

ISSN 2587 – 7496 (Online)

ISSN 2079 – 6900 (Print)

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  21  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  3

2019



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

## Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 21, № 3. 2019

DOI 10.15507/2079-6900.21.201903

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

# **Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva**

**Middle Volga Mathematical Society Journal**

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 21, NO. 3. 2019

DOI 10.15507/2079-6900.21.201903

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

# Журнал Средневолжского математического общества

## Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

**УЧРЕДИТЕЛИ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

**ИЗДАТЕЛЬ:** федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

**РЕДАКЦИЯ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: [journal@svmo.ru](mailto:journal@svmo.ru), web: <http://journal.svmo.ru>

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC).

One can subscript to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society". Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: [journal@svmo.ru](mailto:journal@svmo.ru), web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малазийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

**Ахтямов Азамат Мухтарович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улутбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Дерюгин Юрий Николаевич** — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, генеральный директор Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук,

заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Политехнического института ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (Ханты-Мансийск, Россия)

**Матус Петр Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Салахитдинов Махмуд Салахитдинович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Спивак Семен Израилевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Терехин Михаил Тихонович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина» (Рязань, Россия)

**Ион Анка Вероника** — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, первый проректор – проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)



## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Aleksandr S. Andreev** — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

**Azamat M. Akhtyamov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Vyacheslav Z. Grines** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Director, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Polytechnic Institute, Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

**Petr P. Matus** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Olga V. Pochinka** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Mahmud S. Salahitdinov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, of Uzbekistan)

**Semen I. Spivak** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Mikhail T. Terekhin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

**Anca V. Ion** — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

## EDITORIAL COUNCIL

**Morozkin Nikolay Danilovich** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Senin Petr Vasilievich** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Suharev Lev Alexandrovich** — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Yarushkina Nadezda Glebovna** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), First Vice-Rector – Vice-Rector for Science of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

**М. Н. Афанасьева, Е. Б. Кузнецов**

Дискретное продолжение по наилучшему параметру в краевой задаче для систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием . . . . . 309

---

**М. В. Донцова**

Условия нелокальной разрешимости одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами . . 317

---

**Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов**

Об одном итерационном процессе для сеточной задачи о сопряжении с итерациями на границе разрыва решения . . . . . 329

---

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

**И. Н. Сидоров, В. И. Митряйкин, А. В. Горелов, Л. П. Шабалин**

Исследование прочности композитной лопасти несущего винта вертолета, имеющей ударные повреждения, по теории предельного равновесия . . . . . 343

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

---

**Н. Д. Кузьмичев, А. А. Шушпанов, М. А. Васютин**

Математическое моделирование магнитных свойств эллипсоидов вращения жёстких сверхпроводников второго рода в модели Бина 353

---

**Е. В. Никишин, В. Я. Гришаев, С. М. Мурюмин**

О влиянии интенсивности света на границы применимости способа восстановления модулированных оптических сигналов . . . . 363

---

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) .....	372
Правила оформления рукописей (на англ. яз.) .....	376
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) .....	380
Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) .....	384

---

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) .....	388
Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) .....	389

---

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

**M. N. Afanaseva, E. B. Kuznetsov**

The discrete continuation in the boundary value problem for systems of nonlinear differential equations with deviation argument . . . . . 309

---

**M. V. Dontsova**

The nonlocal solvability conditions for a system of two quasilinear equations of the first order with absolute terms . . . . . 317

---

**F. V. Lubyshev, M. E. Fairuzov**

On an iterative process for the grid conjugation problem with iterations on the boundary of the solution discontinuity . . . . . 329

---

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

**I.N. Sidorov, V.I. Mitryaikin, A.V. Gorelov, L.P. Shabalin**

Strength analysis of composite rotor helicopter blade, having percussive damage, by limit equilibrium theory . . . . . 343

---

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

**N. D. Kuzmichev, A. A. Shushpanov, M. A. Vasyutin**

Mathematical modeling of the magnetic properties of spheroids of hard second kind superconductors in the Bean model . . . . . 353

---

**E. V. Nikishin, V. Y. Grishaev, S. M. Muryumin**

On the influence of light intensity on the limits of applicability of modulated optical signals recovery method . . . . . 363

---

The rules of article design (in Russian) . . . . . 372

The rules of article design (in English) . . . . . 376

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . . 380

---

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) .....	384
---	-----

---

Author Index (In Russian) .....	388
Author Index (in English) .....	389

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201903.309-316

УДК 519.624

# Дискретное продолжение по наилучшему параметру в краевой задаче для систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием

© М. Н. Афанасьева<sup>1</sup>, Е. Б. Кузнецов<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье рассмотрено решение краевых задач для системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Решение краевой задачи основывается на методе стрельбы в рамках которого для вычисления введенного параметра используются метод продолжения по параметру в форме Лаэя, метод наилучшей параметризации и метод Ньютона, что позволяет получить возможные решения задачи. Для построения решения задачи Коши на каждом шаге метода стрельбы применяется метод дискретного продолжения по наилучшему параметру совместно с методом Ньютона. Такой подход позволяет построить решения в случае наличия предельных особых точек, что обеспечивает как успешное построение решений, так и продолжение итерационного процесса метода Ньютона. Используемый алгоритм дополнен вычислением интерполяционного полинома в форме Лагранжа для определения значений функций в точках запаздывания. Пример, приведенный в статье, отражает преимущества предложенного метода.

**Ключевые слова:** численное решение, уравнения с запаздыванием, краевая задача, наилучший параметр, дискретное продолжение, метод стрельбы.

## 1. Введение

Применение запаздывания в постановке краевых задач достаточно широко распространено при моделировании процессов в механике, биологии, экономике [1]. Исключение запаздывания может привести к некорректному результату вычисления и искажению моделирования поведения исследуемого процесса. В статье рассматривается решение краевых задач для нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В работе [2] было рассмотрено использование наилучшей параметризации для вычисления возможных решений задач подобного вида. Для решения краевой задачи приведенный метод решения представляет собой комбинацию метода стрельбы [3] и метода продолжения по наилучшему параметру [4], а для решения краевой задачи – комбинацию методов Рунге-Кутты и интерполяции Лагранжа. В [2] отражена высокая результативность применения метода наилучшей параметризации для вычисления возможных значений параметра метода стрельбы, однако в случае прохождения предельных особых точек при

<sup>1</sup>**Афанасьева Мария Николаевна**, аспирант кафедры «Моделирование динамических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7487-4796>, [mary.mai.8@yandex.ru](mailto:mary.mai.8@yandex.ru)

<sup>2</sup>**Кузнецов Евгений Борисович**, профессор кафедры «Моделирование динамических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9452-6577>, [kuznetsov@mai.ru](mailto:kuznetsov@mai.ru)

построении решения начальной задачи метод Рунге-Кутты может оказаться неэффективным. В настоящей статье рассматривается применение метода дискретного продолжения по наилучшему параметру при решении задачи Коши, что позволяет построить искомые решения.

Преимущества применения дискретного продолжения по параметру отражены в ряде работ, исследующих решение краевых задач для систем дифференциально-алгебраических [5] и обыкновенных дифференциальных [6] уравнений без запаздывания. Использование непрерывного и дискретного методов продолжения по параметру для решения начальных задач для системы интегродифференциально-алгебраических с запаздыванием рассмотрено в [7].

Алгоритм, представленный в работе, позволяет построить решение при наличии предельных особых точек, что обеспечивает не только вычисление решений начальной задачи, но и продолжение итерационного процесса метода стрельбы.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается система нелинейных дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f(t, y(t), y(t-\tau), \dot{y}(t-\tau)), \\ f : \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^{3s} &\rightarrow \mathbf{R}^s, \end{aligned} \quad (2.1)$$

для которой заданы краевые условия:

$$W(y(a), y(b)) = 0, \quad (2.2)$$

где  $y(t) : \mathbf{R}^1 \rightarrow \mathbf{R}^s$  – искомая вектор-функция;  $[a, b]$  – заданный интервал интегрирования.

На множестве  $E = \{T < a \mid \exists t > a, t - \tau = T\}$  заданы достаточно гладкие функции  $\varphi_{1,2}(T)$  такие, что:

$$\begin{aligned} y_\tau &= y(t - \tau) = \varphi_1(T), \\ \dot{y}_\tau &= \dot{y}(t - \tau) = \varphi_2(T). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Предполагается, что функции  $f$  и  $W$  удовлетворяют условиям, при которых решение исследуемой задачи существует на интервале интегрирования.

Рассмотрим построение численного алгоритма, который позволит определить возможные решения задачи (2.1)–(2.3) в случае наличия предельных особых точек, при прохождении которых правая часть каких-либо уравнений системы (2.1) теряет смысл.

## 3. Преобразование задачи и численное решение

Построение алгоритма рассмотрим на примере системы двух уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= f_1(t, y_1(t), y_1(t-\tau), \dot{y}_1(t-\tau), y_2(t), y_2(t-\tau), \dot{y}_2(t-\tau)), \\ \frac{dy_2}{dt} &= f_2(t, y_1(t), y_1(t-\tau), \dot{y}_1(t-\tau), y_2(t), y_2(t-\tau), \dot{y}_2(t-\tau)), \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} y_1(a) &= y_a, \\ y_2(b) &= y_b, \\ y_{1\tau} &= \varphi_{11}(T), \dot{y}_{1\tau} = \varphi_{21}(T), \\ y_{2\tau} &= \varphi_{12}(T), \dot{y}_{2\tau} = \varphi_{22}(T), \end{aligned} \quad (3.2)$$



Для решения краевой задачи применяется метод стрельбы [8], согласно которому краевое условие в конечной точке интервала интегрирования заменяется на начальное с помощью ввода параметра:  $y_2(a) = p$ .

Значение введенного параметра  $p$  должно быть подобрано так, чтобы вычисленные кривые решений  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  удовлетворяли заданным условиям в точках  $a$  и  $b$  задачи (3.1), т. е. должно выполняться условие:

$$F(p) = y_2(b, p) - y_b = 0. \quad (3.3)$$

В статье [2] для решения уравнения (3.3) используется метод Ньютона, обладающий преимуществом ввиду высокой скорости сходимости. Для устранения трудностей, связанных с проблемой выбора начального приближения, (3.3) преобразуется с помощью ввода параметра  $\mu$  следующим образом [9–10]:

$$\Phi(p, \mu) = F(p) - (1 - \mu)F(p_0) = 0. \quad (3.4)$$

Для решения (3.4) используется метод продолжения по параметру в форме Лаэя [10], где для каждого  $\mu_k$  вычисляется  $p_k$  при помощи метода Ньютона:

$$p_{(k)}^{(i+1)} = p_{(k)}^{(i)} - \left[ \frac{\Phi(p_{(k)}^{(i)}, \mu_{(k)}) - \Phi(p_{(k)}^{(i-1)}, \mu_{(k)})}{p_{(k)}^{(i)} - p_{(k)}^{(i-1)}} \right]^{-1} \Phi(p_{(k)}^{(i)}, \mu_{(k)}), \quad (3.5)$$

$$p_{(k+1)}^{(0)} = p_{(k)}^{(r_k)}, i = 1, 2, \dots, r_{k-1}.$$

где  $0 = \mu_1 < \dots < \mu_m = 1$ ;  $p_{(k)}^{(i)}$  – значение параметра  $p$  на  $i$ -м шаге метода Ньютона при каждом  $\mu_k$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

Данный подход позволяет вычислить искомые значения  $p$ , но при немонотонном изменении параметра  $\mu$  уравнение (3.4) необходимо дополнительно параметризовать, используя метод продолжения по наилучшему параметру, которым является длина кривой множества решений уравнения (3.4) [4].

Кривая множества решений разбивается на равные участки  $\nu_0 = 0 < \nu_1 < \dots < \nu_l = L$ , уравнение (3.5) преобразуется к виду:

$$\Psi_{k+1}(\tilde{z}) = \begin{cases} F(p) - (1 - \mu)F(p_0) = 0, \\ (p - p_k^{(r_k)})^2 + (\mu - \mu_k^{(r_k)})^2 - \Delta_\nu^2 = 0, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $z = (p, \mu)$ ;  $\nu_{k+1} = \nu_k + \Delta_\nu$ ;  $\nu_0 = 0$ ;  $\nu_l = L$ , что обеспечивает немонотонность изменения параметров  $p$  и  $\mu$  и позволяет вычислить возможные значения искомого параметра.

При каждом найденном значении параметра  $p$  решается задача Коши. Успешное построение решения начальной задачи влияет как на получение конечного результата, так и на продолжение итерационного процесса метода стрельбы. Поэтому для вычисления решений рассматривается применение метода дискретного продолжения по наилучшему параметру [11]. Теперь функции  $y_1(\lambda)$ ,  $y_2(\lambda)$ ,  $t(\lambda)$  равноправны и зависят от параметра  $\lambda$ .

$$\frac{dy_1}{d\lambda} = f_1(t, y_1(t), y_1(t - \tau), \dot{y}_1(t - \tau), y_2(t), y_2(t - \tau), \dot{y}_2(t - \tau)) \frac{dt}{d\lambda},$$

$$\frac{dy_2}{d\lambda} = f_2(t, y_1(t), y_1(t - \tau), \dot{y}_1(t - \tau), y_2(t), y_2(t - \tau), \dot{y}_2(t - \tau)) \frac{dt}{d\lambda}, \quad (3.7)$$

$$(y_1 - dy_{1*})^2 + (y_2 - dy_{2*})^2 + (t - t_*)^2 - \Delta\lambda^2 = 0,$$

$$y_1(a) = y_a, y_2(a) = p,$$

$$y_{1\tau} = \varphi_{11}(T), \dot{y}_{1\tau} = \varphi_{21}(T),$$

$$y_{2\tau} = \varphi_{12}(T), \dot{y}_{2\tau} = \varphi_{22}(T),$$

Полученная система преобразуется путем замены производных дифференциально-разностными соотношениями:

$$\begin{aligned}\frac{y_1 - y_{1*}}{\lambda - \lambda_*} &= f_1(t, y_1(t), y_1(t - \tau), \dot{y}_1(t - \tau), y_2(t), y_2(t - \tau), \dot{y}_2(t - \tau)) \frac{t - t_*}{\lambda - \lambda_*}, \\ \frac{y_2 - y_{2*}}{\lambda - \lambda_*} &= f_2(t, y_1(t), y_1(t - \tau), \dot{y}_1(t - \tau), y_2(t), y_2(t - \tau), \dot{y}_2(t - \tau)) \frac{t - t_*}{\lambda - \lambda_*}, \quad (3.8) \\ (y_1 - y_{1*})^2 + (y_2 - y_{2*})^2 + (t - t_*)^2 - \Delta\lambda^2 &= 0, \\ y_1(a) &= y_a, y_2(a) = p, \\ y_{1\tau} &= \varphi_{11}(T), \dot{y}_{1\tau} = \varphi_{21}(T), \\ y_{2\tau} &= \varphi_{12}(T), \dot{y}_{2\tau} = \varphi_{22}(T),\end{aligned}$$

где  $y_{1*}, y_{2*}$  – значения, вычисленные на предыдущем шаге метода Ньютона.

Для очередного значения  $\lambda_i$  система решается методом Ньютона при фиксированной длине шага  $\Delta\lambda$  и начальных условиях:

$$y_{10} = 2y_{1(i-1)} - y_{1(i-2)}, y_{20} = 2y_{2(i-1)} - y_{2(i-2)}, t_0 = 2t_{(i-1)} - t_{(i-2)}.$$

Особенность задачи состоит также в наличии запаздывания, поэтому необходимо учесть значения функций, входящих в систему, на предыстории. Если точка  $t - \tau$  принадлежит интервалу  $E$ , значения функций определены заданными функциями  $\varphi_{1,2}$ . В противном случае производится построение интерполяционного полинома в форме Лагранжа по трем точкам.

#### 4. Численный пример

**Пример 4.1** *Рассматривается краевая задача*

$$\begin{aligned}\frac{d^2 y_1}{dt^2} &= y_1 - \frac{1}{y_1^2(t-1)}, \\ y_1(1) &= 1, \\ y_{1\tau}(t) &= (2t+1)^{1/3}, t \in [-1; 0].\end{aligned} \quad (4.1)$$

Преобразованная к нормальной форме Коши и согласно методу продолжения, задача (4.1) примет вид:

$$\begin{aligned}(y_1 - y_{1*}) &= y_2(\lambda - \lambda_*), \\ (y_2 - y_{2*}) &= (y_1 - \frac{1}{y_1^2(t-1)})(\lambda - \lambda_*), \\ (y_1 - dy_{1*})^2 + (y_2 - dy_{2*})^2 + (t - t_*)^2 - \Delta\lambda^2 &= 0, \\ y_2(0) &= p, \\ y_{1\tau}(t) &= (2t+1)^{1/3}, t \in [-1; 0].\end{aligned} \quad (4.2)$$

Использовались следующие значения постоянных:  $\tau = 1, \Delta\lambda = 0.01$ .

При решении данной задачи использование методов Эйлера или Рунге-Кутты вызывает трудности, так как при прохождении точки  $t = 0.5$  в правой части второго уравнения получается знаменатель, равный нулю. Метод дискретного продолжения по наилучшему параметру при решении начальной задачи позволяет справиться с прохождением данной особой точки, что обеспечивает продолжение итерационного процесса метода стрельбы. На рисунках представлено решение задачи при найденном значении параметра  $p = 0.92451$ .

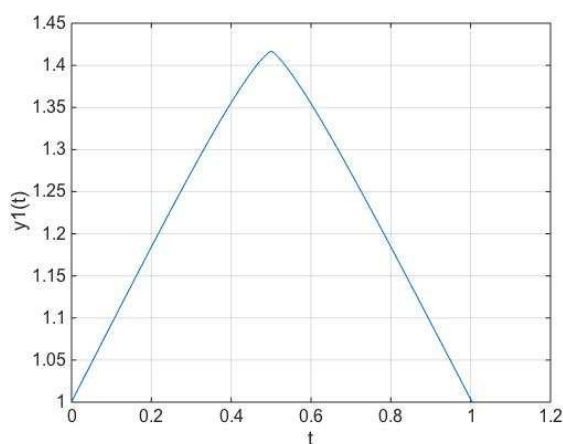


Рис. 4.1.  
Решение  $y_1(t)$

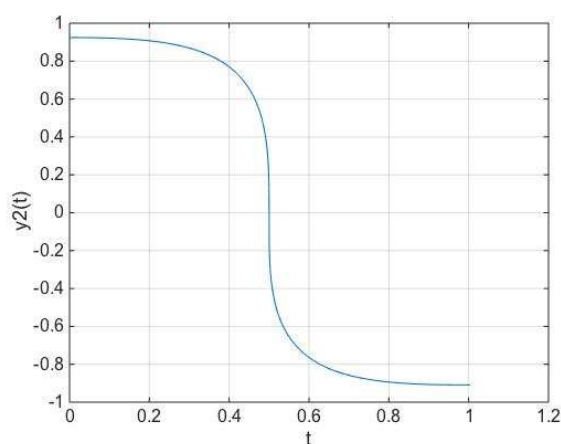


Рис. 4.2.  
Решение  $y_2(t)$

## 5. Выводы

Применение метода дискретного продолжения по наилучшему параметру совместно с методом Ньютона, интерполяционным полиномом Лагранжа и методом стрельбы позволяет успешно решить нелинейную краевую задачу с запаздыванием, имеющую предельные особые точки. Численный пример иллюстрирует успешное построение решений при помощи предложенного подхода.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 19-08-00718.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. Ф. Долгий, П. Г. Сурков, *Математические модели динамических систем с запаздыванием*, Изд-во Урал. ун-та, Екатеринбург, 2012, 119 с.
2. М. Н. Афанасьева, Е. Б. Кузнецов, “Численный метод решения нелинейной краевой задачи для дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом”, *Труды МАИ*, **88** (2016).
3. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, Наука, М., 1987, 600 с.
4. В. И. Шалашилин, Е. Б. Кузнецов, *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике*, Эдиториал УРСС, М., 1999, 224 с.
5. Е. М. Будкина, Е. Б. Кузнецов, “Моделирование технологического процесса производства узлов летательных аппаратов на основе наилучшей параметризации краевой задачи для нелинейных дифференциально-алгебраических уравнений”, *Вестник МАИ*, **23:1** (2016), 189–196.
6. С. Д. Красников, Е. Б. Кузнецов, “Параметризация численного решения краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **45:12** (2005), 2148–2158.

7. С. С. Дмитриев, Е. Б. Кузнецов, “Численное решение систем интегродифференциально-алгебраических уравнений с запаздывающим аргументом”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **48**:3 (2008), 430–444.
8. M. S. Roberts, J. S. Shipman, *Two-point boundary value problems: shooting methods*, Elsevier, New York, 1972, 269 p.
9. А. М. Самойленко, Н. И. Ронто, *Численно-аналитические методы исследования решений краевых задач.*, Наукова думка, Киев, 1986, 222 с.
10. M. E. Lahaye, “Une metode de resolution d’une categorie d’equations transcendentes”, *Compter Rendus hebdomataires des seances de L’Academie des sciences*, **198**:21 (1934), 1840–1842.
11. E. B. Kuznetsov, “Optimal parametrization in numerical construction of curve”, *Journal of the Franklin Institute*, **344**:21 (2007), 658–671.

*Поступила 15.07.2019*

MSC2010 65L10

# The discrete continuation in the boundary value problem for systems of nonlinear differential equations with deviation argument

© M. N. Afanaseva<sup>1</sup> E. B. Kuznetsov<sup>2</sup>

**Abstract.** The solution of the boundary value problems for system of nonlinear differential equations with argument delay is considered in the article. The solution is based on the shooting method. Within its framework the method of continuation with respect to parameter in the Lahaye form, method of the best parametrization and the Newton method are implemented that allow to find possible solutions. To solve the Cauchy problem at each step of the shooting method the discrete continuation method with respect to the best parameter combined with the Newton method is applied. This approach allows to build the solution in the case when singular limit points exist. That provides continuation of Newton iteration process. The algorithm is completed by calculating the Lagrange polynomial to obtain the values of function in the delay points. The example given in the article represents the advantages of the proposed method.

**Key Words:** numerical solution, equations with delay, boundary value problem, the best parameter, discrete continuation, shooting method

## REFERENCES

1. Y. F. Dolgii, P. G. Surkov, [*Mathematical models of delay dynamical systems*], Ural Federal University Publ., Ekaterinburg, 2012 (In Russ.), 119 p.
2. M. N. Afanaseva, E. B. Kuznetsov, “[Numerical method for solving nonlinear boundary value problem for differential equations with retarded argument]”, *Trudy MAI*, **88** (2016) (In Russ.).
3. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobel’kov, [*Numerical Methods*], Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 600 p.
4. V. I. Shalashilin, E. B. Kuznetsov, [*Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics*], Editorial URSS, Moscow, 1999 (In Russ.), 224 p.
5. E. M. Budkina, E. B. Kuznetsov, “[Modeling of technological process for aircraft structural components manufacturing based on the best parametrization and boundary value problem for nonlinear differential-algebraic equations]”, *Aerospace MAI Journal*, **23**:1 (2016), 189–196 (In Russ.).
6. S. D. Krasnikov, E. B. Kuznetsov, “[Parametrization of the numerical solution of boundary value problems for nonlinear differential equations]”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **45**:12 (2005), 2148–2158.

<sup>1</sup>**Maria N. Afanaseva**, graduate student, Department of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4, Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7487-4796>, mary.mai.8@yandex.ru

<sup>2</sup>**Evgeny B. Kuznetsov**, Professor, Department of Information Technology and Applied Mathematics, Moscow Aviation Institute (National Research University) (4, Volokolamskoe shosse, Moscow 125993, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-9452-6577>, kuznetsov@mai.ru

7. S. S. Dmitriev, E. B. Kuznetsov, “[Numerical solution to systems of delay integrodifferential algebraic equations]”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **48**:3 (2008), 430–444.
8. M. S. Roberts, J. S. Shipman, *Two-point boundary value problems: shooting methods*, Elsevier, New York, 1972, 269 p.
9. A. M. Samoilenko, N. I. Ronto, [*Numerical-analytic methods in theory of boundary-value problems*], Naukova Dumka, Kiev, 1986 (In Russ.), 222 p.
10. M. E. Lahaye, “Une metode de resolution d’une categorie d’equations transcendentes”, *Compter Rendus hebdomataires des seances de L’Academie des sciences*, **198**:21 (1934), 1840–1842.
11. E. B. Kuznetsov, “Optimal parametrization in numerical construction of curve”, *Journal of the Franklin Institute*, **344**:21 (2007), 658–671.

*Submitted 15.07.2019*

УДК 517.9

# Условия нелокальной разрешимости одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами

© М. В. Донцова<sup>1</sup>

**Аннотация.** Рассмотрена задача Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами. Исследование разрешимости задачи Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами в исходных координатах основано на методе дополнительного аргумента. Доказано существование локального решения задачи Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами, гладкость которого не ниже, чем гладкости начальных условий. Определены достаточные условия существования нелокального решения задачи Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для одной системы двух квазилинейных уравнений первого порядка со свободными членами опирается на оригинальные глобальные оценки.

