

ISSN 2587 – 7496 (Online)

ISSN 2079 – 6900 (Print)

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  20  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  4

2018



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

## Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 20, № 4. 2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201804

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

ISSN 2587-7496 (Online)

ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

# **Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva**

**Middle Volga Mathematical Society Journal**

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 20, NO. 4. 2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201804

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

# Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика, 01.02.00 Механика, 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

**УЧРЕДИТЕЛИ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68).

**ИЗДАТЕЛЬ:** федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68)

**РЕДАКЦИЯ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal "Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva" publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- "Mathematics",
- "Applied Mathematics and Mechanics",
- "Mathematical modeling and computer science".

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics, 01.02.00 Mechanics, 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC).

One can subscript to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, Web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий отделом численных методов в механике сплошной среды ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (Саранск, Россия)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малазийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

**Ахтямов Азамат Мухтарович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Петр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Дерюгин Юрий Николаевич** — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, генеральный директор Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Логинов Борис Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Политехнического института ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (Ханты-Мансийск, Россия)

**Матус Петр Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Салахитдинов Махмуд Салахитдинович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Спивак Семен Израилевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Терехин Михаил Тихонович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина» (Рязань, Россия)

**Ион Анка Вероника** — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Сенин Петр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (Саранск, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, первый проректор – проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)



## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Numerical Methods in Continuum Mechanics of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Aleksandr S. Andreev** — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

**Azamat M. Akhtyamov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Vyacheslav Z. Grines** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Director, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Boris V. Loginov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Polytechnic Institute, Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

**Petr P. Matus** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Olga V. Pochinka** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Mahmud S. Salahitdinov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, of Uzbekistan)

**Semen I. Spivak** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Mikhail T. Terekhin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

**Anca V. Ion** — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

## EDITORIAL COUNCIL

**Morozkin Nikolay Danilovich** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Senin Petr Vasilievich** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Suharev Lev Alexandrovich** — Ph.D. (Phys.-Math.), Head of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Yarushkina Nadezda Glebovna** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), First Vice-Rector – Vice-Rector for Science of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

**И. В. Бойков, А. И. Бойкова**  
О непрерывном аналоге метода Зейделя . . . . . 364

---

**Е. Я. Гуревич, Д. А. Павлова**  
О вложении инвариантных многообразий простейших потоков  
Морса-Смейла с гетероклиническими пересечениями . . . . . 378

---

**М. В. Донцова**  
Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных  
уравнений первого порядка с правыми частями специального ви-  
да . . . . . 384

---

**Н. И. Жукова**  
Структура римановых слоений со связностью Эресмана . . . . . 395

---

**А. Е. Колобянина, Е. В. Ноздринова, О. В. Починка**  
Современное изложение классификации грубых преобразований  
окружности . . . . . 408

---

**В. Е. Круглов**  
О числе модулей градиентных потоков функции высоты поверх-  
ности . . . . . 419

---

**Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов**  
Аппроксимация смешанной краевой задачи . . . . . 429

---

**А. Ю. Павлов**  
Класс управляемых систем дифференциальных уравнений за бес-  
конечное время . . . . . 439

---

---

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

**Р. В. Жалнин, В. Ф. Масягин, Е. Е. Пескова**

Построение параллельного вычислительного алгоритма на основе разрывного метода Галеркина для решения задач конвективного теплообмена на разнесенных неструктурированных сетках . . . . . 448

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

---

**А. О. Сыромясов**

Моделирование взаимодействия разноразмерных объектов, помещенных в слабый электролит . . . . . 460

---

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

- I. V. Boikov, A. I. Boikova**  
On the continuous analogue of the Seidel method . . . . . 364
- 
- E. Gurevich, D. Pavlova**  
On embedding of invariant manifolds of the simplest Morse-Smale flows with heteroclinical intersections . . . . . 378
- 
- M. V. Dontsova**  
The nonlocal solvability conditions for a system of quasilinear equations of the first order special right-hand sides . . . . . 384
- 
- N. I. Zhukova**  
The structure of Riemannian foliations with Ehresmann connection . 395
- 
- A. E. Kolobyanina, E. V. Nozdrinova, O. V. Pochinka**  
Modern presentation of the classification of rough transformations of a circle . . . . . 408
- 
- V. E. Kruglov**  
On number of moduli of gradient flows of the height function of surfaces 419
- 
- F. V. Lubyshev, M. E. Fairuzov**  
Approximation of a mixed boundary value problem . . . . . 429
- 
- A. Yu. Pavlov**  
Class of controllable systems of differential equations for infinite time 439
- 

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

- R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, E. E. Peskova**  
Construction of a parallel computational algorithm based on the Galerkin discontinuous method for solving convective heat transfer problems on unstructured staggered grids . . . . . 448
- 

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

- A. O. Syromyasov**  
Modeling of interaction of different-sized objects immersed in weak electrolyte . . . . . 460
-

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.20.201804.364-377

УДК 513.88

## О непрерывном аналоге метода Зейделя

© И. В. Бойков<sup>1</sup>, А. И. Бойкова<sup>2</sup>

**Аннотация.** Работа посвящена построению и исследованию сходимости непрерывного метода Зейделя решения систем линейных и нелинейных алгебраических уравнений. Согласно непрерывному методу Зейделя, решение системы линейных и нелинейных алгебраических уравнений сводится к решению систем линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Это позволяет привлечь богатый арсенал численных методов решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений к решению систем алгебраических уравнений. Основным достоинством непрерывного аналога метода Зейделя по сравнению с классическим методом является то обстоятельство, что, при своей реализации для решения систем линейных алгебраических уравнений, он не требует, чтобы все элементы диагональной матрицы были отличны от нуля. Аналогичным преимуществом непрерывный аналог метода Зейделя обладает и при решении систем нелинейных уравнений.

**Ключевые слова:** системы алгебраических уравнений, метод Зейделя, системы обыкновенных дифференциальных уравнений, запаздывание

## 1. Введение

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.1)$$

Для решения систем уравнений вида (1.1) часто применяется метод Зейделя [1]–[4], который заключается в следующем.

