdot [R_{d1} \cdot \exp(-C_1 \cdot C_0 \cdot i^{-\mu}) + R_{d2} \cdot \exp(-C_2 \cdot C_0 \cdot i^{-\mu})], \quad (3.1)$$

где V_1 – первая гармоника напряжения; $i = I_d/I_c$ – безразмерный ток; $I_c = 316$ мА – критический ток при $H = 0$; $R_d = (dV/dI_d)$ – дифференциальное сопротивление; $I_a = 27$ мА – амплитуда переменного тока; $C_0 = (1 + 1/\mu)^{\mu+1}$; $\mu = 2/D$ – показатель стекловидности [17]; $C_1 = 0,02$; $C_2 = 0,14$; $R_{d1} = 0,03$ мОм; $R_{d2} = 0,78$ мОм.

Введение двух слагаемых в формуле (3.1) обусловлено существованием в поликристаллических YBCO с естественными центрами пиннинга двух функций распределения слабых связей по площадям, что объясняется наличием в них двух основных подуровней: гранулярная и межгранулярная среды.

Формула (3.1), справедливая в случае малых амплитуд модуляции I_a , должна быть дополнена производными более высоких порядков при увеличении I_a . Общее выражение получено в работе [18]. При учёте производных третьего и пятого порядков приходим к дифференциальному уравнению:

$$V_1 \approx I_a \cdot (dV/dI_d) + (1/8) \cdot (I_a)^3 \cdot (d^3V/d(I_d)^3) + (1/192) \cdot (I_a)^5 \cdot (d^5V/d(I_d)^5). \quad (3.2)$$

Данное уравнение справедливо при условии, что отношение амплитуд 5-й и 1-й гармоник порядка 10 %. Учёт 2-го и 3-го слагаемых может помочь в более точной аппроксимации экспериментальной гармоники. Кроме того, решая дифференциальное уравнение (3.2), можно найти саму функцию $V(I_d)$. Решение уравнения находится численно с начальными условиями, определяемыми экспериментом или теоретически.

Геометрико-вероятностный анализ распределения кластеров дефектов межгранулярной среды по площадям был сделан для трёх выборок, полученных по микрофотографии поверхности поликристалла YBCO с последующей компьютерной обработкой. Фотография одной из выборок (425 элементов) представлена на Рис. 3.1.



Рис. 3.1. Микрофотография одной из выборок (425 элементов) поверхности образца YBCO (сторона квадрата — $500\text{ }\mu\text{m}$).

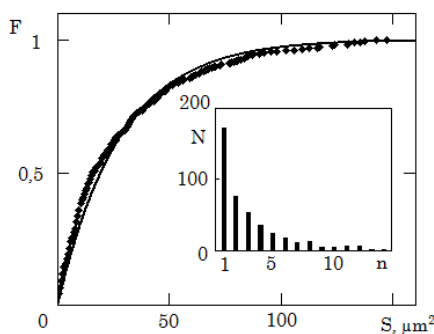


Рис. 3.2. Эмпирическая зависимость распределения площадей кластеров нормальной фазы (ромбики) и её аппроксимация функцией $F(S) = 1 - \exp(-S/S_0)$ (сплошная линия). На вставке показана гистограмма выборки площадей S , где n — номер группы разбиений; N — количество кластеров, попавших в данную группу. Гистограмма соответствует экспоненциально-гиперболическому распределению (формула (2.3))

Выборочное среднее равно $28,03\mu\text{m}^2$, стандартное отклонение составляет $30,39\mu\text{m}^2$, асимметрия — 1,69. На Рис. 3.2 представлена аппроксимация эмпирической функции распределения стандартной экспоненциальной зависимостью. При этом среднее значение площади кластера нормальной фазы $S_0 = 27,78\mu\text{m}^2$ отличается от выборочного среднего менее чем на 3 %, что подтверждает целесообразность применения экспоненциального распределения. На вставке показана гистограмма выборки площадей кластеров по 14 группам.

Распределение гранул по площадям сечений также должно быть экспоненциальным

в силу одинаковости условий формирования гранул и межгранулярной среды. Экспоненциальный закон распределения можно применить в данном случае и к длинам границ двойникования, являющихся основной причиной пиннинга вихрей при $H > 20$ Ое (площадь кластера, захватившего магнитный поток, составляет $1\mu m^2$ для $H = 20$ Ое). Различия связаны с коэффициентом в показателе экспоненты, что можно пояснить на примере простейшей ситуации, когда сечением гранулы является квадрат. Тогда число двойников определённой длины для квадрата площадью S будет $nS^{1/2}$, где n – плотность двойников, приблизительно одинаковая в каждой грануле; т. е. плотность распределения $\lambda S^{1/2} \exp(-\lambda S)$. В рассматриваемом случае влияние экспоненты значительно больше, чем корневой зависимости, поэтому сохраняется возможность описания распределения экспонентой $\lambda \exp(-\lambda S)$ с другой постоянной λ .