**Ключевые слова:** метод дополнительного аргумента, глобальные оценки, задача Коши, уравнения с частными производными первого порядка

## 1. Введение

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + S_1(u, v) \partial_x u(t, x) = f_1(t, x), \\ \partial_t v(t, x) + S_2(u, v) \partial_x v(t, x) = f_2(t, x), \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $u(t, x)$ ,  $v(t, x)$  – неизвестные функции;  $f_1(t, x)$ ,  $f_2(t, x)$ ,  $S_1$ ,  $S_2$  – известные функции.

Для системы уравнений (1.1) определим начальные условия:

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad v(0, x) = \varphi_2(x). \quad (1.2)$$

Задача (1.1)–(1.2) определена на

$$\Omega_T = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

Системы вида (1.1) встречаются в самых различных прикладных задачах из области естественных наук. В работе [1] с помощью метода характеристик проводится анализ разрешимости систем квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка. При исследовании разрешимости задачи Коши для системы нелинейных и квазилинейных уравнений методом характеристик в большинстве случаев трудно перейти от характеристических переменных к исходным переменным.

<sup>1</sup>Донцова Марина Владимировна, ассистент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2915-0881>, dontsowa.marina2011@yandex.ru

Задача определения условий разрешимости в исходных координатах систем нелинейных и квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка эффективно решается в рамках метода дополнительного аргумента [2–12]. В работе [2] с помощью данного метода определены условия локальной разрешимости задачи Коши в исходных координатах для системы двух квазилинейных уравнений, при которых решение имеет меньшую гладкость, чем начальные функции  $\varphi_1(x)$ ,  $\varphi_2(x)$ , и указаны границы интервала разрешимости. В данной работе с помощью метода дополнительного аргумента определены достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши (1.1)–(1.2), при которых решение имеет такую же гладкость по  $x$ , как и начальные функции задачи Коши, и достаточные условия нелокальной разрешимости задачи Коши (1.1)–(1.2).

## 2. Существование локального решения

В соответствии с методом дополнительного аргумента запишем для задачи (1.1)–(1.2) расширенную характеристическую систему [2–12]:

$$\frac{d\eta_1(s, t, x)}{ds} = S_1(w_1(s, t, x), w_3(s, t, x)), \quad (2.1)$$

$$\frac{d\eta_2(s, t, x)}{ds} = S_2(w_4(s, t, x), w_2(s, t, x)), \quad (2.2)$$

$$\frac{dw_1(s, t, x)}{ds} = f_1(s, \eta_1), \quad (2.3)$$

$$\frac{dw_2(s, t, x)}{ds} = f_2(s, \eta_2), \quad (2.4)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, \eta_1), \quad w_4(s, t, x) = w_1(s, s, \eta_2), \quad (2.5)$$

$$w_1(0, t, x) = \varphi_1(\eta_1(0, t, x)), \quad w_2(0, t, x) = \varphi_2(\eta_2(0, t, x)), \quad \eta_i(t, t, x) = x, \quad i = 1, 2. \quad (2.6)$$

Неизвестные функции  $\eta_i$ ,  $w_j$ ,  $i = 1, 2$ ,  $j = \overline{1, 4}$  зависят не только  $t$  и  $x$ , но и от дополнительного аргумента  $s$ . Интегрируя уравнения (2.1)–(2.4) по аргументу  $s$  и учитывая условия (2.5)–(2.6), получим эквивалентную систему интегральных уравнений

$$\eta_1(s, t, x) = x - \int_s^t S_1(w_1, w_3) d\nu, \quad (2.7)$$

$$\eta_2(s, t, x) = x - \int_s^t S_2(w_4, w_2) d\nu, \quad (2.8)$$

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(\eta_1(0, t, x)) + \int_0^s f_1(\nu, \eta_1) d\nu, \quad (2.9)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(\eta_2(0, t, x)) + \int_0^s f_2(\nu, \eta_2) d\nu, \quad (2.10)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, \eta_1), \quad w_4(s, t, x) = w_1(s, s, \eta_2). \quad (2.11)$$



Подставим (2.7)–(2.8) в (2.9)–(2.11), получим следующую систему:

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1 \left( x - \int_0^t S_1(w_1, w_3) d\nu \right) + \int_0^s f_1 \left( \nu, x - \int_\nu^t S_1(w_1, w_3) d\tau \right) d\nu, \quad (2.12)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2 \left( x - \int_0^t S_2(w_4, w_2) d\nu \right) + \int_0^s f_2 \left( \nu, x - \int_\nu^t S_2(w_4, w_2) d\tau \right) d\nu, \quad (2.13)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2 \left( s, s, x - \int_s^t S_1(w_1, w_3) d\nu \right), \quad (2.14)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1 \left( s, s, x - \int_s^t S_2(w_4, w_2) d\nu \right). \quad (2.15)$$

Обозначим  $\Gamma_T = \{(s, t, x) | 0 \leq s \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}$ ,

$$C_\varphi = \max \left\{ \sup_R |\varphi_i^{(l)}| \mid i = 1, 2, l = \overline{0, 2} \right\}, \quad C_f = \max \left\{ \sup_{\Omega_T} |f_1|, \sup_{\Omega_T} |f_2|, \sup_{\Omega_T} |\partial_x f_1|, \sup_{\Omega_T} |\partial_x f_2| \right\},$$

$Z_K = \{(u, v) | u, v \in [-K, K]\}$ , где  $K$  – произвольно зафиксированное положительное число;  $l = \max \left\{ \sup_{Z_K} |\partial_u S_1|, \sup_{Z_K} |\partial_v S_1|, \sup_{Z_K} |\partial_u S_2|, \sup_{Z_K} |\partial_v S_2| \right\}$ ,  $\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$  – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной  $t$ ; дважды дифференцируемых по переменной  $x$ , имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на  $\Omega_T$ ;  $\bar{C}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\Omega_*)$  – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка  $\alpha_m$  по  $m$ -му аргументу,  $m = \overline{1, n}$ , на неограниченном подмножестве  $\Omega_* \subset R^n, n = 1, 2, \dots$ .

Для произвольной функции  $U$  введем норму  $\|U\| = \sup_{\Gamma_T} |U(s, t, x)|$  без указания в символе области, по которой норма вычисляется, так как каждый раз это будет понятно из контекста.

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (1.1)–(1.2), которое имеет такую же гладкость по  $x$ , как и начальные функции задачи Коши.

**Т е о р е м а 2.1** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$ ,  $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$ ,  $S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$ , где  $T \leq \min \left\{ \frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l} \right\}$ ,  $K = 2C_\varphi$  и выполняются условия

$$\partial_u S_1 < 0, \partial_v S_1 > 0, \partial_u S_2 < 0, \partial_v S_2 > 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \leq 0, \varphi_2'(x) \geq 0 \text{ на } R, \partial_x f_1 \leq 0, \partial_x f_2 \geq 0 \text{ на } \Omega_T.$$

Тогда для любого  $T \leq \min \left\{ \frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l} \right\}$  задача Коши (1.1)–(1.2) имеет единственное решение  $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ , которое определяется из системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15).

Теорема 2.1 следует из выполнения условий трех лемм.

**Л е м м а 2.1** Если функции  $w_j, j = \overline{1, 4}$ , удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.12)–(2.15) и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными, то функции

$$u(t, x) = w_1(t, t, x), \quad v(t, x) = w_2(t, t, x)$$

будут решением задачи Коши (1.1)–(1.2) на  $\Omega_{T_0}$ ,  $T_0 \leq T$ , где  $T_0$  – константа, определяемая через исходные данные.

Лемма 2.1 доказывается аналогично утверждению из работ [2–3], [5], [7–8], [10–11].

**Л е м м а 2.2** При выполнении условий

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R), \quad f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T), \quad S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K), \quad K = 2C_\varphi,$$

$$T \leq \min \left\{ \frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l} \right\} \quad (2.16)$$

система интегральных уравнений (2.12)–(2.15) имеет единственное решение

$$w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в работе [2]. Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15) зададим равенствами  $w_{10}(s, t, x) = \varphi_1(x)$ ,  $w_{20}(s, t, x) = \varphi_2(x)$ .

Первое и последующие приближения системы уравнений (2.12)–(2.15) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$w_{1n} = \varphi_1 \left( x - \int_0^t S_1(w_{1n}, w_{3n}) d\nu \right) + \int_0^s f_1 \left( \nu, x - \int_\nu^t S_1(w_{1n}, w_{3n}) d\tau \right) d\nu, \quad (2.17)$$

$$w_{2n} = \varphi_2 \left( x - \int_0^t S_2(w_{4n}, w_{2n}) d\nu \right) + \int_0^s f_2 \left( \nu, x - \int_\nu^t S_2(w_{4n}, w_{2n}) d\tau \right) d\nu, \quad (2.18)$$

$$w_{3n} = w_{2(n-1)} \left( s, s, x - \int_s^t S_1(w_{1n}, w_{3n}) d\nu \right), \quad (2.19)$$

$$w_{4n} = w_{1(n-1)} \left( s, s, x - \int_s^t S_2(w_{4n}, w_{2n}) d\nu \right). \quad (2.20)$$

Теперь при каждом  $n$  систему (2.17)–(2.20) решим (докажем существование решения) с помощью своего процесса последовательных приближений.

Для системы уравнений (2.17)–(2.20) нулевое приближение определим равенствами  $w_{jn}^0 = w_{j(n-1)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . Для системы уравнений (2.17)–(2.20) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений

$$w_{1n}^{k+1} = \varphi_1 \left( x - \int_0^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k) d\nu \right) + \int_0^s f_1 \left( \nu, x - \int_\nu^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k) d\tau \right) d\nu, \quad (2.21)$$

$$w_{2n}^{k+1} = \varphi_2 \left( x - \int_0^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k) d\nu \right) + \int_0^s f_2 \left( \nu, x - \int_\nu^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k) d\tau \right) d\nu, \quad (2.22)$$

$$w_{3n}^{k+1} = w_{2(n-1)} \left( s, s, x - \int_s^t S_1(w_{1n}^k, w_{3n}^k) d\nu \right), \quad (2.23)$$

$$w_{4n}^{k+1} = w_{1(n-1)} \left( s, s, x - \int_s^t S_2(w_{4n}^k, w_{2n}^k) d\nu \right). \quad (2.24)$$

Так же, как в [2], [7–8], [10] устанавливается, что при выполнении условия

$$T \leq \min \left\{ \frac{C_\varphi}{2C_f}, \frac{1}{12C_\varphi l} \right\} \quad (2.25)$$

последовательные приближения (2.21)–(2.24) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (2.17)–(2.20), для которого справедливы оценки  $\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

При выполнении условия (2.25) справедливы оценки

$$\|w_{1nx}^{k+1}\| \leq 4C_\varphi, \|w_{2nx}^{k+1}\| \leq 4C_\varphi, \|w_{3nx}^{k+1}\| \leq 8C_\varphi, \|w_{4nx}^{k+1}\| \leq 8C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.25) последовательные приближения  $w_{jnx}^k$ ,  $j = \overline{1, 4}$  сходятся при  $k \rightarrow \infty$ , а значит, существуют производные  $w_{jnx}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , и справедливы оценки

$$\|\partial_x w_{1n}\| \leq 4C_\varphi, \|\partial_x w_{2n}\| \leq 4C_\varphi, \|\partial_x w_{3n}\| \leq 8C_\varphi, \|\partial_x w_{4n}\| \leq 8C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.25) последовательные приближения, определяемые из системы (2.17)–(2.20), сходятся к непрерывному решению системы (2.12)–(2.15), для которого справедливы оценки  $\|w_j\| \leq 2C_\varphi$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

При выполнении условия (2.16)  $w_{jnx} \rightarrow w_{jx} = \partial_x w_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , где функции  $\partial_x w_j$  являются непрерывными по всем своим аргументам на  $\Gamma_T$ , справедливы оценки

$$\|\partial_x w_i\| \leq 4C_\varphi, i = 1, 2, \|\partial_x w_3\| \leq 8C_\varphi, \|\partial_x w_4\| \leq 8C_\varphi.$$

Аналогично доказывается, что  $w_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , имеет непрерывные и ограниченные производные по переменной  $t$  на  $\Gamma_T$ . Единственность решения доказывается так же, как в статье [2].

В нижеследующей лемме утверждается, что при выполнении следующих условий

$$\begin{aligned} \partial_u S_1 < 0, \partial_v S_1 > 0, \partial_u S_2 < 0, \partial_v S_2 > 0 \text{ на } Z_K, \\ \varphi'_1(x) \leq 0, \varphi'_2(x) \geq 0 \text{ на } R, \partial_x f_1 \leq 0, \partial_x f_2 \geq 0 \text{ на } \Omega_T, \end{aligned} \quad (2.26)$$

решение имеет такую же гладкость по  $x$ , как и начальные функции. Этот результат имеет определяющее значение для возможности продолжения решения.

**Л е м м а 2.3** Пусть  $\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R)$ ,  $f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T)$ ,  $S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K)$ ,  $K = 2C_\varphi$ , тогда при выполнении условий (2.16), (2.26) функции  $w_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , представляющие собой решение системы уравнений (2.12)–(2.15), имеют непрерывные и ограниченные производные  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , на  $\Gamma_T$ , где  $T \leq \min \left\{ \frac{C_\varphi}{4C_f}, \frac{3}{40C_\varphi l} \right\}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Дважды продифференцируем последовательные приближения (2.17)–(2.20) по  $x$ . Обозначим  $\omega_j^n = w_{jnx}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega_1^n(s, t, x) = & -\varphi'_1 \left( x - \int_0^t S_1(w_{1n}, w_{3n}) d\nu \right) \int_0^t (\partial_u S_1 \omega_1^n + \partial_v S_1 \omega_3^n) d\nu - \\ & - \int_0^s \partial_x f_1 \int_\nu^t (\partial_u S_1 \omega_1^n + \partial_v S_1 \omega_3^n) d\tau d\nu + G_1(s, t, x, w_{1n}, w_{3n}, w_{1nx}, w_{3nx}), \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^n(s, t, x) = & -\varphi_2' \left( x - \int_0^t S_2(w_{4n}, w_{2n}) d\nu \right) \int_0^t (\partial_u S_2 \omega_4^n + \partial_v S_2 \omega_2^n) d\nu - \\ & - \int_0^s \partial_x f_2 \int_\nu^t (\partial_u S_2 \omega_4^n + \partial_v S_2 \omega_2^n) d\tau d\nu + G_2(s, t, x, w_{2n}, w_{4n}, w_{2nx}, w_{4nx}), \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} \omega_3^n(s, t, x) = & \omega_2^{n-1} \cdot \left( 1 - \int_s^t (\partial_u S_1 w_{1nx} + \partial_v S_1 w_{3nx}) d\nu \right)^2 - \\ & - w_{2(n-1)x} \int_s^t (\partial_u S_1 \omega_1^n + \partial_v S_1 \omega_3^n) d\nu + G_3(s, t, x, w_{1n}, w_{3n}, w_{1nx}, w_{3nx}), \end{aligned} \quad (2.29)$$

$$\begin{aligned} \omega_4^n(s, t, x) = & \omega_1^{n-1} \cdot \left( 1 - \int_s^t (\partial_u S_2 w_{4nx} + \partial_v S_2 w_{2nx}) d\nu \right)^2 - \\ & - w_{1(n-1)x} \int_s^t (\partial_u S_2 \omega_4^n + \partial_v S_2 \omega_2^n) d\nu + G_4(s, t, x, w_{2n}, w_{4n}, w_{2nx}, w_{4nx}), \end{aligned} \quad (2.30)$$

где  $G_j, j = 1, 2, 3, 4$ , – известные функции.

При выполнении условия (2.16) с учетом установленных выше оценок  $\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , получим

$$\left| \int_s^t S_1(w_{1n}, w_{3n}) d\nu \right| \leq S_K T, \quad \left| \int_s^t S_2(w_{4n}, w_{2n}) d\nu \right| \leq S_K T,$$

$$S_K = \max \left\{ \sup_{Z_K} |S_1|, \sup_{Z_K} |S_2| \right\}, \quad K = 2C_\varphi.$$

Зафиксируем точку  $x_0 \in R^1$ . Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0} = \{x \mid x_0 - S_K T \leq x \leq x_0 + S_K T\}, \quad K = 2C_\varphi.$$

Возьмем  $x_1, x_2 \in \Omega_{x_0}$ .

При выполнении условий (2.16), (2.26) установлено, что справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |\eta_{1n}(s, t, x_1) - \eta_{1n}(s, t, x_2)| & \leq |x_1 - x_2|, \\ |\eta_{2n}(s, t, x_1) - \eta_{2n}(s, t, x_2)| & \leq |x_1 - x_2|, \end{aligned}$$

где  $\eta_{1n}(s, t, x) = x - \int_s^t S_1(w_{1n}, w_{3n}) d\nu$ ,  $\eta_{2n}(s, t, x) = x - \int_s^t S_2(w_{4n}, w_{2n}) d\nu$ .

Таким образом, установлена равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n, \omega_2^n$  по  $x$  при  $x \in \Omega_{x_0}$ , из которой следует равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n, \omega_2^n$  по  $x$  в выбранной произвольной точке  $x_0 \in R$ . Равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n, \omega_2^n$  по  $x$  используется для доказательства сходимости последовательных приближений  $\omega_j^n, j = \overline{1, 4}$ .

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_1^n = & -\varphi'_1 \left( x - \int_0^t S_1(w_1, w_3) d\nu \right) \int_0^t (\partial_u S_1 \tilde{\omega}_1^n + \partial_v S_1 \tilde{\omega}_3^n) d\nu - \\ & - \int_0^s \partial_x f_1 \int_\nu^t (\partial_u S_1 \tilde{\omega}_1^n + \partial_v S_1 \tilde{\omega}_3^n) d\tau d\nu + G_1(s, t, x, w_1, w_3, w_{1x}, w_{3x}),\end{aligned}\quad (2.31)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_2^n = & -\varphi'_2 \left( x - \int_0^t S_2(w_4, w_2) d\nu \right) \int_0^t (\partial_u S_2 \tilde{\omega}_4^n + \partial_v S_2 \tilde{\omega}_2^n) d\nu - \\ & - \int_0^s \partial_x f_2 \int_\nu^t (\partial_u S_2 \tilde{\omega}_4^n + \partial_v S_2 \tilde{\omega}_2^n) d\tau d\nu + G_2(s, t, x, w_2, w_4, w_{2x}, w_{4x}),\end{aligned}\quad (2.32)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_3^n = & \tilde{\omega}_2^{n-1} \cdot \left( 1 - \int_s^t (\partial_u S_1 w_{1x} + \partial_v S_1 w_{3x}) d\nu \right)^2 - w_{2x} \int_s^t (\partial_u S_1 \tilde{\omega}_1^n + \partial_v S_1 \tilde{\omega}_3^n) d\nu + \\ & + G_3(s, t, x, w_1, w_3, w_{1x}, w_{3x}),\end{aligned}\quad (2.33)$$

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}_4^n = & \tilde{\omega}_1^{n-1} \cdot \left( 1 - \int_s^t (\partial_u S_2 w_{4x} + \partial_v S_2 w_{2x}) d\nu \right)^2 - w_{1x} \int_s^t (\partial_u S_2 \tilde{\omega}_4^n + \partial_v S_2 \tilde{\omega}_2^n) d\nu + \\ & + G_4(s, t, x, w_2, w_4, w_{2x}, w_{4x}),\end{aligned}\quad (2.34)$$

где  $G_j, j = 1, 2, 3, 4$ , – известные функции.

Доказывается, что при выполнении условий (2.16), (2.26) система рекуррентных уравнений (2.31)–(2.34) при каждом  $n$  имеет решение, причем  $\tilde{\omega}_j^n \rightarrow \tilde{\omega}_j, j = \overline{1, 4}$ , справедливы оценки

$$\|\tilde{\omega}_1\| \leq 2C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_2\| \leq 2C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_3\| \leq 4C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_4\| \leq 4C_\varphi.$$

Далее доказывается, что последовательные приближения  $\omega_j^n$  сходятся к функциям  $\tilde{\omega}_j, j = \overline{1, 4}$ , при  $n \rightarrow \infty$ .

Получим, что  $w_{jnx} \rightarrow w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$ , где функции  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}, j = \overline{1, 4}$ , непрерывны и ограничены на  $\Gamma_T$  при выполнении условий (2.16), (2.26).

Аналогично установим, что существуют непрерывные и ограниченные производные  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}, j = \overline{1, 4}$  на  $\Gamma_T$  при выполнении условий (2.16), (2.26).  
Доказательство закончено.

### 3. Существование нелокального решения

**Т е о р е м а 3.1** Пусть

$$\varphi_1, \varphi_2 \in \bar{C}^2(R), \quad f_1, f_2 \in \bar{C}^{2,2}(\Omega_T), \quad S_1, S_2 \in \bar{C}^{2,2}(Z_K), \quad K = C_\varphi + TC_f$$

и выполняются условия (2.26). Тогда для любого  $T > 0$  задача Коши (1.1)–(1.2) имеет единственное решение  $u(t, x), v(t, x) \in C^{1,2,2}(\Omega_T)$ , которое определяется из системы интегральных уравнений (2.12)–(2.15).

**Доказательство.** Продифференцируем систему уравнений (1.1) по  $x$ . Обозначим  $p(t, x) = \partial_x u(t, x)$ ,  $q(t, x) = \partial_x v(t, x)$ , получим

$$\begin{cases} \partial_t p + S_1(u, v) \partial_x p = -\partial_u S_1 p^2 - \partial_v S_1 p q + \partial_x f_1, \\ \partial_t q + S_2(u, v) \partial_x q = -\partial_v S_2 q^2 - \partial_u S_2 p q + \partial_x f_2, \\ p(0, x) = \varphi'_1(x), \quad q(0, x) = \varphi'_2(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Добавим к системе уравнений (2.7)–(2.11) два уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1(s, t, x)}{ds} = -\partial_u S_1 \gamma_1^2(s, t, x) - \partial_v S_1 \gamma_1(s, t, x) \gamma_2(s, s, \eta_1) + \partial_x f_1(s, \eta_1), \\ \frac{d\gamma_2(s, t, x)}{ds} = -\partial_v S_2 \gamma_2^2(s, t, x) - \partial_u S_2 \gamma_1(s, s, \eta_2) \gamma_2(s, t, x) + \partial_x f_2(s, \eta_2), \end{cases} \quad (3.2)$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0, t, x) = \varphi'_1(\eta_1), \quad \gamma_2(0, t, x) = \varphi'_2(\eta_2). \quad (3.3)$$

Перепишем систему уравнений (3.2) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_1(s, t, x) = \varphi'_1(\eta_1) + \int_0^s [-\partial_u S_1 \gamma_1^2 - \partial_v S_1 \gamma_1 \gamma_2(\nu, \nu, \eta_1) + \partial_x f_1] d\nu, \\ \gamma_2(s, t, x) = \varphi'_2(\eta_2) + \int_0^s [-\partial_v S_2 \gamma_2^2 - \partial_u S_2 \gamma_2 \gamma_1(\nu, \nu, \eta_2) + \partial_x f_2] d\nu. \end{cases} \quad (3.4)$$

Аналогично тому, как это выполнено в [5], [7–8], [10–11] доказываем существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (3.4). Следовательно,

$$\gamma_1(t, t, x) = p(t, x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_2(t, t, x) = q(t, x) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Для вывода глобальных оценок отметим, что из (2.7)–(2.11) следуют оценки

$$\|w_i\| \leq C_\varphi + TC_f, \quad i = 1, 2.$$

Следовательно,

$$\|u\| \leq C_\varphi + TC_f, \quad \|v\| \leq C_\varphi + TC_f. \quad (3.5)$$

Далее из (3.2) имеем:

$$\begin{cases} \gamma_1(s, t, x) = \varphi'_1(\eta_1) \exp \left( - \int_0^s (\partial_u S_1 \gamma_1 + \partial_v S_1 \gamma_2) d\nu \right) + \\ + \int_0^s \partial_x f_1 \exp \left( - \int_\tau^s (\partial_u S_1 \gamma_1 + \partial_v S_1 \gamma_2) d\nu \right) d\tau, \\ \gamma_2(s, t, x) = \varphi'_2(\eta_2) \exp \left( - \int_0^s (\partial_u S_2 \gamma_1 + \partial_v S_2 \gamma_2) d\nu \right) + \\ + \int_0^s \partial_x f_2 \exp \left( - \int_\tau^s (\partial_u S_2 \gamma_1 + \partial_v S_2 \gamma_2) d\nu \right) d\tau. \end{cases} \quad (3.6)$$

Из (3.6) при выполнении условий

$$\partial_u S_1 < 0, \quad \partial_v S_1 > 0, \quad \partial_u S_2 < 0, \quad \partial_v S_2 > 0 \text{ на } Z_K,$$

$$\varphi_1'(x) \leq 0, \varphi_2'(x) \geq 0 \text{ на } R, \partial_x f_1 \leq 0, \partial_x f_2 \geq 0 \text{ на } \Omega_T,$$

получим, что  $\gamma_1 \leq 0, \gamma_2 \geq 0$  на  $\Gamma_T$ , значит,  $\|\gamma_i\| \leq C_\varphi + TC_f, i = 1, 2$ . Следовательно,

$$\|\partial_x u\| \leq C_\varphi + TC_f, \|\partial_x v\| \leq C_\varphi + TC_f. \quad (3.7)$$

Далее, так же, как в [5, 7] выводится, что при всех  $t$  и  $x$  справедливы оценки

$$|\partial_{x^2}^2 u| \leq E_{11} ch \left( t \sqrt{C_{12} C_{21}} \right) + \frac{E_{21} C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12} C_{21}}} sh \left( t \sqrt{C_{12} C_{21}} \right) + C_{12} C_{23} t^2, \quad (3.8)$$

$$|\partial_{x^2}^2 v| \leq E_{21} ch \left( t \sqrt{C_{12} C_{21}} \right) + \frac{E_{11} C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12} C_{21}}} sh \left( t \sqrt{C_{12} C_{21}} \right) + C_{21} C_{13} t^2, \quad (3.9)$$

где  $E_{11}, E_{21}, C_{12}, C_{13}, C_{21}, C_{23}$  – постоянные, которые определяются через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для  $u, v, \partial_x u, \partial_x v, \partial_{x^2}^2 u, \partial_{x^2}^2 v$  ((3.5), (3.7)–(3.9)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток  $[0, T]$ .

