

ISSN 2587 – 7496 (Online)

ISSN 2079 – 6900 (Print)

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  21  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  2

2019



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

## Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 21, № 2. 2019

DOI 10.15507/2079-6900.21.201902

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

# **Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva**

**Middle Volga Mathematical Society Journal**

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 21, NO. 2. 2019

DOI 10.15507/2079-6900.21.201902

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

# Журнал Средневолжского математического общества

## Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика; 01.02.00 Механика; 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

**УЧРЕДИТЕЛИ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес учредителей: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

**ИЗДАТЕЛЬ:** федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва». Адрес издателя: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

**РЕДАКЦИЯ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество». Адрес редакции: 430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.

Тел.: 8(8342)270-256, e-mail: [journal@svmo.ru](mailto:journal@svmo.ru), web: <http://journal.svmo.ru>

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal "Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva" publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- "Mathematics",
- "Applied Mathematics and Mechanics",
- "Mathematical modeling and computer science".

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics; 01.02.00 Mechanics; 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC).

One can subscript to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Founder address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research Ogarev Mordovia State University». Publisher address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society". Editorial Office address: 68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia.

Phone: 8(8342)270-256, e-mail: [journal@svmo.ru](mailto:journal@svmo.ru), web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малазийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

**Ахтямов Азамат Мухтарович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улутбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Пётр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Дерюгин Юрий Николаевич** — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, генеральный директор Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук,

заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Политехнического института ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (Ханты-Мансийск, Россия)

**Матус Петр Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Салахитдинов Махмуд Салахитдинович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Спивак Семен Израилевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Терехин Михаил Тихонович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С. А. Есенина» (Рязань, Россия)

**Ион Анка Вероника** — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Сенин Пётр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, первый проректор – проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)



## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Aleksandr S. Andreev** — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

**Azamat M. Akhtyamov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Vyacheslav Z. Grines** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Director, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Polytechnic Institute, Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

**Petr P. Matus** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Olga V. Pochinka** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Mahmud S. Salahitdinov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, of Uzbekistan)

**Semen I. Spivak** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Mikhail T. Terekhin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

**Anca V. Ion** — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

## EDITORIAL COUNCIL

**Morozkin Nikolay Danilovich** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Senin Petr Vasilievich** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Suharev Lev Alexandrovich** — Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Yarushkina Nadezda Glebovna** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), First Vice-Rector – Vice-Rector for Science of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

**И. В. Бойков, В. А. Рязанцев**

Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности . . . . . 149

---

**А. А. Босова, О. В. Починка**

О периодических данных отображения двумерного тора с одной седловой орбитой . . . . . 164

---

**А. А. Косов, А. В. Щенников, Е. В. Щенникова, Р. В. Жалнин, П. А. Шаманаев**

Обзор работ В. Н. Щенникова по исследованию конвергенции нелинейных почти периодических систем методом сравнения . . . 175

---

**Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова**

Аппроксимация задач оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений конвекции-диффузии с условиями сопряжения типа неидеального контакта . . . . . 187

---

**Д. В. Сироткин, Д. С. Малышев**

Конструктивная теорема существования, ассоциированная с локальными преобразованиями графов для задачи о независимом множестве . . . . . 215

---

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

**М. С. Дерябина, С. И. Мартынов**

О течении вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодические структуры . . . . . 222

---

**Р. В. Жалнин, В. Ф. Масягин, Е. Е. Пескова, В. Ф. Тишкин**

Применение разрывного метода Галёркина к моделированию двумерных течений многокомпонентной смеси идеальных газов на адаптивных локально измельчающихся сетках . . . . . 244

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

**A. A. Fedorova**

Empirical and physics-based approaches to estimate states of lithium-ion battery . . . . . 259

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Памяти Владимира Николаевича Щенникова . . . . . 269

Правила оформления рукописей (на рус. яз.) . . . . . 274

Правила оформления рукописей (на англ. яз.) . . . . . 278

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на рус. яз.) . . . . . 282

Правила верстки рукописей в системе LaTeX (на англ. яз.) . . . . . 286

Алфавитный указатель авторов (на рус. яз.) . . . . . 290

Алфавитный указатель авторов (на англ. яз.) . . . . . 291

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

**I. V. Boikov, V. A. Ryazantsev**

On the approximate method for determination of heat conduction coefficient . . . . . 149

---

**A. A. Bosova, O. V. Pochinka**

On periodic mapping data of a two-dimensional torus with one saddle orbit . . . . . 164

---

**A. A. Kosov, A. V. Shchennikov, E. V. Shchennikova, R. V. Zhalnin, P. A. Shamanaev**

Review of the works of V. N. Shchennikov on study of the convergence of nonlinear almost periodic systems by the comparison method . . . 175

---

**F. V. Lubyshev, A. R. Manapova**

An approximation of problems of optimal control on the coefficients of elliptic convection-diffusion equations with an imperfect contact matching condition . . . . . 187

---

**D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev**

A constructive existence theorem related to local transformations of graphs for the independent set problem . . . . . 215

---

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

**M. S. Deryabina, S. I. Martynov**

The flow of a viscous fluid with a predetermined pressure gradient through periodic structures . . . . . 222

---

**R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova, V. F. Tishkin**

Application of discontinuous Galerkin method to modeling of two-dimensional flows of a multicomponent ideal gases mixture using local adaptive mesh refinement . . . . . 244

---

---

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

**A. A. Fedorova**

Empirical and physics-based approaches to estimate states of lithium-ion battery . . . . .	259
--	-----

---

## MATHEMATICAL LIFE

---

In memory of Vladimir Nikolaevich Shchennikov . . . . .	269
---	-----

---

The rules of article design (in Russian) . . . . .	274
--	-----

The rules of article design (in English) . . . . .	278
--	-----

The rules for article layout in the LaTeX system (in Russian) . . . . .	282
---	-----

The rules for article layout in the LaTeX system (in English) . . . . .	286
---	-----

---

Author Index (In Russian) . . . . .	290
-------------------------------------	-----

Author Index (in English) . . . . .	291
-------------------------------------	-----

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.21.201902.149-163

УДК 519.63

## Об одном приближенном методе определения коэффициента теплопроводности

© И. В. Бойков<sup>1</sup>, В. А. Рязанцев<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье рассматривается проблема восстановления значения постоянного коэффициента в уравнении теплопроводности в одно- и двумерном случае. Данная коэффициентная обратная задача имеет обширные приложения в физике и технике, в частности, для моделирования процессов теплообмена, а также для изучения свойств материалов и проектирования инженерных сооружений. Для решения задачи строится приближенный метод, основанный на непрерывном операторном методе решения нелинейных уравнений. Достоинствами предлагаемого метода является его простота, а также универсальность, позволяющая применять его для решения весьма широкого класса задач. В частности, при построении и обосновании непрерывного операторного метода, в отличие от метода Ньютона-Канторовича, не требуется непрерывной обратимости производных Фреше или Гато. Более того, производные могут не существовать на множествах меры нуль. Применение непрерывного операторного метода к решению обратной коэффициентной задачи с постоянным коэффициентом позволяет свести к минимуму дополнительные условия – достаточно информации о точном решении в одной точке  $x^*, t^*$ . Решение модельных примеров продемонстрировало высокую эффективность метода.

**Ключевые слова:** параболическое уравнение, коэффициентная обратная задача, непрерывный метод решения операторных уравнений, разностная схема

### 1. Введение

В данной статье описываются численные алгоритмы приближенного определения постоянного коэффициента теплопроводности в соответствующем параболическом уравнении. Построение алгоритмов решения возникающего при этом класса обратных начальных и граничных коэффициентных задач для одно- и двумерного уравнения теплопроводности основывается на применении непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений в банаховых пространствах. Важной особенностью этого метода является то, что его реализация не требует построения и существования обратного оператора. В основе метода лежит замена исходного нелинейного операторного уравнения на дифференциальное уравнение специального вида и его последующее приближенное решение одним из численных методов решения обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом используются методы теории устойчивости решений дифференциальных уравнений.

<sup>1</sup>Бойков Илья Владимирович, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, [i.v.boykov@gmail.com](mailto:i.v.boykov@gmail.com)

<sup>2</sup>Рязанцев Владимир Андреевич, доцент кафедры высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат технических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0875-9823>, [ryazantsevv@mail.ru](mailto:ryazantsevv@mail.ru)

В общем случае под решением коэффициентной обратной задачи подразумевается определение, при фиксированных граничных и начальных условиях, одного или нескольких коэффициентов дифференциального оператора рассматриваемого уравнения. При этом используется дополнительная информация о решении, которая может быть представлена в виде различных функционалов от решения.

Для решения коэффициентной обратной задачи теплопроводности применяется широкий спектр вычислительных методов.

В статье [1] строится итерационный метод решения коэффициентной обратной задачи для уравнения теплопроводности. Коэффициент теплопроводности при этом приближенно ищется в виде сплайна, для определения коэффициентов которого применяется метод сопряженных градиентов минимизации среднеквадратичной невязки.

Авторы другой работы [2] рассматривают проблемы практической реализации итерационных методов решения коэффициентных обратных задач теплообмена; в частности, детально рассмотрен численный алгоритм, основанный на методе скорейшего спуска.

В статье [3] предлагается метод численного решения обратной коэффициентной задачи нелинейного теплопереноса, базирующийся на применении методов градиентного спуска, переменных направлений с экстраполяцией и параметрической идентификации.

В [4] для определения младшего коэффициента в уравнении параболического типа применяется метод квазиобращения, а в [5] та же задача решается с использованием метода регуляризации.

В статье [6] описывается способ построения вычислительных схем для реализации градиентного метода решения некоторых классов обратной коэффициентной задачи теплопроводности.

В работе [7] речь идет об обратной коэффициентной задаче для уравнения фильтрации. Разработан алгоритм решения обратных задач для одно- и двумерных параболических уравнений, основывающийся на применении регуляризованной сплайн-аппроксимации.

В статье [8] для решения задачи определения старшего коэффициента в уравнении теплопроводности используется метод градиентного спуска.

Темой статьи [9] являются вопросы функциональной и параметрической идентификации градиентными методами при решении коэффициентных обратных задач. На примере конкретной коэффициентной обратной задачи для нелинейного параболического уравнения строится алгоритм пошаговой идентификации неизвестного коэффициента теплопроводности.

В статье [10] к решению задачи идентификации параметров для решения обратной задачи теплопроводности привлекается вычислительный алгоритм итерационного фильтра.

Обзор численных методов решения обратной задачи теплопроводности приведен в работе [11].

В книге [12] указывается, что класс обратных задач, в которых требуется определить коэффициенты параболического уравнения, является наиболее сложным в силу их существенной неустойчивости, вследствие которой основным методом решения таких задач на данный момент является оптимизационный метод. В работе [12] подробно описываются градиентные методы определения коэффициентов параболических уравнений.

В данной статье строятся вычислительные алгоритмы восстановления постоянного коэффициента теплопроводности для одно- и двумерных уравнений теплопроводности. Рассматриваются следующие задачи.

Задача Коши для уравнения теплопроводности.

$$\frac{\partial u(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \gamma \cdot \Delta u(\mathbf{x}, t), \quad t \geq t_0, \quad (1.1)$$



$$u(\mathbf{x}, t_0) = \varphi(\mathbf{x}). \quad (1.2)$$

Пусть  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ . Требуется определить неизвестный коэффициент  $\gamma$  в предположении, что известным является точное решение  $u(\mathbf{x}^*, t^*)$  в некоторой фиксированной точке  $(\mathbf{x}^*, t^*)$ .

Начально-краевая задача для уравнения теплопроводности. Положим, что  $\mathbf{x} \in [0, \ell]^n$ . Рассматривается уравнение (1.1) вместе с начальным условием (1.2) и граничными условиями

$$u(0, t) = \eta_1(t), \quad u(\ell, t) = \eta_2(t), \quad (1.3)$$

в случае  $n = 1$  или

$$u(0, 0, t) = \eta_{11}(t), \quad u(0, \ell, t) = \eta_{12}(t), \quad u(\ell, 0, t) = \eta_{21}(t), \quad u(\ell, \ell, t) = \eta_{22}(t) \quad (1.4)$$

в случае  $n = 2$ .

Требуется определить неизвестный коэффициент  $\gamma$  в предположении, что известным является точное решение  $u(\mathbf{x}^*, t^*)$  в некоторой точке  $(\mathbf{x}^*, t^*)$ .

## 2. Описание непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений

Следуя работе [13], приведем описание непрерывного метода решения нелинейных операторных уравнений, лежащего в основе конструируемых ниже алгоритмов.

Рассматривается операторное уравнение:

$$A(\mathbf{x}) - \mathbf{f} = 0, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{X}, \quad \mathbf{f} \in \mathbb{X}. \quad (2.1)$$

где  $A : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{X}$  – нелинейный оператор и  $\mathbb{X}$  – банахово пространство.

Уравнению (2.1) ставится в соответствие следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = A(\mathbf{x}(t)) - \mathbf{f}. \quad (2.2)$$

К уравнению присоединяется начальное условие

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \quad (2.3)$$

В работе [13] формулируется и доказывается следующая теорема.

**Т е о р е м а 2.1** Пусть выполняются следующие условия:

1. в пространстве  $\mathbb{X}$  имеется шар  $S = R(\mathbf{x}^*, r)$ ,  $r > 0$ , в котором решение  $\mathbf{x}^*$  уравнения (2.1) существует и единственно;
2. в каждой точке  $\mathbf{x} \in S$  существует производная  $A'(\mathbf{x})$ ;
3. для произвольных  $\mathbf{x}_1 \in S$  и  $\mathbf{x}_2 \in S$  имеет место неравенство  $\|A'(\mathbf{x}_1) - A'(\mathbf{x}_2)\| \leq L$ ;
4. для любой точки  $\mathbf{x} \in S$  выполняется неравенство  $\Lambda(A'(\mathbf{x})) \leq -\alpha$ , где  $\alpha > 0$ ;
5. имеет место неравенство  $\alpha > L$ .

Тогда решение задачи (2.2)–(2.3) сходится к решению уравнения (2.1) для любого  $\mathbf{x}_0 \in S$ .

В приложениях более естественно использовать следующее утверждение [13].

**Т е о р е м а 2.2** Пусть уравнение (2.1) имеет решение  $\mathbf{x}^*$ , и на любой дифференцируемой кривой  $\varphi(t)$ , расположенной в шаре  $R(\mathbf{x}^*, r)$ , выполняются следующие условия:

1. при любом  $t$  ( $t > 0$ ) справедливо неравенство  $\int_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))) d\tau \leq 0$ ;
2. имеет место неравенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(\varphi(\tau))) d\tau \right] \leq -\alpha$ ,  $\alpha > 0$ .

Тогда решение задачи Коши (2.2)–(2.3) сходится к решению  $\mathbf{x}^*$  уравнения (2.1).

Выше через  $\Lambda(A')$  обозначена логарифмическая норма оператора  $A'$ . Напомним, что логарифмическая норма линейного оператора  $K$ , действующего из банахового пространства  $B$  в банахово пространство  $B$ , определяется выражением  $\Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1)/h$ , где символ  $h \downarrow 0$  означает, что  $h$  стремится к нулю, убывая.

### 3. Приближенное определение коэффициента в задаче Коши для одномерного уравнения теплопроводности

Наиболее просто предлагаемый метод иллюстрируется на примере задачи Коши для одномерного уравнения теплопроводности.

Рассматривается задача (1.1)–(1.2), где  $n = 1$ ,  $\mathbf{x} = x$  и  $\mathbf{f} = f$ . Для простоты обозначений положим  $t_0 = 0$ . Также предположим дополнительно, что известным является (возможно, приближенное) значение точного решения  $u(x^*, t^*)$  в фиксированной точке  $(x^*, t^*)$ .

Точное решение задачи (1.1)–(1.2) определяется следующей формулой [14, с.52].

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4\gamma t}\right] \varphi(\xi) d\xi. \quad (3.1)$$

Приняв  $x = x^*$  и  $t = t^*$ , перепишем (3.1) в виде:

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma t^*}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x^*-\xi)^2}{4\gamma t^*}\right] \varphi(\xi) d\xi - u(x^*, t^*) = 0. \quad (3.2)$$

Будем искать неизвестный параметр  $\gamma > 0$  как предел вспомогательной функции  $\bar{\gamma}(\tau)$ , где  $\tau \geq 0$ , так что  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \bar{\gamma}(\tau) = \gamma$ . Введем в рассмотрение следующие обозначения:

$$A(\gamma(\tau)) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\gamma(\tau)t^*}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{(x^*-\xi)^2}{4\gamma(\tau)t^*}\right] \varphi(\xi) d\xi, \quad f = u(x^*, t^*).$$

Тогда уравнение (3.2) запишем в следующем операторном виде:

$$A(\bar{\gamma}(\tau)) - f = 0.$$

В соответствии с описанием метода из п. 2. поставим этому уравнению в соответствие обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\bar{\gamma}(\tau)}{d\tau} = A(\bar{\gamma}(\tau)) - f, \quad (3.3)$$

к которому присоединим начальное условие

$$\bar{\gamma}(0) = \bar{\gamma}_0. \quad (3.4)$$

**З а м е ч а н и е 3.1** В силу утверждения теоремы 2.1 значение  $\bar{\gamma}_0$  может быть зафиксировано любым. Тем не менее на практике следует потребовать выполнения требования  $\bar{\gamma}_0 > 0$  в силу условия  $\bar{\gamma} > 0$  и наличия в подынтегральном выражении в (3.2) сомножителя  $\frac{1}{\bar{\gamma}}$ .

Задачу (3.3)–(3.4) можно решить любым методом решения обыкновенных дифференциальных уравнений. К числу наиболее простых принадлежит метод Эйлера. Пусть  $\tau \in [0, T]$ , где  $T$  – достаточно большое положительное число. Разобьем сегмент  $[0, T]$  на  $N$  малых промежутков точками  $\tau_k = kh$ , где  $k = \overline{0, N}$  и  $h = T/N$ . Обозначим  $\bar{\gamma}_k = \bar{\gamma}(\tau_k)$ . Вычислительная схема, реализующая приближенное решение дифференциального уравнения, определяется формулой

$$\bar{\gamma}_{k+1} = \bar{\gamma}_k + h [A(\bar{\gamma}_k) - f],$$

которая в развернутом виде записывается следующим образом:

$$\bar{\gamma}_{k+1} = \bar{\gamma}_k + h \left\{ \frac{1}{2\sqrt{\pi\bar{\gamma}_k t^*}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp \left[ -\frac{(x^* - \xi)^2}{4\bar{\gamma}_k t^*} \right] \varphi(\xi) d\xi - u(x^*, t^*) \right\}, \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.5)$$

Искомое значение коэффициента  $\gamma$  фиксируется приближенно в соответствии с формулой  $\gamma \approx \bar{\gamma}_N$ .

**З а м е ч а н и е 3.2** Для решения поставленной задачи достаточно знания одного значения решения  $u(x^*, t^*)$ . Тем не менее в случае, если это значение известно приближенно, для восстановления значения  $\gamma$  может потребоваться знание большего количества значений решения. В самом деле, пусть известными являются  $M$  значений  $u(x_j^*, t_j^*)$ . Обозначим как  $\bar{\gamma}^j$  значение  $\bar{\gamma}_N = \bar{\gamma}(\tau_N)$ , получаемое в результате реализации вычислительной схемы (3.5) в точке  $(x_j^*, t_j^*)$ . Тогда искомое приближенное значение  $\gamma$  предлагается определять по следующей формуле:

$$\gamma \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{\gamma}^j.$$

**П р и м е р 3.1** Пусть требуется приближенно определить значение постоянного коэффициента  $\gamma$  в правой части уравнения (1.1), если задано начальное условие  $u(x, 0) = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ . Предположим, что при  $x^* = \frac{1}{2}$ ,  $t^* = \frac{1}{2}$  дополнительно известным является значение точного решения:  $u(1/2, 1/2) = e^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{1}{4}\right)$ .

Точное решение уравнения определяется [14, с.52] функцией  $u(x, t) = e^{-t} \cos\left(\frac{x}{2}\right)$  при точном значении искомого коэффициента  $\gamma = 4$ .

Ниже используются следующие обозначения:

- No. – порядковый номер численного эксперимента;
- $\gamma_0$  – начальное приближение;
- $h$  – шаг метода Эйлера;
- $B$  – число, определяющее границу интервала  $[-B, B]$ , в котором приближенно (в соответствии с квадратурной формулой трапеций) считается интеграл в правой части формулы (3.5)
- $\gamma_{\text{прибл}}$  – найденное при помощи предложенного метода приближенное значение коэффициента  $\gamma$ ;
- $\varepsilon$  – абсолютное значение разности между точным и приближенным значением коэффициента  $\gamma$ .
- $N$  – число, фиксирующее разбиения сегмента  $[-B, B]$  при приближённом вычислении интеграла в правой части (3.5) по квадратурной формуле (использовался метод трапеций).

Результаты решения модельного примера приведены в нижеследующей таблице.

Таблица 1: Результаты численного решения модельного примера 3.1

No.	$\gamma_0$	$h$	$T$	$B$	$N$	$\gamma_{\text{прибл}}$	$\varepsilon$
1	3.9	0.1	10	500	$10^5$	3.95232	0.04768
2	3.9	0.01	10	500	$10^5$	3.95219	0.04780
3	3.9	0.01	10	50	$10^4$	3.95220	0.04780
4	3.9	0.05	50	500	$10^5$	3.99749	0.00251
5	3.9	0.1	100	500	$10^5$	3.99994	0.00006
6	4.1	0.1	100	500	$10^5$	4.00006	0.00006
7	5.0	0.1	100	500	$10^5$	4.00067	0.00067
8	3.0	0.1	100	500	$10^5$	3.99940	0.00059
9	14.0	0.1	100	500	$10^5$	4.01256	0.01256
10	0.5	0.1	100	500	$10^5$	3.99822	0.00178

#### 4. Приближённое определение коэффициента в задаче Коши для многомерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \gamma \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (4.1)$$

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad (4.2)$$

где  $t \geq 0$ ,  $-\infty < x < +\infty$ ,  $-\infty < y < +\infty$ .

Поставим задачу о приближённом восстановлении коэффициента  $\gamma$  в задаче (4.1)–(4.2) при дополнительном предположении о том, что в некоторой точке  $(t^*, x^*, y^*)$  известно значение функции  $u(t^*, x^*, y^*)$ .

Общее решение задачи (4.1)–(4.2) приводится в виде формулы [14, с.155]:

$$u(t, x, y) = \frac{1}{4\pi\gamma t} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \exp \left[ -\frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{4\gamma t} \right] d\xi d\eta. \quad (4.3)$$

Введём в рассмотрение вспомогательную функцию  $\bar{\gamma}(\sigma)$ , которую свяжем с искомым коэффициентом  $\gamma$  при помощи формулы  $\gamma = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\gamma}(\sigma)$ . Положим в (4.3)  $x = x^*$ ,  $y = y^*$  и  $t = t^*$ . Обозначим

$$A(\bar{\gamma}(\sigma)) = \frac{1}{4\pi\bar{\gamma}(\sigma)t^*} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \exp \left[ -\frac{(x^* - \xi)^2 + (y^* - \eta)^2}{4\bar{\gamma}(\sigma)t^*} \right] d\xi d\eta.$$

В соответствии с описанием непрерывного операторного метода функция  $\bar{\gamma}(\sigma)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $\frac{d\bar{\gamma}}{d\sigma} = A(\bar{\gamma}) - f$ , где  $f = u(t^*, x^*, y^*)$ . Это дифференциальное уравнение будем решать при помощи метода Эйлера. Зафиксируем достаточно большое целое положительное число  $M$  и будем восстанавливать значения функции  $\bar{\gamma}(\sigma)$  на промежутке  $\sigma \in [0, \Phi]$ . Положим  $h = \frac{\Phi}{M}$  и обозначим  $\bar{\gamma}_j = \bar{\gamma}(\sigma_j)$ ,  $j = \overline{0, M}$ . Тогда соответствующая вычислительная схема имеет вид:

$$\bar{\gamma}_{j+1} = \bar{\gamma}_j + h \left\{ \frac{1}{4\pi t^* \bar{\gamma}_j} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi, \eta) \exp \left[ -\frac{(x^* - \xi)^2 + (y^* - \eta)^2}{4t^* \bar{\gamma}_j} \right] d\xi d\eta - u(t^*, x^*, y^*) \right\}, \quad (4.4)$$

где  $j = \overline{0, M-1}$ . Результатом описанного вычислительного процесса является приближённое значение  $\gamma$ , равное  $\bar{\gamma}_M$ .

**Пример 4.1** Рассматривается задача приближенного определения коэффициента  $\gamma$  в задаче Коши для двумерного уравнения теплопроводности с начальным условием  $u_0(x, y) = \cos(x) \cos\left(\frac{y}{2}\right)$ . Предположим дополнительно, что известным является значение точного решения  $u(0.5, 0.4, 0.3) \approx 0.0747563245$ .

Точным решением задачи является функция  $u(t, x, y) = \cos(x) \cos\left(\frac{y}{2}\right) \exp(-5t)$  при точном значении коэффициента  $\gamma = 4$ .

Результаты численного решения задачи (при шаге метода Эйлера  $h = 0.1$ ) приведены в нижеследующей таблице.

Использованы следующие обозначения:

- Но. – номер численного эксперимента;
- $B$  – число, фиксирующее границу квадрата  $[-B, B]^2$ , в котором интеграл Пуассона аппроксимируется при помощи кубатурной формулы трапеций;
- $N$  – число разбиений интервала  $[-B, B]$  при приближенном вычислении интеграла Пуассона;
- $\Phi$  – длина сегмента, в котором изменяется параметр  $\sigma$ ,  $\sigma \in [0, \Phi]$ ;
- $\gamma_0$  – начальное приближение метода;
- $\gamma_{\text{прибл}}$  – приближенное значение  $\gamma$ ;
- $\varepsilon$  – погрешность метода, определяемая по формуле  $\varepsilon = |\gamma_{\text{прибл}} - \gamma_{\text{точн}}|$ .

Таблица 2: Результаты численного решения модельного примера 4.1 (при шаге метода Эйлера  $h = 0.1$ )

№.	B	N	Φ	$\gamma_0$	$\gamma_{\text{прибл.}}$	$\varepsilon$
1	5	100	50	5.0	4.02474	0.0247429
2	5	1000	50	5.0	4.02471	0.0247113
3	10	2000	50	5.0	4.03262	0.0326205
4	10	2000	100	5.0	4.00089	0.0008655
5	10	200	100	5.0	4.00089	0.0008655
6	10	200	200	5.0	4.00000	0.0000006
7	10	200	300	5.0	4.00000	$3.1 \cdot 10^{-9}$
8	10	200	400	5.0	4.00000	$2.6 \cdot 10^{-9}$
9	10	200	50	3.0	3.97741	0.0225933
10	10	200	100	3.0	3.99939	0.0006078
11	10	200	100	2.0	3.99898	0.0010243
12	10	200	100	1.0	3.99869	0.0013093
13	10	200	100	7.0	4.00406	0.0040619
14	10	200	100	10.0	4.01660	0.0166021
15	10	200	600	100.0	4.00216	0.0021633

## 5. Приближенное определение коэффициента в граничной задаче для одномерного уравнения теплопроводности

Рассмотрим проблему приближенного определения коэффициента  $\gamma$  в следующей задаче для уравнения теплопроводности:

$$\frac{\partial u(t, x)}{\partial t} = \gamma \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x^2}, \quad (5.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad (5.2)$$

$$u(t, 0) = g_1(t), \quad u(t, \ell) = g_2(t). \quad (5.3)$$

Здесь  $t \geq 0$  и  $0 \leq x \leq \ell$ .

С целью построения метода приближенного определения коэффициента  $\gamma$  введем в рассмотрение вспомогательную функцию  $\bar{\gamma}(\sigma)$  ( $\sigma \geq 0$ ) такую, что  $\gamma = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\gamma}(\sigma)$ . Будем осуществлять восстановление функции  $\bar{\gamma}(\sigma)$  на интервале  $\sigma \in [0, \Phi]$ , где  $\Phi > 0$  — достаточно большое вещественное число. Введём на сегменте  $[0, \Phi]$  равномерную сетку узлов  $\sigma_k = k\theta$ , где  $\theta = \frac{\Phi}{L}$  — шаг сетки,  $L$  — достаточно большое целое положительное число. Пусть  $S(\gamma, t, x)$  — функция, определяющая с достаточно высокой точностью решение задачи (5.1)–(5.3) для заданного аргументом значения  $\gamma$ . Относительно функции  $\bar{\gamma}(\sigma)$  составим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\bar{\gamma}(\sigma)}{d\sigma} = S(\bar{\gamma}(\sigma), t^*, x^*) - u(t^*, x^*), \quad (5.4)$$

где  $(t^*, x^*)$  — точка, в которой предполагается известным значение решения  $u(t^*, x^*)$ .

Для приближенного решения дифференциального уравнения (5.4) воспользуемся методом Эйлера:

$$\bar{\gamma}_{j+1} = \bar{\gamma}_j + \theta \{S(\bar{\gamma}_j, t^*, x^*) - u(t^*, x^*)\},$$

где  $\bar{\gamma}_j = \bar{\gamma}(\sigma_j)$ ,  $j = \overline{0, L-1}$ . Начальное приближение  $\bar{\gamma}_0 = \bar{\gamma}(0)$  фиксируем произвольным положительным числом.

Остается открытым вопрос о нахождении значений  $S(\bar{\gamma}_j, t^*, x^*)$  при  $j = \overline{1, L}$ . Для его решения предлагается использовать аппарат разностных схем. Пусть  $M, N$  – достаточно большие фиксированные положительные числа. Положим  $h = \frac{\ell}{N}$ ,  $\tau = \frac{T}{M}$ , и введем на множестве точек  $\Omega = \{(t, x) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq \ell\}$  (где  $T$  – фиксированное положительное число) равномерную сетку узлов  $(t_i, x_j)$ ,  $i = \overline{0, M}$ ,  $j = \overline{0, N}$ , где  $t_i = i\tau$ ,  $x_j = jh$ . Уравнение (5.1) аппроксимируем следующим разностным аналогом:

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\tau} = \gamma \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}, \quad (5.5)$$

где  $u_{i,j} = u(t_i, x_j)$ . Расчет значений  $u_{i,j}$  будем проводить по явной разностной формуле:

$$u_{i+1,j} = u_{i,j} + \frac{\gamma\tau}{h^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}), \quad (5.6)$$

где  $i = \overline{0, M-1}$ ,  $j = \overline{1, N-1}$ .

**З а м е ч а н и е 5.1** Для осуществления расчётов по схеме (5.6) необходимо положить  $u_{0,j} = u_0(x_j)$ ,  $u_{i,0} = g_1(t_i)$ ,  $u_{i,N} = g_2(t_i)$ .

**З а м е ч а н и е 5.2** В силу известного [15] условия  $\frac{\gamma\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}$  устойчивости разностной схемы (5.6) необходимо потребовать выполнения условия  $\tau \leq Ch^2$ ,  $C = \text{const}$ , что на практике может привести к существенному увеличению объема вычислений, т. к. при больших значениях  $\gamma$  (либо при больших значениях начального приближения  $\bar{\gamma}_0$ ) приходится уменьшать шаг сетки  $\tau$ .

**З а м е ч а н и е 5.3** Значение  $T$  естественно зафиксировать формулой  $T = t^*$ . Сетку узлов  $(t_i, x_j)$  следует построить таким образом, чтобы при некотором фиксированном значении  $j$  имело место равенство  $x_j = x^*$ .

**З а м е ч а н и е 5.4** Разностные формулы (5.5)–(5.6) использовались выше для простоты описания алгоритма. Для достижения большей точности более предпочтительно использовать разностные схемы с переменным шагом [16].

**П р и м е р 5.1** Решается задача приближенного восстановления неизвестного коэффициента  $\gamma$  в задаче (5.1)–(5.3), если при  $\ell = 1$  заданы следующие условия:

$$u(0, x) = 2xe^{-\frac{x^2}{3}}, \quad (5.7)$$

$$u(t, 0) = 0, \quad u(t, 1) = \frac{1}{(t + \frac{1}{4})^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{12t + 3}\right). \quad (5.8)$$

Дополнительно предполагается известным значение  $u(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 0.53118789$ .

Точное решение задачи даётся формулой  $u(t, x) = \frac{x}{(t + \frac{1}{4})^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{12t + 3}\right)$ .

Результаты численного решения задачи представлены в нижеследующей таблице. В этой таблице Но. обозначает порядковый номер численного эксперимента,  $\gamma_{\text{прибл.}}$  обозначает найденное приближённое значение  $\gamma$ ,  $\Phi$  – длину сегмента  $[0, \Phi]$ , в котором изменяется параметр  $\sigma$ ,  $h$  – шаг разностной схемы по переменной  $x$ ,  $\tau$  – шаг разностной схемы по переменной  $t$ ,  $\alpha$  обозначает погрешность определения значения  $\gamma$ .

Во всех представленных численных экспериментах зафиксировано  $\theta = \frac{\Phi}{L} = 0.1$ .

Таблица 3: Результаты численного решения модельного примера 5.1

No.	$\gamma_0$	h	$\tau$	$\Phi$	L	$\gamma_{\text{прибл.}}$	$\varepsilon$
1	0.5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	1000	2.86861	0.131385
2	0.5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	2000	2.98962	0.010381
3	0.5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	3000	2.99893	0.001071
4	4	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	1000	3.14387	0.143865
5	4	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	2000	3.01569	0.015686
6	4	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	3000	3.00164	0.001640
7	1	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	1000	2.89995	0.100049
8	1	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	2000	2.98997	0.010033
9	1	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	3000	3.00164	0.001640
10	2	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	1000	2.92721	0.072786
11	2	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	2000	2.99263	0.007367
12	2	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	3000	2.99924	0.000760
13	5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	1000	3.38408	0.384077
14	5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	2000	3.04537	0.045373
15	5	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	300	3000	3.00479	0.004786
16	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	400	1000	6.14184	3.141840
17	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	400	2000	3.79589	0.795891
18	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	400	3000	3.10742	0.107422
19	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	400	4000	3.01157	0.011570
20	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	500	5000	3.00121	0.001208
21	10	0.01	$5 \cdot 10^{-6}$	1000	10000	3.00003	0.000003

## 6. Приближенное определение коэффициента в граничной задаче для многомерного уравнения теплопроводности

Рассматривается проблема определения коэффициента  $\gamma$  в следующей граничной задаче для двумерного уравнения

$$\frac{\partial u(t, x, y)}{\partial t} = \gamma \left( \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(t, x, y)}{\partial y^2} \right), \quad (6.1)$$

$$u(0, x, y) = \varphi(x, y), \quad (6.2)$$

$$u(t, x, 0) = g_1(t, x), \quad u(t, x, \ell) = g_2(t, x), \quad u(t, 0, y) = g_3(t, y), \quad u(t, \ell, y) = g_4(t, y). \quad (6.3)$$

Здесь  $t \geq 0$  и  $(x, y) \in [0, \ell]^2$ . С целью решения поставленной задачи введём в рассмотрение вспомогательную функцию  $\bar{\gamma}(\sigma)$  ( $\sigma \geq 0$ ), такую, что имеет место предельное равенство  $\gamma = \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \bar{\gamma}(\sigma)$ . Численный метод предполагает, что  $\bar{\gamma}(\sigma)$  восстанавливается в точках сегмента  $\sigma \in [0, \Phi]$ , где  $\Phi$  – достаточно большое положительное число. Введём на сегменте  $\sigma \in [0, \Phi]$  равномерную сетку узлов  $\{\sigma_k\}$ , где  $\sigma_k = k\theta$ ,  $\theta = \frac{\Phi}{L}$ ,  $k = \overline{0, L}$ . Пусть  $S(\gamma)$  – оператор, ставящий в соответствие выбранному значению  $\gamma$  решение  $u(t^*, x^*, y^*)$  задачи (6.1)–(6.3) (возможно, приближенное) в некоторым образом фиксированной точке  $(t^*, x^*, y^*) \in \mathbb{R} \times [0, \ell] \times [0, \ell]$ . Функция  $\bar{\gamma}(\sigma)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d\bar{\gamma}(\sigma)}{d\sigma} = S(\bar{\gamma}(\sigma)) - u(t^*, x^*, y^*). \quad (6.4)$$



**З а м е ч а н и е 6.1** Предполагается, что значение  $u(t^*, x^*, y^*)$  является известным.

Уравнение (6.4) решается приближенно при помощи метода Эйлера. Обозначим  $\bar{\gamma}_j = \bar{\gamma}(\sigma_j)$ . Тогда имеем вычислительную схему:

$$\bar{\gamma}_{j+1} = \bar{\gamma}_j + \theta \cdot \{S(\bar{\gamma}_j) - u(t^*, x^*, y^*)\}, \quad j = \overline{0, L-1}. \quad (6.5)$$

Начальное приближение  $\bar{\gamma}_0 = \bar{\gamma}(0)$  фиксируем произвольным положительным числом. Оператор  $S(\gamma)$  предлагается реализовать при помощи построения многомерной разностной схемы. Зафиксируем  $t^* = T$ ,  $x^* = y^* = \frac{\ell}{2}$ , и пусть  $\tau = \frac{T}{M}$ ,  $h = \frac{\ell}{N}$ , где  $M$  – целое положительное число, и  $N$  – целое положительное чётное число. Введём на множестве  $[0, T] \times [0, \ell] \times [0, \ell]$  равномерную сетку узлов  $\{(t_i, x_j, y_k)\}$ , где  $t_i = i\tau$ ,  $x_j = jh$ ,  $y_k = kh$ . Уравнение (6.1) аппроксимируем разностной формулой:

$$\frac{u_{i+1,j,k} - u_{i,j,k}}{\tau} = \gamma \cdot \left( \frac{u_{i,j-1,k} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j+1,k}}{h^2} + \frac{u_{i,j,k-1} - 2u_{i,j,k} + u_{i,j,k+1}}{h^2} \right). \quad (6.6)$$

Уравнение (6.6) в явном виде разрешимо относительно  $u_{i+1,j,k}$ :

$$u_{i+1,j,k} = u_{i,j,k} + \frac{\gamma\tau}{h^2} \cdot (u_{i,j-1,k} + u_{i,j+1,k} + u_{i,j,k-1} + u_{i,j,k+1} - 4u_{i,j,k}), \quad (6.7)$$

где  $i = \overline{0, L-1}$ ,  $j = \overline{1, N}$  и  $k = \overline{1, N}$ . В силу условий (6.2)-(6.4) полагаем

$$u_{0,j,k} = \varphi(x_j, y_k), \quad u_{i,j,0} = g_1(t_i, x_j), \quad u_{i,j,N} = g_2(t_i, x_j), \quad u_{i,0,k} = g_3(t_i, y_k), \quad u_{i,N,k} = g_4(t_i, y_k).$$

**З а м е ч а н и е 6.2** Для обеспечения устойчивости вычислительной схемы (6.7) необходимо потребовать выполнения условия  $\tau \gg h^2$ .

**П р и м е р 6.1** Решается коэффициентная задача для следующих данных:

$$u(t, x, y) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos(y) \cdot e^{-5t}, \quad \ell = 1, \quad \gamma_{\text{точн}} = 4.$$

Зафиксировано  $t^* = \frac{1}{2}$ ,  $x^* = y^* = \frac{1}{2}$ . Результаты численных экспериментов представлены в нижеследующей таблице.

Таблица 4: Результаты численного решения модельного примера 6.1

№.	$\gamma_0$	h	$\tau$	$\Phi$	L	$\gamma_{\text{прибл.}}$	$\varepsilon$
1	3	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$10^3$	$10^4$	3.84882	0.151185
2	3	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	3.97078	0.029217
3	3	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	3.99279	0.007209
4	2	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^4$	3.90040	0.099596
5	2	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	3.99011	0.009892
6	1	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$1.5 \cdot 10^3$	$1.5 \cdot 10^4$	3.88561	0.114386
7	1	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	3.88561	0.011032
8	0	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	3.94888	0.051122

No.	$\gamma_0$	h	$\tau$	$\Phi$	L	$\gamma_{\text{прибл.}}$	$\varepsilon$
9	0	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	3.98875	0.011251
10	0	0.1	$5 \cdot 10^{-4}$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^4$	3.99613	0.003866
11	6	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^3$	$2 \cdot 10^4$	4.11919	0.119193
12	6	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^3$	$3 \cdot 10^4$	4.02486	0.024859
13	6	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^4$	4.00659	0.006588
14	10	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$4 \cdot 10^3$	$4 \cdot 10^4$	4.03936	0.039359
15	10	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^4$	4.00935	0.009349
16	20	0.1	$5 \cdot 10^{-5}$	$6 \cdot 10^3$	$6 \cdot 10^4$	4.05317	0.053173

Использованные в таблице обозначения совпадают с обозначениями в таблице для предшествующего примера.

## 7. Заключение

В работе представлены алгоритмы решения обратных коэффициентных задач для параболических уравнений, основанные на применении непрерывного операторного метода решения операторных уравнений. Эффективность этих алгоритмов обусловлена двумя обстоятельствами:

1. для нахождения неизвестного коэффициента параболического уравнения требуется дополнительно информация о точном решении только в одной точке  $(t^*, x^*)$ ,  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ ;
2. при реализации алгоритмов не требуется нахождение производных операторных уравнений.

Предложенная методология допускает распространение подхода в построении вычислительных схем на другие классы обратных задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. А. Артюхин, “Восстановление температурной зависимости коэффициента теплопроводности из решения обратной задачи”, *Теплофизика высоких температур*, **19**:5 (1981), 963–967.
2. О. М. Алифанов, Е. А. Артюхин, С. В. Румянцев, *Экстремальные методы решения некорректных задач и их приложения к обратным задачам теплообмена*, Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1988, 288 с.
3. С. А. Колесник, “Метод численного решения обратных нелинейных задач по восстановлению компонентов тензора теплопроводности анизотропных материалов”, *Вычислительные технологии*, **18**:1 (2013), 34–44.
4. П. Г. Данилаев, *Коэффициентные обратные задачи для уравнений параболического типа и их приложения*, УНИПРЕСС, Казань, 1998, 128 с.

5. П. Г. Данилаев, “Сравнение двух регуляризующих алгоритмов решения одной коэффициентной обратной задачи”, *Известия высших учебных заведений. Математика*, **47:5** (2003), 3–8.
6. А. В. Пененко, “Дискретно-аналитические схемы для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности слоистых сред градиентными методами”, *Сибирский журнал вычислительной математики*, **15:4** (2012), 393–408.
7. А. Н. Наумов, “Решение обратной коэффициентной задачи для уравнения фильтрации”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша РАН*, 2006, № 006, 6–29.
8. С. И. Кабанихин, А. Гасанов, А. В. Пененко, “Метод градиентного спуска для решения обратной коэффициентной задачи теплопроводности”, *Сибирский журнал вычислительной математики*, **11:1** (2008), 41–51.
9. П. Н. Вабищевич, А. Ю. Денисенко, “Численное решение коэффициентной обратной задачи для нелинейного параболического уравнения”, *Математическое моделирование*, **1:8** (1989), 116–126.
10. Ю. М. Мацевитый, А. В. Мултановский, “Одновременная идентификация теплофизических характеристик сверхтвёрдых материалов”, *Теплофизика высоких температур*, **28:5** (1990), 924–929.
11. Дж. Бек, Б. Блэкуэлл, Ч. Сент-Клер, *Некорректные обратные задачи теплопроводности*, Мир, М., 1989, 311 с.
12. С. И. Кабанихин, *Обратные и некорректные задачи*, Сибирское научное издательство, Новосибирск, 2009, 457 с.
13. И. В. Бойков, “Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **48:48** (2012), 1308–1314.
14. А. Д. Полянин, *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 576 с.
15. Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков, *Численные методы*, БИНОМ. Лаборатория знаний, М., 2008, 636 с.
16. И. В. Бойков, В. А. Рязанцев, “Построение адаптивных разностных схем решения уравнения теплопроводности”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, 2017, № 1, 68–81.

Поступила 28.03.2019

MSC2010 65M32

# On the approximate method for determination of heat conduction coefficient

© I. V. Boikov<sup>1</sup>, V. A. Ryazantsev<sup>2</sup>

**Abstract.** The problem of recovering a value of the constant coefficient in heat equation for one- and two-dimensional cases is considered in the paper. This inverse coefficient problem has broad range of applications in physics and engineering, in particular, for modelling heat exchange processes and for studying properties of materials and designing of engineering constructions. In order to solve the problem an approximate method is constructed; it is based on the continuous operator method for solving nonlinear equations. The advantages of the proposed method are its simplicity and universality. The last property allows to apply the method to a wide range of problems. In particular, in constructing and justifying a continuous operator method, in contrast to the Newton–Kantorovich method, the continuous reversibility of Frechet or Gato derivatives is not required. Moreover, derivatives may not exist on sets of measure zero. The application of continuous operator method to the solution of an inverse coefficient problem with a constant coefficient makes it possible to minimize additional conditions – there is enough information about the exact solution at a single point  $x^*, t^*$ . Solving several model problems illustrates the high efficiency of the proposed method.

**Key Words:** parabolic equation, inverse coefficient problem, continuous method for solving operator equations, difference scheme

## REFERENCES

1. E. A. Artyukhin, “Recovery of the temperature-dependence of the thermal-conduction coefficient”, *High Temperature*, **19**:5 (1981), 698–702.
2. O. M. Alifanov, E. A. Artyukhin, S. V. Rumyantsev, [*Extremal methods of solution of the ill-posed problems and their application to the inverse heat exchange problems*], Nauka Publ., Moscow, 1988 (In Russ.), 288 p.
3. S. A. Kolesnik, “[A method for numerical solution of inverse problems for identification of nonlinear components of the heat transfer tensor for anisotropic materials]”, *Computational Technologies*, **18**:1 (2013), 34–44 (In Russ.).
4. P. G. Danilaev, [*Inverse coefficient problems for parabolic equations and their applications*], UNIPRESS Publ., Kazan, 1998 (In Russ.), 128 p.
5. P. G. Danilaev, “Comparison of two regularizing algorithms for solution of coefficient inverse problem]”, *Russian Mathematics (Izvestia VUS. Matematika)*, **47**:5 (2003), 1–6.
6. A. V. Penenko, “Discrete-analytic schemes for solving an inverse coefficient heat conduction problem in a layered medium with gradient methods”, *Numerical Analysis and Application*, **5**:4 (2012), 326–341 (In Russ.).

<sup>1</sup>Ilya V. Boikov, Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, i.v.boikov@gmail.com

<sup>2</sup>Vladimir A. Ryazantsev, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph.D.(Technical Sciences), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0875-9823>, ryazantsevv@mail.ru

7. A. N. Naumov, “On the decision of inverse coefficient problem for filtration equation]”, *Preprints of Keldysh Institute of Applied Mathematics*, 2006, no. 006, 6–29 (In Russ.).
8. S. I. Kabanikhin, A. Hasanov, A. V. Penenko, “A gradient descent method for solving an inverse coefficient heat - conduction problem]”, *Numerical Analysis and Application*, **1**:1 (2008), 34–45 (In Russ.).
9. P. N. Vabischevich, A. Yu. Denisenko, “Numerical solution of inverse coefficient problem for a nonlinear parabolic equation”, *Mat. Model.*, **1**:8 (1989), 116–126 (in Russ.).
10. Yu. M. Matsevityi A. V. Multanovskii, “Simultaneous identification of the thermophysical characteristics of ultrahard materials”, *High Temperature*, **28**:5 (1990), 924–929 (In Russ.).
11. J. Beck, B. Blackwell, C. St. Clair Jr, *Inverse heat conduction ill-posed problems*, Wiley, Toronto, 1985 (In Russ.), 308 p.
12. S. I. Kabanikhin, *Inverse and ill-posed problems*, Siberian Scientific Publ., Novosibirsk, 2009 (In Russ.), 457 p.
13. I. V. Boikov, “[On a certain continuous metod for solution of nonlinear operator equation]”, *Differential equations*, **48**:48 (2012), 1308–1314 (In Russ.).
14. A. D. Polyanin, [*Handbook of linear equations of mathematical physics*], Fizmatlit Publ., Moscow, 2001 (In Russ.), 576 p.
15. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov, *Numerical methods [Chislennyye metody]*, BINOM. Laboratoriya Znaniy Publ., Moscow, 2008 (In Russ.), 636 p.
16. I. V. Boikov, V. A. Ryazantsev, “Constrution of adaptive difference schemes for solving heat conduction equations”, *University proceedings. Volga region*, 2017, no. 1, 68–81 (In Russ.).

*Submitted 28.03.2019*

УДК 517.938.5, 512.721

## О периодических данных отображения двумерного тора с одной седловой орбитой

© А. А. Босова<sup>1</sup>, О. В. Починка<sup>2</sup>

**Аннотация.** Периодические данные диффеоморфизмов с регулярной динамикой на поверхностях изучались с помощью дзета-функции в серии уже классических работ таких авторов, как П. Бланшар, Дж. Фрэнкс, С. Нарасимхан, С. Баттерсон, Дж. Смилл и др. Описание периодических данных градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей было дано в работе А. Безденежных и В. Гринеса посредством классификации периодических преобразований поверхности, полученных Дж. Нильсеном. В. Гринесом, О. Починкой, С. Ван Стриеном показано, что топологическая классификация произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях основана на задаче вычисления периодических данных диффеоморфизмов с единственной седловой периодической орбитой. Именно, конструкция фильтрации для диффеоморфизмов Морса-Смейла позволяет свести задачу исследования периодических данных диффеоморфизма поверхности к задаче вычисления периодических данных диффеоморфизмов с единственной седловой периодической орбитой. Т. Медведевым, Е. Ноздриновой, О. Починкой эта проблема была решена в общей постановке, то есть по известному периоду стоковой и седловой орбиты вычислены периоды источниковых орбит. Однако, данные формулы не позволяют определить реализуемость полученных периодических данных на поверхности данного рода. Исчерпывающим образом задача реализуемости решена только на сфере. В настоящей работе установлены полный перечень периодических данных диффеоморфизмов двумерного тора с одной седловой орбитой, при условии, что хотя бы одна узловая точка отображения является неподвижной.

**Ключевые слова:** устойчивое и неустойчивое многообразие, седловая орбита

### 1. Введение

При изучении дискретных динамических систем, т. е. при изучении поведения орбит отображения  $f$ , определенных на данном компактном многообразии, важную роль играют периодические данные отображения. За последние сорок лет появилось много результатов, показывающих, что некоторые простые предположения о периодических данных системы приводят к глубоким выводам о ее глобальном поведении. Одним из наиболее известных результатов в этом направлении является эффект, обнаруженный А. Шарковским [1] — наличие у отображения отрезка орбиты периода три влечет хаос, выражающийся в существовании орбиты любого периода (см., например, [2]).

Наиболее полезными инструментами для доказательства существования неподвижных точек или, в более общем случае, периодических точек для непрерывного отображения  $f$  компактного многообразия, является теорема Лефшеца о неподвижной точке и ее обобщения (см., например, [3], [4]). Формула Лефшеца выражает число неподвижных точек

<sup>1</sup>**Босова Анна Александровна**, студент, кафедра «Фундаментальная математика», НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1863-8398>, [bossandboss@yandex.ru](mailto:bossandboss@yandex.ru)

<sup>2</sup>**Починка Ольга Витальевна**, заведующая лабораторией Топологических Методов в Динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru)

эндоморфизма топологического пространства через следы соответствующих эндоморфизмов в группах гомологий, а дзета-функция связывает рост числа периодических орбит с глобальной топологической информацией о диффеоморфизмах.

Периодические данные диффеоморфизмов с регулярной динамикой на поверхностях изучались с помощью дзета-функции в серии уже классических работ таких авторов, как П. Бланшар [5], Дж. Фрэнкс, С. Нарасимхан [6], [7], С. Баттерсон, Дж. Смилл [8] и др. Описание периодических данных градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей было дано в работе А. Безденежных и В. Гринеса в [9] посредством классификации периодических преобразований поверхности, полученных Дж. Нильсеном [10].

В работе В. Гринеса, О. Починки, С. Ван Стриена [11] было показано, что топологическая классификация произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях основана на задаче вычисления периодических данных диффеоморфизмов с единственной седловой периодической орбитой. В статье Т. Медведева, Е. Ноздриновой, О. Починки [12] эта проблема была решена в общей постановке, то есть по известному периоду стоковой и седловой орбиты вычислены периоды источниковых орбит. Однако, данные формулы не позволяют определить реализуемость полученных периодических данных на поверхности данного рода. Исчерпывающим образом задача реализуемости решена только на сфере. Целью настоящей работы является установление полного списка периодических данных диффеоморфизмов тора с одной седловой орбитой, при условии, что хотя бы одна узловая точка отображения является неподвижной.

## 2. Определения, обозначения и вспомогательные результаты

Пусть  $S_g$  — замкнутая ориентируемая поверхность рода  $g$  и  $f : S_g \rightarrow S_g$  — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм, который имеет конечное гиперболическое неблуждающее множество  $\Omega_f$ . Из того, что диффеоморфизм имеет конечное неблуждающее множество следует, что любая точка  $p \in \Omega_f$  является периодической. Пусть  $per(p) \in \mathbb{N}$  — ее период.

Неподвижная точка  $p$  называется гиперболической, если среди собственных значений матриц Якоби, нет чисел по модулю равных 1. Точка  $p$  называется притягивающей или стоком, если все собственные значения матрицы Якоби меньше 1 по абсолютной величине. Точка  $p$  называется источниковой, если все собственные значения по модулю больше 1. Узловой точкой называется притягивающая или отталкивающая точка. Седловая точка (седло) — гиперболическая неподвижная точка, не являющаяся узловой.

Чтобы получить классификацию гиперболических периодических точек, нужно применить предыдущую конструкцию к диффеоморфизму  $f^{per(p)}$ , для которого точка  $p$  является неподвижной. Устойчивое  $W_p^s$  и неустойчивое  $W_p^u$  многообразия периодической точки определяются следующим образом:

$$W_p^s = \{x \in S_g : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{kper(p)}(x), p) = 0\},$$

$$W_p^u = \{x \in S_g : \lim_{k \rightarrow +\infty} d(f^{-kper(p)}(x), p) = 0\}.$$

Инвариантное многообразие — это устойчивое или неустойчивое многообразие для гиперболической неподвижной или периодической точки  $p$ . Устойчивая (неустойчивая) сепаратриса — это компонента связности множества  $W_p^u \setminus p$  ( $W_p^s \setminus p$ ). Гиперболическая структура периодической точки приводит к тому, что  $W_p^u$  ( $W_p^s$ ) диффеоморфно  $\mathbb{R}^{q_p}$  ( $\mathbb{R}^{2-q_p}$ ), где  $q_p$  — число собственных значений матрицы Якоби, по модулю больших 1.