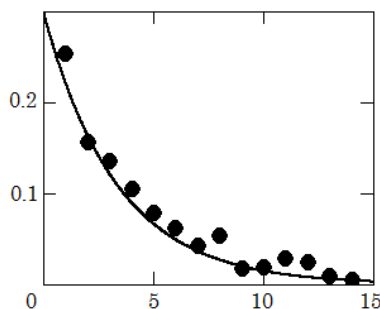


Рис. 3.3. Эмпирическая плотность распределения (сплошная кривая). Чёрные точки соответствуют вставке на Рис. 3.2

Для иллюстрации на Рис. 3.3 приводится эмпирическая плотность распределения с умножением значения ординаты для каждой группы на квадратный корень из номера группы ($f(n) = 0.3 \cdot \exp(-0.3n)$). Здесь плотность функции распределения нормирована на сумму значений всех групп.

Как известно, фрактальные кластеры должны характеризоваться скейлингом между периметром P кластера и его площадью S .

Такой скейлинг действительно наблюдался для исследованной выборки кластеров (Рис.3.4, $D = 1, 16$).

Полагая, что экспоненциальное распределение свойственно обеим средам, различия в коэффициентах можно связать со значительно большей плотностью внутригранулярной среды по сравнению с межгранулярной и, вследствие этого, большим сопротивлением движению вихрей по каналам дефектной структуры [19].

На вставке Рис. 3.5 показана зависимость $D(H)$. Видно, что при $H \approx 70$ Ое происходит резкое изменение $D(H)$, что соответствует началу проникновения вихрей в гранулы поликристалла. Фрактальная размерность D меняется от 1.2 до 1.9, что соответствует изменению Θ от -0.2 до 1.43. При $D = C \approx 1.327$ происходит изменение знака индекса связности с минуса на плюс, что означает переход от несвязной системы к связанной, т. е. начало перколяции. Если при малых полях вихри «не замечают» дефектной структуры внутри гранул, то при достижении поля 70 Ое пиннинг вихрей на внутригранулярных неоднородностях становится преобладающим, т. е. связность дефектной структуры для движения вихрей становится непрерывной. При этом её фрактальная размерность внутри и между гранул одинакова. Показатель стекловидности μ в данном случае меняется от 2 до 1, что можно интерпретировать как состояние вихревого

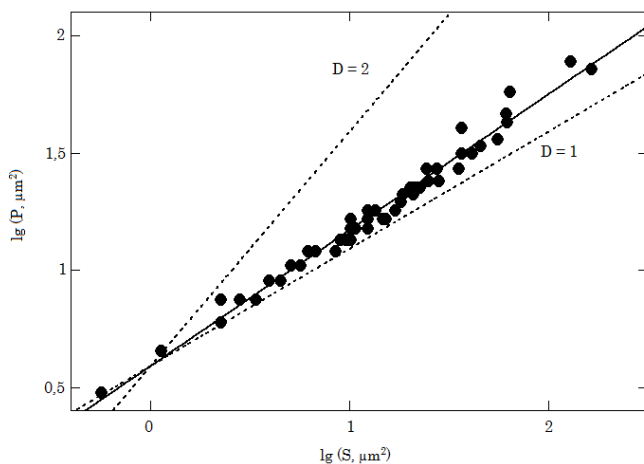


Рис. 3.4. Обработка данных (формула (2.4)) по площади S и периметру P кластера для 53 объектов. Эмпирические данные (точки) аппроксимированы с помощью формулы $P = kS^{D/2}$, где k – коэффициент, D – фрактальная размерность границы кластера. Для сплошной прямой получено: $k = 0,59$, $D = 1,16$

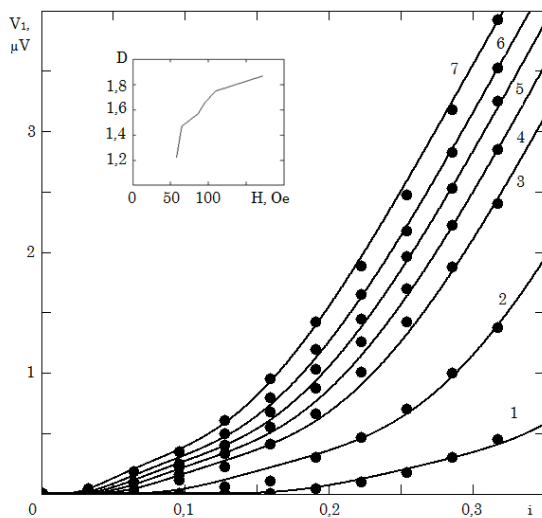


Рис. 3.5. Токовая зависимость первой гармоники напряжения в постоянном магнитном поле H : 1 – $H = 47,4$ Oe; 2 – $H = 58,1$ Oe; 3 – $H = 64,3$ Oe; 4 – $H = 86,1$ Oe; 5 – $H = 95,8$ Oe; 6 – $H = 109,8$ Oe; 7 – $H = 172,2$ Oe. Точки означают экспериментальные данные, сплошные линии – расчет по формуле (3.1). На вставке показана магнитополевая зависимость фрактальной размерности каналов движения вихрей.

стекла, при котором реализуется пиннинг связок вихрей [17], [20–21].