Взяв в качестве начальных значений  $u(T_0, x), v(T_0, x)$ , продлим решение на промежуток  $[T_0, T_1]$ , а затем, выбирая начальные значения  $u(T_1, x), v(T_1, x)$ , – на промежуток  $[T_1, T_2]$ . Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами  $\|\partial_x u\|, \|\partial_x v\|$ , а эти величины в силу глобальных оценок (3.7) ограничены значением  $C_\varphi + TC_f$  на любом промежутке разрешимости. В частности, начальных значений справедливы оценки:

$$u(T_k, x), v(T_k, x) \in \bar{C}^2(R), |u(T_k, x)| \leq C_\varphi + TC_f, |v(T_k, x)| \leq C_\varphi + TC_f.$$

$$|\partial_x u(T_k, x)| \leq C_\varphi + TC_f, |\partial_x v(T_k, x)| \leq C_\varphi + TC_f.$$

Для вторых производных справедливы оценки (3.8)–(3.9), где в качестве  $t$  можно взять  $T$ . В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток  $[0, T]$ .

Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .**

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол\_а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Б. Л. Рождественский, Н. И. Яненко, *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*, Наука, М., 1968, 592 с.
2. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.
3. М. И. Иманалиев, П. С. Панков, С. Н. Алексеенко, “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия: Математика, механика, информатика. Спец. выпуск*, **1** (2006), 60–64.



4. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **14** (2012), 34–41.
5. С. Н. Алексеенко, Т. А. Шемякина, М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*, **177:3** (2013), 190–201.
6. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18:2** (2016), 115–124.
7. М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями”, *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, **4** (2014), 116–130.
8. М. В. Донцова, “Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями”, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, **3** (2014), 21–36.
9. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **15** (2013), 52–59.
10. М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида”, *Уфимский математический журнал*, **6:4** (2014), 71–82.
11. М. В. Донцова, “Разрешимость задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями  $f_1 = a_2 u(t, x) + b_2(t) v(t, x)$ ,  $f_2 = g_2 v(t, x)$ ”, *Уфимский математический журнал*, **11:1** (2019), 26–38.
12. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument”, *Applicable Analysis*, **96:9** (2017), 1444–1465.

Поступила 05.07.2019



MSC2010 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

# The nonlocal solvability conditions for a system of two quasilinear equations of the first order with absolute terms

© M. V. Dontsova<sup>1</sup>

**Abstract.** The Cauchy problem for a system of two first-order quasilinear equations with absolute terms is considered. The study of this problem's solvability in original coordinates is based on the method of an additional argument. The existence of the local solution of the problem with smoothness which is not lower than the smoothness of the initial conditions, is proved. Sufficient conditions of existence are determined for the nonlocal solution that is continued by a finite number of steps from the local solution. The proof of the nonlocal resolvability of the Cauchy problem relies on original global estimates.

**Key Words:** method of an additional argument, global estimates, Cauchy problem, first-order partial differential equations

## REFERENCES

1. B. L. Rozhdestvenskij, N. N. Yanenko, [*Systems of quasilinear equations and their applications to gas dynamics*], Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russ.), 592 p.
2. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, "To the question of the existence of a smooth bounded solution for a system of two first-order nonlinear partial differential equations", *Doklady RAN*, **379**:1 (2001), 16–21 (In Russ.).
3. M. I. Imanaliev, P. S. Pankov, S. N. Alekseenko, "Method of an additional argument", *Vestnik KazNU. Series Mathematics, mechanics, informatics. Spec. issue*, **1** (2006), 60–64 (In Russ.).
4. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, "The investigation of a solvability of the system of equations, describing a distribution of electrons in an electric field of sprite.", *Matem. vestnik pedvuzov, universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **14** (2012), 34–41 (In Russ.).
5. S. N. Alekseenko, T. A. Shemyakina, M. V. Dontsova, "Nonlocal solvability conditions for systems of first order partial differential equations", *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, **177**:3 (2013), 190–201 (In Russ.).
6. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, "The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:2 (2016), 115–124 (In Russ.).
7. M. V. Dontsova, "Nonlocal solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides", *Vestnik of VSU. Series: Physics. Mathematics*, **4** (2014), 116–130 (In Russ.).
8. M. V. Dontsova, "The nonlocal existence of a bounded solution of the Cauchy problem for a system of two first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides", *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika*, **3** (2014), 21–36 (In Russ.).

<sup>1</sup>**Marina V. Dontsova**, Assistant of the Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Lobachevsky State University (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2915-0881>, dontsova.marina2011@yandex.ru

9. S.N. Alekseenko, M.V. Dontsova, “The local existence of a bounded solution of the system of equations, describing a distribution of electrons in low-pressure plasma in an electric field of sprite”, *Matem. vestnik pedvuzov, universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **15** (2013), 52–59 (In Russ.).
10. M.V. Dontsova, “Nonlocal solvability conditions for Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with special right-hand sides”, *Ufa Mathematical Journal*, **6**:4 (2014), 71–82 (In Russ.).
11. M.V. Dontsova, “Solvability of Cauchy problem for a system of first order quasilinear equations with right-hand sides  $f_1 = a_2 u(t, x) + b_2(t)v(t, x)$ ,  $f_2 = g_2 v(t, x)$ ”, *Ufa Mathematical Journal*, **11**:1 (2019), 26–38 (In Russ.).
12. S.N. Alekseenko, M.V. Dontsova, D.E. Pelinovsky, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument”, *Applicable Analysis*, **96**:9 (2017), 1444–1465.

*Submitted 05.07.2019*

УДК 519.6:517.962

# Об одном итерационном процессе для сеточной задачи о сопряжении с итерациями на границе разрыва решения

© Ф. В. Лубышев<sup>1</sup>, М. Э. Файрузов<sup>2</sup>

**Аннотация.** Рассматривается и исследуется итерационный процесс для сеточной задачи о сопряжении с итерациями на границе разрыва решения. Подобная сеточная задача возникает при разностной аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями. Исследование итерационных процессов для состояний таких задач представляет самостоятельный интерес для теории и практики. В работе показано, что численное решение граничных задач подобного типа можно эффективно осуществлять с применением итерационных методов, разработанных в настоящей работе, а именно с помощью итераций на внутренней границе разрыва сеточного решения в сочетании с другими итерационными методами по нелинейностям в отдельности в каждой из сеточных подобластей. Заметим, что задачи для состояний управляемых процессов, описываемых уравнениями математической физики с разрывными коэффициентами и решениями, возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации, теории упругости и др. Предложенный в работе итерационный процесс сводит решение исходной сеточной граничной задачи для состояния с разрывным решением к решению на каждой фиксированной итерации двух специальных граничных задач в двух сеточных подобластях. Доказана сходимость итерационного процесса в сеточных Соболевских нормах к единственному решению сеточной задачи при любом начальном приближении.

**Ключевые слова:** итерационный метод, краевая задача, эллиптическое уравнение, разрывное решение, разностная аппроксимация, сумматорное тождество, сеточная функция

## 1. Постановка сеточной задачи о сопряжении с разрывными коэффициентами и решением

Рассмотрим следующую сеточную задачу о сопряжении с разрывным сеточным решением на границе раздела сред. Требуется найти функцию  $y(x) = (y_1(x), y_2(x))$ , определенную на  $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}^{(1,2)}$ ,  $y(x) = y_1(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}^{(1)}$ ,  $y(x) = y_2(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}^{(2)}$ , где компоненты  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  удовлетворяют условиям:

1) сеточная функция  $y_1(x)$ , определенная на  $\bar{\omega}^{(1)} = \omega^{(1)} \cup \partial\omega^{(1)}$ , удовлетворяет в  $\omega^{(1)}$  уравнению

$$L_{1h}y_1(x) = -(a_{1h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_1})_{x_1} - (a_{2h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_2})_{x_2} + d_{1h}(x)q_1(y_1) = f_{1h}(x), \quad x \in \omega^{(1)}, \quad (1.1)$$

а на границе  $\gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus \gamma_S$  – условию

$$y_1(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(1)}; \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Лубышев Федор Владимирович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, [maham721@mail.ru](mailto:maham721@mail.ru)

<sup>2</sup>Файрузов Махмут Эрнстович, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, [fairuzovme@mail.ru](mailto:fairuzovme@mail.ru)

2) сеточная функция  $y_2(x)$ , определенная на сетке  $\bar{\omega}^{(2)} = \omega^{(2)} \cup \partial\omega^{(2)}$  удовлетворяет в  $\omega^{(2)}$  уравнению

$$L_{2h}y_2(x) = -(a_{1h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_1})_{x_1} - (a_{2h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_2})_{x_2} + d_{2h}(x)q_2(y_2) = f_{2h}(x), \quad x \in \omega^{(2)}, \quad (1.3)$$

а на границе  $\gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus \gamma_S$  — условию

$$y_2(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(2)}; \quad (1.4)$$

3) искомые функции  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  связаны между собой дополнительными условиями на  $\gamma_S$ , позволяющими «сшить» сеточные решения  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  вдоль сеточного множества  $\gamma_S$  в виде следующих уравнений:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{1h}y_1(x) = \frac{2}{h_1} [a_{1h}^{(1)}(\xi, x_2)y_{1\bar{x}_1}(\xi, x_2) + \theta_h(x_2)y_1(\xi, x_2)] + d_{1h}(\xi, x_2)q_1(y_1(\xi, x_2)) - \\ - (a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2)y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2))_{x_2} = f_{1h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2(\xi, x_2), \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{2h}y_2(x) = -\frac{2}{h_1} [a_{1h}^{(2)}(\xi + h_1, x_2)y_{2x_1}(\xi, x_2) + \theta_h(x_2)y_2(\xi, x_2)] + d_{2h}(\xi, x_2)q_2(y_2(\xi, x_2)) - \\ - (a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2)y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2))_{x_2} = f_{2h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1(\xi, x_2), \end{aligned} \quad (1.6)$$

где  $x \in \gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}$ .

Явный вид разностной схемы (1.1)–(1.6) в узлах сетки  $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}^{(1,2)}$  можно записать также в следующем, более компактном, виде:

$$\begin{aligned} A_1^{(1)}y_1 &= A_1^{(1)}y_1 + A_2^{(1)}y_1 = \varphi_1(x), \quad x \in \omega^{(1)} \cup \gamma_S, \\ y_1(x) &= 0, \quad x \in \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus \gamma_S, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$A_1^{(1)}y_1(x) = \begin{cases} -(a_{1h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_1})_{x_1} + \frac{1}{2}d_{1h(x)}q_1(y_1), & x \in \omega^{(1)}, \\ \frac{2}{h_1}[a_{1h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_1}(x) + \theta_h(x_2)y_1(x)] + \frac{1}{2}d_{2h(x)}q_2(y_2), & x \in \gamma_S, \end{cases} \quad (1.8)$$

$$A_2^{(1)}y_1(x) = -(a_{2h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_2})_{x_2}(x) + \frac{1}{2}d_{1h}q_1(y_1), \quad x \in \omega^{(1)} \setminus \gamma_S, \quad (1.9)$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} f_{1h}(x), & x \in \omega^{(1)}, \\ f_{1h}(x) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2(x), & x \in \gamma_S, \end{cases} \quad (1.10)$$

где сеточная функция  $y_2(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}^{(2)} = \omega^{(2)} \cup \partial\omega^{(2)}$  является решением следующего уравнения:

$$\begin{aligned} A_1^{(2)}y_2 &= A_1^{(2)}y_2 + A_2^{(2)}y_2 = \varphi_2(x), \quad x \in \omega^{(2)} \cup \gamma_S, \\ y_2(x) &= 0, \quad x \in \gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus \gamma_S, \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$A_1^{(2)}y_2(x) = \begin{cases} -(a_{1h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_1})_{x_1}(x) + \frac{1}{2}d_{2h(x)}q_2(y_2), & x \in \omega^{(2)}, \\ -\frac{2}{h_1}[a_{1h}^{(2)}(x + h_1, x_2)y_{2x_1}(x) - \theta_h(x_2)y_2(x)] + \frac{1}{2}d_{2h(x)}q_2(y_2), & x \in \gamma_S, \end{cases} \quad (1.12)$$

$$A_2^{(2)} y_2(x) = -\left(a_{2h}^{(2)}(x) y_{2\bar{x}_2}\right)_{x_2}(x) + \frac{1}{2} d_{2h} q_2(y_2), \quad x \in \omega^{(2)} \setminus \gamma_S, \quad (1.13)$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} f_{2h}(x), & x \in \omega^{(2)}, \\ f_{2h}(x) + \frac{2}{h_1} \theta_h(x_2) y_1(x), & x \in \gamma_S. \end{cases} \quad (1.14)$$

Нетрудно показать, что сеточная функция  $y(x) \equiv (y_1(x), y_2(x)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  – решение разностной краевой задачи, удовлетворяет для любой сеточной функции  $v(x) = (v_1(x), v_2(x)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  сумматорному тождеству

$$\begin{aligned} Q_h(y, v) = & \left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} y_{1\bar{x}_1} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left( \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2} v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} y_{2\bar{x}_1} v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \right. \\ & \left( \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\bar{x}_2} v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \Big\} + \\ & + \left\{ \left( \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1(x)) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1(\xi, x_2)) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \\ & \left. + \left( \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2(x)) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2(\xi, x_2)) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \\ & + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [y(\xi, x_2)] [v(\xi, x_2)] h_2 = \\ & = \left\{ \left( \sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \\ & \left. + \left( \sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} = l_h(v). \quad (1.15) \end{aligned}$$

Задача (1.15) (или (1.1)–(1.6), или (1.7)–(1.14)) является сеточным аналогом исходной дифференциальной задачи для состояния процесса управления, описываемого уравнениями математической физики с разрывными коэффициентами и решениями [1]. Подобные задачи возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации, теории упругости и др. [2–5]. Численное решение таких задач, описывающих состояния управляемых процессов и тем более численное решение разностных аппроксимаций задач оптимального управления с разрывными состояниями, сопряжено со значительными трудностями, и прежде всего с необходимостью дискретизации указанных задач. Важнейшей проблемой является разработка высокоточных экономических алгоритмов дискретизации таких задач для состояний с разрывными коэффициентами и решениями, в том числе экономических, сходящихся итерационных методов их реализации [6–7].

Здесь и далее по поводу обозначений для сеточных функций, разностных аппроксимаций смотри работу [1].

## 2. Итерационный процесс для сеточной задачи о сопряжении с итерациями на границе разрыва сеточного решения и его сходимость

Рассмотрим сеточную граничную задачу о сопряжении (1.1)–(1.6) с разрывным решением на границе  $\gamma_S$  (см. также (1.7)–(1.14) или (1.15)). В данном пункте мы покажем, что численное решение граничных задач подобного типа можно эффективно осуществлять с применением итерационных методов, а именно итераций на границе  $\gamma_S$  разрыва сеточного решения в сочетании с другими итерационными методами по нелинейности в отдельности в каждой из областей  $\bar{\omega}^{(1)}$  и  $\bar{\omega}^{(2)}$ .

Задаче (1.1)–(1.6) (см. также (1.7)–(1.14) или (1.15)) поставим в соответствие следующий итерационный процесс с итерациями на внутренней сеточной границе  $\gamma_S$ :

$$L_{1h}y_1^{(n)}(x) = - \sum_{\alpha=1}^2 (a_{\alpha h}^{(1)}(x)y_{1\bar{x}_\alpha}^{(n)})_{x_\alpha} + d_{1h}(x)q_1(y_1^{(n)}) = f_{1h}(x), \quad x \in \omega^{(1)}, \quad (2.1)$$

$$y_1^{(n)}(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus \gamma_S, \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{1h}y_1^{(n)}(x) &= \frac{2}{h_1}a_{1h}^{(1)}(\xi, x_2)y_{1\bar{x}_1}^{(n)}(\xi, x_2) - (a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2)y_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2))_{x_2} + d_{1h}(\xi, x_2)q_1(y_1^{(n)}(\xi, x_2)) + \\ &+ \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1^{(n)}(\xi, x_2) = f_{1h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2^{(n-1)}(\xi, x_2), \quad x \in \gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$L_{2h}y_2^{(n)}(x) = - \sum_{\alpha=1}^2 (a_{\alpha h}^{(2)}(x)y_{2\bar{x}_\alpha}^{(n)})_{x_\alpha} + d_{2h}(x)q_2(y_2^{(n)}) = f_{2h}(x), \quad x \in \omega^{(2)}, \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \tilde{L}_{2h}y_2^{(n)}(x) &= -\frac{2}{h_1}a_{1h}^{(2)}(\xi + h_1, x_2)y_{2x_1}^{(n)}(\xi, x_2) - (a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2)y_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2))_{x_2} + \\ &+ d_{2h}(\xi, x_2)q_2(y_2^{(n)}(\xi, x_2)) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_2^{(n)}(\xi, x_2) = \\ &= f_{2h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1}\theta_h(x_2)y_1^{(n)}(\xi, x_2), \quad x \in \gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 \in \omega_2\}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$y_2^{(n)}(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus \gamma_S, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.6)$$

где  $y_2^{(0)}(x)$  – начальное приближение, например,  $y_2^{(0)} = 0$  на  $\gamma_S$ .

Таким образом, итерационный процесс (2.1)–(2.6) сводит решение исходной сеточной граничной задачи (1.1)–(1.6) с разрывным решением к решению на каждой итерации  $n$  двух граничных задач (2.1)–(2.3) и (2.4)–(2.6) в подобластях  $\bar{\omega}^{(1)}$  и  $\bar{\omega}^{(2)}$  соответственно.

В обобщенной постановке итерационный процесс относительно функций  $y_1^{(n)}(x)$  и  $y_2^{(n)}(x)$  состоит в отыскании последовательности пар сеточных функций  $\{y^{(n)}(x)\} = \{y_1^{(n)}(x), y_2^{(n)}(x)\}_{n=1}^\infty$  таких, что  $y_k^{(n)}(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})$ ,  $k = 1, 2$ , и которые удовлетво-

ряют сумматорным тождествам:

$$\left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_1}^{(n)} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left( \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2}^{(n)} v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2) v_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \\ + \left( \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1^{(n)}(x)) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1^{(n)}(\xi, x_2)) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \\ + \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2) y_1^{(n)} v_1 h_2 = \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2) y_2^{(n-1)} v_1 h_2 + \left( \sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x) v_1(x) h_1 h_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right), \quad \forall v_1(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}; \gamma^{(1)}); \quad (2.7)$$

$$\left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(x) y_{2\bar{x}_1}^{(n)} v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left( \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\bar{x}_2}^{(n)} v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \\ + \left( \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2^{(n)}(x)) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2^{(n)}(\xi, x_2)) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \\ + \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2) y_2^{(n)} v_2 h_2 = \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2) y_1^{(n)} v_2 h_2 + \left( \sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) v_2(x) h_1 h_2 + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right), \quad \forall v_2(x) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)}), \quad (2.8)$$

$n = 1, 2, \dots$ ;  $y_2^{(0)}(x)$  – начальное приближение (например,  $y_2^{(0)}(x) = 0$  на  $\gamma_S$ ).

Используя теорию монотонных операторов [8–11] можно установить однозначную разрешимость задач (2.7)–(2.8) относительно сеточных функций  $y_1^{(n)}(x)$  и  $y_2^{(n)}(x)$  при каждом фиксированном номере  $n$ .

Докажем сходимость итерационного процесса (2.1)–(2.6) (в обобщенной постановке – сходимость итерационного процесса (2.7)–(2.8)).

Интегральные тождества (2.7)–(2.8) относительно определения последовательности  $y^{(n)}(x) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  перепишем в виде:

$$\left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_1}^{(n)} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left( \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} y_{1\bar{x}_2}^{(n)} v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2) v_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(x) y_{2\bar{x}_1}^{(n)} v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \right. \\ \left. \left( \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} y_{2\bar{x}_2}^{(n)} v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \left( \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1^{(n)}(x)) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1^{(n)}(\xi, x_2)) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \\
& + \left( \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2^{(n)}(x)) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2^{(n)}(\xi, x_2)) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \Big\} + \\
& + \sum_{k=1}^2 \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) y_k^{(n)}(\xi, x_2) v_k(\xi, x_2) h_2 = \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) (y_2^{(n-1)}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) + \\
& + y_1^{(n)}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2)) h_2 + \left( \sum_{\omega^{(1)}} f_{1h}(x) v_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{1h}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \\
& + \left( \sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) v_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right), \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}). \quad (2.9)
\end{aligned}$$

Из (2.9) при  $v_1 = 0$  следует (2.7), а при  $v_2 = 0$  следует (2.8).

Для оценки скорости сходимости метода итераций при  $n \rightarrow \infty$  введем в рассмотрение величины:

$$z^{(n)}(x) = \begin{cases} z_1^{(n)} = y_1^{(n)} - y_1(x), & x \in \bar{\omega}^{(1)}, \\ z_2^{(n)} = y_2^{(n)} - y_2(x), & x \in \bar{\omega}^{(2)}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Из (2.9), (1.15) следует

$$\begin{aligned}
& \left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)} z_{1\bar{x}_1}^{(n)} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left( \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)} z_{1\bar{x}_2}^{(n)} v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \right. \right. \\
& + \left. \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) z_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2) v_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \Big\} + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)} z_{2\bar{x}_1}^{(n)} v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \right. \\
& + \left( \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)} z_{2\bar{x}_2}^{(n)} v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) z_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \Big\} + \\
& + \left\{ \left( \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) [q_1(y_1^{(n)}(x)) - q_1(y_1(x))] v_1(x) h_1 h_2 + \right. \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) [q_1(y_1^{(n)}(\xi, x_2)) - q_1(y_1(\xi, x_2))] v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \Big) + \\
& + \left( \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) [q_2(y_2^{(n)}(x)) - q_2(y_2(x))] v_2(x) h_1 h_2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) [q_2(y_2^{(n)}(\xi, x_2)) - q_2(y_2(\xi, x_2))] v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \Big) \Big\} + \\
& + \sum_{k=1}^2 \sum_{\omega_2} \theta_h(x) z_k^{(n)}(\xi, x_2) v_k(\xi, x_2) h_2 = \\
& = \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [z_2^{(n-1)}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) + z_1^{(n)}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2)] h_2, \quad \forall v \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}). \quad (2.11)
\end{aligned}$$



Полагая в (2.11)  $v = z^{(n)}$ , получим:

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \left( \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 \right) \right\} + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \right. \\
 & \quad \left. + \left( \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 \right) \right\} + \\
 & \quad + \left\{ \left( \sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) [q_1(y_1^{(n)}(x) - q_1(y_1(x)))] z_1^{(n)}(x) h_1 h_2 \right) + \right. \\
 & \quad + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) [q_1(y_1^{(n)}(\xi, x_2) - q_1(y_1(\xi, x_2)))] z_1^{(n)}(\xi, x_2) h_1 h_2 \Big) + \\
 & \quad + \left( \sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) [q_2(y_2^{(n)}(x) - q_2(y_2(x)))] z_2^{(n)}(x) h_1 h_2 + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) [q_2(y_2^{(n)}(\xi, x_2) - q_2(y_2(\xi, x_2)))] z_2^{(n)}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \Big\} + \\
 & + \sum_{k=1}^2 \sum_{\omega_2} \theta_h(x) (z_k^{(n)}(\xi, x_2))^2 h_2 = \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [z_1^{(n)}(\xi, x_2) z_2^{(n-1)}(\xi, x_2) + z_1^{(n)}(\xi, x_2) z_2^{(n)}(\xi, x_2)] h_2.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Обратимся к сумматорному тождеству (2.12). Поскольку  $z^{(n)}(x) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ , то в граничных узлах имеем соотношения:  $z^{(n)}(x) = 0$ . Так как  $z_{1\bar{x}_1}^{(n)} = 0$  при  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = l_2$ , то

$$\sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 = \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} a_{1h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 \bar{h}(x_2). \tag{2.13}$$

Поскольку  $z_{2\bar{x}_1}^{(n)} = 0$  при  $x_2 = 0$ ,  $x_2 = l_2$ , то

$$\sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 = \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} a_{1h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 \bar{h}(x_2). \tag{2.14}$$

Далее, так как  $z_{1\bar{x}_2}^{(n)} = 0$  при  $x_1 = 0$ , то

$$\begin{aligned}
 \sum_{\bar{\omega}_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)})^2 \bar{h}_1 h_2 &= \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(0, x_2) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)}(0, x_2))^2 \frac{h_1}{2} h_2 + \\
 &+ \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 = \\
 &= \sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Поскольку  $z_{2\bar{x}_2}^{(n)} = 0$  при  $x_1 = l_1$ , то

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{\omega}_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 &= \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 + \\ &+ \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(l_1, x_2) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)}(l_1, x_2))^2 \frac{h_1}{2} h_2 = \\ &= \sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Так как сумматорное тождество (2.12) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} a_{1h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 \right\} + \\ &+ \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} a_{1h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 \right\} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \left( d_{kh}(x) [q_k(y_k^{(n)}(x)) - q_k(y_k(x))] , z_k^{(n)}(x) \right)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})} + \\ &+ \sum_{k=1}^2 \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2) (z_k^{(n)}(x))^2 h_2 = \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2) (z_1^{(n)}(x) z_2^{(n-1)}(x) + z_1^{(n)}(x) z_2^{(n)}(x)) h_2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

то далее имеем

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2) (z_1^{(n)}(x) z_2^{(n-1)}(x) + z_1^{(n)}(x) z_2^{(n)}(x)) h_2 \right| \leq \\ &\leq \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} \sum_{x \in \gamma_S} (|z_1^{(n)}(x)| \cdot |z_2^{(n-1)}(x)| + |z_1^{(n)}(x)| \cdot |z_2^{(n)}(x)|) h_2 \leq \\ &\leq \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} [\|z_1^{(n)}(x)\|_{L_2(\gamma_S)} \|z_2^{(n-1)}(x)\|_{L_2(\gamma_S)} + \|z_1^{(n)}(x)\|_{L_2(\gamma_S)} \|z_2^{(n)}(x)\|_{L_2(\gamma_S)}] = \\ &= \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} \|z_1^{(n)}(x)\|_{L_2(\gamma_S)} [\|z_2^{(n-1)}(x)\|_{L_2(\gamma_S)} + \|z_2^{(n)}(x)\|_{L_2(\gamma_S)}]. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Для любых сеточных функций  $v_1(x)$  и  $v_2(x)$ , заданных на сетках  $\bar{\omega}^{(1)} \subset \bar{\Omega}_1$  и  $\bar{\omega}^{(2)} \subset \bar{\Omega}_2$ , справедливы неравенства [1–3]

$$\|v_k(x)\|_{L_2(\partial\omega^{(k)})} \leq \bar{C}_{k+2}^2 \|v_k(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}, \quad k = 1, 2, \quad (2.19)$$

где  $\bar{C}_{k+2}^2 = \text{Const} > 0$ ,  $k = 1, 2$ .