Система уравнений (1.1) переписывается в виде

$$\sum_{j=1}^i a_{ij}x_j = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.2)$$

Последовательные приближения  $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)})$  находятся из решения системы уравнений

$$\sum_{j=1}^i a_{ij}x_j^{(k+1)} = b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)}, \quad i = 1, \dots, n, \quad k = 0, 1, \dots \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>**Бойков Илья Владимирович**, заведующий кафедрой высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, [i.v.boykov@gmail.com](mailto:i.v.boykov@gmail.com)

<sup>2</sup>**Бойкова Алла Ильинична**, доцент кафедры высшей и прикладной математики, ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (440026, Россия, г. Пенза, ул. Красная, д. 40), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0436-0460>, [allaboikova@mail.ru](mailto:allaboikova@mail.ru)

Очевидно, что для разрешимости системы (1.3) дискретным методом Зейделя необходимо, чтобы  $a_{ii} \neq 0$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Это является существенным недостатком метода, поскольку при решении больших систем уравнений требуется значительное время (возможно, сопоставимое со временем решения задачи) для приведения системы к каноническому виду (в котором все диагональные элементы отличны от нуля).

Метод Зейделя для решения систем нелинейных уравнений заключается в следующем. Рассмотрим систему нелинейных уравнений

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (1.4)$$

Система (1.4) решается итерационным методом:

$$x_i^{(k+1)} = x_i^{(k)} + \gamma_i f_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (1.5)$$

где  $k = 0, 1, \dots$ ,  $\gamma_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  – параметр, подбираемый из условия сходимости итераций (1.5).

Вопросы сходимости метода Зейделя исследовались для систем алгебраических уравнений в работах [1]–[3], а для операторных уравнений в банаховых пространствах – в работе [4].

Приведем необходимые и достаточные условия сходимости метода Зейделя.

Систему уравнений (1.1) запишем в виде

$$Bx + Cx = f,$$

где  $B = \{b_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $b_{ij} = a_{ij}$  при  $j \leq i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $b_{ij} = 0$  при  $j > i$ ;  $C = \{c_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ ;  $c_{ij} = 0$  при  $j \leq i$ ;  $c_{ij} = a_{ij}$  при  $j > i$ .

Известно [2, с.364], следующее утверждение.

**Т е о р е м а 1.1** [2]. *Для сходимости метода Зейделя необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11}\lambda & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}\lambda & a_{22}\lambda & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}\lambda & a_{n2}\lambda & a_{n3}\lambda & \dots & a_{nn}\lambda \end{pmatrix} = 0$$

*были по модулю меньше 1.*

Более удобное для проверки достаточное условие сходимости метода Зейделя имеет следующий вид.

**Т е о р е м а 1.2** [2]. *Пусть при всех  $i$*

$$\sum_{j \neq i}^n |a_{ij}| \leq q |a_{ii}|, \quad q < 1.$$

*Тогда*

$$\|x^{n+1} - x^*\|_3 \leq q \|x^n - x^*\|_3,$$

*где  $x^*$  – решение системы уравнений (1.1). Здесь  $\|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ .*

В последнее время при решении различных вычислительных задач используется непрерывный операторный метод [5]. Его эффективность при решении нелинейных гиперсингулярных интегральных уравнений продемонстрирована в работе [6].

Представляет несомненный интерес распространение подхода, используемого в непрерывном операторном методе, на метод Зейделя. Важным преимуществом непрерывной модификации метода Зейделя является отсутствие требования отличия от нуля всех диагональных элементов (в линейном случае) и отсутствие требования существования отличных от нуля производных  $\frac{\partial f_i(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  в окрестности решения (в нелинейном случае).

Напомним основные моменты непрерывного операторного метода.

## 2. Непрерывный операторный метод

Рассмотрим уравнение

$$A(x) - f = 0, \quad (2.1)$$

где  $A(x)$  – нелинейный оператор, действующий из банахова пространства  $X$  в  $X$ . Обозначим через  $x^*$  решение уравнения (2.1).

В работе [5] установлена связь между устойчивостью решений операторных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах и разрешимостью операторных уравнений вида (2.1).

Приведем необходимые обозначения:

$$B(a, r) = \{z \in B : \|z - a\| \leq r\}, \quad S(a, r) = \{z \in B : \|z - a\| = r\},$$

$$\operatorname{Re} K = K_R = (K + K^*)/2, \quad \Lambda(K) = \lim_{h \downarrow 0} (\|I + hK\| - 1)/h.$$

Здесь  $B$  – банахово пространство;  $a, z \in B$ ;  $K$  – линейный оператор, действующий из  $B$  в  $B$ ;  $\Lambda(K)$  – логарифмическая норма [7] оператора  $K$ ;  $I$  – тождественный оператор.

Для наиболее употребительских пространств логарифмические нормы известны.

Пусть дана вещественная матрица  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , в  $n$ -мерном пространстве  $R_n$  векторов  $x = (x_1, \dots, x_n)$  с нормой  $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^n |x_k|$ ,  $\|x\|_2 = [\sum_{k=1}^n |x_k|^2]^{1/2}$ ,  $\|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$

Логарифмическая норма матрицы  $A$  равна [8]:

$$\Lambda_1(A) = \max_j (a_{jj} + \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|),$$

$$\Lambda_2(A) = \lambda_{\max} \left( \frac{A + A^T}{2} \right),$$

$$\Lambda_3(A) = \max_i (a_{ii} + \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|).$$

Здесь  $\lambda_{\max}((A + A^T)/2)$  – наибольшее собственное значение матрицы  $(A + A^T)/2$ .

Уравнению (2.1) поставим в соответствие задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(x(t)) - f, \quad (2.2)$$

$$x(0) = x_0. \quad (2.3)$$



**Т е о р е м а 2.1** [5]. Пусть уравнение (2.1) имеет решение  $x^*$ , и на любой дифференцируемой кривой  $g(t)$ , расположенной в банаховом пространстве  $B$ , справедливо неравенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq -\alpha, \quad \alpha > 0. \quad (2.4)$$

Тогда решение задачи Коши (2.2)–(2.3) сходится к решению  $x^*$  уравнения (2.1) при любом начальном приближении.

**Т е о р е м а 2.2** [5]. Пусть уравнение (2.1) имеет решение  $x^*$ , и на любой дифференцируемой кривой  $g(t)$ , расположенной в шаре  $R(x^*, r)$ , выполняются следующие условия:

1) при любом  $t(t > 0)$  выполняется неравенство

$$\int_0^t \Lambda(A'(g(\tau))) d\tau \leq 0; \quad (2.5)$$

2) справедливо неравенство (2.4).

Тогда решение задачи Коши (2.3) сходится к решению уравнения (2.1).

**З а м е ч а н и е 2.1** В неравенстве (2.4) можно считать, что каждой дифференцируемой кривой  $g(t)$  отвечает своя константа  $\alpha_g > 0$ .