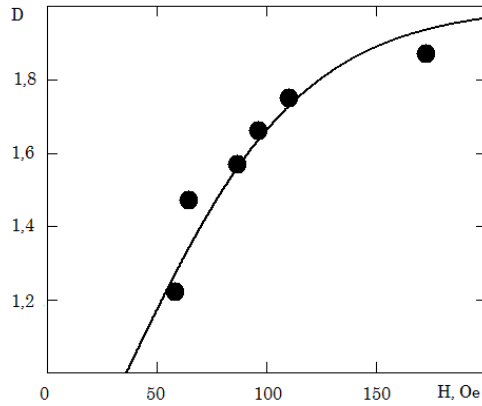


Рис. 3.6. Зависимость фрактальной размерности кластеров нормальной фазы от напряжённости постоянного магнитного поля. Чёрные круги – эксперимент, сплошная линия – эмпирическая зависимость (формула (3.3))

Функцию (3.1) с $R_{d1} = 0.012m\Omega$ можно использовать и для описания экспериментальных зависимостей амплитуды первой гармоники напряжения на образце YBCO от напряжённости магнитного поля для разных значений постоянного тока. Зависимость $V_1(H)$ обуславливается зависимостью от магнитного поля фрактальной размерности D , которую можно аппроксимировать эмпирической функцией:

$$D = 2/[exp(-(H - H_1)/H_0) + 1] \quad (3.3)$$

где $H_0 = 40$ Ое и $H_1 = 36$ Ое – напряжённости поля, характерные для данного образца (Рис.3.6).

На Рис.3.7 изображены экспериментальная и теоретическая зависимости $V_1(H)$ для разных значений I_d . Величина $R_{d1} = 0.012m\Omega$ в данной аппроксимации уменьшена, что связано с отсутствием сопротивления при значениях напряжённости поля до 50 Ое. Нулевое сопротивление в начале зависимости $V_1(H)$ в значительной степени обусловлено образованием гипервихрей в образце [22]. Поэтому начало роста напряжения определяется двумя процессами: распадом гипервихрей на отдельные джозефсоновские вихри и увеличением фрактальной размерности кластеров нормальной фазы с ростом поля. Альтернативным объяснением может быть отсутствие течения магнитного потока при токах, меньших критического, и коллективного крипа потока, в котором, в отличие от крипа Андерсона-Кима, потенциальный барьер пиннинга вихрей U связан с силой тока I гиперболической, а не линейной зависимостью ($U(I) \propto (I_c/I)^\mu$) [23]. Модели течения и коллективного крипа потока приводят к качественно одинаковым результатам при рассмотрении начального участка ВАХ сверхпроводников с фрактальными границами кластеров нормальной фазы. Рост фрактальной размерности увеличивает в этой области тока статическое и дифференциальное сопротивление образцов ВТСП, что и наблюдается в эксперименте.

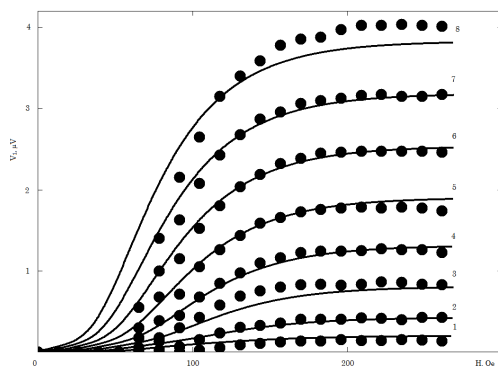


Рис. 3.7. Магнитополевая зависимость амплитуды первой гармоники напряжения при разных значениях постоянного тока. Чёрные круги – экспериментальные зависимости, сплошные линии – теоретические кривые, рассчитанные по формуле (3.1); 1 – $I_d = 30 \text{ mA}$, 2 – $I_d = 40 \text{ mA}$, 3 – $I_d = 50 \text{ mA}$, 4 – $I_d = 60 \text{ mA}$, 5 – $I_d = 70 \text{ mA}$, 6 – $I_d = 80 \text{ mA}$, 7 – $I_d = 90 \text{ mA}$, 8 – $I_d = 100 \text{ mA}$.

4. Заключение

Таким образом, в работе показано, что резистивные характеристики высокотемпературного сверхпроводника YBCO могут быть адекватно описаны в модели фрактальных границ кластеров нормальной фазы. В рамках данной модели определена магнитополевая зависимость фрактальной размерности границ кластеров. Из вида полученной зависимости найдено значение напряжённости магнитного поля, при котором начинается проникновение вихрей в гранулы образца. По изменению знака индекса связности определена фрактальная размерность, при которой система перколяции вихрей становится связной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Мандельброт, *Фрактальная геометрия природы*, Институт компьютерных исследований, М., 2002.
2. Л. М. Зеленый, А. В. Милованов, “Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики”, *Успехи физических наук*, **174**:8 (2004), 809–852.
3. M. Prester, “Experimental evidence of a fractal dissipative regime in $high - T_c$ superconductors”, *Phys. Rev. B.*, **60**:5 (1999), 3100–3103.
4. В. С. Флис, А. А. Каленюк, А. Л. Касаткин, В. О. Москалюк, А. И. Ребиков, В. Л. Свечников, К. Г. Третьяченко, В. М. Пан, “Пленки ВТСП купратов, допированные наночастицами, и их электродинамика, обусловленная вихрями Абрикосова”, *ФНТ*, **36**:1 (2010), 74–88.