Периодическими данными орбиты  $\mathcal{O}_p$  называется тройка чисел  $(m_p, q_p, \nu_p)$ , где  $q_p = \dim W_p^u$ ,  $m_p$  — период точки  $p$ , а  $\nu_p$  — тип ориентации точки  $p$ , равный  $+1(-1)$  если  $f^{m_p}|_{W_p^u}$

сохраняет (меняет) ориентацию. Для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов тип ориентации всех узловых точек равен  $+1$ , а у седла он может равняться либо  $+1$ , либо  $-1$ .

Обозначим через  $G$  множество диффеоморфизмов  $f : S_g \rightarrow S_g$ , имеющих единственную седловую периодическую орбиту. Пусть  $G_1$  и  $G_2$  ( $G = G_1 \cup G_2$ ) — множества диффеоморфизмов, тип ориентации седловой орбиты которых равен  $-1$  и  $+1$ , соответственно.

Согласно работе [12] неблуждающее множество иффеоморфизмов класса  $G$  имеет следующую структуру.

### Предложение 2.1 ([12], Теорема 1)

1. Неблуждающее множество каждого диффеоморфизма  $f \in G_1$  состоит из одной седловой орбиты, одной стоковой орбиты и одной источниковой орбиты.

2. Неблуждающее множество каждого диффеоморфизма  $f \in G_2$  состоит из одной седловой орбиты и трех узловых орбит (одной стоковой и двух источниковых или один источник и два стока).

Будем обозначать через  $\mathcal{O}_\sigma$  единственную седловую орбиту диффеоморфизмов класса  $G$ . Пусть  $\mathcal{O}_\omega$  и  $\mathcal{O}_\alpha$  обозначают стоковую и источниковую орбиту диффеоморфизма  $f \in G_1$ . Если диффеоморфизм  $f \in G_2$ , то мы предполагаем, что он имеет единственную стоковую орбиту  $\mathcal{O}_\omega$  и две источниковые орбиты  $\mathcal{O}_{\alpha_1}, \mathcal{O}_{\alpha_2}$  (в противном случае мы рассматриваем обратный диффеоморфизм  $f^{-1}$ ).

Пусть  $f \in G$ . Хорошо известно, что эйлерова характеристика ориентируемой поверхности задается формулой:

$$\chi(S_g) = 2 - 2g,$$

где  $g$  — род поверхности (см., например, [13], [14]). С другой стороны, в силу [15], многообразие  $S_g$  является двумерным клеточным комплексом

$$S_g = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u,$$

где число  $c_2$  двумерных клеток равно числу источниковых точек, число  $c_1$  одномерных клеток равно числу седловых точек, число  $c_0$  нульмерных клеток равно числу стоковых точек. Таким образом,

$$c_2 - c_1 + c_0 = 2 - 2g \quad (2.1)$$

Для  $f \in G_1$  мы имеем

$$m_\alpha - m_\sigma + m_\omega = 2 - 2g \quad (2.2)$$

и для  $f \in G_2$

$$m_{\alpha_1} + m_{\alpha_2} - m_\sigma + m_\omega = 2 - 2g \quad (2.3)$$

Обозначим  $(a, b)$  наибольший общий делитель натуральных чисел  $a, b$  и положим  $(0, b) = b$ .

### Предложение 2.2 ([12], Теорема 2)

1. Каждый диффеоморфизм  $f \in G_1$  имеет один из следующих наборов периодических данных:

- $m_\omega = 1, \quad m_\sigma = 2g, \quad m_\alpha = 1, \quad g > 0$
- $m_\omega = 1, \quad m_\sigma = 2g + 1, \quad m_\alpha = 2, \quad g \geq 0$
- $m_\omega = 2, \quad m_\sigma = 2g + 1, \quad m_\alpha = 1, \quad g \geq 0.$

(2.4)



2. Каждый диффеоморфизм  $f \in G_2$  имеет следующие периодические данные:

$$\begin{aligned} m_\omega &= m, \quad m_\sigma = km, \\ m_{\alpha_1} &= (k, j+1) \left( \frac{k}{(k, j+1)}, m \right), \\ m_{\alpha_2} &= (k, j) \left( \frac{k}{(k, j)}, m \right) \end{aligned} \quad (2.5)$$

для некоторых натуральных чисел  $m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}, j \in \{0, \dots, k-1\}$ .

### 3. Полный перечень периодических данных диффеоморфизмов двумерного тора с одной седловой орбитой

В настоящей работе рассмотрены диффеоморфизмы, заданные на двумерном торе  $S_1$  и имеющие по крайней одну неподвижную узловую орбиту. Обозначим через  $G^*$  введенный класс диффеоморфизмов. Положим  $G_1^* = G^* \cap G_1, G_2^* = G^* \cap G_2$ . Основным результатом работы являются следующие теоремы.

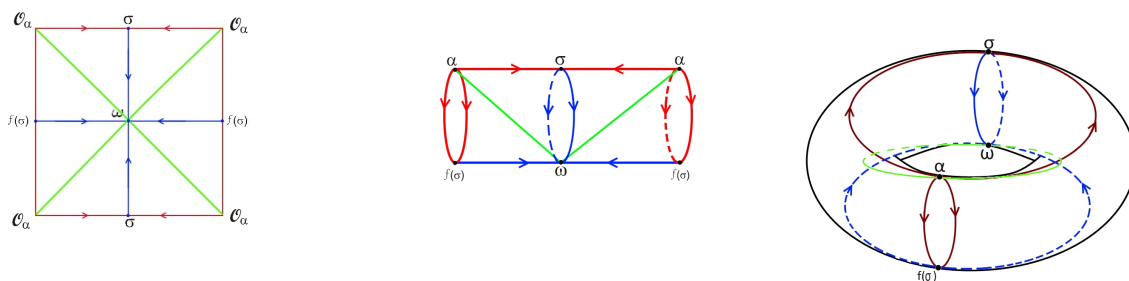
**Т е о р е м а 3.1** *Каждый диффеоморфизм  $f \in G_1^*$  имеет один из следующих наборов периодических данных:*

1.  $m_\omega = 1, m_\sigma = 2, m_\alpha = 1$ .
2.  $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_\alpha = 2$ .
3.  $m_\omega = 2, m_\sigma = 3, m_\alpha = 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Теорема 3.1 является непосредственным следствием формул 2.2 и 2.4, при подстановке в них значения  $g = 1$ .

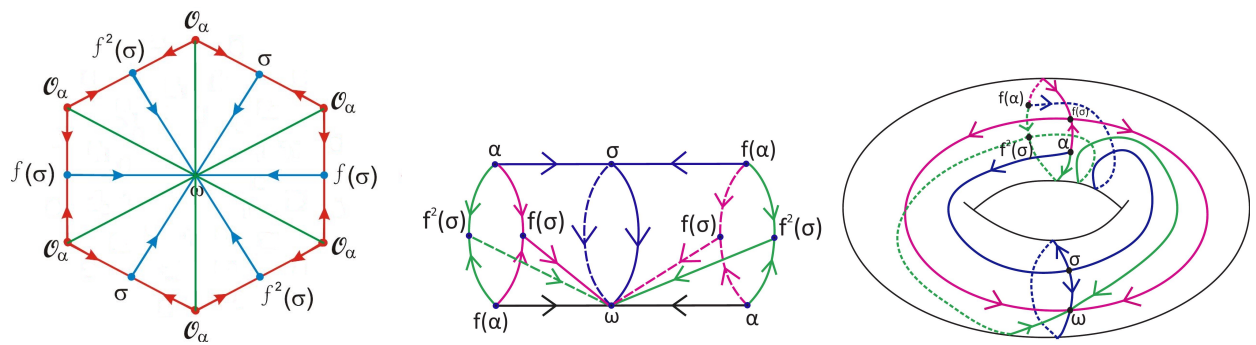
1.  $m_\omega = 1, m_\sigma = 2, m_\alpha = 1$ .
2.  $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_\alpha = 2$ .
3.  $m_\omega = 2, m_\sigma = 3, m_\alpha = 1$ .

На рис. 3.1-3.3 приведены фазовые портреты всех диффеоморфизмов из класса  $G_1^*$ , в виде развертки тора в многоугольник и на самом торе.



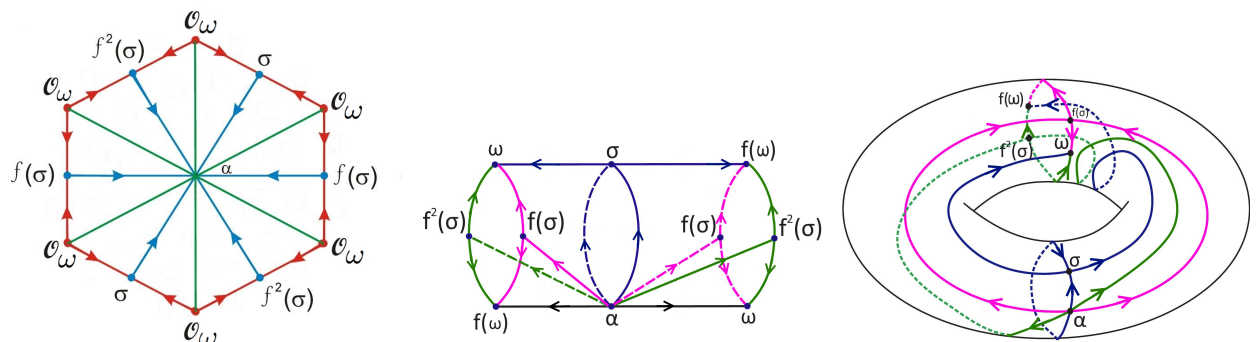
**Р и с. 3.1**

Диффеоморфизм из класса  $G_1^*$  с периодическими данными  $m_\omega = 1, m_\sigma = 2, m_\alpha = 1$ .



Р и с. 3.2

Диффеоморфизм из класса  $G_1^*$  с периодическими данными  $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_\alpha = 2$ .



Р и с. 3.3

Диффеоморфизм из класса  $G_1^*$  с периодическими данными  $m_\omega = 2, m_\sigma = 3, m_\alpha = 1$ .

**Т е о р е м а 3.2** Каждый диффеоморфизм  $f \in G_2^*$  имеет один из следующих наборов периодических данных:

1.  $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_{\alpha_1} = m_{\alpha_2} = 1$ .
2.  $m_\omega = 1, m_\sigma = 4, m_{\alpha_1} = 1, m_{\alpha_2} = 2$ .
3.  $m_\omega = 1, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 3$ .
4.  $m_\omega = 3, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 1$ .
5.  $m_\omega = 2, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 3, m_{\alpha_2} = 1$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из условия существования неподвижной узловой орбиты, наложенного на диффеоморфизмы класса  $G_2^*$ , следуют две возможности: 1)  $m_\omega = 1$ ; 2)  $m_{\alpha_2} = 1$ . В случае 1), в силу формулы 2.5, мы имеем

$$\begin{aligned} m_\omega &= 1, \quad m_\sigma = k, \\ m_{\alpha_1} &= (k, j), \\ m_{\alpha_2} &= (k, j + 1), \end{aligned}$$

для  $k \in \mathbb{N}, j \in \{0, \dots, k-1\}$ .

Из 2.3 следует, что

$$1 + (k, j) + (k, j + 1) - k = 0.$$

Откуда

$$(k, j) + (k, j + 1) = k - 1.$$

Поскольку числа  $(k, j)$  и  $(k, j + 1)$  являются делителями  $k$ , то  $(k, j) + (k, j + 1) \geq 2$  и, следовательно,  $k \geq 3$ . Так как  $(k, j) + (k, j + 1) < k$ , то  $(k, j) < k$  и  $(k, j + 1) < k$ , то  $j \neq 0$ ,  $j \neq k - 1$ . Поскольку числа  $(k, j)$  и  $(k, j + 1)$  являются делителями  $k$ , строго меньшими  $k$ , то

$$(k, j) \leq \frac{k}{3}, \quad (k, j + 1) \leq \frac{k}{2}.$$

Следовательно,

$$k - 1 = (k, j) + (k, j + 1) \leq \frac{k}{3} + \frac{k}{2},$$

$$k - 1 \leq \frac{5k}{6} \Rightarrow \frac{k}{6} \leq 1 \Rightarrow k \leq 6.$$

Учитывая, что  $k \geq 3$  и  $j \neq 0$ ,  $j \neq k - 1$ , получаем следующие наборы пар  $(k, j)$ :

$$\begin{aligned} &(3, 1), \\ &(4, 1), (4, 2), \\ &(5, 1), (5, 2), (5, 3), \\ &(6, 1), (6, 2), (6, 3). \end{aligned}$$

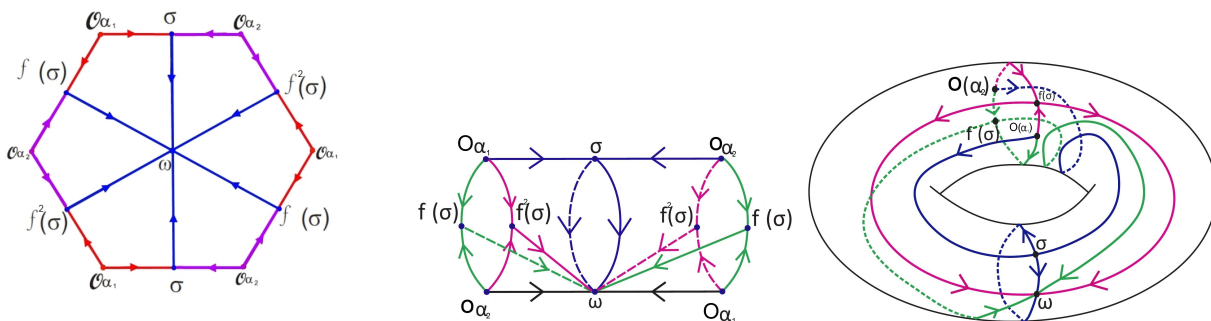
Непосредственной проверкой убеждаемся, что условию  $(k, j) + (k, j + 1) = k - 1$  удовлетворяют только три пары  $(k, j)$ :

$$\begin{aligned} &(3, 1), \\ &(4, 1), \\ &(6, 2). \end{aligned}$$

Откуда получаются следующие наборы периодических данных:

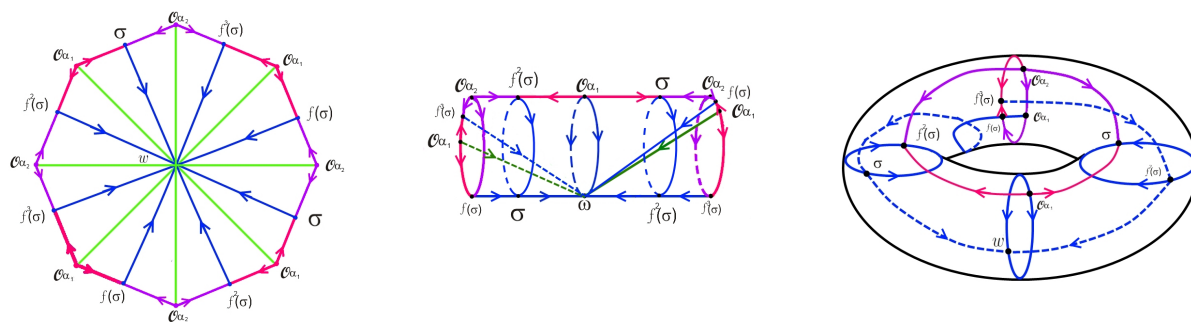
- $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_{\alpha_1} = m_{\alpha_2} = 1$ ;
- $m_\omega = 1, m_\sigma = 4, m_{\alpha_1} = 1, m_{\alpha_2} = 2$ ;
- $m_\omega = 1, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 3$ .

На рис. 3.4–3.6 приведены фазовые портреты всех диффеоморфизмов из класса  $G_2^*$  в случае 1), в виде развертки тора в многоугольник и на самом торе.



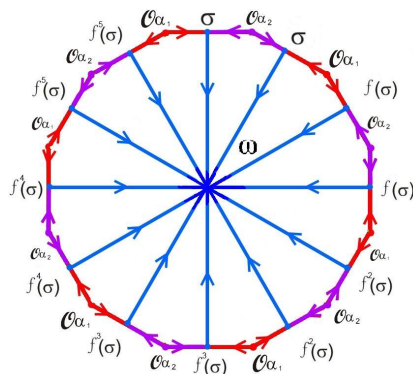
Р и с. 3.4

Диффеоморфизм из класса  $G_2^*$  с периодическими данными  $m_\omega = 1, m_\sigma = 3, m_{\alpha_1} = 1, m_{\alpha_2} = 1$ .



Р и с. 3.5

Диффеоморфизм из класса  $G_2^*$  с периодическими данными  $m_\omega = 1, m_\sigma = 4, m_{\alpha_1} = 1, m_{\alpha_2} = 2$ .



Р и с. 3.6

Диффеоморфизм из класса  $G_2^*$  с периодическими данными  $m_\omega = 1, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 3$ .

Рассмотрим случай 2). В силу формулы 2.5, мы имеем

$$\begin{aligned} m_\omega &= m, \\ m_\sigma &= mk, \\ m_{\alpha_1} &= (k, j) \left( \frac{k}{(k, j)}, m \right), \\ m_{\alpha_2} &= (k, j+1) \left( \frac{k}{(k, j+1)}, m \right) = 1, \end{aligned}$$

для  $k \in \mathbb{N}, j \in \{0, \dots, k-1\}$ .

Из 2.3 следует, что

$$(k, j) \left( \frac{k}{(k, j)}, m \right) + 1 - mk + m = 0.$$

Покажем, что  $m$  и  $k$  взаимно простые.

Положим  $A = (k, j+1)$ . Тогда  $k = pA, j+1 = qA$ , где  $(p, q) = 1$ . Таким образом,  $m_{\alpha_2} = AB$ , где  $B = (p, m)$ . Так как  $m_{\alpha_2} = AB = 1 \Rightarrow A = B = 1$ . Отсюда следует, что

$$(k, j+1) = 1, (k, m) = 1.$$

Тогда формула 2.3 приобретает вид

$$(k, j) = mk - m - 1.$$

Поскольку  $(k, j) \leq k$ , то  $mk - m - 1 \leq k$  и, следовательно,  $m(k - 1) \leq k + 1$ . Из последнего равенства следует, что  $k \neq 1$  и, таким образом,

$$m \leq \frac{k+1}{k-1} = 1 + \frac{2}{k-1}.$$

Поскольку  $k \geq 2$ , то  $1 + \frac{2}{k-1} \leq 3$ . Отсюда следует, что  $m$  может принимать значения 1, 2 или 3. Случай  $m = 1$  был рассмотрен выше, рассмотрим оставшиеся два.

В случае  $m = 2$  равенство 2.3 приобретает вид

$$(k, j) = 2k - 3.$$

Учитывая, что  $(k, j) \leq k$ , получаем, что  $2k - 3 \leq k \Rightarrow k \leq 3$ . Поскольку  $k \geq 2$  и  $(k, 2) = 1$ , получаем следующие наборы пар  $(k, j)$ :

$$\begin{aligned} (3, 0), \\ (3, 1), \\ (3, 2). \end{aligned}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условиям  $(k, j) = 2k - 3, (k, j + 1) = 1$  удовлетворяют только одна пара  $(k, j)$ :

$$(3, 0).$$

Откуда получается следующий набор периодических данных:

- $m_\omega = 2, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 3, m_{\alpha_2} = 1$ .

В случае  $m = 3$  равенство 2.3 приобретает вид

$$(k, j) = 3k - 4.$$

Учитывая, что  $(k, j) \leq k$ , получаем, что  $3k - 4 \leq k \Rightarrow k \leq 2$ . Поскольку  $k \geq 2$  и  $(k, 3) = 1$ , получаем следующие наборы пар  $(k, j)$ :

$$(2, 0), (2, 1).$$

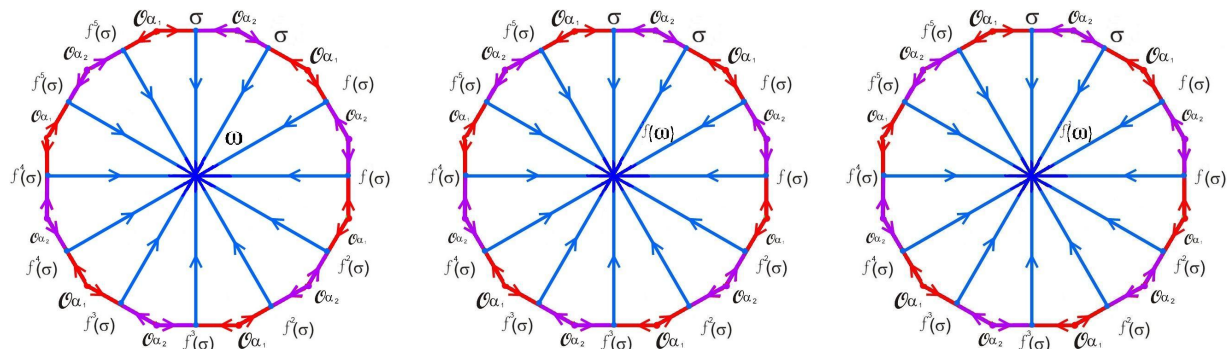
Непосредственной проверкой убеждаемся, что условиям  $(k, j) = 3k - 4, (k, j + 1) = 1$  удовлетворяют только одна пара  $(k, j)$ :

$$(2, 0).$$

Откуда получается следующий набор периодических данных:

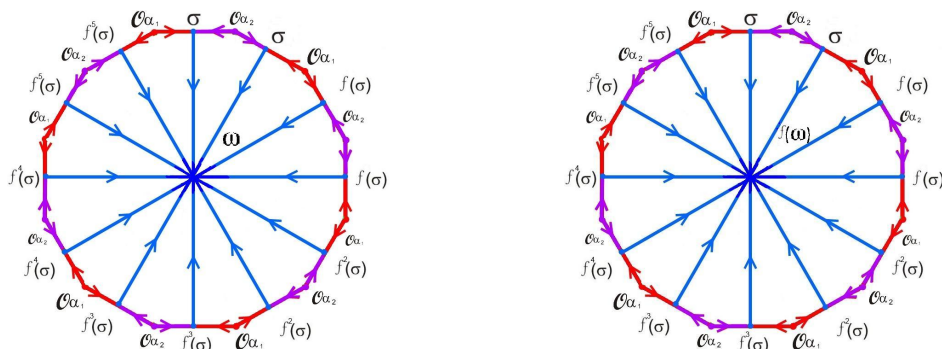
- $m_\omega = 3, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 1$ .

На рисунках 3.7 и 3.8 приведены фазовые портреты  $G_2^*$  в случае 2), в виде развертки тора.



Р и с. 3.7

Диффеоморфизм из класса  $G_2^*$  с периодическими данными  $m_\omega = 3, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 2, m_{\alpha_2} = 1$ .



Р и с. 3.8

Диффеоморфизм из класса  $G_2^*$  с периодическими данными  $m_\omega = 2, m_\sigma = 6, m_{\alpha_1} = 3, m_{\alpha_2} = 1$ .

**Благодарности.** Результаты, касающиеся сохраняющих ориентацию седел выполнены при поддержке гранта РФФИ 17-11-01041, для меняющих ориентацию — в рамках проекта ЦФИ НИУ ВШЭ в 2019 году.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Н. Шарковский, “Существование циклов непрерывного отображения прямой в себя”, *Украин. математ. журн.*, **16**:1 (1964), 61–71.
2. A. Li, J. Yorke, “Period three implies chaos.”, *Amer. Math. Monthly*, **82**:10 (1975), 985–992.
3. R. F. Brown., *The Lefschetz fixed point theorem*, Scott, Foresman and Company, 1971.
4. J. Franks., *Homology and dynamical systems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 1982.
5. P. Blanchard., “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Mathematical Journal*, **47**:1 (1980), 33–46.
6. J. Franks and C. Narasimhan., “The periodic behavior of Morse-Smale diffeomorphisms”, *Invent. Math.*, **48** (1978), 279–292.
7. C. Narasimhan., “The periodic behavior of Morse-Smale diffeomorphisms on compact surfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **248** (1979), 145–169.

8. S. Batterson, J. Smillie., *Filtrations and periodic data on surfaces*, 1986, 234 p.
9. А. Н. Безденежных, В. З. Гринес., *Реализация градиентоподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий, Дифференциальные и интегральные уравнения*, Изд-во Горьковск. ун-та., 1985, 37 с.
10. J. Nielsen, “Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen”, *Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, **15**:1 (1937), 65–102.
11. V. Grines, O. Pochinka S. Van Strien., “A complete topological classification of morse-smale diffeomorphisms on surfaces: a kind of kneading theory in dimension two”, *Cornell University Library, arXiv*, 2017.
12. T. Medvedev, E. Nozdrinova, O. Pochinka., “On periodic data of diffeomorphisms with one saddle orbit.”, *Topology Proceedings. USA.*, **54** (2019), 49–68.
13. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer International Publishing Switzerland, 2016, 313 p.
14. Ю. Г. Борисович, Н. М. Близняков, Ю. А. Израилевич, Т. Н. Фоменко., *Введение в топологию*, Москва, Высшая школа, 1980, 416 с.
15. S. Smale, “Differentiable dynamical systems.”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

*Поступила 10.04.2019*

*MSC2010 05C62, 14J80, 37D15*

## On periodic mapping data of a two-dimensional torus with one saddle orbit

© A. A. Bosova<sup>1</sup>, O. V. Pochinka<sup>2</sup>

**Abstract.** Periodic data of diffeomorphisms with regular dynamics on surfaces were studied using zeta functions in a series of already classical works by such authors as P. Blanchard, J. Franks, S. Narasimhan, S. Batterson and others. The description of periodic data for gradient-like diffeomorphisms of surfaces were given in the work of A. Bezdenzhnykh and V. Grines by means of the classification of periodic surface transformations obtained by J. Nielsen. V. Grines, O. Pochinka, S. Van Strien showed that the topological classification of arbitrary Morse-Smale diffeomorphisms on surfaces is based on the problem of calculating periodic data of diffeomorphisms with a single saddle periodic orbit. Namely, the construction of filtering for Morse-Smale diffeomorphisms makes it possible to reduce the problem of studying periodic surface diffeomorphism data to the problem of calculating periodic diffeomorphism data with a single saddle periodic orbit. T. Medvedev, E. Nozdrinova, O. Pochinka solved this problem in a general formulation, that is, the periods of source orbits are calculated from a known period of the sink and saddle orbits. However, these formulas do not allow to determine the feasibility of the obtained periodic data on the surface of this kind. In an exhaustive way, the realizability problem is solved only on a sphere. In this paper we establish a complete list of periodic data of diffeomorphisms of a two-dimensional torus with one saddle orbit, provided that at least one nodal point of the map is fixed.

**Key Words:** stable and unstable manifolds, saddle orbit

<sup>1</sup>**Anna A. Bosova**, student, Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya Str., 603155 Nizhny Novgorod, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1863-8398>, [bossandboss@yandex.ru](mailto:bossandboss@yandex.ru)

<sup>2</sup>**Olga V. Pochinka**, Laboratory Head, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya Str., 603155 Nizhny Novgorod, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru)

## REFERENCES

1. A. N. Sharkovsky, “Coexistence of the cycles of a continuous mapping of the line into itself”, *Ukraine. math journals*, **16**:1 (1964), 61–71 (In Russ.).
2. A. Li, J. Yorke., “Period three implies chaos.”, *Amer. Math. Monthly*, **82**:10 (1975), 985–992 (In Eng.).
3. Robert F. Brown., *The Lefschetz fixed point theorem*, Scott, Foresman and Company, 1971 (In Eng.)
4. J. Franks., *Homology and dynamical systems*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., 1982 (In Eng.)
5. P. Blanchard., “Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces”, *Duke Mathematical Journal*, **47**:1 (1980), 33–46 (In Eng.).
6. J. Franks and C. Narasimhan., “The periodic behavior of Morse-Smale diffeomorphisms”, *Invent. Math.*, **48** (1978), 279–292 (In Eng.).
7. C. Narasimhan., “The periodic behavior of Morse-Smale diffeomorphisms on compact surfaces”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **248** (1979), 145–169 (In Eng.).
8. S. Batterson, J. Smillie., *Filtrations and periodic data on surfaces*, 1986 (In Eng.), 234 p.
9. A. N. Bezdenezhnykh, V. Z. Grines, *Realization of gradient-like diffeomorphisms of two-dimensional manifolds*, *Inte-gral’nyi Uravn.*, Gor’kij Gos. Univ, 1985 (In Russ.), 37 p.
10. J. Nielsen, “Die Struktur periodischer Transformationen von Flächen”, *Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk*, **15**:1 (1937), 65–102 (In Deu.).
11. V. Grines, O. Pochinka S. Van Strien., “A complete topological classification of morse-smale diffeomorphisms on surfaces: a kind of kneading theory in dimension two”, *Cornell University Library, arXiv*, 2017 (In Eng.).
12. T. Medvedev, E. Nozdrinova, O. Pochinka., “On periodic data of diffeomorphisms with one saddle orbit.”, *Topology Proceedings. USA.*, **54** (2019), 49–68 (In Eng.).
13. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer International Publishing Switzerland, 2016 (In Eng.), 313 p.
14. Yu. G. Borisovich, N. M. Bliznyakov, T. N. Fomenko, Y. A. Izrailevich, *Introduction to Topology*, Moscow, High School, 1980 (In Russ.), 416 p.
15. S. Smale, “Differentiable dynamical systems.”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817 (In Eng.).

*Submitted 10.04.2019*



УДК 517.9

## Обзор работ В. Н. Щенникова по исследованию конвергенции нелинейных почти периодических систем методом сравнения

© А. А. Косов<sup>1</sup>, А. В. Щенников<sup>2</sup>, Е. В. Щенникова<sup>3</sup>, Р. В. Жалнин<sup>4</sup>,  
П. А. Шаманаев<sup>5</sup>

**Аннотация.** В статье дается обзор исследований В. Н. Щенникова по проблемам почти периодической конвергенции нелинейных систем дифференциальных уравнений. Рассмотрены задачи о конвергенции, устанавливаемой по линейному или однородному приближению. Приводятся условия конвергенции сложных систем, получаемые построением вектор-функций Ляпунова и применением метода сравнения. Следует отметить, что в ходе доказательства строятся конструктивные оценки на величины малых параметров и функций взаимосвязи, а также уточняются размеры области, в которой располагается предельный почти периодический режим. В качестве приложения рассмотрена задача о конвергенции в электрической цепи, моделируемой нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка с малым параметром. В заключении обсуждаются возможные приложения и нерешенные задачи для новых направлений исследований, над которыми в последние годы работал В. Н. Щенников.

**Ключевые слова:** конвергенция, почти периодические решения, вектор-функция Ляпунова, нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений

### 1. Введение

26 декабря 2018 года после тяжелой болезни ушел из жизни профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики Национального исследовательского Мордовского государственного университета, доктор физико-математических наук Владимир Николаевич Щенников. Владимир Николаевич начинал научно-исследовательскую работу в конце 1960-х г. в аспирантуре Ленинградского государственного университета под руководством профессора (позднее члена-корреспондента АН СССР) Владимира Ивановича Зубова, организатора и первого декана

<sup>1</sup>**Косов Александр Аркадьевич**, ведущий научный сотрудник, Институт динамики систем и теории управления им. В. М. Матросова СО РАН (664033, Россия, г. Иркутск, ул. Лермонтова, д. 134), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1352-1828>, [kosov\\_idstu@mail.ru](mailto:kosov_idstu@mail.ru)

<sup>2</sup>**Щенников Алексей Владимирович**, соискатель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4734-1553>, [shennikov.aleksey@yandex.ru](mailto:shennikov.aleksey@yandex.ru)

<sup>3</sup>**Щенникова Елена Владимировна**, профессор кафедры фундаментальной информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5989-3550>, [schennikova8000@yandex.ru](mailto:schennikova8000@yandex.ru)

<sup>4</sup>**Жалнин Руслан Викторович**, заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, [zhhrv@mrsu.ru](mailto:zhhrv@mrsu.ru)

<sup>5</sup>**Шаманаев Павел Анатольевич**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, [korspa@yandex.ru](mailto:korspa@yandex.ru)

факультета прикладной математики-процессов управления ЛГУ. В 1962 г. В. И. Зубов опубликовал фундаментальную монографию «Колебания в нелинейных и управляемых системах» [1], удостоенную впоследствии Государственной премии СССР, в которой был получен ряд принципиальных результатов по теории управления, в том числе установлены необходимые и достаточные условия почти периодической конвергенции в нелинейных системах. в данной работе также была сформулирована гипотеза о конвергенции асимптотически устойчивых однородных систем при произвольных почти периодических возмущающих силах и поставлена задача доказать или опровергнуть эту гипотезу. Именно этой задачей и было предложено заняться аспиранту В. Н. Щенникову. Задача, предложенная В. И. Зубовым, оказалась весьма трудной, и ее полное решение до настоящего времени найти никому не удалось. В ходе исследований В. Н. Щенников выделил класс систем, для которого гипотеза В. И. Зубова справедлива. Доказательства проводились вторым методом Ляпунова с использованием скалярных функций Ляпунова. Эти результаты составили основу кандидатской диссертации В. Н. Щенникова «Некоторые вопросы теории колебаний в нелинейных и управляемых системах», успешно защищенной в 1972 г. в диссертационном совете при ЛГУ.

В 1962 г. В. М. Матросов открыл новое научное направление [2], предложив использовать для анализа устойчивости не одну, а сразу несколько функций ляпуновского типа или, по устоявшейся впоследствии терминологии, введенной Р. Беллманом, вектор-функцию Ляпунова. Переход к вектор-функциям Ляпунова существенно расширил возможности исследования нелинейных систем, что вызвало быстрый рост интереса к новому методу в ведущих научных центрах по всему миру (США, Франция, Япония, Италия, Индия и т. д.), быстрое развитие метода и распространение его на другие задачи и свойства, отличные от устойчивости. Метод оформился как «метод сравнения в математической теории систем» [3], в котором изучение интересующего динамического свойства в исходной системе сводится к выявлению соответствующего свойства во вспомогательной (как правило, существенно более простой) системе, называемой системой сравнения. Касательно свойства конвергенции в рамках данного подхода В. М. Матросовым была доказана [4] теорема сравнения для случая периодической конвергенции, когда правые части исходной системы и предельный режим являются периодическими функциями времени с одним и тем же периодом. В обзоре [5] В. М. Матросов отмечает, что недостаточно исследованы методом векторных функций Ляпунова динамические свойства, более сложные, чем устойчивость. Например, проблема анализа конвергенции представляет «сплошное белое поле, покрытое лишь редкими точками отдельных разобранных примеров» [5]. Тем самым фактически была поставлена задача распространения метода сравнения для анализа конвергенции почти периодических систем. Именно эта задача была решена В. Н. Щенниковым в 1983 г., когда им была доказана теорема сравнения о почти периодической конвергенции в системе общего вида. Далее для сложных систем (по терминологии В. М. Матросова) или крупномасштабных (large-scale) систем (по терминологии Д. Д. Шильяка) достаточные условия конвергенции были конкретизированы, их удалось переформулировать в терминах локальных подсистем и оценок на взаимосвязи. Эти результаты составили ядро докторской диссертации В. Н. Щенникова «Устойчивоподобные свойства решений нелинейных управляемых систем», успешно защищенной в диссертационном совете при ЛГУ в 1990 г. Владимир Николаевич продолжал систематически обращаться к задачам, связанным с анализом конвергенции и после защиты докторской. Эти вопросы всегда вызывали его интерес и внимание. Основная задача данной статьи – дать обзор полного цикла его работ [6–14], касающихся свойства конвергенции. Ниже приводятся формулировки основных результатов и отмечаются способы проведения доказательств (сами доказательства, естественно, не приводятся). Мы старались в той мере, в которой это было возможно, сохранить исход-

ный авторский стиль Владимира Николаевича (исправлены только замеченные опечатки и неточности), все формулировки эквивалентны исходным, даже если приводятся в других обозначениях. В заключительном разделе статьи мы приводим ряд нерешенных задач, которые интересовали Владимира Николаевича, их он затрагивал в своих публикациях, выступлениях на семинарах. Их мы обсуждали с ним в личных беседах или по переписке при подготовке заявок на проекты РФФИ и программы «Университеты России». Надеемся, что эти задачи будут восприняты новыми поколениями исследователей, выбравших в качестве поля деятельности нелинейные дифференциальные уравнения и теорию управления.

## 2. Основные определения

**О п р е д е л е н и е 2.1** ([1, с.23]) *Вещественная непрерывная функция  $f(t)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , называется почти периодической, если для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать такое число  $l(\varepsilon) > 0$ , что в любом промежутке  $[\alpha, \alpha + l(\varepsilon)]$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , существует по крайней мере одно число  $\tau(\varepsilon)$  (оно называется  $\varepsilon$ -почти периодом функции  $f(t)$ ) такое, что для всех  $t \in \mathbb{R}$  будет  $|f(t + \tau) - f(t)| < \varepsilon$ .*

Это определение означает, что при сдвиге любой точки графика  $(t, f(t))$  на величину  $\varepsilon$ -почти периода по горизонтали мы получим точку  $(t + \tau, f(t))$ , которая по вертикали будет отстоять от точки  $(t + \tau, f(t + \tau))$ , лежащей на графике, не более чем на  $\varepsilon$ .

Вектор-функция называется почти периодической, если этим свойством обладает каждая ее компонента.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(t, x), \quad t \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.1)$$

правые части которой заданы при всех  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , вещественны и непрерывны. По первому аргументу  $t$  вектор-функция  $F(t, x)$  является почти периодической при каждом фиксированном  $x \in \mathbb{R}^n$ . По второму аргументу  $x$  в каждой конечной области  $\|x\| < r < +\infty$  выполняется условие Липшица

$$\|F(t, x^*) - F(t, x^{**})\| \leq L(r)\|x^* - x^{**}\|, \quad \forall x^*, x^{**} : \|x^*\| < r, \|x^{**}\| < r, \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

с постоянной  $L(r) > 0$ , не зависящей от времени.

**О п р е д е л е н и е 2.2** ([1, с.337]) *Будем говорить, что система (2.1) обладает свойством конвергенции, если она имеет единственное почти периодическое решение  $\Phi(t)$  такое, что для любого  $\varepsilon > 0$  можно указать  $\delta > 0$  такое, что  $\|x(t, x_0, t_0) - \Phi(t)\| < \varepsilon$  при  $t \geq t_0$  для  $\|x_0 - \Phi(t_0)\| < \delta$  и, кроме того,  $\|x(t, x_0, t_0) - \Phi(t)\| \rightarrow 0$  при  $t - t_0 \rightarrow +\infty$  равномерно по отношению к  $t_0 \in \mathbb{R}$  во всякой конечной области  $\|x_0\| < r$ . Здесь через  $x(t, x_0, t_0)$  обозначена интегральная кривая системы (2.1), проходящая через точку  $(x_0, t_0)$ .*

При конвергенции система (2.1) имеет почти периодическое решение  $\Phi(t)$ , которое является глобально равномерно асимптотически устойчивым.

**О п р е д е л е н и е 2.3** *Если система (2.1) имеет равномерно асимптотически устойчивое почти периодическое решение  $\Phi(t)$  с малой областью притяжения  $\|x\| < d < +\infty$ , то говорят, что система обладает свойством конвергенции в малом.*

Заметим, что конвергенция в малом обычно имеет место тогда, когда в системе присутствуют возмущающие силы, пропорциональные малому параметру  $a > 0$ , при этом размер области, в которой располагается почти периодическое решение также зависит от параметра  $a$ ,  $d(a) \rightarrow +0$  при  $a \rightarrow +0$ .

**О п р е д е л е н и е 2.4** ([1, с.342]) *Функция  $V(t, x, y, z)$  – заданная при  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ , вещественная и непрерывная – называется определенно положительной в области  $\|z\| \leq \rho$ , если для каждого  $r > 0$  можно указать функцию  $V_r(z) > 0$  при  $z \neq 0$ , вещественную непрерывную такую, что  $V(t, x, y, z) \geq V_r(z)$  при  $\|z\| < \rho$ ,  $\|x\| < r$ ,  $\|y\| < r$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .*

**О п р е д е л е н и е 2.5** ([1, с.342]) *Функция  $V(t, x, y, z)$  – заданная при  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$ ,  $z \in \mathbb{R}^n$ , вещественная и непрерывная – допускает бесконечно малый высший предел в области  $\|z\| \leq \rho$ , если по  $r > 0$  можно указать функцию  $U_r(z)$ , вещественную непрерывную и заданную при  $\|z\| \leq \rho$ , такую, что  $U_r(0) = 0$ ,  $U_r(z) > 0$  при  $z \neq 0$  и  $|V(t, x, y, z)| \leq U_r(z)$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\|x\| \leq r$ ,  $\|y\| \leq r$ ,  $\|z\| \leq \rho$ .*

### 3. Конвергенция однородных систем (гипотеза В. И. Зубова)

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = X_s^{(\mu)}(x_1, \dots, x_n) + q_s(t), \quad s = \overline{1, n}, \quad (3.1)$$

где  $X_s^{(\mu)}(x_1, \dots, x_n)$  – однородные формы степени  $\mu = 2k + 1$  от величин  $x_1, \dots, x_n$  с вещественными постоянными коэффициентами;  $q_s(t)$  – почти периодические функции.

**Гипотеза В. И. Зубова** ([1, с.355]). *Предположим, что нулевое решение системы  $\dot{x}_s = X_s^{(\mu)}$ ,  $s = \overline{1, n}$  асимптотически устойчиво. Тогда система (3.1) обладает свойством конвергенции при любых почти периодических  $q_s(t)$ .*

Доказать или опровергнуть это утверждение В. И. Зубов предложил читателям. Поскольку доказательство гипотезы В. И. Зубова является весьма трудной задачей, то конструктивный подход здесь заключается в том, чтобы выделить классы систем, для которых гипотеза справедлива. Именно такой подход был применен в работе [6].

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = g_s x^\mu + \nu X_s^{(\mu)}(x_1, \dots, x_n) + R_s(t), \quad s = \overline{1, n}, \quad (3.2)$$

где  $g_s$  – вещественные постоянные;  $X_s^{(\mu)}(x_1, \dots, x_n)$  – однородные формы степени  $\mu = 2k + 1$ ,  $k = 1, 2, 3, \dots$ ;  $\nu$  – вещественный параметр.

**Т е о р е м а 3.1** [6] *Если все  $g_s < 0$  и значение параметра  $\nu \geq 0$  достаточно мало, то система (3.2) обладает свойством конвергенции.*

Доказательство проводится вторым методом Ляпунова с использованием функций  $V_1 = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n x_s^2$  и  $V = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^n z_s^2$ , а также критерия конвергенции Зубова ([1], теорема 81). Необходимо отметить, что в статье [11] этот же результат был установлен другим методом, с использованием формулы В. М. Алексеева.

Перейдем к рассмотрению системы, для которой (3.2) является системой однородного приближения.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_s = X_s^{(\mu)}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{l=\mu+1}^{\infty} X_s^{(l)}(x_1, \dots, x_n) + a q_s(t), \quad s = \overline{1, n}. \quad (3.3)$$

Здесь предполагаются выполненными условия:

- 1) Функции  $X_s^{(\mu)}(x_1, \dots, x_n)$  являются однородными формами степени  $\mu = 2k+1$  от величин  $x_1, \dots, x_n$  с вещественными коэффициентами такими, что нулевое решение системы  $\dot{x}_s = X_s^{(\mu)}(x_1, \dots, x_n)$  асимптотически устойчиво;
- 2) Функции  $X_s^{(l)}$ ,  $l \geq \mu+1$  являются однородными формами степени  $l$  относительно  $x_1, \dots, x_n$  с вещественными почти периодическими по  $t$  коэффициентами;
- 3) Функции  $q_s(t)$  являются вещественными почти периодическими;
- 4) Ряд, стоящий в правой части системы (3.3), сходится при  $\|x\| < \delta$  равномерно по отношению к  $t \in \mathbb{R}$ .

Продолжая гипотезу, В. И. Зубов утверждает ([1, с.360]), что при выполнении условий 1–4 система (3.3) обладает свойством конвергенции в малом при любом достаточно малом значении параметра  $a \geq 0$ . При этом равномерно асимптотически устойчивое почти периодическое решение располагается в малой области  $\|x\| < \delta(a)$ .

Доказательство этого утверждения пока не найдено, поэтому в [6] был выделен класс систем, для которого гипотеза В. И. Зубова справедлива.

**Т е о р е м а 3.2** [6] *Если все  $g_s < 0$ ,  $\nu \geq 0$  достаточно мало и выполнены условия 2–4, то система*

$$\dot{x}_s = g_s x_s^\mu + \nu X_s^{(\mu)}(x_1, \dots, x_n) + \sum_{l=\mu+1}^{\infty} X_s^{(l)}(x_1, \dots, x_n) + a R_s(t), \quad s = \overline{1, n},$$

*обладает свойством конвергенции в малом при всех достаточно малых значениях параметра  $a > 0$ . При этом почти периодическое решение расположено в области  $\|x\| < \delta(a)$ ,  $\delta(a) \rightarrow +0$  при  $a \rightarrow +0$ .*

#### 4. Конвергенция в малом, устанавливаемая по линейному приближению

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x + F(t, x) + aR(t). \quad (4.1)$$

**Т е о р е м а 4.1** [7] *Пусть выполнены условия:*

- 1) Правые части (4.1) являются почти периодическими функциями относительно аргумента  $t \in \mathbb{R}$ ;
- 2) Компоненты вектор-функции  $F(t, x)$  являются аналитическими функциями относительно  $x$ , разложения которых начинаются с членов не ниже второй степени;
- 3) Существует симметрическая почти периодическая положительно определенная непрерывно-дифференцируемая матрица  $B(t)$  такая, что матрица  $C(t) = \dot{B}(t) + A^T(t)B(t) + B(t)A(t)$  является отрицательно определенной, т. е.  $\lambda_{\max}(C(t)) \leq -\lambda_0 < 0$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ .

*Тогда существует  $a_0 > 0$  такое, что при всех  $0 < a < a_0$  система (4.1) обладает свойством конвергенции в малом, т. е. имеет в области  $\|x\| < \rho(a)$  единственное почти периодическое решение, являющееся равномерно асимптотически устойчивым. При этом размер области, в которой имеет место конвергенция, уменьшается при уменьшении малого параметра, т. е.  $\rho(a) \rightarrow +0$  при  $a \rightarrow +0$ .*

## 5. Теорема сравнения о конвергенции

Рассмотрим систему (2.1) при предположениях на правые части, сделанных в разделе 2. Введем в оборот следующую вектор-функцию

$$V^{(1)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad V^{(1)}(t, x) = \text{col} \left( V_1^{(1)}(t, x), \dots, V_m^{(1)}(t, x) \right),$$

все компоненты которой  $V_k^{(1)}(t, x)$  являются непрерывно дифференцируемыми при всех  $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Пусть для производных в силу системы (2.1)

$$\left. \frac{dV_k^{(1)}}{dt} \right|_{(2.1)} = \frac{\partial V_k^{(1)}}{\partial t} + \left( \text{grad}_x V_k^{(1)}, F(t, x) \right)$$

выполняются неравенства

$$\left. \frac{dV_k^{(1)}}{dt} \right|_{(2.1)} \leq W_k^{(1)}(t, x, V^{(1)}). \quad (5.1)$$

Здесь  $W_k^{(1)}(t, x, V^{(1)})$  – непрерывные по всем аргументам функции, являющиеся квазимонотонными по третьему аргументу  $V^{(1)}$ .

Используя оценки (5.1) дополним исходную систему (2.1) соответствующим уравнением (5.1), приходим к замкнутой системе

$$\begin{aligned} \dot{x} &= F(t, x), \\ \dot{y} &= W^{(1)}(t, x, y). \end{aligned} \quad (5.2)$$

Пусть  $x^{(1)}(t)$  и  $x^{(2)}(t)$  есть два произвольных решения системы (2.1); обозначим через  $z = x^{(2)}(t) - x^{(1)}(t)$  их разность. Введем в рассмотрение вектор-функцию  $V^{(2)} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^l$ ,  $V^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z) = \text{col} \left( V_1^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z), \dots, V_l^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z) \right)$ , все компоненты которой  $V_j^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z)$  являются непрерывно дифференцируемыми при всех  $(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Для переменной  $z$  справедливо уравнение

$$\dot{z} = F(t, x^{(1)} + z) - F(t, x^{(1)}). \quad (5.3)$$

Пусть для производной вектор-функции  $V^{(2)}$  вдоль решений имеют место оценки

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_j^{(2)}}{dt} \right|_{(2.1)-(5.1)} &= \frac{\partial V_j^{(2)}}{\partial t} + \left( \text{grad}_{x^{(1)}} V_j^{(2)}, F(t, x^{(1)}) \right) + \left( \text{grad}_{x^{(2)}} V_j^{(2)}, F(t, x^{(2)}) \right) + \\ &+ \left( \text{grad}_z V_j^{(2)}, F(t, x^{(1)} + z) - F(t, x^{(1)}) \right) \leq W_j^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, V^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z)). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Здесь  $W_j^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, V^{(2)})$  – непрерывные по всем аргументам функции, квазимонотонные по последнему аргументу  $V^{(2)}$ .

Используя оценку (5.4) и соответствующее уравнение, запишем расширенную систему для разности решений в замкнутой форме

$$\begin{aligned} \dot{x}^{(1)} &= F(t, x^{(1)}), \\ \dot{x}^{(2)} &= F(t, x^{(2)}), \\ \dot{z} &= F(t, x^{(1)} + z) - F(t, x^{(1)}), \\ \dot{p} &= W^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z, p). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Введем следующие обозначения:

$$v^{(1)} = \max_{k=1, n} V_k^{(1)}(t, x), \quad v^{(2)} = \max_{k=1, l} V_j^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z),$$

$$\|V^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z)\| = \left( \sum_{j=1}^l V_j^{(2)^2}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z) \right)^{1/2}. \quad (5.6)$$

**Т е о р е м а 5.1** [8] Пусть для системы (2.1) существуют вектор-функции  $V^{(1)}(t, x)$  и  $V^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z)$ , удовлетворяющие условиям:

1. а) для производной от вектор-функции  $V^{(1)}$  в силу систему (2.1) справедлива оценка (5.1);

б)  $v^{(1)}(t, x) \rightarrow +\infty$  при  $\|x\| \rightarrow +\infty$  равномерно относительно  $t \in \mathbb{R}$ ;

в)  $v^{(1)}(t, x)$  ограничена сверху в каждой замкнутой области  $r_1 \leq \|x\| \leq r$  равномерно относительно  $t \in \mathbb{R}$ ;

г) все решения расширенной системы (5.2)  $y$ -ограничены равномерно относительно  $t \geq t_0$  и начальных условий  $(t_0, x_0, y_0)$ .

2. а) для производной от вектор-функции  $V^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z)$  вдоль решений справедлива оценка (5.4);

б) функция  $v^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z)$  определено положительно в смысле определения 4;

в) функция  $\|V^{(2)}(t, x^{(1)}, x^{(2)}, z)\|$  допускает бесконечно малый высший предел в смысле определения 5;

г) Решение  $(x^{(1)}(t), (x^{(2)}(t), 0, 0))$  расширенной системы (5.5)  $p$ -асимптотически устойчиво равномерно относительно  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $\|x^{(1)}(0)\| \leq r$ ,  $\|x^{(2)}(0)\| \leq r$ ,  $\|z_0\| \leq r$ ,  $\|p_0\| \leq r$ .

Тогда система (2.1) обладает свойством конвергенции.

Доказательство теоремы состоит в последовательной проверке выполнения условий критерия конвергенции В. И. Зубова ([1], теорема 81). Вектор-функция  $V^{(1)}$  при этом обеспечивает ограниченность решений (2.1), а вектор-функция  $V^{(2)}$  обеспечивает сближение решений системы (2.1).

Условия 1.г и 2.г накладываются на расширенные системы, включающие исходную (2.1), поэтому выглядят и являются трудно проверяемыми. Однако при практическом применении теорем сравнения такого рода всегда стремятся получить оценки через одни только компоненты вектор-функции, вне связи с фазовыми переменными. В таком случае второе уравнение системы (5.2) принимает вид

$$\dot{y} = W^{(1)}(t, y), \quad (5.7)$$

а последнее уравнение системы (5.5) записывается следующим образом:

$$\dot{p} = W^{(2)}(t, p), \quad (5.8)$$

Условия 1.г и 2.г теперь существенно упрощаются и формулируются в виде требований к системам сравнения (5.7) и (5.8). От системы (5.7) требуется равномерная ограниченность всех решений, а от системы (5.8) – равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения.

## 6. Конвергенция сложных систем

Рассмотрим сложную систему

$$\dot{x}_s = A_s x_s + f_{1s}(t, x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_k) + \varepsilon_s f_{2s}(t, x_1, \dots, x_k) + \mu_s R_s(t), \quad (6.1)$$

где  $A_s$  — постоянная  $n_s \times n_s$  матрица;  $x_s \in \mathbb{R}^{n_s}$  — вектор состояния  $s$ -той подсистемы;  $x = \text{col}(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^n$ ,  $n = n_1 + \dots + n_k$  — полный вектор состояния системы (6.1). Вектор-функции  $R_s(t)$ ,  $f_{1s}$  и  $f_{2s}$  считаем почти периодическими по времени. Правые части системы (6.1) считаются удовлетворяющими условию Липшица по  $x$  с постоянной, не зависящей от времени  $t$ . Кроме того, предполагаются выполненными условия

$$\|f_{1s}(t, x_1, \dots, x_{s-1}, x_{s+1}, \dots, x_k)\| \leq \sum_{j=1(j \neq s)}^k a_{sj} \|x_j\|,$$

$$\|f_{2s}(t, x_1, \dots, x_k)\| \leq \sum_{j=1}^k b_{sj} \|x_j\|^{1+\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

где  $a_{sj} \geq 0$ ,  $b_{sj} \geq 0$  — некоторые постоянные.