В силу оценок (2.19) из (2.18) получим

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2) (z_1^{(n)}(x) z_2^{(n-1)}(x) + z_1^{(n)}(x) z_2^{(n)}(x)) h_2 \right| \leq \\ &\leq \bar{C}_3 \bar{C}_4 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} \|z_1^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})} [\|z_2^{(n-1)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})} + \|z_2^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}] \leq \\ &\leq \bar{C}_3 \bar{C}_4 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} \|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} [\|z_2^{(n-1)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})} + \|z_2^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}]. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Кроме того, в силу ограничений на входные данные имеем

$$\sum_{k=1}^2 \left( d_{kh}(x) [q_k(y_k^{(n)}(x)) - q_k(y_k(x))] , z_k^{(n)}(x) \right)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})} \geq 0. \quad (2.21)$$

Далее установим следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} a_{1h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 \right\} + \\ & + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} a_{1h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^2 \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2) (z_k^{(n)}(x))^2 h_2 \geq \nu \left\{ \left[ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} (z_{1\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\bar{\omega}_2^+} (z_{1\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 \right] + \right. \\ & + \left[ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} (z_{2\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\bar{\omega}_2^+} (z_{2\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 \right] \Big\} + \theta_0 \sum_{k=1}^2 \sum_{x \in \gamma_S} (z_k^{(n)}(x))^2 h_2 = \nu \sum_{k=1}^2 \|\nabla z_k^{(n)}\|^2 + \\ & + \theta_0 \sum_{k=1}^2 \sum_{x \in \gamma_S} (z_k^{(n)}(x))^2 h_2 \geq \min\{\nu, \theta_0\} \sum_{k=1}^2 \left[ \|\nabla z_k^{(n)}\|^2 + \sum_{x \in \gamma_S} (z_k^{(n)}(x))^2 h_2 \right]. \quad (2.22) \end{aligned}$$

Поскольку  $\gamma_S \subset S$ , где  $S \subset \partial\Omega_k$  — часть границ  $\partial\Omega_k$  областей  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ , с положительной мерой:  $\text{mes} S > 0$ , то в силу оценки [1] имеем

$$\|z_k^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})} \leq \bar{C}_k^2 \left[ \|\nabla z_k^{(n)}\|^2 + \sum_{x \in \gamma_S} (z_k^{(n)}(x))^2 h_2 \right], \quad k = 1, 2, \quad (2.23)$$

где  $\bar{C}_k = \text{Const} > 0$ ,  $k = 1, 2$ .

Поэтому из (2.22) получим оценку

$$\begin{aligned} & \left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} a_{1h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x) (z_{1\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 \right\} + \\ & + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\bar{\omega}_2} a_{1h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_1}^{(n)})^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(x) (z_{2\bar{x}_2}^{(n)})^2 h_1 h_2 \right\} + \\ & + \sum_{k=1}^2 \sum_{x \in \gamma_S} \theta_h(x_2) (z_k^{(n)}(x))^2 h_2 \geq \bar{C}_7 \sum_{k=1}^2 \|z_k^{(n)}\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}^2 = \bar{C}_7 \|z_k^{(n)}\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2, \quad (2.24) \end{aligned}$$

где  $\bar{C}_7 = \min\{\nu, \theta_0\} \min\{(\bar{C}_1)^{-2}, (\bar{C}_2)^{-2}\}$ .

Теперь на основании оценок (2.20), (2.24) из (2.12) получим

$$\bar{C}_7 \|z^{(n)}\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 \leq \bar{C}_3 \bar{C}_4 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} \|z^{(n)}\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} [\|z_2^{(n-1)}\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})} + \|z_2^{(n)}\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}].$$

Откуда имеем оценку

$$\|z^{(n)}\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} \leq \bar{C}_8 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)} [\|z_2^{(n-1)}\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})} + \|z_2^{(n)}\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}], \quad (2.25)$$

где  $\bar{C}_8 = (\bar{C}_7)^{-1} \bar{C}_3 \bar{C}_4$ .

Из оценки (2.25) получим

$$\|z_1^{(n)}\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})}^2 + \|z_2^{(n)}\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2 \leq 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2 [\|z_2^{(n-1)}\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})} + \|z_2^{(n)}\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}], \quad (2.26)$$

$n = 1, 2, \dots$

Далее на основе оценки (2.26) установим

$$\begin{aligned} & \|z_1^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})}^2 + \|z_2^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2 \leq 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2 \times \\ & \times \left[ (\|z_1^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})}^2 + \|z_2^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2) + \|z_2^{(n-1)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2 \right], \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.27)$$

откуда имеем

$$\begin{aligned} & (1 - 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2) \left( \|z_1^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})}^2 + \|z_2^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2 \right) \leq \\ & \leq 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2 \cdot \|z_2^{(n-1)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2, \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (2.28)$$

т. е.

$$(1 - 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2) \|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 \leq 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2 \|z_2^{(n-1)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2. \quad (2.29)$$

Следовательно, при

$$4\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2 < 1 \quad (2.30)$$

найдем

$$\|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 \leq q^2 \|z_2^{(n-1)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (2.31)$$

где

$$q^2 = \frac{2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2}{1 - 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2} < 1. \quad (2.32)$$

С другой стороны, в силу оценки (2.26) имеем также цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} & \|z_1^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})}^2 + \|z_2^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2 \leq 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2 \times \\ & \times \left[ (\|z_1^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})}^2 + \|z_2^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2) + (\|z_1^{(n-1)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})}^2 + \|z_2^{(n-1)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}^2) \right], \end{aligned} \quad (2.33)$$

$n = 1, 2, \dots$ , откуда найдем

$$(1 - 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2) \|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 \leq 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2 \|z^{(n-1)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2, \quad (2.34)$$

$n = 2, 3, \dots$

Следовательно, при выполнении (2.30) наряду с (2.31) имеем:

$$\|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 \leq q^2 \|z^{(n-1)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2, \quad n = 2, 3, \dots, \quad (2.35)$$

где величина  $q$  определена в (2.32).

Таким образом, имеем две цепочки неравенств (2.25) и (2.35) для последовательности  $\{z^n\}_{n=1}^\infty$ . Из цепочки неравенств (2.31) при  $n = 1$  имеем

$$\|z^{(1)}(x)\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} \leq q \|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})}. \quad (2.36)$$

Полагая теперь в (2.35) последовательно  $n = 2, 3, \dots$ , с учетом (2.36) получим следующую цепочку соотношений:

$$\begin{aligned} \|z^{(2)}(x)\|_{V(\bar{\omega}(1,2))} &\leq q \|z^{(1)}(x)\|_{V(\bar{\omega}(1,2))} \leq q^2 \|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}(2))}, \\ \|z^{(3)}(x)\|_{V(\bar{\omega}(1,2))} &\leq q \|z^{(2)}(x)\|_{V(\bar{\omega}(1,2))} \leq q^3 \|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}(2))}, \\ &\dots\dots\dots \\ \|z^{(m)}(x)\|_{V(\bar{\omega}(1,2))} &\leq q^m \|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}(2))}, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (2.37)$$

Таким образом, если выполнено условие (2.30), то справедлива оценка

$$\|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}(1,2))} = \left( \|z_1^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}(1))}^2 + \|z_2^{(n)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}(2))}^2 \right)^{1/2} \leq q^n \|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}(2))}, \quad (2.38)$$

где

$$0 < q = \left( \frac{2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2}{1 - 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2} \right)^{1/2} < 1, \quad (2.39)$$

а величина  $z^{(n)}(x)$  определена соотношением (2.10).

Таким образом  $\|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}(1,2))} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , если выполнено неравенство (2.30), т. е. доказана сходимость итерационного процесса (2.1)–(2.6) в сеточной норме  $\|\cdot\|_{V(\bar{\omega}(1,2))}$ .

В силу эквивалентности норм  $\|\cdot\|_{V(\bar{\omega}(1,2))}$ ,  $\|\cdot\|_{*h} = \|\cdot\|_{\dot{V}_{\gamma(1)\gamma(2)}(\bar{\omega}(1,2))}^\circ$ , где (см. [1]):

$$\|z^{(n)}(x)\|_{*h}^2 = \|z^{(n)}(x)\|_{\dot{V}_{\gamma(1)\gamma(2)}(\bar{\omega}(1,2))}^2 = \sum_{k=1}^2 \|\nabla z^{(n)}(x)\|^2 + \|[z^{(n)}(x)]\|_{L_2(\gamma_S)}^2, \quad (2.40)$$

где  $[z^{(n)}(x)] = z_2^{(n)}(x) - z_1^{(n)}(x)$  – скачок функции  $z^{(n)}(x)$  на  $\gamma_S$ ; итерационный процесс (2.1)–(2.6) сходится и в сеточной норме (2.40). Процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем  $0 < q < 1$  при условии достаточной малости величины нормы  $\|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2$ , точнее, если выполнено условие (2.30).

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

**Т е о р е м а 2.1** Пусть выполнено условие

$$4\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2 < 1,$$

тогда итерационный процесс (2.1)–(2.6) сходится в сеточных нормах  $\|\cdot\|_{V(\bar{\omega}(1,2))}$ ,  $\|\cdot\|_{*h} = \|\cdot\|_{\dot{V}_{\gamma(1)\gamma(2)}(\bar{\omega}(1,2))}^\circ$  к единственному решению сеточной задачи (1.1)–(1.6) при любом начальном приближении  $y_2^{(0)}(x) \in W_2^1(\bar{\omega}(2); \gamma^2)$  и справедлива оценка скорости сходимости

$$\|z^{(n)}(x)\|_{V(\bar{\omega}(1,2))} \leq q^n \|z_2^{(0)}(x)\|_{W_2^1(\bar{\omega}(2))}, \quad 0 < q = \left( \frac{2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2}{1 - 2\bar{C}_8^2 \|\theta_h(x_2)\|_{L_\infty(\gamma_S)}^2} \right)^{1/2} < 1.$$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. В. Лубышев, “О разностных аппроксимациях задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **52:8** (2012), 1378–1399.
2. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Вычислительная теплопередача*, Эдиториал УРСС, М., 2003, 784 с.
3. А. А. Самарский, В. Б. Андреев, *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976, 352 с.
4. В. С. Зарубин, *Инженерные методы решения задач теплопроводности*, Энергоатомиздат, М., 1983, 328 с.
5. Э. М. Карташов, *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, М., 1985, 480 с.
6. В. А. Цурко, “О точности разностных схем для параболических уравнений с разрывным решением”, *Дифференциальные уравнения*, **36:7** (2000), 986–992.
7. В. А. Цурко, “Разностные методы для задач конвекции-диффузии с разрывными коэффициентами и решениями”, *Дифференциальные уравнения*, **41:2** (2005), 274–280.
8. А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987, 296 с.
9. Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978, 336 с.
10. А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988, 304 с.
11. Ф. Е. Браудер, “Нелинейные эллиптические граничные задачи”, *Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1963.

Поступила 23.06.2019

MSC2010 65N06

# On an iterative process for the grid conjugation problem with iterations on the boundary of the solution discontinuity

© F. V. Lubyshev<sup>1</sup>, M. E. Fairuzov<sup>2</sup>

**Abstract.** An iterative process for the grid problem of conjugation with iterations on the boundary of the discontinuity of the solution is considered. Similar grid problem arises in difference approximation of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions. The study of iterative processes for the states of such problems is of independent interest for theory and practice. The paper shows that the numerical solution of boundary problems of this type can be efficiently implemented using iterations on the inner boundary of the grid solution discontinuity in combination with other iterative methods for nonlinearities separately in each of the grid subregions. It can be noted that problems for states of controlled processes described by equations of mathematical physics with discontinuous coefficients and solutions arise in mathematical modeling and optimization of heat transfer, diffusion, filtration, elasticity theory, etc. The proposed iterative process reduces the solution of the initial grid boundary problem for a state with a discontinuous solution to a solution of two special boundary problems in two grid subdomains at every fixed iteration. The convergence of the iteration process in the Sobolev grid norms to the unique solution of the grid problem for each initial approximation is proved.

**Key Words:** iterative method, boundary value problem, elliptic equation, discontinuous solution, difference approximation, summation identity, grid function

## REFERENCES

1. F. V. Lubyshev, “Finite difference approximations of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions”, *Computational mathematics and mathematical physics*, **52**:8 (2012), 1094–1114.
2. A. A. Samarskiy, P. N. Vabishchevich, [*Computational heat transfer*], Editorial URSS, Moscow, 2003 (In Russ.), 784 p.
3. A. A. Samarskiy, V. B. Andreev, [*Difference methods for elliptic equations*], Nauka, Moscow, 1976 (In Russ.), 352 p.
4. V. S. Zarubin, [*Engineering methods for solving heat conduction problems*], Energoatomizdat, Moscow, 1983 (In Russ.), 328 p.
5. E. M. Kartashov, [*Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids*], Vysshaya shkola, Moscow, 1985 (In Russ.), 480 p.
6. V. A. Tsurko, “The accuracy of finite-difference schemes for parabolic equations with a discontinuous solution”, *Differential Equations*, **36**:7 (2000), 1094–1101.

<sup>1</sup>**Fedor V. Lubyshev**, Professor, Department of Information Technology and Computer mathematics, Bashkir state University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru

<sup>2</sup>**Mahmut E. Fairuzov**, Associate Professor, Department of Information Technology and Computer mathematics, Bashkir state University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, fairuzovme@mail.ru

7. V. A. Tsurko, “Finite-difference methods for convection-diffusion problems with discontinuous coefficients and solutions”, *Differential Equations*, **41**:2 (2005), 290–296.
8. A. A. Samarskij, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, [*Difference schemes for differential equations with generalized solutions*], Vysshaya shkola, Moscow, 1987 (In Russ.), 296 p.
9. H. Gajewski, K. Greger, K. Zacharias, *Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentialgleichungen*, Akademie Verlag, Berlin, 1974, 281 p.
10. A. Kufner, S. Fuchik, *Nonlinear differential equations*, Elsevier, Prague, 1980, 359 p.
11. F. E. Brauder, “Nonlinear elliptic boundary value problems”, *Nonlinear elliptic boundary value problems. Materialy k sovместnomu sovetsko-amerikanskomu simpoziumu po uravneniyam s chastnymi proizvodnymi*, Publishing House of the Siberian Branch of the Academy of Sciences of the USSR, Novosibirsk, 1963 (In Russ.).

*Submitted 23.06.2019*



## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201903.343-352

УДК 629.735.45.05

# Исследование прочности композитной лопасти несущего винта вертолета, имеющей ударные повреждения, по теории предельного равновесия

© И. Н. Сидоров<sup>1</sup>, В. И. Митряйкин<sup>2</sup>, А. В. Горелов<sup>3</sup>, Л. П. Шабалин<sup>4</sup>

**Аннотация.** Приведены результаты расчета предельного состояния лопасти несущего винта вертолета «АНСАТ» при различных режимах полета с учетом возможного повреждения лопасти в комлевом сечении. Для оценки прочности использован метод вариации упругих постоянных, основанный на теории предельного равновесия и позволяющий получать одновременно верхнюю и нижнюю границу предельной нагрузки. При этом вектор напряжений в слоях пакета, определяемый согласно закону деформирования, ассоциированному предельной поверхности текучести этих слоев, выражается через шестимерный вектор обобщенных усилий и анализ предельного состояния по напряжениям сводится к анализу предельного состояния в пространстве обобщенных усилий. Определены коэффициенты запаса прочности лопасти в комлевом сечении в зависимости от азимутального угла поворота лопасти для случая, когда все обобщенные усилия изменяются пропорционально одному параметру нагружения. Предложена возможность использования внутренней диагностики мест повреждений с помощью рентгеновской компьютерной томографии на основе медицинского рентгеновского томографа фирмы «Siemens».

**Ключевые слова:** теория предельного равновесия, коэффициент запаса, метод вариации упругих постоянных, композитная лопасть несущего винта вертолета, повреждения

## 1. Введение

Лопасть несущего винта (НВ) в процессе эксплуатации, являясь незащищённой частью вертолета, может получать повреждения в виде отверстий в различных её частях, например, при попадании в лопасть острого металлического предмета. В работах [1–2]

<sup>1</sup>**Сидоров Игорь Николаевич**, заведующий кафедрой теоретической и прикладной механики и математики, ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ» (420066, Татарстан, г. Казань, ул. Бондаренко, д. 34), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6674-9776>, [sidorovin@mail.ru](mailto:sidorovin@mail.ru)

<sup>2</sup>**Митряйкин Виктор Иванович**, профессор кафедры машиноведения и инженерной графики, ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ» (420066, Татарстан, г. Казань, ул. Бондаренко, д. 34), доктор технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3805-910X>, [vmitryaykin@bk.ru](mailto:vmitryaykin@bk.ru)

<sup>3</sup>**Горелов Алексей Вячеславович**, старший преподаватель кафедры приборостроения чистопольского филиала «Восток», ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ» (420066, Татарстан, г. Казань, ул. Бондаренко, д. 34), кандидат технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1300-5110>, [a.gorelov-kai@yandex.ru](mailto:a.gorelov-kai@yandex.ru)

<sup>4</sup>**Шабалин Леонид Павлович**, научный сотрудник кафедры производства летательных аппаратов, ФГБОУ ВО «Казанский национальный исследовательский технический университет им. А. Н. Туполева – КАИ» (420066, Татарстан, г. Казань, ул. Бондаренко, д. 34), кандидат технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6246-7699>, [leonid.shabalin@gmail.com](mailto:leonid.shabalin@gmail.com)

предложен алгоритм расчёта, приведены результаты расчёта нижней границы нагрузки в комлевом сечении лопасти НВ вертолёта, соответствующей её предельному состоянию для режима висения, а также сделан вывод, что оценка прочности лопасти должна проводиться только по предельной нагрузке. Оценка предельного состояния лопасти основана на методе вариации упругих постоянных, рассмотренном в работах [3–6]. Цель настоящей работы – определение коэффициента запаса статической прочности (нижней границы предельной нагрузки) лопасти НВ в комлевом сечении, имеющей повреждения в виде отверстий, для различных скоростей горизонтального полета вертолёта; выявление экспериментальных повреждений лопасти при ударных воздействиях и сравнение их с расчётными.

## 2. Постановка задачи

Исследуемая лопасть НВ крепится к торсиону (Рис. 2.1), рассмотренному в работе [7]. И в комлевом сечении (Рис. 2.2) состоит из двух основных элементов: лонжерона и хвостового отсека, наружные обводы которых соответствуют аэродинамическому профилю НАСА-23012. Материал лопасти – многослойный стеклопластик Т-25(ВМ). Лонжерон в поперечном сечении представляет собой многослойную профилированную трубу. Наружная поверхность носовой части лонжерона покрыта слоем резины, поверх которого установлена защитная стальная оковка. Хвостовой отсек состоит из верхней и нижней многослойных обшивок, сотового заполнителя, подкрепляющего обшивки, и хвостового стрингера. Соединение всех элементов выполнено склеиванием. Пределы прочности при растяжении, сжатии и сдвиге в осях ортотропии слоя материала Т-25(ВМ) по данным ВИАМ, которые использовались при расчетах, следующие:

$$\bar{\sigma}_1^+ = 933 \text{ МПа}, \bar{\sigma}_1^- = 615 \text{ МПа}, \bar{\sigma}_2^+ = 110 \text{ МПа}, \bar{\sigma}_2^- = 244 \text{ МПа}, \bar{\tau}_{12} = 11 \text{ МПа},$$

где индекс 1 соответствует направлению вдоль нитей основы, 2 – поперек нитей основы; индексы для пределов прочности «+» и «-» обозначают растяжение и сжатие; схема укладки слоев лонжерона и хвостовой обшивки по отношению к оси лопасти соответственно:  $[0^\circ / \pm 45^\circ / 0^\circ / \pm 45^\circ / 0^\circ]$  и  $[0^\circ / \pm 45^\circ / 0^\circ]$ ; порядок чередования слоев снаружи внутрь лопасти; толщина каждого слоя 0,28 мм.

Согласно алгоритму, предложенному в работе [1], в расчетах реальная лопасть заменялась аналогом, состоящим из участков. На Рис. 2.3 точками показаны границы участков, цифрами – номера участков.

Повреждения моделировались отверстиями в виде полос по всей длине участка поперечного сечения комлевой части лопасти с постоянными характеристиками (Рис. 2.1). При этом в сечении лопасти (Рис. 2.3) на участке, соответствующем этой полосе, пределы прочности слоев пакета уменьшались на 6 порядков по сравнению с соответствующими параметрами неповрежденных участков.

## 3. Расчет нижней границы коэффициента предельной нагрузки композитной лопасти несущего винта вертолета «АНСАТ»

В алгоритме, предложенном в работе [1], предельный вектор напряжений в слоях пакета определяется согласно закону деформирования, ассоциированному предельной поверхности текучести этих слоев. При этом вектор напряжений выражается через шестимерный вектор обобщенных усилий, и анализ предельного состояния по напряжениям так же, как в работе [8], сводится к анализу предельного состояния в пространстве обобщенных усилий.