**З а м е ч а н и е 2.2** Из неравенств (2.4)–(2.5) следует, что логарифмическая норма  $\Lambda(A'(g(\tau)))$  может быть положительной при некоторых значениях  $\tau$ ; т. е. производная Фреше  $A'(g(\tau))$  может вырождаться в оператор, тождественно равный нулевому.

**З а м е ч а н и е 2.3** Решение модельного примера (приближенное решение нелинейного гиперсингулярного интегрального уравнения) [6] продемонстрировало сходимость итерационного процесса, основанного на непрерывном операторном методе, при обратимости в нуль производной Фреше на начальном приближении.

### 3. Непрерывный аналог метода Зейделя для линейных алгебраических уравнений

Поставим системе алгебраических уравнений (2.1) в соответствие систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^i a_{ij} x_j(t) + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j(t-h) - b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.1)$$

в которую введен параметр запаздывания  $h$ ;  $h$  – достаточно маленькое положительное число.

Пусть система уравнений (3.1) имеет единственное решение  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ .

Найдем достаточные условия, при которых решение системы уравнений (3.1) сходится к решению системы уравнений (2.1) при любом начальном значении.

Исследование будем проводить в метрике пространства  $\|x\|_3 = \max_{1 \leq k \leq n} |x_k|$ .

Сделаем замену переменных  $x_j = u_j + x_j^*$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

Тогда система уравнений (3.1) преобразуется к виду

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^i a_{ij}u_j(t) + \sum_{j=i+1}^n a_{ij}u_j(t-h), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Введем матрицы  $B = \{b_{ij}\}$  и  $C = \{c_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Здесь  $b_{ij} = a_{ij}$  при  $j = 1, 2, \dots, i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и  $b_{ij} = 0$  при остальных значениях  $i, j$ ;  $c_{ij} = a_{ij}$  при  $j = i+1, \dots, n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , и  $c_{ij} = 0$  при остальных значениях  $i, j$ .

В операторном виде система уравнений (3.2) имеет вид

$$\frac{du}{dt} = Bu(t) + Cu(t-h), \quad (3.3)$$

где  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))$ .

Пусть

$$u(t) = 0, \quad t \in [t_0 - h, t_0]; \quad u(t_0) = u_0 - - \quad (3.4)$$

– начальное значение для уравнения (3.3).

Решение задачи Коши (3.3)–(3.4) при  $t \geq t_0$  можно записать в виде

$$u(t) = e^{B(t-t_0)}u(t_0) + \int_{t_0}^t e^{B(t-s)}Cu(s-h)ds. \quad (3.5)$$

Пусть выполнены условия:

1)  $\Lambda(B) \leq -\chi$ ,  $\chi > 0$ ;

2)  $-\chi + \|C\| < -\chi_1$ ,  $\chi_1 > 0$ .

Вначале докажем устойчивость системы (3.3) при любом начальном условии.

Пусть  $\|u(t_0)\| = \delta$ ,  $\delta > 0$ . Покажем, что при  $t \geq t_0$  справедливо неравенство

$$\|u(t)\| \leq e^{-\chi_1(t-t_0)}\|u(t_0)\|. \quad (3.6)$$

Доказательство проведем от противного. Пусть в момент времени  $T$ ,  $T \geq t_0$ , неравенство (3.6) нарушается. Тогда  $\|u(T)\| = e^{-\chi_1(T-t_0)}\|u(t_0)\|$  и  $\|u(t)\| > e^{-\chi_1(T-t_0)}\|u(t_0)\|$  при  $t > T$ . Для определенности будем считать, что  $|u_1(T)| = \|u(T)\|$ .

Представим систему уравнений (3.2) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t)}{dt} &= \sum_{j=1}^i a_{ij}u_j(t) + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \frac{u_j(T-h)}{u_1(T)} u_1(t) + \\ &+ \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \left( u_j(t-h) - \frac{u_j(T-h)}{u_1(T)} u_1(t) \right), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Систему (3.7) запишем в виде

$$\frac{du_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^i d_{ij}u_j(t) + g_1(t, u(t-h), u_1(t)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (3.8)$$

где  $d_{i1} = a_{i1} + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} \frac{u_j(T-h)}{u_1(T)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $d_{ij} = a_{ij}$ ,  $j = 2, \dots, i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ;  $d_{ij} = 0$ ,  $j = i+1, \dots, n$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ ; построение функций  $g_i(t, u(t-h), u_1(t))$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , очевидно.

Решение системы уравнений (3.8) при  $t \geq T$  имеет вид

$$u(t) = e^{D(t-T)}u(T) + \int_T^t e^{D(t-s)}g(s, u(s-h), u(s)) ds, \quad (3.9)$$

где

$$g(s, u(s-h), u_1(s)) = (g_1(s, u(s-h), u_1(s)), \dots, g_n(s, u(s-h), u_1(s))).$$

Переходя к нормам, имеем

$$\|u(t)\| \leq e^{\Lambda(D)(t-T)}\|u(T)\| + \int_T^t e^{\Lambda(D)(t-s)}\|g(s, u(s-h), u_1(s))\| ds. \quad (3.10)$$

Введем матрицу  $\tilde{D} = \{\tilde{d}_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , где

$$\tilde{d}_{i1} = a_{i1} + \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\tilde{d}_{ij} = a_{ij}, \quad j = 2, \dots, i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$$

$$\tilde{d}_{ij} = 0, \quad j = i+1, \dots, n, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Нетрудно видеть, что  $\Lambda(D) \leq \Lambda(\tilde{D}) \leq \Lambda(A)$ , где  $A = \{a_{ij}\}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ .

Следовательно, неравенство (3.10) можно усилить:

$$\|u(t)\| \leq e^{\Lambda(A)(t-T)}\|u(T)\| + \int_T^t e^{\Lambda(A)(t-s)}\|g(s, u(s-h), u_1(s))\| ds. \quad (3.11)$$

Из структуры вектор-функции  $g(s, u(s-h), u_1(s))$  следует, что существует такой промежуток времени  $[T, T+\Delta T]$ , в течение которого  $\|g(s, u(s-h), u_1(s))\| \leq \varepsilon\|u(s)\|$ ,  $\varepsilon + \Lambda(A) < 0$ .