Все линейные подсистемы

$$\dot{x}_s = A_s x_s, \quad s = \overline{1, k}, \quad (6.2)$$

предполагаются асимптотически устойчивыми.

Таким образом, сложная система (6.1) представляет собой совокупность устойчивых линейных подсистем (6.2), нагруженных слабыми (ввиду наличия малых параметров  $\varepsilon_s$ ), нелинейностями  $\varepsilon_s f_{2s}$ , связанных функциями взаимодействия подсистем  $f_{1s}$  и подверженных малым почти периодическим возмущающим силам  $\mu_s R_s(t)$ .

**Т е о р е м а 6.1** [9] *Если правые части системы (6.1) удовлетворяют сделанным в этом разделе предположениям, то система обладает свойством конвергенции в малом.*

Доказательство по существу представляет конструктивное построение вектор-функций Ляпунова, фигурирующих в теореме 5.1. Здесь необходимо отметить два принципиальных момента.

Во-первых, в доказательстве впервые в отечественной литературе применяется (независимо от работ Д. Д. Шильяка) вектор-функция Ляпунова с компонентами типа «корень квадратный из квадратичной формы»  $\rho_s = V_s^{1/2}$  и строится соответствующая система сравнения. Такой подход к построению данной вектор-функции был разработан Д. Шильяком в 1978 г., что позволило существенно улучшить условия, получаемые в рамках ее построения по способу Бейли.

Во-вторых, в ходе доказательства строятся конструктивные оценки на величины малых параметров и функций взаимосвязи, а также уточняются размеры области, в которой располагается предельный почти периодический режим. В приложениях к конкретным сложным системам это может иметь существенное значение, поскольку от величин амплитуд вынужденных колебаний может зависеть работоспособность системы.

В [12] обсуждается применение результатов о конвергентности сложных систем в теории программного регулирования и теории самонастраивающихся систем с эталонной моделью.

В дальнейшем результаты были усилены и распространены на сложные системы с почти периодическими матрицами  $A_s(t)$ , имеющими отрицательную доминирующую диагональ [13].

## 7. Конвергенция в одной электротехнической системе

В [14] рассмотрена задача о конвергенции в электрической цепи, моделируемой нелинейным дифференциальным уравнением второго порядка

$$\ddot{x} + (a+1)\dot{x} + ax + cx^\lambda = \varepsilon\varphi(t), \quad (7.1)$$



где  $a$  и  $c$  – положительные вещественные числа;  $\varphi(t)$  – непрерывная  $\omega$ -периодическая функция;  $\lambda$  – нечетное положительное число;  $\varepsilon > 0$  – малый параметр.

**Т е о р е м а 7.1** [14] *Если  $c > 0$  и  $a > \frac{1}{4}$ , то система (7.1) обладает свойством конвергенции при любом  $\varepsilon > 0$ .*

Доказательство основано на переходе к эквивалентной двумерной системе и построении скалярных функций Ляпунова, гарантирующих ограниченность и сближение решений.

## 8. Возможные приложения и нерешенные задачи для новых направлений исследований

1. Частичная конвергенция. По аналогии с частичной устойчивостью В. Н. Щенников полагал целесообразным развить теорию частичной конвергенции, когда только часть координат выходит на почти периодический предельный режим.

2. Существование квадратичной формы с почти периодической матрицей для экспоненциально устойчивой почти периодической линейной системы. В периодическом случае периодическая матрица квадратичной формы существует (Демиденко Г. В., Матвеева И. И.). В почти периодическом случае вопрос открыт. Здесь имеется прямая связь с теоремой 4.1.

3. Конвергенция в системах с импульсным взаимодействием. Владимира Николаевича особенно интересовал вопрос о передаче сигналов в моделях нейронов.

4. Конвергенция в системах с переключениями

$$\dot{x} = f^{(\sigma(t))}(t, x), \quad \sigma: \mathbb{R} \rightarrow S = \{1, 2, \dots, m\};$$

$\sigma(t)$  – кусочно-постоянная, правосторонне непрерывная функция, множество точек разрыва которой не более чем счетно и не имеет конечных точек сгущения. Для каждого фиксированного  $j \in S$  функция  $f^j(t, x)$  удовлетворяет условиям раздела 2. Проблема здесь в том, что функция  $\sigma(t)$  не почти периодическая в смысле определения 1. Поэтому надо дать новое определение и построить новую теорию конвергенции таких переключаемых систем.

5. Количественные оценки конвергенции в сложных системах. Необходимо разработать алгоритмы и программы построения вектор-функции Ляпунова и получения количественных оценок конвергенции по исходным коэффициентам из правых частей. Эффективно работающие программы такого рода могут быть очень полезными при анализе прикладных задач.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. И. Зубов, *Колебания в нелинейных и управляемых системах*, Судпромгиз, Ленинград, 1962, 631 с.
2. В. М. Матросов, “К теории устойчивости движения”, *Прикладная математика и механика*, **XXVI**:6 (1962), 992–1000.
3. В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский, С. Н. Васильев, *Метод сравнения в математической теории систем*, Наука, Новосибирск, 1980, 480 с.

4. В. М. Матросов, “Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова. IV”, *Дифференциальные уравнения*, **5**:12 (1969), 2129–2143.
5. В. М. Матросов, “Метод векторных функций Ляпунова в системах с обратной связью”, *Автоматика и телемеханика*, 1972, № 9, 63–75.
6. В. Н. Щенников, “Явление конвергенции одной нелинейной системы”, *Дифференциальные уравнения*, **8**:4 (1972), 737–739.
7. В. Н. Щенников, “К теоремам существования почти периодических решений в нелинейных системах дифференциальных уравнений”, *Функциональный анализ и вопросы качественной теории дифференциальных уравнений*, МГУ им. Н. П. Огарёва, Саранск, 1976, 158–161.
8. В. Н. Щенников, “Исследование конвергенции в неавтономной дифференциальной системе с помощью вектор-функций Ляпунова”, *Дифференциальные уравнения*, **19**:11 (1983), 1902–1907.
9. В. Н. Щенников, “Явление конвергенции сложных систем дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **20**:9 (1984), 1566–1571.
10. В. Н. Щенников, “Об устойчивости при постоянно действующих возмущениях”, *Автоматика и телемеханика*, 1985, № 2, 69–72.
11. В. Н. Щенников, “Исследование почти периодического режима одной нелинейной регулируемой системы”, *Дифференциальные уравнения*, **22**:12 (1986), 2182–2183.
12. В. Н. Щенников, “Развитие теории вынужденных почти периодических колебаний в нелинейных управляемых системах”, *Математическое моделирование*, **7**:5 (1995), 29–30.
13. А. А. Косов, В. Н. Щенников, “О конвергенции сложных почти периодических систем”, *Дифференциальные уравнения*, **50**:12 (2014), 1571–1581.
14. В. С. Елфимов, А. В. Щенников, В. Н. Щенников, “Конвергентность управляемых динамических систем”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки*, **46**:2 (2018), 86–94.

Поступила 12.02.2019

MSC2010 34C27

# Review of the works of V. N. Shchennikova on the study of the convergence of nonlinear almost periodic systems by the comparison method

© A. A. Kosov<sup>1</sup>, A. V. Shchennikov<sup>2</sup>, E. V. Shchennikova<sup>3</sup>, R. V. Zhalnin<sup>4</sup>, P. A. Shamanaev<sup>5</sup>

**Abstract.** The article provides an overview of the studies of V. N. Shchennikov on the problems of almost periodic convergence of nonlinear differential equations' systems. The problem of convergence established by linear or homogeneous approximation is considered. The conditions for convergence of complex systems are given, that are obtained by constructing Lyapunov vector functions and using the comparison method. It should be noted that in the course of the proof constructive estimates are made for the values of small parameters and interconnection functions. The dimensions of the region in which the limiting almost periodic mode is located are also specified. As an application, the problem of convergence in an electric circuit modeled by a second-order nonlinear differential equation with a small parameter is considered. In conclusion, possible applications and unsolved problems for new directions of research, on which V. N. Shchennikov worked in recent years, are discussed.

**Key Words:** convergence, almost periodic solutions, Lyapunov vector function, nonlinear system of ordinary differential equations

## REFERENCES

1. V. I. Zubov, [*Oscillations in nonlinear and controlled systems*], Sudpromgiz, Leningrad, 1962 (In Russ.), 631 p.
2. V. M. Matrosov, "[To the theory of motion stability]", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **XXVI**:6 (1962), 992–1000 (In Russ.).
3. V. M. Matrosov, L. Yu. Anapol'skiy, S. N. Vasil'ev, [*Comparison method in mathematical systems theory*], Nauka Publ., Novosibirsk, 1980 (In Russ.), 480 p.
4. V. M. Matrosov, "The comparison principle with a vector-valued Lyapunov function. IV", *Differentsialnye uravneniya*, **5**:12 (1969), 2129–2143 (In Russ.).

<sup>1</sup>**Alexander A. Kosov**, Leading researcher, Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (134, Lermontov St., Irkutsk 664033, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1352-1828>, kosov\_idstu@mail.ru

<sup>2</sup>**Aleksey V. Shchennikov**, applicant of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4734-1553>, shennikov.aleksey@yandex.ru

<sup>3</sup>**Elena V. Shchennikova**, Professor of the Department of Fundamental Informatics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5989-3550>, schennikova8000@yandex.ru

<sup>4</sup>**Ruslan V. Zhalnin**, Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

<sup>5</sup>**Pavel A. Shamanaev**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Ogarev Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, korspa@yandex.ru

5. V. M. Matrosov, “Method of Lyapunov vector functions in systems with feedback”, *Autom. Remote Control*, 1972, no. 9, 1458–1468.
6. V. N. Shchennikov, “The convergence phenomenon of a certain nonlinear system”, *Differentsialnye uravneniya*, **8**:4 (1972), 737–739 (In Russ.).
7. V. N. Shchennikov, “K teoreмам sushchestvovaniya pochtii periodicheskikh resheniy v nelineynykh sistemakh differentsialnykh uravneniy [On theorems on the existence of almost periodic solutions in nonlinear systems of differential equations]”, *Funktsionalnyy analiz i voprosy kachestvennoy teorii differentsialnykh uravneniy [Functional analysis and questions of the qualitative theory of differential equations]*, MRSU, Saransk, 1976, 158–161 (In Russ.).
8. V. N. Shchennikov, “[Investigation of convergence in a nonautonomous differential system by means Lyapunov vector-functions]”, *Differentsialnye uravneniya*, **19**:11 (1983), 1902–1907 (In Russ.).
9. V. N. Shchennikov, “[The convergence phenomenon in complex systems of differential equations]”, *Differentsialnye uravneniya*, **20**:9 (1984), 1566–1571 (In Russ.).
10. V. N. Shchennikov, “Stability under continuous disturbances”, *Autom. Remote Control*, **46** (1985), 197–200.
11. V. N. Shchennikov, “Investigation of an almost periodic state of a nonlinear controllable system]”, *Differentsialnye uravneniya*, **22**:12 (1986), 2182–2183 (In Russ.).
12. V. N. Shchennikov, “On the theory of forced almost periodic oscillations in nonlinear controlled systems”, *Matematicheskoe modelirovanie*, **7**:5 (1995), 29–30 (In Russ.).
13. A. A. Kosov, V. N. Shchennikov, “On the convergence phenomenon in complex almost periodic systems”, *Differentsialnye uravneniya*, **50**:12 (2014), 1571–1581 (In Russ.).
14. V. S. Elfimov, A. V. Shchennikov, V. N. Shchennikov, “Convergence of operated dynamic systems”, *University Proceedings. Volga Region. Physical and Mathematical Sciences*, **46**:2 (2018), 86–94 (In Russ.).

*Submitted 12.02.2019*

УДК 519.6:517.962

# Аппроксимация задач оптимального управления коэффициентами эллиптических уравнений конвекции-диффузии с условиями сопряжения типа неидеального контакта

© Ф. В. Лубышев<sup>1</sup>, А. Р. Манапова<sup>2</sup>

**Аннотация.** Рассматриваются нелинейные задачи оптимального управления процессами, описываемыми несамосопряженными эллиптическими уравнениями конвекции-диффузии с условиями сопряжения типа неидеального контакта (т. е. задач со скачком коэффициентов и решения на внутренней границе разрыва, скачок решения пропорционален нормальной составляющей потока). Управляющими функциями являются одновременно коэффициенты операторов диффузионного и конвективного переноса, а также коэффициенты при нелинейных слагаемых уравнения состояния. Строются и исследуются разностные аппроксимации экстремальных задач, причем для аппроксимации уравнений состояний предложены некоторые «модифицированные» разностные схемы, отличные от известных в литературе традиционных схем другим способом задания переменных сеточных коэффициентов в главной части сеточного оператора. Исследуются вопросы корректности задач. Получены оценки точности разностных аппроксимаций по состоянию, оценки скорости сходимости аппроксимаций по функционалу, установлена слабая сходимость по управлению. Наличие несамосопряженного оператора вызывает определенные трудности при построении и изучении аппроксимаций дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния управляемых процессов, в частности при доказательстве корректности разностных аппроксимаций и при исследовании связи между исходной задачей оптимального управления и аппроксимирующей сеточной задачей. Проведена регуляризация аппроксимаций по А. Н. Тихонову. Результаты, полученные в настоящей работе, будут использованы в дальнейшем при разработке эффективных методов численного решения построенных конечномерных сеточных задач оптимального управления и их компьютерной реализации.

**Ключевые слова:** задача оптимального управления, несамосопряженное эллиптическое уравнение, неидеальный контакт, разностные аппроксимации

## 1. Введение

Нелинейные задачи оптимального управления для уравнений математической физики (УМФ) относятся к наиболее сложному классу задач оптимизации. Проблема численного решения задач оптимального управления приводит к необходимости их аппроксимации задачами более простой природы — «конечномерными задачами оптимизации». При этом возникают проблемы сходимости аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризации аппроксимаций [1–2].

<sup>1</sup>Лубышев Федор Владимирович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, [maham721@mail.ru](mailto:maham721@mail.ru)

<sup>2</sup>Манапова Айгуль Рашитовна, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8778-4917>, [aygulrm@mail.ru](mailto:aygulrm@mail.ru)

В настоящей работе впервые поставлены и исследованы разностные аппроксимации классов задач оптимального управления системами, описываемыми несамосопряженными полулинейными уравнениями эллиптического типа с коэффициентами, зависящими от управления, при этом по своим математическим постановкам уравнения состояния имеют разрывные коэффициенты и разрывные решения. На управления накладываются локальные ограничения, и ограничение на градиент старшего коэффициента уравнения. Настоящая работа продолжает исследования [3–8] (см. также цитируемую литературу) и существенно обобщает результаты работы [3]. В работе [3] были изучены разностные аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах уравнения состояния (включая управления при старших и младших производных). Работа [4] обобщает результаты работы [3] на случай произвольной выпуклой области. Однако в отличие от данных источников результаты настоящей статьи получены для задач оптимизации, описываемых полулинейными эллиптическими уравнениями с разрывными данными и состояниями, с условиями сопряжения типа неидеального контакта (т. е. задач со скачком коэффициентов и решения на внутренней границе разрыва; скачок решения пропорционален нормальной составляющей потока, см. [9]). В работах [5–6], [8] анализируются вопросы сходимости и регуляризации аппроксимаций для задач оптимизации с управлениями в разрывных коэффициентах в граничном условии сопряжения, при старших производных и в коэффициентах оператора конвективного переноса уравнения состояния и в его правой части, соответственно.

Настоящая статья принципиально отличается от вышеперечисленных основным объектом изучения. В ней исследуются задачи оптимального управления для полулинейного эллиптического уравнения с несамосопряженными операторами, с управлениями в коэффициентах при старших производных, в коэффициентах при младших производных и нелинейном члене уравнения. Наличие несамосопряженного оператора вызывает определенные трудности при построении и изучении аппроксимаций дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния управляемых процессов, в частности при доказательстве корректности разностных аппроксимаций, и при исследовании связи между исходной задачей оптимального управления и аппроксимирующей сеточной задачей (см., например, теоремы 3.1, 4.1 и т. д.). Отметим, что результаты статьи [7] связаны с практической реализацией, а именно, в ней доказывается дифференцируемость соответствующего сеточного функционала аппроксимирующих задач оптимального управления для полулинейного эллиптического уравнения с разрывными коэффициентами и самосопряженными операторами, строится итерационный метод решения дискретной задачи и доказывается его сходимость.

В статье разработаны новые конечномерные разностные аппроксимации построенных нелинейных моделей оптимизации, причем для аппроксимации уравнений состояний предложены некоторые «модифицированные» разностные схемы, отличные от известных в литературе традиционных схем другим способом задания переменных сеточных коэффициентов в главной части сеточного оператора. Исследованы вопросы сходимости аппроксимаций: установлены оценки точности аппроксимаций по состоянию и функционалу и сходимость аппроксимаций по управлению. Оценки точности аппроксимаций установлены при предположении, что обобщенное решение поставленной краевой задачи из  $W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)$  принадлежит также классу  $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$  (т. е. при предположении, аналогичном сделанному в [10, с.6]. Исследуются проблемы регуляризации аппроксимаций. На основе метода А. Н. Тихонова и полученных результатов проведена регуляризация предложенных аппроксимаций, позволяющая строить минимизирующие последовательности для целевых функционалов нелинейных задач оптимального управления, сильно сходящиеся в пространствах управлений к множествам точек минимумов функционалов

исходных постановок.

Поставленные в работе нелинейные модели оптимизации включают в себя в качестве частных вариантов постановок большой круг прикладных оптимизационных задач теории упругости, теплопроводности, конвекции-диффузии-реакции (при соответствующей конкретизации уравнений состояний, управляющих воздействий, ограничений на управления и целевых функционалов, соответствующих оптимизации процессов по конечному числу критериев качества). Так, например, в теории упругости возникает множество задач, которые естественно могут быть сформулированы как проблемы оптимального управления. При этом роль управляющих факторов в этих задачах могут выполнять, например, функции, входящие в главную часть дифференциального оператора и задающие внутреннюю структуру конструкций, т. е. описывающие распределение упругих характеристик материала. Кроме того, при исследовании многих процессов в движущихся средах в качестве основных можно выделить диффузионный перенос той или иной субстанции и перенос, обусловленный движением среды, т. е. конвективный перенос (см. [15]). Конвективно-диффузионный процесс может играть определяющую роль при моделировании самых разнообразных процессов. В частности, рассматриваемые задачи можно трактовать, например, в том числе как математические модели оптимизационных задач экологического прогнозирования, в основе которых лежит квазилинейное эллиптическое уравнение в движущейся активной среде — эллиптическое уравнение конвекции-диффузии-реакции, описывающее процесс распространения вещества в некоторой области экологического прогнозирования  $\Omega$  (например, переноса в атмосфере или реке неоднородной загрязняющей субстанции (см. [11])). Одна из задач оптимизации загрязнений окружающей среды состоит в «конструировании» моделей экологического прогнозирования допустимых норм загрязнения экологически значимых зон за счет выбора «управляющих» параметров (коэффициентов) в уравнении состояний.

Результаты, полученные в настоящей работе, будут использованы в дальнейшем при разработке эффективных методов численного решения построенных конечномерных сеточных задач оптимального управления и их компьютерной реализации.

## 2. Постановка экстремальных задач и их корректность

Пусть  $\Omega = \{r = (r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$  — прямоугольник в  $\mathbb{R}^2$  с границей  $\partial\Omega = \Gamma$ . Пусть область  $\Omega$  разделена «внутренней контактной границей»  $\bar{S} = \{r_1 = \xi, 0 \leq r_2 \leq l_2\}$ ,  $0 < \xi < l_1$ , на подобласти  $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < r_1 < \xi, 0 < r_2 < l_2\}$  и  $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < r_1 < l_1, 0 < r_2 < l_2\}$  с границами  $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$  и  $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$ . Так что область  $\Omega$  есть объединение областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  и внутренних точек «контактной» границы  $\bar{S}$  подобластей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , а  $\partial\Omega$  — внешняя граница области  $\Omega$ . Далее через  $\bar{\Gamma}_k$  будем обозначать границы областей  $\Omega_k$  без  $S$ ,  $k = 1, 2$ . Так что  $\partial\Omega_k = \bar{\Gamma}_k \cup S$ , где части  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, 2$ , — открытые непустые подмножества в  $\partial\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ ;  $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$ . Через  $n_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$  будем обозначать внешнюю нормаль к границе  $\partial\Omega_\alpha$  области  $\Omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Пусть далее  $\vec{n} = \vec{n}(x)$  — единичная нормаль к  $S$  в какой-либо ее точке  $x \in S$ , ориентированная, например, таким образом, что нормаль  $\vec{n}$  является внешней нормалью к  $S$  по отношению к области  $\Omega_1$ . Ниже, при постановке краевых задач для состояний процессов управления,  $S$  — это прямая, вдоль которой будут разрывны коэффициенты и решения краевых задач, обладающие в областях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  некоторой гладкостью.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его в области  $\Omega$  следующей задачей Дирихле для полулинейного несамосопряженного уравнения эллиптического типа с разрывными коэффициентами и решениями. Требуется найти

функцию  $u$ , определенную на  $\bar{\Omega}$ , вида  $u(r) = u_1(r)$ ,  $r \in \bar{\Omega}_1$ ,  $u(r) = u_2(r)$ ,  $r \in \bar{\Omega}_2$ , где компоненты  $u_p$ ,  $p = 1, 2$ , удовлетворяют условиям:

1) функции  $u_p$ ,  $p = 1, 2$ , определенные на  $\bar{\Omega}_p = \Omega_p \cup \partial\Omega_p$ , удовлетворяют в  $\Omega_p$ ,  $p = 1, 2$ , уравнениям

$$L_p u_p = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left( k_p(r) \frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 \vartheta_p^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_p}{\partial r_\alpha} + d_p(r) q_p(u_p) = f_p(r), \quad (2.1)$$

а на границах  $\partial\Omega_1 \setminus S = \bar{\Gamma}_1$ ,  $\partial\Omega_2 \setminus S = \bar{\Gamma}_2$  условиям

$$u_1(r) = 0, \quad r \in \bar{\Gamma}_1, \quad u_2(r) = 0, \quad r \in \bar{\Gamma}_2; \quad (2.2)$$

2) искомые функции  $u_p$ ,  $p = 1, 2$ , удовлетворяют также дополнительным условиям на  $S$  – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения  $u_1$  и  $u_2$  вдоль контактной границы  $S$  областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  следующего вида:

$$G(x) = k_1(r) \frac{\partial u_1}{\partial r_1} = k_2(r) \frac{\partial u_2}{\partial r_1} = \theta(r_2) (u_2(r) - u_1(r)), \quad r \in S. \quad (2.3)$$

Если ввести функции вида  $u(r) = \begin{cases} u_1(r), & r \in \Omega_1; \\ u_2(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \quad q(\xi) = \begin{cases} q_1(\xi_1), & \xi_1 \in \mathbb{R}; \\ q_2(\xi_2), & \xi_2 \in \mathbb{R}, \end{cases}$

$$k(r), d(r), f(r), \vartheta^{(\alpha)}(r) = \begin{cases} k_1(r), q_1(r), f_1(x), \vartheta_1^{(\alpha)}(r), & r \in \Omega_1; \\ k_2(r), q_2(r), f_2(x), \vartheta_2^{(\alpha)}(r), & r \in \Omega_2, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2. \quad (2.4)$$

то задачу (2.1)–(2.3) можно переписать в более компактном виде. Требуется найти функцию  $u(r)$ , определенную на  $\bar{\Omega}$ , удовлетворяющую в каждой из областей  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  уравнению

$$Lu(r) = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \left( k(r) \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} \right) + \sum_{\alpha=1}^2 \vartheta^{(\alpha)} \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} + d(r) q(u) = f(r), \quad r = (r_1, r_2) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (2.5)$$

и условиям

$$u(r) = 0, \quad r \in \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2, \\ \left[ k(r) \frac{\partial u}{\partial r_1} \right] = 0, \quad G(r) = \left( k_1(r) \frac{\partial u_1}{\partial r_1} \right) = \theta(r_2) [u], \quad x \in S. \quad (2.6)$$

Здесь  $[u] = u_2(r) - u_1(r) = u^+(r) - u^-(r)$  – скачок функции  $u(r)$  на  $S$ ;  $f(x)$  – известная функция, определяемая по разному в  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ , терпящая разрыв первого рода на  $S$ ;  $q_\alpha(\xi_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , – заданные функции, определенные для  $\xi_\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ;  $\theta(r_2)$  – заданная функция на  $S$ ;  $g = (g_1, g_2, g_3, g_4, g_5, g_6, g_7, g_8) = (k_1, k_2, \vartheta_1^{(1)}, \vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}, d_1, d_2)$  – управление. Относительно заданных функций будем предполагать:  $f(r) \in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$ ,  $\theta(r_2) \in L_\infty(S)$ ;  $0 < \theta_0 \leq \theta(r_2) \leq \bar{\theta}_0$ ,  $r_2 \in S$ ,  $\theta_0, \bar{\theta}_0$ , – константы; функции  $q_\alpha(\xi_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , определены на  $\mathbb{R}$  со значениями в  $\mathbb{R}$ , причем  $q_\alpha(0) = 0$ ,  $0 \leq q_0 \leq \frac{q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \leq L_q < \infty$  для всех  $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ ,  $\xi_1 \neq \xi_2$ ,  $L_q = \text{const}$ .

Введем множество допустимых управлений

$$U = \prod_{k=1}^8 U_k \subset W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2) \times (L_\infty(\Omega_1))^2 \times (L_\infty(\Omega_2))^2 \times L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2) = B, \quad (2.7)$$



$$\begin{aligned}
g_p \in U_p = \left\{ g_p = k_p \in W_\infty^1(\Omega_p) : 0 < \nu_p \leq g_p(r) \leq \bar{\nu}_p, \left| \frac{\partial g_p(r)}{\partial r_1} \right| \leq R_p^{(1)}, \left| \frac{\partial g_p(r)}{\partial r_2} \right| \leq R_p^{(2)} \text{ п. в. на } \right. \\
\left. \Omega_p \right\}, p = 1, 2, \quad g_\beta \in U_\beta = \left\{ g_\beta = \vartheta_1^{(\beta-2)} \in L_\infty(\Omega_1) = B_\beta : \zeta_\beta \leq g_\beta(r) \leq \bar{\zeta}_\beta, \text{ п. в. на } \Omega_1 \right\}, \\
g_\alpha \in U_\alpha = \left\{ g_\alpha = \vartheta_2^{(\alpha-4)} \in L_\infty(\Omega_2) = B_\alpha : \zeta_\alpha \leq g_\alpha(r) \leq \bar{\zeta}_\alpha, \text{ п. в. на } \Omega_2 \right\}, \alpha = 5, 6, \beta = 3, 4, \\
g_m \in U_m = \left\{ g_m = d_{m-6} \in L_\infty(\Omega_{m-6}) : \zeta_m \leq g_m(r) \leq \bar{\zeta}_m, \text{ п. в. на } \Omega_{m-6} \right\}, m = 7, 8.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

где  $B_p = W_\infty^1(\Omega_p)$ ,  $p = 1, 2$ , – пространства управлений  $g_p = k_p$ ,  $p = 1, 2$ , заданных на  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$  соответственно;  $B_p = L_\infty(\Omega_1)$ ,  $p = 3, 4$ , – пространства управлений  $g_{p+2} = \vartheta_1^{(p)}$ ,  $p = 1, 2$ , заданных на  $\Omega_1$ ;  $B_p = L_\infty(\Omega_1)$ ,  $p = 5, 6$ , – пространства управлений  $g_{p+4} = \vartheta_2^{(p)}$ ,  $p = 1, 2$ , заданных на  $\Omega_2$ ;  $\nu_\alpha, \bar{\nu}_\alpha, R_1^{(\alpha)}, R_2^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $\zeta_p, \bar{\zeta}_p$ ,  $p = \bar{3}, \bar{8}$ , – заданные числа. Предполагается выполнение следующих условий:  $-m_1 \leq \zeta_3 \leq \bar{\zeta}_3 \leq m_1$ ,  $-p_1 \leq \zeta_4 \leq \bar{\zeta}_4 \leq p_1$ ,  $-m_2 \leq \zeta_5 \leq \bar{\zeta}_5 \leq m_2$ ,  $-p_2 \leq \zeta_6 \leq \bar{\zeta}_6 \leq p_2$ ,  $m_\alpha, p_\alpha = \text{const} > 0$ ,

$$\delta_\alpha = \max_{\substack{\epsilon_1, \epsilon_2 > 0 \\ \epsilon_1 + \epsilon_2 \leq \nu_\alpha}} \left\{ \frac{\nu_\alpha - (\epsilon_1 + \epsilon_2)}{C_{\Omega_\alpha}^2} + \lambda_\alpha - \frac{m_\alpha^2}{4\epsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\epsilon_2} \right\} > 0, \quad \alpha = 1, 2, \tag{2.9}$$

$C_{\Omega_1}^2 = \left( \frac{8}{\xi^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}$ ,  $C_{\Omega_2}^2 = \left( \frac{8}{(l_1 - \xi)^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}$ ; здесь  $\lambda_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , любая из следующих констант: 1)  $\lambda_\alpha = q_0 \zeta_{\alpha+6}$ ,  $\zeta_{\alpha+6} \geq 0$ ; 2)  $\lambda_\alpha = \zeta_{\alpha+6}$ ,  $\zeta_{\alpha+6}$  – любая константа, когда  $q_\alpha(u_\alpha) = u_\alpha$ ; 3)  $\lambda_\alpha = -L_q \zeta_0$ , где  $\zeta_0 = \max \{ |\zeta_7|, |\zeta_8|, |\bar{\zeta}_7|, |\bar{\zeta}_8| \}$ .

Зададим целевой функционал  $J : U \rightarrow \mathbb{R}^1$  в виде

$$g \rightarrow J(g) = \int_{\Omega_1} |u(r_1, r_2; g) - u_0^{(1)}(r)|^2 d\Omega_1, \tag{2.10}$$

где  $u_0^{(1)}(r) \in W_2^1(\Omega_1)$  – заданная функция.

Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление  $g_* \in U$ , которое минимизирует на множестве  $U \subset B$  целевой функционал  $J(g)$ , точнее, на решениях  $u(g)$  задачи (2.1)–(2.3), отвечающих всем допустимым управлениям  $g \in U$ , требуется минимизировать целевой функционал (2.10).

Для полноты изложения опишем некоторые введенные ранее (см. [5–6]) пространства. Рассмотрим  $V(\Omega^{(1,2)})$ ,  $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$  пар функций  $u = (u_1, u_2)$ :  $V \equiv V(\Omega^{(1,2)}) = \{ u = (u_1, u_2) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2) \}$ , где  $W_2^1(\Omega_k)$ ,  $k = 1, 2$  – Соболевские пространства функций, заданных в подобластях  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ , с границами  $\partial\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ , соответственно и нормами [6]:  $\|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)}^2 = \int_{\Omega_k} \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 + u_k^2 \right] d\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ . Снабженное скалярным

произведением и нормой  $(u, v)_V = \sum_{k=1}^2 (u_k, v_k)_{W_2^1(\Omega_k)}$ ,  $\|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^2 \|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)}^2$ ,  $V = V(\Omega^{(1,2)})$  является гильбертовым пространством.

Пусть  $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$ . Через  $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$  обозначим замкнутое подпространство пространства  $W_2^1(\Omega_k)$ , плотным множеством в котором является множество всех функций из  $C^1(\bar{\Omega}_k)$ , равных нулю вблизи  $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ , – какого-либо участка  $\overset{\circ}{\Gamma}_k$  границы  $\partial\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ . Рассмотрим также нормированное пространство  $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$  пар

функций  $u = (u_1, u_2): \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \{u(r) = (u_1(r), u_2(r)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\}$ ,  

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})}^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\partial u_k}{\partial r_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \int_S [u]^2 dS.$$

Под решением прямой задачи (2.1)–(2.3) при фиксированном управлении  $g \in U$  понимается функция  $u(g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ , удовлетворяющая для всех  $v \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$  равенству

$$Q(u, v) = \int_{\Omega} \left[ \sum_{\alpha=1}^2 k \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} \frac{\partial v}{\partial r_\alpha} + \sum_{\alpha=1}^2 \vartheta^{(\alpha)} \frac{\partial u}{\partial r_\alpha} v + d q(u) v \right] d\Omega_0 + \int_S \theta [u][v] dS = \int_{\Omega} f v d\Omega_0 = l(v). \quad (2.11)$$

Разрешимость задачи (2.1)–(2.3) в смысле ее определения (2.11) гарантирует

**Т е о р е м а 2.1** При любом  $g \in U$  существует единственное обобщенное решение  $u(g) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$  задачи (2.1)–(2.3), определяемое из интегрального равенства (2.11), причем

$$\|u(g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} \leq C_7 \sum_{k=1}^2 \|f_k\|_{L_2(\Omega_k)} = \bar{C}_7, \text{ где } C_7 = \text{const} > 0. \quad (2.12)$$

Доказательство теоремы 2.1 опирается на теорию монотонных операторов [12], при этом существенно используются введенные выше Гильбертовы пространства  $V(\Omega^{(1,2)})$ ,  $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$  и введенные в них эквивалентные нормы.

Отметим, что оценки точности аппроксимаций в дальнейшем установлены при предположении, что обобщенное решение поставленной краевой задачи из  $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$  принадлежит также классу  $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$  (т. е. при предположении, аналогичном сделанному в [10, с.6], при исследовании задач с условиями неидеального контакта), точнее, принадлежит пространству  $\hat{\overset{\circ}{V}}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) \cap \{u = (u_1, u_2) \in W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)\}$ , и справедлива оценка

$$\sup_{g \in U} \sum \|u_k(g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \leq M, \quad M = \text{const} > 0.$$

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.10), (2.1)–(2.9).

**Л е м м а 2.1** Пусть  $U$  – множество допустимых управлений в экстремальной задаче (2.10), (2.1)–(2.9). Пусть далее  $\{g^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset U$  – произвольная последовательность, а  $u^{(n)} \equiv u(r, g^{(n)})$  – решение задачи (2.1)–(2.3) при  $g = g^{(n)}$ . Тогда из условия  $g^{(n)} \rightarrow \bar{g}$  слабо в  $H$  следует, что  $u^{(n)}(r) = u(r, g^{(n)}) \rightarrow u(r, \bar{g}) = \bar{u}(r)$  слабо в  $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$ , где  $\bar{u}(r) = u(r, \bar{g})$  – решение задачи (2.1)–(2.3) при  $g = \bar{g}$ , т. е. отображение  $g \rightarrow u(r, g)$  является слабо непрерывным из  $U$  в  $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$ , переводящим слабую сходимост в  $H$  – пространстве управлений на множестве  $U$  – в слабую сходимост в  $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$  – пространстве состояний.

**З а м е ч а н и е 2.1** Отображение  $g \rightarrow u(r, g)$  – усиленно непрерывное из  $U$  в  $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}$  в том смысле, что оно переводит слабую сходимост в  $H$  на множестве  $U$  в сильную сходимост в  $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}$ .

Доказательство леммы 2.1 и замечания 2.1 проводится по методике из [1].

**Т е о р е м а 2.2** *Существует по крайней мере одно оптимальное управление  $g_* \in U$  задачи (2.10), (2.1)–(2.9), т.е.  $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$ ,  $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$ . Множество точек минимума  $U_*$  целевого функционала  $J(g)$  в экстремальной задаче (2.10), (2.1)–(2.9) слабо компактно в  $H = W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2) \times (L_2(\Omega_1))^2 \times (L_2(\Omega_2))^2 \times L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2)$ . Любая минимизирующая последовательность  $\{g^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset U$  функционала  $J(g)$  слабо сходится в  $H$  к множеству  $U_*$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Нетрудно видеть, что множество  $U$  является выпуклым замкнутым и ограниченным в  $H$ , а следовательно,  $U$  слабо компактно в  $H$ . Далее, рассмотрим функционал цели  $g \rightarrow J(g)$ , определенный формулой (2.10). В силу замечания 2.1 из условия  $g^{(n)} \rightarrow \bar{g}$  слабо в  $H$  следует, что  $J(g^{(n)}) \rightarrow J(\bar{g})$  при  $n \rightarrow \infty$ , т. е. функционал  $g \rightarrow J(g)$  является слабо непрерывным в  $H$  на множестве  $U$ , а следовательно, и слабо полунепрерывным снизу на  $U$ . Кроме того, как было отмечено выше, множество  $U$  является слабо компактным в  $H$ . Отсюда, применяя результат из [1, с.505] (см. теорему 4), получим все утверждения теоремы 2.2.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

### 3. Постановка сеточной задачи оптимизации и ее корректность

В связи с численным решением задач оптимального управления существенный интерес представляет вопрос об аппроксимации бесконечномерных задач оптимизации (2.10), (2.1)–(2.9) последовательностью конечномерных задач оптимального управления. Ниже построим и изучим аппроксимации задач на основе метода сеток (см. [9], [15]) и исследуем сходимость этих аппроксимаций при неограниченном измельчении шага  $h$  сетки дискретизации. Для аппроксимации задачи (2.1)–(2.9) нам понадобятся некоторые сетки на  $[0, l_\alpha]$ ,  $\alpha = 1, 2$ , и в  $\bar{\Omega}$ .

#### 3.1. Некоторые обозначения

Введем в рассмотрение одномерные неравномерные сетки по  $x_1$  и  $x_2$ :  $\hat{\omega}_\alpha = \{x_\alpha^{(i_\alpha)} \in [0, l_\alpha] : i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, x_\alpha^{(0)} = 0, x_\alpha^{(N_\alpha)} = l_\alpha, h_{\alpha i_\alpha} = x_\alpha^{(i_\alpha)} - x_\alpha^{(i_\alpha-1)}\}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , также введем неравномерную сетку по  $x_1$  и  $x_2$  в области  $\bar{\Omega} = \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ :  $\hat{\omega} = \hat{\omega}_1 \times \hat{\omega}_2$ . Очевидно, что всегда можно построить сетку  $\hat{\omega}_1$  на  $[0, l_1]$  так, чтобы точка  $x_1 = \xi$  была ее узлом. При решении практических задач целесообразно выбирать в областях  $\bar{\Omega}_1$  и  $\bar{\Omega}_2$  равномерные шаги  $h_1^{(1)}$  и  $h_1^{(2)}$  соответственно и, исходя из положения точки  $x_1 = \xi$ , находить число узлов из предположения  $h_1^{(1)} \approx h_1^{(2)}$ . В дальнейшем для наглядности исследования во всей области  $\bar{\Omega}$  сетку по  $x_1$  и  $x_2$  будем считать равномерной, полагая  $x_1^{(i_1)} - x_1^{(i_1-1)} = h_1$ ,  $i_1 = \overline{1, N_1}$  и  $x_2^{(i_2)} - x_2^{(i_2-1)} = h_2$ ,  $i_2 = \overline{1, N_2}$ . Значение  $x_1$  в точке  $x_1 = \xi$  обозначим через  $x_\xi$ , а соответствующий номер узла обозначим через  $N_{1\xi}$ ,  $1 < N_{1\xi} < N_1 - 1$ . По аналогии с работами [5–6] введем сетки узлов:  $\bar{\omega}_1^{(1)} = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [0, \xi] : i_1 = \overline{0, N_{1\xi}}, N_{1\xi} h_1 = \xi\}$ ,  $\bar{\omega}_1^{(2)} = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1 \in [\xi, l_1] : i_1 = \overline{N_{1\xi}, N_1}, N_{1\xi} h_1 = l_1\}$ ,  $\omega_1^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \setminus \{x_1 = 0, x_1 = \xi\}$ ,  $\omega_1^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \setminus \{x_1 = \xi, x_1 = l_1\}$ ;  $\bar{\omega}_2 = \{x_2^{(i_2)} = i_2 h_2 \in [0, l_2] : i_2 = \overline{0, N_2}, N_2 h_2 = l_2\}$ ,  $\omega_2 = \bar{\omega}_2 \setminus \{x_2 = 0, x_2 = l_2\}$ ;  $\bar{\omega}_1 = \bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_1^{(2)}$ ;  $\omega_1 = \omega_1^{(1)} \cup \omega_1^{(2)}$ ;  $\bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2$ ;  $\bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{\omega}_2$ ;  $\omega^{(1)} = \omega_1^{(1)} \times \omega_2$ ;  $\omega^{(2)} = \omega_1^{(2)} \times \omega_2$ ;  $\bar{\omega} \equiv \bar{\omega}^{(1,2)} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = (\bar{\omega}_1^{(1)} \cup \bar{\omega}_1^{(2)}) \times \bar{\omega}_2 = \{x_1^{(i_1)} = i_1 h_1, i_1 = \overline{0, N_1}, N_{1\xi} h_1 = \xi, (N_1 - N_{1\xi}) h_1 = l_1 - \xi, 1 < N_{1\xi} < N_1 - 1\} \times \bar{\omega}_2$ ,  $\omega \equiv \omega^{(1,2)} = \omega^{(1)} \times \omega^{(2)}$ ;  $\omega_1^{(1)+} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cap (0, \xi]$ ,  $\omega_1^{(1)-} = \bar{\omega}_1^{(1)} \cap [0, \xi)$ ,  $\omega_1^{(2)-} = \bar{\omega}_1^{(2)} \cap [\xi, l_1)$ ,  $\omega_1^{(1)(+1)} = \omega_1^{(1)+} \times \bar{\omega}_2$ ;  $\gamma_S = \{x_1 = \xi, x_2 = h_2, 2h_2, \dots, (N_2 - 1)h_2\} = \{x_1 = \xi, x_2^{(i_2)} = i_2 h_2, i_2 = \overline{1, N_2 - 1}\}$ ;  $\gamma^{(k)} = \partial \omega^{(k)} \setminus \gamma_S$ ;

$\omega_1^{(1)+} \times \omega_2 = \omega^{(1)} \cup \gamma_S = \bar{\omega}^{(1)} \setminus \gamma^{(1)}$ ;  $\partial\omega^{(k)} = \bar{\omega}^{(k)} \setminus \omega^{(k)}$  – множество граничных узлов сетки  $\bar{\omega}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ . Также нам потребуются скалярные произведения, нормы и полунормы сеточных функций, заданных на различных сетках. Множество сеточных функций  $y_1(x)$ , заданных на сетке  $\bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2 \subset \bar{\Omega}_1 \equiv \bar{\Omega}^-$ , обозначим через  $H_h^{(1)}(\bar{\omega}^{(1)})$ , а множество сеточных функций  $y_2(x)$ , заданных на сетке  $\bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{\omega}_2 \subset \bar{\Omega}_2 \equiv \bar{\Omega}^+$ , обозначим через  $H_h^{(2)}(\bar{\omega}^{(2)})$ . Множество  $H_h^{(k)}(\bar{\omega}^{(k)})$ ,  $k = 1, 2$ , снабженное скалярным произведением и нормой  $(y_k, \nu_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})} = \sum_{\bar{\omega}^{(k)}} y_k(x) \nu_k(x) h_1 h_2$ ,  $\|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})} = (y_k, y_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}^{1/2}$ , обозначим через  $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$ ,  $k = 1, 2$ . Здесь  $h_1 = h_1(x_1)$  – средний шаг сеток  $\bar{\omega}_1^{(1)}$  и  $\bar{\omega}_1^{(2)}$ , а  $h_2 = h_2(x_2)$  – средний шаг сетки  $\bar{\omega}_2$  [3]. Через  $W_2^1(\bar{\omega}^{(1)})$  и  $W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})$  обозначим пространства сеточных функций, заданных на сетках  $\bar{\omega}^{(1)}$  и  $\bar{\omega}^{(2)}$  соответственно, со скалярными произведениями и нормами:

$$(y_k, \nu_k)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})} = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \bar{\omega}_2} y_{k\bar{x}_1} \nu_{k\bar{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y_{k\bar{x}_2} \nu_{k\bar{x}_2} h_1 h_2 + (y_k, \nu_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})},$$

$$\|y_k\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}^2 = \|\nabla y_k\|^2 + \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}^2, \quad k = 1, 2,$$

где  $\|\nabla y_k\|^2 = \sum_{\omega_1^{(k)+} \times \bar{\omega}_2} y_{k\bar{x}_1}^2 h_1 h_2 + \sum_{\bar{\omega}_1^{(k)} \times \omega_2^+} y_{k\bar{x}_2}^2 h_1 h_2$ ,  $k = 1, 2$ .

Введем в рассмотрение пространство  $V(\bar{\omega}^{(1,2)})$  пар сеточных функций  $y = (y_1, y_2)$ , определяемое соотношением  $V(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)})\}$ . Снабженное скалярным произведением и нормой  $(y, \nu)_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})} = \sum_{k=1}^2 (y_k, \nu_k)_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}$ ,  $\|y\|_{V(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 = \sum_{k=1}^2 \|y_k\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})}^2$ ,  $V(\bar{\omega}^{(1,2)})$ , является гильбертовым пространством. Определим сеточные аналоги скалярных произведений следов сеточных функций  $y_k(x)$  и  $\nu_k(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}^{(k)}$ , на границах  $\partial\omega^{(k)}$  сеток  $\bar{\omega}^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , по формулам

$$(y_k, \nu_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum_{x \in \partial\omega^{(k)}} y_k(x) \nu_k(x) \tau_k(x), \quad k = 1, 2,$$

и сеточные аналоги норм  $L_2(\partial\omega^{(k)})$ , порождаемые этими скалярными произведениями:

$$\|y_k\|_{L_2(\partial\omega^{(k)})}^2 = (y_k, y_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum_{\partial\omega^{(k)}} y_k^2(x) \tau_k(x), \quad k = 1, 2,$$

$$\tau_1(x) = \begin{cases} h_1(x_1), & x_1 \in \omega_1^{(1)}, \quad x_2 = 0, l_2; \\ h_2(x_2), & x_2 \in \omega_2, \quad x_1 = 0, \xi; \\ \frac{h_1(x_1) + h_2(x_2)}{2}, & x \in \gamma^{(1)}, \end{cases} \quad \tau_2(x) = \begin{cases} h_1(x_1), & x_1 \in \omega_1^{(1)}, \quad x_2 = 0, l_2; \\ h_2(x_2), & x_2 \in \omega_2, \quad x_1 = \xi, l_1; \\ \frac{h_1(x_1) + h_2(x_2)}{2}, & x \in \gamma^{(2)}, \end{cases}$$

а  $\gamma^{(k)}$  – множество угловых точек прямоугольника  $\Omega_k$ ,  $k = 1, 2$ . Пусть теперь  $\gamma^{\circ(k)} = \partial\omega^{(k)} \cap \bar{\Gamma}_k \equiv \gamma^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \setminus \gamma_s$  – подмножество граничных узлов  $\partial\omega^{(k)}$  сетки  $\bar{\omega}^{(k)} \subset \bar{\Omega}_k$ ,  $k = 1, 2$ . Через  $L_2(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})$  обозначим нормированное подпространство пространства сеточных функций  $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$ , обращающихся в нуль на  $\gamma^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , с нормами

$$\|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})}^2 = \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k^2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x_2 \in \omega_2} y_k^2(\xi, x_2) h_1 h_2, \quad k = 1, 2,$$

индуцированными скалярными произведениями  $(y_k, v_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})} = \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k(x) v_k(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_S} y_k(x) v_k(x) h_1 h_2$ ,  $k = 1, 2$ . Нетрудно видеть, что  $(y_1, v_1)_{L_2(\bar{\omega}^{(1)}; \gamma^{(1)})} = (y_1, v_1)_{L_2(\omega_1^{(1)+} \times \omega_2)}$ ,  $(y_2, v_2)_{L_2(\bar{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)})} = (y_2, v_2)_{L_2(\omega_2^{(2)-} \times \omega_2)}$ . Через  $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})$  обозначим подпространство пространства сеточных функций  $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})$ , обращающихся в нуль на  $\gamma^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ .

Введем в рассмотрение пространства  $\mathring{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  и  $\mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  пар сеточных функций  $y$ :

$$\begin{aligned} \mathring{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) &= \{y = (y_1, y_2) \in L_2(\bar{\omega}^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times L_2(\bar{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)})\}, \\ \mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) &= \{y = (y_1, y_2) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}; \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}; \gamma^{(2)})\}, \end{aligned}$$

с нормами  $\|y\|_{\mathring{H}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 = \sum_{k=1}^2 \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}; \gamma^{(k)})}^2$ ,  $\|y\|_{\mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 = \|\nabla y\|^2 + \|y\|_{L_2(\gamma_S)}^2$ .