5. Ю. Н. Ноздрин, Е. Е. Пестов, В. В. Курин, С. В. Барышев, А. В. Бобыль, С. Ф. Карманенко, Д. А. Саксеев, Р. А. Сурис, “Влияние микроструктуры эпитаксиальных пленок $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ на их электрофизические и нелинейные СВЧ свойства”, *ФТТ*, **48**:12 (2006), 2136–2145.
6. Т. В. Сухарева, В. А. Финкель, “Вклад сверхпроводящих гранул и межгранульных границ в магнитосопротивление керамических ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ в слабых магнитных полях”, *ФТТ*, **52**:8 (2010), 1479–1485.
7. Ю. И. Кузьмин, “Резистивное состояние сверхпроводящих структур с фрактальными кластерами нормальной фазы”, *ФТТ*, **43**:7 (2001), 1157–1164.
8. Yu. I. Kuzmin, “Fractal geometry of normal phase clusters and magnetic flux trapping in $high - T_c$ superconductors”, *Phys. Lett. A.*, **267**:1 (2000), 66–70.
9. Yu. I. Kuzmin, “Dynamics of the magnetic flux trapped in fractal clusters of normal phase in a superconductor”, *Phys. Rev. B.*, **64**:9 (2001), 1–13.
10. M. Ziese, “Percolative vortex motion in high-temperature superconductors”, *Phys. Rev. B.*, **53**:18 (1996), 12422–12429.
11. J. E. Sonier, R. F. Kiefl, J. H. Brewer, D. A. Bonn, S. R. Dunsiger, W. N. Hardy, R. Liang, R. I. Miller, D. R. Noakes, C. E. Stronach, “Expansion of the vortex cores in $YBa_2Cu_3O_{6.95}$ at low magnetic fields”, *Phys. Rev. B.*, **59**:2 (1999), R729–R732.
12. C. J. Olson, C. Reichhardt, F. Nori, “Fractal networks, braiding channels, and voltage noise in intermittently flowing rivers of quantized magnetic flux”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:10 (1998), 2197–2200.
13. Д. А. Балаев, И. Л. Белозерова, Д. М. Гохфельд, Л. В. Кашкина, Ю. И. Кузьмин, К. Р. Мигель, М. И. Петров, С. И. Попков, К. А. Шуйхутдинов, “Вольт-амперные характеристики пенообразного высокотемпературного сверхпроводника $Bi_{1.8}Pb_{0.3}Sr_2Ca_2Cu_3O_x$ с фрактальной кластерной структурой”, *ФТТ*, **48**:2 (2006), 193–198.
14. Yu. I. Kuzmin, “Electric field induced by magnetic flux motion in superconductor containing fractal clusters of a normal phase”, *Phys. Lett. A.*, **281**:1 (2001), 39–43.
15. Ю. И. Кузьмин, “Гигантская дисперсия критических токов в сверхпроводнике с фрактальными кластерами нормальной фазы”, *Письма в ЖТФ*, **28**:13 (2002), 74–82.
16. М. А. Васютин, Н. Д. Кузьмичев, “Нелинейность ВАХ ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, определенная с помощью модуляционной методики”, *Письма в ЖТФ*, **18**:23 (1992), 5–9.
17. Ю. И. Кузьмин, “Состояние вихревого стекла в сверхпроводниках с фрактальными кластерами нормальной фазы”, *Письма в ЖТФ*, **36**:9 (2010), 17–25.
18. Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, “Дифференциальные уравнения для восстановления производной безгистерезисной нелинейной вольт-амперной характеристики полупроводниковой структуры”, *ФТП*, **53**:1 (2019), 111–114.
19. С. В. Мериакри, “Динамические фазовые переходы в движущихся вихревых структурах в сверхпроводниках 2-го рода”, *ЖТФ*, **75**:5 (2005), 87–91.

20. R. H. Koch, V. Foglietti, W. J. Gallagher, G. Koren, A. Gupta, M. P. A. Fisher, “Experimental evidence for vortex-glass superconductivity in Y-Ba-Cu-O”, *Phys. Rev. Lett.*, **63**:14 (1989), 1511–1514.
21. P. L. Gammel, L. F. Schneemeyer, D. J. Bishop, “SQUID picovoltometry of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ single crystals: Evidence for a finite-temperature phase transition in the high-field vortex state”, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:7 (1991), 953–956.
22. Н. Д. Кузьмичев, “Проникновение магнитного поля в систему слабых связей гранулярного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ”, *ФТТ*, **43**:11 (2001), 1934–1938.
23. Ю. И. Кузьмин, И. В. Плешаков, “Электрическое поле, индуцируемое коллективным крипом вихрей, в сверхпроводниках с фрактальными кластерами нормальной фазы”, *Письма в ЖТФ*, **42**:3 (2016), 76–83.