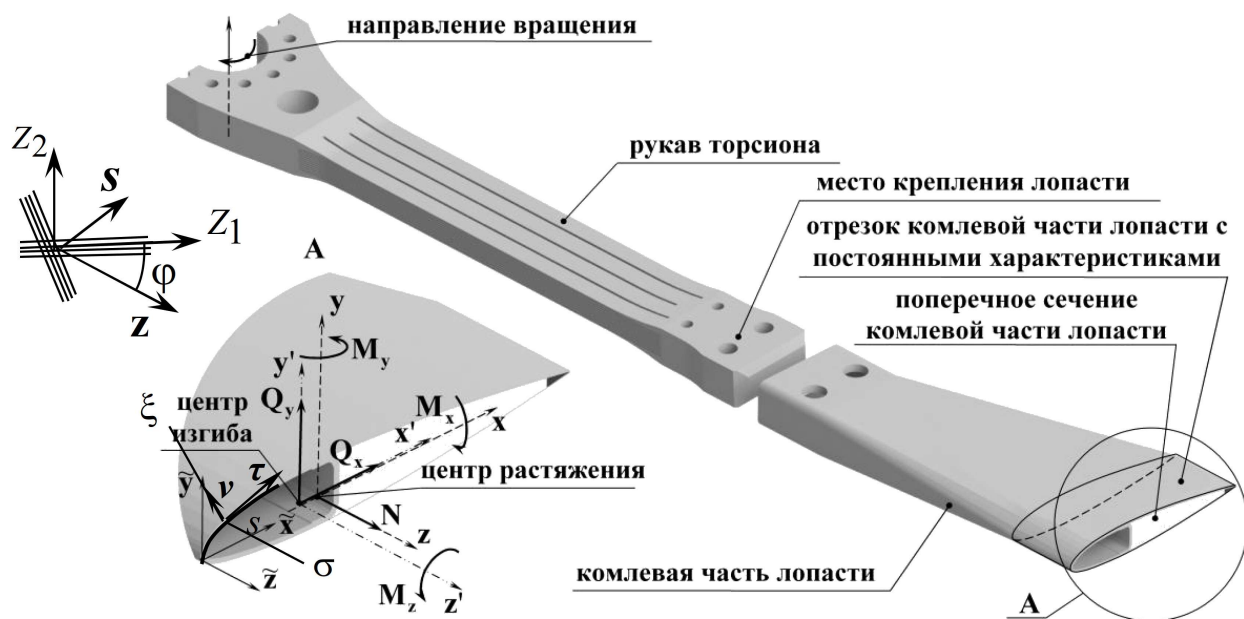


Рис. 2.1. Основные элементы несущего винта вертолета

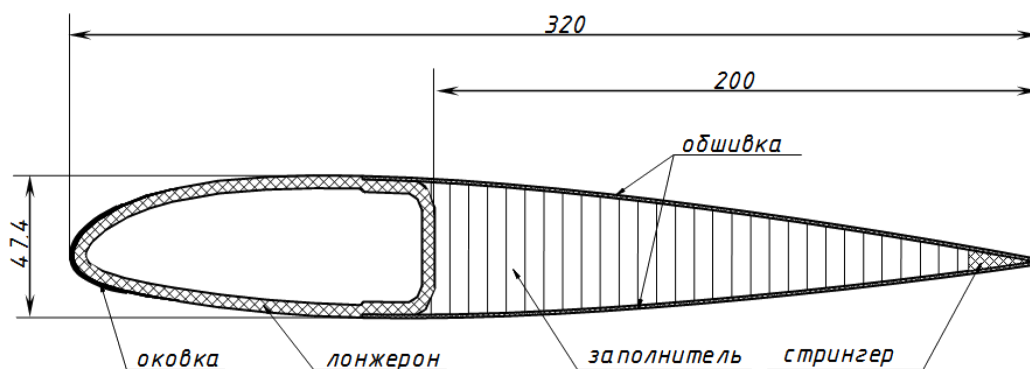


Рис. 2.2. Основные элементы лопасти

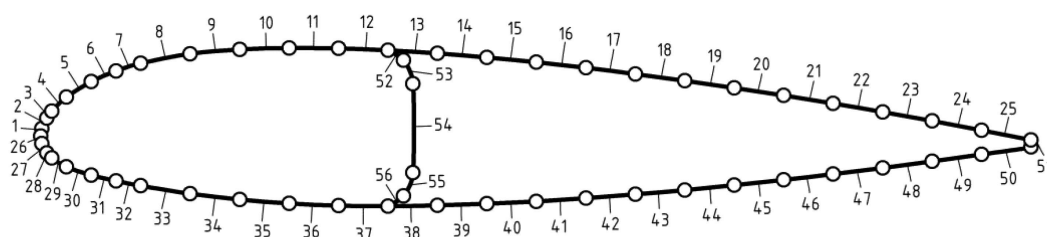


Рис. 2.3. Разбиение аналога лопасти на участки

Основные допущения и положения теории предельного равновесия и идеального жестко-пластического тела, за который принимается материал слоёв композитной лопасти несущего винта вертолета «АНСАТ» следующие.

1. В пакете слоёв лопасти реализуется плоско-напряжённое состояние и в нормально-

связанной системе координат  $z s \xi$  (Рис. 2.1) для компонент напряжений в этих осях выполняются неравенства  $\sigma_{\xi\xi}, \sigma_{s\xi}, \sigma_{z\xi} \ll \sigma_{zz}, \sigma_{ss}, \sigma_{zs}$ . На Рис. 2.1  $\tau(s), \nu(s)$  – орты касательной и нормали к базовому контуру  $\sigma$ ;  $s$  – текущая длина базового контура;  $\xi$  – нормальная координата вдоль  $\nu$ .

2. Принимается, что пластическое течение в элементах лопасти начинается при достижении вектором  $\sigma = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T$  ( $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  – нормальные и касательное напряжения в осях ортотропии (Рис. 2.1)) в осях ортотропии поверхности текучести, уравнение которой имеет вид  $((a, l) - \text{скалярное произведение векторов } a, l, \text{ материал слоя разнопрочный})$

$$f(\sigma) = (P\sigma, \sigma) + (b, \sigma) = 1, \quad P = \begin{bmatrix} p_{11} & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}, \quad b = [p_1 \ p_2 \ 0]^T, \quad (3.1)$$

где  $p_i = (\bar{\sigma}_i^- - \bar{\sigma}_i^+)/(\bar{\sigma}_i^+ \bar{\sigma}_i^-)$ ;  $p_{ii} = 1/(\bar{\sigma}_i^+ \bar{\sigma}_i^-)$ ;  $f = 1/\bar{\tau}_{12}^2$ ;  $i = 1, 2$ .

Уравнение (3.1) при повороте осей на угол  $\varphi$  относительно оси  $\xi$  преобразуется как

$$f(\sigma_z) = (C(\varphi)\sigma_z, \sigma_z) + (d(\varphi), \sigma_z) = 1, \quad (3.2)$$

$$\sigma = B(\varphi)\sigma_z, \quad \sigma_z = [\sigma_{zz} \ \sigma_{ss} \ \sigma_{sz}]^T,$$

$$C(\varphi) = B^T(\varphi)PB(\varphi); \quad d(\varphi) = B^T(\varphi)b, \quad B(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos^2 \varphi & \sin^2 \varphi & \sin 2\varphi \\ \sin^2 \varphi & \cos^2 \varphi & -\sin 2\varphi \\ -\frac{1}{2} \sin 2\varphi & \frac{1}{2} \sin 2\varphi & \cos 2\varphi \end{bmatrix},$$

и с учетом гипотезы о малости нормальных напряжений на площадках параллельных оси лопасти по сравнению с нормальными напряжениями в её поперечном сечении  $\sigma_{ss} \ll \sigma_{zz}, \sigma_{sz}$  в уравнении (3.2) вектор  $\sigma_z$  заменяется на  $\sigma_z = [\sigma_{zz} \ \sigma_{sz}]^T$ , а трехмерные матрица  $C(\varphi)$  и вектор  $d(\varphi)$  переходят к двумерным  $\tilde{C}(\varphi)$  и  $\tilde{d}(\varphi)$ . Уравнение предельной поверхности (3.2) при этом переходит к виду

$$\tilde{f}(\tau_z) = \frac{1}{\lambda^2} \left( f(\tau_z) + \frac{1}{4} (\tilde{d}, \tilde{C}^{-1} \tilde{d}) \right) = (\hat{C}\tau_z, \tau_z) = 1, \quad \tau_z = \sigma_z - s_z, \quad (3.3)$$

$$\hat{C} = \frac{1}{\lambda^2} \tilde{C}, \quad s_z = -\frac{1}{2} \tilde{C}^{-1} \tilde{d}, \quad \lambda = \frac{1}{2} \sqrt{4 + (\tilde{d}, \tilde{C}^{-1} \tilde{d})}.$$

3. В соответствии с работами [1–2] для вектора напряжений в осях  $z s \xi$  согласно закону деформирования, ассоциированному предельной поверхности текучести (3.3) имеем представление

$$\sigma_z = s_z + \tau_z = s_z + \hat{e} \varepsilon_z^p = s_z + t_{(-)} \hat{e} k T_{\tau 0}, \quad \varepsilon_z^p = [\varepsilon_{zz}^p, 2\varepsilon_{sz}^p]^T, \quad (3.4)$$

$$\hat{e}(\varepsilon_{zz}^p, \mu) = \begin{bmatrix} E_z(\varepsilon_{zz}^p, \mu) & 0 \\ 0 & G_{sz}(\varepsilon_{zz}^p, \mu) \end{bmatrix}, \quad \mu = \left[ 1, \frac{2\varepsilon_{sz}^p}{\varepsilon_{zz}^p} \right]^T, \quad \Lambda(\mu) = \frac{1}{\sqrt{(\mu, \tilde{C}^{-1} \mu)}},$$

$$E_z(\varepsilon_{zz}^p, \mu) = \frac{\lambda \left( \tilde{c}_{11}^{(-1)} + \tilde{c}_{12}^{(-1)} \mu \right) \Lambda(\mu)}{|\varepsilon_{zz}^p|}, \quad G_{sz}(\varepsilon_{zz}^p, \mu) = \frac{\lambda \left( \tilde{c}_{12}^{(-1)} / \mu + \tilde{c}_{22}^{(-1)} \right) \Lambda(\mu)}{|\varepsilon_{zz}^p|},$$

где  $\hat{e}(\varepsilon_{zz}^p, \mu)$  – матрица «фиктивных» модулей упругости;  $\varepsilon_{sz}^p, \varepsilon_{zz}^p$  – компоненты вектора пластической деформации;  $k$  – матрица податливостей поперечного сечения

лопасти на растяжение, изгиб и кручение [1];  $T_{\tau 0}$ , ( $|T_{\tau 0}| = 1$ ) – заданный единичный вектор обобщенных усилий, формирующий в сечении лопасти вектор «упругих» напряжений  $\tau_{z0(e)}$  (Рис. 3.1);  $t_{(-)}$  – нижняя граница параметра нагружения.

4. Для определения нижней и верхней границ предельной нагрузки лопасти НВ вертолета рассматривается элемент конструкции (ЭК), состоящий из части торсиона НВ, к которой крепится лопасть (Рис. 2.1), и части лопасти в её комлевом сечении, наиболее нагруженной от действия центробежной силы и веса вертолета. Рассматриваются лишь задачи статического деформирования ЭК, и для расчета нижней и верхней границ предельной нагрузки используются экстремальные принципы А. А. Гвоздева [9]. В качестве статически возможного состояния ЭК принимается такое, для которого удовлетворены статические граничные условия на поверхности ЭК, уравнения равновесия в каждой его точке, пластические деформации в концевой части торсиона пренебрежимо малы, и вектор напряжений в комлевой части лопасти удовлетворяет условию  $(\hat{C}\tau_{z(-)}, \tau_{z(-)}) \leq 1$ . Определение вектора напряжений  $\sigma_{z(-)}$ , соответствующего статически возможному состоянию ЭК, осуществляется на основе представления (3.4) и с помощью метода, предложенного в работе [10]. Согласно этому методу, вектор напряжений элемента сечения вычисляется в главных центральных осях (Рис. 2.1) на основе компонент вектора обобщенных усилий  $T_z = [Q_x \ Q_y \ N \ M_x \ M_y \ M_z]^T$ , приложенных в соответствующих центрах сечения. Вектору напряжений  $\sigma_z = s_z + \tau_z$  соответствует шестимерный вектор обобщенных усилий  $T_z = T_s + T_\tau$ , в котором компоненты вектора  $T_s$  вычисляются в главных центральных осях сечения с помощью  $s_z$ . В предельном состоянии ЭК поверхностям текучести слоев комлевой части лопасти в пространстве напряжений соответствует предельная поверхность в пространстве усилий и выход вектора  $T_z$  на эту поверхность эквивалентен выходу на неё вектора  $T_\tau$ , исходящего из  $T_s$  (Рис. 3.1 а).

Представим вектор эксплуатационных «рабочих» нагрузок на лопасть как сумму  $T_{az}^p + T_{az}^{(0)p}$ , где  $T_{az}^{(0)p} = [t_1 Q_{x(az)}^p \ t_2 Q_{y(az)}^p \ t_3 N_{az}^p \ t_4 M_{x(az)}^p \ t_5 M_{y(az)}^p \ t_6 M_{z(az)}^p]^T$  – вектор постоянных нагрузок,  $t_i$  ( $i = \overline{1, 6}$ ) – параметр, принимающий значение 1 в случае постоянной нагрузки с номером  $i$  и 0 – в противном случае.

Введём однопараметрический вектор  $T_{az}^{(0)p} + t^p T_{az}^p$  (рис.3.1б), где  $t^p$  – параметр нагружения. Задача вычисления параметра нагружения  $t_{(-)}^p$  ( $t_{(-)}^p$  – параметр, определяющий запас по эксплуатационной нагрузке (Рис.3.1 б)) эквивалентна задаче сравнения проекции предельного вектора обобщенных усилий  $T_{az}^{(-)} = T_s - T_{az}^{(0)p} + T_\tau^*$  на направление, определяемое эксплуатационным вектором  $T_{az}^p$ , с модулем этого вектора (Рис.3.1 б).

Таким образом, определение параметра нагружения  $t_{(-)}^p$  сводится к двум итерационным процессам: 1) определение предельного вектора  $T_{\tau n}^*$ , ( $n = 0, 1, 2 \dots$ ) (параметра  $t_{n(-)}$ ), исходящего из заданного вектора  $T_s$  (Рис.3.1 б), с помощью метода [10]; 2) вычисление текущего параметра нагружения  $t_{n(-)}^p = (T_s - T_{az}^{(0)p} + T_{\tau n}^*, T_{az}^p) / |T_{az}^p|^2$  и определение  $t_{(-)}^p = \lim_{n \rightarrow \infty} t_{n(-)}^p$ .

Расчеты вычисления запаса  $t_{(-)}^p$  лопасти несущего винта выполнялись на основе данных об эксплуатационных нагрузках, представленных в работе [1]. Положительные направления нагрузок и точки их приложения показаны на (Рис.2.1). Нагрузка изменялась с шагом в  $30^\circ$  по азимуту  $\psi$  начиная от хвоста вертолета. Числовые значения модуля вектора «рабочих» нагрузок  $|T_{az}^p|$  ( $t_i = 0$ ,  $i = \overline{1, 6}$ ) по азимуту  $\psi$  представлены на Рис. 3.2 а.

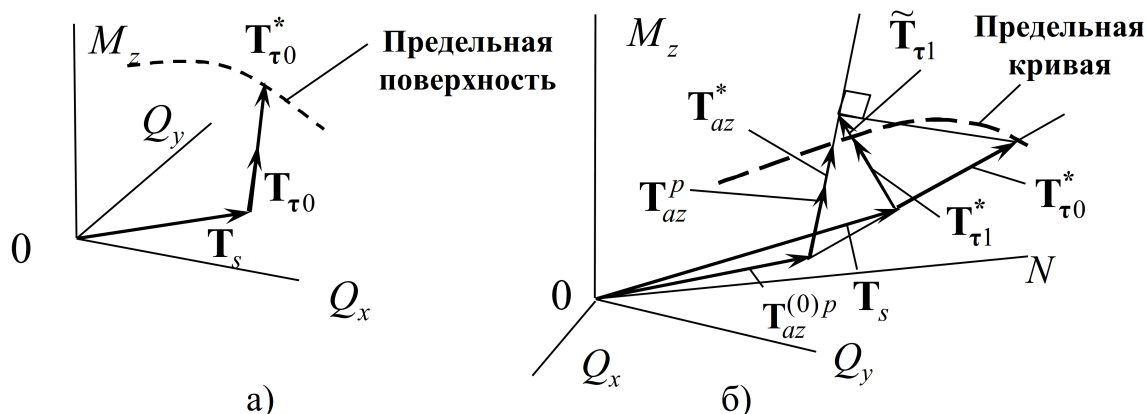


Рис. 3.1. Этапы алгоритма в пространстве обобщенных усилий: а) - определение предельного вектора  $T_{\tau n}^*$  б) - вычисление текущего параметра нагружения  $t_{n(-)}^p$

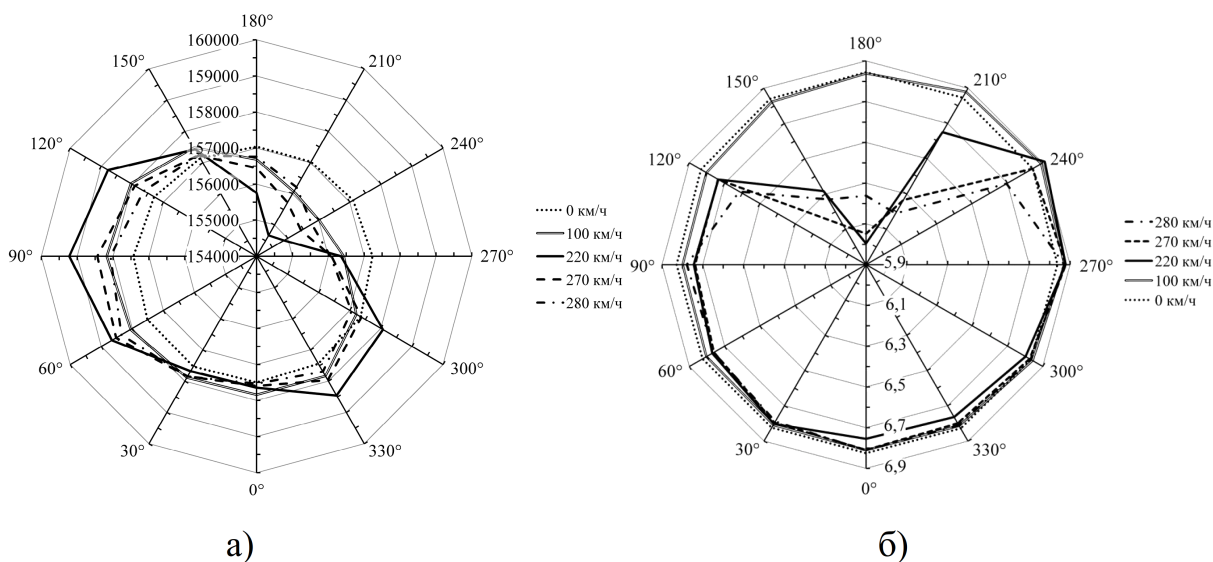


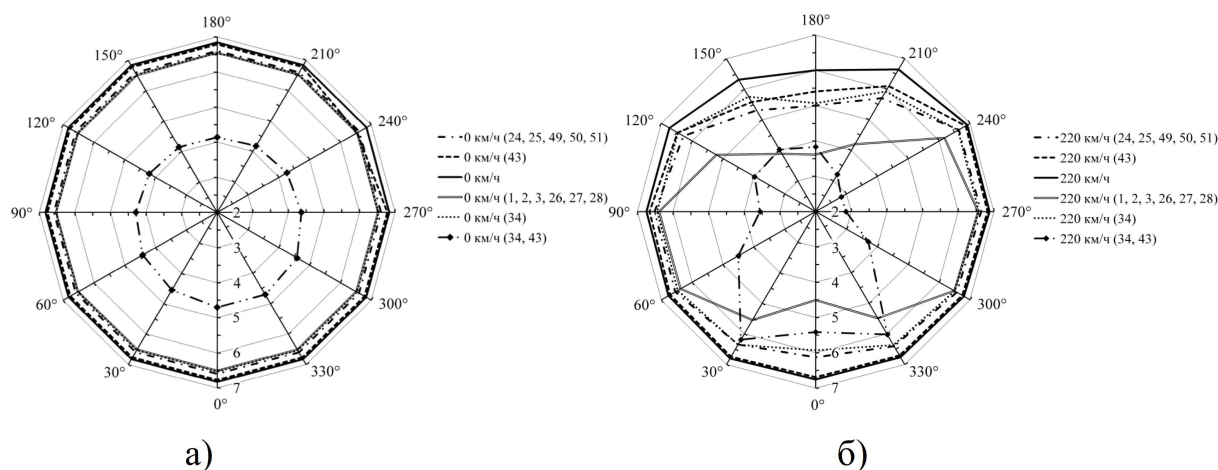
Рис. 3.2. Диаграммы по азимуту для: а) нагрузок; б) коэффициентов запаса

#### 4. Результаты расчета коэффициента запаса статической прочности для неповрежденного и поврежденного сечения

Проведена серия расчетов определения коэффициентов  $t_{(-)}^p$  для неповрежденного комлевого сечения лопасти, значения которых представлены на Рис.3.2 б).

Для режима висения (Рис. 4.1 а) и полета на скорости 220 км/ч (Рис. 4.1 б) проведена серия расчетов по определению коэффициента запаса статической прочности  $t_{(-)}^p$  лопасти, имеющей повреждения в комлевом сечении. Расчетные значения представлены на Рис. 4.1.





**Рис. 4.1.** Диаграммы по азимуту для коэффициента запаса поврежденной лопасти: а) режим висения; б) полет на скорости 220 км/ч

В таблице 4.1 указаны жесткости неповрежденного и поврежденных сечений, координаты центров растяжения ( $\tilde{x}_t, \tilde{y}_t$ ), изгиба ( $\tilde{x}_b, \tilde{y}_b$ ), в которых прикладывались нагрузки, а также угол поворота  $\alpha_t$  главных центральных осей, проходящих через центр растяжения.

**Таблица 4.1.** Параметры комлевого сечения лопасти

Вариант повреждения	Жесткость на				Координаты центров				Угол поворота осей $\alpha_t$ , град
	растяжение, Н	кручение, Н·м <sup>2</sup>	изгиб относительно главной центральной оси		растяжения		изгиба		
			X, Н·м <sup>2</sup>	У, Н·м <sup>2</sup>	$\tilde{X}_t$ , м	$\tilde{Y}_t$ , м	$\tilde{X}_b$ , м	$\tilde{Y}_b$ , м	
—	64851000	12429	17773	398290	0,1004	0,0043	0,0845	0,0054	-0,88
(1, 2, 3, 26, 27, 28)	62124000	3056,2	17713	371340	0,1047	0,0044	0,1832	0,0041	-1,03
(34)	62125000	3056,2	16767	392770	0,1023	0,0051	0,1105	0,0236	-1,23
(43)	64271000	8456,9	17603	392450	0,0995	0,0045	0,08087	0,0281	-0,73
(24, 25, 49, 50, 51)	62436000	8456,7	17744	293670	0,0925	0,0045	0,0530	0,0060	-0,79
(34, 43)	61545000	26,9	16594	387140	0,1014	0,0053	0,1060	0,0426	-1,08

В скобках указаны номера поврежденных участков, соответствующих Рис. 2.3. При этом предполагалось, что изменения жесткостей и координат центров сечения поврежденной лопасти не сильно влияют на изменения расчетных нагрузок в комлевом сечении, а минимальный коэффициент запаса для варианта повреждения (34, 43) дает нижнюю оценку, которая в реальности, возможно, не реализуется.

## 5. Заключение

Таким образом, предложен алгоритм, и на его основе создана программа расчета нижней границы предельной нагрузки, действующей на комлевое сечение композитной лопасти НВ вертолета при различных режимах полета. Приведены результаты расчета запаса

прочности лопасти по предельной нагрузке при повреждениях лопасти в различных участках комлевого сечения. Внешняя визуальная и внутренняя диагностики поврежденных образцов с использованием рентгеновской компьютерной томографии на основе медицинского рентгеновского томографа фирмы «Siemens» [11, 12] позволят производить оценку остаточных запаса прочности и несущей способности лопасти НВ вертолета.

**Благодарности.** Работа выполнена в рамках проекта №19-08-00577 РФФИ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. В. Горелов, И. Н. Сидоров, “Расчет нижней границы предельной нагрузки композитной лопасти несущего винта вертолета по теории предельного равновесия. Основные этапы алгоритма”, *Изв. Вузов. Авиационная техника*, 2011, № 3, 3–8.
2. А. В. Горелов, И. Н. Сидоров, “Расчет нижней границы предельной нагрузки композитной лопасти несущего винта вертолета по теории предельного равновесия. Результаты расчета”, *Изв. Вузов. Авиационная техника*, 2011, № 4, 12–14.
3. Р. А. Каюмов, “Метод вариации упругих характеристик в задаче о предельной нагрузке”, *Прикладная механика и техническая физика*, 1990, № 3, 134–139.
4. R. A. Kayumov, “A method for two-sided limiting load estimation”, *Strength of Materials*, **24**:1 (1992), 64–70.
5. Р. А. Каюмов, “Об оценке несущей способности конструкций при произвольных условиях текучести”, *Прикладная механика и техническая физика*, 1993, № 1, 115–120.
6. И. Г. Терегулов, Р. А. Каюмов, Э. С. Сибгатуллин, *Расчет конструкций по теории предельного равновесия*, ФЭН, Казань, 2003, 180 с.
7. О. О. Дунай, Ю. А. Денисов, И. Н. Сидоров, “Экспериментальное исследование демпфирующих свойств композитного торсиона бесшарнирной втулки несущего винта вертолета”, *Изв. Вузов. Авиационная техника*, 2009, № 3, 3–4.
8. К. Э. Сибгатуллин, Э. С. Сибгатуллин, “Оценка прочности анизотропных брусьев произвольного поперечного сечения в общем случае их сложного сопротивления”, *Механика твердого тела*, 2010, № 1, 84–92.
9. А. А. Гвоздев, *Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия*, Стройиздат, М., 1949, 280 с.
10. А. В. Горелов, И. Н. Сидоров, *Расчёт напряженно-деформированного и предельного состояния композитной лопасти несущего винта вертолѐта «АНСАТ»*, Деп. в ВИНТИ 17.07.2006, Казань, 2006, 40 с.
11. В. И. Митряйкин, Н. В. Павлова, А. Д. Лустин, “Диагностика ударных повреждений лопастей вертолета на компьютерном томографе”, *Инновационные подходы в современной науке*, 2017, № 2(2), 33–40.
12. В. И. Митряйкин, Т. А. Зайцева, Е. В. Кротова, “Кротова Диагностика состояния композитных элементов конструкций на спиральном компьютерном томографе”, *Проблемы теплообмена и гидродинамики в энергомашиностроении: Материалы докладов X школы-семинара молодых ученых и специалистов академика РАН В. Е. Алемасова* (Казань, 13–15 сентября 2016 г.), 2016, 272–273.