Через  $e_1^{(1)}(x_1)$  будем обозначать элементарные ячейки отрезка  $[0, \xi]$ :  $e_1^{(1)}(x_1) = \{r_1 : x_1 - 0.5h_1 \leq r_1 \leq x_1 + 0.5h_1\}$ ,  $x_1 \in \omega_1^{(1)} \subset [0, \xi]$ ,  $e_1^{(1)}(0) = \{r_1 : 0 \leq r_1 \leq 0.5h_1\}$ ,  $e_1^{(1)}(\xi) = \{r_1 : \xi - 0.5h_1 \leq r_1 \leq \xi\}$ ; а через  $e_1^{(2)}(x_1)$  – элементарные ячейки отрезка  $[\xi, l_1]$ :  $e_1^{(2)}(x_1) = \{r_1 : x_1 - 0.5h_1 \leq r_1 \leq x_1 + 0.5h_1\}$ ,  $x_1 \in \omega_1^{(2)} \subset [\xi, l_1]$ ,  $e_1^{(2)}(\xi) = \{r_1 : \xi \leq r_1 \leq \xi + 0.5h_1\}$ ,  $e_1^{(2)}(l_1) = \{r_1 : l_1 - 0.5h_1 \leq r_1 \leq l_1\}$ . Введем также элементарные ячейки отрезка  $[0, l_2]$ :  $e_2(x_2) = \{r_2 : x_2 - 0.5h_2 \leq r_2 \leq x_2 + 0.5h_2\}$ ,  $x_2 \in \omega_2 \subset [0, l_2]$ ,  $e_2(0) = \{r_2 : 0 \leq r_2 \leq 0.5h_2\}$ ,  $e_2(l_2) = \{r_2 : l_2 - 0.5h_2 \leq r_2 \leq l_2\}$ . Далее через  $e^{(1)}(x) \equiv e^{(1)}(x_1, x_2) = e_1^{(1)}(x_1) \times e_2(x_2)$ ,  $x \in \bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2 \subset \bar{\Omega}_1$ , будем обозначать элементарные ячейки области  $\bar{\Omega}_1$ , а через  $e^{(2)}(x) \equiv e^{(2)}(x_1, x_2) = e_1^{(2)}(x_1) \times e_2(x_2)$ ,  $x \in \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{\omega}_2 \subset \bar{\Omega}_2$ , – элементарные ячейки области  $\bar{\Omega}_2$ . Пусть  $v(x) = v_1(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}_1$ . Определим для функций  $v_1(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}_1$  усредняющие операторы по Стеклову  $S^{x_\alpha}$  по переменным  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ :

$$\begin{aligned} S^{x_1} v_1(x) &= \frac{1}{h_1} \int_{e_1^{(1)}(x_1)} v_1(r_1, x_2) dr_1, \quad x_1 \in \bar{\omega}_1^{(1)}, \quad h_1 = h_1(x_1) = \begin{cases} h_1, x_1 \in \omega_1^{(1)}, \\ 0.5h_1, x_1 = 0, \xi, \end{cases} \\ S^{x_2} v_1(x) &= \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} v_1(x_1, r_2) dr_2, \quad x_2 \in \bar{\omega}_2, \quad h_2 = h_2(x_2) = \begin{cases} h_2, x_2 \in \omega_2, \\ 0.5h_2, x_2 = 0, l_2. \end{cases} \end{aligned}$$

С помощью одномерных операторов  $S^{x_\alpha}$ , действующих по направлению  $x_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , определим усредняющий оператор  $S^x = S^{x_1} S^{x_2}$  как произведение одномерных усредняющих операторов. Аналогично определяются усредняющие операторы по Стеклову для функций  $v(x) = v_2(x)$ ,  $x \in \bar{\Omega}_2$ . В дальнейшем через  $H_h^{(k)}(\omega^{(k)} \cup \gamma_S) \equiv L_2(\omega^{(k)} \cup \gamma_S)$  будем обозначать пространство сеточных функций  $v_{kh}(x)$ ,  $x \in \omega^{(k)} \cup \gamma_S$ , заданных на сетке  $\omega^{(k)} \cup \gamma_S$ , со скалярным произведением и нормой:

$$\begin{aligned} (v_{kh}, \tilde{v}_{kh})_{H_h^{(k)}(\omega^{(k)} \cup \gamma_S)} &= \sum_{x \in \omega^{(k)}} v_{kh}(x) \tilde{v}_{kh}(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in \gamma_S} v_{kh}(x) \tilde{v}_{kh}(x) h_1 h_2, \\ \|v_{kh}(x)\|_{H_h^{(k)}(\omega^{(k)} \cup \gamma_S)}^2 &= (v_{kh}, v_{kh})_{H_h^{(k)}(\omega^{(k)} \cup \gamma_S)}, \quad k = 1, 2. \end{aligned}$$

### 3.2. Постановка сеточной задачи управления, ее корректность

Задачам оптимального управления (2.10), (2.1)–(2.9) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \bar{\omega}^{(1)}} |y(x; \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}|^2 h_1 h_2 = \|y(x; \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}\|_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})}^2, \quad (3.13)$$

при условиях, что сеточная функция  $y \equiv y(\Phi_h) = (y_1(\Phi_h), y_2(\Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ , называемая решением разностной краевой задачи для задачи (2.1)–(2.3), удовлетворяет для любой сеточной функции  $v = (v_1, v_2) \in \overset{\circ}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  сумматорному тождеству

$$\begin{aligned} Q_h(y, v) = & \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \sum_{\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2} b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x)) y_{\alpha \bar{x}_1} v_{\alpha \bar{x}_1} h_1 h_2 + \sum_{\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+} \tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x)) y_{\alpha \bar{x}_1} v_{\alpha \bar{x}_1} h_1 h_2 + \right. \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} \tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(\xi, x_2)) y_{\alpha \bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{\alpha \bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} \Phi_{\alpha+2, h}(x) y_{1x_\alpha}^0(x) v_1(x) h_1 h_2 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \Phi_{\alpha+2, h}(\xi, x_2) y_{1x_\alpha}^0(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 + \sum_{\omega^{(2)}} \Phi_{\alpha+4, h}(x) y_{2x_\alpha}^0(x) v_2(x) h_1 h_2 + \\ & + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \Phi_{\alpha+4, h}(\xi, x_2) y_{2x_\alpha}^0(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 + \sum_{\omega^{(\alpha)}} \Phi_{\alpha+6, h}(x) q_\alpha(y_\alpha(x)) v_\alpha(x) h_1 h_2 + \\ & \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \Phi_{\alpha+6, h}(\xi, x_2) q_\alpha(y_\alpha(\xi, x_2)) v_\alpha(\xi, x_2) h_1 h_2 \right\} + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [y(\xi, x_2)] [v(\xi, x_2)] h_2 = \\ & = \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \sum_{\omega^{(\alpha)}} f_{\alpha h}(x) v_\alpha(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{\alpha h}(\xi, x_2) v_\alpha(\xi, x_2) h_1 h_2 \right\} = l_h(v), \end{aligned} \quad (3.14)$$

а сеточные управления  $\Phi_h$  принадлежат множеству допустимых сеточных управлений

$$\begin{aligned} U_h = \prod_{k=1}^8 U_{kh} \subset W_\infty^1(\bar{\omega}^{(1)}) \times W_\infty^1(\bar{\omega}^{(2)}) \times (L_\infty(\omega^{(1)} \cup \gamma_S))^2 \times (L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S))^2 \times L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \times \\ \times L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S) = B_h, \quad \Phi_{ph}(x) \in U_{ph} = \{ \Phi_{ph}(x) \in W_\infty^1(\bar{\omega}^{(p)}) = B_{ph} : 0 < \nu_p \leq \Phi_{ph}(x) \leq \bar{\nu}_p, \\ x \in \bar{\omega}^{(p)}, |\Phi_{phx_1}(x)| \leq R_p^{(1)}, x \in \omega_1^{(p)-} \times \bar{\omega}_2, |\Phi_{phx_2}(x)| \leq R_p^{(2)}, x \in \omega_1^{(p)} \times \bar{\omega}_2^-, \} , p = 1, 2, \\ \Phi_{\beta h} \in U_{\beta h} = \{ \Phi_{\beta h} \in L_\infty(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) = B_{\beta h} : \zeta_\beta \leq \Phi_{\beta h}(x) \leq \bar{\zeta}_\beta, x \in \omega^{(1)} \cup \gamma_S \}, \beta = 3, 4, 7, \\ \Phi_{\alpha h} \in U_{\alpha h} = \{ \Phi_{\alpha h} \in L_\infty(\omega^{(2)} \cup \gamma_S) = B_{\alpha h} : \zeta_\alpha \leq \Phi_{\alpha h}(x) \leq \bar{\zeta}_\alpha, x \in \omega^{(2)} \cup \gamma_S \}, \alpha = 5, 6, 8, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $B_{1h} = W_\infty^1(\bar{\omega}^{(1)})$ ,  $B_{2h} = W_\infty^1(\bar{\omega}^{(2)})$  – пространства сеточных управлений  $\Phi_{1h}(x)$ ,  $\Phi_{2h}(x)$ , заданных на сетках  $\bar{\omega}^{(1)}$ ,  $\bar{\omega}^{(2)}$  с нормами

$$\begin{aligned} \|\Phi_{1h}(x)\|_{W_\infty^1(\bar{\omega}^{(1)})} &= \max_{\bar{\omega}^{(1)}} |\Phi_{1h}(x)| + \max_{\omega_1^{(1)-} \times \bar{\omega}_2} |\Phi_{1hx_1}(x)| + \max_{\bar{\omega}_1^{(1)} \times \omega_2^-} |\Phi_{1hx_2}(x)|, \\ \|\Phi_{2h}(x)\|_{W_\infty^1(\bar{\omega}^{(2)})} &= \max_{\bar{\omega}^{(2)}} |\Phi_{2h}(x)| + \max_{\omega_1^{(2)-} \times \bar{\omega}_2} |\Phi_{2hx_1}(x)| + \max_{\bar{\omega}_1^{(2)} \times \omega_2^-} |\Phi_{2hx_2}(x)| \end{aligned} \quad (3.16)$$

соответственно. Здесь

$$\begin{aligned} b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1, x_2)) &= \frac{\Phi_{1h}^{(-12)}(x) + \Phi_{1h}^{(-11, -12)}(x) + \Phi_{1h}^{(+12)}(x) + \Phi_{1h}^{(-11, +12)}(x)}{4}, \\ b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1, x_2)) &= \frac{\Phi_{2h}^{(-12)}(x) + \Phi_{2h}^{(-11, -12)}(x) + \Phi_{2h}^{(+12)}(x) + \Phi_{2h}^{(-11, +12)}(x)}{4}, \\ \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(x_1, x_2)) &= \frac{\Phi_{1h}(x) + \Phi_{1h}^{(-12)}(x)}{2}, \quad \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1, x_2)) = \frac{\Phi_{2h}(x) + \Phi_{2h}^{(-12)}(x)}{2}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$\Phi_{1h}^{(-11,-12)}(x) = \Phi_{1h}(x_1 - h_1, x_2 - h_2)$ ,  $\Phi_{1h}^{(-12)}(x) = \Phi_{1h}(x_1, x_2 - h_2)$ ,  $\Phi_{1h}^{(-11,+12)}(x) = \Phi_{1h}(x_1 - h_1, x_2 + h_2)$ ,  $\Phi_{1h}^{(+12)}(x) = \Phi_{1h}(x_1, x_2 + h_2)$ ,  $\Phi_{2h}^{(-11,-12)}(x) = \Phi_{2h}(x_1 - h_1, x_2 - h_2)$ ,  $\Phi_{2h}^{(-12)}(x) = \Phi_{2h}(x_1, x_2 - h_2)$ ,  $\Phi_{2h}^{(-11,+12)}(x) = \Phi_{2h}(x_1 - h_1, x_2 + h_2)$ ,  $\Phi_{2h}^{(+12)}(x) = \Phi_{2h}(x_1, x_2 + h_2)$ , а  $\theta_h(x_2)$ ,  $f_{\alpha h}(x)$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $u_{0h}^{(1)}(x)$  – сеточные аппроксимации функций  $\theta(r_2)$ ,  $f_{\alpha}(r)$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $u_0^{(1)}(r)$ , определяемые через усреднения по Стеклову:

$$f_{\alpha h}(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(\alpha)}(x)} f_{\alpha}(r_1, r_2) dr_1 dr_2, x_2 \in \omega^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2,$$

$$f_{1h}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} f_1(r) dr_1 dr_2, \quad f_{2h}(\xi, x_2) = \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} f_2(r) dr_1 dr_2, x_2 \in \omega_2;$$

$$\theta_h(x_2) = \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} \theta(r_2) dr_2, x_2 \in \omega_2; \quad u_{0h}^{(1)}(x) = \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1, r_2) dr_1 dr_2, x \in \bar{\omega}^{(1)}.$$

Здесь усреднения берутся по элементарным ячейкам [5].

**Т е о р е м а 3.1** *Задача о нахождении решения разностной схемы (3.14) при любом фиксированном управлении  $\Phi_h \in U_h$  эквивалентна решению операторного уравнения  $A_h u = F_h$ , где  $A_h$  – разностный оператор, действующий из  $\mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  в  $\mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ , и сеточная функция  $F_h \in \mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  определяются равенствами  $(A_h u, v)_{\mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} = Q_h(u, v)$ ,  $(F_h, v)_{\mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} = l_h(v)$ ,  $\forall u, v \in \mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ ; задача (3.14) однозначно разрешима, причем справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{\mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} \leq M \sum_{k=1}^2 \|f_{kh}\|_{L_2(\omega^{(k)} \cup \gamma_S)} = \widehat{M}, \quad \forall \Phi_h \in U_h, \text{ где } M = \text{const} > 0. \quad (3.18)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Используя ограничения на входные данные краевой задачи (2.1)–(2.9), сеточные неравенства Коши-Буняковского и Гельдера, разностные аналоги теорем вложения, можно убедиться, что форма  $Q_h(u, v)$  при фиксированном  $u \in \mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  и  $\forall \Phi_h \in U_h$  определяет линейный ограниченный функционал в пространстве сеточных функций  $\mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  таким образом, что значение функционала  $A_h u$  на элементе  $\mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  определяется выражением  $(A_h u, v)_{\mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} = Q_h(u, v)$ ,  $\forall u, v \in \mathring{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ . Действительно,

$$\begin{aligned} |Q_h(u, v)| &\leq \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \bar{\nu}_{\alpha} \sum_{\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2} |y_{\alpha \bar{x}_1} v_{\alpha \bar{x}_1}| h_1 h_2 + \bar{\nu}_{\alpha} \sum_{\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^{+}} |y_{\alpha \bar{x}_2} v_{\alpha \bar{x}_2}| h_1 h_2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \bar{\nu}_{\alpha} \sum_{\omega_2^{+}} |y_{\alpha \bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{\alpha \bar{x}_2}(\xi, x_2)| h_1 h_2 + m_{\alpha} \sum_{\omega^{(\alpha)}} |y_{\alpha \bar{x}_1}^0(x) v_{\alpha}(x)| h_1 h_2 + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + p_\alpha \sum_{\omega^{(\alpha)}} |y_{\alpha x_2}^0(x) v_\alpha(x)| h_1 h_2 + \frac{1}{2} p_\alpha \sum_{\omega_2} |y_{\alpha x_2}^0(\xi, x_2) v_\alpha(\xi, x_2)| h_1 h_2 \Big\} + \\
& + \bar{\theta}_0 \sum_{\omega_2} |[y(\xi, x_2)] [v(\xi, x_2)]| h_2 \leq \sum_{\alpha=1}^2 \bar{\nu}_\alpha \left\{ \|y_{\alpha \bar{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2)} \|v_{\alpha \bar{x}_1}\|_{L_2(\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2)} + \right. \\
& + \|y_{\alpha \bar{x}_2}\|_{L_2(\bar{\omega}_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+)} \|v_{\alpha \bar{x}_2}\|_{L_2(\bar{\omega}_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+)} \Big\} + \sum_{\alpha=1}^2 \zeta_{\alpha+6} L_q \|y_\alpha\|_{L_2(\bar{\omega}_1^{(\alpha)} \times \omega_2)} \|v_\alpha\|_{L_2(\bar{\omega}_1^{(\alpha)} \times \omega_2)} + \\
& + \sum_{\alpha=1}^2 m_\alpha \|y_{\alpha x_1}^0\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})} \|v_\alpha\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})} + \sum_{\alpha=1}^2 p_\alpha \|y_{\alpha x_2}^0\|_{L_2(\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2)} \|v_\alpha\|_{L_2(\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2)} + \\
& + \bar{\theta}_0 \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \|y_\alpha\|_{L_2(\gamma_S)} \|v_\alpha\|_{L_2(\gamma_S)} + \|y_\alpha\|_{L_2(\gamma_S)} \|v_{3-\alpha}\|_{L_2(\gamma_S)} \right\} \leq \\
& \leq C_0 \left( \|y\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ \right) \|v\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ, \quad \forall y, v \in \dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}^\circ(\bar{\omega}^{(1,2)}),
\end{aligned}$$

где постоянная  $C_0(\xi)$  зависит от нормы  $\|y\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ$  и не зависит от  $v$ , является непрерывной функцией от  $\xi \geq 0$ . Кроме того,  $Q_h(y, v)$  линейна по аргументу  $v$ . Это вместе с полученной оценкой дает требуемое утверждение. Форма  $l_h(v)$  также порождает линейный ограниченный функционал  $F_h$  над  $\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}^\circ(\bar{\omega}^{(1,2)})$ :  $(F_h, v)_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}^\circ(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ = l_h(v), \forall v \in \dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}^\circ(\bar{\omega}^{(1,2)})$ . Следовательно, тождество (3.14) примет вид:  $(A_h y, v)_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}^\circ(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ = (F_h, v)_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}^\circ(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ, \forall v \in \dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}^\circ(\bar{\omega}^{(1,2)})$ . Теперь отыскание решения разностной схемы из сумматорного тождества (3.14) сведено к решению операторного уравнения  $A_h y = F_h$ .

Теперь покажем, что существует единственное решение  $y \in \dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}^\circ(\bar{\omega}^{(1,2)})$ , удовлетворяющее тождеству (3.14). Согласно результату Браудера [13], достаточно доказать, что разностный оператор  $A_h$  сильно монотонен. Имеем

$$\begin{aligned}
\langle A_h y - A_h v, y - v \rangle & \geq \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \nu_\alpha \sum_{\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2} [(y_\alpha - v_\alpha)_{\bar{x}_1}]^2 h_1 h_2 + \nu_\alpha \sum_{\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+} [(y_\alpha - v_\alpha)_{\bar{x}_2}]^2 h_1 h_2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} \nu_\alpha \sum_{\omega_2^+} [(y_\alpha - v_\alpha)_{\bar{x}_2}(\xi, x_2)]^2 h_1 h_2 + \sum_{\omega^{(1)}} \Phi_{\alpha+2,h}(x) [(y_1 - v_1)_{x_\alpha}^0 (y_1 - v_1)] h_1 h_2 + \\
& + \sum_{\omega^{(1)}} \Phi_{\alpha+4,h}(x) [(y_2 - v_2)_{x_\alpha}^0 (y_2 - v_2)] h_1 h_2 \Big\} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma_S} \Phi_{3h}(x) [(y_1 - v_1)_{x_2}^0 (y_1 - v_1)] h_1 h_2 + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\gamma_S} \Phi_{5h}(x) [(y_2 - v_2)_{x_2}^0 (y_2 - v_2)] h_1 h_2 + \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \sum_{\omega^{(\alpha)}} \Phi_{\alpha+6,h} [q_\alpha(y_\alpha) - q_\alpha(v_\alpha)] (y_\alpha - v_\alpha) h_1 h_2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\gamma_S} \Phi_{\alpha+6,h} [q_\alpha(y_\alpha) - q_\alpha(v_\alpha)] (y_\alpha - v_\alpha) h_1 h_2 \Big\} + \theta_0 \sum_{\omega_2} [y - v]^2 h_2.
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Используя  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ -неравенства Коши, отдельно оценим

$$\begin{aligned}
& \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \sum_{\omega^{(1)}} \Phi_{\alpha+2,h}(x) [(y_1 - v_1)_{x_\alpha}^0 (y_1 - v_1)] h_1 h_2 + \sum_{\omega^{(2)}} \Phi_{\alpha+4,h}(x) [(y_2 - v_2)_{x_\alpha}^0 (y_2 - v_2)] h_1 h_2 \right\} + \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \Phi_{3h}(x) [(y_1 - v_1)_{x_2}^0 (y_1 - v_1)] h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \Phi_{5h}(x) [(y_2 - v_2)_{x_2}^0 (y_2 - v_2)] h_1 h_2 \geq
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&\geq -\varepsilon_1 \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} [(y_1 - v_1)_{\bar{x}_1}]^2 h_1 h_2 - \varepsilon_2 \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2^+} [(y_1 - v_1)_{\bar{x}_2}]^2 h_1 h_2 - \\
&- \varepsilon_1 \sum_{\omega_1^{(2)-} \times \omega_2} [(y_2 - v_2)_{\bar{x}_1}]^2 h_1 h_2 - \varepsilon_2 \sum_{\omega_1^{(2)-} \times \omega_2^+} [(y_2 - v_2)_{\bar{x}_2}]^2 h_1 h_2 - \\
&- \frac{1}{4\varepsilon_1} \sum_{\omega^{(1)}} m_1^2 (y_1 - v_1)^2 h_1 h_2 - \frac{1}{4\varepsilon_2} \sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} p_1^2 (y_1 - v_1)^2 h_1 h_2 - \\
&- \frac{1}{4\varepsilon_1} \sum_{\omega^{(2)}} m_2^2 (y_2 - v_2)^2 h_1 h_2 - \frac{1}{4\varepsilon_2} \sum_{\omega_1^{(2)-} \times \omega_2} p_2^2 (y_2 - v_2)^2 h_1 h_2.
\end{aligned}$$

Для оценки величин  $\sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega^{(\alpha)\pm}} \Phi_{\alpha+6,h} [q_\alpha(y_\alpha) - q_\alpha(v_\alpha)] (y_\alpha - v_\alpha) h_1 h_2$  рассмотрим три частных случая. Для частного линейного случая  $q_\alpha(u_\alpha)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , т. е.  $q_0 = L_q = 1$ , имеем

$$\Phi_{\alpha+6,h} [q_\alpha(y_\alpha) - q_\alpha(v_\alpha)] (y_\alpha - v_\alpha) \geq \zeta_{\alpha+6} |y_\alpha - v_\alpha|^2, \quad \alpha = 1, 2.$$

Рассмотрим теперь более общий случай:  $0 \leq q_0 \leq (q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2))/(\xi_1 - \xi_2) \leq L_q < \infty$ ,  $\zeta_{\alpha+6} \geq 0$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Имеем

$$\Phi_{\alpha+6,h} [q_\alpha(y_\alpha) - q_\alpha(v_\alpha)] (y_\alpha - v_\alpha) \geq \zeta_{\alpha+6} q_0 |y_\alpha - v_\alpha|^2, \quad \alpha = 1, 2.$$

И наконец, рассмотрим случай, когда  $\zeta_{\alpha+6}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , — константы произвольного знака. Заметим, что  $|\Phi_{\alpha+6,h}| \leq \max_{\alpha=1,2} \{|\zeta_{\alpha+6}|, |\bar{\zeta}_{\alpha+6}|\} \equiv \zeta_0$ , тогда

$$|\Phi_{\alpha+6,h} [q_\alpha(y_\alpha) - q_\alpha(v_\alpha)] (y_\alpha - v_\alpha)| \leq L_q |\Phi_{\alpha+6,h}(x)| |y_\alpha - v_\alpha|^2 \leq L_q \zeta_0 |y_\alpha - v_\alpha|^2, \quad \alpha = 1, 2,$$

т. е.  $\Phi_{\alpha+6,h} [q_\alpha(y_\alpha) - q_\alpha(v_\alpha)] (y_\alpha - v_\alpha) \geq -L_q \zeta_0 |y_\alpha - v_\alpha|^2$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Тогда

$$\begin{aligned}
&< A_h y - A_h v, y - v > \geq \sum_{\alpha=1}^2 [\nu_\alpha - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)] \|y_\alpha - v_\alpha\|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)})}^2 + \\
&+ \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \lambda_\alpha - \frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} \right] \|y_\alpha - v_\alpha\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})}^2 + \theta_0 \sum_{\gamma \in S} [y - v]^2 h_2, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0,
\end{aligned} \tag{3.20}$$

где  $\lambda_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , любая из следующих констант: 1)  $\lambda_\alpha = q_0 \zeta_{\alpha+6}$ ,  $\zeta_{\alpha+6} \geq 0$ ; 2)  $\lambda_\alpha = \zeta_{\alpha+6}$ ,  $\zeta_{\alpha+6}$  — любая константа, когда  $q_\alpha(u_\alpha) = u_\alpha$ ; 3)  $\lambda_\alpha = -L_q \zeta_0$ , где  $\zeta_0 = \max \{|\zeta_7|, |\zeta_8|, |\bar{\zeta}_7|, |\bar{\zeta}_8|\}$ .

Правая часть в (3.20), благодаря неравенству Фридрихса

$$\|y_\alpha\|_{L_2(\omega^{(1)})}^2 \leq C_{\Omega_\alpha}^2 |y_\alpha|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)})}^2, \quad \alpha = 1, 2, \quad C_{\Omega_1}^2 = \left( \frac{8}{\xi_1^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1}, \quad C_{\Omega_2}^2 = \left( \frac{8}{(l_1 - \xi_1)^2} + \frac{8}{l_2^2} \right)^{-1},$$

не меньше выражения  $\sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\nu_\alpha - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{C_{\Omega_\alpha}^2} + \lambda_\alpha - \frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} \right)$ , взятого при всех  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 > 0$ ,  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \nu_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , и поэтому

$$< A_h y - A_h v, y - v > \geq \sum_{\alpha=1}^2 \delta_\alpha \|y_\alpha - v_\alpha\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})}^2 \geq \delta_\alpha \|y_\alpha - v_\alpha\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})}^2, \quad \alpha = 1, 2, \tag{3.21}$$

где  $\delta_\alpha = \max_{\substack{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0 \\ \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leq \nu_\alpha}} \left\{ \frac{\nu_\alpha - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{C_{\Omega_\alpha}^2} + \lambda_\alpha - \frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} \right\} > 0, \alpha = 1, 2.$

Если  $\delta_\alpha > 0$ , то при делении (3.21) на  $\delta_\alpha$  знак неравенства (3.21) не изменится. Поэтому

$$\|y_\alpha - v_\alpha\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})}^2 \leq \frac{1}{\delta_\alpha} < A_h y - A_h v, y - v >, \quad \alpha = 1, 2. \quad (3.22)$$

Умножим обе части (3.22) на  $\left(\frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} + \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\right)$ . Для того чтобы знак неравенства не изменился, нужно, чтобы  $\left(\frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} + \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\right) \geq 0$ , тогда

$$\left(\frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha\right) \|y_\alpha - v_\alpha\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})}^2 \leq \frac{1}{\delta_\alpha} \max \left\{ 0; \frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha \right\} < A_h y - A_h v, y - v >, \quad (3.23)$$

$\alpha = 1, 2$ . Кроме того, из (3.20) при  $\varepsilon_k = \frac{\nu_k}{4}, k = 1, 2$ , получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\nu_\alpha}{2} |y_\alpha - v_\alpha|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)})}^2 + \theta_0 \| [y - v] \|_{L_2(\gamma_S)}^2 \leq \\ & \leq < A_h y - A_h v, y - v > + \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha \right) \|y_\alpha - v_\alpha\|_{L_2(\omega^{(\alpha)})}^2. \end{aligned} \quad (3.24)$$

С учетом (3.23), из (3.24) получим

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\nu_\alpha}{2} |y_\alpha - v_\alpha|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)})}^2 + \theta_0 \| [y - v] \|_{L_2(\gamma_S)}^2 \leq \\ & \leq \left[ 1 + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\delta_\alpha} \max \left\{ 0; \frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} + \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha \right\} \right] < A_h y - A_h v, y - v >. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & < A_h y - A_h v, y - v > \left[ 1 + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\delta_\alpha} \max \left\{ 0; \frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} + \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha \right\} \right] \geq \\ & \geq \nu \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 |y_\alpha - v_\alpha|_{W_2^1(\bar{\omega}^{(\alpha)})}^2 + \| [y - v] \|_{L_2(\gamma_S)}^2 \right\} = \nu \|y - v\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2, \end{aligned}$$

где  $\nu = \min \left\{ \frac{\nu_1}{2}, \frac{\nu_2}{2}, \theta_0 \right\}$ . Следовательно,

$$\langle A_h y - A_h v, y - v \rangle_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} \geq \delta_* \|y - v\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2, \quad \forall y, v \in \dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}),$$

$$\text{где } \delta_* = \nu \left[ 1 + \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{\delta_\alpha} \max \left\{ 0; \frac{m_\alpha^2}{4\varepsilon_1} - \frac{p_\alpha^2}{4\varepsilon_2} - \lambda_\alpha \right\} \right]^{-1} > 0,$$

т. е. сеточный оператор  $A_h : \dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) \rightarrow \dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$  сильно монотонен. Докажем теперь, что оператор  $A_h$  непрерывен по Липшицу. Действительно, используя неравенство Коши-Буняковского и Гёльдера, ограничения на входные данные краевой задачи, имеем

$$\begin{aligned} |< A_h y - A_h v, \eta >| & \leq \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ \nu_\alpha \left( \sum_{\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2} \nu_\alpha |(y_\alpha - v_\alpha)_{\bar{x}_1} \eta_{\alpha \bar{x}_1}| h_1 h_2 + \right. \right. \\ & + \sum_{\omega_1^{(\alpha)\pm} \times \omega_2^+} |(y_\alpha - v_\alpha)_{\bar{x}_2} \eta_{\alpha \bar{x}_2}| \left. \right) + \frac{m_\alpha}{2} \sum_{\omega^{(\alpha)}} |(y_\alpha - v_\alpha)_{x_1} \eta_\alpha| h_1 h_2 + \\ & + \frac{m_\alpha}{2} \sum_{\omega^{(\alpha)}} |(y_\alpha - v_\alpha)_{\bar{x}_1} \eta_\alpha| h_1 h_2 + \frac{p_\alpha}{2} \sum_{\omega^{(\alpha)}} |(y_\alpha - v_\alpha)_{x_2} \eta_\alpha| h_1 h_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{p_\alpha}{2} \sum_{\omega^{(\alpha)}} |(y_\alpha - v_\alpha)_{\bar{x}_2} \eta_\alpha| h_1 h_2 \Big\} + \frac{p_1}{4} \sum_{\omega_2} |(y_1 - v_1)_{x_2} \eta_1| h_1 h_2 + \\
& + \frac{p_1}{4} \sum_{\omega_2} |(y_1 - v_1)_{\bar{x}_2} \eta_1| h_1 h_2 + L_q \sum_{\alpha=1}^2 \bar{\zeta}_{\alpha+6} \sum_{\omega^{(\alpha)}} |y_\alpha - v_\alpha| |\eta_\alpha| h_1 h_2 + \\
& + \bar{\theta}_0 \sum_{\omega_2} |[y - v][\eta]| h_2 + \frac{1}{2} L_q \sum_{\alpha=1}^2 \bar{\zeta}_{\alpha+6} \sum_{\omega_2} |y_\alpha(\xi, x_2) - v_\alpha(\xi, x_2)| |\eta_\alpha(\xi, x_2)| h_1 h_2 \leq \\
& \leq M \|y - v\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ \|\eta\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ, \quad \forall y, v, \eta \in \dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\|A_h y - A_h v\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ = \sup_{\eta \neq 0} \frac{|(A_h y - A_h v, \eta)|}{\|\eta\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ} \leq M \|y - v\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ, \quad \forall y, v \in \dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}),$$

т. е. оператор  $A_h$  непрерывен по Липшицу. Следовательно, условия теоремы Браудера [13] выполнены, а значит, уравнение  $A_h y = F_h$  однозначно разрешимо. Теперь из коэрцитивности оператора  $A_h$ :  $(A_h y, y)_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ \geq \delta_* \|y\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2$  и цепочки легко устанавливаемых неравенств

$$\delta_* \|y\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^2 \leq (A_h y, y)_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ = Q_h(y, y) \leq M_1 \left( \sum_{k=1}^2 \|f_{kh}\|_{L_2(\omega^{(k)} \cup \gamma_S)} \right) \|y\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}\gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})}^\circ$$

следует оценка (3.18).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Выпишем явный вид разностной схемы (3.14) в узлах сетки  $\bar{\omega}_1 \cup \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}^{(1,2)}$ : требуется найти функцию  $y = (y_1, y_2)$ , определенную на  $\bar{\omega}^{(1,2)}$ , где компоненты  $y_1$  и  $y_2$  удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned}
& - \left( b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}) y_{1\bar{x}_1} \right)_{x_1} - \left( \tilde{b}_{2h}^{(1)}(\Phi_{1h}) y_{1\bar{x}_2} \right)_{x_2} + \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha+2,h} y_{1x_\alpha}^0(x) + \Phi_{7h}(x) q_1(y_1) = f_{1h}(x), \quad x \in \omega^{(1)}, \\
& y_1(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(1)} = \partial\omega^{(1)} \setminus \gamma_S; \\
& - \left( b_{1h}^{(2)}(\Phi_{2h}) y_{2\bar{x}_1} \right)_{x_1} - \left( \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}) y_{2\bar{x}_2} \right)_{x_2} + \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha+4,h} y_{2x_\alpha}^0(x) + \Phi_{8h}(x) q_2(y_2) = f_{2h}(x), \quad x \in \omega^{(2)}, \\
& y_2(x) = 0, \quad x \in \gamma^{(2)} = \partial\omega^{(2)} \setminus \gamma_S;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{h_1} \left[ b_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi_1, x_2)) y_{1\bar{x}_1}(\xi_1, x_2) + \theta_h(x_2) y_1(\xi, x_2) \right] + \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha+2,h}(\xi, x_2) y_{1x_\alpha}^0(\xi, x_2) - \\
& - \left( \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}) y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) \right)_{x_2} + \Phi_{7h}(\xi, x_2) q_1(y_1(\xi, x_2)) = f_{1h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1} \theta_h(x_2) y_2(\xi, x_2), \\
& - \frac{2}{h_1} \left[ b_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi + h_1, x_2)) y_{2x_1}(\xi, x_2) - \theta_h(x_2) y_2(\xi, x_2) \right] + \sum_{\alpha=1}^2 \Phi_{\alpha+4,h}(\xi, x_2) y_{2x_\alpha}^0(\xi, x_2) - \\
& - \left( \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}) y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) \right)_{x_2} + \Phi_{8h}(\xi, x_2) q_2(y_2(\xi, x_2)) = f_{2h}(\xi, x_2) + \frac{2}{h_1} \theta_h(x_2) y_1(\xi, x_2), \quad x_2 \in \omega_2.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

**Т е о р е м а 3.2** Для каждого  $h > 0$  существует по крайней мере одно оптимальное управление  $\Phi_{h*} \in U_h$  в последовательности разностных экстремальных задач (3.13)–(3.17), т. е.  $J_{h*} = \inf\{J_h(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} > -\infty$ ,  $U_{h*} = \{\Phi_{h*} \in U_h : J_h(\Phi_{h*}) = J_{h*}\} \neq \emptyset$ .

Доказательство теоремы проводится путем установления непрерывности функционала  $J_h(\Phi_h)$  на множестве  $U_h$  в слабой топологии пространства  $H_h = W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}) \times (L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S))^2 \times (L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S))^2 \times L_2(\omega^{(1)} \cup \gamma_S) \times L_2(\omega^{(2)} \cup \gamma_S)$ , опирается на факт слабой компактности  $U_h$  в  $H_h$  и последующего применения результата из [1], с. 502, теорема 1 и комментарии на с. 565-566.

#### 4. Оценки погрешности и скорости сходимости аппроксимаций. Регуляризация аппроксимаций

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации разностной схемы (2.1)–(2.9) на сетке  $\bar{\omega}^{(1,2)}$ . Оценку погрешности метода сеток устанавливает следующая

**Т е о р е м а 4.1** Пусть выполнены условия при постановке задачи оптимального управления,  $g \in U$  и  $\Phi_h \in U_h$  – произвольные управления, а  $u(g)$  и  $y(\Phi_h)$  – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (2.10), (2.1)–(2.9) и (3.13)–(3.17). Тогда для любых  $h > 0$  справедлива оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи (2.10), (2.1)–(2.9):

$$\begin{aligned} \|y(\Phi_h) - u(g)\|_{\dot{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} &\leq C \left\{ |h| \left[ \sum_{\alpha=1}^2 \left( \|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L_q \|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{\beta=1}^2 \|\vartheta_\alpha^{(\beta)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} \right) \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \|\theta\|_{L_\infty(0, l_\alpha)} \sum_{\alpha=1}^2 \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} \right] + \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left\| (b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1, x_2)) - \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1 - 0.5h_1, r_2) dr_2 \right\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| (\tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1, x_2)) - \frac{1}{h_1} \int_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+)} \right) \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \\ &\quad + \left\| \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi, x_2)) - \frac{2}{h_1} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right\|_{L_\infty(\omega_2^+)} \|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)} + \\ &\quad + \left\| \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(\xi, x_2)) - \frac{2}{h_1} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right\|_{L_\infty(\omega_2^+)} \|u_2\|_{W_2^2(\Omega_2)} + \\ &\quad + \sum_{\alpha=1}^2 \left( \left\| \Phi_{\alpha+2,h}(r) - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{e^1(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega^{(1)} \cup \gamma_S)} \|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)} + \right. \\ &\quad \left. + \left\| \Phi_{\alpha+4,h}(r) - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{e^2(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega^{(2)} \cup \gamma_S)} \|u_2\|_{W_2^2(\Omega_2)} \right) + \\ &\quad \left. + \sum_{\alpha=1}^2 \left\| S^x d_{\alpha h}(x) - \Phi_{\alpha+6,h} \right\|_{L_2(\omega^{(\alpha)} \cup \gamma_S)} \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} \right\}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

где  $C = \text{const}$ , не зависящая от  $h$ ,  $y$ ,  $u$ ,  $\Phi_h$ ,  $g$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пользуясь разностными формулами суммирования по частям, формулой Грина, используя идеи работ [1, 3, 6, 8], приведем погрешность аппроксимации

$\psi_h(x)$  к специальному виду:

$$\begin{aligned}
 (\psi_h, v)_{V_{\gamma^1, \gamma^2}(\bar{\omega}^{(1,2)})} = & - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega_1^{(\alpha)+}} \sum_{\omega_2} \eta_1^{(\alpha)}(x) v_{\alpha \bar{x}_1} h_1 h_2 - \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega_1^{(\alpha)}} \sum_{\omega_2^+} \eta_2^{(\alpha)}(x) v_{\alpha \bar{x}_2} h_1 h_2 - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} \eta_2^{(1)}(\xi, x_2) v_{1 \bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 - \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} \eta_2^{(2)}(\xi, x_2) v_{2 \bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega^{(\alpha)}} \eta_3^{(\alpha)}(x) v_{\alpha}(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \eta_3^{(1)}(\xi, x_2) v_1(\xi, x_2) h_1 h_2 + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \eta_3^{(2)}(\xi, x_2) v_2(\xi, x_2) h_1 h_2 - \sum_{\omega_2} \eta_4(x_2) [v(\xi, x_2)] \cdot h_2 + \\
 & + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega^{(\alpha)}} \eta_5^{(\alpha)}(x) v_{\alpha}(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega_2} \eta_5^{(\alpha)}(\xi, x_2) v_{\alpha}(\xi, x_2) h_1 h_2,
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

где

$$\begin{aligned}
 \eta_1^{(\alpha)}(x) &= B_1^{(\alpha)}(x) + D_1^{(\alpha)}(x), \quad B_1^{(\alpha)}(x) = \left[ \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} k_{\alpha}(x_1 - 0.5h_1, r_2) dr_2 \right] u_{\alpha \bar{x}_1}(x) - \\
 & - \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} k_{\alpha}(x_1 - 0.5h_1, r_2) \frac{\partial u_{\alpha}(x_1 - 0.5h_1, r_2)}{r_1} dr_2, \\
 D_1^{(\alpha)}(x) &= \left[ \tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1, x_2)) - \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} k_{\alpha}(x_1 - 0.5h_1, r_2) dr_2 \right] u_{\alpha \bar{x}_1}(x), \quad x \in \omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2, \\
 \eta_2^{(\alpha)}(x) &= B_2^{(\alpha)}(x) + D_2^{(\alpha)}(x), \quad B_2^{(\alpha)}(x) = \left[ \frac{1}{h_1} \int_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_{\alpha}(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right] u_{\alpha \bar{x}_2}(x) - \\
 & - \frac{1}{h_1} \int_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_{\alpha}(r_1, x_2 - 0.5h_2) \frac{\partial u_{\alpha}(r_1, x_2 - 0.5h_2)}{r_2} dr_1, \\
 D_2^{(\alpha)}(x) &= \left[ \tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}(x_1, x_2)) - \frac{1}{h_1} \int_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_{\alpha}(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right] u_{\alpha \bar{x}_2}(x), \quad x \in \omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+, \\
 \eta_2^{(1)}(\xi, x_2) &= B_2^{(1)}(\xi, x_2) + D_2^{(1)}(\xi, x_2), \quad B_2^{(1)}(\xi, x_2) = \left[ \frac{2}{h_1} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right] u_{1 \bar{x}_2}(\xi, x_2) - \\
 & - \frac{2}{h_1} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2 - 0.5h_2) \frac{\partial u_1(r_1, x_2 - 0.5h_2)}{r_2} dr_1,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D_2^{(1)}(\xi, x_2) &= \left[ \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}(\xi, x_2)) - \frac{2}{h_1} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right] u_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2), \quad x_2 \in \omega_2^+, \\
\eta_2^{(2)}(\xi, x_2) &= B_2^{(2)}(\xi, x_2) + D_2^{(2)}(\xi, x_2), \quad B_2^{(2)}(\xi, x_2) = \left[ \frac{2}{h_1} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right] u_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) - \\
&\quad - \frac{2}{h_1} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1, x_2 - 0.5h_2) \frac{\partial u_2(r_1, x_2 - 0.5h_2)}{r_2} dr_1, \\
D_2^{(2)}(\xi, x_2) &= \left[ \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}(x_1, x_2)) - \frac{2}{h_1} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right] u_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2), \quad x_2 \in \omega_2^+; \\
\eta_3^{(\alpha)}(x) &= \eta_3^{(\alpha)+}(x) + \eta_3^{(\alpha)-}(x), \quad \eta_3^{(\alpha)-}(x) = \left( \Phi_{\alpha+6,h} - \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(\alpha)}(x)} d_{\alpha}(r) dr \right) q_{\alpha}(u_{\alpha}), \quad x \in \omega^{(\alpha)}; \\
\eta_3^{(\alpha)+}(x) &= \left( \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(\alpha)}(x)} d_{\alpha}(r) dr \right) q_{\alpha}(u_{\alpha}(x)) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(\alpha)}(x)} d_{\alpha}(r) q_{\alpha}(u_{\alpha}(r)) dr, \\
\eta_3^{(1)}(\xi, x_2) &= \eta_3^{(1)+}(\xi, x_2) + \eta_3^{(1)-}(\xi, x_2), \quad x_2 \in \omega_2; \\
\eta_3^{(1)-}(\xi, x_2) &= \left( \Phi_{7h}(\xi, x_2) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} d_1(r) dr \right) q_1(u_1(\xi, x_2)); \\
\eta_3^{(1)+}(\xi, x_2) &= \left( \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} d_1(r) dr \right) q_1(u_1(\xi, x_2)) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} d_1(r) q_1(u_1(\xi, x_2)) dr; \\
\eta_3^{(2)}(\xi, x_2) &= \eta_3^{(2)+}(\xi, x_2) + \eta_3^{(2)-}(\xi, x_2), \quad x_2 \in \omega_2; \\
\eta_3^{(2)-}(\xi, x_2) &= \left( \Phi_{8h}(\xi, x_2) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} d_2(r) dr \right) q_2(u_2(\xi, x_2)); \\
\eta_3^{(2)+}(\xi, x_2) &= \left( \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} d_2(r) dr \right) q_2(u_2(\xi, x_2)) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} d_2(r) q_2(u_2(\xi, x_2)) dr; \\
\eta_4(x_2) &= \theta_h(x_2)[u(\xi, x_2)] - \frac{2}{h_2} \int_{e_2(x_2)} \theta(r_2)[u(\xi, x_2)] dr_2, \quad x_2 \in \omega_2; \\
\eta_5^{(\alpha)}(x) &= \eta_5^{(\alpha)-}(x) + \eta_5^{(\alpha)+}(x) + \hat{\eta}_5^{(\alpha)-}(x) + \hat{\eta}_5^{(\alpha)+}(x), \quad x \in \omega^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2; \\
\eta_5^{(1)-}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \Phi_{\alpha+2,h}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right] u_{1x_{\alpha}}(x); \\
\eta_5^{(1)+}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \Phi_{\alpha+2,h}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right] u_{1\bar{x}_{\alpha}}(x);
\end{aligned}
\tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\eta}_5^{(1)-}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right) u_{1x_\alpha}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha} dr \right]; \\
\hat{\eta}_5^{(1)+}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right) u_{1\bar{x}_\alpha}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(1)}(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha} dr \right]; \\
\eta_5^{(2)-}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \Phi_{\alpha+4,h}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(2)}(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right] u_{2x_\alpha}(x); \\
\eta_5^{(2)+}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \Phi_{\alpha+4,h}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(2)}(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right] u_{2\bar{x}_\alpha}(x); \\
\hat{\eta}_5^{(2)-}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(2)}(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right) u_{2x_\alpha}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(2)}(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha} dr \right]; \\
\hat{\eta}_5^{(2)+}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(2)}(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right) u_{2\bar{x}_\alpha}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \iint_{e^{(2)}(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha} dr \right]; \\
\eta_5^{(\alpha)}(\xi, x_2) &= \eta_5^{(\alpha)-}(\xi, x_2) + \eta_5^{(\alpha)+}(\xi, x_2) + \hat{\eta}_5^{(\alpha)-}(\xi, x_2) + \hat{\eta}_5^{(\alpha)+}(\xi, x_2), \quad x_2 \in \omega_2; \\
\eta_5^{(1)-}(\xi, x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \Phi_{\alpha+2,h}(x) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right] u_{1x_\alpha}(x); \\
\eta_5^{(1)+}(\xi, x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \Phi_{\alpha+2,h}(x) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right] u_{1\bar{x}_\alpha}(x); \\
\hat{\eta}_5^{(1)-}(\xi, x_2) &= \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right) u_{1x_\alpha}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha} dr \right]; \\
\hat{\eta}_5^{(1)+}(\xi, x_2) &= \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right) u_{1\bar{x}_\alpha}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_1(r)}{\partial r_\alpha} dr \right]; \\
\eta_5^{(2)-}(\xi, x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \Phi_{\alpha+4,h}(x) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right] u_{2x_\alpha}(x); \\
\eta_5^{(2)+}(\xi, x_2) &= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \Phi_{\alpha+4,h}(x) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right] u_{2\bar{x}_\alpha}(x); \\
\hat{\eta}_5^{(2)-}(\xi, x_2) &= \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right) u_{2x_\alpha}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha} dr \right]; \\
\hat{\eta}_5^{(2)+}(\xi, x_2) &= \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right) u_{2\bar{x}_\alpha}(x) - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) \frac{\partial u_2(r)}{\partial r_\alpha} dr \right];
\end{aligned}$$

Принимая во внимание уравнения для погрешности  $A_h u - A_h u = \psi_h$ , представление погрешности аппроксимации (4.28), а также разностные аналоги теорем вложения Соболева,

эквивалентные нормировки пространства  $V_{\gamma^1\gamma^2}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ , неравенства Коши-Буняковского и Гельдера, получим оценку

$$\begin{aligned}
 \|z(g, \Phi_h)\|_{V_{\gamma^1\gamma^2}} &= \|y(\Phi_h) - u(g)\|_{V_{\gamma^1\gamma^2}} \leq M \left\{ \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left( \sum_{\omega_1^{(\alpha)+}} \sum_{\omega_2} (\eta_1^{(\alpha)}(x))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} + \right. \right. \\
 &+ \left( \sum_{\omega_1^{(\alpha)}} \sum_{\omega_2^+} (\eta_2^{(\alpha)}(x))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{\omega_2^+} (\eta_2^{(\alpha)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{\omega^{(\alpha)}} (\eta_3^{(\alpha)-}(x))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \\
 &+ \left( \sum_{\omega_2} (\eta_3^{(\alpha)-}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{\omega^{(\alpha)}} (\eta_3^{(\alpha)+}(x))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \\
 &+ \left( \sum_{\omega_2} (\eta_3^{(\alpha)+}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{\omega^{(\alpha)}} (\eta_5^{(\alpha-)}(x))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{\omega_2} (\eta_5^{(\alpha-)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \\
 &+ \left( \sum_{\omega^{(\alpha)}} (\eta_5^{(\alpha+)}(x))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{\omega_2} (\eta_5^{(\alpha+)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \\
 &+ \left( \sum_{\omega^{(\alpha)}} (\hat{\eta}_5^{(\alpha-)}(x))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{\omega_2} (\hat{\eta}_5^{(\alpha-)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} + \left( \sum_{\omega^{(1)}} (\hat{\eta}_5^{(\alpha+)}(x))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \\
 &\left. + \left( \sum_{\omega_2} (\hat{\eta}_5^{(\alpha+)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \right] + \left( \sum_{\omega_2} (\eta_4(x_2))^2 h_1 h_2 \right)^{1/2} \Big\}. \quad (4.30)
 \end{aligned}$$

Для оценки левой части неравенства (4.30) через параметр  $h$  и получения оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию достаточно оценить величины (4.29):

$$\begin{aligned}
 \sum_{\omega_1^{(\alpha)+}} \sum_{\omega_2} (\eta_1^{(\alpha)}(x))^2 h_1 h_2 &\leq 2 \sum_{\omega_1^{(\alpha)+}} \sum_{\omega_2} \left[ |B_1^{(\alpha)}(x)|^2 + |D_1^{(\alpha)}(x)|^2 \right] h_1 h_2, \quad \alpha = 1, 2; \\
 \sum_{\omega_1^{(\alpha)+}} \sum_{\omega_2} |B_1^{(\alpha)}(x)|^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}^2 |h|^2 \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}^2, \quad \alpha = 1, 2; \\
 \sum_{\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2} |D_1^{(\alpha)}|^2 h_1 h_2 &\leq M_1^2 \left\| b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}) - \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1 - 0.5h_1, r_2) dr_2 \right\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2)}^2 \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}^2; \\
 \sum_{(\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+) \cup \gamma_S} (\eta_2^{(\alpha)}(x))^2 h_1 h_2 &\leq 2 \sum_{(\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+) \cup \gamma_S} \left[ |B_2^{(\alpha)}(x)|^2 + |D_2^{(\alpha)}(x)|^2 \right] h_1 h_2, \quad \alpha = 1, 2; \\
 \sum_{(\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+) \cup \gamma_S} |B_2^{(\alpha)}(x)|^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \|k_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}^2 |h|^2 \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)}^2, \quad \alpha = 1, 2;
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sum_{\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+} |D_2^{(\alpha)}|^2 h_1 h_2 &\leq M_1^2 \left\| \tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}) - \frac{1}{h_1} \int_{e_1^{(\alpha)}(x_1)}^{\xi} k_{\alpha}(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right\|_{L_{\infty}(\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+)}^2 \|u_{\alpha}\|_{W_2^2(\Omega_{\alpha})}^2; \\
\sum_{\omega_2^+} |D_2^{(1)}(\xi, x_2)|^2 h_1 h_2 &\leq M_1^2 \left\| \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}) - \frac{2}{h_1} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right\|_{L_{\infty}(\omega_2^+)}^2 \|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)}^2; \\
\sum_{\omega_2^+} |D_2^{(2)}(\xi, x_2)|^2 h_1 h_2 &\leq M_1^2 \left\| \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}) - \frac{2}{h_1} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right\|_{L_{\infty}(\omega_2^+)}^2 \|u_2\|_{W_2^2(\Omega_2)}^2;
\end{aligned} \tag{4.31}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega_1^{(\alpha)}} \sum_{\omega_2^+} (\eta_2^{(\alpha)}(x))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \|k_{\alpha}\|_{L_{\infty}(\Omega_{\alpha})}^2 |h|^2 \|u_{\alpha}\|_{W_2^2(\Omega_{\alpha})}^2, \alpha = 1, 2; \\
\sum_{\omega_2^+} (\eta_2^{(\alpha)}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \|k_{\alpha}\|_{L_{\infty}(\Omega_{\alpha})}^2 |h|^2 \|u_{\alpha}\|_{W_2^2(\Omega_{\alpha})}^2, \alpha = 1, 2; \\
\sum_{\omega_2^{(\alpha)}} (\eta_3^{(\alpha)+}(x))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 L_q^2 \|d_{\alpha}\|_{L_{\infty}(\Omega_{\alpha})}^2 |h|^2 \|u_{\alpha}\|_{W_2^2(\Omega_{\alpha})}^2, \alpha = 1, 2; \\
\sum_{\omega_2} (\eta_3^{(\alpha)+}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 L_q^2 \|d_{\alpha}\|_{L_{\infty}(\Omega_{\alpha})}^2 |h|^2 \|u_{\alpha}\|_{W_2^2(\Omega_{\alpha})}^2, \alpha = 1, 2; \\
\sum_{\omega_2} \eta_4^2(x_2) h_2 &\leq M^2 h_2^2 \|\theta\|_{L_{\infty}(0, l_2)}^2 \sum_{k=1}^2 \|u_k\|_{W_2^2(\Omega_{\alpha})}^2; \\
\sum_{\omega_1^{(1)+} \times \omega_2} (\hat{\eta}_5^{(1\pm)}(x))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \sum_{\alpha=1}^2 \|\vartheta_1^{(\alpha)}\|_{L_{\infty}(\Omega_1)}^2 |h|^2 \|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)}^2; \\
\sum_{\omega^{(2)-} \times \omega_2} (\hat{\eta}_5^{(2\pm)}(x))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \sum_{\alpha=1}^2 \|\vartheta_2^{(\alpha)}\|_{L_{\infty}(\Omega_2)}^2 |h|^2 \|u_2\|_{W_2^2(\Omega_2)}^2; \\
\sum_{\omega^{(\alpha)}} (\eta_3^{(\alpha)-}(x))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \left\| \Phi_{\alpha+6, h}(r) - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{e^{(\alpha)}(x)}^{\xi} d_{\alpha}(r) dr \right\|_{L_{\infty}(\omega^{(\alpha)})}^2 \|u_{\alpha}\|_{W_2^2(\Omega_{\alpha})}^2; \\
\sum_{\omega_2} (\eta_3^{(1)-}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \left\| \Phi_{7h}(\xi, r_2) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)}^{\xi} d_1(r) dr \right\|_{L_{\infty}(\omega_2)}^2 \|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)}^2; \\
\sum_{\omega_2} (\eta_3^{(2)-}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \left\| \Phi_{8h}(\xi, r_2) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)}^{\xi} d_2(r) dr \right\|_{L_{\infty}(\omega_2)}^2 \|u_2\|_{W_2^2(\Omega_2)}^2; \\
\sum_{\omega^{(\alpha)}} (\eta_5^{(1\pm)}(x))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \Phi_{\alpha+2, h}(r) - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{e^1(x)}^{\xi} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right\|_{L_{\infty}(\omega^{(1)})}^2 \|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)}^2;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\omega_2} (\eta_5^{(1)\pm}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \Phi_{\alpha+2,h}(\xi, r_2) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega_2)}^2 \|u_1\|_{W_2^2(\Omega_1)}^2; \\ \sum_{\omega(\alpha)} (\eta_5^{(2)\pm}(x))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \Phi_{\alpha+4,h}(r) - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{e^2(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega^{(2)})}^2 \|u_2\|_{W_2^2(\Omega_2)}^2; \\ \sum_{\omega_2} (\eta_5^{(2)\pm}(\xi, x_2))^2 h_1 h_2 &\leq M^2 \sum_{\alpha=1}^2 \left\| \Phi_{\alpha+4,h}(\xi, r_2) - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega_2)}^2 \|u_2\|_{W_2^2(\Omega_1)}^2, \end{aligned}$$

Докажем первую из оценок (4.31),  $\alpha = 1$ .

$$\begin{aligned} |\eta_1^{(1)}(x)| &= \left| \frac{1}{h_1 h_2} \int_{x_1-h_1}^{x_1} \int_{e_2(x_2)} k_1(x_1 - 0.5h_1, r_2) \left[ \int_{x_1-0.5h_1}^{r_1} \frac{\partial^2 u_1(m, r_2)}{\partial m^2} dm - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{x_2}^{r_2} \frac{\partial^2 u_1(r_1, s)}{\partial r_1 \partial s} ds \right] dr_1 dr_2 \right| \leq (h_1 h_2)^{-1/2} \|k_1\|_{L_\infty(\Omega_1)} \times \left[ h_1 \left( \int_{x_1-h_1}^{x_1} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial^2 u_1(m, r_2)}{\partial m^2} \right|^2 dm dr_2 \right)^{1/2} + h_2 \left( \int_{x_1-h_1}^{x_1} \int_{e_2(x_2)} \left| \frac{\partial^2 u_1(r_1, s)}{\partial r_1 \partial s} \right|^2 dr_1 ds \right)^{1/2} \right] \leq \\ &\leq 2^{1/2} \|k_1\|_{L_\infty(\Omega_1)} |h| (h_1 h_2)^{-1/2} \|u_1\|_{W_2^2((x_1-h_1, x_2) \times e_2(x_2))}, \quad x \in \omega_1^{(1)+} \times \omega_2. \end{aligned}$$

Аналогично доказываются остальные оценки (4.31).

Доказательство закончено.

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления (3.13)–(3.17) по функционалу и управлению необходимо, прежде всего, установить связь между функционалами  $J_h(\Phi_h)$  и  $J(g)$  экстремальных задач (3.13)–(3.17) и (2.10), (2.1)–(2.9) для любых фиксированных управлений  $\Phi_h \in U_h$  и  $g \in U$ , а также любых  $h > 0$ .

**Т е о р е м а 4.2** Для любых управлений  $g \in U$  и  $\Phi_h \in U_h$  экстремальных задач (2.10), (2.1)–(2.9) и (3.13)–(3.17) соответственно и любых  $h > 0$  для погрешности сеточного функционала  $J_h(\Phi_h)$  экстремальной задачи (3.13)–(3.17) справедлива оценка

$$\begin{aligned} |J(g) - J_h(\Phi_h)| &= |I(u(r; g)) - I_h(y(x; \Phi_h))| \leq M \left\{ |h| + \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left\| \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} k_\alpha(x_1 - 0.5h_1, r_2) dr_2 - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - b_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}) \right\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2)} + \left\| \frac{1}{h_2} \int_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_\alpha(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 - \tilde{b}_{\alpha h}^{(\alpha)}(\Phi_{\alpha h}) \right\|_{L_\infty(\omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+)} \right] + \\ &\quad + \left\| \frac{2}{h_1} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} k_1(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 - \tilde{b}_{1h}^{(1)}(\Phi_{1h}) \right\|_{L_\infty(\omega_2^+)} + \left\| \tilde{b}_{2h}^{(2)}(\Phi_{2h}) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{h_1} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} k_2(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1 \right\|_{L_\infty(\omega_2^+)} + \sum_{\alpha=1}^2 \left[ \left\| \Phi_{\alpha+2,h} - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{e^1(x)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega^{(1)})} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\| \Phi_{\alpha+2,h} - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_1^{(\alpha)}(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega_2)} + \left\| \Phi_{\alpha+4,h} - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{e^2(x)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega^{(2)})} + \\
& + \left\| \Phi_{\alpha+4,h} - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} \vartheta_2^{(\alpha)}(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega_2)} + \left\| \Phi_{\alpha+6,h} - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{e^\alpha(x)} d_\alpha(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega^{(\alpha)})} \Big] + \\
& + \left\| \Phi_{7h} - \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1}^{\xi} \int_{e_2(x_2)} d_1(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega_2)} + \left\| \Phi_{8h} - \frac{1}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} d_2(r) dr \right\|_{L_\infty(\omega_2)} \Big\},
\end{aligned} \tag{4.32}$$

где  $M = \text{const} > 0$ , не зависящая от  $h, y, u, \Phi_h, g$ .