Поступила 8.09.2019

MSC2010 97-04, 90C99, 82D55

Mathematical modeling of current-voltage characteristics of high-temperature superconductors with fractal boundaries of normal phase clusters

© М. А. Vasyutin¹, N. D. Kuzmichev², D. A. Shilkin³

Abstract. The fractality effect of the normal phase clusters' boundaries of a high-temperature superconductor $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ (YBCO) on the magnetic flux creep is investigated. Experimental current-voltage and magnetoresistive characteristics of YBCO at the boiling point of nitrogen are obtained. Based on the model of intergranular clusters with fractal boundaries, an approximation of the experimental data is obtained after geometric-probability analysis of the photomicrographs of the samples. A model of the magnetoresistive state caused by flux creep is proposed for various transport currents, and experimental and empirical dependences of the fractal dimension of the normal YBCO phase cluster boundaries on the constant magnetic field are found. The magnetic field intensity is determined for a given fractal dimension, at which the vortex penetration into the granules begins. It is shown that the state of the samples corresponds to the metastable phase of the vortex glass. The connectivity index of the stall paths of the vortex bundles at the percolation threshold is calculated.

Key Words: high-temperature superconductor, clusters of the normal phase, fractal boundaries, flux creep

¹Mikhael A. Vasyutin, Associate Professor of Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

²Nikolay D. Kuzmichev, Professor of Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

³Dmitri A. Shilkin, Engineer of the Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9061-3174>, dwi8hi@outlook.com

REFERENCES

1. B. Mandelbrot, *Fractal geometry of nature.*, Times Books, NY, 1982.
2. L. M. Zelenyi, A. V. Milovanov, “Fractal topology and strange kinetics: from percolation theory to problems of cosmic electrodynamics”, *Uspekhi fizicheskikh nauk*, **174**:8 (2004), 809–852 (In Russ.).
3. M. Prester, “Experimental evidence of a fractal dissipative regime in $high - T_c$ superconductors”, *Phys. Rev. B.*, **60**:5 (1999), 3100–3103.
4. V. S. Flis, A. A. Kalenyuk, A. L. Kasatkin, V. O. Moskalyuk, A. I. Rebikov, V. L. Svechnikov, K. G. Tretyachenko, V. M. Pan, “HTS cuprate films doped with nanoparticles and their electrodynamics caused by Abrikosov vortices”, *Fizika nizkikh temperatur*, **36**:1 (2010), 74–88 (In Russ.).
5. Yu. N. Nozdrin, E. E. Pestov, V. V. Kurin, S. V. Baryshev, A. V. Bobyl, S. F. Karmanenko, D. A. Sakseev, R. A. Suris, “The influence of the microstructure of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ epitaxial films on their electrophysical and non-linear microwave properties”, *Solid State Physics*, **48**:12 (2006), 2136–2145 (In Russ.).
6. T. V. Suhareva, V. A. Finkel, “Contribution of superconducting granules and intergranular boundaries to the magnetoresistance of ceramic HTSC $YBa_2Cu_3O_{7-\delta}$ in weak magnetic fields”, *Solid State Physics*, **52**:8 (2010), 1479–1485 (In Russ.).
7. Yu. I. Kuzmin, “Resistive state of superconducting structures with fractal clusters of the normal phase”, *Solid State Physics*, **43**:7 (2001), 1157–1164 (In Russ.).
8. Yu. I. Kuzmin, “Fractal geometry of normal phase clusters and magnetic flux trapping in $high - T_c$ superconductors”, *Phys. Lett. A.*, **267**:1 (2000), 66–70.
9. Yu. I. Kuzmin, “Dynamics of the magnetic flux trapped in fractal clusters of normal phase in a superconductor”, *Phys. Rev. B.*, **64**:9 (2001), 1–13.
10. M. Ziese, “Percolative vortex motion in high-temperature superconductors”, *Phys. Rev. B.*, **53**:18 (1996), 12422–12429.
11. J. E. Sonier, R. F. Kiefl, J. H. Brewer, D. A. Bonn, S. R. Dunsiger, W. N. Hardy, R. Liang, R. I. Miller, D. R. Noakes, C. E. Stronach, “Expansion of the vortex cores in $YBa_2Cu_3O_{6.95}$ at low magnetic fields”, *Phys. Rev. B.*, **59**:2 (1999), R729 – R732.
12. C. J. Olson, C. Reichhardt, F. Nori, “Fractal networks, braiding channels, and voltage noise in intermittently flowing rivers of quantized magnetic flux”, *Phys. Rev. Lett.*, **80**:10 (1998), 2197–2200.
13. D. A. Balaev, I. L. Belozerova, D. M. Gohfeld, L. V. Kashkina, Yu. I. Kuzmin, K. R. Migel, M. I. Petrov, S. I. Popkov, K. A. Shuihutdinov, “Current-voltage characteristics of a high-temperature foam superconductor $Bi_{1.8}Pb_{0.3}Sr_2Ca_2Cu_3O_x$ with a fractal cluster structure”, *Solid State Physics*, **48**:2 (2006), 193–198 (In Russ.).
14. Yu. I. Kuzmin, “Electric field induced by magnetic flux motion in superconductor containing fractal clusters of a normal phase”, *Phys. Lett. A.*, **281**:1 (2001), 39–43.