Поступила 08.06.2019

MSC2010 74G70

# Strength analysis of composite rotor helicopter blade, having percussive damage, by limit equilibrium theory

© I. N. Sidorov<sup>1</sup>, V. I. Mitryaikin<sup>2</sup>, A. V. Gorelov<sup>3</sup>, L. P. Shabalin<sup>4</sup>

**Abstract.** Authors model the limiting state of the helicopter «ANSAT» rotor blade at different flight modes, taking into account the possible damage to the blade in the butt section. The method of variation of elastic constants, based on the limit equilibrium theory and allowing to obtain both upper and lower limits of the limit load, is used to estimate the strength. The stresses in the layers determined in accordance with the deformation law of the associated limit yield surface of these layers, are expressed in terms of the six-dimensional vector of generalized forces. Analysis of the limit stress state is reduced to the analysis of the limit state in the space of the generalized forces. The safety factors of the blade's butt section depending on the azimuth angle of rotation of the blade are determined for the case when all the generalized forces are proportional to one loading parameter. The possibility of making internal diagnostics of damage areas using x-ray computer tomography is announced. It is proposed to use medical Siemens x-ray tomograph to perform such diagnostics.

**Key Words:** limit equilibrium theory, safety factor, method of variation of elastic constants, composite rotor blade of the helicopter, damage

## REFERENCES

1. A. V. Gorelov, I. N. Sidorov, "A lower bound estimate of the critical load for helicopter main rotor composite blade according to the limit equilibrium theory. The basic steps of an algorithm", *Russian Aeronautics*, **54**:3 (2011), 233–241.
2. A. V. Gorelov, I. N. Sidorov, "A lower bound estimate of the critical load for helicopter main rotor composite blade according to the limit equilibrium theory. Analysis results", *Russian Aeronautics*, **54**:4 (2011), 341–345.
3. R. A. Kayumov, "[The method of variation of elastic characteristics in the ultimate load problem]", *Prikladnaja mehanika i tekhnicheskaja fizika*, 1990, no. 3, 134–139 (In Russ).
4. R. A. Kayumov, "A method for two-sided limiting load estimation", *Strength of Materials*, **24**:1 (1992), 64–70.

<sup>1</sup>**Igor N. Sidorov**, Head of the Department of Theoretical and Applied Mechanics and Mathematics, Kazan National Research Technical University n. a. A. N. Tupoleva – KAI (34 Bondarenko St., Kazan 420066, Tatarstan), Dr. Sci (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6674-9776>, [sidorovin@mail.ru](mailto:sidorovin@mail.ru)

<sup>2</sup>**Viktor I. Mitryaikin**, Professor of the Department of Mechanical Engineering and Engineering Graphics, Kazan National Research Technical University n. a. A. N. Tupoleva – KAI (34 Bondarenko St., Kazan 420066, Tatarstan), Dr. Sci (Technical Sciences), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3805-910X>, [vmitryaykin@bk.ru](mailto:vmitryaykin@bk.ru)

<sup>3</sup>**Alexey V. Gorelov**, Senior Lecturer of the Instrument Engineering Department, Chistopol Branch, Vostok, Kazan National Research Technical University n. a. A. N. Tupoleva – KAI 34 Bondarenko St., Kazan 420066, Tatarstan), Ph.D. (Technical Sciences), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1300-5110>, [a.gorelov-kai@yandex.ru](mailto:a.gorelov-kai@yandex.ru)

<sup>4</sup>**Leonid P. Shabalin**, Research, Department of Aircraft Production, Kazan National Research Technical University n. a. A. N. Tupoleva – KAI (34 Bondarenko St., Kazan 420066, Tatarstan), Ph.D. (Technical Sciences), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6246-7699>, [leonid.shabalin@gmail.com](mailto:leonid.shabalin@gmail.com)

5. R. A. Kayumov, “[On the assessment of the bearing capacity of structures under arbitrary flow conditions]”, *Prikladnaja mehanika i tehničeskaja fizika*, 1993, no. 1, 115–120 (In Russ).
6. I. G. Teregulov, R. A. Kajumov, Je. S. Sibgatullin, [*Structural analysis according to the theory of limit equilibrium*], FJeN, Kazan, 2003 (In Russ), 180 p.
7. O. O. Dunai, Y. A. Denisov, I. N. Sidorov, “Experimental study of damping properties of a composite torsion bar in the helicopter main rotor hingeless hub”, *Russian Aeronautics*, **52**:3 (2009), 259–263.
8. K. E. Sibgatullin, E. S. Sibgatullin, “Estimate of strength of anisotropic bars of arbitrary cross-section in the general case of their combined stress”, *Mechanics of Solids*, **45**:1 (2010), 67–73.
9. A. A. Gvozdev, [*Calculation of the bearing capacity of structures by the method of limit equilibrium*], Strojizdat, M., 1949 (In Russ), 280 p.
10. A. V. Gorelov, I. N. Sidorov, [*Calculation of the stress-strain and ultimate state of the rotor composite blade of the ANSAT helicopter*], Dep. in VINITI 17.07.2006, 946–B2006, Kazan, 2006 (In Russ), 40 p.
11. V. I. Mitrjajkin, N. V. Pavlova, A. D. Lustin, “[Diagnosis of impact damage to helicopter blades on a computer tomograph]”, *Innovacionnye podhody v sovremennoj nauke*, 2017, no. 2(2), 33–40 (In Russ).
12. V. I. Mitrjajkin, T. A. Zajceva, E. V. Krotova, “[Diagnostics of the state of composite structural elements on a spiral computed tomograph]”, *Problemy teplomassoobmena i gidrodinamiki v jenergomashinostroenii: Materialy dokladov X shkoly-seminara molodyh uchenyh i specialistov akademika RAN V. E. Alemasova* (Kazan, 13 – 15 September 2016), 2016, 272–273 (In Russ).

*Submitted 08.06.2019*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201903.353-362

УДК 517.9

**Математическое моделирование магнитных свойств эллипсоидов вращения жёстких сверхпроводников второго рода в модели Бина**© Н. Д. Кузьмичев<sup>1</sup>, А. А. Шушпанов<sup>2</sup>, М. А. Васютин<sup>3</sup>

**Аннотация.** В работе представлены результаты математического моделирования и расчета магнитных свойств жёстких сверхпроводников второго рода в модели Бина для цилиндрически симметричных тел, например, цилиндров и эллипсоидов в осевом изменяющемся внешнем магнитном поле. С помощью уравнений электродинамики и уравнения Пуассона для векторного потенциала выводится уравнение Фредгольма 1-го рода для плотности экранирующего сверхтока. Введением явного вида зависимости вольт-амперной характеристики и закона электромагнитной индукции уравнение для плотности сверхтока сводится к интегральному уравнению 2-го рода, которое численно решается в матричном виде на неравномерной сетке с уплотнением к краям образца. На основе вышеуказанных результатов получено распределение плотности экранирующего сверхтока в эллипсоиде вращения, собственное магнитное поле сверхтока и петли гистерезиса намагниченности образца для возрастающего и убывающего внешнего поля.

**Ключевые слова:** Жёсткие сверхпроводники второго рода, критическое состояние, модель Бина, интегральные уравнения Фредгольма 1-го и 2-го рода, магнитные свойства, эллипсоид вращения.

**1. Введение**

Для сверхпроводников второго рода при получении таких основных характеристик как критическая плотность тока или критическая напряженность магнитного поля пользуются обычно бесконтактными измерениями. Применяются образцы в виде дисков, цилиндров, параллелепипедов, эллипсоидов и других симметричных тел. Однако вычисление полной трехмерной реакции сверхпроводника на магнитное поле является сложной задачей, поскольку в общем виде неясно, какие уравнения следует записывать, если мы не можем определить направления токов в произвольном случае. Существуют упрощенные тривиальные задачи для подобного расчета магнитных свойств – это длинные тонкие стержни, где токи текут вдоль них и диски в осевом поле, где токи текут по соосным

<sup>1</sup>**Кузьмичев Николай Дмитриевич**, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевитская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, [kuzmichevnd@yandex.ru](mailto:kuzmichevnd@yandex.ru)

<sup>2</sup>**Шушпанов Алексей Александрович**, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевитская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5005-9831>, [aashushpanov@gmail.com](mailto:aashushpanov@gmail.com)

<sup>3</sup>**Васютин Михаил Александрович**, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевитская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, [vasyutinm@mail.ru](mailto:vasyutinm@mail.ru)

окружностям. В этих двух случаях можно упростить задачу до двумерной или одномерной, где плотность тока  $\mathbf{J}$ , векторный потенциал  $\mathbf{A}$  и электрическое поле  $\mathbf{E}$  параллельны друг другу и имеют только  $z$  и  $\phi$  компоненты или только одну  $\phi$  компоненту [1–6]. Удобная модель для описания магнитных свойств СВР с сильным пиннингом (жестких сверхпроводников второго рода (ЖСВР)) в магнитных полях, превышающих первое критическое поле  $H_{c1}$ , была представлена Ч. Бином [7]. Она предполагает, что области сверхпроводника, куда не проникло магнитное поле, экранирующая плотность сверхпроводящего тока (сверхтока) равна нулю, а куда проникло — некоторому критическому значению  $J_c$ . Другими словами, последние области находятся в состоянии с экранирующим током, равным  $J_c$ , которое носит название «критическое состояние». Когда внешнее прикладываемое магнитное поле индукцией  $B$  меняется, граница области проникновения перестраивается. В общем случае критическая плотность тока  $J_c$  может локально зависеть от индукции магнитного поля  $B(r)$ , а в неоднородных материалах — также и от положения точки  $r$ . В модели Бина принимается  $J_c = \text{const}$ . Ориентация экранирующих сверхтоков зависит от магнитной истории сверхпроводника.

## 2. Теоретические основы

Целью данной работы является численное моделирование магнитных свойств ЖСВР с осевой симметрией (короткий цилиндр и эллипсоид вращения) в однородном магнитном поле, параллельном оси. Введем границы для величин:  $-b \leq y \leq b, r = (x^2 + z^2)^{0.5} \leq a(y)$ .

Будем рассматривать материал с зависимостью  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ . Также введем зависимость напряженности электрического поля от плотности тока  $\mathbf{E} = E(J)\mathbf{J}/J$ , что эквивалентно удельному сопротивлению  $\rho = E/J$ . Сопротивление образца может подчиняться линейным или нелинейным законам, в частности, хорошей аппроксимацией является степенная зависимость  $E = E_c (J/J_c)^n$ , с ненулевым критическим значением плотности тока  $J_c$  и показателем степени  $n \geq 1$ . Тогда условие  $n = 1$  описывает омическую зависимость, а предел  $n \rightarrow \infty$  — модель Бина. В общем случае они оба могут зависеть от индукции магнитного поля в конкретной точке:  $J_c(B)$  и  $n(B)$ , или от частоты изменения поля, но мы ограничим вычисления изотропными средами, как и в работе [1].

Чтобы не рассчитывать конечное распределение поля в явном виде на бесконечном пространстве, найдем интегральное уравнение движения для плотности тока и численно решим его для получения конечного распределения. Для вывода основного уравнения воспользуемся уравнениями Максвелла о циркуляции тока и электромагнитной индукции:

$$\begin{aligned}\mathbf{J} &= \nabla \times \mathbf{H}, \\ \dot{\mathbf{B}} &= -\nabla \times \mathbf{E},\end{aligned}\tag{2.1}$$

определением векторного потенциала и калибровкой Лондона:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{A} &= \mathbf{B}, \\ \nabla \cdot \mathbf{A} &= 0\end{aligned}\tag{2.2}$$

и материальными уравнениями  $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$  и  $\mathbf{E} = E(J)\mathbf{J}/J$  (вольт-амперная характеристика).

Получим уравнение Пуассона для вектор-потенциала:

$$\mu_0 \mathbf{J} = -\nabla^2 (\mathbf{A} - \mathbf{A}_{\text{пр}}),\tag{2.3}$$

из которых  $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$  и  $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ , если у нас нет внутри источников тока (на низких частотах ток смещения не будет оказывать сильного влияния). В силу цилиндрической симметрии имеем:

$$\mathbf{J} = J(r, y)\mathbf{n}_\phi, \quad \mathbf{E} = E(r, y)\mathbf{n}_\phi, \quad \mathbf{A} = A(y, r)\mathbf{n}_\phi.$$

Векторный потенциал прикладываемого поля индукцией  $\mathbf{B}_{\text{пр}} = B_{\text{пр}}\mathbf{n}_y$  равен

$$A_{\text{пр}} = -\left(\frac{r}{2}\right) B_{\text{пр}},$$

следовательно:

$$\mu_0 J = \nabla^2 \left( A + \left(\frac{r}{2}\right) B_{\text{пр}} \right). \quad (2.4)$$

Решение уравнения (2.4) для векторного потенциала можно получить при помощи эллиптических интегралов 1-го и 2-го рода:

$$A(\mathbf{r}) = -\mu_0 \int_0^a dr' \int_0^b dy' Q_{\text{цил}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') J(\mathbf{r}') - \frac{\mathbf{r}}{2} B_{\text{пр}}, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{r} = (r, y)$ ,  $\mathbf{r}' = (r', y')$ . Интегральное ядро имеет вид:

$$Q_{\text{цил}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = f(r, r', y - y') + f(r, r', y + y'),$$

где

$$f(r, r', \eta) = \int_0^\pi \frac{d\phi}{2\pi} \cdot \frac{-r' \cos \phi}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi)^{0.5}}. \quad (2.6)$$

Для получения уравнения на  $J$  продифференцируем по времени (2.5) и подставим (2.1) и (2.2):

$$E[J(\mathbf{r}, t)] = \mu_0 \int_S d^2 r' Q_{\text{цил}} \dot{J}(\mathbf{r}', t) + \frac{r}{2} \dot{B}_{\text{пр}}(t).$$

Это уравнение можно решить численно относительно  $\dot{J}$ , для этого вынесем производную по времени от  $J$  из-под знака интеграла, используя обратное ядро  $Q_{\text{цил}}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ :

$$\dot{J}(\mathbf{r}, t) = \mu_0^{-1} \int_0^a dr' \int_0^b dy' Q_{\text{цил}}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ E(J) - \frac{r'}{2} \dot{B}_{\text{пр}} \right]. \quad (2.7)$$

Уравнение (2.7) можно применять в рамках цилиндрической геометрии как для цилиндров конечной длины  $2b$  и радиуса  $a$ , так и для тел с нелинейной функцией боковой границы  $a(y)$ .

### 3. Метод вычисления

В качестве нормировки положим  $a = J_c = E_c = \mu_0 = 1$ . При расчете распределения тока удобнее использовать неравномерную сетку с большей плотностью к краям образца для более точного расчета краевых эффектов. Тогда вектора  $\mathbf{r}$  и  $\mathbf{r}'$  будут являться

функциями  $(r_i, y_i)$ , где

$$\begin{aligned} r_i &= r_i(u_i) = \sin(u_i) \cdot a(y_i) & y_i &= y_i(v_i) = \sin(v_i) \cdot b, \\ u_i &= \frac{\pi/2 (i - 1/2)}{N_y}, & v_i &= \frac{\pi/2 (j - 1/2)}{N_r}, \\ i &= 1, \dots, N_y & j &= 1, \dots, N_r. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для расчета интегрального ядра в численной форме понадобятся «веса» ячеек:

$$w_j = w_r \cdot w_y, \quad w_r = \frac{\pi}{2} \cos u_i \cdot \frac{a(y_i)}{N_r}, \quad w_y = \frac{\pi}{2} \cos v_i \cdot \frac{b}{N_y}. \quad (3.2)$$

Для моделирования образцов с невертикальной боковой границей введем дополнительный нормировочный множитель для горизонтальных координат сетки и «весов» ячеек  $a(y_i)$ , получаемый из функции боковой границы  $a(y)$ .

Ядро уравнения сведем к матрице:  $Q(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \rightarrow Q(r_i, r'_j) \cdot w_j = Q_{ij} \cdot w_j$ . Эллиптический интеграл в функции  $f$  (2.6) сведем от аналитического решения к численному:

$$\begin{aligned} f(r, r', \eta) &= \int_0^\pi \frac{d\phi}{2\pi} \cdot \frac{-r' \cos \phi}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi)^{0.5}} = \int_0^\pi g(\phi) d\phi = \\ &= \int_0^1 g[\phi(u)] \phi'(u) du \approx \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M g[\phi(u_i)] \phi'(u_i) = \frac{1}{M} G \cdot \Phi', \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} G_i &= g[\phi(u_i)] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r' \cos \phi(u_i)}{(\eta^2 + r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \phi(u_i))^{0.5}}, \\ \Phi_{1i} &= \phi(u_i) = \pi - \pi \cos(\pi u_i). \end{aligned}$$

матрицы столбец и строка, функция выбора точек интегрирования:

$$u_i = \frac{i - 0.5}{M}, \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Уравнение для производной плотности тока (2.7)

$$\begin{aligned} \dot{J}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0^{-1} \int_0^a dr' \int_0^b dy' Q_{\text{цил}}^{-1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \left[ E(J) - \frac{r'}{2} \dot{B}_{\text{пр}} \right] \rightarrow \\ &\rightarrow \dot{J}_i(t) = \frac{b}{N} \sum_j Q_{ij}^{-1} \left[ J_j^n(t) - \frac{r_j}{2} \dot{B}_{\text{пр}}(t) \right] \end{aligned}$$

сведем к матричному:

$$\begin{aligned} \dot{J}(t) &= \frac{b}{N} Q^{-1} \cdot \left[ \overbrace{J^T(t) \circ \dots \circ J^T(t)}^n - \frac{R}{2} \dot{B}_{\text{пр}}(t) \right], \\ J(t) &= J(t - dt) + \dot{J}(t) \cdot dt, \quad R_i = r_i, \quad i = 1, \dots, N_r N_y, \end{aligned}$$

где  $J, R$  — матрицы строки для плотности тока и координаты  $r$  в каждой точке сетки.

Магнитный момент образца в момент времени  $t$  будет равен

$$m(t) = 2\pi \int_0^a dr r^2 \int_0^b dy J(r, y, t) \rightarrow m(t) = (W \circ R \circ R) \cdot J(t),$$

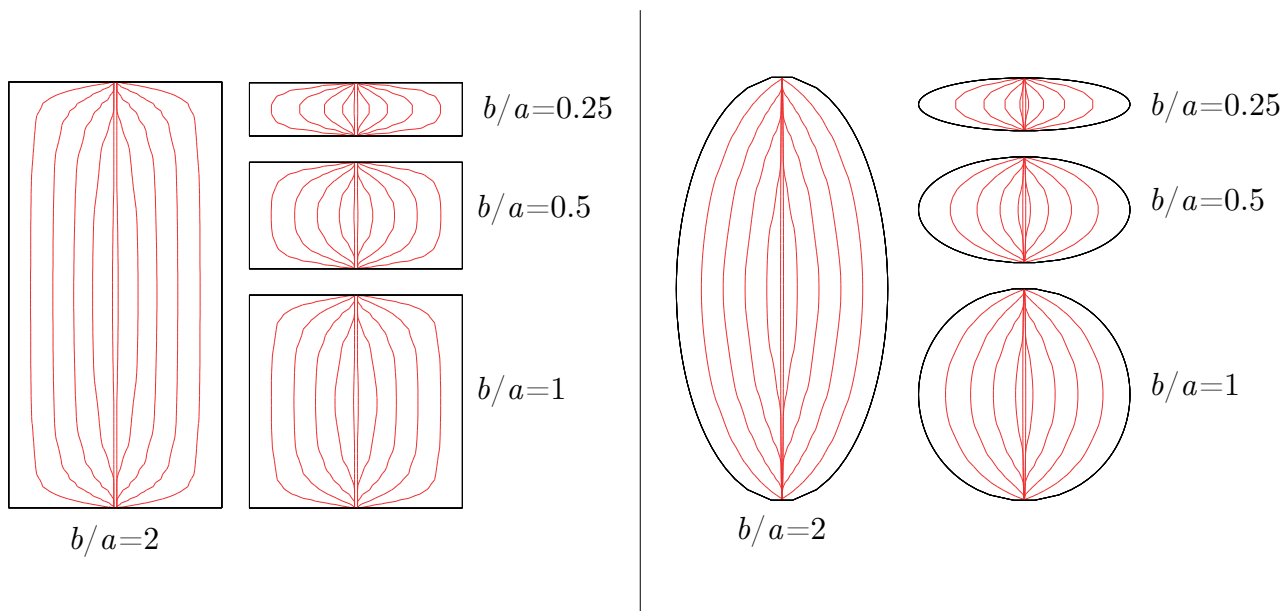
$$W_i = w_j \cdot w_y.$$

Поле полного проникновения  $H_{\text{п}}$  можно найти из условия заполнения сверхтоком объема образца. Для цилиндров конечной длины это поле можно выразить как [1–4]:

$$H_{\text{п}} = J_c b \cdot \ln \left[ \frac{a}{b} + \left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^{1/2} \right].$$

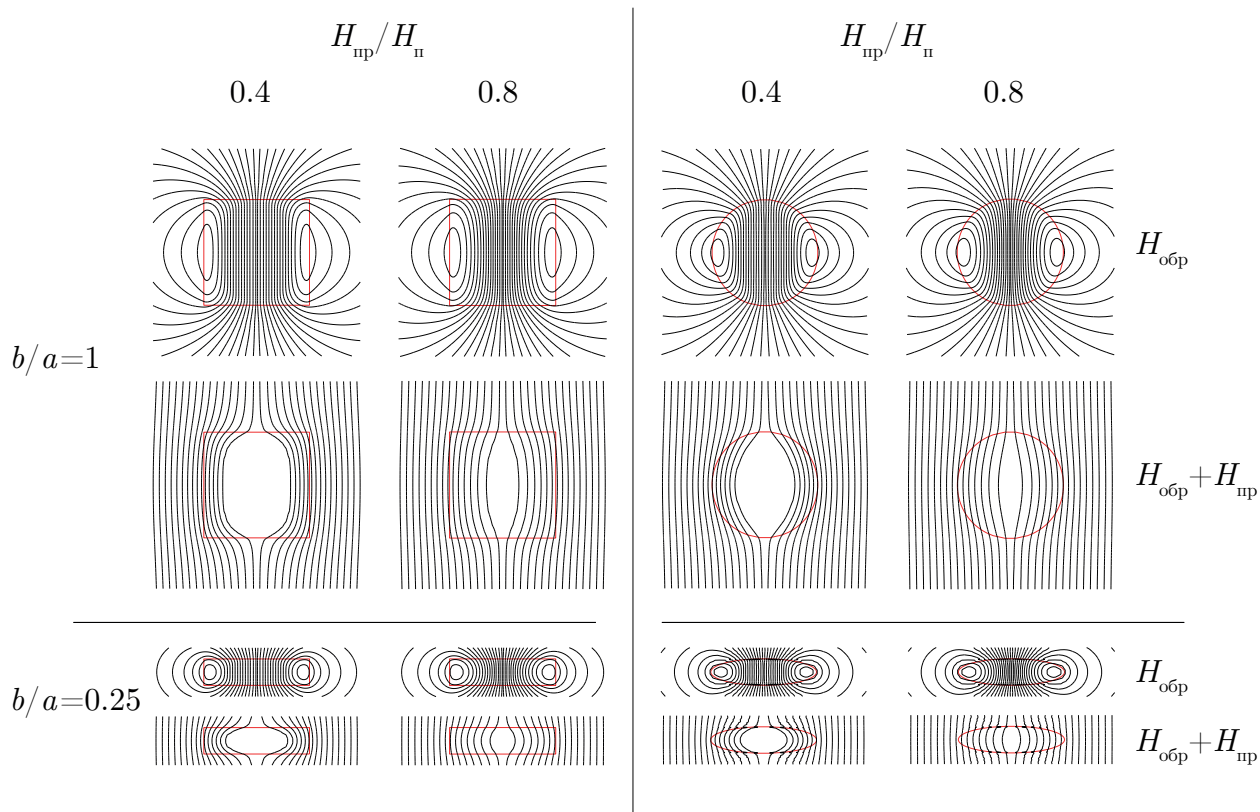
#### 4. Результаты расчетов

Для расчетов были выбраны 4 образца цилиндрической формы с  $b(y) = \text{const}$  и 4 эллиптических образца с  $b(y) = a(1 - y^2/c)^{0.5}$ , где  $c$  — коэффициент для создания различных отношений размеров. Размер сетки расчета выбирается исходя из соотношений сторон образца с сохранением её плотности в 20 ячеек на единицу размера. Скорость нарастания внешнего магнитного поля примем  $\dot{B}_{\text{пр}} = E_c/a = 1$ . Степень в уравнении сопротивления образца возьмем достаточно большой, для соответствия модели Бина  $n = 51$ . Расчеты проводились в среде *MATLAB*, поскольку она хорошо оптимизирована для решения матричных уравнений и предоставляет широкий выбор визуализации расчетов. Результаты моделирования для фронтов проникновения магнитного поля показаны на Рис. 4.1.