Усиливая неравенство (3.11), имеем

$$\|u(t)\| \leq e^{\Lambda(A)(t-T)}\|u(T)\| + \int_T^t e^{\Lambda(A)(t-s)}\varepsilon\|u(s)\| ds. \quad (3.12)$$

Из (3.12) стандартным приемом [7]; [9] приходим к оценке

$$\|u(t)\| \leq e^{(\Lambda(A)+\varepsilon)(t-T)}\|u(T)\|, \quad (3.13)$$

где  $\varepsilon > 0$  – произвольное число, такое, что  $\Lambda(A) + \varepsilon < 0$ . Поскольку  $\Lambda(A) + \varepsilon < 0$ , то из (3.13) следует, что в интервале  $(T, T + \Delta T]$

$$\|x(t)\| < \|x(T)\|.$$

Получено противоречие, из которого следует, что при  $t > t_0$  выполняется неравенство (3.6).

Отсюда вытекает устойчивость системы уравнений (3.3) в целом, из которой следует сходимость системы уравнений (2.2)–(2.3) к решению  $x^*$  системы уравнений (1.1).

Таким образом, доказано следующее утверждение.

*И. В. Бойков, А. И. Бойкова. О непрерывном аналоге метода Зейделя*

**Т е о р е м а 3.1** Пусть  $\Lambda(A) \leq -\chi$ ,  $\chi > 0$ . Тогда система уравнений (1.1) имеет единственное решение, к которому сходится непрерывный аналог метода Зейделя (3.2).

**З а м е ч а н и е 3.1** В силу выбранной в работе метрики  $\Lambda(B) + \|C\| = \Lambda(A)$ .

**З а м е ч а н и е 3.2** Величина задержки  $h$  влияет на скорость сходимости решения системы уравнений (3.2) к решению  $x^*$ ; поэтому задержку следует выбирать достаточно малой.

**З а м е ч а н и е 3.3** Преимущество непрерывного аналога метода Зейделя по сравнению с непрерывным операторным методом заключается в том, что фактически достаточные условия устойчивости в целом системы дифференциальных уравнений (3.2) обусловлены неравенством  $\Lambda(D) < 0$ , а не  $\Lambda(A) < 0$ , причем  $\Lambda(D) \leq \Lambda(A) < 0$ .

Последнее неравенство гарантирует применимость метода Зейделя для более широкого класса систем по сравнению с непрерывным операторным методом.

Представляет интерес скорость сходимости непрерывного метода к решению  $x^*$  системы уравнений (2.1).

Зафиксируем произвольное достаточно малое число  $\varepsilon^*$  такое, что  $\Lambda(A) + \varepsilon^* < 0$ , и покажем, что при  $t \in [t_0, \infty)$

$$\|u(t)\| \leq e^{(\Lambda(A) + \varepsilon^*)(t - t_0)} \|u(t_0)\|. \quad (3.14)$$

Доказательство проведем от противного. Пусть в момент времени  $T_1$ ,  $T_1 \geq t_0$  неравенство (3.14) нарушается. Для определенности положим  $|u_1(T_1)| = \exp\{(\Lambda(A) + \varepsilon^*)(T_1 - t_0)\} \|u(t_0)\|$ .

Представим при  $t \geq T_1$  систему уравнений (3.2) в виде (3.9). Переходя к нормам, получим неравенство (3.10), мажорируя которое, приходим к неравенству (3.11). В выражениях (3.9) – (3.11) значение  $T$  заменяем на  $T_1$ .

Из структуры вектор-функции  $g(s, u(s - h), u_1(s))$  следует, что существует такой промежуток времени  $[T_1, T_1 + \Delta T_1]$ , что при  $t \in [T_1, T_1 + \Delta T_1]$   $\|g(s, u(s - h), u_1(s))\| \leq \varepsilon^* \|u(s)\|$ .

Усиливая неравенство (3.11), приходим к неравенству

$$\|u(t)\| \leq e^{\Lambda(A)(t - T_1)} \|u(T_1)\| + \varepsilon^* \int_{T_1}^t e^{\Lambda(A)(t - s)} \|u(s)\| ds,$$

из которого стандартными рассуждениями приходим к неравенству

$$\|u(t)\| \leq e^{(\Lambda(A) + \varepsilon^*)(t - T_1)} \|u(T_1)\|.$$

Таким образом, получено противоречие и, следовательно, доказана справедливость неравенства (3.14) при  $t \geq t_0$ .

Из неравенства (3.14) следует асимптотическая устойчивость решения системы уравнений (3.2) и оценка скорости сходимости

$$\|x(t) - x^*\| \leq \exp\{(\Lambda(A) + \varepsilon^*)(t - t_0)\} \|x(t_0)\|,$$

где  $\varepsilon^*$  – как угодно малое положительное число.

#### 4. Непрерывный аналог метода Зейделя для нелинейных уравнений

Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$a_i(x_1, \dots, x_n) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.1)$$

Будем считать, что функции  $a_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  имеют непрерывные частные производные, удовлетворяющие условию Липшица с коэффициентом  $A$ :

$$|D^j a_i(x_1^*, \dots, x_n^*) - D^j a_i(y_1^*, \dots, y_n^*)| \leq A(|x_1^* - y_1^*| + \dots + |x_n^* - y_n^*|), \quad j = 1, \dots, n. \quad (4.2)$$

Здесь

$$D^k a_i(x_1, \dots, x_n) = \partial a_i(x_1, \dots, x_n) / \partial x_k, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Аналог метода Зейделя для решения системы уравнений (4.1) имеет вид

$$a_i(x_1^{(k+1)}, \dots, x_i^{(k+1)}, x_{i+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) = b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.3)$$

где  $k = 0, 1, \dots$ .

Для решения системы (4.3) на каждом шаге итерационного процесса можно использовать стандартные методы вычислительной математики.

Преимущество метода Зейделя в случае решения системы (4.2) перед методом Ньютона-Канторовича [10] заключается в том, что производная Фреше левой части системы уравнений (4.2) по переменным  $x_j^{(k+1)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, i$  имеет вид диагональной матрицы. (Имеется в виду, что в  $j$ -строке левой части системы уравнений (4.2) значение  $x_1^{(k+1)}, \dots, x_{j-1}^{(k+1)}, x_{j+1}^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$  известны.)

Непрерывный аналог метода Зейделя для системы уравнений (4.1) имеет вид

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = a_i(x_1(t), \dots, x_i(t), x_{i+1}(t-h), \dots, x_n(t-h)) - b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.4)$$

где  $h$  – достаточно маленькое положительное число.

В качестве предыстории при решении системы дифференциальных уравнений (4.4) естественно положить

$$x_i(t) = 0, \quad t \in [-h, 0], \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.5)$$

В случае, если известно достаточно хорошее начальное приближение к решению системы уравнений (4.1), его можно взять в качестве начальных условий.