15. Yu. I. Kuzmin, “Giant dispersion of critical currents in a superconductor with fractal clusters of the normal phase”, *Technical Physics Letters*, **28**:13 (2002), 74–82 (In Russ.).
16. M. A. Vasyutin, N. D. Kuzmichev, “Nonlinearity of the current-voltage characteristics of HTSC $YBa_2Cu_3O_{7-x}$, determined by modulation technique”, *Technical physics letters*, **18**:23 (1992), 5–9 (In Russ.).
17. Yu. I. Kuzmin, “The state of vortex glass in superconductors with fractal clusters of the normal phase”, *Technical Physics Letters*, **36**:9 (2010), 17–25 (In Russ.).
18. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, “Differential equations for reconstructing the derivative of a hysteresis-free nonlinear current-voltage characteristic of a semiconductor structure”, *Semiconductors*, **53**:1 (2019), 111–114 (In Russ.).
19. S. V. Meriakri, “Dynamic phase transitions in moving vortex structures in type-2 superconductors”, *Technical Physics*, **75**:5 (2005), 87–91 (In Russ.).
20. R. H. Koch, V. Foglietti, W. J. Gallagher, G. Koren, A. Gupta, M. P. A. Fisher, “Experimental evidence for vortex-glass superconductivity in Y-Ba-Cu-O”, *Phys. Rev. Lett.*, **63**:14 (1989), 1511–1514.
21. P. L. Gammel, L. F. Schneemeyer, D. J. Bishop, “SQUID picovoltometry of $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ single crystals: Evidence for a finite-temperature phase transition in the high-field vortex state”, *Phys. Rev. Lett.*, **66**:7 (1991), 953–956.
22. N. D. Kuzmichev, “Penetration of a magnetic field into the system of weak bonds of a granular superconductor $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ ”, *Solid State Physics*, **43**:11 (2001), 1934–1938 (In Russ.).
23. Yu. I. Kuzmin, I. V. Pleshakov, “Electric field induced by collective creep of vortices in superconductors with fractal clusters of the normal phase”, *Technical Physics Letters*, **42**:3 (2016), 76–83 (In Russ.).

Submitted 8.09.2019

Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Если статья на русском языке, то она должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC 2010;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО - полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском);
- список литературы.

Если же статья на английском языке, то соответствующие разделы излагаются только на английском. Код УДК не используется.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа,

описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);

- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);

- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);

- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

Текст статьи. При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;
- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты - основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение – выводы и рекомендации.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Перевод заглавия статьи на английский язык;
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- название книги (транслитерация);
- [Перевод названия книги в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;
- Количество страниц в издании (250 p.);
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете amsbib.sty.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте <https://translit.ru/ru/bgn/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка, располагаться за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru. ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка можно скачать из раздела Полезные материалы меню Для автора на сайте журнала.

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела References.

Статьи в журналах на русском языке:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, "[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]", Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке:

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

P. A. Shamanaev, "[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]", Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nyim uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6–11 July 2018), 218–219 (In Russ.).

The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The text of the article should be prepared in TeX publishing system using LaTeX macroextension.

The author(s) should send to the editor source text of the article (LaTeX format), files with figures (EPS format) and the compiled version of the article (PDF format).

If the article is in Russian, then it should contain the following sections in Russian and English:

- UDC and MSC 2010 codes;
- article title;
- information about every author: full name, position, address of the organization, academic degree, ORCID, e-mail;
- abstract;
- keywords;
- text of the article (only in Russian);
- references (bibliography).

If the article is in English, the relevant sections are presented only in English. UDC code is not used.

The Subject Classification Index (MSC 2010) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of UDC and MSC 2010 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

Abstract should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Results of work are described extremely precisely and informatively. Main theoretical and experimental results, factual data, detected relationships and patterns are presented. In the description preference is given to new results and data of long-term value, important discoveries, conclusions that refute existing theories, as well as data that, in the author's opinion, are of practical importance.

Conclusions may be accompanied by recommendations, estimates, suggestions, hypotheses described in the article.

The information contained in the article's title should not be repeated in the text of the author's summary.

It is better to avoid unnecessary introductory phrases (for example, «the author of the article considers ... »). Author(s) should not include in the abstract historical references (if they do not constitute the main content of the document) as well as description of previously published works and well-known provisions.

The text of the author's abstract should use syntactic constructions typical for the language of scientific and technical documents. Also it is better to avoid complicated grammatical constructions.

Significant words from the article's text should be used in the text of the abstract.

Abbreviations and conventions, excluding commonly used (in English special texts also), are used in exceptional cases or their definitions must be given when first used.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

In the text of English abstract author(s) should use the terminology typical to foreign special texts. They should avoid usage of terms that are direct tracing of Russian-language terms. It is necessary to preserve the unity of terminology within the abstract.

English abstracts to Russian-language articles should be written in high-quality English.

The average volume of abstracts in Russian and in English should be from 100 to 250 words.

Keywords should reflect the main content of the article. If it is possible they should not repeat the terms of the title and abstracts. It is better for keywords to use the terms from the article's text, as well as terms defining the subject area and including other important concepts that will expand the possibilities of finding an article by means of information retrieval system. Section **Keywords** must contain from 5 to 15 words.

Text of the article. When presenting the text of the article, it is necessary to adhere to the following structure:

- introduction - a brief overview of the state of the issue under consideration and the formulation of the problem solved in the article;
- materials and methods for solving the problem and accepted assumptions;
- results – the main content of the article;
- discussion and analysis of the results obtained and their comparison with previously known ones;
- conclusion — conclusions and recommendations.

References should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

Description of the bibliographic reference schemes for the References section.