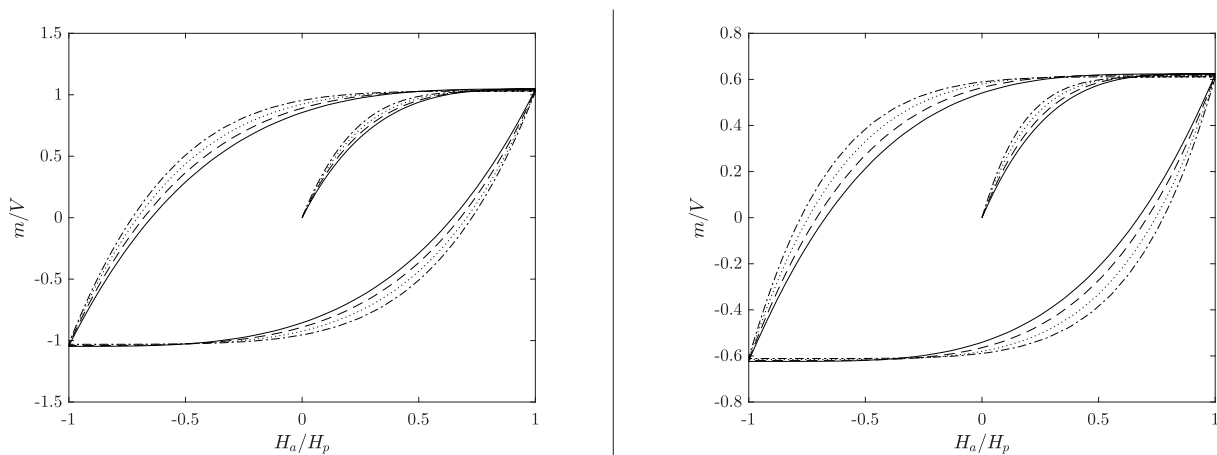


**Рис. 4.1.** Фронты проникновения магнитного поля и сверхтока для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) в отношении сторон  $b/a = 2, 1, 0.5, 0.25$  в линейно возрастающем магнитном поле. Показаны линии для  $H_{\text{пр}}/H_{\text{п}} = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$  при плотности тока  $\pm J_c/2$



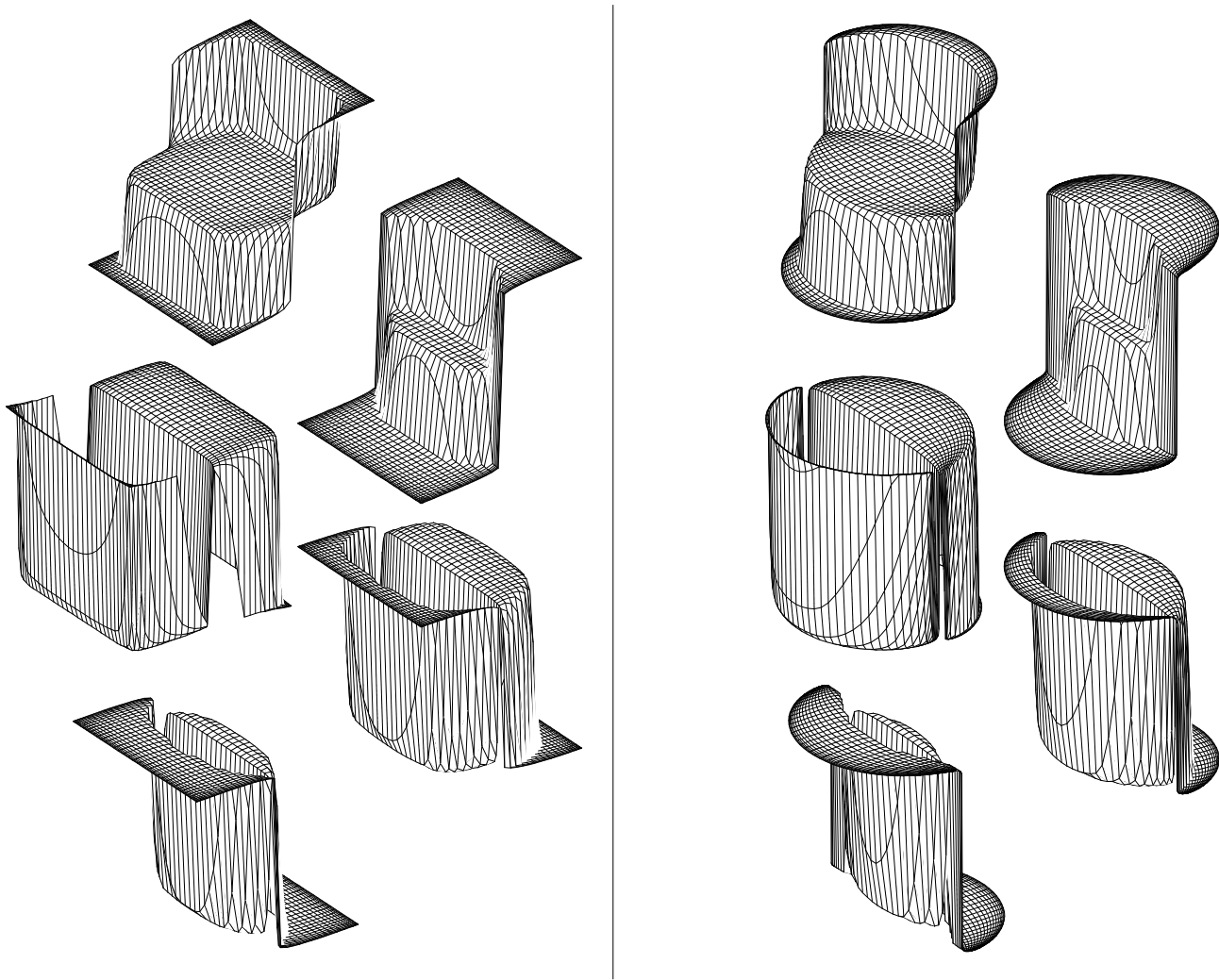


**Рис. 4.2.** Линии магнитного поля при проникновении магнитного поля для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) с соотношением сторон  $b/a = 1, 0.25$ . Сверху – магнитное поле, создаваемое сверхтоком образца ( $H_{\text{обр}}$ ), снизу – совместно с внешним. Картины даны для  $H_{\text{пр}}/H_{\text{н}} = 0.4, 0.8$ .



**Рис. 4.3.** Петли гистерезиса для намагниченности образца при линейном изменении внешнего поля для цилиндров (слева) и эллипсоидов (справа) с соотношением размеров  $b/a = 2$  (сплошная линия), 1 (пунктирная линия), 0.5 (точечная линия), 0.25 (штрих-пунктирная линия)





**Рис. 4.4.** Профили плотности тока  $J_c$  для цилиндра (слева) и эллипсоида (справа) с соотношением  $b/a = 1$  при внешнем поле (сверху вниз)  $H_{\text{пр}}/H_{\text{н}} = 0.2, 0.7, 0.8, 0.3, -0.2$ .

## 5. Заключение

В работе на основании решения уравнения Пуассона для вектор-потенциала с использованием явной зависимости вольт-амперной характеристики  $E(J)$  получено уравнение движения плотности сверхтока  $J$  в жестком сверхпроводнике второго рода. Полученное интегральное уравнение решается численно методом обратной матрицы в системе *MATLAB*. В результате найдено распределение плотности экранирующего сверхтока в жестких сверхпроводниках второго рода, имеющих форму цилиндров конечной длины и эллипсоидов вращения в осевом переменном магнитном поле в модели Бина. Разработанную программу можно применять для расчета любых образцов с цилиндрической симметрией, а также для различных сценариев изменения внешнего магнитного поля. Результаты работы имеют важное практическое и теоретическое значение для различных областей применения сверхпроводников, например, электротехники (мощные электродвигатели, экраны), магнитометрии (датчики магнитного поля), вычислительной техники (криотроны, джозефсоновские переходы), криоэлектроники и в других технических областях.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. Н. Brandt, “Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves”, *Phys. rev. B*, **58**:10 (1998), 6506–6522.
2. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Математическое моделирование процесса намагничивания цилиндрического сверхпроводника в модели Бина”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.*, **21**:1 (2012), 139–148.
3. Н. Д. Кузьмичев, А. А. Федченко, “Математическое моделирование распределения экранирующего тока и гистерезис намагниченности коротких цилиндров жестких сверхпроводников 2-го рода в приближении Бина”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:4 (2011), 25–34.
4. D. Frankel, “Critical-state model for the determination of critical currents in disk-shaped superconductors”, *Appl. Phys.*, **50**:8 (1979), 5402–5407.
5. P. N. Mikheenko, Yu. E. Kuzovlev, “Inductance measurements of HTSC films with high critical currents”, *Physica C.*, **204** (1993), 229–236.
6. J. Zhu, J. Mester, J. Lockhart, J. Turneaure, “Critical states in 2D disk-shaped type-II superconductors in periodic external magnetic field”, *Physica C.*, **212**:1-2 (1993), 216–222.
7. C. P. Been, “Magnetization of hard superconductors”, *Phys. Rev.*, **8**:6 (1962), 250–253.
8. Ю. М. Ципенюк, *Физические основы сверхпроводимости*, МФТИ, М., 1996, 90 с.
9. В. Буккель, *Сверхпроводимость, основы и приложения*, Мир, М., 1975, 370 с.

Поступила 11.06.2019

MSC2010 97-04; 90C99; 82D55

# Mathematical modeling of the magnetic properties of spheroids of hard second kind superconductors in the Bean model

© N. D. Kuzmichev<sup>1</sup>, A. A. Shushpanov<sup>2</sup>, M. A. Vasyutin<sup>3</sup>

**Abstract.** Authors have modelled magnetic field in hard II-type superconductor bodies with cylindric symmetry by means of Bean model. Using the equations of electrodynamics and the Poisson equation for the vector potential, the Fredholm equation of the first kind is derived for the screening supercurrent density. By introducing the explicit form of the current-voltage characteristic and the law of electromagnetic induction, the equation for the supercurrent density is reduced to an integral equation of the 2nd kind, which is solved numerically in matrix form on a non-uniform grid with compaction to the edges of the sample. Density distribution of the screened superconductive current, sample-self magnetic field and hysteresis loops of magnetization in the cases of cylinders and spheroids are obtained.

**Key Words:** hard II-type superconductors, critical state, Bean model, Fredholm integral equations of the 1st and 2nd kind, magnetic properties, spheroid

## REFERENCES

1. E. H. Brandt, "Superconductor disks and cylinders in an axial magnetic field. I. Flux penetration and magnetization curves", *Phys. rev. B*, **58**:10 (1998) (In Eng.), 17 p.
2. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, "Mathematical modeling of the magnetization process of a cylindrical superconductor in the Bean model", *Proceedings of Higher Educational Institutions. Volga Region. Physics and Mathematics*, **21**:1 (2012), 139-148 (In Russ.).
3. N. D. Kuzmichev, A. A. Fedchenko, "Mathematical modeling of the distribution of the screening current and the hysteresis of the magnetization of short cylinders of rigid superconductors of the 2nd kind in the Bean approximation", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:4 (2011), 25-34 (In Russ.).
4. D. Frankel, "Critical-state model for the determination of critical currents in disk-shaped superconductors", *Appl. Phys.*, **50**:8 (1979), 5402-4849.
5. P. N. Mikheenko, Yu. E. Kuzovlev, "Inductance measurements of HTSC films with high critical currents", *Physica C.*, **204** (1993), 229-236.
6. J. Zhu, J. Mester, J. Lockhart, J. Turneure, "Critical states in 2D disk-shaped type-II superconductors in periodic external magnetic field", *Physica C: Superconductivity*, **212**:1-2 (1993), 216-222.

<sup>1</sup>**Nikolay D. Kuzmichev**, Professor, Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6707-4950>, kuzmichevnd@yandex.ru

<sup>2</sup>**Aleksey A. Shushpanov**, Post-Graduate student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5005-9831>, aashushpanov@gmail.com

<sup>3</sup>**Mihail A. Vasyutin**, Associate Professor, Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4856-7407>, vasyutinm@mail.ru

7. C. P. Been, “Magnetization of hard superconductors”, *Phys. Rev.*, **8**:6 (1962), 250–253.
8. U. M. Tsipenyuk, [*Physical basis of superconductivity*], MPhTI, Moscow, 1996 (In Russ.), 90 p.
9. V. Bukkel, [*Superconductivity, foundation and application*], Mir, Moscow, 1975 (In Russ.), 370 p.

*Submitted 11.06.2019*

УДК 621.383.4, 621.382.2/.3

## О влиянии интенсивности света на границы применимости способа восстановления модулированных оптических сигналов

© Е. В. Никишин<sup>1</sup>, В. Я. Гришаев<sup>2</sup>, С. М. Мурюмин<sup>3</sup>

**Аннотация.** Исследована кинетика фотопроводимости кремния с рекомбинационными центрами золота. Если частота модуляции интенсивности света меньше обратной величины времени жизни основных носителей заряда, то функции, описывающие зависимость интенсивности света от времени и зависимость фототока от времени, совпадают с точностью до множителя. При больших частотах модуляции интенсивности света возникают искажения. Зависимости интенсивности света от времени и фототока от времени становятся различными. В этом случае влияние скорости рекомбинации на вид функции переменной составляющей фототока мало. В основном она определяется зависимостью величины темпа генерации от времени. При больших частотах по электрическому отклику возможно «восстановление» формы оптического импульса. Получены зависимости от частоты фазовых, линейных и нелинейных искажений, возникающих при «восстановлении» зависимости интенсивности света от времени. Результаты приведены для различных величин темпа генерации носителей заряда.

**Ключевые слова:** кремний, интенсивность света, скорость рекомбинации, глубина модуляции, фазовые искажения, линейные искажения, нелинейные искажения, амплитудные искажения.

### 1. Введение

В работах [1–2] предложен способ, в котором, используя полупроводниковые фотодатчики, по зависимости фототока от времени ( $j = j(\omega t)$ ) получают зависимость интенсивности света от времени ( $J = J(\omega t)$ ). Использование полупроводниковых материалов позволяет миниатюризировать фотодатчики, предназначенные для получения зависимостей  $J = J(\omega t)$ . Отличие формы оптического и электрического сигналов, возникающих в фоторезисторах, наблюдается при выполнении условия  $\frac{J(t)}{\left|\frac{dJ(t)}{dt}\right|} \gg 1$  в работах [3–4]. Импульсы отличаются при любом законе рекомбинации, в том числе линейном, несмотря на то что в этом случае темп рекомбинации электронов ( $R_n$ ) и дырок ( $R_p$ ) пропорционален концентрации электронов и дырок соответственно, а значит,  $\tau_n = const$ ,  $\tau_p = const$ . Информация, заложенная в оптическом сигнале, теряется. Предложенный в работах [1–2]

<sup>1</sup>**Никишин Евгений Васильевич**, доцент кафедры экспериментальной и теоретической физики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8370-1790>, [nikishin57@mail.ru](mailto:nikishin57@mail.ru)

<sup>2</sup>**Гришаев Владимир Яковлевич**, доцент кафедры экспериментальной и теоретической физики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5009-0222>, [grishaev53@mail.ru](mailto:grishaev53@mail.ru)

<sup>3</sup>**Мурюмин Сергей Михайлович**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2965-7500>, [muryuminsm@yandex.ru](mailto:muryuminsm@yandex.ru)

способ восстановления временной зависимости интенсивности оптического сигнала позволяет приблизить форму восстановленного импульса к форме импульса возбуждения.

Нами проведен анализ модели фоторезистора, изготовленного на основе кремния, легированного золотом. Теоретически определялась область частот, для которой справедлив способ восстановления оптических импульсов. Были проанализированы частотные, нелинейные и фазовые искажения, которые возникают при использовании предложенного способа восстановления зависимости  $J = J(\omega t)$  с целью их минимизации и расширения частотной области работы фотодатчика.

## 2. Способ восстановления оптических импульсов

Концентрации неравновесных носителей заряда, электронов ( $n$ ) и дырок ( $p$ ) и изменение населенности центров электронами находятся путем решения следующей системы нелинейных дифференциальных уравнений [5–7]:

$$\frac{dn}{dt} = g(\omega t) - A(pn - n_i^2) - B_n n(np - n_i^2) - B_p p(np - n_i^2) - \sum_j [N_j \sigma_{nj}(n(1 - f_j) - n_{1j} f_j)], \quad (2.1)$$

$$\frac{dp}{dt} = g(\omega t) - A(pn - n_i^2) - B_n n(np - n_i^2) - B_p p(np - n_i^2) - \sum_j [N_j \sigma_{pj}(pf_j - p_{1j}(1 - f_j))], \quad (2.2)$$

$$\frac{df_j}{dt} = \sigma_{nj}(n(1 - f_j) - n_{1j} f_j) - \sigma_{pj}(pf_j - p_{1j}(1 - f_j)), \quad (2.3)$$

где  $g(\omega t)$  — темп генерации носителей заряда;  $n, p$  — концентрации электронов и дырок;  $n_i$  — собственная концентрация носителей заряда;  $t$  — текущее время;  $N_j$  — концентрация примесных центров  $j$ -типа;  $A$  — коэффициент межзонной рекомбинации;  $B_n, B_p$  — коэффициенты электронной и дырочной Оже-рекомбинации соответственно;  $\sigma_{nj}, \sigma_{pj}$  — коэффициенты рекомбинации электронов и дырок центрами  $j$ -типа соответственно;  $f_j$  — вероятность нахождения электрона на примесном центре;  $n_1, p_1$  — коэффициенты, величины которых численно равны концентрации электронов и дырок соответственно, когда уровень Ферми совпадает с положением рекомбинационного центра в запрещенной зоне.

В уравнениях (2.1)–(2.3) нами учтена генерация носителей заряда светом зона — зона, влияние прямой межзонной рекомбинации; межзонной Оже рекомбинации и рекомбинации Шокли —Рида через дефекты решетки. Для анализа искажений полагалось, что переменная составляющая интенсивности возбуждающего света изменялась по гармоническому закону  $J = J_0(1 - \cos(\omega t))$ . Темп генерации пропорционален интенсивности  $g(\omega t) \sim J(\omega t)$ . Полученные численными методами функции  $n = n(\omega t)$  и  $p = p(\omega t)$  использовались для расчета плотности тока  $j(\omega t) = e(\mu_n n + \mu_p p)E$ .

При больших частотах уравнения (2.1)–(2.3) линеаризуются [2]. В этом случае с достаточной точностью выполняется соотношение  $\frac{dj(\omega t)}{dt} \sim J(\omega t)$ . Данное соотношение использовалось ниже при восстановлении формы оптического импульса, то есть восстановление формы оптического сигнала осуществлялось путем дифференцирования фототока через резистор.



Исследовались искажения, возникающие при восстановлении зависимости интенсивности оптического излучения от времени: нелинейные, частотные и фазовые.

Коэффициент нелинейных искажений рассчитывался по формулам [8]:

$$K = \frac{1}{|c_1|} \sqrt{\sum_i |c_k|^2}, c_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} j'_t(\tau) \exp^{-ik\omega\tau} d\tau. \quad (2.4)$$

Для оценки частотных искажений использован коэффициент  $Y(\omega_i)$  [3]:

$$Y(\omega_i) = \frac{\max |j'_t(\omega_i t)|}{\max |j'_t(\omega t)|}, \omega_i \in [\omega_{\min}, \omega_{\max}], \quad (2.5)$$

где  $j'_t(\omega_i t)$  — производная по времени от тока для фиксированной частоты  $\omega_i$ , величина которой пропорциональна амплитуде восстановленного сигнала;  $\max(j'_t)$  — максимальная амплитуда фототока.

Для оценки фазовых искажений определялся угол  $\beta$  сдвига между гармоническим импульсом интенсивности света, падающего на фоторезистор, и «восстановленным» импульсом. «Восстановленный» импульс отстает по фазе от импульса возбуждения.

Для практического использования предложенного способа восстановления необходимо иметь относительно большую глубину амплитудной модуляции фототока  $M$ , которая рассчитывалась по формуле:

$$M = \frac{j_{\max} - j_{\min}}{j_{\max} + j_{\min}}. \quad (2.6)$$

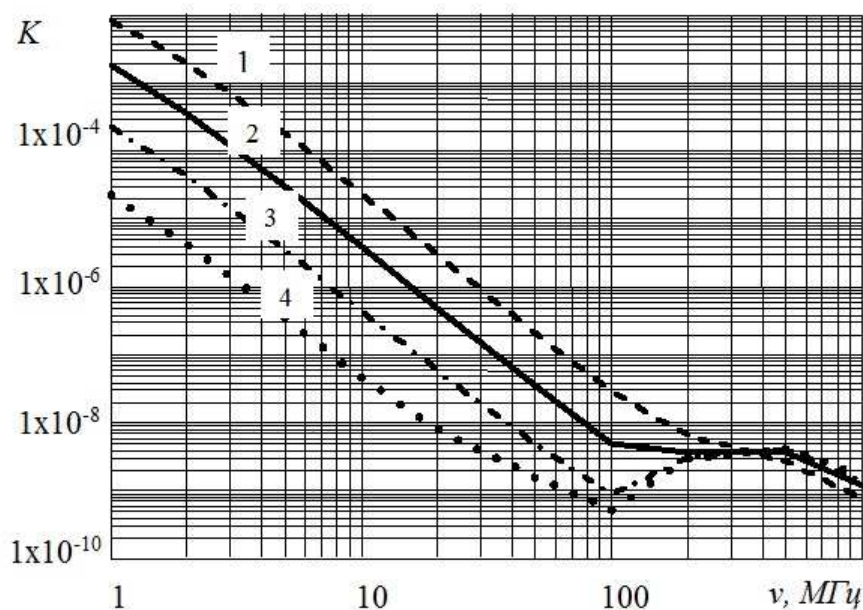
При расчетах были использованы параметры, характерные для кристаллического кремния с примесью золота, которое в кремнии формирует как донорный ( $E_c - 0.35\text{eV}$ ;  $(0/+)$ ), так и акцепторный ( $E_v + 0.55\text{eV}$ ;  $(-/0)$ ) глубокие уровни [8–10] (амфотерная примесь).

### 3. Влияние темпа генерации на нелинейные, частотные и фазовые искажения

На искажения, возникающие при восстановлении оптических импульсов, оказывает влияние величина темпа генерации. Результаты исследований представлены на Рис. 3.1–3.4. Темп генерации изменялся по закону  $g(\omega t) = g_0(1 - \cos(\omega t))$ . Используются следующие характеристики: концентрация равновесных электронов  $n = 10^8 \text{ см}^{-3}$ , концентрация акцепторных центров золота  $N_a = 10^{15} \text{ см}^{-3}$ , концентрация донорных центров золота  $N_d = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ .

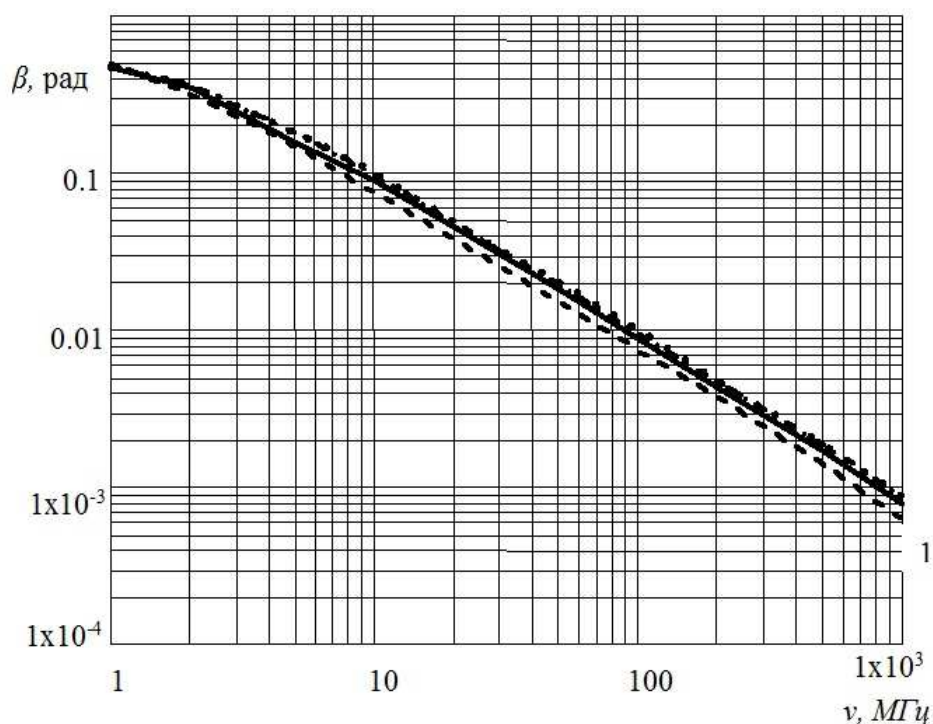
На Рис. 3.1 изображены зависимости  $K = K(\omega)$ . Практически во всей области частот независимо от скорости генерации, влиянием нелинейных искажений на форму восстановленного импульса можно пренебречь, поскольку их величина меньше 1 %. В области интересующих нас больших частот с увеличением величины темпа генерации величина коэффициента нелинейных искажений уменьшается вплоть до 100 – 400 МГц. В указанной области наблюдается минимум. Частота, соответствующая минимуму, увеличивается при увеличении темпа генерации (интенсивности). При дальнейшем увеличении частоты на кривой появляется максимум ( $\nu_{\max} \approx 400 \text{ МГц}$ ). При  $g_0 > 10^{20} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$  экстремумы на зависимостях  $K = K(\omega)$  исчезают.