**Доказательство.** Пусть  $g \in U$  и  $\Phi_h \in U_h$  – произвольные допустимые управления, а  $u(g)$  и  $y(\Phi_h)$  – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (2.10), (2.1)–(2.9) и (3.13)–(3.17). Принимая во внимание (2.9), (3.17) и проводя некоторые преобразования, приведем погрешность  $\varepsilon_h(g; \Phi_h) = J(g) - J_h(\Phi_h)$  к специальному виду

$$\begin{aligned}
\varepsilon_h(g; \Phi_h) &= B_h^{(1)} + B_h^{(2)}, \quad B_h^{(1)} = \|u(r; g) - u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\Omega_1)}^2 - \|P_{1h}u(r; g) - P_{1h}u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\Omega_1)}^2, \\
B_h^{(2)} &= \|P_{1h}u(r; g) - P_{1h}u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\Omega_1)}^2 - \|y(x; \Phi_h) - u_0^{(1)}(x)\|_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})}^2.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Можно показать, что для величин  $B_h^{(k)}$ ,  $k = 1, 2$ , справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned}
|B_h^{(1)}| &\leq \left( \|u(r; g) - P_{1h}u(r; g)\|_{L_2(\Omega_1)} + \|u_0^{(1)}(r) - P_{1h}u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\Omega_1)} \right) \times \\
&\times \left( \|u(r; g)\|_{L_2(\Omega_1)} + \|P_{1h}u(r; g)\|_{L_2(\Omega_1)} + \|P_{1h}u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\Omega_1)} + \|u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\Omega_1)} \right), \\
|B_h^{(2)}| &\leq \|y(\Phi_h) - u(g)\|_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})} \left( \|u(g)\|_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})} + \|y(\Phi_h)\|_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})} + 2\|u_0^{(1)}(r)\|_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})} \right).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Далее, проводя оценки правых частей неравенств (4.34) на основе полученных выше оценок, теорем вложения Соболева [14], их разностных аналогов, эквивалентных нормировок пространств  $\dot{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}$  и  $\dot{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}$  (см. выше) и принимая во внимание представление (4.33) установим оценку (4.32).

**Доказательство закончено.**

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач (2.10), (2.1)–(2.9) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации (3.13)–(3.17), зависящих от шага  $h$  сетки  $\bar{\omega}$  при  $|h| \rightarrow 0$ . Для исследования связи между экстремальными задачами (2.10), (2.1)–(2.9) и (3.13)–(3.17) введем отображения:  $R_h : H \rightarrow H_h$  и  $N_h : H_h \rightarrow H$  по правилу:  $R_h g = \Phi_h$ , где  $g = (k_1, k_2, \vartheta_1^{(1)}, \vartheta_1^{(2)}, \vartheta_2^{(1)}, \vartheta_2^{(2)}, d_1, d_2)$ ,  $\Phi_h = (R_h^{(1)}k_1, R_h^{(2)}k_2, R_h^{(3)}\vartheta_1^{(1)}, R_h^{(4)}\vartheta_1^{(2)}, R_h^{(5)}\vartheta_2^{(1)}, R_h^{(6)}\vartheta_2^{(2)}, R_h^{(7)}d_1, R_h^{(8)}d_2)$ ,  $R_h^{(\alpha)}g_\alpha(x)$ ,  $\alpha = 1, 2$ , – дискретизации на сетках  $\bar{\omega}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , управляющих функций  $g_\alpha$ ,  $\alpha = \overline{1, 8}$  по формулам  $R_h^{(\alpha)}k_\alpha(x) = S_\alpha^x k_\alpha(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}^{(\alpha)}$ ,  $\alpha = 1, 2$ ,  $R_h^{(\alpha)}g_\alpha = S_1^x g_\alpha$ ,  $x \in \omega^{(1)}$ ,  $\alpha = 3, 4, 7$ ,  $R_h^{(\alpha)}g_\alpha = S_2^x g_\alpha$ ,  $x \in \omega^{(2)}$ ,  $\alpha = 5, 6, 8$ , а  $S_1^x$  и  $S_2^x$  – двумерные операторы усреднения по Стеклову;  $N_h \Phi_h = g$ , где  $\Phi_h = (\Phi_{1h}, \Phi_{2h}, \Phi_{3h}, \Phi_{4h}, \Phi_{5h}, \Phi_{6h}, \Phi_{7h}, \Phi_{8h})$ ,  $g = (F_h^{(1)}\Phi_{1h}(r), F_h^{(2)}\Phi_{2h}(r), P_h^{(3)}\Phi_{3h}(r), P_h^{(4)}\Phi_{4h}(r), P_h^{(5)}\Phi_{5h}(r), P_h^{(6)}\Phi_{6h}(r), P_h^{(7)}\Phi_{7h}(r), P_h^{(8)}\Phi_{8h}(r))$ , где  $F_h^{(\alpha)}\Phi_{\alpha h}(r)$  – кусочно-линейные восполнения сеточных управлений  $\Phi_{\alpha h}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , определенные в работе [6] (см. также [3]), а  $P_h^{(k)}\Phi_{kh}(r)$ ,  $k = 3, 4, 7$ ,  $x \in \omega^{(1)}$ , и  $P_h^{(k)}\Phi_{kh}(r)$ ,  $k = 5, 6, 8$ ,  $x \in \omega^{(2)}$  – кусочно-постоянные восполнения на  $\bar{\Omega}_k$ ,  $k = 1, 2$ , сеточных

управлений  $\Phi_{kh}(x)$ ,  $k = 3, 4, 7$ ,  $x \in \omega^{(1)}$ , и  $\Phi_{kh}(x)$ ,  $k = 5, 6, 8$ ,  $x \in \omega^{(2)}$ , соответственно, определяемые по формулам:

$$P_h^{(k)}\Phi_{kh}(r) = \sum_{i_1=1}^{N_{1\xi}-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \Phi_{kh}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})\varphi_{i_1 i_2}^{(1)}(t), \quad k = 3, 4, 7,$$

$$P_h^{(k)}\Phi_{kh}(r) = \sum_{i_1=N_{1\xi}+1}^{N_1-1} \sum_{i_2=1}^{N_2-1} \Phi_{kh}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})\varphi_{i_1 i_2}^{(1)}(t), \quad k = 5, 6, 8,$$

$$\varphi_{i_1 i_2}^{(\alpha)}(t) = \begin{cases} 1, & (t_1, t_2) \in \hat{e}^{(\alpha)}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}); \\ 0, & (t_1, t_2) \notin \hat{e}^{(\alpha)}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}), \end{cases} \quad (x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) \in \omega^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2,$$

где  $\hat{e}^{(1)}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)}) = e^{(1)}(x_1^{(i_1)}, x_2^{(i_2)})$ ,  $i_1 = \overline{2, N_{1\xi} - 2}$ ,  $i_2 = \overline{2, N_2}$ ,  $\hat{e}^{(1)}(h_1, h_2) = \{0 \leq t_1 \leq 1.5h_1, \quad 0 \leq t_2 \leq 1.5h_2\}$ ;  $\hat{e}^{(1)}(h_1, x_2^{(i_2)}) = \{0 \leq t_1 \leq 1.5h_1, \quad x_2^{(i_2)} - 0.5h_2 \leq t_2 \leq x_2^{(i_2)} + 0.5h_2\}$ ,  $i_2 = \overline{2, N_2}$ ;  $\hat{e}^{(1)}(h_1, l_2 - h_2) = \{0 \leq t_1 \leq 1.5h_1, \quad l_2 - 1.5h_2 \leq t_2 \leq l_2\}$ ,  $\hat{e}^{(1)}(\xi - h_1, h_2) = \{\xi - 1.5h_1 \leq t_1 \leq \xi, \quad 0 \leq t_2 \leq 1.5h_2\}$ ,  $\hat{e}^{(1)}(\xi - h_1, x_2^{(i_2)}) = \{\xi - 1.5h_1 \leq t_1 \leq \xi, \quad x_2^{(i_2)} - 0.5h_2 \leq t_2 \leq x_2^{(i_2)} + 0.5h_2\}$ ,  $i_2 = \overline{2, N_2}$ ;  $\hat{e}^{(1)}(\xi - h_1, l_2 - h_2) = \{\xi - 1.5h_1 \leq t_1 \leq \xi, \quad l_2 - 1.5h_2 \leq t_2 \leq l_2\}$ ,  $\hat{e}^{(1)}(x_1^{(i_1)}, h_2) = \{x_1^{(i_1)} - 0.5h_1 \leq t_1 \leq x_1^{(i_1)} + 0.5h_1, \quad 0 \leq t_2 \leq 1.5h_2\}$ ,  $i_1 = \overline{2, N_{1\xi} - 2}$ ;  $\hat{e}^{(1)}(x_1^{(i_1)}, l_2 - h_2) = \{x_1^{(i_1)} - 0.5h_1 \leq t_1 \leq x_1^{(i_1)} + 0.5h_1, \quad l_2 - 1.5h_2 \leq t_2 \leq l_2\}$ ,  $i_1 = \overline{2, N_{1\xi} - 2}$ . Аналогично определяется  $\hat{e}^{(2)}$  в  $\Omega_2$ . Нетрудно показать, что для любых управлений  $g \in U$ ,  $\Phi_h \in U_h$  справедливы включения  $R_h g \in U_h$ ,  $N_h \Phi_h \in U$ .

**Т е о р е м а 4.3** Пусть  $J_*$  и  $J_{h*}$  – нижние грани функционалов  $J(g)$  и  $J_h(\Phi_h)$  в задачах (2.10), (2.1)–(2.9) и (3.13)–(3.17) соответственно. Семейство сеточных задач (3.13)–(3.17), зависящих от шага  $h$  сетки  $\bar{\omega}^{(1,2)} \subset \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ , при  $|h| \rightarrow 0$  аппроксимирует исходную экстремальную задачу (2.10), (2.1)–(2.9) по функционалу, т. е.  $\lim J_{h*} = J_*$  при  $|h| \rightarrow 0$ , и справедлива оценка скорости сходимости  $|J_{h*} - J_*| \leq M|h|$ .

Доказательство теоремы следует из методики, изложенной в работе [1].

Предположим теперь, что с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение  $J_{h*} + \epsilon_h$  нижней грани  $J_{h*}$  функционала  $J_h(\Phi_h)$  на  $U_h$  в задаче (3.13)–(3.17) и найдено сеточное управление  $\Phi_{h\epsilon_h} \in U_h$ , дающее приближенное решение задачи (3.13)–(3.17) в следующем смысле:

$$J_{h*} \leq J_h(\Phi_{h\epsilon_h}) \leq J_{h*} + \epsilon_h, \quad \Phi_{h\epsilon_h} \in U_h, \quad (4.35)$$

где  $\epsilon_h \geq 0$  и  $\epsilon_h \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ . Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление  $\Phi_{h\epsilon_h} \in U_h$  из (4.35) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.10), (2.1)–(2.9).

**Т е о р е м а 4.4** Пусть последовательность сеточных управлений  $\{\Phi_{h\epsilon_h}\} \subset U_h$  определена из условий (4.35). Тогда последовательность управлений  $\{N_h \Phi_{h\epsilon_h}\}$  является минимизирующей для функционала  $J(g)$  исходной задачи (2.10), (2.1)–(2.9), т. е.  $J(F_h \Phi_{h\epsilon_h}) \rightarrow J_*$  при  $|h| \rightarrow 0$  и справедлива оценка скорости сходимости  $0 \leq J(F_h \Phi_{h\epsilon_h}) - J_* \leq C|h| + \epsilon_h$ . Последовательность  $\{F_h \Phi_{h\epsilon_h}\}$  слабо сходится в  $H$  к множеству  $U_* \neq \emptyset$  оптимальных управлений исходной экстремальной задачи (2.10), (2.1)–(2.9).

Доказательство теоремы проводится на основе методики из [1] и опирается на полученные выше результаты. Слабая сходимость минимизирующей последовательности  $\{F_h \Phi_{h\epsilon_h}\}$  исходного функционала  $J(g)$  к множеству  $U_* \neq \emptyset$  следует из теоремы 2.2.

Рассмотрим вопрос о сильной сходимости в  $H$  по управлению разностных аппроксимаций (3.13)–(3.17). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов  $J_h(\Phi_h)$  ведутся приближенно как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо функционала  $J_h(\Phi_h)$  фактически используется приближенный функционал  $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$ , связанный с  $J_h(\Phi_h)$  соотношениями  $J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h)$ ,  $|\theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \leq \delta_h, \forall \Phi_h \in U_h, \delta_h \rightarrow +0$  при  $|h| \rightarrow 0$ .

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (3.13)–(3.17) введем на  $U$  функционал-стабилизатор  $\Omega(g) = \|g\|_H^2, g \in U$ , и его сеточный аналог  $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h}^2, \Phi_h \in U_h$ . При каждом  $h$  рассмотрим на  $U_h$  сеточный функционал Тихонова задачи (3.13)–(3.17):  $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega_h(\Phi_h), \Phi_h \in U_h$ , где  $\alpha_h \geq 0$  и  $\alpha_h \rightarrow +0$  при  $|h| \rightarrow 0$ . Рассмотрим задачу минимизации функционала  $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$  на  $U_h$ : при каждом  $h$  определим сеточное управление  $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$ , удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf\{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} \leq T_{h\delta_h\alpha_h}(\hat{\Phi}_h) \leq T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \quad (4.36)$$

где  $\nu_h \geq 0$  и  $\nu_h \rightarrow +0$  при  $|h| \rightarrow 0$ . Введем множество  $\Omega$ -нормальных решений задачи оптимального управления (2.10), (2.1)–(2.9):  $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf\{\Omega(g_*) : g_* \in U_*\} = \Omega_*\}$ . Поскольку функционал  $\Omega(g)$  является слабым стабилизатором в  $H$  задачи (2.10), (2.1)–(2.9) и функционалы  $J(g)$  и  $\Omega(g)$  – полунепрерывны снизу на  $U$  в слабой топологии пространства  $H$ , то  $U_{**} \neq \emptyset$  [1].

**Т е о р е м а 4.5** Пусть последовательность сеточных управлений  $\{\hat{\Phi}_h\} \subset U_h$  определена из условий (4.36). Тогда последовательность управлений  $\{N_h\hat{\Phi}_h(r)\} \subset U_h$  (см. определение выше) является минимизирующей для функционала  $J(g)$  исходной экстремальной задачи (2.10), (2.1)–(2.9), т. е.  $\lim J(N_h\hat{\Phi}_h) = J_*$  при  $|h| \rightarrow 0$  и справедлива оценка скорости сходимости:  $0 \leq J(F_h\hat{\Phi}_h) - J_* \leq M[|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h]$ .

Если, кроме того, параметры  $\nu_h, \delta_h, \alpha_h$  согласованы с  $|h|$  так, что  $\nu_h, \delta_h, \alpha_h \rightarrow +0$  при  $|h| \rightarrow 0$  и  $\frac{|h| + \nu_h + \delta_h}{\alpha_h} \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ , то последовательность  $\{N_h\hat{\Phi}_h\}$  сильно сходится в  $H$  к множеству  $\Omega$ -нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений  $U_{**}$  задачи (2.10), (2.1)–(2.9).

Доказательство теоремы проводится на основе методики из [1, 6, 8] и опирается на полученные выше результаты.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации*, МЦНМО, М., 2011, 624 с.
2. А. З. Ишмухаметов, *Вопросы устойчивости и аппроксимации задач оптимального управления системами с распределенными параметрами*, ВЦ РАН, М., 2001, 120 с.
3. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47:3** (2007), 376–396.
4. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, “Разностные аппроксимации задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений в выпуклой области с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **53:1** (2013), 20–46.

5. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, М. Э. Файрузов, “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями, с управлением в граничных условиях сопряжения”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:11 (2014), 1767–1792.
6. Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов, “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениями в коэффициентах при старших производных”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:7 (2016), 1267–1293.
7. F. Lubyshev, A. Manapova, “Numerical solution of optimization problems for semi-linear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions”, *Applied Numerical Mathematics*, **104** (2016), 182–203.
8. Ф. В. Лубышев, А. Р. Манапова, “О некоторых задачах оптимального управления и их аппроксимации для некоторых несамосопряженных эллиптических уравнений типа конвекции-диффузии”, *Итоги науки и техники. Сер. «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»*, **143** (2017), 3–23.
9. А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, М., 1989, 616 с.
10. Н. Т. Дренска, “Точность численных алгоритмов для одномерной задачи об остывании металла в формах”, *Вестник Московского ун-та. Сер. 15. «Вычисл. матем. и кибернетика»*, 1981, № 4, 15–21.
11. Г. И. Марчук, *Сопряженные уравнения и анализ сложных систем*, Наука, М., 1992, 335 с.
12. Х. Гаевский, К. Греггер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978, 336 с.
13. Ф. Е. Браудер, *Материалы к совместному советско-американскому симпозиуму по уравнениям с частными производными*, Новосибирск, 1963.
14. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973, 407 с.
15. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Вычислительная теплопередача*, Эдиториал УРСС, М., 2003, 784 с.

Поступила 12.04.2019

MSC2010 65N06

# An approximation of problems of optimal control on the coefficients of elliptic convection-diffusion equations with an imperfect contact matching condition

© F. V. Lubyshev<sup>1</sup>, A. R. Manapova<sup>2</sup>

**Abstract.** We consider nonlinear optimization problems for processes described by non-self-adjoint elliptic equations of convection-diffusion problems with an imperfect contact matching conditions. These are the problems with a jump of the coefficients and of the solution on the interface; the jump of the solution is proportional to the normal component of the flux. Variable coefficients multiplying the highest and the lowest derivatives in the equation and the coefficients by nonlinear terms in the equations of state are used as controls. Finite difference approximations of optimization problems are constructed and investigated. For the approximation of state equations we propose a new “modified difference scheme” in which the variable grid coefficients in the principal part of the difference operator are computed using method other than traditionally applied in the theory of difference schemes. The problem’s correctness is investigated. The accuracy estimation of difference approximations with respect to the state are obtained. Convergence rate of approximations with respect to cost functional is estimated, too. Weak convergence with respect to control is proved. The presence of a non-self-adjoint operator causes certain difficulties in constructing and studying approximations of differential equations describing discontinuous states of controlled processes, in particular, in proving the difference approximations well-posedness, and in studying the relationship between the original optimal control problem and the approximate mesh problem. The approximations are regularized. The obtained results will be heavily used later in solving problems associated with the development of effective methods for the numerical solution to the constructed finite-dimensional mesh optimal control problems and their computer implementation.

**Key Words:** optimal control problem, non-self-adjoint elliptic equation, imperfect contact, difference approximations

## REFERENCES

1. F. P. Vasil’ev, *Metody optimizatsii [Optimization methods]*, Moscow center for continuous mathematical education, Moscow, 2011 (In Russ.), 624 c.
2. A. Z. Ishmukhametov, *Voprosy ustoychivosti i approksimatsii zadach optimal’nogo upravleniya [Stability and approximation of optimal control problems of distributed parameter systems]*, Vychisl. Tsentr Ross. Akad. Nauk, Moscow, 2001 (In Russ.), 120 c.
3. F. V. Lubyshev, A. R. Manapova, “[On some optimal control problems and their finite difference approximations and regularization for quasilinear elliptic equations with controls in the coefficients]”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:3 (2007), 361–380 (In Russ.).
4. F. V. Lubyshev, A. R. Manapova, “[Difference approximations of optimization problems for semilinear elliptic equations in a convex domain with controls in the coefficients multiplying the highest derivatives]”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **53**:1 (2013), 8–33 (In Russ.).

<sup>1</sup>**Fedor F. Lubyshev**, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, Bashkir state University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru

<sup>2</sup>**Aigul R. Manapova**, Associate Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, Bashkir state University (32 Zaki Validi St., Ufa 450076, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-8778-4917>, aygulrm@mail.ru

5. F. V. Lubyshev, A. R. Manapova, M. E. Fairuzov, “[Approximations of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions and with control in matching boundary conditions]”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:11 (2014), 1700–1724 (In Russ.).
6. F. V. Lubyshev, M. E. Fairuzov, “[Approximations of optimal control problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and states and with controls in the coefficients multiplying the highest derivatives]”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **56**:7 (2016), 1238–1263 (In Russ.).
7. F. Lubyshev, A. Manapova, “Numerical solution of optimization problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions”, *Applied Numerical Mathematics*, **104** (2016), 182–203.
8. F. V. Lubyshev and A. R. Manapova, “[On certain problems of optimal control and their approximations for some non-self-adjoint elliptic equations of the convection-diffusion type]”, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. «Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz.»*, **143** (2017), 3–23 (In Russ.).
9. A. A. Samarskij, *Teoriya raznostnykh skhem [Difference theory]*, Nauka, M., 1989 (In Russ.), 616 c.
10. N. T. Drenska, “[Accuracy of numerical algorithms for the one-dimensional problem of cooling metals in molds]”, *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 15 «Vychisl. Mat. Kibern.»*, 1981, № 4, 15–21 (In Russ.).
11. G. I. Marchuk, *[Adjoint equations and complex system analysis]*, Nauka, M., 1992 (In Russ.), 335 c.
12. H. Gajewski, K. Greger, K. Zacharias, *Nichtlineare operatorgleichungen und operatordifferentiale*, Akademie Verlag, Berlin, 1974, 281 c.
13. F. E. Browder, *[Transactions of the Symposium on Partial Differential Equations]*, Sib. Otd. Akad. Nauk SSSR, Novosibirsk, 1963.
14. O. A. Ladyzhenskaya, *The boundary value problems of mathematical physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1985 (In Russ.), 322 c.
15. A. A. Samarskij, P. N. Vabishchevich, *Vychislitel'naya teploperedacha [Computational heat transfer]*, Editorial URSS, Moscow, 2003 (In Russ.), 784 c.

Submitted 12.04.2019



УДК 519.17

# Конструктивная теорема существования, ассоциированная с локальными преобразованиями графов для задачи о независимом множестве

© Д. В. Сироткин<sup>1</sup>, Д. С. Малышев<sup>2</sup>

**Аннотация.** Задача о независимом множестве для заданного графа состоит в том, чтобы найти размер наибольшего множества его попарно несмежных вершин. Известны многочисленные случаи NP-трудности и случаи полиномиальной разрешимости этой задачи. Для установления вычислительного статуса задачи о независимом множестве в рассматриваемом классе графов часто используются локальные преобразования графов. В данной работе рассматривается некоторый класс замен подграфов в графах, причем замены из этого класса изменяют число независимости контролируемым образом. Каждое такое локальное преобразование графов определяется некоторым шаблоном — совокупностью подмножеств множества. Очевидно, что совокупность должна быть градуируемой. Показывается, что заменяющий подграф существует для любого градуируемого шаблона.

**Ключевые слова:** задача о независимом множестве, локальное преобразование, граф с заданными свойствами

## 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т. е. непомеченные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для графа  $G$  и подмножества  $V' \subseteq V(G)$  через  $G \setminus V'$  обозначается результат удаления всех элементов  $V'$  из  $G$ . *Независимым множеством* графа называется любое множество его попарно несмежных вершин. Независимое множество графа  $G$  называется *наибольшим*, если оно имеет наибольшее количество вершин, а его размер называется *числом независимости*  $G$  и обозначается через  $\alpha(G)$ . *Задача о независимом множестве* для заданного графа состоит в вычислении его числа независимости. Данная задача является классической NP-трудной задачей на графах [1].

Отображение  $c : V(G) \rightarrow \overline{1, k}$  называется *вершинной  $k$ -раскраской* графа  $G$ , если для любых смежных его вершин  $v$  и  $u$  выполнено неравенство  $c(v) \neq c(u)$ . Если граф имеет вершинную  $k$ -раскраску, то он называется *вершинно  $k$ -раскрашиваемым*. *Задача о вершинной  $k$ -раскраске* для заданного графа  $G$  состоит в том, чтобы определить, является ли он вершинно  $k$ -раскрашиваемым. Это тоже классическая NP-полная задача на графах [1].

В [2] рассматривался достаточно общий класс локальных преобразований графов, названных *схемами замен*, при применении которых число независимости в точности сохраняется, но отмечается, что ничего принципиально нового не происходит, если допустить

<sup>1</sup>Сироткин Дмитрий Валерьевич, стажер-исследователь, лаборатория алгоритмов и технологий анализа сетевых структур, ФГАОУ ВО «НИУ ВШЭ» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2682-9867>, [dmitriy.v.sirotkin@gmail.com](mailto:dmitriy.v.sirotkin@gmail.com)

<sup>2</sup>Малышев Дмитрий Сергеевич, профессор, кафедра прикладной математики и информатики, ФГАОУ ВО «НИУ ВШЭ» (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), профессор, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГАОУ ВО «ННГУ им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23); доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7529-8233>, [dsmalyshev@rambler.ru](mailto:dsmalyshev@rambler.ru)

изменение числа независимости на некоторую константу. Мы рассматриваем некоторый подкласс класса схем замен, который будет определен далее.

Пусть  $G$  — некоторый граф, а  $H$  — некоторый его порожденный подграф. Подмножество  $A \subseteq V(H)$  назовем  $H$ -отделяющим, если ни одна из вершин графа  $H \setminus A$  не смежна ни с одной из вершин графа  $G \setminus V(H)$ . Пусть граф  $G$  содержит порожденный подграф  $G_1$  с  $G_1$ -отделяющим множеством  $A$ ,  $G_2$  — граф, для которого  $A \subseteq V(G_2)$ . Замена  $G_1$  на  $G_2$  в графе  $G$  состоит в образовании графа с множеством вершин  $(V(G) \setminus V(G_1)) \cup V(G_2)$  и множеством ребер  $(E(G) \setminus E(G_1)) \cup E(G_2)$ .

Будем говорить, что графы  $G_1$  и  $G_2$  являются  $\alpha$ -подобными относительно подмножеств  $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$ , если существует такая константа  $c$ , что для любого  $X \subseteq A$  выполняется равенство  $\alpha(G_1 \setminus X) = \alpha(G_2 \setminus X) + c$ . Нетрудно видеть, что графы  $G_1$  и  $G_2$  являются  $\alpha$ -подобными относительно  $A$  тогда и только тогда, когда  $\mathfrak{M}_\alpha(G_1, A) = \mathfrak{M}_\alpha(G_2, A)$ , где  $\mathfrak{M}_\alpha(H, A)$  — семейство всех таких множеств  $X \subseteq A$ , что для всякого  $Y \subset X$  выполняется неравенство  $\alpha(H \setminus X) < \alpha(H \setminus Y)$ . В работе [2] было доказано следующее утверждение.

**Л е м м а 1.1** Пусть графы  $G_1$  и  $G_2$  являются  $\alpha$ -подобными относительно  $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$ , причем  $A$  является  $G_1$ -отделяющим в графе  $G$ . Тогда, если граф  $G_\alpha^*$  — результат замены  $G_1$  на  $G_2$  в графе  $G$ , то

$$\alpha(G_\alpha^*) = \alpha(G) + \alpha(G_2) - \alpha(G_1).$$

Будем говорить, что графы  $G_1$  и  $G_2$  являются  $(\chi, k)$ -подобными относительно  $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$ , если для любых вершинных  $k$ -раскрасок  $c_1$  и  $c_2$ , соответственно, графов  $G_1$  и  $G_2$  существуют вершинные  $k$ -раскраски  $c''$  и  $c'$ , соответственно, графов  $G_2$  и  $G_1$  такие, что для любой вершины  $v \in A$  справедливы равенства  $c_1(v) = c''(v)$  и  $c_2(v) = c'(v)$ . Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение (см. также работу [3]).

**Л е м м а 1.2** Пусть графы  $G_1$  и  $G_2$  являются  $(\chi, k)$ -подобными относительно  $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$ , причем  $A$  является  $G_1$ -отделяющим в графе  $G$ . Тогда, если граф  $G_{(\chi, k)}^*$  — результат замены  $G_1$  на  $G_2$  в графе  $G$ , то граф  $G$  является вершинно  $k$ -раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф  $G_{(\chi, k)}^*$ .

Для заданных графа  $G$  и подмножества  $A \subseteq V(G)$  определим множество  $\mathfrak{M}_{(\chi, k)}(G, A)$  следующим образом. Оно состоит из всевозможных разбиений  $A$  на не более чем  $k$  непустых частей, каждое из которых не продолжается до вершинной  $k$ -раскраски  $G$ . Отметим, что если некоторое разбиение  $A$  не задает вершинную  $k$ -раскраску данного подмножества, то оно заведомо не продолжается до вершинной  $k$ -раскраски  $G$ . Нетрудно видеть, что графы  $G_1$  и  $G_2$  являются  $(\chi, k)$ -подобными относительно  $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$  тогда и только тогда, когда имеет место равенство  $\mathfrak{M}_{(\chi, k)}(G_1, A) = \mathfrak{M}_{(\chi, k)}(G_2, A)$ .

Интерес к схемам замен (со свойствами  $\alpha$ -подобия и  $(\chi, k)$ -подобия) обусловлен потенциальной возможностью их применения для редукции графов, что может быть полезным при решении задач о независимом множестве и о вершинной  $k$ -раскраске в некоторых классах графов [2], [4–11]. Применительно к нашим заменам также интересны следующие задачи реализации и оптимизации. Задача реализации для задачи о независимом множестве для заданного множества  $\mathcal{M} \subseteq 2^A$  состоит в том, чтобы выяснить, существуют ли граф  $G$  и подмножество  $A \subseteq V(G)$  такие, что  $\mathfrak{M}_\alpha(G, A) = \mathcal{M}$ . Задача оптимизации для задачи о независимом множестве для заданных графа  $G$  и  $A \subseteq V(G)$  состоит в поиске такого графа  $H$  с минимальным количеством вершин, что  $A \subseteq V(H)$  и  $\mathfrak{M}_\alpha(G, A) = \mathfrak{M}_\alpha(H, A)$ .

В работе [3] рассматривались и решались задачи реализации и оптимизации применительно к задаче о вершинной  $k$ -раскраске. Именно, там было показано, что для любых

$n$  и  $k \geq 3$  и произвольного семейства  $\varrho$  попарно различных разбиений  $n$ -элементного множества  $A$  на не более чем  $k$  непустых частей существует граф  $G$  и подмножество  $A \subseteq V(G)$  такие, что  $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$ . Задача оптимизации была поставлена следующим образом. Для заданных натуральных чисел  $m, n, k \geq 3$  была определена функция шенноновского типа  $f_\chi(m, n, k)$ . Пусть  $\Gamma_{m,n,k}$  — совокупность, состоящая из всевозможных  $m$  различных разбиений множества  $\overline{1, n}$  на не более чем  $k$  непустых частей. Положим  $f_\chi(m, n, k) = \max_{\varrho \in \Gamma_{m,n,k}} g_\chi(\varrho)$ , где

$$g_\chi(\varrho) = \min_{\{H: \overline{1, n} \subseteq V(H), \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H, \overline{1, n}) = \varrho\}} |V(H)|.$$

В работе [3] было показано, что  $f_\chi(m, n, k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$ .

Применительно к задаче о независимом множестве задача реализации имеет положительное решение далеко не для любого  $\mathcal{M}$ . Это так, например, для  $\mathcal{M} = \{\{a, b\}, \{a\}\}$ . Действительно, соотношения

$$\alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G \setminus \{b\}) = \alpha(G \setminus \{a, b\}) + 1, \alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G) - 1, \alpha(G \setminus \{b\}) = \alpha(G)$$

одновременно не совместны. Понятно, что необходимым условием положительного ответа в задаче реализации является *градуируемость* множества  $\mathcal{M}$ , т. е. независимость количества элементов множества  $\mathcal{M}$  на путях (по отношению включения) между любыми двумя подмножествами множества  $A$ . Действительно, если  $\mathcal{M}$  не градуируемо, то существуют такие числа  $k \neq l$  и такие подмножества

$$V_1 \subset V_2 \subset \dots \subset V_k \subseteq A \text{ и } U_1 \subset U_2 \subset \dots \subset U_l \subseteq A,$$

что

$$\alpha(G \setminus V_i) = \alpha(G \setminus V_{i+1}) + 1, 1 \leq i \leq k-1 \text{ и } \alpha(G \setminus U_j) = \alpha(G \setminus U_{j+1}) + 1, 1 \leq j \leq l-1,$$

а графы  $G \setminus V_k$  и  $G \setminus U_l$  изоморфны.

Оказывается, что условие градуируемости является и достаточным. Это утверждение является основным результатом данной работы. Другими словами, для любого множества  $A$  и градуируемого множества  $\mathcal{M} \subseteq 2^A$  существует такой граф  $G_{\mathcal{M}}$  с  $2^{|A|} + |A| - |\mathcal{M}|$  вершинами, что  $A \subseteq V(G_{\mathcal{M}})$  и  $\mathfrak{M}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A) = \mathcal{M}$ .

## 2. Теорема существования графов с рассматриваемыми свойствами

Пусть  $A$  — некоторое множество, а подмножество  $\mathcal{M} \subseteq 2^A$  градуируемо. Переобозначим  $\overline{X} = A \setminus X$  для  $X \subseteq A$ ,  $\overline{\mathcal{M}} = 2^A \setminus \mathcal{M}$ . Очевидно, что  $\overline{\mathcal{M}}$  тоже градуируемо. Для произвольного градуируемого подмножества  $\mathcal{M}' \subseteq 2^A$  существует *функция ранга*  $r_{\mathcal{M}'} : 2^A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ , определяемая для произвольного  $X \subseteq A$  как длина неуплотняемой по отношению включения цепи, которая целиком состоит из элементов множества  $\mathcal{M}'$ , содержащихся в  $X$ . Поскольку  $\mathcal{M}'$  градуируемо, то эта длина не зависит от выбора неуплотняемой цепи. Вместе с тем,  $X \in \mathcal{M}$  тогда и только тогда, когда  $r_{\mathcal{M}}(X) = r_{\mathcal{M}}(X \setminus \{x\}) + 1$  для любого  $x \in X$ .

Определим граф  $G_{\mathcal{M}}$  следующим образом.

1. Рассмотрим пустой граф на множестве вершин  $A$ .

2. Для каждого элемента  $X \in \overline{\mathcal{M}}$  (кроме пустого множества) добавим новую вершину, соответствующую  $X$ , и соединим ее со всеми вершинами множества  $A$ , которые соответствуют элементам множества  $X$ .
3. Разобьем добавленные на предыдущем шаге вершины на классы эквивалентности по отношению равенства функции ранга на соответствующих им элементах множества  $\overline{\mathcal{M}}$  и для каждого класса эквивалентности попарно соединим все его вершины.

Очевидно, что граф  $G_{\mathcal{M}}$  имеет ровно  $2^{|A|} + |A| - |\mathcal{M}|$  вершин. Для графа  $G_{\mathcal{M}}$  и подмножества  $X \subseteq A$  через  $\alpha_X(G_{\mathcal{M}})$  обозначим наибольший из размеров независимых множеств этого графа, пересечение которых с множеством вершин  $A$  в точности равно  $X$ .

**Л е м м а 2.1** *Для любого  $X \subseteq A$  справедливо равенство*

$$\alpha_X(G_{\mathcal{M}}) = |X| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(\overline{X}).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Независимое подмножество вершин  $X$  может быть пополнено до большего независимого только вершинами, которые соответствуют таким  $Y \in \overline{\mathcal{M}}$ , что  $Y \cap X = \emptyset$ . Но тогда  $\alpha_X(G_{\mathcal{M}})$  равно  $|X| + r_X$ , где  $r_X$  — наибольшее количество классов эквивалентности (по отношению равенства функции ранга), целиком лежащих во множестве  $\overline{X}$ . Понятно, что  $r_X = r_{\overline{\mathcal{M}}}(\overline{X})$ . Поэтому  $\alpha_X(G_{\mathcal{M}}) = |X| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(\overline{X})$ .  
**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

**Л е м м а 2.2** *Для любого  $X \subseteq A$  справедливо равенство*

$$\alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus X) = |A| - |X| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(X).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Очевидно, что выполнено соотношение

$$\alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus X) = \max_{Y \subseteq A \setminus X} (\alpha_Y(G_{\mathcal{M}}))$$

. Согласно данному соотношению и Лемме 2.1, запишем:

$$\alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus X) = \max_{Y \subseteq A \setminus X} (|Y| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(A \setminus Y)).$$

Функция  $f(Z) = |Z| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(A \setminus Z)$  является монотонно возрастающей (относительно отношения включения) на  $2^A$ . Действительно, если  $Z \subseteq A$  и  $z \in A \setminus Z$ , то

$$r_{\overline{\mathcal{M}}}(A \setminus Z) \leq r_{\overline{\mathcal{M}}}(A \setminus (Z \cup \{z\})) + 1, |Z \cup \{z\}| = |Z| + 1 \text{ и } f(Z \cup \{z\}) \geq f(Z).$$

Поэтому максимум функции  $|Y| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(A \setminus Y)$  на  $2^{A \setminus X}$  достигается в точке  $Y = A \setminus X$ . Таким образом,

$$\alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus X) = |A| - |X| + r_{\overline{\mathcal{M}}}(X).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

**Л е м м а 2.3** *Справедливо соотношение  $\mathfrak{M}_{\alpha}(G_{\mathcal{M}}, A) = \mathcal{M}$ .*

**Доказательство.** Для доказательства справедливости данной леммы достаточно показать, что множество  $\overline{\mathfrak{M}}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A) = 2^A \setminus \mathfrak{M}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A)$  совпадает с  $\mathcal{M}$ . Множество  $\overline{\mathfrak{M}}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A)$  состоит в точности из таких подмножеств  $X$  множества  $A$ , что существует  $Y \subset X$ , для которого  $\alpha(G \setminus X) = \alpha(G \setminus Y)$ . Пусть  $Z \subseteq A$  и  $z \in Z$ . Если  $Z \in \mathcal{M}$ , то  $r_{\overline{\mathcal{M}}}(Z \setminus \{z\}) = r_{\overline{\mathcal{M}}}(Z)$ , а если  $Z \in \overline{\mathcal{M}}$ , то  $r_{\overline{\mathcal{M}}}(Z \setminus \{z\}) = r_{\overline{\mathcal{M}}}(Z) - 1$ . Таким образом, по Лемме 2.2 равенство  $\alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus Z) = \alpha(G_{\mathcal{M}} \setminus (Z \cup \{z\}))$  имеет место тогда и только тогда, когда  $Z \in \mathcal{M}$ . Значит,  $\overline{\mathfrak{M}}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A) = \mathcal{M}$ .

**Доказательство закончено.**

Из леммы 2.3 следует справедливость следующего утверждения, которое является основным в данной работе.

**Теорема 2.1** *Для любых множества  $A$  и градуируемого множества  $\mathcal{M} \subseteq 2^A$  существует граф  $G_{\mathcal{M}}$  с  $2^{|A|} + |A| - |\mathcal{M}|$  вершинами такой, что  $A \subseteq V(G_{\mathcal{M}})$  и что  $\mathfrak{M}_\alpha(G_{\mathcal{M}}, A) = \mathcal{M}$ .*

### Благодарности.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (проект № 18-31-20001-мол-а-вед).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Гэри, Д. Джонсон, *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, 1982, 416 с.
2. В. Е. Алексеев, В. В. Лозин, “О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **5:1** (1998), 3–19.
3. Д. В. Сироткин., “Теоремы существования и достаточности, связанные с локальными преобразованиями графов для задачи о  $k$ -раскраске”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **19:2** (2017), 98–104.
4. Д. В. Сироткин., “О сложности построения 3-раскраски с короткими гранями”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **20:2** (2018), 199–205.
5. D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev, “A method of graph reduction and its applications”, *Discrete Mathematics and Applications*, **28:4** (2018), 249–258.
6. D. S. Malyshev, D. V. Sirotkin, “Polynomial-time solvability of the independent set problem in a certain class of subcubic planar graphs”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **11:3** (2017), 400–414.
7. D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev, “On the complexity of the vertex 3-coloring problem for the hereditary graph classes with forbidden subgraphs of small size”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **25:4** (2018), 759–769.
8. V. E. Alekseev, D. S. Malyshev, “Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **3:1** (2008), 1–5.

9. B. Lévêque, D. de Werra, “Graph transformations preserving the stability number”, *Discrete Applied Mathematics*, **160**:18 (2012), 3–8.
10. V. V. Lozin, “Stability preserving transformations of graphs”, *Annals of Operations Research*, **188** (2011), 331–341.
11. D. S. Malyshev, “Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **7**:4 (2013), 537–548.

Поступила 30.04.2019

MSC2010 05C69

## A constructive existence theorem related to local transformations of graphs for the independent set problem

  D. V. Sirotkin<sup>1</sup>, D. S. Malyshev<sup>2</sup>

**Abstract.** For a given graph, the independent set problem is to find the size of a maximum set of pairwise non-adjacent its vertices. There are numerous cases of NP-hardness and polynomial-time solvability of this problem. To determine a computational status of the independent set problem, local transformations of graphs are often used. The paper considers some class of replacements of subgraphs in graphs that change the independence number in a controllable way. Every such local transform of a graph is determined by some pattern which is a subset of the power set. It is obvious that this pattern must be gradable. The paper shows that replacing subgraph exists for any gradable pattern.

**Key Words:** independent set problem, local transformation, graph with given properties

## REFERENCES

1. M. Garey, D. Johnson, [*Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*], Mir Publ., Moscow, 1982 (In Russ.), 416 p.
2. V. E. Alekseev, V. V. Lozin, “[On local transformations of graphs that preserve the independence number]”, *Diskretnyy Analiz i Issledovaniye Operatsiy*, **5**:1 (1998), 3–19 (In Russ).
3. D. V. Sirotkin, “[Theorems of existence and sufficiency connected with local transformations of graphs for the  $k$ -colourability problem]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19**:2 (2017), 98–104 (In Russ).
4. D. V. Sirotkin, “[On the complexity for constructing a 3-colouring for planar graphs with short facets]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **20**:2 (2018), 199–205 (in Russ).

<sup>1</sup>**Dmitry V. Sirotkin**, Research Intern, Laboratory of Algorithms and Technologies for Network Analysis, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2682-9867>, [dmitriy.v.sirotkin@gmail.com](mailto:dmitriy.v.sirotkin@gmail.com)

<sup>2</sup>**Dmitry S. Malyshev**, Professor, Department of Applied Mathematics and Information Science, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja St., Nizhny Novgorod 603155, Russia), Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina Avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7529-8233>, [dsmalyshev@rambler.ru](mailto:dsmalyshev@rambler.ru)

5. D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev, “A method of graph reduction and its applications”, *Discrete Mathematics and Applications*, **28**:4 (2018), 249–258.
6. D. S. Malyshev, D. V. Sirotkin, “Polynomial-time solvability of the independent set problem in a certain class of subcubic planar graphs”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **11**:3 (2017), 400–414.
7. D. V. Sirotkin, D. S. Malyshev, “On the complexity of the vertex 3-coloring problem for the hereditary graph classes with forbidden subgraphs of small size”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **25**:4 (2018), 759–769.
8. V. E. Alekseev, D. S. Malyshev, “Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **3**:1 (2008), 1–5.
9. B. Lévêque, D. de Werra, “Graph transformations preserving the stability number”, *Discrete Applied Mathematics*, **160**:18 (2012), 3–8.
10. V. V. Lozin, “Stability preserving transformations of graphs”, *Annals of Operations Research*, **188** (2011), 331–341.
11. D. S. Malyshev, “Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **7**:4 (2013), 537–548.

*Submitted 30.04.2019*

УДК 532.529:541.182

## О течении вязкой жидкости с заданным градиентом давления через периодические структуры

© М. С. Дерябина<sup>1</sup>, С. И. Мартынов<sup>2</sup>

**Аннотация.** В приближении Стокса решается задача о течении вязкой жидкости через двумерную и трехмерную периодические структуры. В качестве двумерной структуры рассматривается система тонких пластин конечной ширины, в качестве трехмерной – система тонких стержней конечной длины. Пластины и стержни периодически расположены в пространстве с определенными шагами трансляции вдоль взаимно перпендикулярных осей. На основе разработанной ранее авторами процедуры построено приближенное решение уравнений течения жидкости при произвольной ориентации структур относительно заданного вектора градиента давления. Решение ищется в конечной области (ячейках) вокруг включений в классе кусочно-гладких функций, которые являются бесконечно дифференцируемыми в ячейке, а на границах ячейки удовлетворяют условиям непрерывности скорости, нормальных и касательных напряжений. Поскольку решается краевая задача для уравнения Лапласа, то предполагается, что найденное решение – единственное. Вид функций позволяет разделить переменные и свести решение задачи к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. Найдено, что изменение расхода жидкости через характерное поперечное сечение определяется, главным образом геометрическими размерами ячеек свободной жидкости в таких структурах и практически не зависит от размера пластин или стержней.

**Ключевые слова:** вязкая жидкость, градиент давления, периодическая структура, периодическое решение

### 1. Введение

В результате взаимодействия дисперсные частицы при определенных условиях образуют периодические структуры в жидкости [1–4]. Образование периодической структуры происходит в результате двух основных механизмов взаимодействия частиц в жидкости: взаимодействие непосредственно с силами (электростатическими, диполь-дипольными, Ван-дер-Ваальса и др.), действующими между частицами, и гидродинамическими силами, вызванными искажением поля давления и скорости потока жидкости. Первый механизм может быть инициирован как действием внешних полей (диполь-дипольное взаимодействие частиц), так и стабилизацией суспензий двойными электрическими слоями, образованными вокруг частиц [5–8]. При больших концентрациях частиц в несущей жидкости суспензия может находиться в «кристаллическом» состоянии в результате действия только силы тяжести [4].

<sup>1</sup>Дерябина Мария Сергеевна, исполнитель гранта РФФИ, ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д. 16), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5588-6740>, [deryabinams@mail.ru](mailto:deryabinams@mail.ru)

<sup>2</sup>Мартынов Сергей Иванович, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д. 16), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, [martynovsi@mail.ru](mailto:martynovsi@mail.ru)



Наличие структуры в дисперсной системе может значительно изменять механические, оптические и акустические свойства по сравнению с неструктурированными дисперсными системами. Возможность управления свойствами таких систем с помощью внешних полей [5] актуализирует исследования по пониманию и корректному моделированию механизмов взаимодействия при разработке высокотехнологичных материалов с заранее заданными характеристиками на основе жидких дисперсных систем. Течения через периодические структуры используются при расчетах теплообменников, в частности, при создании коммерческих программ.

Моделирование осредненных свойств периодических структур имеет давнюю историю. Еще в XIX в. Д. К. Максвелл [9] и Рэлей [10] впервые исследовали задачу об эффективной теплопроводности тел с включениями. Д. К. Максвелл рассмотрел случай малых концентраций хаотически расположенных включений, Рэлей – включения, помещенные в узлы простой кубической решетки. Во второй половине XX в. в связи с широким применением новых материалов в промышленности активно развивается механика дисперсных систем, в том числе методы осреднения периодических структур. В это время публикуется большое количество работ, посвященных этой тематике [11–13]. Однако во всех работах рассматривается однородное или линейное течение жидкости через периодическую решетку частиц, то есть при постоянном давлении. В то же время на практике, как правило, реализуются течения, создаваемые перепадом давления.

В работе [14] показано, что не существует решения задачи в классе непрерывно-дифференцируемых функций. Поэтому было сделано предположение, что при обтекании бесконечной периодической решетки сферических частиц при постоянном градиенте давления решение в виде квадратичной функции координат реализуется в определенной конечной области вокруг каждой частицы в решетке. Фактически это означает, что возмущения скорости потока жидкости от частиц не обязаны иметь зависимость вида  $R^{-k}$ , где  $R$  – расстояние от центра частицы до точки в жидкости, в которой определяется скорость, а  $k > 1$ . Другими словами, вокруг каждой частицы в периодической решетке можно выделить ячейку, в которой необходимо искать решение уравнений гидродинамики. Форма, размер и геометрия ячейки зависят от формы и размера частиц, а также геометрии самой периодической решетки частиц. Как одно из подтверждений сказанного, в работе [15] показано, что при учете гидродинамических взаимодействий всех частиц возмущения потока вида  $R^{-k}$  не распространяются за границы ячейки Вигнера-Зейтца периодической решетки. Таким образом, если задан градиент давления, то сначала необходимо найти периодическое распределение скорости в потоке вязкой жидкости в безграничной области, разбитой на ячейки, а затем использовать его для решения задачи о течении вязкой жидкости через периодическую решетку частиц. Фактически это некая реновация известного метода ячеек [16], использованного в прошлом веке при решении задач об обтекании большого количества частиц вязкой жидкостью.

Задача нахождения точных решений уравнений течения вязкой жидкости актуальна в настоящее время в связи с многочисленными приложениями, в том числе по расчетам течения вязкой жидкости в каналах различной геометрии в неоднородном температурном поле. При нахождении таких решений используется подход, основа которого заключается в использовании замен, сводящих систему уравнений в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений [17]. В работе [18] подобный подход использован при построении приближенного периодического решения для течения вязкой жидкости в безграничном объеме жидкости при заданном градиенте давления. Процедура основана на разбиении области на ячейки прямоугольной формы (двумерный случай) или в форме прямоугольной призмы (трехмерный случай) и нахождения таких решений уравнений Стокса в этих ячейках, чтобы в соседних оно повторялось с учетом

условий непрерывности скорости и напряжений на границах ячейки. Использовалась хорошо разработанная техника решения краевой задачи Дирихле для уравнений Лапласа в прямоугольнике. Найденные распределения скорости имеют нулевые значения в угловых точках ячеек, поэтому можно считать, что это соответствует течению жидкости через периодическую систему точечных тел, расположенных в этих точках. Воспользуемся этими результатами для построения решения для течения жидкости через периодические структуры.

Между угловыми точками ячеек периодически разместим тонкие пластины (двумерный случай) или тонкие стержни (трехмерный случай) так, чтобы полученная периодическая структура состояла из ячеек свободной жидкости и ячеек с пластинами или стержнями, расположенными по сторонам прямоугольника или прямоугольной призмы. Причем для двумерного случая получаем ячейки с двумя параллельными пластинами, а для трехмерного – с четырьмя параллельными стержнями. Ниже приводится метод построения приближенного периодического решения для течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления через такие структуры, основанный на результатах работы [18].

## 2. Постановка задачи

Исследуем течение несжимаемой жидкости вязкости  $\eta$  через периодическую решетку, образованную неподвижными частицами в виде тонких пластин или тонких стержней. Пластины располагаются вдоль оси  $OX$ , имеют ширину  $2L$  и период трансляции  $2l$ , а вдоль оси  $OY$  – период трансляции  $2h$ . Аналогично для трехмерного случая стержни располагаются вдоль оси  $OX$  и оси  $OZ$ , имеют длину  $2L$  и период трансляции  $2l$  вдоль  $OX$ ,  $2d$  вдоль  $OZ$ , а вдоль оси  $OY$  –  $2h$ . В таких структурах имеются два типа ячеек: ячейки размерами  $2L \times 2h$ , в которых жидкость ограничена двумя пластинами; ячейки, размерами  $2l \times 2h$ , в которых нет пластин, и ячейки размерами  $2L \times 2h \times 2d$ , в которых жидкость, ограничена четырьмя стержнями, и ячейки, размерами  $2l \times 2h \times 2d$ , в которых нет стержней. Будем рассматривать такие размеры ячеек, для которых возможно использовать приближение Стокса:

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p. \quad (2.1)$$

На поверхности каждой пластины или стержня в ячейке должны выполняться условия прилипания:

$$u_x(x, h) = u_x(x, -h) = 0. \quad (2.2)$$

Считается, что заданный градиент давления может иметь произвольное направление относительно пластин или стержней. Искомое распределение скорости жидкости должно быть периодической функцией относительно рассматриваемой системы пластин. Кроме того, так как решение ищется в классе кусочно-гладких функций, то должны выполняться условия непрерывности скорости, нормальных и касательных напряжений на границах ячейки. Аналогичные условия указаны в работе [18].

Поскольку уравнения движения жидкости и граничные условия линейные по скорости, то общее решение задачи можно представить в виде суммы решения задач о течении жидкости с градиентом давления, направленным вдоль пластин или стержней, и течения жидкости с градиентом давления, направленным перпендикулярно пластинам или стержням.

### 3. Решение задачи о течении вязкой жидкости с градиентом давления, направленном вдоль пластин

Рассмотрим случай, когда функция давления зависит только от переменной  $x$ , причем  $\partial p / \partial x = \text{const}$ . Воспользуемся результатами работы [18] по нахождению периодического решения для течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления в безграничной области. Для этого разобьем периодическую структуру на прямоугольные ячейки между пластинами и за пластинами. Поместив начало координат в центр прямоугольной ячейки, ограниченной прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm l$ , представим скорость жидкости в виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2) + u(x, y) + \tilde{u}(x, y), \\ u_y(x, y) &= v(x, y) + \tilde{v}(x, y). \end{aligned}$$

Выражения для функций  $u(x, y)$  и  $v(x, y)$ , соответствующие периодическому решению для случая течения вязкой жидкости в безграничной области, получены в работе [18] и имеют вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ D_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right], \\ v(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ D_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь коэффициент  $D_k$  равен

$$D_k = (-1)^{k+1} \frac{4hl}{\eta \pi^2 (2k+1)^2 \sinh(\chi_k h)} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \chi_k = \frac{\pi(2k+1)}{2l}$$

Функции  $\tilde{u}(x, y)$  и  $\tilde{v}(x, y)$  должны быть определены дополнительно.