Пусть система уравнений (4.1) имеет решение  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ . Тогда

$$\frac{dx_i^*(t)}{dt} = a_i(x_1^*(t), \dots, x_i^*(t), x_{i+1}^*(t-h), \dots, x_n^*(t-h)) - b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (4.6)$$

Для единообразия в обозначениях при проведении дальнейших выкладок полагаем  $x_i^*(t) \equiv x_i^*$ ,  $t \in [t_0, \infty)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Введем функции  $u_i(t) = x_i(t) - x_i^*(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t)}{dt} = & a_i(x_1^*(t) + u_1(t), \dots, x_i^*(t) + u_i(t), x_{i+1}^*(t-h) + u_{i+1}(t-h), \dots, x_n^*(t-h) + u_n(t-h)) - \\ & - a_i(x_1^*(t), \dots, x_i^*(t), x_{i+1}^*(t-h), \dots, x_n^*(t-h)), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ .

Воспользовавшись формулой Тейлора, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{du_i(t)}{dt} = & \sum_{k=1}^i D^k a_i(x_1^*, \dots, x_n^*) u_k(t) + \sum_{k=i+1}^n D^k a_i(x_1^*, \dots, x_n^*) u_k(t-h) + \\ & + g_i(t; x_1(t), \dots, x_i(t); x_1^*, \dots, x_i^*; x_{i+1}(t-h), \dots, x_n(t-h); x_{i+1}^*, \dots, x_n^*), \end{aligned} \quad (4.8)$$

$i = 1, 2, \dots, n$ .

Отметим, что функции

$$g_i(t; x_1(t), \dots, x_i(t); x_1^*, \dots, x_i^*; x_{i+1}(t-h), \dots, x_n(t-h); x_{i+1}^*, \dots, x_n^*),$$

$i = 1, \dots, n$  имеют сложный вид. Они выписаны в работе [11].

В случае, если тривиальное решение системы уравнений (4.7)–(4.8) устойчиво, то  $\lim_{t \rightarrow \infty} (x_1(t), \dots, x_n(t)) = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ , т. е. решение системы уравнений (4.7) сходится к решению системы уравнений (4.1).

Достаточные условия устойчивости систем нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием исследованы в работе [11]. Повторяя рассуждения, приведенные в [11], приходим к следующему утверждению.

**Т е о р е м а 4.1** Пусть функции  $a_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  имеют непрерывные частные производные по переменным  $x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , удовлетворяющие условию Липшица (4.2). Пусть система уравнений (4.1) имеет решение  $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ . Пусть выполняется неравенство

$$\begin{aligned} & D^i a_i(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t)) + \sum_{j=1}^{i-1} |D^j a_i(x_1^*(t), \dots, x_n^*(t))| + \\ & + \sum_{j=i+1}^n |D^j a_i(x_1^*(t-h(t)), \dots, x_n^*(t-h(t)))| < -\chi < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{aligned}$$

Тогда решение системы уравнений (4.4) сходится к решению системы уравнений (4.1).

## 5. Модельные примеры

Приведем примеры, иллюстрирующие эффективность непрерывного аналога метода Зейделя в случаях, когда стандартный метод Зейделя не применим.

**П р и м е р 5.1** Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 - 0.5x_3 + 0.1x_4 = -2.1, \\ 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 0.5x_4 = -7, \\ 0.5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0.1x_4 = -17.65, \\ -0.3x_1 - 0.4x_2 + 0.2x_3 + 0 \cdot x_4 = 0.25. \end{cases} \quad (5.1)$$

Точное решение системы:  $x_1 = 0.5$ ,  $x_2 = 1$ ,  $x_3 = 5$ ,  $x_4 = 4$ .

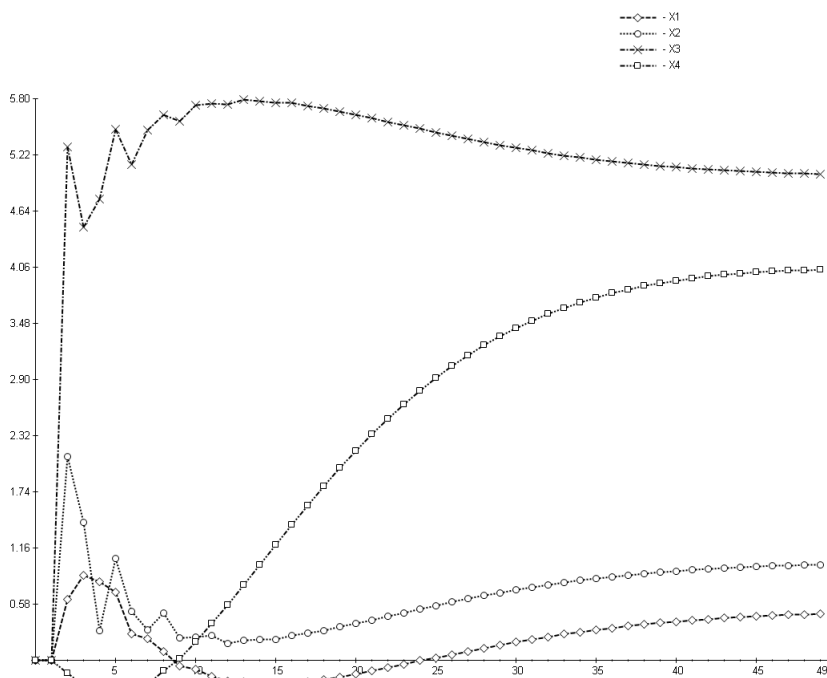
Решение системы (5.1) классическим методом Зейделя невозможно, т. к.  $a_{44} = 0$ .

Система (5.1) моделировалась системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -2x_1(t) + x_2(t - h_0) - 0,5x_3(t - h_0) + 0,1x_4(t - h_0) + 2,1, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1(t) - 5x_2(t) - x_3(t - h_0) + 0,5x_4(t - h_0) + 7, \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = -0,5x_1(t) - 2x_2(t) - 3x_3(t) - 0,1x_4(t - h_0) + 17,65, \\ \frac{dx_4(t)}{dt} = -0,3x_1(t) - 0,4x_2(t) + 0,2x_3(t) - 0,25. \end{cases} \quad (5.2)$$

Система (5.2) при  $h_0 = 0,3$  решалась методом Эйлера с шагом  $h = 0,3$  и начальными значениями  $x_i(0) = 0$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ .

Результат решения системы уравнений (5.1) непрерывным аналогом метода Зейделя приведен на Рис. 5.1.



Р и с у н о к 5.1

**П р и м е р 5.2** Рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -5x_1^2 + x_2^2 - 0,5x_3^2 + 0,1x_4^2 = -1,134, \\ 2x_1^2 - 5x_2^2 - x_3^2 + 1,5x_4^2 = -0,375, \\ -0,5x_1^2 - 2x_2^2 + 0 \cdot x_3^2 - 0,1x_4^2 = -0,446, \\ -0,3x_1^2 - 0,4x_2^2 + 0,2x_3^2 + 0 \cdot x_4^2 = -0,121. \end{cases} \quad (5.3)$$

Точное решение системы:  $x_1 = 0,5$ ,  $x_2 = 0,4$ ,  $x_3 = 0,3$ ,  $x_4 = 0,1$ .

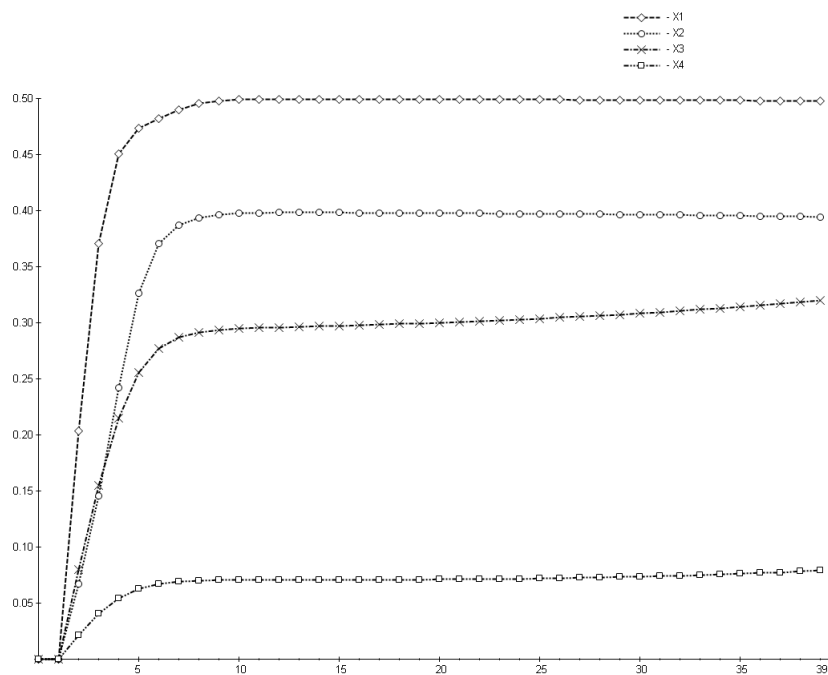
Решение системы (5.3) классическим методом Зейделя невозможно, т. к.  $a_{33} = 0$ ,  $a_{44} = 0$ .

Система (5.3) моделировалась системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dx_1(t)}{dt} = -5x_1^2(t) + x_2^2(t - h_0) - 0.5x_3^2(t - h_0) + 0.1x_4^2(t - h_0) + 1.134, \\ \frac{dx_2(t)}{dt} = 2x_1^2(t) - 5x_2^2(t) - x_3^2(t - h_0) + 1.5x_4^2(t - h_0) + 0.375, \\ \frac{dx_3(t)}{dt} = -0.5x_1^2(t) - 2x_2^2(t) + 0 \cdot x_3^2(t) - 0.1x_4^2(t - h_0) + 0.446, \\ \frac{dx_4(t)}{dt} = -0.3x_1^2(t) - 0.4x_2^2(t) + 0.2x_3^2(t) + 0 \cdot x_4^2(t) + 0.121. \end{cases} \quad (5.4)$$

Система (5.4) при  $h_0 = 0,2$  решалась методом Эйлера с шагом  $h = 0.2$  и с начальными условиями  $x_i(0) = 0$ ,  $i = 1, \dots, 4$ .

Результаты решения системы (5.3) непрерывным методом Зейделя приведены на Рис. 5.2.



Р и с у н о к 5.2

Благодарности: Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ. Грант 16-01-00594.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, *Вычислительные методы линейной алгебры*, Физматгиз, М., 1963, 734 с.
2. Н. С. Бахвалов, *Численные методы*, Наука, М., 1973, 632 с.
3. Д. Ортега, В. Рейнболт, *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*, Мир, М., 1975, 560 с.
4. М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Я. Б. Рунтцкий, В. Я. Стеценко, *Приближенное решение операторных уравнений*, Наука, М., 1969, 456 с.

И. В. Бойков, А. И. Бойкова. О непрерывном аналоге метода Зейделя



5. И. В. Бойков, “Об одном непрерывном методе решения нелинейных операторных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **48:9** (2012), 1308–1314.
6. I. V. Boykov, V. A. Roudnev, A. I. Boykova, O. A. Baulina, “New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations”, *Applied Numerical Mathematics*, **127** (2018), 280–305.
7. Ю. Л. Далецкий, М. Г. Крейн, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве*, Наука, М., 1970, 536 с.
8. К. Деккер, Я. Вервер, *Устойчивость методов Рунге-Кутты для жестких нелинейных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1988, 334 с.
9. И. В. Бойков, *Устойчивость решений дифференциальных уравнений*, Издательство Пензенского государственного университета, Пенза, 2008, 244 с.
10. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1984, 752 с.
11. И. В. Бойков, “Устойчивость установившихся решений систем нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздываниями”, *Дифференциальные уравнения*, **54:4** (2018), 435–457.

Поступила 1.11.2018

MSC2010 65F10, 65H10

# On the continuous analogue of the Seidel method

© I. V. Boikov<sup>1</sup>, A. I. Boikova<sup>2</sup>

**Abstract.** Continuous Seidel method for solving systems of linear and nonlinear algebraic equations is constructed in the article, and the convergence of this method is investigated. According to the method discussed, solving a system of algebraic equations is reduced to solving systems of ordinary differential equations with delay. This allows to use rich arsenal of numerical ODE solution methods while solving systems of algebraic equations. The main advantage of the continuous analogue of the Seidel method compared to the classical one is that it does not require all the elements of the diagonal matrix to be non-zero while solving linear algebraic equations' systems. The continuous analogue has the similar advantage when solving systems of nonlinear equations.