Результаты исследований зависимости сдвига фаз от частоты при различных значениях темпах генерации представлены на Рис. 3.2. В двойном логарифмическом масштабе



**Рис. 3.1.** Зависимости коэффициента  $K$ , характеризующего нелинейные искажения оптического сигнала, от частоты следования импульсов света:

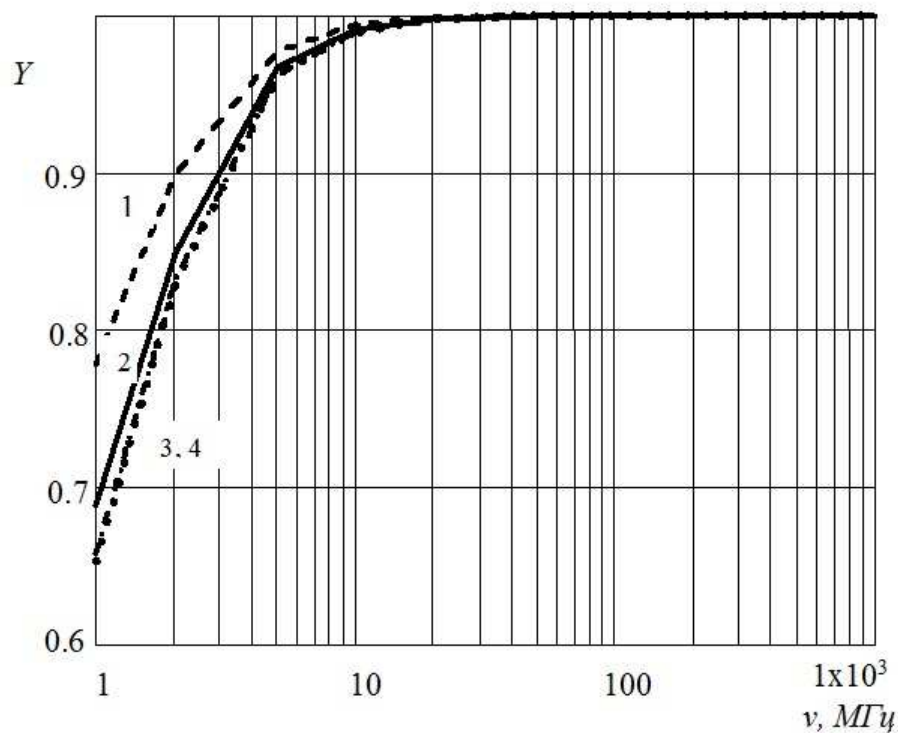
- 1)  $g_0 = 10^{20} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$ ; 2)  $g_0 = 10^{19} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$ ; 3)  $g_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$ ;  
4)  $g_0 = 10^{17} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$



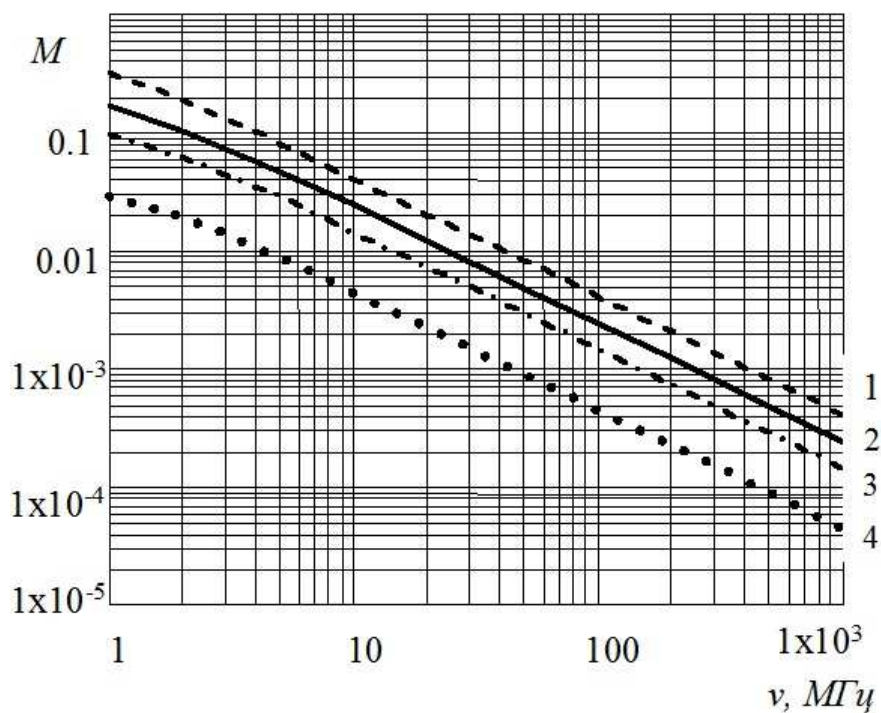
**Рис. 3.2.** Зависимости угла сдвига фаз между возбуждающим и восстановленным импульсами света от частоты следования импульсов света:

- 1)  $g_0 = 10^{20} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$ ; 2)  $g_0 = 10^{19} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$ ; 3)  $g_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$ ;  
4)  $g_0 = 10^{17} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$





**Рис. 3.3.** Зависимости линейных (амплитудных) искажений сигнала от частоты следования импульсов света: 1)  $g_0 = 10^{20} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ; 2)  $g_0 = 10^{19} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ; 3)  $g_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ; 4)  $g_0 = 10^{17} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$



**Рис. 3.4.** Зависимости глубины модуляции электрического сигнала от частоты следования импульсов света: 1)  $g_0 = 10^{20} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ; 2)  $g_0 = 10^{19} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ; 3)  $g_0 = 10^{18} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$ ; 4)  $g_0 = 10^{17} \text{ см}^{-3} \text{ с}^{-1}$

увеличение частоты следования оптических импульсов приводит к линейному уменьшению сдвига фаз. Зависимость  $\beta = \beta(\omega)$  близка к гиперболической  $\beta \sim \frac{1}{\omega}$ . Изменение величины скорости генерации слабо влияет на сдвиг фаз между импульсом возбуждения и восстановленным гармоническим импульсом.

Зависимости  $Y(\omega)$  представлены на Рис. 3.3. Темп генерации слабо влияет на область применения предложенного способа «восстановления» световых импульсов. При частотах  $\nu > 20$  МГц значение  $Y(\omega) \approx 1$ . Следовательно, в указанной области частот амплитудные искажения практически отсутствуют.

На Рис. 3.4 представлена зависимость глубины амплитудной модуляции силы тока от частоты. Увеличение темпа генерации приводит к увеличению глубины модуляции при прочих равных условиях. Это позволяет изменить область применения предложенного способа, сдвинув ее в область больших частот. Зависимость  $M = M(\omega)$  близка к гиперболической. В области высоких частот величина  $M$  мала, что вызовет трудности при применении предложенного способа «восстановления».

#### 4. Заключение

Проведен анализ искажений, возникающих при «восстановлении» оптических импульсов, при различных скоростях (темпах) генерации неравновесных носителей заряда ( $10^{17} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1} < g_0 \leq 10^{20} \text{ см}^{-3}\text{с}^{-1}$ ). Показано, что влиянием нелинейных искажений на форму восстановленного импульса можно пренебречь, поскольку их величина меньше 0,1%. С увеличением темпа генерации область частот, где нелинейные искажения малы, сдвигается в сторону больших частот. Величина темпа генерации электронов и дырок слабо влияют на линейные и фазовые искажения, которые с изменением скорости генерации изменяются незначительно. Значения линейных (частотных) искажений при частотах более 10 МГц меньше 1%. Наибольший вклад в искажения формы восстановленных оптических импульсов вносят фазовые искажения. Увеличение темпа генерации приводит при прочих равных условиях к увеличению глубины модуляции. Это позволяет сместить область восстановления оптического сигнала в сторону больших частот. Зависимость глубины модуляции от частоты близка к гиперболической.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. М. Мхитарян, Х. В. Партамян, “Скоростные фотоприемники импульсного излучения на основе «инерционных» фоторезисторов и фотодиодов”, *ЖТФ*, **52:9** (1982), 1900–1902.
2. В. А. Горюнов, В. Я. Гришаев, Е. В. Никишин, “Кинетика фотопроводимости при возбуждении высокочастотными импульсами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2012, № 4, 242–250.
3. Е. В. Никишин, “О границах применимости способа восстановления временной формы модулированных оптических сигналов с частотой выше граничной частоты фоторезистора”, *Физика и техника полупроводников*, **48:11** (2014), 1526–1529.
4. Е. В. Никишин, В. Я. Гришаев, “Восстановление временной зависимости интенсивности быстро изменяющихся импульсов произвольной формы по отклику системы”, *Журнал радиоэлектроники: электронный журнал*, 2017, № 9.

5. Р. Смит, *Полупроводники*, Мир, М., 1982, 560 с.
6. В. А. Горюнов, В. Я. Гришаев, Е. В. Никишин, “Об изменении времен жизни носителей заряда при импульсном фотовозбуждении в кремнии с глубокими примесными центрами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2011, № 4, 119–126.
7. А. Милнс, *Примеси с глубокими уровнями в полупроводниках*, Мир, М., 1977, 568 с.
8. Е. В. Никишин, Е. Е. Пескова, “Нелинейные искажения, возникающие при восстановлении высокочастотных оптических импульсов”, *Журнал радиоэлектроники: электронный журнал*, 2015, № 9.
9. N. T. Bagraev, V. A. Mashkov, “A mechanism for two-electron capture at deep level defects in semiconductors”, *Solid State Commun.*, **65** (1988), 1111–1118.
10. С. М. Мурюмин, А. Е. Никишина, Е. В. Никишин, “Использование кремния легированного золотом для определения формы оптического сигнала”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:1 (2014), 140–144.

Поступила 20.07.2019

MSC2010 78A60

# On the influence of light intensity on the limits of applicability of modulated optical signals recovery method

© E. V. Nikishin<sup>1</sup>, V. Y. Grishaev<sup>2</sup>, S. M. Muryumin<sup>3</sup>

**Abstract.** The kinetics of silicon photoconductivity with recombination centers of gold is investigated. If the frequency of light intensity modulation is less than the inverse value of the main charge carriers' lifetime, the functions describing the dependence of light intensity on time and the dependence of the photocurrent on time agree within some factor. At high frequencies of modulation of light intensity distortions arise. The dependences of light intensity on time and photocurrent on time become different. In this case, the effect of the recombination rate on the function of the variable component of the photocurrent is not significant. Basically, this function is determined by the dependence of the generation rate on time. At high frequencies, it is possible to "restore" the shape of the optical pulse using the electric pulse of the photoresistor. The dependences on the frequency of phase, linear and nonlinear distortions arising in the "restoration" of the dependence of the light intensity on time are obtained. The results are given for different values of the rate of charge carrier generation.

**Key Words:** silicon, light intensity, recombination rate, modulation depth, phase distortion, linear distortion, nonlinear distortion, amplitude distortion

## REFERENCES

1. V. M. Mekhitarian, H. V. Partamyan, "High-speed photodetectors of pulsed radiation based on "inertial" photoresistors and photodiodes", *Soviet Physics: Technical Physics*, **52:9** (1982), 1900–1902.
2. V. A. Goryunov, V. Ya. Grishaev, E. V. Nikishin, "Kinetics of photoconductivity during excitation by high-frequency pulses", *University Proceedings. Volga Region. Physics and Mathematics Sciences*, 2012, no. 4, 242–250 (In Russ.).
3. E. V. Nikishin, "On the applicability boundaries of the restoration method for the temporal shape of modulated optical signals with a frequency higher than the boundary frequency of a photoresistor", *Semiconductors*, **48:11** (2014), 1526–1529 (In Russ.).
4. E. V. Nikishin, V. Ya. Grishaev, "Recovery of time dependence of the intensity of rapidly changing arbitrary shape light pulses", *Zhurnal Radioelektroniki*, 2017, no. 9 (In Russ.).
5. R. A. Smith, *Semiconductors*, Cambridge University Press, New York, 1978, 523 p.

<sup>1</sup>**Evgeniy V. Nikishin**, Associate Professor, Department of Experimental and Theoretical Physics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8370-1790>, [nikishin57@mail.ru](mailto:nikishin57@mail.ru)

<sup>2</sup>**Vladimir Ya. Grishaev**, Associate Professor, Department of Experimental and Theoretical Physics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5009-0222>, [grishaev53@mail.ru](mailto:grishaev53@mail.ru)

<sup>3</sup>**Sergey M. Muryumin**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-2965-7500>, [muryuminsm@yandex.ru](mailto:muryuminsm@yandex.ru)

6. V. A. Goryunov, V. Ya. Grishaev, E. V. Nikishin, “On the change in lifetimes of charge carriers under pulsed photoexcitation in silicon with deep impurity centers”, *University Proceedings. Volga Region. Physics and Mathematics Sciences*, 2011, no. 4, 119–126 (In Russ.).
7. A. Milnes, *Deep impurities in semiconductors*, Wiley, New York, 1973, 526 p.
8. E. V. Nikishin, E. E. Peskova, “Nonlinear distortion arising from the restoration of high-frequency optical excitation”, *Zhurnal Radioelektroniki*, 2015, no. 9 (In Russ.).
9. N. T. Bagraev, V. A. Mashkov, “A mechanism for two-electron capture at deep level defects in semiconductors”, *Solid State Commun.*, **65** (1988), 1111–1118.
10. S. M. Muryumin, A. E. Nikishina, E. V. Nikishin, “The use of silicon alloyed with gold, to determine the shape of the optical signal”, *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **16**:1 (2014), 140–144 (In Russ.).

*Submitted 20.07.2019*

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Если статья на русском языке, то она должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC 2010;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО - полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском);
- список литературы.

Если же статья на английском языке, то соответствующие разделы излагаются только на английском. Код УДК не используется.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);

- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);

- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);

- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

**Ключевые слова** должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;

- результаты - основное содержание статьи;



— обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;

— заключение — выводы и рекомендации.

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

**Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Перевод заглавия статьи на английский язык;
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];

– Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);

– Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- название книги (транслитерация);
- [Перевод названия книги в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;

– Количество страниц в издании (250 p.);

– Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете amsbib.sty.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте <https://translit.ru/ru/bgn/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

*Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка, располагается за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт [elibrary.ru](http://elibrary.ru). ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка можно скачать из раздела Полезные материалы меню Для автора на сайте журнала.*

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела References.**

**Статьи в журналах на русском языке:**

Р.А. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, Trudy Srednevolzhskogo



matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, “[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]”, Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Статьи в журналах на английском языке:**

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

**Статьи в электронном журнале на русском языке:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Статьи в материалах конференций на русском языке:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

**Диссертации на русском языке:**

P. A. Shamanaev, Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost’ dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [ PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.

## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The text of the article should be prepared in TeX publishing system using LaTeX macroextension.

The author(s) should send to the editor source text of the article (LaTeX format), files with figures (EPS format) and the compiled version of the article (PDF format).

If the article is in Russian, then it should contain the following sections in Russian and English:

- UDC and MSC 2010 codes;
- article title;
- information about every author: full name, position, address of the organization, academic degree, ORCID, e-mail;
- abstract;
- keywords;
- text of the article (only in Russian);
- references (bibliography).

If the article is in English, the relevant sections are presented only in English. UDC code is not used.

The Subject Classification Index (MSC 2010) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of UDC and MSC 2010 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Results of work are described extremely precisely and informatively. Main theoretical and experimental results, factual data, detected relationships and patterns are presented. In the description preference is given to new results and data of long-term value, important discoveries, conclusions that refute existing theories, as well as data that, in the author's opinion, are of practical importance.

Conclusions may be accompanied by recommendations, estimates, suggestions, hypotheses described in the article.

The information contained in the article's title should not be repeated in the text of the author's summary.

It is better to avoid unnecessary introductory phrases (for example, «the author of the article considers ... »). Author(s) should not include in the abstract historical references (if they do not constitute the main content of the document) as well as description of previously published works and well-known provisions.

The text of the author's abstract should use syntactic constructions typical for the language of scientific and technical documents. Also it is better to avoid complicated grammatical constructions.

Significant words from the article's text should be used in the text of the abstract.

Abbreviations and conventions, excluding commonly used (in English special texts also), are used in exceptional cases or their definitions must be given when first used.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

In the text of English abstract author(s) should use the terminology typical to foreign special texts. They should avoid usage of terms that are direct tracing of Russian-language terms. It is necessary to preserve the unity of terminology within the abstract.

English abstracts to Russian-language articles should be written in high-quality English.

The average volume of abstracts in Russian and in English should be from 100 to 250 words.

**Keywords** should reflect the main content of the article. If it is possible they should not repeat the terms of the title and abstracts. It is better for keywords to use the terms from the article's text, as well as terms defining the subject area and including other important concepts that will expand the possibilities of finding an article by means of information retrieval system. Section **Keywords** must contain from 5 to 15 words.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is necessary to adhere to the following structure:

- introduction - a brief overview of the state of the issue under consideration and the formulation of the problem solved in the article;
- materials and methods for solving the problem and accepted assumptions;
- results – the main content of the article;
- discussion and analysis of the results obtained and their comparison with previously known ones;
- conclusion — conclusions and recommendations.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Translation of the article title into English;
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for magazines one may not do it)];

- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
  - An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.
- Books (monographs and collections) in Russian:*
- Author(s) (transliteration);
  - title of the book (transliteration);
  - [Translation of the book's name in square brackets];
  - Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
  - The number of pages in the book (250 p.);
  - Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

References in Russian and English are made according to the citation style adopted for use in the field of mathematics by the American Mathematical Society (AMS) and the European Mathematical Union (Zentralblatt MATH, zbMATH). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the amsbib.sty style package.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

*References in Russian in text format, designed in accordance with the requirements of GOST P 7.0.5.-2008 Bibliography link, must be located behind the list of references in Russian and should be commented out. This list of references will be used when downloading the electronic version of the journal on the site elibrary.ru GOST P 7.0.5.-2008 Bibliography link can be downloaded from the Useful Materials section of the For Authors menu on the journal website.*

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

## Examples of bibliographic references for the section *References*.

### Journal articles in Russian:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, "[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

### Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

### Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

### Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B.F. Bylov, R.E. Vinograd, D.M. Grobman, V.V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, "[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]", Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

**Theses in Russian:**

P. A. Shamanaev, Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [ PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.

## Правила верстки рукописей в системе LaTeX

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются три файла: файл-преамбула, файл-шаблон и стилевой пакет svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова}

*Если же статья на английском языке, то заголовок статьи оформляется только на английском языке. Для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.*

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation\***.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).



Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень\_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

`\RBibitem{метка для ссылки на источник},`

а англоязычная библиографическая ссылка — командой

`\Bibitem{метка для ссылки на источник}.`

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmobib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок — 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References* с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`**

**Статьи в журналах на русском языке:**

`\Bibitem{shamanaevBib1}`

`\by P. A. Shamanaev`

`\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]`

\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151  
\lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib2}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]  
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
\yr 2016  
\vol 18  
\issue 3  
\pages 61–69  
\lang In Russ.

**Статьи в журналах на английском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib3}  
\by M. J. Berger, J. Oliger  
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations  
\jour Journal of Computational Physics  
\yr 1984  
\vol 53  
\pages 484–512

**Статьи в электронном журнале на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib4}  
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,  
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]  
\jour Ogarev-online  
\vol 20  
\yr 2016  
\lang In Russ.  
\elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib5}  
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
\publaddr Ulyanovsk  
\publ UIGTU Publ.  
\yr 2014  
\serial 10



\pages 4–13  
\lang In Russ.

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib6}  
\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy  
\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]  
\publaddr Moscow  
\publ Nauka Publ.  
\yr 1966  
\totalpages 576  
\lang In Russ.

**Статьи в материалах конференций на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib8}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]  
\inbook Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nyim uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]  
\proc Tezisy dokladov [Abstract]  
\procinfo Suzdal, 6-11 July 2018  
\pages 218–219  
\lang In Russ.

**Диссертации на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib9}  
\by P. A. Shamanaev  
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]  
\thesisinfo Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]  
\publaddr Saransk  
\yr 1997  
\totalpages 145  
\lang In Russ.

## The rules for article layout in the LaTeX system

*Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.*

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

Three files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file **can not be changed**. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The authors}} {Author1 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail. }, Author2 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors}} {Author1\footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail}, Author2\footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords}

*If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.*

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation\*** environment.

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article

should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

**Design of pictures.** To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

- a) insert a numbered picture without a caption but indicating compression ratio

`\insertpicture{label}{file_name.eps}{degree_of_compression}`

where **degree\_of\_compression** is a number from 0 to 1.

- b) insert a numbered picture with the signature

`\insertpicturewcap{label}{file_name.eps } {caption_of_the_figure }`

- c) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio `\skip 3mm noindent \insertpicturecapscale{label}{file_name.eps}{degree_of_compression } {caption}`

- d) insert a picture without a number under the picture, but with a caption or without it

`\insertpicturenonum{file_name.eps}{degree_of_compression}{caption}`

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

`\RBibitem{label for a link to the source },`

and every English reference – by a command

`\Bibitem{label for a link to the source }.`

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the command `\cite` or `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

## Examples of bibliographic references' design for the *References* section using commands from the `svmobib.sty` package

### Journal articles in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib1}`

`\by P. A. Shamanaev`

`\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]`

`\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva`

`\yr 2003`

`\vol 5`

`\issue 1`

\pages 145–151  
 \lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib2}  
 \by P. A. Shamanaev  
 \paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]  
 \jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
 \yr 2016  
 \vol 18  
 \issue 3  
 \pages 61–69  
 \lang In Russ.

### Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib3}  
 \by M. J. Berger, J. Olinger  
 \paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations  
 \jour Journal of Computational Physics  
 \yr 1984  
 \vol 53  
 \pages 484–512

### Articles in the electronic journals in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4}  
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,  
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]  
 \jour Ogarev-online  
 \vol 20  
 \yr 2016  
 \lang In Russ.  
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

### Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5}  
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
 \publaddr Ulyanovsk  
 \publ UIGTU Publ.  
 \yr 2014  
 \serial 10  
 \pages 4–13  
 \lang In Russ.

**Books (monographs and collections) in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib6}`  
`\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy`  
`\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti` [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]  
`\publaddr Moscow`  
`\publ Nauka Publ.`  
`\yr 1966`  
`\totalpages 576`  
`\lang In Russ.`

**Conference proceedings in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib8}`  
`\by P. A. Shamanaev`  
`\paper [On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]`  
`\inbook Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nyim uravneniyam i dinamicheskim sistemam` [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]  
`\proc Tezisy dokladov` [Abstract]  
`\procinfo Suzdal, 6-11 July 2018`  
`\pages 218–219`  
`\lang In Russ.`

**Theses in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib9}`  
`\by P. A. Shamanaev`  
`\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya` [Lyapunov transformations and stability of motion]  
`\thesisinfo Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk` [PhD phys. and math. sci. diss.]  
`\publaddr Saransk`  
`\yr 1997`  
`\totalpages 145`  
`\lang In Russ.`

## Алфавитный указатель авторов

Афанасьева М. Н.	309	Лубышев Ф. В.	329
Васютин М. А.	353	Митряйкин В. И.	343
Горелов А. В.	343	Мурюмин С. М.	363
Гришаев В. Я.	363	Никишин Е. В.	363
Донцова М. В.	317	Сидоров И. Н.	343
Кузнецов Е. Б.	309	Файрузов М. Э.	329
Кузьмичев Н. Д.	353	Шабалин Л. П.	343
Шушпанов А. А. 353			

---

## Author Index

Afanaseva M. N.	309	Lubyshev F. V.	329
Vasyutin M. A.	353	Mitryaikin V. I.	343
Gorelov A. V.	343	Muryumin S. M.	363
Grishaev V. Y.	363	Nikishin E. V.	363
Dontsova M. V.	317	Sidorov I. N.	343
Kuznetsov E. B.	309	Fairuzov M. E.	329
Kuzmichev N. D.	353	Shabalin L. P.	343
Shushpanov A. A.	353		



В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Атряхин В. А.*

Редактор: *Зинина С. Х.*

Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 9.09.2019. Дата выхода в свет 30.09.2019. Цена свободная.

Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 8,4 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1794.

Типография: Издательство Мордовского университета

Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Atryahin V. A.*

Editor: *Zinina S. Kh.*

Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 9.09.2019. Date of publishing 30.09.2019. Free price.

Sheet size 70x108  $\frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 8,4.

Number of copies 100. Order no. 1794.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24