В ячейке жидкости с пластинами, ограниченными прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm L$ , в системе координат, связанной с центром ячейки, скорость жидкости представим в виде:

$$\begin{aligned} \hat{u}_x(x, y) &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2) + \hat{u}(x, y), \\ \hat{u}_y(x, y) &= \hat{v}(x, y) \end{aligned}$$

На границах ячеек без пластин должны выполняться условия для скорости:

$$\begin{aligned} u_x(-l, y) &= \hat{u}_x(L, y), & u_x(l, y) &= \hat{u}_x(-L, y), \\ u_y(-l, y) &= \hat{u}_y(L, y), & u_y(l, y) &= \hat{u}_y(-L, y). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Кроме того, на границах таких ячеек должны выполняться условия непрерывности нормальных и касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx}(-l, y) &= \hat{\sigma}_{xx}(L, y), & \sigma_{xx}(l, y) &= \hat{\sigma}_{xx}(-L, y), \\ \sigma_{xy}(-l, y) &= \hat{\sigma}_{xy}(L, y), & \sigma_{xy}(l, y) &= \hat{\sigma}_{xy}(-L, y), \\ \sigma_{yy}(l, y) &= \hat{\sigma}_{yy}(-L, y), & \sigma_{yy}(-l, y) &= \hat{\sigma}_{yy}(L, y) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь  $\sigma_{xy}$ ,  $\sigma_{xx}$ ,  $\hat{\sigma}_{xx}$ ,  $\hat{\sigma}_{xy}$  – компоненты тензора полных напряжений в жидкости в соседних ячейках.

Аналогично работе [18] система уравнений (2.1) для определения функций  $\hat{u}(x, y)$  и  $\hat{v}(x, y)$  в ячейке между пластинами записывается в виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Следуя процедуре, разработанной в [18], получим следующие выражения для  $\hat{u}(x, y)$  и  $\hat{v}(x, y)$ , удовлетворяющие условиям  $\hat{u}(x, \pm h) = 0$ :

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] \\ \hat{v}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right]\end{aligned}$$

При этом выполняется тождество

$$\eta \left( \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} \right) \equiv 0$$

Другими словами, найденное распределение скорости не изменяет касательное напряжение на пластинах по сравнению с решением Пуазейля. Поскольку в ячейке без пластин необходимо найти добавочные функции  $\tilde{u}(x, y)$  и  $\tilde{v}(x, y)$ , которые при  $y = \pm h$  не меняют значения касательных напряжений, то будем искать их в виде

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] \\ \tilde{v}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right]\end{aligned}$$

Из условия непрерывности скорости жидкости на границах ячеек между пластинами и за ними следует равенство

$$\hat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} L \right) = \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} l \right) \quad (3.4)$$

С учетом вида функции  $u(x, y)$  из условия равенства нормальных напряжений на границах ячеек получаем второе соотношение для определения коэффициентов  $\hat{D}_k$  и  $\tilde{D}_k$ :

$$\begin{aligned}& \eta \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2\hat{D}_k \frac{\pi(2k+1)}{2h} \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} L \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right\} = \\ & = -\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ 2\tilde{D}_k \frac{\pi(2k+1)}{2h} \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} l \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right\} - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4h \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right)}{\pi(2k+1) \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} h \right)} \frac{\partial p}{\partial x}\end{aligned}$$

Умножая обе части равенства на  $\cos(\pi(2k' + 1)y/2h)$  и интегрируя по  $y$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , с учетом свойства ортогональности [18] получим равенство:

$$\begin{aligned} \eta \hat{D}_k \frac{\pi(2k+1)}{2h} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)L}{2h}\right) + \eta \tilde{D}_k \frac{\pi(2k+1)}{2h} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)l}{2h}\right) = \\ = \frac{16l^2}{\pi^2(l^2 + h^2)} \frac{\partial p}{\partial x} \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2} \coth\left(\frac{\pi(2k+1)h}{2l}\right). \end{aligned}$$

С учетом соотношения (3.4) найдем следующие значения коэффициентов:

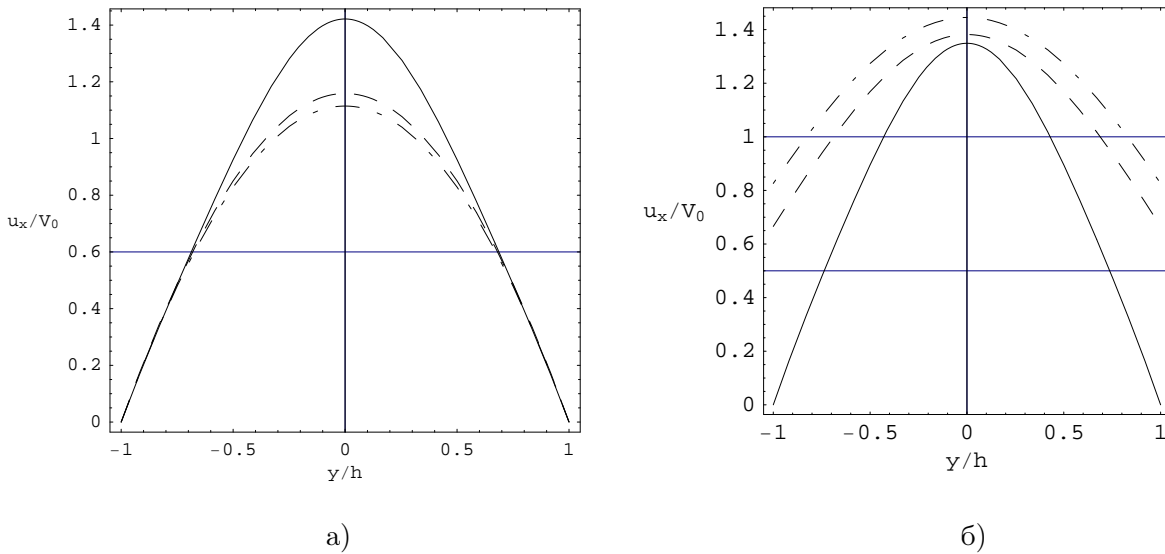
$$\begin{aligned} \hat{D}_k &= \frac{8h\beta l^2}{\eta\pi^2(l^2 + h^2)\lambda_k^2 \coth(\lambda_k L) [\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l)]} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \tilde{D}_k &= \frac{8h\beta l^2}{\eta\pi^2(l^2 + h^2)\lambda_k^2 \coth(\lambda_k l) [\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l)]} \frac{\partial p}{\partial x}. \end{aligned}$$

Здесь

$$\lambda_k = \frac{\pi}{2h}(2k+1), \quad \beta = \sum_0^\infty \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)} \coth\left(\frac{\pi(2k+1)h}{2l}\right).$$

Необходимо отметить, что условия (3.1) для функций  $u_y(x, y)$  и  $\hat{u}_y(x, y)$  выполняются в интегральном виде. Поэтому полученное решение задачи можно считать приближенным.

Легко видеть, что при  $L = 0$  получаем  $\tilde{D}_k = \hat{D}_k = 0$  и решение совпадает с найденным в [18].



**Р и с. 3.1**

Зависимость безразмерной скорости  $u_x/U_0$  от безразмерной координаты  $y/h$  в ячейках с пластинами (а) и без пластин (б)

На рис. 3.1 представлены графики зависимости безразмерной функции  $u_x/V_0$  от безразмерной координаты  $y/h$  для ячеек с пластинами и без них в случае  $L = l = h$ . Сплошная линия соответствует сечениям  $x/h = \pm 1$ , штриховая линия – сечениям  $x/h = \pm 0.5$ , штрих-пунктирная – сечению  $x/h = 0$ . Функция  $u_x/V_0$  представлена первыми тремя членами ряда. Точность такого представления будет показана ниже. В качестве характерной скорости  $V_0$  здесь и далее выбран параметр

$$U_0 = \frac{2h^2}{\pi^2\eta} \left| \frac{\partial p}{\partial x} \right|.$$

Как видно из графиков, скорость жидкости на входе в ячейку с пластинами больше, чем в ее середине. Очевидно, что уменьшение скорости связано с торможением жидкости пластинами. В ячейке без пластин наоборот, скорость жидкости на входе меньше, чем в ее средней части, что по аналогии с предыдущем можно объяснить отсутствием торможения жидкости на верхней и нижней границах. Такое поведение скорости жидкости связано с двумерностью потока. Так из уравнения неразрывности следует, что скорость жидкости между пластинами меняется вдоль них из-за наличия составляющей вектора скорости, направленной перпендикулярно пластинам. Соответственно, расход жидкости через сечение между пластинами меняется вдоль них и, как видно из графиков скорости в ячейках с пластинами и без них, определяется в сечении между ячейками. Как показывают вычисления, изменение расхода жидкости в таком сечении единичной длины определяется выражением:

$$Q = -\frac{1}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} h^3 + 2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\hat{D}_k}{\lambda_k} \coth(\lambda_k L).$$

С учетом выражения для коэффициента  $\hat{D}_k$  расход жидкости главным образом зависит от размеров  $l$  и  $h$  ячеек без пластин и, в меньшей степени, размеров самих пластин  $L$ . Поскольку рассматриваемую структуру можно рассматривать в том числе как модель пористой среды с трещинами, то по расходу жидкости, используя интегральный закон Дарси [16], можно определить коэффициент проницаемости такой среды  $K$ :

$$K = h^2 \left( \frac{1}{3} + \frac{16l^2\beta}{\pi^4(l^2 + h^2)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2(\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l))} \right).$$

При  $l = 0$  получаем минимальное значение  $K = h^{2/3}$ . Наличие ячеек жидкости без пластин (трещин) способствует увеличению проницаемости такой пористой среды.

#### 4. Решение задачи о течении вязкой жидкости с градиентом давления, направленном перпендикулярно пластинам

Рассмотрим случай, когда функция давления зависит только от переменной  $y$ , причем  $\partial p / \partial y = \text{const}$ . Решение этой задачи во многом схоже с рассмотренным выше случаем, поэтому воспользуемся полученными результатами. Скорость жидкости в прямоугольной ячейке жидкости, ограниченной прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm l$ , в центре которой поместим начало координат, представим в виде:

$$\begin{aligned} u_x(x, y) &= \tilde{u}(x, y) + \tilde{u}_1(x, y), \\ u_y(x, y) &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - l^2) + \tilde{v}(x, y) + \tilde{v}_1(x, y). \end{aligned}$$

Функции  $\tilde{u}(x, y)$  и  $\tilde{v}(x, y)$  представим в виде:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\ \tilde{v}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right]. \end{aligned}$$

Скорость жидкости в прямоугольной ячейке жидкости, ограниченными прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm L$ , в центре которой поместим начало координат, представим в виде:

$$\begin{aligned}\widehat{u}_x(x, y) &= \widehat{u}(x, y) + \widehat{u}_1(x, y), \\ \widehat{u}_y(x, y) &= \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - L^2) + \widehat{v}(x, y) + \widehat{v}_1(x, y).\end{aligned}$$

Так как на пластинах скорость жидкости должна быть равна нулю, то для функций  $\widehat{v}_1(x, y)$ ,  $\widehat{v}_2(x, y)$  запишем следующие граничные условия

$$\begin{aligned}\widehat{v}(\pm L, y) &= 0, \quad \widehat{v}(x, \pm h) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - L^2), \\ \widehat{v}_1(x, \pm h) &= 0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Процедура нахождения функций  $\widehat{v}(x, y)$ ,  $\widehat{v}_1(x, y)$ , удовлетворяющих уравнению Лапласа, аналогична использованной в работе [18]. Поэтому сразу запишем вид функций

$$\begin{aligned}\widehat{v}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \widehat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right], \\ \widehat{u}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \widehat{E}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right], \\ \widehat{v}_1(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \widehat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\ \widehat{u}_1(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \widehat{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right].\end{aligned}$$

Поскольку функция  $\coth(z)$  четная, то подставляя найденное  $y = \pm h$  в условие (4.1), получим равенство

$$-\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - L^2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \widehat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} h \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right]$$

Умножая обе части равенства на  $\cos(\pi(2k'+1)x/2L)$  и интегрируя по  $x$  в пределах от  $-L$  до  $L$ , с учетом ортогональности получим равенство

$$-\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \int_{-L}^L (x^2 - L^2) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) dx = L \widehat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} h \right),$$

Откуда после интегрирования найдем коэффициент  $\widehat{E}_k$ :

$$\widehat{E}_k = (-1)^k \frac{2}{\eta \beta_k^3 L \coth(\beta_k h)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \beta_k = \frac{\pi(2k+1)}{2L}.$$

При этом имеем тождество

$$\eta \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} \right) \equiv 0.$$

На границах ячеек должны выполняться условия

$$\begin{aligned} u_x(-l, y) &= \hat{u}_x(L, y), & u_x(l, y) &= \hat{u}_x(-L, y), \\ \sigma_{xy}(-l, y) &= \hat{\sigma}_{xy}(L, y) = 0, & \sigma_{xy}(l, y) &= \hat{\sigma}_{xy}(-L, y) = 0. \end{aligned}$$

С учетом представления функций  $\tilde{v}(x, y)$ ,  $\hat{v}(x, y)$  в указанном выше виде, из первого условия получим равенство

$$\hat{D}_k \coth(\lambda_k L) = \tilde{D}_k \coth(\lambda_k l). \quad (4.2)$$

Условие непрерывности касательных напряжений дает равенство

$$\begin{aligned} -\eta \sum_{k=0}^{\infty} 2\tilde{D}_k \lambda \lambda_k \sinh(\lambda \lambda_k l) \cos(\lambda_k y) - \frac{\partial p}{\partial y} l &= \\ = \eta \sum_{k=0}^{\infty} 2\hat{D}_k \lambda \lambda_k \sinh(\lambda \lambda_k L) \cos(\lambda \lambda_k y) + \frac{\partial p}{\partial y} L. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Умножая обе части последнего равенства на  $\cos(\pi(2k' + 1)y/(2h))$  и интегрируя по  $y$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , получим:

$$\begin{aligned} -\eta 2\tilde{D}_k h \lambda_k \sinh(\lambda_k l) - \frac{(-1)^k}{\lambda_k} \frac{\partial p}{\partial y} l &= \\ = \eta 2\hat{D}_k h \lambda_k \sinh(\lambda_k L) + \frac{(-1)^k}{\lambda_k} \frac{\partial p}{\partial y} L \end{aligned}$$

Два уравнения (4.2), (4.3) для определения коэффициентов  $\tilde{D}_k$  и  $\hat{D}_k$  имеют следующее решение

$$\begin{aligned} \hat{D}_k &= (-1)^{k+1} \frac{(L+l)}{\eta \lambda_k^2 h \coth(\lambda_k L) [\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l)]} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \tilde{D}_k &= (-1)^{k+1} \frac{(L+l)}{\eta \lambda_k^2 h \coth(\lambda_k l) [\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l)]} \frac{\partial p}{\partial y}. \end{aligned}$$

При  $l = L$  значение коэффициента  $\tilde{D}_k$  равно полученному в работе [18]. В этом случае условие непрерывности нормальных напряжений на границе  $y = \pm h$  выполняются. Для случая  $l \neq L$  в выражение для компонент скорости в ячейке без пластин необходимо добавить слагаемые, которые на границах  $x = \pm l$  дают нулевое значение скорости и касательных напряжений

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \coth\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}y\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right], \\ \tilde{u}_1(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}y\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right]. \end{aligned}$$

Из условия непрерывности нормальных напряжений  $\sigma_{yy}(x, y)$  на границах в таких ячейках  $y = \pm h$  получим равенство:

$$\begin{aligned} 2\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \frac{\pi(2k+1)}{2l} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}h\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right] - \\ - 2\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \frac{\pi(2k+1)}{2h} \coth\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}x\right) \sin\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}h\right) \right] = \frac{\partial p}{\partial y} h. \end{aligned}$$



Интегрируя по переменной  $x$  в интервале  $-l \leq x \leq l$ , получим:

$$2\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \frac{(-1)^k}{l} \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} h \right) \right] - \\ - 2\eta \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \frac{(-1)^k}{l} \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} l \right) \right] = \frac{\partial p}{\partial y} h.$$

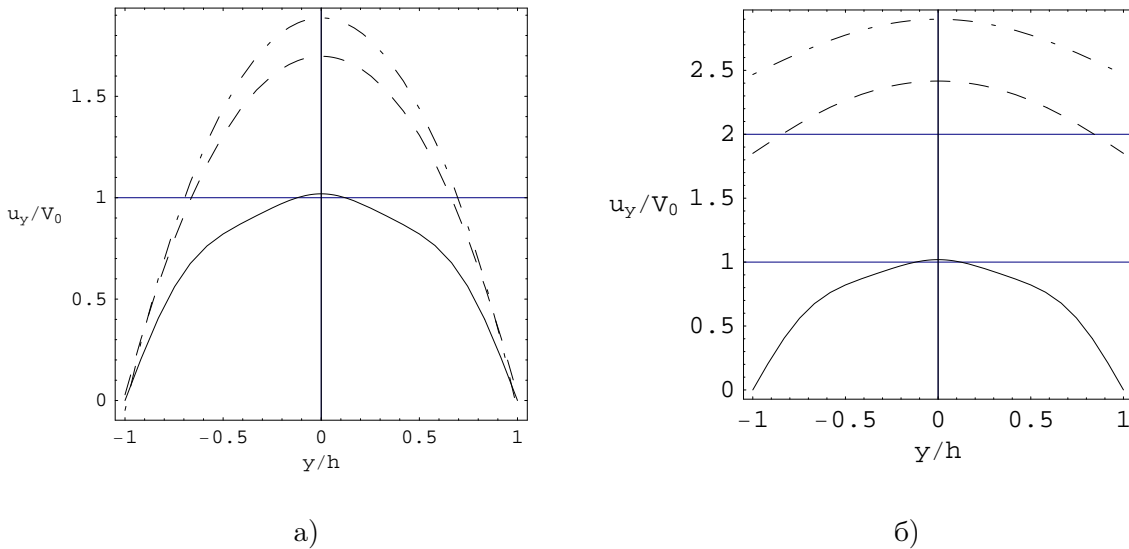
Используя результат работы [18], запишем:

$$\left[ \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right] \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y}$$

С учетом последнего равенства и выражения для коэффициента  $\tilde{D}_k$  получим:

$$\tilde{G}_k = \frac{(-1)^k}{\eta \lambda_k^2 h \sinh(\chi_k h)} \left( l - \frac{(L+l) \tanh(\lambda_k l)}{\tanh(\lambda_k L) + \tanh(\lambda_k l)} \right) \frac{\partial p}{\partial y} \quad (4.4)$$

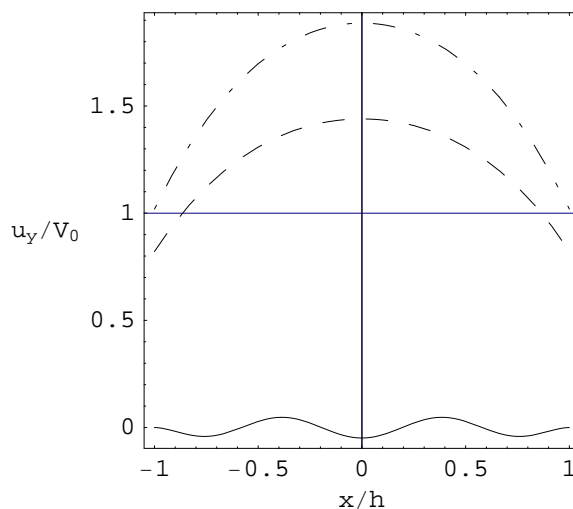
При  $l = L$  и  $L = 0$  получим, что  $\tilde{G}_k = 0$  и, соответственно, компоненты скорости  $\tilde{u}_1(x, y)$  и  $\tilde{v}_1(x, y)$  тоже равны нулю.



Р и с. 4.1

Зависимость безразмерной скорости жидкости  $u_y/V_0$  от безразмерной координаты  $y/h$  для ячеек с пластинами (а) и без них (б) при различных значениях  $x/h$

На рис. 4.1 представлены, соответственно, графики функции  $u_x/V_0$  в зависимости от безразмерной координаты  $y/h$  для ячеек с пластинами и без них в случае  $L = l = h$ . Сплошная линия соответствует сечениям  $x/h = \pm 1$ , штриховая линия – сечениям  $x/h = \pm 0.5$ , штрих-пунктирная – сечению  $x/h = 0$ .



Р и с. 4.2

Зависимость безразмерной скорости жидкости  $u_y/V_0$  от безразмерной координаты  $x/h$  для ячеек с пластинами и без них при различных значениях  $y/h$

На рис. 4.2 представлен график той же функции в ячейке с пластинами в зависимости от безразмерной координаты  $x/h$  для значений  $y/h = \pm 1$  (сплошная линия),  $y/h = \pm 0.5$  (пунктирная линия) и  $y/h = 0$  (штрих-пунктирная линия). Функция представлена тремя первыми членами ряда. Отклонение значений функции от нуля при  $y/h = \pm 1$  (на пластинах) дает точность такого представления. Аналогичная точность наблюдается и в рассмотренном выше случае, при параллельном пластинам направлении градиента давления. Как видно из графиков, имеется принципиальная разница в поведении жидкости между пластинами при их ориентации относительно градиента давления. Так, при параллельном расположении скорость жидкости между пластинами замедляется в средней части, а при перпендикулярной ориентации, наоборот, увеличивается. Такое поведение скорости жидкости связано с двумерностью потока. Так, из уравнения неразрывности (1.5) следует, что скорость жидкости между пластинами меняется вдоль них из-за наличия составляющей вектора скорости, направленной перпендикулярно пластинам. Расход жидкости в рассматриваемом случае определяется также размерами ячеек без пластин; так, через ячейки с пластинами поток жидкости равен нулю.

## 5. Течение вязкой жидкости через периодическую структуру тонких стержней.

### 5.1. Постановка задачи

Исследуем течение несжимаемой жидкости вязкости  $\eta$  через периодическую решетку, образованную неподвижными частицами в виде тонких стержней. Стержни располагаются вдоль оси  $OX$  и оси  $OZ$ , имеют длину  $2L$  и период трансляции  $2l$  вдоль  $OX$ ,  $2d$  – вдоль  $OZ$  и  $2h$  – вдоль оси  $OY$ . В такой системе имеются два типа ячеек: ячейки размерами  $2L \times 2h \times 2d$ , в которых жидкость ограничена четырьмя стержнями, и ячейки размерами  $2l \times 2h \times 2d$ , в которых нет стержней. Будем рассматривать такие размеры ячеек, для которых возможно использовать приближение Стокса.

На поверхности каждого стержня должны выполняться условия прилипания (1.2). Заданный градиент давления может иметь произвольное направление в пространстве. Искомое распределение скорости жидкости должна быть периодической функцией относительно рассматриваемой системы стержней. При этом должны выполняться условия непрерывности скорости, нормальных и касательных напряжений на границах ячеек. Поскольку уравнения движения жидкости и граничные условия линейные по скорости, то общее решение задачи можно представить в виде суммы решения задач: течение жидкости с градиентом давления, направленным вдоль стержней и перпендикулярно к ним.

## 5.2. Решение задачи о течении вязкой жидкости с градиентом давления, направленном вдоль стержней

Приближенное периодическое решение в трехмерных ячейках свободной жидкости рассматривалось в работе [18]. С учетом результатов, полученных выше, это решение должно быть изменено. В системе координат, начало которой поместили в центре такой ячейки, то есть в прямоугольной призме, ограниченной плоскостями  $y = \pm h$ ,  $x = \pm l$ ,  $z = \pm d$ , решение системы (2.1) имеет вид:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2 + z^2 - d^2) + u(x, y, z) + \tilde{u}(x, y, z), \\ u_y(x, y, z) &= v(x, y, z) + \tilde{v}(x, y, z), \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y, z) + \tilde{w}(x, y, z). \end{aligned}$$

Фактически рассматриваемая периодическая система является результатом пересечения двух структур двумерных пластин, аналогичных рассмотренной выше и расположенных перпендикулярно друг другу. Поэтому можем воспользоваться предыдущими результатами и записать выражения для функций  $u(x, y, z)$ ,  $v(x, y, z)$ ,  $w(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ D_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ E_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} z \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right], \\ v(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ D_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right], \\ w(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ E_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} z \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right]. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты  $D_k$ ,  $E_k$  находятся из условия неразрывности касательных напряжений на границах ячеек и соответственно равны

$$\begin{aligned} D_k &= \frac{(-1)^{k+1}}{2l\eta\chi_k^2 \sinh(\chi_k h)} \frac{\partial p}{\partial x} h, \\ E_k &= \frac{(-1)^{k+1}}{2l\eta\chi_k^2 \sinh(\chi_k d)} \frac{\partial p}{\partial x} d, \\ \chi_k &= \frac{\pi(2k+1)}{2l}. \end{aligned}$$

Для функций  $\tilde{u}(x, y, z)$ ,  $\tilde{v}(x, y, z)$ ,  $\tilde{w}(x, y, z)$  получаем следующие выражения, в соответствии с процедурой, изложенной выше для двумерного случая:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right], \\ \tilde{v}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\ \tilde{w}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{E}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right].\end{aligned}$$

Аналогично в ячейке между стержнями, то есть в прямоугольной призме, ограниченной плоскостями  $y = \pm h$ ,  $x = \pm L$ ,  $z = \pm d$ , решение системы (2.1) имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{u}_x(x, y, z) &= \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (y^2 - h^2 + z^2 - d^2) + \hat{u}(x, y), \\ \hat{u}_y(x, y, z) &= \hat{v}(x, y), \quad \hat{u}_z(x, y) = \hat{w}(x, y).\end{aligned}$$

Здесь функции  $\hat{u}(x, y)$ ,  $\hat{v}(x, y)$ ,  $\hat{w}(x, y)$  представляются в виде:

$$\begin{aligned}\hat{u}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right], \\ \hat{v}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\ \hat{w}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{E}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right].\end{aligned}$$

Из условия непрерывности скоростей на границах ячеек получим равенства:

$$\begin{aligned}\hat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} L \right) &= \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} l \right), \\ \hat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} L \right) &= \tilde{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} l \right).\end{aligned}$$

Используя условия неразрывности нормальных напряжений на границах ячеек, получим равенство, аналогичное полученным для двумерного случая. Умножая обе части полученного равенства на  $\cos \pi(2k'+1)y/2h$  и интегрируя по  $y$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , а затем умножая на  $\cos \pi(2k'+1)z/2d$  и интегрируя по  $z$  в пределах от  $-d$  до  $d$ , с учетом свойств ортогональности и соотношений коэффициентов, получим соотношение для коэффициентов:

$$\eta\gamma_k^2 h \widehat{D}_k \frac{\sinh(\gamma_k L) \coth(\gamma_k l) + \sinh(\gamma_k l) \coth(\gamma_k L)}{\coth(\gamma_k l)} +$$

$$+ \eta\chi_k^2 d \widehat{E}_k \frac{\sinh(\chi_k L) \coth(\chi_k l) + \sinh(\chi_k l) \coth(\chi_k L)}{\coth(\chi_k l)} = (-1)^k \frac{\partial p}{\partial x} L,$$

$$\gamma_k = \frac{\pi(2k+1)}{2h}, \quad \chi_k = \frac{\pi(2k+1)}{2d}.$$

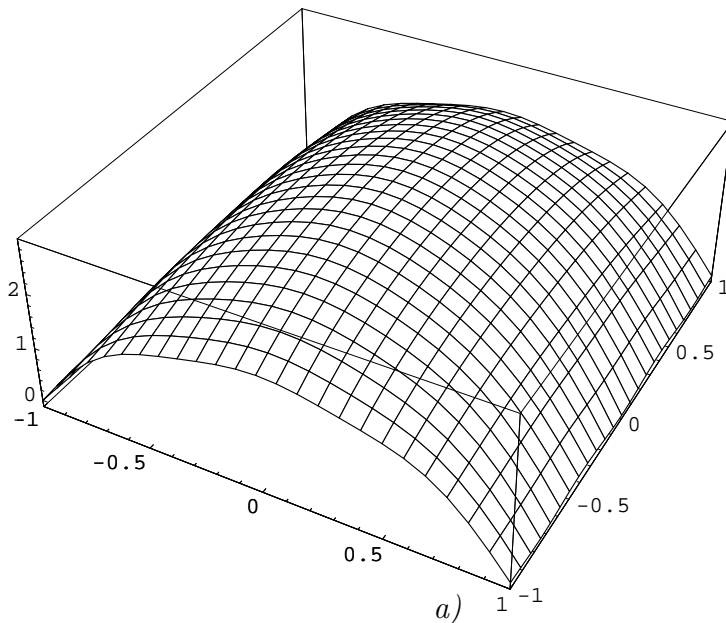
Для случая  $h = d$  получим следующие выражения:

$$\widehat{D}_k = (-1)^k \frac{L \coth(\gamma_k l)}{2h\eta\gamma_k^2 [\sinh(\gamma_k L) \coth(\gamma_k l) + \sinh(\gamma_k l) \coth(\gamma_k L)]} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\widetilde{D}_k = (-1)^k \frac{L \coth(\chi_k L)}{2h\eta\chi_k^2 [\sinh(\chi_k L) \coth(\chi_k l) + \sinh(\chi_k l) \coth(\chi_k L)]} \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\widehat{D}_k = \widehat{E}_k, \quad \widetilde{D}_k = \widetilde{E}_k.$$

Поскольку решение задачи представляет собой сумму решений двух задач с взаимно перпендикулярными пластинами, то все выводы, касающиеся изменения расхода жидкости через такие структуры, приведенные в разделе 1.2, справедливы и в этом случае.



Р и с. 5.1

Зависимость безразмерной скорости жидкости  $u_x/V_0$  от безразмерных переменных  $y/h$  и  $z/h$  в ячейке со стержнями в сечении  $x/h = 0$

На рис. 5.1 представлен трехмерный график функции  $u_x/V_0$  от безразмерных переменных  $y/h$  и  $z/d$  в ячейке со стержнями для случая  $L = l = h = d$  в сечении  $x = 0$ .

### 5.3. Решение задачи о течении вязкой жидкости с градиентом давления, направленном перпендикулярно стержням

Рассмотрим случай, когда функция давления зависит только от переменной  $y$ , причем  $\partial p / \partial y = \text{const}$ . Решение этой задачи во многом схоже с рассмотренным выше случаем

для пластин, поэтому воспользуемся полученными результатами. Поместив начало координат в центр прямоугольной ячейки, ограниченной прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm l$ ,  $z = \pm d$ , представим скорость жидкости в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_x(x, y, z) &= \tilde{u}(x, y, z) + \tilde{u}_1(x, y, z), \\ \tilde{u}_y(x, y, z) &= \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - l^2 + z^2 - d^2) + \tilde{v}(x, y, z) + \tilde{v}_1(x, y, z) \\ \tilde{u}_z(x, y, z) &= \tilde{w}(x, y, z) + \tilde{w}_1(x, y, z).\end{aligned}$$

Функции  $\tilde{u}(x, y, z)$ ,  $\tilde{v}(x, y, z)$  и  $\tilde{w}(x, y, z)$  имеют вид:

$$\begin{aligned}\tilde{u}(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\ \tilde{v}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{E}_k \cosh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} z \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] + \\ \tilde{w}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{E}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} z \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right].\end{aligned}$$

Для функций  $\tilde{u}_1(x, y, z)$ ,  $\tilde{v}_1(x, y, z)$  и  $\tilde{w}_1(x, y, z)$  запишем выражения:

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right], \\ \tilde{v}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{G}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2l} x \right) \right] + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{H}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right], \\ \tilde{w}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \tilde{H}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right].\end{aligned}$$

Решение для скорости жидкости в прямоугольной ячейке жидкости, ограниченной прямыми  $y = \pm h$ ,  $x = \pm L$ ,  $z = \pm d$ , в центре которой поместим начало координат, представим в виде:

$$\begin{aligned}\hat{u}_x(x, y, z) &= \hat{u}(x, y, z) + \hat{u}_1(x, y, z), \\ \hat{u}_y(x, y, z) &= \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - L^2 + z^2 - d^2) + \hat{v}(x, y, z) + \hat{v}_1(x, y, z), \\ \hat{u}_z(x, y, z) &= \hat{w}(x, y, z) + \hat{w}_1(x, y, z).\end{aligned}$$

Процедура нахождения функций  $\hat{v}(x, y, z)$ ,  $\hat{v}_1(x, y, z)$ , удовлетворяющих уравнению Лапласа, аналогична использованной выше для случая с пластинами. Поэтому сразу запишем вид решения для скорости жидкости в ячейке:

$$\begin{aligned}
\hat{u}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{G}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right], \\
\hat{v}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{G}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right] + \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{H}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} y \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right], \\
\hat{w}(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{H}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} y \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right], \\
\hat{u}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\
\hat{v}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{D}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} x \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right] + \\
&+ \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{E}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} z \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right], \\
\hat{w}_1(x, y, z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{E}_k \sinh \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} z \right) \sin \left( \frac{\pi(2k+1)}{2h} y \right) \right].
\end{aligned}$$

Поскольку на стержнях скорость жидкости должна быть равна нулю, то для функций  $\hat{v}(x, y, z)$ ,  $\hat{v}_1(x, y, z)$  запишем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned}
\hat{u}_y(x, \pm h, z) &= -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (x^2 - L^2 + z^2 - d^2), \\
\hat{u}_y(x, \pm h, \pm d) &= 0, \quad \hat{u}_y(x, \pm h, \pm d) = 0
\end{aligned} \tag{5.1}$$

С учетом вида функции  $\hat{v}(x, y, z)$  и условия четности функции  $\coth(z)$  из условия (5.1) получим равенство:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (x^2 - L^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{G}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} h \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) \right], \\
-\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} (z^2 - d^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \hat{H}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} h \right) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) \right]
\end{aligned}$$

Умножая обе части первого равенства на  $\cos(\pi(2k'+1)x/2L)$  и интегрируя по  $x$  в пределах от  $-L$  до  $L$ , а второго – на  $\cos(\pi(2k'+1)z/2d)$  и интегрируя по  $z$  в пределах от  $-d$  до  $d$ , с учетом ортогональности получим выражения:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \int_{-L}^L (x^2 - L^2) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} x \right) dx &= L \hat{G}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2L} h \right), \\
-\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial y} \int_{-d}^d (z^2 - d^2) \cos \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} z \right) dz &= L \hat{H}_k \coth \left( \frac{\pi(2k+1)}{2d} h \right)
\end{aligned}$$

Из этого после интегрирования найдем коэффициенты  $\widehat{G}_k, \widehat{H}_k$ :

$$\widehat{G}_k = \frac{(-1)^k}{\eta \beta_k^3 L \coth(\beta_k h)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \beta_k = \frac{\pi(2k+1)}{2L},$$

$$\widehat{H}_k = \frac{(-1)^k}{\eta \chi_k^3 d \coth(\chi_k h)} \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \chi_k = \frac{\pi(2k+1)}{2d}.$$

При этом тождественно выполняются равенства:

$$\eta \left( \frac{\partial \widehat{u}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{v}}{\partial x} \right) \equiv 0,$$

$$\eta \left( \frac{\partial \widehat{w}}{\partial y} + \frac{\partial \widehat{v}}{\partial z} \right) \equiv 0.$$

На границах ячеек должны выполняться условия непрерывности скорости и напряжений:

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_x(-l, y, z) &= \widehat{u}_x(L, y, z), & \widetilde{u}_x(l, y, z) &= \widehat{u}_x(-L, y, z), \\ \widetilde{\sigma}_{xy}(-l, y, z) &= \widehat{\sigma}_{xy}(L, y, z), & \widetilde{\sigma}_{xy}(l, y, z) &= \widehat{\sigma}_{xy}(-L, y, z), \\ \widetilde{\sigma}_{yz}(x, y, d) &= \widehat{\sigma}_{yz}(x, y, -d), & \widetilde{\sigma}_{yz}(x, y, d) &= \widehat{\sigma}_{yz}(x, y, -d), \\ \widetilde{\sigma}_{yy}(x, -h, z) &= \widehat{\sigma}_{yy}(x, h, z), & \widetilde{\sigma}_{yy}(x, -h, z) &= \widehat{\sigma}_{yy}(x, h, z). \end{aligned}$$

С учетом представления функций  $\widetilde{v}(x, y), \widehat{v}(x, y)$  в указанном выше виде из первого условия получим соотношения:

$$\widehat{E}_k = \widetilde{E}_k, \quad \widehat{H}_k = \widetilde{H}_k, \quad \widehat{D}_k \coth(\gamma_k L) = \widetilde{D}_k \coth(\gamma_k l). \quad (5.2)$$

Из условий непрерывности касательных напряжений  $\widetilde{\sigma}_{xy}(-l, y, z) = \widehat{\sigma}_{xy}(L, y, z)$ ,  $\widetilde{\sigma}_{yz}(x, y, d) = \widehat{\sigma}_{yz}(x, y, -d)$  получим равенства:

$$\begin{aligned} \widehat{E}_k &= \frac{(-1)^{k+1}}{2h\eta\gamma_k^2 \sinh(\gamma_k d)} \frac{\partial p}{\partial y} d, \\ -\eta \sum_{k=0}^{\infty} 2\widetilde{D}_k \gamma_k \sinh(\gamma_k l) \cos(\gamma_k y) - \frac{\partial p}{\partial y} l &= \\ = \eta \sum_{k=0}^{\infty} 2\widehat{D}_k \gamma_k \sinh(\gamma_k L) \cos(\gamma_k y) + \frac{\partial p}{\partial y} L. \end{aligned}$$

Аналогичные равенства получаются из условий  $\widetilde{\sigma}_{xy}(l, y, z) = \widehat{\sigma}_{xy}(-L, y, z)$ ,  $\widehat{\sigma}_{yz}(x, y, d) = \widetilde{\sigma}_{yz}(x, y, -d)$ . Умножая обе части последнего равенства на  $\cos(\pi(2k'+1)y/(2h))$  и интегрируя по  $y$  в пределах от  $-h$  до  $h$ , получим:

$$\begin{aligned} -\eta 2\widetilde{D}_k h \gamma_k \sinh(\gamma_k l) - \frac{(-1)^k}{\gamma_k} \frac{\partial p}{\partial y} l &= \\ = \eta 2\widehat{D}_k h \gamma_k \sinh(\gamma_k L) + \frac{(-1)^k}{\gamma_k} \frac{\partial p}{\partial y} L. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Из соотношений (5.2)- (5.3) определим выражения для коэффициентов  $\widetilde{D}_k$  и  $\widehat{D}_k$ , которые имеют вид



$$\begin{aligned}\widehat{D}_k &= (-1)^{k+1} \frac{(L+l)}{2\eta\gamma_k^2 h \coth(\gamma_k L) [\tanh(\gamma_k L) + \tanh(\gamma_k l)]} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \widetilde{D}_k &= (-1)^{k+1} \frac{(L+l)}{2\eta\gamma_k^2 h \coth(\gamma_k l) [\tanh(\gamma_k L) + \tanh(\gamma_k l)]} \frac{\partial p}{\partial y}.\end{aligned}$$

Для определения коэффициента  $\widetilde{G}_k$  используем условие непрерывности нормальных напряжений  $\widetilde{\sigma}_{yy}$  при  $y = \pm h$ . Получим соотношение

$$\begin{aligned}& \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \eta \widetilde{G}_k \frac{\pi(2k+1)}{2l} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}h\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}x\right) \right] + \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \eta \widetilde{H}_k \frac{\pi(2k+1)}{2d} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2d}h\right) \cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2d}z\right) \right] - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \eta \widetilde{D}_k \frac{(-1)^k \pi(2k+1)}{2h} \coth\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}x\right) \right] - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \eta \widetilde{E}_k \frac{(-1)^k \pi(2k+1)}{2h} \coth\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}z\right) \right] = \frac{\partial p}{\partial y} h.\end{aligned}$$

Интегрируя по переменной  $x$  в интервале  $-l \leq x \leq l$ , а по переменной  $z$  – в интервале  $-d \leq z \leq d$ , получим:

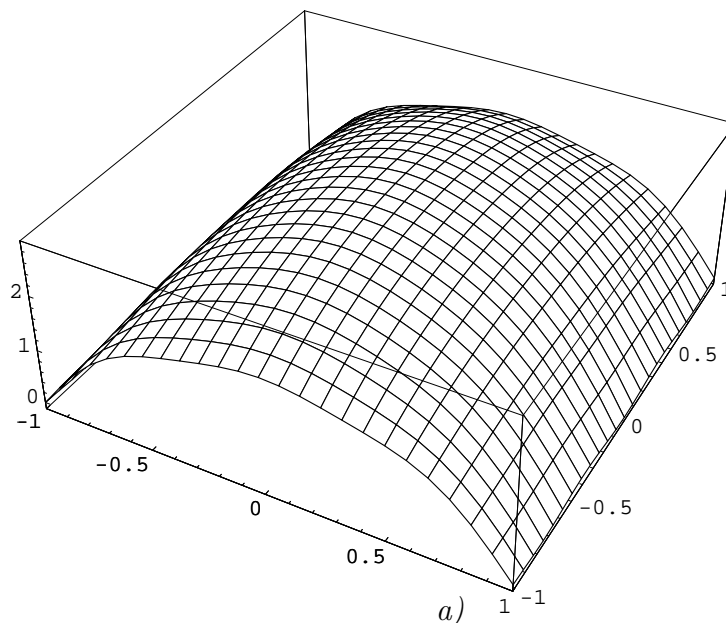
$$\begin{aligned}& \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \eta \left[ \frac{\widetilde{G}_k}{l} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2l}h\right) + \frac{\widetilde{H}_k}{d} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2d}h\right) \right] - \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \eta \left[ \frac{\widetilde{D}_k}{h} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}l\right) + \frac{\widetilde{E}_k}{d} \sinh\left(\frac{\pi(2k+1)}{2h}d\right) \right] = \frac{\partial p}{\partial y} h.\end{aligned}$$

Подставляя выражения для коэффициентов  $\widetilde{D}_k$ ,  $\widetilde{E}_k$ ,  $\widetilde{H}_k$  и используя полученное в работе [18] равенство

$$\left[ \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \right] \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial y},$$

получим выражение для коэффициента  $\widetilde{G}_k$ . В случае  $L = d = h = l$  он равен

$$\widetilde{G}_k = -\widetilde{H}_k.$$



Р и с. 5.2

Зависимость безразмерной скорости жидкости  $u_y/V_0$  от безразмерных переменных  $y/h$  и  $x/h$  в ячейке со стержнями

На рис. 5.2 представлен трехмерный график функции  $u_y/V_0$  в зависимости от безразмерной координаты  $y/h$  и  $x/l$  в случае  $L = l = h = d$  при  $z = 1$  в ячейке со стержнями. Функция представлена тремя первыми членами каждого ряда, входящего в ее выражение. Отклонение значения функции от нуля на стержнях дает точность такого представления.

Задача о течении вязкой жидкости с заданным градиентом давления, зависящим только от переменной  $z$ , причем  $\partial p/\partial z = const$ , имеет аналогичное решение и в данной работе не рассматривается.

## 6. Заключение

Разработана процедура нахождения приближенного периодического решения течения вязкой жидкости с заданным градиентом давления через бесконечные периодические структуры в виде тонких пластин (двумерный случай) и в виде тонких стержней (трехмерный случай) при их произвольной ориентации относительно приложенного градиента давления. Полученные приближенные выражения для скорости течения жидкости позволяют более качественно моделировать массоперенос в таких структурах и определять способы его увеличения.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-0007).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Ф. Ефремов, *Периодические коллоидные структуры*, Химия, Л., 1971, 192 с.

2. P. Habdas, E. R. Weeks, “Video microscopy of colloidal suspensions and colloidal crystals”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science.*, 2002, № 7, 196–203.
3. P. N. Pusey, W. van Megen, S. M. Underwood, P. Bartlett and R. H. Ottewill, “Colloidal fluids, crystals and glasses”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Application*, **176**:1 (1991), 16–27.
4. P. N. Pusey, W. van Megen, “Phase behaviour of concentrated suspensions of nearly hard colloidal spheres”, *Nature*, **320** (1986), 340–342.
5. А. В. Жуков, “Кристаллическая структура и реология высококонцентрированных ферромагнитных суспензий”, *Известия РАН. Механика жидкости и газа*, 2006, № 5, 122–134.
6. A. P. Hynninen, M. Dijkstra, R. van Roij, “Effect of triplet interactions on the phase diagram of suspensions of charged colloids”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, **15**:48 (2003), S3549–S3556.
7. A. P. Hynninen, M. Dijkstra, R. van Roij, “Effect of three-body interactions on the phase behavior of charge-stabilized colloidal suspensions”, *Physical Review E*, **69** (2004), 061407–1–061407–8.
8. J. Dobnikar, R. Rzehak, H. H. von Grünberg, “Effect of many-body interactions on the solid-liquid phase behavior of charge-stabilized colloidal suspensions”, *Europhysics Letters*, **61**:5 (2003), 695–701.
9. J. C. Maxwell, *A treatise on electricity and magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873, 500 с.
10. J. W. Rayleigh, “On the influence of obstacles arranged in rectangular order upon the properties of a medium”, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **34**:211 (1892), 481–502.
11. Н. С. Бахвалов, “Осредненные характеристики тел с периодической структурой”, *ДАН СССР*, **218**:5 (1974), 1046–1048.
12. В. Л. Бердичевский, “Пространственное осреднение периодических структур”, *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, **222**:3 (1975), 565–567.
13. А. Л. Бердичевский, “Об обтекании вязкой жидкостью периодической решетки сфер”, *Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа*, 1981, № 4, 37–44.
14. С. И. Мартынов, “Движение вязкой жидкости через периодическую решетку сфер”, *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2002, № 6, 48–54.
15. С. И. Мартынов, А. О. Сыромясов, “Симметрия периодической решетки частиц и потока вязкой жидкости в приближении Стокса”, *Изв. РАН. Механика жидкости и газа*, 2007, № 3, 7–20.
16. I. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965, 553 с.
17. С. И. Аристов, А. Д. Полянин, “Точные решения трехмерных нестационарных уравнений Навье-Стокса”, *Докл. РАН*, **427**:1 (2009), 35–40.

18. М. С. Дерябина, С. И. Мартынов, “Периодическое течение вязкой жидкости с заданным градиентом давления и температуры”, *Нелинейная динамика*, **14**:1 (2018), 81–97.

Поступила 15.03.2019

MSC2010 76D07, 76D09, 76D17

## The flow of a viscous fluid with a predetermined pressure gradient through periodic structures

© M. S. Deryabina<sup>1</sup>, S. I. Martynov<sup>2</sup>

**Abstract.** In the Stokes approximation, the problem of viscous fluid flow through two-dimensional and three-dimensional periodic structures is solved. A system of thin plates of a finite width is considered as a two-dimensional structure, and a system of thin rods of finite length is considered as a three-dimensional structure. Plates and rods are periodically located in space with certain translation steps along mutually perpendicular axes. On the basis of the procedure developed earlier, the authors constructed an approximate solution of the equations for fluid flow with an arbitrary orientation of structures relative to a given vector of pressure gradient. The solution is sought in a finite region (cells) around inclusions in the class of piecewise smooth functions that are infinitely differentiable in the cell, and at the cell boundaries they satisfy the continuity conditions for velocity, normal and tangential stresses. Since the boundary value problem for the Laplace equation is solved, it is assumed that the solution found is unique. The type of functions allows us to separate the variables and to reduce the problem's solution to the solution of ordinary differential equations. It is found that the change in the flow rate of a fluid through a characteristic cross section is determined mainly by the geometric dimensions of the cells of the free liquid in such structures and is practically independent of the size of the plates or rods.

**Key Words:** viscous fluid, pressure gradient, periodic structures, periodic solution

## REFERENCES

1. I. F. Efremov, *Periodic colloidal structures*, Chemistry, L., 1971 (In Russ.), 192 p.
2. P. Habdas, E. R. Weeks, “Video microscopy of colloidal suspensions and colloidal crystals”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science.*, 2002, № 7, 196–203.
3. P. N. Pusey, W. van Megen, S. M. Underwood, P. Bartlett and R. H. Ottewill, “Colloidal fluids, crystals and glasses”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Application*, **176**:1 (1991), 16–27.
4. P. N. Pusey, W. van Megen, “Phase behaviour of concentrated suspensions of nearly hard colloidal spheres”, *Nature*, **320** (1986), 340–342.
5. A. V. Zhukov, “Crystal structure and rheology of highly concentrated ferromagnetic suspensions”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Fluid and Gas*, 2006, no. 5, 122–134 (In Russ.).

<sup>1</sup>**Mariya S. Deryabina**, Assistant Professor, Institute of Information Systems and Technological Complexes, Yugra State University (16 Chekhova St., Khanty-Mansiysk 628000, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-4331-3675>, deryabinams@mail.ru

<sup>2</sup>**Sergey I. Martynov**, Professor, Institute of Information Systems and Technological Complexes, Yugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk 628000, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6420-3315>, martynovsi@mail.ru

6. A. P. Hynninen, M. Dijkstra, R. van Roij, “Effect of triplet interactions on the phase diagram of suspensions of charged colloids”, *Journal of Physics: Condensed Matter*, **15**:48 (2003), S3549–S3556.
7. A. P. Hynninen, M. Dijkstra, R. van Roij, “Effect of three-body interactions on the phase behavior of charge-stabilized colloidal suspensions”, *Physical Review E*, **69** (2004), 061407-1–061407-8.
8. J. Dobnikar, R. Rzehak, H. H. von Grünberg, “Effect of many-body interactions on the solid-liquid phase behavior of charge-stabilized colloidal suspensions”, *Europhysics Letters*, **61**:5 (2003), 695–701.
9. J. C. Maxwell, *Atreatise on electricity and magnetism*, Clarendon Press, Oxford, 1873, 500 c.
10. J. W. Rayleigh, “On the influence of obstacles arranged in rectengular order upon the properties of a medium”, *The London, Edinburg, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, **34**:211 (1892), 481-502.
11. N. S. Bakhvalov, “The averaged characteristics of bodies with a periodic structure”, *Akad. Nauk USSR*, **218**:5 (1974), 1046–1048 (In Russ.).
12. A. L. Berdichevsky, “Spatial averaging of periodic structures ”, *Akad. Nauk USSR*, **222**:3 (1975), 565–567 (In Russ.).
13. A. L. Berdichevsky A.L., “On the flow past a viscous liquid of a periodic lattice of spheres”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 1981, no. 4, 37—44 (In Russ.).
14. S. I. Martynov, “Motion of a viscous fluid through a periodic lattice of spheres”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of Fluid and Gas*, 2002, no. 6, 48–54 (In Russ.).
15. S. I. Martynov, A. O. Syromyasov, “Symmetry of the periodic lattice of particles and the flow of a viscous fluid in the Stokes approximation”, *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Mechanics of fluid and gas*, 2007, no. 3, 7–20 (In Russ.).
16. I. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice-Hall, Englewood Giffs, 1965, 553 c.
17. S. I. Aristov, A. D. Polyanin, “Exact solutions of three-dimensional nonstationary Navier-Stokes equations”, *Akad. Nauk USSR*, **427**:1 (2009), 35–40 (In Russ.).
18. M. S. Deryabina, S. I. Martynov, “Periodic flow of a viscous fluid with a predetermined pressure and temperature gradient”, *Nonlinear Dynamics*, **14**:1 (2018), 81–97 (In Russ.).

*Submitted 15.03.2019*

УДК 519.63

# Применение разрывного метода Галёркина к моделированию двумерных течений многокомпонентной смеси идеальных газов на адаптивных локально измельчающихся сетках

© Р. В. Жалнин<sup>1</sup>, В. Ф. Масягин<sup>2</sup>, Е. Е. Пескова<sup>3</sup>, В. Ф. Тишкин<sup>4</sup>

**Аннотация.** В статье разработан численный алгоритм для моделирования уравнений газовой динамики для смеси идеальных газов на адаптивных локально измельчающихся сетках. Для построения численного алгоритма используется метод Галеркина с разрывными базисными функциями. Для избежания появления нефизических осцилляций вблизи разрывов применяется лимитер Барта-Йесперсена. Реализация построенной схемы базируется на структуре данных и алгоритмах библиотеки `r4est`. С помощью разработанного метода проведено математическое моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова и решена задача о тройном распаде разрыва. Полученные результаты хорошо согласуются с известными решениями данных задач, а полученная картина решения подробно описывает динамику рассматриваемых сложных течений.

**Ключевые слова:** метод Галеркина с разрывными базисными функциями, уравнения газовой динамики, многокомпонентная смесь газов, параллельные вычисления, адаптивные локально измельчающиеся сетки, `r4est`

## 1. Введение

Моделирование течений многокомпонентной смеси газов является важной задачей для многих областей современной науки и техники. К таким областям относятся авиационная промышленность, химические технологии, нефтегазовая промышленность и многие другие. Данные области предъявляют высокие требования к точности получаемого численного решения и времени расчета. Перспективными направлениями решения поставленных задач является использование численных методов высокого порядка точности, применение технологий параллельного программирования и использование локальной адаптации расчетной сетки.

На сегодняшний день одним из наиболее перспективных методов высокого порядка точности является метод Галеркина с разрывными базисными функциями. Данный метод

<sup>1</sup>**Жалнин Руслан Викторович**, заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, доцент, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, [zhrv@mrsu.ru](mailto:zhrv@mrsu.ru)

<sup>2</sup>**Масягин Виктор Федорович**, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6738-8183>, [masyaginvf@mrsu.ru](mailto:masyaginvf@mrsu.ru)

<sup>3</sup>**Пескова Елизавета Евгеньевна**, младший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, [e.e.peskova@mail.ru](mailto:e.e.peskova@mail.ru)

<sup>4</sup>**Тишкин Владимир Федорович**, заведующий отделом, ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (125047, Москва, Миусская пл., д.4), доктор физико-математических наук, член-корр. РАН, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7295-7002>, [v.f.tishkin@mail.ru](mailto:v.f.tishkin@mail.ru)

активно развивается как в работах отечественных [1–5], так и зарубежных [6–7] исследователей. Он обладает рядом замечательных свойств, которые обуславливают интерес к нему среди исследователей. К таким свойствам следует отнести локальный характер уравнений, возможность работы с сетками различной структуры, хорошую адаптацию к граничным условиям различного типа, компактный шаблон и др.

Активно ведутся работы по развитию библиотек для динамической локальной адаптации расчетных сеток. К таким библиотекам относится `r4est`, реализующая возможность параллельного адаптивного измельчения сетки [8]. Данная библиотека обладает хорошо продуманной структурой и оптимизирована для работы с технологией параллельных вычислений MPI.

Настоящая работа посвящена построению численного алгоритма на основе разрывного метода Галеркина для решения уравнений многокомпонентной газовой динамики на адаптивных локально измельчающихся сетках.