Articles in the journal in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- Translation of the article title into English;
- The name of the Russian-language source (transliteration);

- [Translation of the source name into English – paraphrase (for magazines one may not do it)];
- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);

– An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.

Books (monographs and collections) in Russian:

- Author(s) (transliteration);
- title of the book (transliteration);
- [Translation of the book's name in square brackets];
- Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
- The number of pages in the book (250 p.);
- Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

References in Russian and English are made according to the citation style adopted for use in the field of mathematics by the American Mathematical Society (AMS) and the European Mathematical Union (Zentralblatt MATH, zbMATH). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the amsbib.sty style package.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

References in Russian in text format, designed in accordance with the requirements of GOST P 7.0.5.-2008 Bibliography link, must be located behind the list of references in Russian and should be commented out. This list of references will be used when downloading the electronic version of the journal on the site elibrary.ru GOST P 7.0.5.-2008 Bibliography link can be downloaded from the Useful Materials section of the For Authors menu on the journal website.

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system.**

Examples of bibliographic references for the section *References*.

Journal articles in Russian:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, "[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Books (monographs and collections) in Russian:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Conference proceedings in Russian:

P. A. Shamanaev, "[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]", Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются три файла: файл-преамбула, файл-шаблон и стилевой пакет svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова}

Если же статья на английском языке, то заголовок статьи оформляется только на английском языке. Для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation***.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

б) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}`

в) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}`

г) вставка двух рисунков с двумя подписями

`\inserttwopictures{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рис}{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рис}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

`\RBibitem{метка для ссылки на источник},`

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

`\Bibitem{метка для ссылки на источник}.`

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmbib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать следующие команды: `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

Статьи в журналах на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib1}  
\by П. А. Шаманаев  
\paper О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов  
\jour Труды Средневожского математического общества  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151
```

В разделе `thebibliographyEn`:

```
\Bibitem{shamanaevBib1En}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]  
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151  
\lang In Russ.
```

Статьи в журналах на английском языке (в разделах `thebibliography` и `thebibliographyEn` оформляются одинаково):

```
\Bibitem{shamanaevBib2}  
\by M. J. Berger, J. Oliger  
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations  
\jour Journal of Computational Physics  
\yr 1984  
\vol 53  
\pages 484–512
```

Статьи в электронном журнале на русском языке

В разделе `thebibliography`:

```
\RBibitem{shamanaevBib3}  
\by М. С. Челышов, П. А. Шаманаев,  
\paper Алгоритм решения задачи минимизации квадратичного функционала с нелинейными ограничениями с использованием метода ортогональной циклической редукции  
\jour Огарёв-online  
\vol 20  
\yr 2016
```

\elink Доступно по адресу: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib3En}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib4}
\by А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев
\paper Исследование динамики трубопровода при запаздывании внешних воздействий
\inbook Прикладная математика и механика
\publaddr Ульяновск
\publ УлГТУ
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\issue 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib5}
\by Ю. Н. Бибигов
\book Курс обыкновенных дифференциальных уравнений
\publaddr М.

\publ Вышш. шк.
 \yr 1991
 \totalpages 303

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
 \by Yu. N. Bibikov
 \book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
 \publaddr Moscow
 \publ Visshay shkola Publ.
 \yr 1991
 \totalpages 303
 \lang In Russ.

Статьи в материалах конференций на русском языке:

В разделе thebibliography:

\RBibitem{shamanaevBib6}
 \by В. Г. Малинов
 \paper Непрерывный метод минимизации второго порядка с оператором проекции в переменной метрике
 \inbook VIII Московская международная конференция по исследованию операций (ORM2016): Труды
 \bookvol II
 \procinfo Москва. 17–22 октября 2016 г.
 \yr 2016
 \pages 48–50
 \publ ФИЦ ИУ РАН
 \publaddr М.

В разделе thebibliographyEn:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
 \by V. G. Malinov
 \paper Continuous second order minimization method with variable metric projection operator
 \inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016): Proceedings
 \bookvol II
 \procinfo Moscow, October 17-22, 2016
 \yr 2016
 \pages 48–50
 \publ FRC CSC RAS Publ.
 \publaddr Moscow

The rules for article layout in the LaTeX system

Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

Three files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package `svmobib.sty`. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named `<LastName>.tex`. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file **can not be changed**. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

Design of article titles. If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The authors)} {Author1\footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail. }, Author2\footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors)} {Author1\footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail}, Author2\footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords}

If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.

Design of the article text. The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation*** environment.

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string

must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

Design of pictures. To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

- a) insert a numbered picture with the signature

`\insertpicturewcap{label}{file_name.eps}{caption_of_the_figure}`

- b) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio

`\insertpicturecapscale{label}{file_name.eps}{degree_of_compression}{caption}`

- c) insert a picture without a number under the picture, but with a caption or without it

`\insertpicturenonum{file_name.eps}{degree_of_compression}{caption}`

- d) insert two pictures with a captions under the pictures

`\inserttwopictures{label}{file_name.eps}{caption_of_the_figure}{label}`
`{file_name.eps}{caption_of_the_figure}`

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

Design of references. For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

`\RBibitem{label for a link to the source }`,

and every English reference – by a command

`\Bibitem{label for a link to the source }.`

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the commands `\cite`, `\citetwo`, `\citethree`, `\citefour`, `\citetire`, `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

Examples of bibliographic references' using commands from the `svmobib.sty` package

Journal articles in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib1En}`

`\by P. A. Shamanaev`

`\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]`

`\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva`

`\yr 2003`

\vol 5
 \issue 1
 \pages 145–151
 \lang In Russ.

Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib2}
 \by M. J. Berger, J. Olinger
 \paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
 \jour Journal of Computational Physics
 \yr 1984
 \vol 53
 \pages 484–512

Articles in the electronic journals in Russian

\Bibitem{shamanaevBib3En}
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
 \jour Ogarev-online
 \vol 20
 \yr 2016
 \lang In Russ.
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4En}
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
 \publaddr Ulyanovsk
 \publ UIGTU Publ.
 \yr 2014
 \issue 10
 \pages 4–13
 \lang In Russ.

Books (monographs and collections) in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5En}
 \by Yu. N. Bibikov
 \book Kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The course of ordinary differential equations]
 \publaddr Moscow
 \publ Visshay shkola Publ.

\yr 1991
\totalpages 303
\lang In Russ.

Conference proceedings in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib6En}
\by V. G. Malinov
\paper Continuous second order minimization method with variable metric projection
operator
\inbook VIII Moscow International Conference on Operations Research (ORM2016):
Proceedings
\bookvol II
\procinfo Moscow, October 17-22, 2016
\yr 2016
\pages 48–50
\publ FRC CSC RAS Publ.
\publaddr Moscow

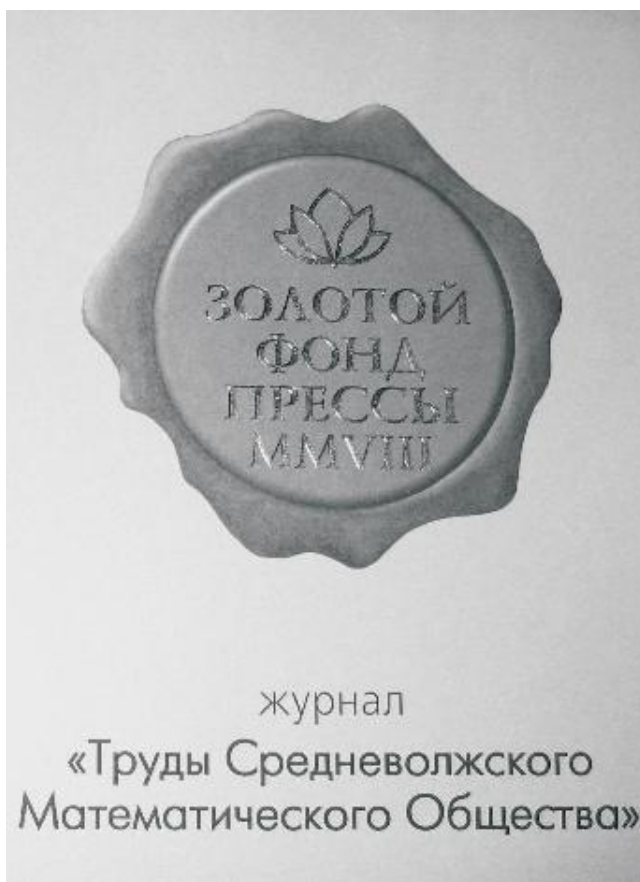
Алфавитный указатель авторов

Баландин А. В.	405	Козлов А. Д.	443
Бураго П. Н.	413	Колобянина А. Е.	460
Васютин М. А.	507	Круглов В. Е.	460
Вельмисов П. А.	488	Кувшинова А. Н.	469
Галкин О. Е.	430	Кузьмичев Н. Д.	507
Галкина С. Ю.	430	Куренков Е. Д.	480
Еремеева Н. И.	488	Минц Д. И.	480
Казаков А. О.	443	Сафонов К. А.	443
Каратецкая Е. Ю.	443	Шилкин Д. А.	507
Эгамов А. И.	413		

Author Index

Balandin A. V.	405	Kozlov A. D.	443
Burago P. N.	413	Kolobyanina A. E.	460
Vasyutin M. A.	507	Kruglov V. E.	460
Velmisov P. A.	488	Kuvshinova A. N.	469
Galkin O. E.	430	Kuzmichev N. D.	507
Galkina S. Yu.	430	Kurenkov E. D.	480
Eremeeva N. I.	488	Mints D. I.	480
Kazakov A. O.	443	Safonov K. A.	443
Karatetskaia E. Yu.	443	Shilkin D. A.	507
Egamov A. I. 413			

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Редактор: *Зинина С. Х.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 9.12.2019. Дата выхода в свет 30.12.2019. Цена свободная.

Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 13,3 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 2388.

Типография: Издательство Мордовского университета

Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Atryahin V. A.*

Editor: *Zinina S. Kh.*

Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 9.12.2019. Date of publishing 30.12.2019. Free price.

Sheet size 70x108 $\frac{1}{16}$. Conventional printed sheets 13,3.

Number of copies 100. Order no. 2388.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24

Для заметок

Для заметок

Для заметок