**Key Words:** systems of algebraic equations, Seidel method, systems of ordinary differential equations, delay

## REFERENCES

1. D.K. Faddeev, V.N. Faddeeva, *Computational methods of linear algebra*, Fizmatgiz, Moscow, 1963 (In Russ.), 734 p.
2. N.S. Bakhvalov, *Numerical methods*, Nauka, Moscow, 1973 (In Russ.), 632 p.
3. J.M. Ortega, W.C. Rheinboldt, *Iterative solution of nonlinear equations in several variables*, Academic Press, NY., 1970.
4. M. A. Krasnoselsky, G.M. Vainikko, P.P. Zabreiko, Ya. B. Rutitsky, V.Ya. Stetsenko, *Approximate solution of operator equations*, Nauka, Moscow, 1969 (In Russ.), 456 p.
5. I. V. Boikov, "On a continuous method for solving nonlinear operator equations", *Differential equations*, **48:9** (2012), 1308-1314 (In Russ.).
6. I.V. Boykov, V.A. Roudnev, A.I. Boykova, O.A. Baulina, "New iterative method for solving linear and nonlinear hypersingular integral equations", *Applied Numerical Mathematics*, **127** (2018), 280-305.
7. Yu.L. Daletsky, M.G. Krein, *Stability of solutions of differential equations in Banach space*, Nauka, Moscow, 1970 (In Russ.), 536 p.
8. K. Dekker, J. Verwer, *Stability of Runge-Kutta methods for rigid nonlinear differential equations*, Mir, Moscow, 1988 (In Russ.), 334 p.
9. I.V. Boikov, *Stability of solutions of differential equations*, Publishing House of Penza State University, Penza, 2008 (In Russ.), 244 p.
10. L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, *Functional analysis*, Nauka, Moscow, 1984 (In Russ.), 752 p.

<sup>1</sup>Ilya V. Boikov, Head of Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, i.v.boykov@gmail.com

<sup>2</sup>Alla I. Boikova, Associate Professor, Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (40 Krasnaya St., Penza 440026, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6980-933X>, allaboikova@mail.ru

11. I.V. Boikov, “Stability of steady-state solutions of systems of nonlinear nonautonomous delay differential equations”, *Differential Equations*, **54**:4 (2018), 427–449.

*Submitted 1.11.2018*

УДК 517.9

# О вложении инвариантных многообразий простейших потоков Морса-Смейла с гетероклиническими пересечениями

© Е. Я. Гуревич<sup>1</sup>, Д. А. Павлова<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе изучается структура разбиения четырехмерного фазового пространства на траектории потоков Морса-Смейла, допускающих гетероклинические пересечения. А именно, рассматривается класс  $G(S^4)$  потоков Морса-Смейла на сфере  $S^4$  таких, что неблуждающее множество любого потока  $f \in G(S^4)$  состоит в точности из четырех состояний равновесия: источника, стока и двух седел. Блуждающее множество таких потоков содержит конечное число гетероклинических кривых, лежащих в пересечении инвариантных многообразий седловых состояний равновесия. В работе описывается топология вложения инвариантных многообразий седловых состояний равновесия таких потоков, что является первым шагом в решении проблемы топологической классификации. В частности, доказывается, что замыкания инвариантных многообразий седловых состояний равновесия, не участвующих в гетероклинических пересечениях, являются ручными 2-сферой и дугой. Эти многообразия являются аттрактором и репеллером потока. В множестве орбит, принадлежащих области притяжения аттрактора (отталкивания репеллера) строится секущая, являющаяся многообразием, гомеоморфным прямому произведению  $S^2 \times S^1$ . Изучается топология пересечения инвариантных многообразий седловых состояний равновесия с этой секущей.

**Ключевые слова:** топологическая эквивалентность, потоки Морса-Смейла, гетероклинические кривые

## 1. Введение и формулировка результатов

Гладкий поток  $f^t : M^n \rightarrow M^n$ , заданный на замкнутом гладком многообразии  $M^n$  размерности  $n$ , называется *поток Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

- неблуждающее множество  $\Omega_{f^t}$  потока  $f^t$  состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий;
- инвариантные многообразия состояний равновесия и замкнутых траекторий пересекаются трансверсально<sup>3</sup>.

Пусть  $G(S^4)$  — класс потоков Морса-Смейла на сфере  $S^4$  таких, что неблуждающее множество любого потока  $f \in G(S^4)$  состоит в точности из четырех состояний равновесия: источника  $\alpha$ , стока  $\omega$  и двух седел  $\sigma_i, \sigma_j$  индексов Морса  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  соответственно.

<sup>1</sup>Гуревич Елена Яковлевна, доцент кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, egurevich@hse.ru

<sup>2</sup>Павлова Дарья Александровна, студентка НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8634-4143>, dapavlova\_1@mail.ru

<sup>3</sup>Напомним, что гладкие подмногообразия  $L, N$  многообразия  $M^n$  пересекаются *трансверсально*, если либо  $L \cap N = \emptyset$ , либо в каждой точке пересечения  $x \in L \cap N$  касательные пространства к  $L, N$  порождают касательное пространство к  $M^n$ .

Из формулы Пуанкаре-Хопфа следует, что  $(-1)^i + (-1)^j = 0$ , поэтому индекс Морса одного из седел равен 2, а второго — 1 или 3. Если  $g^t \in G(S^4)$  — поток, для которого индексы Морса седел равны 2, 3, то для него найдется поток  $f^t \in G(S^4)$ , имеющий седла индексов Морса 1 и 2 и такой, что  $f^t = g^{-t}$ . Поэтому в дальнейшем будем считать, что для произвольного потока  $f^t \in G(S^4)$  индексы Морса седловых состояний равновесия равны 1 и 2.

Из трансверсальности пересечения инвариантных многообразий следует, что пересечение  $W_{\sigma_1}^u \cap W_{\sigma_2}^s$  пусто. Из работ [1–2] следует, что пересечение  $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$  непусто и состоит из конечного числа кривых, которые будем называть *гетероклиническими*.

Из теоремы С. Смейла (см. [3], Theorem 2.3) следует, что замыкание  $cl W_{\sigma_1}^u$  ( $cl W_{\sigma_2}^s$ ) многообразия  $W_{\sigma_1}^u$  ( $W_{\sigma_2}^s$ ) содержит, кроме самого многообразия  $W_{\sigma_1}^u$  ( $W_{\sigma_2}^s$ ), единственную точку  $\omega$  ( $\alpha$ ). Таким образом, множество  $A_{f^t} = cl W_{\sigma_1}^u$  ( $R_{f^t} = cl W_{\sigma_2}^s$ ) является сферой размерности 1 (2), вложенной в  $S^4$  гладко во всех точках, кроме точки  $\omega$  ( $\alpha$ ). Мы доказываем следующие факты.