## 2. Математическая модель

Будем рассматривать двумерную систему уравнений многокомпонентной газовой динамики:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho E)}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((\rho E + p)v)}{\partial y} = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial(\rho Y_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho Y_i u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho Y_i v)}{\partial y} = 0, \quad i = 1, \dots, N_Y, \quad (2.4)$$

где  $E = \varepsilon + (u^2 + v^2)/2$ ,  $\varepsilon$  – удельная внутренняя энергия,  $\rho$  – плотность смеси,  $p$  – давление,  $u, v$  – компоненты скорости,  $Y_i$  – концентрация  $i$ -й компоненты смеси, при этом должно выполняться условие  $\sum_{i=1}^{N_Y} Y_i = 1$ .

Система (2.1)–(2.4) замыкается уравнением состояния

$$\frac{p}{\rho} = \frac{RT}{M}, \quad \frac{R}{M} = C_p - C_v, \quad (2.5)$$

где  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $C_p, C_v$  – удельные теплоемкости смеси при постоянном давлении и постоянном объеме соответственно,  $M$  – молекулярная масса смеси, которые вычисляются следующим образом:

$$C_p = \sum_{i=1}^{N_Y} Y_i C_{pi}, \quad \frac{1}{M} = \sum_{i=1}^{N_Y} \frac{Y_i}{M_i} \quad (2.6)$$

Здесь  $M_i, C_{pi}, Y_i$  – молекулярная масса, удельная теплоемкость при постоянном давлении и концентрация  $i$ -й компоненты смеси, соответственно.

Также необходимо задать начальные и граничные условия, соответствующие постановке конкретной решаемой задачи.

Для сокращения записи введем следующие обозначения:

$$U = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho v \\ \rho E \\ \rho Y_1 \\ \vdots \\ \rho Y_{N_Y} \end{pmatrix}, \quad F_1(U) = \begin{pmatrix} \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (\rho E + p)u \\ \rho Y_1 u \\ \vdots \\ \rho Y_{N_Y} u \end{pmatrix}, \quad F_2(U) = \begin{pmatrix} \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (\rho E + p)v \\ \rho Y_1 v \\ \vdots \\ \rho Y_{N_Y} v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = (F_1, F_2). \quad (2.7)$$

Тогда система (2.1) – (2.4) запишется в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0. \quad (2.8)$$

### 3. Вычислительный алгоритм

#### 3.1. Метод Галеркина с разрывными базисными функциями

Для применения метода Галеркина с разрывными базисными функциями покроем расчетную область  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  сеткой  $\Omega_h = \{Q_j | j = 1, \dots, N_h\}$  из четырехугольных ячеек, таких, что  $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_h} Q_j$ ,  $\dim(Q_i \cap Q_j) < 2$  или  $Q_i \cap Q_j = \emptyset$ ,  $i \neq j$ ;  $i, j = 1, \dots, N_h$ .

Введем пространство

$$V_h^K = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{Q_j} \in P_K(Q_j), j = 1, \dots, N_h\},$$

где  $P_K(Q_j)$  – пространство полиномов степени не выше, чем  $K$ , на элементе  $Q_j$ .

Зададим в  $V_h^K$  базис

$$\hat{\varphi}_k(x, y) = \sum_{j=1}^{N_h} \varphi_{jk}(x, y), \quad (3.1)$$

где

$$\varphi_{jk}(x, y) = \begin{cases} \left( \frac{x - x_{cj}}{\Delta x_j} \right)^{\alpha_k} \left( \frac{y - y_{cj}}{\Delta y_j} \right)^{\beta_k}, & \text{если } (x, y) \in Q_j; \\ 0, & \text{в противном случае;} \end{cases} \quad (3.2)$$

здесь  $\alpha_k + \beta_k \leq K$ ,  $k = 1, \dots, N_\varphi$ ,  $N_\varphi = (K+1)(K+2)/2$ ,  $(x_{cj}, y_{cj})$  – центр масс ячейки  $Q_j$ .

Приближенное решение системы (2.8)  $U_h \in V_h^K$  будем искать в виде

$$U_h(t, x, y) = \sum_{k=1}^{N_\varphi} \sum_{j=1}^{N_h} U_{jk}(t) \varphi_{jk}(x, y). \quad (3.3)$$

Далее выберем в качестве пробных функций базисные функции и, умножив на эти пробные функции систему (2.8), получим для каждой ячейки сетки систему для определения соответствующих коэффициентов в разложении (3.3):

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{dU_{jk}}{dt} \int_{Q_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dS + \int_{Q_j} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \varphi_{jm} dS = 0, \quad (3.4)$$

$$m = 1, \dots, N_\varphi, \quad j = 1, \dots, N_h.$$



Выполнив интегрирование по частям для второго слагаемого, получим:

$$\sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{\partial}{\partial t} U_{jk}(t) \int_{Q_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dS = \int_{Q_j} \mathbf{F} \cdot (\nabla \varphi_{jm}) dS - \oint_{\partial Q_j} (\hat{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{n}) \varphi_{jm} d\sigma, \quad (3.5)$$

$$m = 1, \dots, N_\varphi, \quad j = 1, \dots, N_h.$$

Здесь  $\hat{\mathbf{F}}$  – численная потоковая функция, которая зависит от значений решения с внутренней и внешней стороны границы ячейки:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{h}(U_h^-, U_h^+).$$

Она должна удовлетворять условиям согласования с физической потоковой функцией  $\hat{\mathbf{F}}(U, U) = \mathbf{F}(U)$ , быть неубывающей по первому аргументу и невозрастающей по второму аргументу.

В данной работе значение численного потока берется как приближенное решение задачи Римана о распаде разрыва (используются потоки Лакса-Фридрихса-Русанова [9, 10] и HLLC [11]).

Обозначим  $A_j$  – матрицу составленную из элементов  $a_{mk}^j = \int_{Q_j} \varphi_{jk} \varphi_{jm} dS$ ,  $m = 1, \dots, N_\varphi$ ,  $k = 1, \dots, N_\varphi$ ,  $j = 1, \dots, N_h$ . Далее составим блочно-диагональную матрицу  $A$  с блоками  $A_j$ ,  $j = 1, \dots, N_h$  на диагонали. Обозначив вектор коэффициентов разложения решения по базису как

$$\tilde{U}_h = colon(U_{11}, U_{12}, \dots, U_{1N_\varphi}, \dots, U_{N_h1}, U_{N_h2}, \dots, U_{N_hN_\varphi})$$

и вектор, составленный из элементов в правой части выражения (3.5), как  $R(\tilde{U}_h)$ , запишем (3.5) в виде

$$A \frac{d\tilde{U}_h}{dt} = R(\tilde{U}_h).$$

Для интегрирования по времени уравнения

$$\frac{d\tilde{U}_h}{dt} = L(\tilde{U}_h), \quad (3.6)$$

где  $L(\tilde{U}_h) = A^{-1}R(\tilde{U}_h)$ , воспользуемся TVD-схемой Рунге-Кутты 3-го порядка [12]:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_h^* &= \tilde{U}_h^n + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^n), \\ \tilde{U}_h^{**} &= \frac{3}{4}\tilde{U}_h^n + \frac{1}{4} \left( \tilde{U}_h^* + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^*) \right), \\ \tilde{U}_h^{n+1} &= \frac{1}{3}\tilde{U}_h^n + \frac{2}{3} \left( \tilde{U}_h^{**} + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^{**}) \right). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Описанная вычислительная схема вблизи разрывов может приводить к немонотонности решения и появлению нефизических осцилляций. Это требует использования так называемых лимитеров  $\Lambda\Pi_h$ , являющихся по сути нелинейными операторами проекции. Используемые лимитеры должны обеспечивать консервативность, то есть должны выполняться условия

$$\int_{Q_j} \Lambda\Pi_h(U_h) dS = \int_{Q_j} U_h dS, \quad \forall Q_j \in \Omega_h.$$

Для выполнения операции лимитирования осуществляется проекция решения на пространство линейным базисом (в случае, если  $K > 1$ ):

$$U_h^\Lambda = \Pi_\Lambda U_h,$$

где  $\Pi_\Lambda$  – оператор проекции:

$$\Pi_\Lambda : V_h^K \rightarrow V_h^1.$$

Далее к полученной линейной функции  $U_h^\Lambda$  применяется лимитер Барта-Йесперсена [13]. Если указанный лимитер не изменяет коэффициентов разложения функции  $U_h^\Lambda$  по базису пространства  $V_h^1$ , то в качестве результата действия оператора  $\Lambda \Pi_h$  берется исходная функция  $U_h$ . В противном случае берется линейная функция, полученная в результате действия лимитера Барта-Йесперсена.

С учетом операции лимитирования выражения (3.7) запишутся в виде

$$\begin{aligned}\tilde{U}_h^* &= \Lambda \Pi_h \left( \tilde{U}_h^n + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^n) \right), \\ \tilde{U}_h^{**} &= \Lambda \Pi_h \left( \frac{3}{4} \tilde{U}_h^n + \frac{1}{4} \left( \tilde{U}_h^* + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^*) \right) \right), \\ \tilde{U}_h^{n+1} &= \Lambda \Pi_h \left( \frac{1}{3} \tilde{U}_h^n + \frac{2}{3} \left( \tilde{U}_h^{**} + \Delta t \cdot L(\tilde{U}_h^{**}) \right) \right).\end{aligned}\tag{3.8}$$

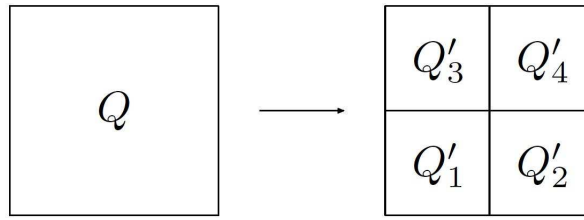
Исследование влияния описанного лимитера на точность получаемого решения остается за рамками данной работы. Приведенные ниже результаты расчетов показывают достаточную точность, необходимую для адекватного воспроизведения детальной структуры сложных течений.

### 3.2. Адаптация сетки (AMR)

Для более точной детализации картины течения используются динамические адаптивно сгущающиеся сетки [14]. Процесс адаптации заключается в дроблении ячейки на четыре дочерние ячейки, огрубление ячейки подразумевает удаление дочерних ячеек и перенос данных в исходную родительскую ячейку. Дробление может производиться до наперед определенного уровня, исходная (неадаптированная) сетка сопоставляется нулевому уровню адаптации.

При дроблении ячейки осуществляется проекция решения из родительской ячейки в дочерние (рис. 3.1). Алгоритмически проекция сводится к вычислению вектора  $U_{Q'_l}$ , составленного из коэффициентов разложения решения по базису в новых ячейках  $Q'_l$ ,  $l = 1, 2, 3, 4$ :

$$\begin{aligned}U_{Q'_l} &= A_{Q'_l}^{-1} A_l^{ref} U_K, \\ (A_{Q'_l})_{mk} &= \int \varphi_{Q'_l m} \varphi_{Q'_l k} dS, \\ (A_l^{ref})_{mk} &= \int \varphi_{Q'_l m} \varphi_{Q_k} dS, \quad l = 1, 2, 3, 4.\end{aligned}\tag{3.9}$$

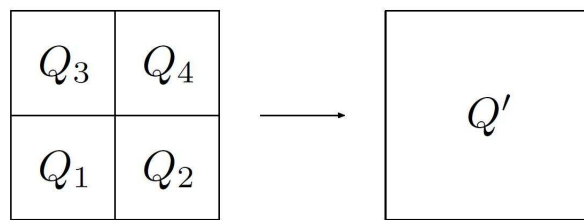


Р и с. 3.1

Дробление ячейки

При огрублении сетки строится проекция решения на базис в родительской ячейке по 4 дочерним ячейкам (рис. 3.2). Вектор коэффициентов «нового» решения вычисляется следующим образом:

$$\begin{aligned}
 U_{Q'} &= A_{Q'}^{-1} \sum_{l=1}^4 A_l^{coars} U_{Q_l}, \\
 (A_{Q'})_{mk} &= \int \varphi_{Q'm} \varphi_{Q'k} dS, \\
 (A_l^{coars})_{mk} &= \int \varphi_{Q'm} \varphi_{Q_lk} dS, \quad l = 1, 2, 3, 4.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$



Р и с. 3.2

Огрубление ячейки

Немаловажным вопросом является выбор адекватного критерия дробления/огрубления сетки. В данной работе в качестве такого критерия берется значение нормы вектора градиента плотности. При превышении некоторого порогового значения производится дробление ячейки. При уменьшении модуля градиента менее заданного минимального значения производится огрубление.

Программная реализация вычислительного алгоритма выполнена с использованием библиотеки r4est [8]. Данная библиотека предоставляет средства работы с сеточными структурами, организованными в виде так называемого леса квадрата-деревьев для двухмерного случая. Корнями деревьев являются ячейки исходной (грубой) сетки, которые в процессе вычислений подвергаются дроблению. Для ускорения вычислений используется распараллеливание с использованием MPI. Оптимизированные структуры данных и алгоритмы библиотеки поддерживают использование сеток, содержащих до  $5.23 \times 10^{11}$  ячеек и распараллеливание вычислений свыше, чем на 220000 ядер CPU. При этом авторы гарантируют выполнение балансировки ячеек 2:1 менее, чем за 10 секунд для миллиона ячеек на одном вычислительном узле [8].

## 4. Вычислительные эксперименты

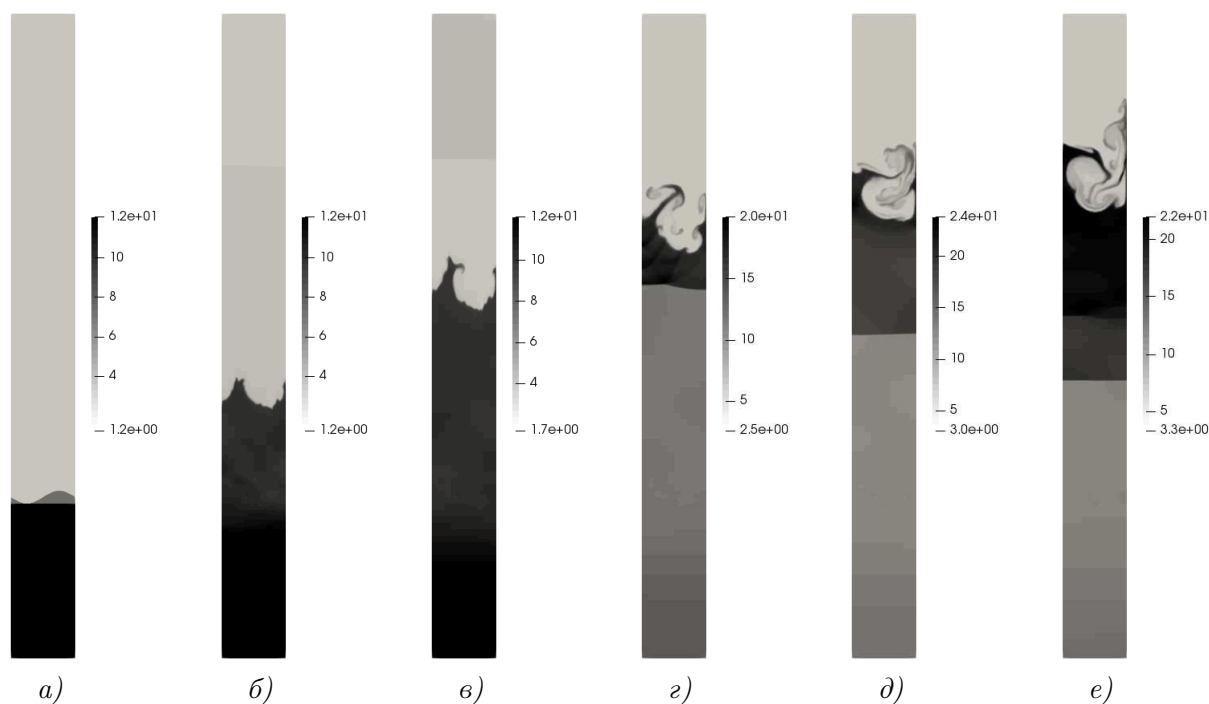
### 4.1. Моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова

Рассматривалась неустойчивость Рихтмайера-Мешкова, возбуждаемая при прохождении ударной волны через возмущенный контактный разрыв между элегазом ( $SF_6$ ) и воздухом, находящимися при атмосферном давлении.

Для расчетов была принята следующая физическая постановка задачи [15–16], соответствующая начальной температуре 291 К и давлению  $10^{-4}$  ГПа = 1 бар в камере низкого давления. За ударной волной в элегазе давление 2.152 бар, плотность  $1.209 \cdot 10^{-2}$  г/см<sup>3</sup>, скорость ударной волны 195.2 м/с, скорость течения за ударной волной 97.76 м/с, начальные плотности элегаза и воздуха в камере низкого давления  $6.037 \cdot 10^{-3}$  и  $1.198 \cdot 10^{-3}$  г/см<sup>3</sup> соответственно. Физические свойства элегаза и воздуха следующие: оба вещества являются невязкими, нетеплопроводными и идеальными газами с показателями адиабаты  $\gamma = 1.094$  ( $SF_6$ ) и  $\gamma = 1,4$  (воздух), отношение молекулярных масс ( $SF_6$ /воздух) принято равным 5.04.

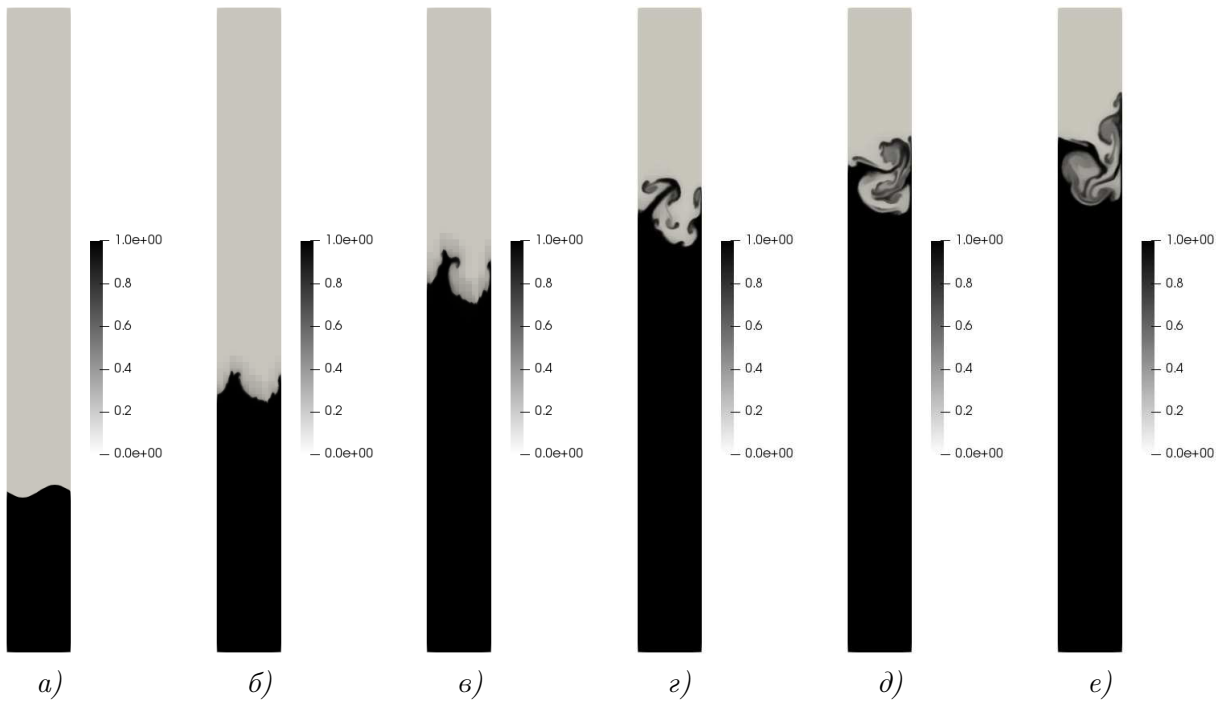
Расчетная область была выбрана в виде прямоугольника  $[0, 0.04] \times [-0.1, 0.3]$ . Положение фронта ударной волны в начальный момент времени полагалось равным  $y = -0.004$ . Положение контактного разрыва задавалось в виде  $y(x) = -0.004 \sin(2\pi x/0.04)$ ,  $x \in [0, 0.04]$ .

На рис. 4.1 и 4.2 представлены картины распределения плотности и концентрации  $SF_6$  в различные моменты времени. Полученные результаты хорошо согласуются с результатами расчетов на равномерной прямоугольной сетке, которые были проведены ранее в исследованиях, описанных в работе [16].



Р и с. 4.1

Плотность: а)  $t = 0$ ; б)  $t = 0.5$  мкс.; в)  $t = 1$  мкс.; г)  $t = 1.5$  мкс.; д)  $t = 2$  мкс.; е)  $t = 2.5$  мкс.



Р и с. 4.2

Концентрация  $SF_6$ : а)  $t = 0$ ; б)  $t = 0.5$  мкс.; в)  $t = 1$  мкс.; г)  $t = 1.5$  мкс.; д)  $t = 2$  мкс.;  
е)  $t = 2.5$  мкс.

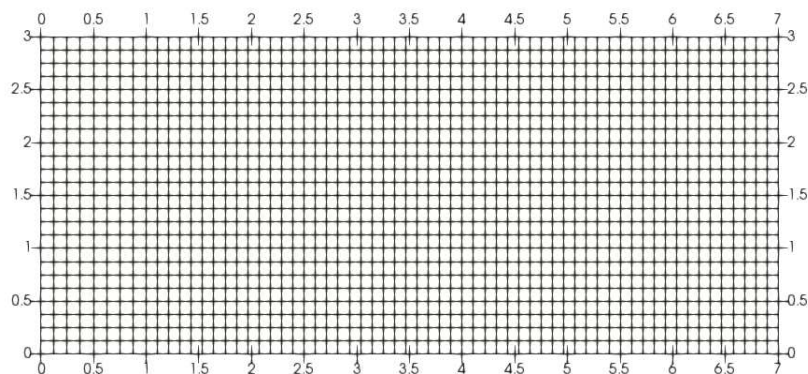
#### 4.2. Тройной распад разрыва

Рассматривается задача о тройном распаде разрыва (triple point problem) [17,18]. Расчетная область представляет собой прямоугольник  $[0, 7] \times [0, 3]$ , разделенный на три под-области со следующими начальными условиями:

$$(\rho, p, \gamma, u, v) = \begin{cases} (1, 1, 1.5, 0, 0), & \text{если } (x, y) \in \Omega_1 = [0, 1] \times [0, 3]; \\ (1, 0.1, 1.4, 0, 0), & \text{если } (x, y) \in \Omega_2 = [1, 7] \times [0, 1.5]; \\ (0.125, 0.1, 1.5, 0, 0), & \text{если } (x, y) \in \Omega_3 = [1, 7] \times [1.5, 3]. \end{cases} \quad (4.1)$$

На границах расчетной области заданы условия вытекания.

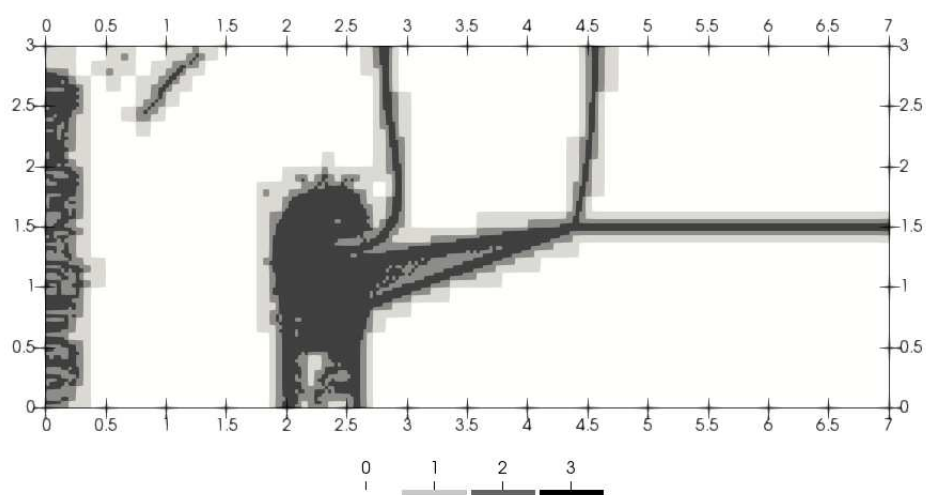
Исходная расчетная сетка (грубый уровень) представлена на рисунке 4.3, ее размерность равна  $56 \times 24$ .



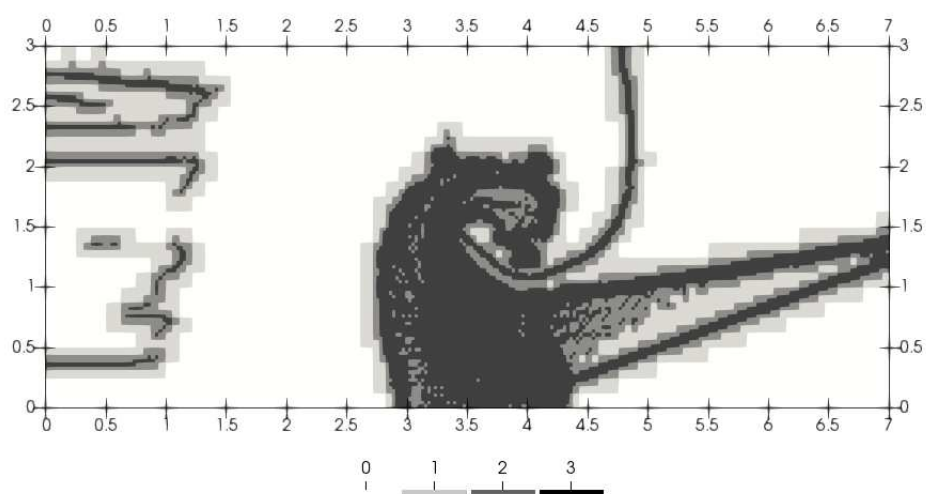
Р и с. 4.3

Расчетная сетка (начальный уровень)

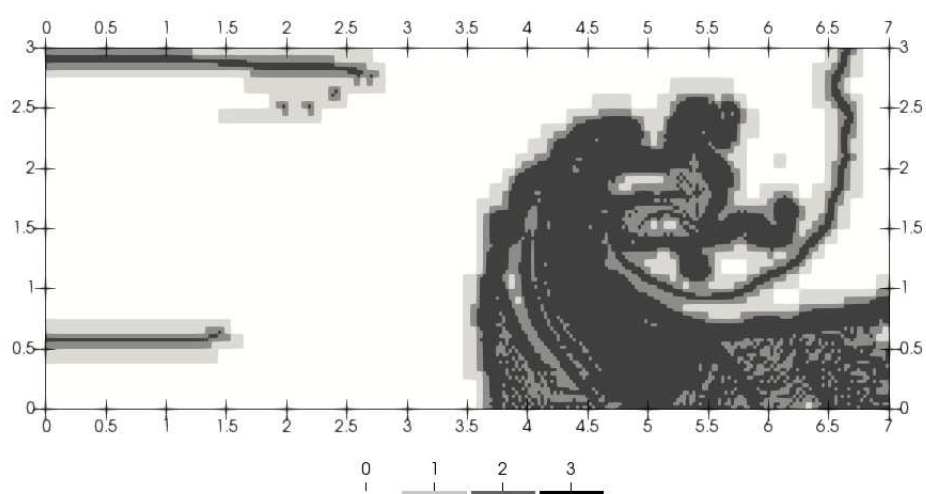
На рисунке 4.4 показаны уровни адаптации сетки на различные моменты времени.



а)



б)



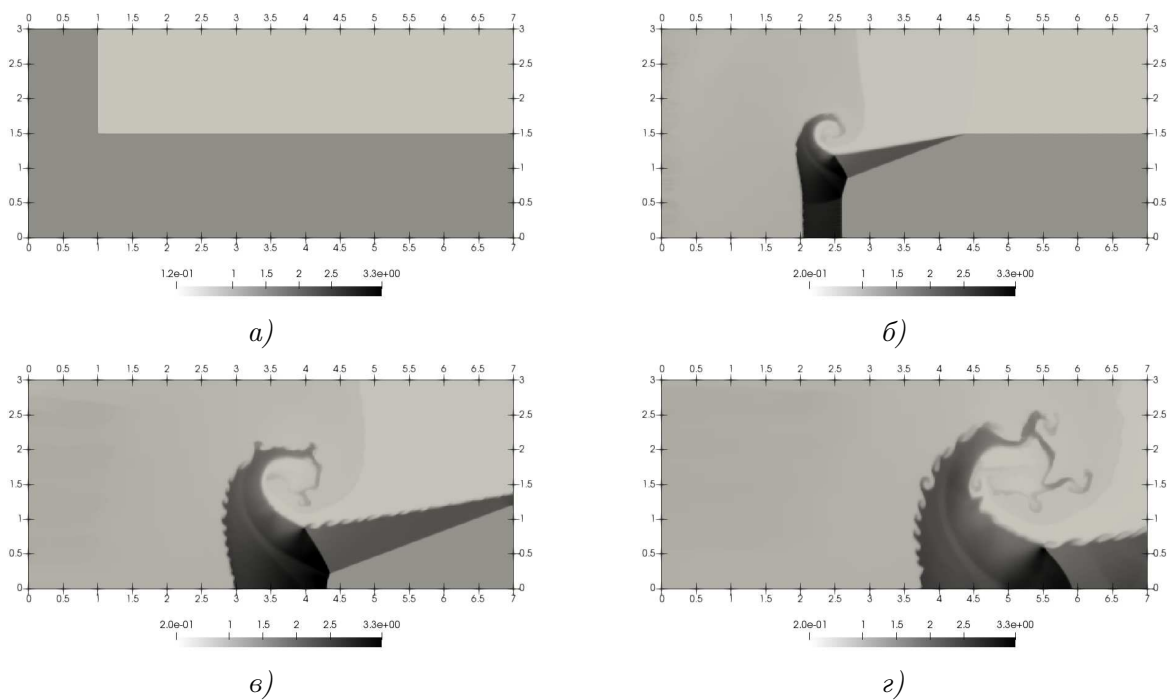
в)

**Р и с. 4.4**

Уровни адаптации сетки: а)  $t = 2$ ; б)  $t = 4$ ; в)  $t = 6$ .

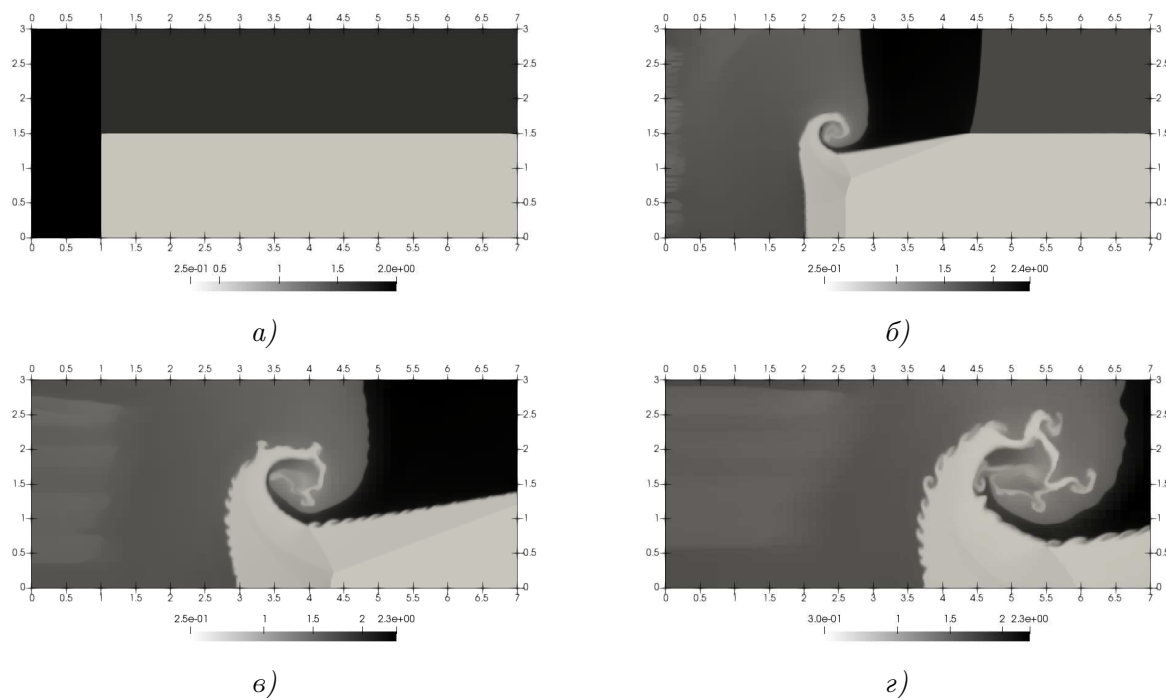
В силу того, что в области  $\Omega_1$  находится вещество под максимальным давлением, отсюда распространяется ударная волна вправо, в сторону областей с меньшим давлением  $\Omega_2, \Omega_3$ . Однако вещество из  $\Omega_1$  проникает быстрее в область с меньшей плотностью  $\Omega_3$ . Данный факт объясняет наличие завихренности в поле распределения плотности смеси (рис. 4.5) и в поле распределения внутренней энергии смеси (рис. 4.6). Отсюда можно сделать вывод о том, что полученные результаты расчетов адекватно описывают процессы, рассматриваемые в данной задаче.

На рис. 4.7 представлены распределения плотности, внутренней энергии и концентрации вещества, в начальный момент времени расположенного в области  $\Omega_2$ , в момент времени  $t = 5$ . Полученные картины распределения хорошо согласуются с результатами, представленными в работе [18].

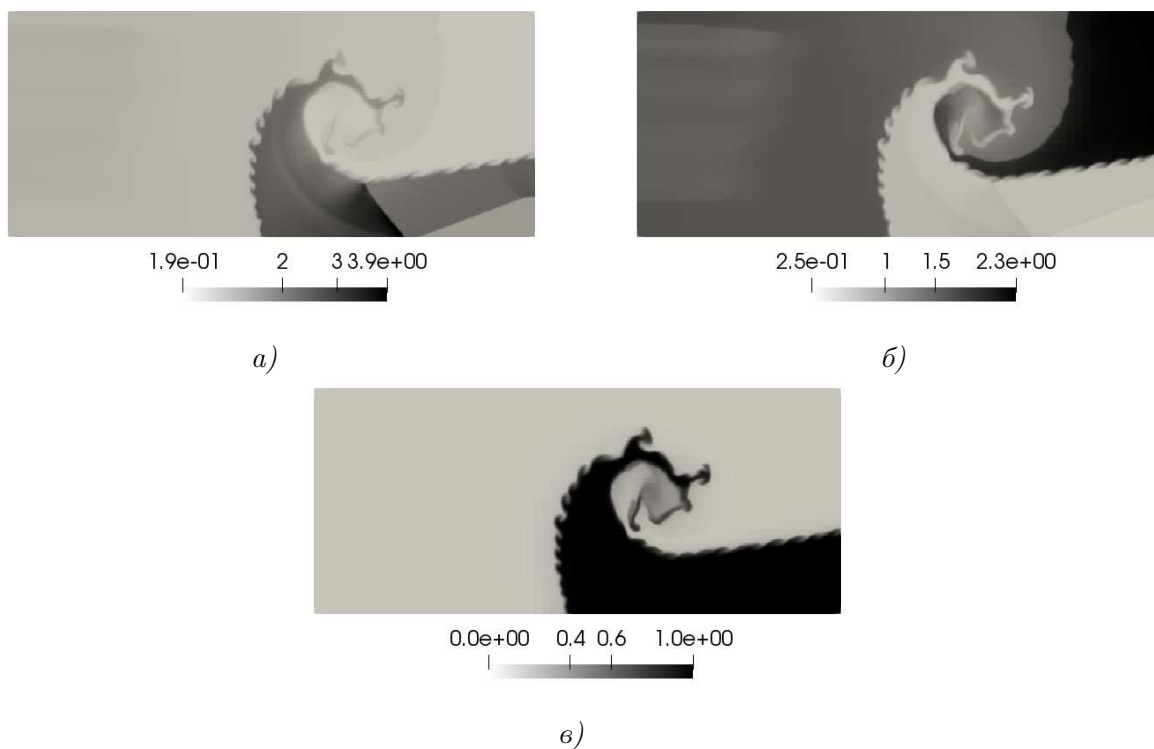


Р и с. 4.5

Поле распределения плотности смеси: а)  $t = 0$ ; б)  $t = 2$ ; в)  $t = 4$ ; г)  $t = 6$ .

**Р и с. 4.6**

Поле распределения внутренней энергии смеси: а)  $t = 0$ ; б)  $t = 2$ ; в)  $t = 4$ ; г)  $t = 6$ .

**Р и с. 4.7**

Поле распределения величин на момент времени  $t = 5$ : а) плотность; б) внутренняя энергия; в) концентрация газа из области  $\Omega_2$ .

## 5. Заключение

Разработан и реализован численный алгоритм на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений газовой динамики для смеси



идеальных газов на адаптивных локально измельчающихся сетках. Численный алгоритм был верифицирован с помощью известных модельных задач. Было проведено моделирование развития неустойчивости Рихтмайера-Мешкова и решена задача о тройном распаде разрыва. Полученные результаты отвечают процессам, протекающим в областях с заданными начальными и граничными условиями, а также хорошо согласуются с существующими решениями данных задач. Как видно из представленных рисунков, используемый в работе лимитер Барта-Йесперсена позволяет получить детальную картину рассматриваемых сложных течений, что свидетельствует о применимости данного лимитера к моделированию рассматриваемого класса задач.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (№ 1.6958.2017/8.9), РФФИ (проект № 18-41-130001, проект № 18-31-00102) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-2007.2018.1). Работа Тишкина В. Ф. выполнена при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 17-71-30014).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин, “Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **56:6** (2016), 989–998.
2. М. М. Краснов, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Тишкин, “Реализация разрывного метода Галеркина в программном комплексе DGM”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2018, № 245, 31 с.
3. М. Е. Ладонкина, О. А. Неклюдова, В. Ф. Тишкин, “Построение лимитера для разрывного метода Галеркина на основе усреднения решения”, *Матем. моделирование*, **30:5** (2018), 99–116.
4. Ю. А. Криксин, В. Ф. Тишкин, “Вариационная энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина для уравнений газовой динамики”, *Матем. моделирование*, **31:5** (2019), 69–84.
5. М. Д. Брагин, Ю. А. Криксин, В. Ф. Тишкин, “Верификация одного метода энтропийной регуляризации разрывных схем Галеркина для уравнений гиперболического типа”, *Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша*, 2019, 018, 25 с.
6. B. Cockburn, Ch.-W. Shu, “Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, *Journal of Scientific Computing*, **16:3** (2001), 173–261.
7. T. Chen, Ch.-W. Shu, “Entropy stable high order discontinuous Galerkin methods with suitable quadrature rules for hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics*, **345** (2017), 427–461.
8. C. Burstedde, L. C. Wilcox, O. Ghattas, “p4est: Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **33:3** (2011), 1103–1133.

9. В. В. Русанов, “Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **1:2** (1961), 267–279.
10. P.D. Lax, “Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **7:1** (1954), 159–193.
11. E.F. Toro, M. Spruce, W. Speares, “Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver”, *Shock Waves*, **4** (1994), 25–34.
12. C.-W. Shu, S. Osher, “Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes”, *Journal of Computational Physics*, **77** (1988), 439–471.
13. T.J. Barth, D.C. Jespersen, “The design and application of upwind schemes on unstructured meshes”, *AIAA Paper*, 1989, 89-0366.
14. M.J. Berger, P. Colella, “Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics”, *Journal of Computational Physics*, **82** (1989), 64–84.
15. F. Poggi, M.-H. Thorembey, G. Rodrigues, “Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer–Meshkov instability”, *Physics of Fluids*, **10:11** (1998), 2698–2700.
16. Р. В. Жалнин, Н. В. Змитренко, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Тишкин, “Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности”, *Матем. моделирование*, **19:10** (2007), 61–66.
17. M. Kucharik, R.V. Garimella, S.P. Schofield, M.J. Shashkov, “A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ale simulations”, *Journal of Computational Physics*, **229:7** (2009), 2432–2452.
18. M. Kucharik, M.J. Shashkov, “Conservative multi-material remap for staggered multi-material arbitrary lagrangian-eulerian methods”, *Journal of Computational Physics*, **258** (2014), 268–304.

Поступила 2.03.2019

MSC2010 65M60

# Application of discontinuous Galerkin method to modeling of two-dimensional flows of a multicomponent ideal gases mixture using local adaptive mesh refinement

© R. V. Zhalnin <sup>1</sup> V. F. Masyagin <sup>2</sup> E. E. Peskova <sup>3</sup> V. F. Tishkin <sup>4</sup>

**Abstract.** In this article a numerical algorithm is developed for solving of gas dynamics equations for a mixture of ideal gases on adaptive locally refined grids. The algorithm is based on discontinuous Galerkin method. To avoid the appearance of non-physical oscillations near the discontinuities, the Barth-Jespersen limiter is used. The numerical algorithm is based on the data structure and algorithms of the p4est library. In present work the numerical simulation of one problem of Richtmyer-Meshkov instability development is considered and the triple point problem is solved using the developed numerical algorithm of high accuracy order. The obtained results are in good agreement with the well-known numerical solutions. The pictures plotted basing on the solution describe in detail the dynamics of the complex flows under consideration.

**Key Words:** discontinuous Galerkin method, gas dynamics equations, multicomponent gas mixture, parallel computing, adaptive mesh refinement, p4est

## REFERENCES

1. R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin, “Solving the problem of non-stationary filtration of substance by the discontinuous Galerkin method on unstructured grids”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **56**:6 (2016), 977–986.
2. M. M. Krasnov, M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin, “Implementation of the Galerkin discontinuous method in the DGM software package”, *Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Preprint*, 2018, 245 (In Russ.), 31 p.
3. M. E. Ladonkina, O. A. Neklyudova, V. F. Tishkin, “Construction of the limiter based on averaging of solutions for discontinued Galerkin method”, *Matematicheskoye Modelirovaniye*, **30**:5 (2018), 99–116 (In Russ.).
4. Y. A. Kriksin, V. F. Tishkin, “Variational entropic regularization of discontinuous Galerkin method for gas dynamics equations”, *Matematicheskoye Modelirovaniye*, **31**:5 (2019), 69–84 (In Russ.).
5. M. D. Bragin, Y. A. Kriksin, V. F. Tishkin, “Verification of an entropic regularization method for discontinuous Galerkin schemes applied to hyperbolic equations”, *Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Preprint*, 2019, 018 (In Russ.), 25 p.

<sup>1</sup>**Ruslan V. Zhalnin**, Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk, 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

<sup>2</sup>**Victor F. Masyagin**, Senior Researcher, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk, 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6738-8183>, masyaginvf@mrsu.ru

<sup>3</sup>**Elizaveta E. Peskova**, Junior Researcher, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk, 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, e.e.peskova@mail.ru

<sup>4</sup>**Vladimir F. Tishkin**, Department Head, Keldysh Institute of Applied Mathematics (4 Miusskaya sq., Moscow, 125047, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), corresponding member of RAS, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7295-7002>, v.f.tishkin@mail.ru

6. B. Cockburn, Ch.-W. Shu, “Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, *Journal of Scientific Computing*, **16**:3 (2001), 173–261.
7. T. Chen, Ch.-W. Shu, “Entropy stable high order discontinuous Galerkin methods with suitable quadrature rules for hyperbolic conservation laws”, *Journal of Computational Physics*, **345** (2017), 427–461.
8. C. Burstedde, L. C. Wilcox, O. Ghattas, “p4est: Scalable Algorithms for Parallel Adaptive Mesh Refinement on Forests of Octrees”, *SIAM Journal on Scientific Computing*, **33**:3 (2011), 1103–1133.
9. V. V. Rusanov, “The calculation of the interaction of non-stationary shock waves and obstacles”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **1**:2 (1962), 304–320.
10. P. D. Lax, “Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **7**:1 (1954), 159–193.
11. E. F. Toro, M. Spruce, W. Speares, “Restoration of the Contact Surface in the HLL-Riemann Solver”, *Shock Waves*, **4** (1994), 25–34.
12. C.-W. Shu, S. Osher, “Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock capturing schemes”, *Journal of Computational Physics*, **77** (1988), 439–471.
13. T. J. Barth, D. C. Jespersen, “The design and application of upwind schemes on unstructured meshes”, *AIAA Paper*, 1989, 89-0366.
14. M. J. Berger, P. Colella, “Local adaptive mesh refinement for shock hydrodynamics”, *Journal of Computational Physics*, **82** (1989), 64–84.
15. F. Poggi, M.-H. Thorembey, G. Rodrigues, “Velocity measurements in turbulent gaseous mixtures induced by Richtmyer–Meshkov instability”, *Physics of Fluids*, **10**:11 (1998), 2698–2700.
16. R. V. Zhalnin, N. V. Zmitrenko, M. E. Ladonkina, V. F. Tishkin, “Numerical simulation of Richtmyer-Meshkov instability development using the difference schemes of high order of accuracy”, *Matematicheskoye Modelirovaniye*, **19**:10 (2007), 61–66 (In Russ.).
17. M. Kucharik, R. V. Garimella, S. P. Schofield, M. J. Shashkov, “A comparative study of interface reconstruction methods for multi-material ale simulations”, *Journal of Computational Physics*, **229**:7 (2009), 2432–2452.
18. M. Kucharik, M. J. Shashkov, “Conservative multi-material remap for staggered multi-material arbitrary lagrangian-eulerian methods”, *Journal of Computational Physics*, **258** (2014), 268–304.

*Submitted 2.03.2019*

MSC2010 93C95

## Empirical and physics-based approaches to estimate states of lithium-ion battery

© A. A. Fedorova<sup>1</sup>

**Abstract.** Lithium-ion batteries are integral parts of our life due to the rapid increase of applications which require batteries for their exploitation. Thus, there is a market demand to produce lithium-ion batteries for a huge number of applications from electric vehicles to energy storages. Battery Management System (BMS) is developed to maintain safe battery exploitation conditions. Most BMSs are embedded systems that have physical memory limits. Therefore, battery model should be easy to simulate to be integrated into BMS for states estimation. In the present paper we intend to compare empirical and physics-based approaches to estimate lithium-ion battery states with respect to their possibility of implementation in the embedded system. We will use Kalman filter to estimate battery states by means of the mentioned models.

**Key words:** lithium-ion battery, equivalent-circuit model, porous-electrode model, reduced-order model, Kalman filter

### 1. Introduction

The number of lithium-ion batteries applications increases annually. Thus, there is a great demand for development of batteries monitoring algorithms to diagnose and prevent undesirable battery damage and predict their state.

There are many battery states to consider. They include State-of-Charge (SOC), State-of-Health (SOH), State-of-Power (SOP), State-of-Function (SOF), etc. Lithium-ion battery SOC is the percentage of the maximum possible charge that is present inside a rechargeable battery [1]. SOH represents battery's ability to store and deliver electrical energy, compared with a new battery [2]. SOP is a quantity that describes the battery's power capability [3]. SOF is a figure of merit that describes the battery capability to perform a certain task [4].

As for today there is no equipment to measure any of the states directly from the lithium-ion battery cell. However, we can measure current, voltage and temperature from any cell. Many articles describe different techniques to estimate states of lithium-ion battery based on observed data.

Nejad et al. estimated SOC of lithium-ion iron phosphate cell with flat open-circuit voltage (OCV) curve by means of equivalent-circuit model (ECM) and two separate Extended Kalman Filters [5]. The main advantage of their work is ability to estimate SOC in a real time mode despite flatness of the OCV curve.

Various papers consider estimation and prediction of lithium-ion battery SOH. The U-D factorization-based RLS method and ECM were used in [6] to estimate capacity of lithium-ion batteries in PHEV/EV applications. Richardson et al. [7] presented approach to predict short-term and long-term battery degradation behaviour by means of Gaussian process regression.

<sup>1</sup>**Anna A. Fedorova**, Postgraduate Student, Department of Control Theory, Faculty of Applied Mathematics-Control Processes, St. Petersburg State University (35 Universitetskaya Emb, Petergof, Saint-Petersburg, Russia, 198504), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0864-7947>, [anyfyodorova@gmail.com](mailto:anyfyodorova@gmail.com)

The main bottleneck of their approach is the computational cost of handling large numbers of outputs. However, presented method has reasonable accuracy to predict future capacity 10 cycles ahead based on the requirements of the system to facilitate corrective action.

Particle Swarm Optimization and Unscented Kalman Filter were implemented in [8] to estimate lithium-ion battery SOP. The authors showed the ability of their approach to work not only for the laboratory-based applications but for real time ones as well.

Practically all of the above-mentioned references employ ECM or empirical-based approach to estimate states of lithium-ion battery. However, at the present time many attempts are made to implement electrochemical models of lithium-ion batteries in the embedded BMS. Particularly, Smith et al. [9] made one of the first attempts to convert full-order model of ideal lithium-ion battery cell [10] to the reduced-order state-space representation that can be easily implemented in the BMS.

In the following paper we intend to compare results of empirical and physics-based approaches for battery states estimation. We will present all the necessary systems of ordinary and partially differential equations to simulate battery behaviour in sections 2 and 3. In section 4 we will show how to estimate lithium-ion battery SOC and SOH based on the aforementioned models. In section 5 of the paper we will compare estimation results by means of the dataset that includes current and voltage measurements.

## 2. Empirical approach

Empirical modelling or ECM allows simulating lithium-ion battery behaviour using common circuit elements (capacitor, resistor, etc.) These models enable fast and robust simulations without high physical memory requirements. That is why they are implemented in most BMS now. ECM provides accurate results regarding input-output (current-voltage) matching of the battery. Moreover, ECM is actively used now for estimation and prediction of lithium-ion battery SOH [11]–[14].

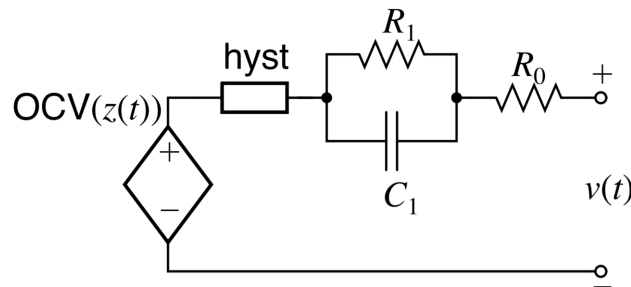


Fig. 2.1

Example of Equivalent-Circuit Model

Let us consider one of the common ECM that is represented in the figure above [15]. The state-space system of such model is the following set of equations

$$\begin{bmatrix} z_{k+1} \\ i_{R_1,k+1} \\ h_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & A_{RC} & 0 \\ 0 & 0 & A_{H_k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_k \\ i_{R_1,k} \\ h_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{\eta_k \Delta t}{Q} & 0 \\ B_{RC} & 0 \\ 0 & (1 - A_{H_k}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_k \\ \text{sgn}(i_k) \end{bmatrix},$$

$$v_k = OCV(z_k) + Mh_k - \sum_i R_i i_{R_i,k} - R_0 i_k,$$

where  $z_k$  is the battery SOC at discrete-time index  $k$ ,  $\eta_k$  is the unitless cell coulombic efficiency at time  $k$ ,  $i_k$  is the input current at time  $k$  [A],  $\Delta t$  is the sample period [s],  $Q$  is the cell total capacity [Ah]. Current through the resistor  $R_1$  in the resistor-capacitor network at discrete-time index  $k$  is denoted as  $i_{R_1,k}$ . This term models the slow time constants of diffusion processes occurring within the cell. Note that  $A_{RC} = \exp\left(\frac{-\Delta t}{R_1 C_1}\right)$  and  $B_{RC} = 1 - \exp\left(\frac{-\Delta t}{R_1 C_1}\right)$ .  $h_k$  is hysteresis at discrete-time index  $k$ .  $A_{H_k} = \exp\left(-\left|\frac{\eta_k i_k \gamma \Delta t}{Q}\right|\right)$ , where  $\gamma$  is the unitless constant that adjusts how quickly does the hysteresis state change with a change in cell SOC.  $v_k$  is battery terminal voltage [V].  $OCV$  is the battery open-circuit voltage [V],  $M$  is the maximum absolute analogue hysteresis voltage [V],  $M_0$  is the instantaneous hysteresis voltage [V],  $R_0$  is the pure ohmic resistance of the battery [ $\Omega$ ].

Despite the ECM advantages mentioned at the beginning of the current section, empirical modelling does not provide any information regarding internal electrochemical state of lithium-ion battery. Moreover, ECM does not allow to extrapolate battery state. All the referred facts were the beginning of the development of the reduced-order physics-based models of lithium-ion batteries. Let us consider them in detail in the following section.

### 3. Physics-based approach

Physics-based models are developed based on the main electrochemical reactions that take place inside lithium-ion battery cell during charge, discharge and rest. In this section we will consider the set of partial differential equations (PDEs) that allows describing electrochemical cell behaviour and was derived firstly by Newman et al [10], [16]. Furthermore, we will present an approach to convert the set of PDEs to the set of ordinary differential equations (ODEs) that is similar in computational complexity to the ECM considered in the previous section [17].

#### 3.1. Porous electrode model of lithium-ion cell

The first electrochemical approach to porous electrodes modelling for battery applications was presented in 1975. In the porous electrode theory, the electrode is treated as a superposition of two continua, namely, the electrolytic solution and the solid matrix. The solid matrix is modelled as microscopic spherical particles where the lithium ions diffuse and react on the spheres surface. This approach was later expanded to two composite electrodes and a separator in 1994 [18].

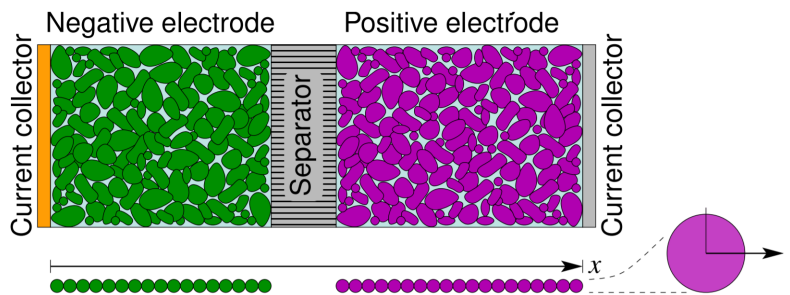


Fig. 3.1

Pseudo-two-dimensional porous-electrode model [19]

We will present here all the necessary PDEs and boundary conditions to model lithium-ion cell at the porous electrode scale according to [10]. Figure above depicts the geometry of a lithium-ion cell cross section; the model  $x$  dimension spans the cell width, while the

model  $r$  pseudo-dimension is measured outward from a particle center and describes lithium concentration inside solid particles (resulting in a «pseudo-two dimensional» model) [19]. The porous-electrode model includes the electrode-scale variables: reaction flux  $j$ , potential in the solid phase  $\phi_s$ , concentration of lithium in the solid phase  $c_s$ ; and the cell-scale variables: potential in the electrolyte phase  $\phi_e$ , concentration of lithium in the electrolyte phase  $c_e$ .

1. The solid-phase mass conservation

$$\frac{\partial c_s(r, x, t)}{\partial t} = \frac{D_s}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial c_s(r, x, t)}{\partial r} \right),$$

the boundary conditions to this PDE are

$$D_s \frac{\partial c_s(0, x, t)}{\partial r} = 0, \quad D_s \frac{\partial c_s(R_s, x, t)}{\partial r} = -j(x, t),$$

where  $j(x, t)$  is a measure of the amount of lithium moving across the boundary of the solid particle. The initial condition is

$$c_s(r, x, 0) = c_{s,0}, \quad 0 \leq r \leq R_s.$$

2. Mass conservation in the electrolyte phase of the porous electrode

$$\frac{\partial (\varepsilon_e c_e(x, t))}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D_{e,\text{eff}} \frac{\partial c_e(x, t)}{\partial x} \right) + a_s (1 - t_+^0) j(x, t),$$

where the boundary conditions are given by

$$\frac{\partial c_e(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial c_e(L, t)}{\partial x} = 0$$

and the initial concentration of lithium in the electrolyte is

$$c_e(x, 0) = c_{e,0}, \quad 0 \leq x \leq L.$$

3. Charge conservation in the solid phase of the porous electrode

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \sigma_{\text{eff}} \frac{\partial \phi_s(x, t)}{\partial x} \right) = a_s F j(x, t),$$

the boundary conditions are

$$-\sigma_{\text{eff}} \frac{\partial \phi_s(0, t)}{\partial x} = \sigma_{\text{eff}} \frac{\partial \phi_s(L, t)}{\partial x} = \frac{I}{A} = i_{\text{app}}.$$

4. Charge conservation in the electrolyte phase of the porous electrode

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \kappa_{\text{eff}} \frac{\partial \phi_e(x, t)}{\partial x} + \kappa_{D,\text{eff}} \frac{\partial}{\partial x} \ln c_e(x, t) \right) = -a_s F j(x, t),$$

where

$$\kappa_{\text{eff}} = \kappa \varepsilon_{e,\text{brug}} \quad \text{and} \quad \kappa_{D,\text{eff}} = \frac{-2RT}{F} \kappa_{\text{eff}} (1 - t_+^0) \left( 1 + \frac{d \ln f_{\pm}}{d \ln c_e} \right)$$

with the boundary conditions

$$\frac{\partial \phi_e(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial \phi_e(L, t)}{\partial x} = 0.$$



### 5. Lithium movement between solid and electrolyte phases

$$j(x, t) = k c_e^{1-\alpha} (c_{s,\max} - c_{s,e})^{1-\alpha} c_{s,e}^\alpha \left\{ \exp \left( \frac{(1-\alpha)F}{RT} \eta \right) - \exp \left( \frac{-\alpha F}{RT} \eta \right) \right\},$$

where the overpotential  $\eta$  is

$$\eta = \phi_s - \phi_e - U_{\text{ocp}} - j F R_{\text{film}}.$$

All variables used in the above equations are described in the nomenclature at the end of the present article.

### 3.2. Reduced-order model of lithium-ion cell

To convert full-order porous electrode model of lithium-ion cell we follow the approach presented in [17] and [20]. We will present the main results of the mentioned articles in the present paper.

The authors developed a one-dimensional physics-based reduced-order model for lithium-ion cell. They obtained the set of electrochemical-variable transfer functions to model cell parameters at any desired sets of spatial locations in the cell based only on the cell input current  $i_{\text{app}}$  for the following variables: solid potential  $\phi_s$ , electrolyte potential  $\phi_e$ , electrolyte concentration  $c_e$ , solid surface concentration  $c_s$ , reaction flux  $j$  and overpotential  $\eta$ .

The discrete-time realization algorithm [20] is used to produce an optimal reduced-order discrete-time state-space model from these transfer functions, overcoming the limitations of non-linear optimization approaches.

## 4. Kalman filter

Kalman filter is a recursive algorithm used to estimate the state vector of a linear system. If the system is non-linear, it can be linearised at any given time, using the assumption of the explicit dependence of the output characteristics of the system on time. The linear systems for lithium-ion cell were presented in the sections 2 and 3. In this section we examine general steps of the Kalman filter to estimate states of the battery [19], [15].

Let us consider discrete-time linear model of the lithium-ion cell in the following form:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f_k(x_k, u_k, w_k), \\ y_k &= h_k(x_k, u_k, v_k), \end{aligned}$$

where  $u_k$  is known input signal (current),  $x_k$  is the model state vector (SOC),  $y_k$  is measurable model output (voltage),  $w_k$  is process-noise random input,  $v_k$  is sensor-noise random input.

Below we present the main steps of the Kalman filter as applied to the discrete-time linear model considered above. The following notations are used: the decoration  $\widehat{(\cdot)}$  indicates extrapolated values of the variable, the decoration  $\widetilde{(\cdot)}$  is used to denote estimation error of the variable,  $(\cdot)^-$  indicates extrapolated values of the variable based only on measured data,  $(\cdot)^+$  is used to mark estimated values of the variable based only on measured data.

#### Six steps of the Kalman filter

##### 1. State prediction time update

$$\widehat{x}_k^- = \mathbb{E} \left[ f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) \mid \mathbb{Y}_{k-1} \right] \approx f(\widehat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, \bar{w}_{k-1}),$$

where  $\bar{w}_{k-1} = \mathbb{E}[w_{k-1}]$ .

## 2. Error covariance time update

$$\begin{aligned}\tilde{x}_k^- &= x_k - \hat{x}_k^- = f(x_{k-1}, u_{k-1}, w_{k-1}) - f(\hat{x}_{k-1}^+, u_{k-1}, \bar{w}_{k-1}) , \\ \Sigma_{\tilde{x},k}^- &= \mathbb{E} \left[ (\tilde{x}_k^-) (\tilde{x}_k^-)^T \right] \approx \hat{A}_{k-1} \Sigma_{\tilde{x},k-1}^+ \hat{A}_{k-1} + \hat{B}_{k-1} \Sigma_{\tilde{w}} \hat{B}_{k-1}^T ,\end{aligned}$$

$$\text{where } \hat{A}_k = \left. \frac{df_k(x_k, u_k, w_k)}{dx_k} \right|_{x_k = \hat{x}_k^+} \text{ and } \hat{B}_k = \left. \frac{df_k(x_k, u_k, w_k)}{dw_k} \right|_{w_k = \bar{w}_k} .$$

## 3. Predict system output

$$\hat{y}_k = \mathbb{E} \left[ h(x_k, u_k, v_k) \mid \mathbb{Y}_{k-1} \right] \approx h(\hat{x}_k^-, u_k, \bar{v}_k) ,$$

$$\text{where } \bar{v}_k = \mathbb{E}[v_k] .$$

4. Estimator Kalman gain matrix  $L_k$ 

$$\begin{aligned}\tilde{y}_k &= y_k - \hat{y}_k = h(x_k, u_k, v_k) - h(\hat{x}_k^-, u_k, \bar{v}_k) , \\ L_k &= \Sigma_{\tilde{x},k}^- \hat{C}_k^T \left[ \hat{C}_k \Sigma_{\tilde{x},k}^- \hat{C}_k^T + \hat{D}_k \Sigma_{\tilde{v}} \hat{D}_k^T \right]^{-1} ,\end{aligned}$$

$$\text{where } \hat{C}_k = \left. \frac{dh_k(x_k, u_k, v_k)}{dx_k} \right|_{x_k = \hat{x}_k^-} \text{ and } \hat{D}_k = \left. \frac{dh_k(x_k, u_k, v_k)}{dv_k} \right|_{v_k = \bar{v}_k} .$$

## 5. State estimate measurement update

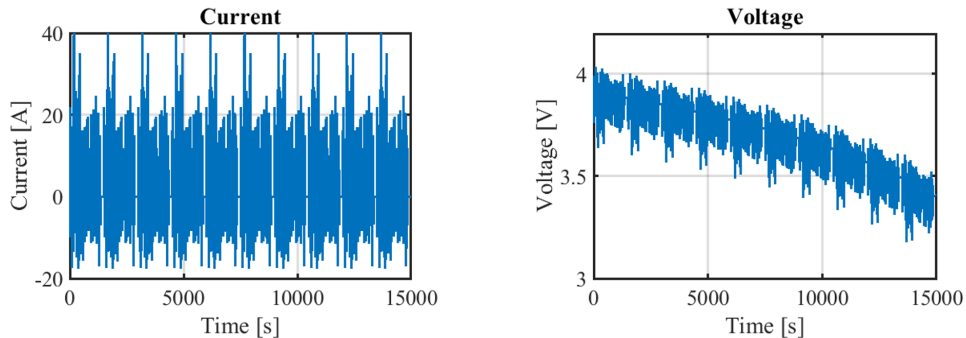
$$\hat{x}_k^+ = \hat{x}_k^- + L_k (y_k - \hat{y}_k) .$$

## 6. Error covariance measurement update

$$\Sigma_{\tilde{x},k}^+ = \Sigma_{\tilde{x},k}^- - L_k \Sigma_{\tilde{y},k} L_k^T .$$

## 5. Simulation and results

We now present results of Kalman filter implementation for two lithium-ion cell models: ECM (Section 2) and physics-based (Section 3). We consider 20.5 Ah NMC lithium-ion cell. We use the same set consisting of current and voltage measurements to compare the results (see figure below). All data are available in open-access [19], [15]. MATLAB was used to implement all necessary calculations.



F i g. 5.1

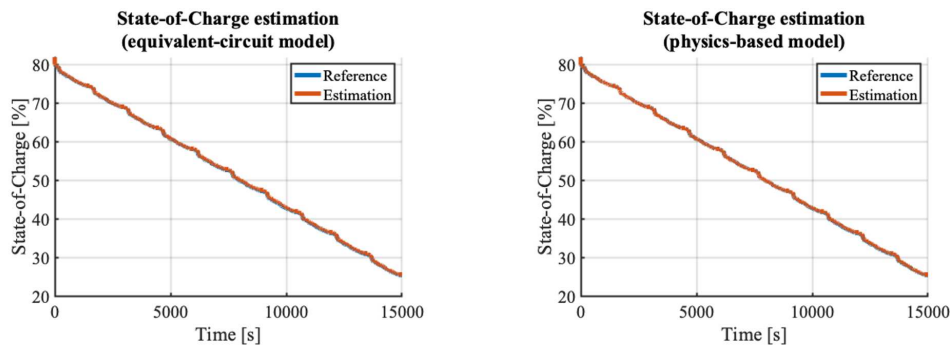
## Current and voltage measurements

As a first step we focus on SOC estimation as the main battery state. SOC is included explicitly into ECM model and can be evaluated from internal electrochemical variables via the following formula:

$$\text{SOC}_k = \frac{\theta_k - \theta_{0\%}}{\theta_{100\%} - \theta_{0\%}},$$

where  $\theta_k = \frac{C_{s,\text{avg}}}{C_{s,\text{max}}}$  is the present lithium concentration stoichiometry,  $\theta_{100\%}$  and  $\theta_{0\%}$  are its maximum and minimum limits, respectively.

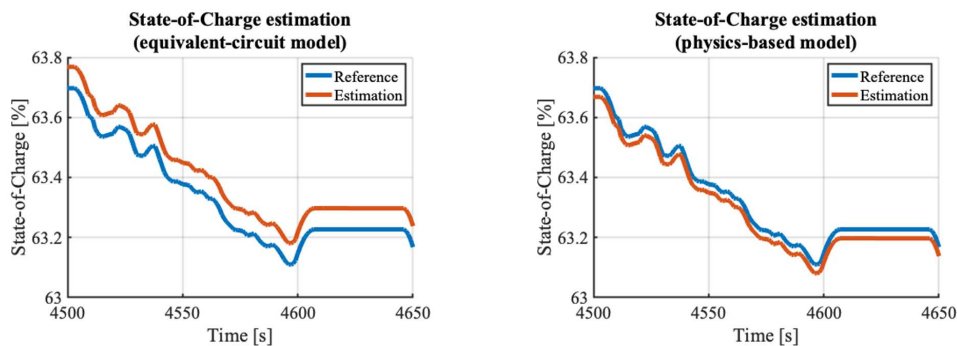
Thus, we have Kalman filter (Section 4) and two linear systems that allow estimating SOC of lithium-ion cell. As it was mentioned at the beginning of the present paper, we concerned about physical memory and speed of the calculations. We can exclude the first concern because Kalman filter is recursive algorithm that is based on simple math operations (summation and multiplication). However, we investigate carefully not only the errors of estimated SOC values but time of their evaluation as well. The obtained results are presented in the figure below.



F i g. 5.2

Results of SOC estimation by means of Kalman filter

It is indistinguishable from the figure above what algorithm provided the best result. Results are practically the same and RMS SOC-estimation error equals to 0.4% for ECM based estimation and 0.36% for physics-based one (see figure below).



F i g. 5.3

Results of SOC estimation by means of Kalman filter

Furthermore, results are comparable at the time of calculation. It takes 5.4 s to calculate 15000 values of SOC by means of ECM based Kalman filter and 5.1 s by physics-based approach for the same number of data samples.

However, physics-based approach is more powerful tool with regards to other lithium-ion cell states. While ECM-based Kalman filter allows estimating of battery internal resistance

and capacity, physics-based one provides estimation of electrochemical variables. Example of estimation of two electrochemical variables are presented in the figure below.

Despite the fact that values of internal resistance and capacity are enough to estimate lithium-ion battery SOH, these values provide only quantitative estimation. Whereas knowledge of the estimated values of internal electrochemical variables gives us qualitative information of battery states.

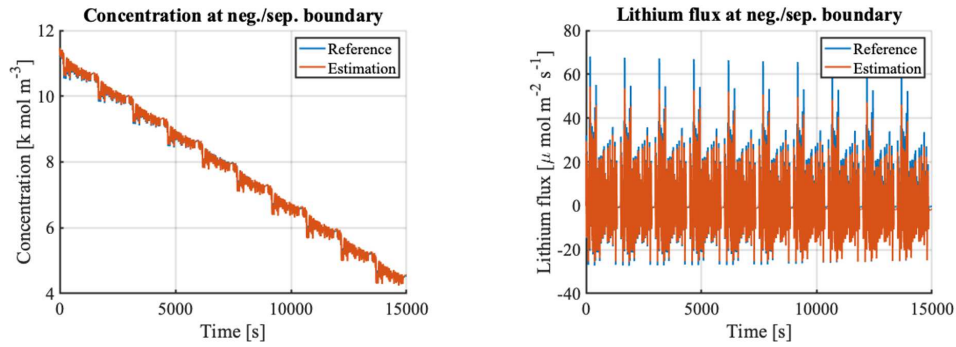


Fig. 5.4

Results of internal variables estimation by means of physics-based model and Kalman filter

## 6. Summary

In the present paper we considered two different approaches to estimate states of lithium-ion cell: ECM-based and physics-based. We presented results of the estimation for one particular lithium-ion battery cell, and compared them in terms of RMS errors and time required for the calculations. Obtained results met our expectations: ECM-based and physics-based approaches demonstrated comparable accuracy and computational complexity. However, we made a conclusion that physics-based approach is more powerful tool with regard to estimation of the cell SOH because it allows estimating of the internal battery variables.

Obtained results are important for our further research that will lie in battery control topics. We would like to build optimal battery control to slow rate of battery ageing with regards to constraints on the electrochemical variables.

### Nomenclature

- $A$ : surface area of the porous electrode [ $\text{m}^2$ ]
- $a_s$ : specific surface area of the porous electrode [ $\text{m}^{-1}$ ]
- $\alpha$ : charge-transfer coefficient
- $c$ : concentration of lithium in phase indicated by subscript [ $\text{mol m}^3$ ]
- $c_{e,0}$ : steady-state concentration of lithium in the electrolyte phase [ $\text{mol m}^3$ ]
- $c_{s,max}$ : maximum lithium concentration in an electrode particle [ $\text{mol m}^3$ ]
- $c_{s,0}$ : initial concentration of lithium in the solid phase [ $\text{mol m}^3$ ]
- $c_{s,e}$ : surface concentration of lithium in a spherical electrode particle [ $\text{mol m}^3$ ]
- $D_{e,eff}$ : effective electrolyte diffusivity [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]
- $D_s$ : solid diffusivity [ $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$ ]
- $\varepsilon$ : volume fraction of phase indicated by subscript
- $f_{\pm}$ : mean molar activity coefficient
- $F$ : Faraday constant [ $\text{C mol}^{-1}$ ]
- $\phi$ : potential of the phase indicated by subscript [ $\text{V}$ ]
- $I$ : applied current density [ $\text{A m}^2$ ]

$i_{\text{app}}$ : applied cell current [A]  
 $j$ : reaction flux [ $\text{mol m}^2 \text{s}^{-1}$ ]  
 $k$ : rate constant for the electrochemical reaction [ $\text{mol}^{\alpha-1} \text{m}^{4-3\alpha} \text{s}^{-1}$ ]  
 $\kappa_{\text{eff}}$ : effective electrolyte conductivity [ $\text{S m}^{-1}$ ]  
 $L$ : length of the cell [m]  
 $\eta$ : local overpotential [V]  
 $r$ : radial coordinate [m]  
 $R$ : universal gas constant [ $\text{J mol}^{-1} \text{K}^{-1}$ ]  
 $R_{\text{film}}$ : film resistance [ $\Omega \text{m}^2$ ]  
 $R_s$ : particle radius [m]  
 $\sigma_{\text{eff}}$ : effective solid conductivity [ $\text{S m}^{-1}$ ]  
 $T$ : temperature [K]  
 $t_+^0$ : transference number  
 $U_{\text{ocp}}$ : open circuit potential [V]  
 $x$ : 1D linear coordinate across the cell [m]

### Subscripts

$e$ : pertaining to the electrolyte phase  
 $s$ : pertaining to the solid phase

## REFERENCES

1. V. Pop et al., *Battery management systems: Accurate state-of-charge indication for battery-powered applications*, Springer Science & Business Media, 2008.
2. M. Murnane et al., “A closer look at state of charge (SOC) and state of health (SOH) estimation techniques for batteries”, 2017.
3. S. Nejad et al., “A systematic review of lumped-parameter equivalent circuit models for real-time estimation of lithium-ion battery states”, *Journal of Power Sources*, **316** (2016), 183–196.
4. A. Farmann et al., “A comprehensive review of on-board State-of-Available-Power prediction techniques for lithium-ion batteries in electric vehicles”, *Journal of Power Sources*, **329** (2016), 123–137.
5. S. Nejad et al., “Enhanced state-of-charge estimation for lithium-ion iron phosphate cells with flat open-circuit voltage curves”, IECON 2015-41st Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society, 2015, 003187–003192.
6. T. Xidong et al., “Capacity estimation for Li-ion batteries”, Proceedings of the 2011 American Control Conference, 2011, 947–952.
7. R. R. Richardson et al., “Gaussian process regression for forecasting battery state of health”, *Journal of Power Sources*, **357** (2017), 209–219.
8. X. Zhang et al., “A novel method for lithium-ion battery state of energy and state of power estimation based on multi-time-scale filter”, *Applied energy*, **216** (2018), 442–451.
9. K. A. Smith et al., “Control oriented 1D electrochemical model of lithium ion battery”, *Energy Conversion and management*, **48:9** (2007), 2565–2578.

10. T.F. Fuller et al., “Simulation and optimization of the dual lithium ion insertion cell”, *Journal of the Electrochemical Society*, **141**:1 (1994), 1–10.
11. G.L. Plett, “Recursive approximate weighted total least squares estimation of battery cell total capacity”, *Journal of Power Sources*, **196**:4 (2011), 2319–2331.
12. R. Ahmed et al., “Model-based parameter identification of healthy and aged li-ion batteries for electric vehicle applications”, *SAE International Journal of Alternative Powertrains*, **4**:2 (2015), 233–247.
13. F. Zhang et al., “State-of-charge estimation based on microcontroller-implemented sigma-point kalman filter in a modular cell balancing system for lithium-ion battery packs”, 2015 IEEE 16th Workshop on Control and Modeling for Power Electronics (COMPEL), 2015, 1–7.
14. S. Zhao et al., “Global sensitivity analysis of battery equivalent circuit model parameters”, 2016 IEEE Vehicle Power and Propulsion Conference (VPPC), 2016, 1–4.
15. G.L. Plett, *Battery management systems*. V.II: Equivalent-circuit methods, Artech House, 2015.
16. M. Doyle et al., “Comparison of modeling predictions with experimental data from plastic lithium ion cells”, *Journal of the Electrochemical Society*, **143**:6 (1996), 1890–1903.
17. J.L. Lee et al., “One-dimensional physics-based reduced-order model of lithium-ion dynamics”, *Journal of Power Sources*, **220** (2012), 430–448.
18. Di D. Domenico et al., “Lithium-ion battery state of charge and critical surface charge estimation using an electrochemical model-based extended Kalman filter”, *Journal of dynamic systems, measurement, and control*, **132**:6 (2010), 061302.
19. K.D. Stetzel et al., “Electrochemical state and internal variables estimation using a reduced-order physics-based model of a lithium-ion cell and an extended Kalman filter”, *Journal of Power Sources*, **278** (2015), 490–505.
20. J.L. Lee et al., “Discrete-time realization of transcendental impedance models, with application to modeling spherical solid diffusion”, *Journal of Power Sources*, **206** (2012), 367–377.

*Submitted 7.03.2019*

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

## ПАМЯТИ ВЛАДИМИРА НИКОЛАЕВИЧА ЩЕННИКОВА



В. Н. Щенников  
(28.11.1942 – 26.12.2018)

26 декабря 2018 г. после тяжелой болезни ушел из жизни Щенников Владимир Николаевич, заслуженный работник высшей школы Республики Мордовия, лауреат государственных премий Республики Мордовия, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва.

Владимир Николаевич родился 28 ноября 1942 г. в Староужовском лесничестве Темниковского района Мордовской АССР. В 1965 г. окончил физико-математический факультет Мордовского госуниверситета.



В конце 60-х годов В. Н. Щенников поступил в аспирантуру Ленинградского государственного университета. Научно-исследовательскую работу он начал под руководством профессора (позднее члена-корреспондента АН СССР) Владимира Ивановича Зубова, организатора и первого декана факультета прикладной математики–процессов управления ЛГУ. В. И. Зубов поставил задачу о конвергенции асимптотически устойчивых однородных систем при произвольных почти периодических возмущающих силах и предложил заняться этой тематикой аспиранту В. Н. Щенникову. Задача, предложенная В. И. Зубовым, оказалась весьма трудной и ее полное решение до настоящего времени найти никому не удалось. В ходе исследований В. Н. Щенников выделил класс систем, для которого удалось найти решение в виде явно формулируемых условий, налагаемых на коэффициенты изучаемой нелинейной системы. Эти результаты составили основу кандидатской диссертации В. Н. Щенникова «Некоторые вопросы теории колебаний в нелинейных и управляемых системах», успешно защищенной в 1972 году в диссертационном совете при ЛГУ. В дальнейшем Владимир Николаевич в продолжении всей жизни поддерживал научное сотрудничество с Ленинградским, ныне Санкт-Петербургским госуниверситетом.

Круг научных интересов В. Н. Щенникова со временем расширялся. Наряду с задачами теории нелинейных колебаний его интересовали разнообразные вопросы теории устойчивости (устойчивость по однородному приближению, частичная устойчивость, оценивание величины погрешности при переходе к укороченным уравнениям в критических случаях и т. п.). По результатам исследований в этих направлениях Владимир Николаевич публикует серию статей в ведущих научных журналах «Дифференциальные уравнения», «Автоматика и телемеханика» и других. На основе проведенных исследований В. Н. Щенников успешно защищает в 1991 году в диссертационном совете при ЛГУ диссертацию на соискание ученой степени доктора физико-математических наук на тему «Устойчивоподобные свойства решений нелинейных управляемых систем».

В. Н. Щенников являлся заведующим кафедрой дифференциальных уравнений (1976-1986 гг., 1988-2013 гг.), старшим научным сотрудником (1986-1988 гг.), профессором кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики (2013-2018 гг.). В 1976 году ему было присвоено ученое звание доцента, в 1992 году – ученое звание профессора.

В. Н. Щенников являлся членом диссертационного совета Д 212.117.13 при Мордовском государственном университете, председателем редколлегий 24 межвузовских сборников научных работ «Динамика систем и управление», «Управляемые динамические системы» и «Методы возмущений в гомологической алгебре и динамика систем».

Наряду с чисто математическими проблемами Владимир Николаевич много сил и внимания отдавал прикладным вопросам. Объектами его исследований были математические модели различной природы, описываемые обыкновенными дифференциальными и конечно-разностными уравнениями, уравнениями с частными производными, управляемые системы и системы с импульсным воздействием, системы с переключениями, абстрактные динамические системы, потоки и полупотоки и т. д. Его интересовали разнообразные динамические свойства (устойчивость и частичная устойчивость, ограниченность, конвергенция и др.). Следуя А. А. Шестакову, Владимир Николаевич называл такие свойства устойчивоподобными. Научные интересы В. Н. Щенникова распространялись на биологию, химию, медицину. Также его занимали проблемы светотехники, которые он изучал в сотрудничестве с инженерами ВНИИС им. А. Н. Лодыгина.

В. Н. Щенников активно принимал участие в российских и международных конференциях, сотрудничал и публиковал совместные работы с учеными Санкт-Петербургского государственного университета, Института динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН, Вычислительного центра РАН им. А. А. Дородницына, Рос-



сийского университета транспорта (МИИТ), Российского университета дружбы народов и др. За годы научной деятельности им было опубликовано более 230 научных и учебно-методических работ.

Возглавив кафедру дифференциальных уравнений, Владимир Николаевич много сил отдал тому, чтобы, опираясь на личные контакты с научной школой В. И. Зубова по прикладной математике и процессам управления, наладить поддержку научных исследований и учебного процесса в Мордовском университете ведущими профессорами Ленинградского университета. Регулярно выходил сборник научных трудов «Управление, надежность, навигация», в котором публиковались результаты исследований по важным теоретическим и прикладным темам, полученные сотрудниками факультета ПМ-ПУ и НИИВМиПУ ЛГУ. В те годы, когда возможности публиковаться даже для сотрудников ведущих университетов были далеко не столь широкими, как сейчас, это было значимым фактом. Одновременно преподаватели и сотрудники Мордовского госуниверситета получали возможность знакомиться с новыми свежими постановками задач и новыми направлениями развития теории управления. Владимир Николаевич приглашал для чтения специальных курсов лекций студентам Мордовского госуниверситета ведущих профессоров ЛГУ. С такими курсами систематически выступали В. И. Зубов, Ю. З. Алешков, А. Ф. Зубова, Н. М. Матвеев. Освоившие эти курсы лучшие студенты Мордовского университета в дальнейшем направлялись в аспирантуру ЛГУ, защищали кандидатские диссертации, что давало надежную кадровую основу преподавательскому составу математического факультета.

Под руководством В. Н. Щенникова вел свою работу научный семинар «Качественная теория дифференциальных уравнений, теория устойчивости и теория управления динамических процессов и полупроцессов», на котором обсуждались научные работы как сотрудников кафедры и факультета, так и ученых других вузов, работающих этой области. Дискуссии, возникающие на семинаре, способствовали обмену опытом между преподавателями, обеспечивали непрерывное развитие и научный рост его участников.

Владимир Николаевич более тридцати лет поддерживал дружбу и сотрудничество с Александром Андреевичем Шестаковым (1920–2014 гг.) – доктором физико-математических наук, профессором, заведующим кафедрой высшей математики ВЗИИТ (в настоящее время РОАТ РУТ (МИИТ)). В соавторстве с А. А. Шестаковым был подготовлен ряд научных публикаций, посвященных различным вопросам качественной теории и теории устойчивости динамических систем. В частности, в совместных работах изучены асимптотические свойства неоднородного линейного дифференциального уравнения с неограниченным оператором в банаховом пространстве, а также свойства устойчивости и ограниченности относительно части фазовых переменных ряда классов нелинейных систем. Научное сотрудничество Владимира Николаевича и Александра Андреевича продолжалось сопровождалось теплыми дружескими отношениями, регулярными обсуждениями интересующих научных направлений и новых результатов, а также было тесно связано со стремлением помочь своим ученикам – молодым исследователям – в постановке задач и в их решении.

А. А. Шестаков неоднократно читал студентам кафедры дифференциальных уравнений специальные курсы по обобщенному прямому методу Ляпунова на основе своих новейших результатов, которые были опубликованы в одноименной монографии в издательстве «Наука» только через 10 лет. В. Н. Щенников организовывал лекции ведущих профессоров столь плотно, что иногда к «штатным» занятиям по расписанию добавлялись сразу по два дополнительных спецкурса. По этой причине однажды А. А. Шестаков читал лекцию для преподавателей Мордовского университета о методах топологической динамики и результатах Ц. Арнштайна по предельным уравнениям в присутствии Н. М. Матвеева, проводившего в тот период спецкурс по аналитической теории дифференциальных урав-

нений. Для студентов, присутствовавших на лекции, было крайне поучительно наблюдать высочайший уровень, интеллигентность и конструктивность дискуссии, возникшей после краткой реплики Н. М. Матвеева, призывавшей к сопоставлению обсуждаемых вопросов на лекции с результатами отечественных ученых. Совместными усилиями двух профессоров-классиков был дан исчерпывающий анализ по сопоставлению обсуждаемых вопросов с результатами не только отечественных ученых, но и зарубежных авторов.

Владимир Николаевич и Александр Андреевич вели совместную экспертную и педагогическую работу по подготовке кадров высшей квалификации. Две научные школы по качественной теории динамических систем – школа профессора В. Н. Щенникова и школа профессора А. А. Шестакова продолжают сотрудничать и в настоящее время.

Очень внимательно В. Н. Щенников относился к молодым ученым, аспирантам и студентам. Владимир Николаевич всегда тщательно присматривался к своим ученикам, предлагая тему кандидатской диссертации в зависимости от их научных интересов. Он никогда не навязывал тему диссертации, оставляя конечный выбор за аспирантом, которому проблема должна нравиться, увлекать его. Свою же задачу он видел в том, чтобы направлять работу аспиранта. При этом Владимир Николаевич внимательно следил за исследовательской деятельностью своих учеников, подбадривал, помогал, указывая на ошибки и неточности. Он тщательно просматривал всю новую литературу, которая касалась тем диссертаций его аспирантов, мог позвонить из библиотеки и сказать, какую именно статью нужно взять для работы. К нему всегда можно было подойти с проблемой, попросить совет, и он никогда не отказывал в помощи.

Вместе с тем В. Н. Щенников всегда отличался доверительным, дружелюбным и одновременно строгим отношением к своим ученикам. От своих подопечных он требовал интенсивной научной работы, регулярных докладов о своих результатах, что поддерживало молодых учёных в «научном тоне». При этом в тяжёлые минуты Владимир Николаевич всегда приходил на помощь, его ободряющим словам удавалось затронуть те струны души, которые вдохновляли молодых учёных на новые свершения.

Под руководством В. Н. Щенникова успешно защитили кандидатские диссертации 10 аспирантов.

Владимиру Николаевичу присвоено звание заслуженного работника высшей школы Республики Мордовия (1995 г.), дважды он становился лауреатом Государственной премии Республики Мордовия (2000, 2009 гг.), многократно награждался Почетными грамотами Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарёва, в 2011 г. награжден Почетной грамотой Правительства Республики Мордовия.

В. Н. Щенникова отличали высокая человеческая культура и простота общения, фундаментальные знания и широкий кругозор. Владимир Николаевич был неординарным и одаренным человеком, который пользовался огромным уважением среди своих коллег, студентов и аспирантов. Обладал развитым и оригинальным чувством юмора, что позволяло ему объединять коллег и настраивать их на успешную работу над сложными научными и методическими задачами. Например, вернувшись однажды из командировки в Москву и собрав кафедру, он так характеризовал утвержденную академиком Л. С. Понтрягиным тематику исследований кафедры дифференциальных уравнений: «С обыкновенными уравнениями разрешили делать ВСЁ!!!».

В. Н. Щенников сочетал в себе талант большого ученого и опыт одаренного педагога. Круг людей, вовлеченных в сферу его влияния, был очень широк. Владимир Николаевич всегда был очень доброжелателен, открыт и неравнодушен к людям.

Память об этом замечательном человеке сохраняют все, кто его знал. Многие поколения коллег и учеников будут благодарны Щенникову Владимиру Николаевичу – замечательному ученому и человеку.

Светлая память о Владимире Николаевиче будет жить в наших сердцах долгие годы.

*А. Ю. Александров, Л. А. Антошкина, Е. В. Афиногентова, А. С. Андреев,  
И. Г. Башмаков, П. А. Вельмисов, В. З. Гринес, Е. В. Десяев, О. В. Дружинина,  
Д. К. Егорова, А. П. Жабко, Р. В. Жалнин, Е. А. Каледина, А. М. Камачкин,  
А. А. Косов, О. Г. Костров, Е. Б. Кузнецов, Т. Ф. Мамедова, С. И. Мартынов,  
С. М. Мурюмин, В. И. Никонов, С. И. Перегудин, Е. Е. Пескова, И. П. Рязанцева,  
П. В. Сенин, Г. А. Смолкин, А. Г. Смольянов, Л. А. Сухарев, А. О. Сыромясов,  
В. Ф. Тишкин, А. Ю. Утешев, С. Е. Холодова, И. И. Чучаев, П. А. Шаманаев,  
А. В. Щенников, Е. В. Щенникова, О. С. Язовцева*

## Правила оформления рукописей

Редакция журнала принимает рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Если статья на русском языке, то она должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC 2010;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО - полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (на русском);
- список литературы.

Если же статья на английском языке, то соответствующие разделы излагаются только на английском. Код УДК не используется.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);

- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);

- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);

- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

**Ключевые слова** должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;

- результаты - основное содержание статьи;

— обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;

— заключение — выводы и рекомендации.

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

**Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Перевод заглавия статьи на английский язык;
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- название книги (транслитерация);
- [Перевод названия книги в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;
- Количество страниц в издании (250 p.);
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете amsbib.sty.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте <https://translit.ru/ru/bgn/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

*Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка, располагается за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru. ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка можно скачать из раздела Полезные материалы меню Для автора на сайте журнала.*

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела References.**

**Статьи в журналах на русском языке:**

P.A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, Trudy Srednevolzhskogo

matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, “[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]”, Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

**Статьи в журналах на английском языке:**

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

**Статьи в электронном журнале на русском языке:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

**Статьи в сборниках на русском языке:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4–13 (In Russ.).

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Статьи в материалах конференций на русском языке:**

P. A. Shamanaev, “[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]”, Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6–11 July 2018), 218–219 (In Russ.).

**Диссертации на русском языке:**

P. A. Shamanaev, Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost’ dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [ PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ.), 145 p.

## The rules of article design

The editorial staff accepts manuscripts in Russian and English that are not published and not intended for publication in another edition.

The text of the article should be prepared in TeX publishing system using LaTeX macroextension.

The author(s) should send to the editor source text of the article (LaTeX format), files with figures (EPS format) and the compiled version of the article (PDF format).

If the article is in Russian, then it should contain the following sections in Russian and English:

- UDC and MSC 2010 codes;
- article title;
- information about every author: full name, position, address of the organization, academic degree, ORCID, e-mail;
- abstract;
- keywords;
- text of the article (only in Russian);
- references (bibliography).

If the article is in English, the relevant sections are presented only in English. UDC code is not used.

The Subject Classification Index (MSC 2010) by AMS is used for thematic link separation in two abstract databases – the Mathematical Reviews (MR) of the American Mathematical Society (AMS) and Zentralblatt MATH (zbMATH) of the European Mathematical Union. The directories of UDC and MSC 2010 codes can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** section of the journal website.

**Abstract** should be clearly structured, the material presentation should follow the logic of the result description in the article. The text should be concise and clear, free from background information, and have convincing wording.

It is recommended to include in the abstract the following aspects of the article's content: the subject, purpose of the work, method or methodology of the work, the results of the work and the scope of their application, conclusions.

The subject and purpose of the work are indicated if they are not clear from the title of the article; the method or methodology of the work should be described if they show some novelty or they are of interest from the point of view of this work.

Results of work are described extremely precisely and informatively. Main theoretical and experimental results, factual data, detected relationships and patterns are presented. In the description preference is given to new results and data of long-term value, important discoveries, conclusions that refute existing theories, as well as data that, in the author's opinion, are of practical importance.

Conclusions may be accompanied by recommendations, estimates, suggestions, hypotheses described in the article.

The information contained in the article's title should not be repeated in the text of the author's summary.

It is better to avoid unnecessary introductory phrases (for example, «the author of the article considers ... »). Author(s) should not include in the abstract historical references (if they do not constitute the main content of the document) as well as description of previously published works and well-known provisions.



The text of the author's abstract should use syntactic constructions typical for the language of scientific and technical documents. Also it is better to avoid complicated grammatical constructions.

Significant words from the article's text should be used in the text of the abstract.

Abbreviations and conventions, excluding commonly used (in English special texts also), are used in exceptional cases or their definitions must be given when first used.

Units of physical quantities should be given in the international SI system. It is allowed to give the value of the physical quantity in original system of units in parentheses next to its value in the SI system.

The abstract should not contain references to the publication numbers in the article's bibliography.

When writing annotations author(s) should remember the following points:

- it is necessary to follow the article's chronology and to use its headings as a guide;
- do not include non-essential details;
- use the technical (special) terminology of your scientific area, clearly expressing your opinion and bearing in mind that you write for an international audience;
- the text should be connected by the use of words «consequently», «moreover», «for example», «as a result», etc., or separate statements should logically follow from one another;
- it is better to use active voice rather than passive, i.e. «The study tested», but not «It is tested in this study».

In the text of English abstract author(s) should use the terminology typical to foreign special texts. They should avoid usage of terms that are direct tracing of Russian-language terms. It is necessary to preserve the unity of terminology within the abstract.

English abstracts to Russian-language articles should be written in high-quality English.

The average volume of abstracts in Russian and in English should be from 100 to 250 words.

**Keywords** should reflect the main content of the article. If it is possible they should not repeat the terms of the title and abstracts. It is better for keywords to use the terms from the article's text, as well as terms defining the subject area and including other important concepts that will expand the possibilities of finding an article by means of information retrieval system. Section **Keywords** must contain from 5 to 15 words.

**Text of the article.** When presenting the text of the article, it is necessary to adhere to the following structure:

- introduction - a brief overview of the state of the issue under consideration and the formulation of the problem solved in the article;
- materials and methods for solving the problem and accepted assumptions;
- results – the main content of the article;
- discussion and analysis of the results obtained and their comparison with previously known ones;
- conclusion — conclusions and recommendations.

**References** should contain only those sources that are referenced in the text of the work. Sources are arranged in the order of their mention in the article and their number should not exceed 20.

**Description of the bibliographic reference schemes for the References section.**

*Articles in the journal in Russian:*

- Author(s) (transliteration);
- Translation of the article title into English;
- The name of the Russian-language source (transliteration);
- [Translation of the source name into English – paraphrase (for magazines one may not do it)];

- Output data with notation in English, or only digital (the latter, depending on the description standard used);
  - An indication of the article language (in Russ.) after the article's description.
- Books (monographs and collections) in Russian:*
- Author(s) (transliteration);
  - title of the book (transliteration);
  - [Translation of the book's name in square brackets];
  - Imprint: place of publication in English – Moscow, St. Petersburg; English name of publishing house if it is an organization (Moscow St. Univ. Publ.) and transliteration, if the publisher has its own name, indicating in English that it is a publisher: Nauka Publ.;
  - The number of pages in the book (250 p.);
  - Reference to the language (in Russ.) after the description of the book.

References in Russian and English are made according to the citation style adopted for use in the field of mathematics by the American Mathematical Society (AMS) and the European Mathematical Union (Zentralblatt MATH, zbMATH). To do this, use the AMSBIB format, implemented in the amsbib.sty style package.

For transliteration of the Russian alphabet in Latin it is necessary to use the BGN (Board of Geographic Names) system. On the website <https://translit.ru/ru/bgn/> you can use the program of transliteration of the Russian alphabet into the Latin alphabet for free.

*References in Russian in text format, designed in accordance with the requirements of **GOST P 7.0.5.-2008 Bibliography link**, must be located behind the list of references in Russian and should be commented out. This list of references will be used when downloading the electronic version of the journal on the site [elibrary.ru](http://elibrary.ru) **GOST P 7.0.5.-2008 Bibliography link** can be downloaded from the **Useful Materials** section of the **For Authors** menu on the journal website.*

Detailed technical instructions on the design of manuscripts are contained in the **Rules for the layout of manuscripts in the LaTeX system**.

## Examples of bibliographic references for the section *References*.

### Journal articles in Russian:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, "[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

### Journal articles in English:

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

### Articles in the electronic journals in Russian:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

### Articles in collections in Russian:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

**Books (monographs and collections) in Russian:**

B.F. Bylov, R.E. Vinograd, D.M. Grobman, V.V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

**Conference proceedings in Russian:**

P. A. Shamanaev, "[On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]", Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems], Tezisy dokladov [Abstract] (Suzdal, 6-11 July 2018), 218-219 (In Russ.).

**Theses in Russian:**

P. A. Shamanaev, Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [ PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.

## Правила верстки рукописей в системе LaTeX

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются три файла: файл-преамбула, файл-шаблон и стилевой пакет svmobib.sty. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. Текст рукописи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <ФамилияИО>.tex. Он включается командой `\input` в файл-преамбулу. Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание файла-преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Если статья на русском языке, то для оформления заголовков статьи на русском и английском языке следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова}

*Если же статья на английском языке, то заголовок статьи оформляется только на английском языке. Для этого используется команда `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerEn`.*

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation\***.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень\_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

`\RBibitem{метка для ссылки на источник},`

а англоязычная библиографическая ссылка — командой

`\Bibitem{метка для ссылки на источник}.`

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmobib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на источники из списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок — 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References* с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`**

**Статьи в журналах на русском языке:**

`\Bibitem{shamanaevBib1}`

`\by P. A. Shamanaev`

`\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]`

\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
 \yr 2003  
 \vol 5  
 \issue 1  
 \pages 145–151  
 \lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib2}  
 \by P. A. Shamanaev  
 \paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]  
 \jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
 \yr 2016  
 \vol 18  
 \issue 3  
 \pages 61–69  
 \lang In Russ.

#### **Статьи в журналах на английском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib3}  
 \by M. J. Berger, J. Olinger  
 \paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations  
 \jour Journal of Computational Physics  
 \yr 1984  
 \vol 53  
 \pages 484–512

#### **Статьи в электронном журнале на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib4}  
 \by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,  
 \paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]  
 \jour Ogarev-online  
 \vol 20  
 \yr 2016  
 \lang In Russ.  
 \elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

#### **Статьи в сборниках на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib5}  
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
 \publaddr Ulyanovsk  
 \publ UIGTU Publ.  
 \yr 2014  
 \serial 10

\pages 4–13  
\lang In Russ.

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib6}  
\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy  
\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]  
\publaddr Moscow  
\publ Nauka Publ.  
\yr 1966  
\totalpages 576  
\lang In Russ.

**Статьи в материалах конференций на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib8}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]  
\inbook Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nyim uravneniyam i dinamicheskim sistemam [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]  
\proc Tezisy dokladov [Abstract]  
\procinfo Suzdal, 6–11 July 2018  
\pages 218–219  
\lang In Russ.

**Диссертации на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib9}  
\by P. A. Shamanaev  
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]  
\thesisinfo Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]  
\publaddr Saransk  
\yr 1997  
\totalpages 145  
\lang In Russ.

## The rules for article layout in the LaTeX system

*Please note that the rules below must be strictly followed. In case the rules are not fulfilled, your manuscript will be returned for revision.*

The article should be compiled using the MiKTeX package. The distribution kit of this package can be downloaded from the official website – <http://www.miktex.org>.

Three files are used for manuscript layout: the preamble file, the template file and style package svmobib.sty. They can be downloaded from the website of the journal in the section **Rules for Manuscripts**: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>. The article text should be placed in a template file named <LastName>.tex. It is enabled with the command `\input` in the preamble file. For example, `\input{shamanaev.tex}`

The contents of the preamble file **can not be changed**. The definition of new commands by the author of the article **is not allowed** to prevent name conflicts with commands that could be defined in articles of other authors.

**Design of article titles.** If the article is in Russian, then the following commands should be used to format the article headings in Russian and English `\headerRus` and `\headerEn`, respectively.

The command `\headerRus` has the following arguments: {UDC} {Article title} {The authors}} {Author1 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail. }, Author2 \footnote {Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords} {Title of the article in English} {Author(s) in English}

The command `\headerEn` has the following arguments: {MSC 2010 } {Article title} {The authors}} {Author1\footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail}, Author2\footnote{Last Name, First Name, Patronimic, Position, Place of work, organization address, academic degree, ORCID, e-mail} } {Abstract} {Keywords}

*If the article is in English, then the title of the article is in English only. To do this, use the command `\headerFirstEn` with the same parameters as for the command `\headerEn`.*

**Design of the article text.** The article may contain subheadings of any nesting. Top-level subheadings are entered using the command `\sect` with one parameter: `\sect{Header}`

Subheadings of lower levels are entered as usual by commands `\subsection`, `\subsubsection` and `\paragraph`.

It should be borne in mind that regardless of the nesting level of subheadings in your article, the numbering of objects (formulas, theorems, lemmas, etc.) will always be double and will be subject to the subheadings of the highest level.

To design numbered formulas, use the environment **equation**. Numbering is needed only for those formulas that are referenced in the text of the article. For other formulas, use the **equation\*** environment.

For the design of theorems, lemmas, sentences, corollaries, definitions, comments and examples the authors should use corresponding environments **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** and **Example**. If the article provides evidences of the statements, they should be surrounded by commands `\proof` and `\proofend` (to get strings 'Evidence.' and 'The proof is complete.' respectively).

For numbering formulas and creating subsequent references to these formulas authors must use the commands `\label{label}` and `\eqref{label}`, where the following string must be used as a label: 'Author'sLastNameFormulaNumber'. For example, formula (14) in Ivanov's article



should be marked `\label{ivanov14}`, Theorem 5 of this articles — `\label{ivanovt5}`, etc. (For references to theorems, lemmas and other objects other than formulas, one need to use the command `\ref{label}`).

**Design of pictures.** To insert pictures into the text of an article, one must use following commands:

- a) insert a numbered picture without a caption but indicating compression ratio

`\insertpicture{label}{file_name.eps}{degree_of_compression}`

where **degree\_of\_compression** is a number from 0 to 1.

- b) insert a numbered picture with the signature

`\insertpicturewcap{label}{file_name.eps}{caption_of_the_figure}`

- c) insert a numbered picture with a caption and indicating compression ratio `\skip 3mm noindent \insertpicturecapscale{label}{file_name.eps}{degree_of_compression}{caption}`

- d) insert a picture without a number under the picture, but with a caption or without it

`\insertpicturenonum{file_name.eps}{degree_of_compression}{caption}`

All inserted images must be in EPS format (Encapsulated PostScript).

**Design of references.** For design of references in Russian and in English authors should use the environment **thebibliography** and **thebibliographyEn**, respectively.

Each Russian bibliographic reference is made by a command

`\RBibitem{label for a link to the source}`,

and every English reference – by a command

`\Bibitem{label for a link to the source}`.

Further, to describe the bibliographic reference, authors must use the commands that implement the AMSBIB format and refer to the `svmobib.sty` style package. The basis of this package is the `amsbib.sty` style file. These commands are described in more detail in the `amsbib.pdf` instruction.

To make the reference to element of the reference list in the article text authors must use the command `\cite` or `\pgcite` (parameters, see the preamble file). For the name of tags for Russian-language bibliographic references, use the 'LastNameRBibNumberOfReference', and for English-language bibliographic references - 'LastNameBibNumberOfReferences'.

Labels of all article's objects must be unique.

## Examples of bibliographic references' design for the *References* section using commands from the `svmobib.sty` package

### Journal articles in Russian:

`\Bibitem{shamanaevBib1}`

`\by P. A. Shamanaev`

`\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]`

`\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva`

`\yr 2003`

`\vol 5`

`\issue 1`

\pages 145–151

\lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib2}

\by P. A. Shamanaev

\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]

\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva

\yr 2016

\vol 18

\issue 3

\pages 61–69

\lang In Russ.

### Journal articles in English:

\Bibitem{shamanaevBib3}

\by M. J. Berger, J. Olinger

\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations

\jour Journal of Computational Physics

\yr 1984

\vol 53

\pages 484–512

### Articles in the electronic journals in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib4}

\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,

\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]

\jour Ogarev-online

\vol 20

\yr 2016

\lang In Russ.

\elink Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadraticnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

### Articles in collections in Russian:

\Bibitem{shamanaevBib5}

\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev

\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]

\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]

\publaddr Ulyanovsk

\publ UIGTU Publ.

\yr 2014

\serial 10

\pages 4–13

\lang In Russ.

**Books (monographs and collections) in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib6}`  
`\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy`  
`\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti` [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]  
`\publaddr Moscow`  
`\publ Nauka Publ.`  
`\yr 1966`  
`\totalpages 576`  
`\lang In Russ.`

**Conference proceedings in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib8}`  
`\by P. A. Shamanaev`  
`\paper [On the question of the perturbation of a linear equation by two small linear terms]`  
`\inbook Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam` [International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems]  
`\proc Tezisy dokladov` [Abstract]  
`\procinfo Suzdal, 6-11 July 2018`  
`\pages 218–219`  
`\lang In Russ.`

**Theses in Russian:**

`\Bibitem{shamanaevBib9}`  
`\by P. A. Shamanaev`  
`\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya` [Lyapunov transformations and stability of motion]  
`\thesisinfo Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk` [PhD phys. and math. sci. diss.]  
`\publaddr Saransk`  
`\yr 1997`  
`\totalpages 145`  
`\lang In Russ.`

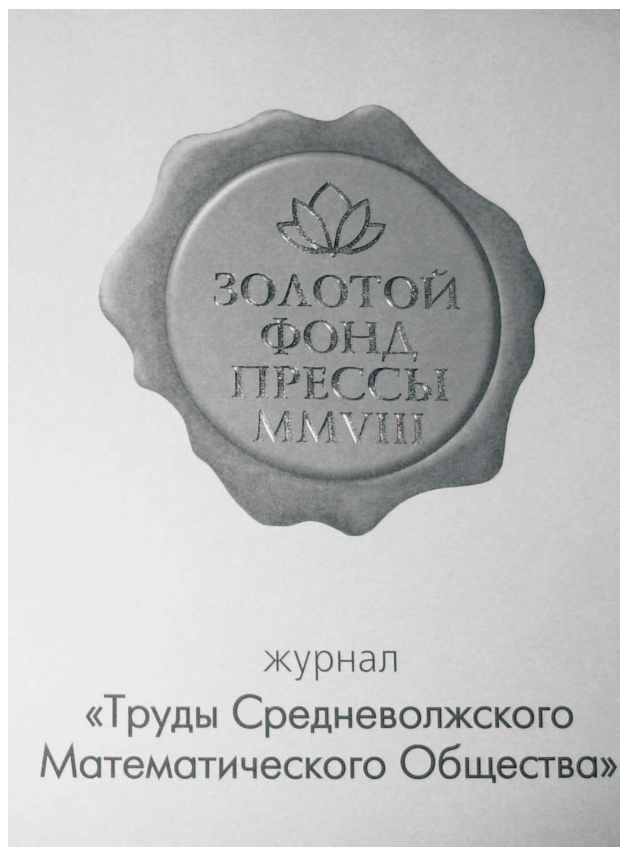
## Алфавитный указатель авторов

Бойков И. В.	149	Масягин В. Ф.	244
Босова А. А.	164	Пескова Е. Е.	244
Дерябина М. С.	222	Починка О. В.	164
Жалнин Р. В.	175, 244	Рязанцев В. А.	149
Косов А. А.	175	Сироткин Д. В.	215
Лубышев Ф. В.	187	Тишкин В. Ф.	244
Малышев Д. С.	215	Фёдорова А. А.	259
Манапова А. Р.	187	Шаманаев П. А.	175
Мартынов С. И.	222	Щенников А. В.	175
Щенникова Е. В. 175			

## Author Index

Boikov I. V.	149	Masyagin V. F.	244
Bosova A. A.	164	Peskova E. E.	244
Deryabina M. S.	222	Pochinka O. V.	164
Fedorova A. A.	259	Ryazantsev V. A.	149
Kosov A. A.	175	Shchennikov A. V.	175
Lubyshev F. V.	187	Shchennikova E. V.	175
Malyshev D. S.	215	Shamanaev P. A.	175
Manapova A. R.	187	Sirotkin D. V.	215
Martynov S. I.	222	Tishkin V. F.	244
Zhalnin R. V. 175, 244			

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: *Шаманаев П. А.*  
Редакторы: *Зинина С. Х., Язовцева О. С.*  
Перевод: *Сыромясов А. О.*

Подписано в печать 10.06.2019. Дата выхода в свет 30.06.2019. Цена свободная.

Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 14 усл. печ. л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1190.

Типография: Издательство Мордовского университета  
Адрес типографии: 430005, г. Саранск, ул. Советская, д. 24

Desktop publishing: *Shamanaev P. A.*  
Editor: *Zinina S. Kh., Yazovtseva O. S.*  
Translation: *Syromyasov A. O.*

Signed to print 10.06.2019. Date of publishing 30.06.2019. Free price.

Sheet size 70x108  $\frac{1}{16}$ . Conventional printed sheets 14.

Number of copies 100. Order no. 1190.

Printing House: Publishing House of Mordovia State University

Address of Printing House: 430005, Saransk, Sovetskay, 24



---

Для заметок

Для заметок