**Т е о р е м а 1.1** *Сферы  $A_{f^t}$ ,  $R_{f^t}$  являются локально плоскими в каждой точке<sup>4</sup>.*

Результат предложения 1.1 контрастирует с теоремой 6 работы [4], где утверждается, что существуют многообразия размерности 4 и выше, допускающие градиентно-подобные потоки с неблуждающим множеством, состоящим в точности из четырех состояний равновесия: двух узлов и двух седел, такие, что замыкание инвариантного многообразия седловой точки коразмерности 2 является дико вложенной сферой.

Положим  $V_{f^t} = S^4 \setminus (A_{f^t} \cup R_{f^t})$ .

**Т е о р е м а 1.2** *Существует гиперповерхность без контакта  $\Sigma_{f^t} \subset V_{f^t}$  такая, что:*

1.  $\Sigma_{f^t}$  гомеоморфно прямому произведению  $S^2 \times S^1$ ;
2. множество  $V_{f^t}$  гомеоморфно прямому произведению  $\Sigma_{f^t} \times \mathbb{R}$ ;
3. ограничение потока  $f^t$  на множество  $V_{f^t}$  топологически эквивалентно потоку  $f_0^t(s, r) = (s, r + t)$ , где  $s \in \Sigma_{f^t}$ ,  $r \in \mathbb{R}$ ;
4. множество  $W_{\sigma_i}^s \cap \Sigma_{f^t}$  является гладкой сферой  $S_{f^t}^2$ , не ограничивающей шар в  $\Sigma_{f^t}$ , множество  $W_{\sigma_j}^u \cap \Sigma_{f^t}$  является гладкой замкнутой дугой  $S_{f^t}^1$ , индекс пересечения которой со сферой  $S_{f^t}^2$  равен 1.

## 2. Разложение сферы $S^4$ на ручки, индуцированное потоком $f^t \in G(S^4)$ , и топология вложения его инвариантных многообразий

Напомним, что многообразие  $M$  размерности  $n$  получено из многообразия  $N$  с краем  $\partial N$  приклеиванием  $k$ -ручки  $H_k = \mathbb{B}^k \times \mathbb{B}^{n-k}$ , если существует вложение  $\varphi : S^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-1} \rightarrow \partial N$  такое, что  $M$  получено из дизъюнктного объединения  $N \cup H_k$  отождествлением точек  $x \in S^{k-1} \times \mathbb{B}^{n-1}$  и  $\varphi(x)$ .

Пусть  $K \subset S^3$  — гладко вложенная простая замкнутая дуга (узел),  $N(K)$  — ее трубчатая окрестность,  $N = \mathbb{B}^2 \times S^2$  и  $\psi : \partial N(K) \rightarrow \partial N$  — диффеоморфизм. Тогда говорят, что

<sup>4</sup>Замкнутое многообразие  $X \subset M^n$  размерности  $m$  называется локально плоским в  $M^n$  в точке  $x \in X$ , если существует окрестность  $U_x \subset M^n$  точки  $x$  и гомеоморфизм  $h : U_x \rightarrow \mathbb{R}^n$  такой, что  $h(X \cap U_x)$  является координатной гиперплоскостью  $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$

многообразие  $M^3$ , полученное из объединения  $S^3 \setminus \text{int } N(K)$  и  $N$  отождествлением точек  $x \in \partial N(K)$  и  $\psi(x) \in N$ , получено *хирургической операцией Дэна* вдоль узла  $K$ .

Напомним, что дважды дифференцируемая функция  $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$  на гладком замкнутом ориентируемом многообразии  $M^n$  называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены, то есть для любой критической точки  $p \in M^n$  определитель матрицы Гессе  $\left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \right) \Big|_p$  в этой точке отличен от нуля. Согласно лемме Морса, в некоторой окрестности невырожденной критической точки  $p$  существуют локальные координаты  $y_1, \dots, y_n$  называемые *координатами Морса*, в которых функция  $\varphi$  имеет вид  $\varphi(y_1, \dots, y_n) = \varphi(p) - y_1^2 - \dots - y_k^2 + y_{k+1}^2 + \dots + y_n^2$ . Число  $k \in \{0, \dots, n\}$  не зависит от выбора локальных координат и называется *индексом точки  $p$* . Будем обозначать индекс критической точки через  $\text{ind}(p)$ . Гладкий поток, индуцированный векторным полем  $X = -\text{grad } \varphi$ , называется *градиентным потоком*.

Из работы [5] вытекает следующее утверждение:

**Предложение 2.1** *Для потока  $f^t \in G(S^4)$  существует самоиндексирующаяся энергетическая функция — такая функция  $\varphi : S^4 \rightarrow [0, 4]$ , что:*

1. *функция  $\varphi$  является функцией Морса;*
2. *множество критических точек функции  $\varphi$  совпадает с неблуждающим множеством  $\Omega(f^t)$  потока  $f^t$ ;*
3.  *$\varphi(f^t(x)) < \varphi(x)$  для любой точки  $x \notin \Omega(f^t)$  и любого  $t > 0$ ;*
4.  *$\varphi(p) = \text{ind}(p)$  для любого  $p \in \Omega(f^t)$ .*

Непосредственно из определения функции  $\varphi$  следует, что для любой точки  $p \in \Omega(f^t)$  число  $\text{ind}(p)$  также совпадает с индексом Морса точки  $p$ , равным размерности ее неустойчивого многообразия.

**Доказательство теоремы 1.1.** В силу [3] (Theorem 2.3) для любого состояния равновесия  $p$  потока Морса-Смейла его устойчивое (неустойчивое) многообразие является гладким подмногообразием. Поэтому дуга  $A_{ft} = cl W_{\sigma_1}^u = W_{\sigma_1}^u \cup \omega$  и сфера  $R_{ft} = cl W_{\sigma_2}^s = W_{\sigma_2}^s \cup \alpha$  являются гладко вложенными и, следовательно, локально-плоскими во всех точках, кроме точек  $\omega, \alpha$ . Из работы [6] следует, что замкнутая дуга в  $S^4$  либо является локально плоской во всех своих точках, либо имеет более чем счетное множество точек, в которых нарушается условие локальной плоскостности. Из этого следует, что замкнутая дуга  $A_{ft}$  является локально плоской и в точке  $\omega$ .

Покажем, что двумерная сфера  $R_{ft}$  является локально-плоской в точке  $\alpha$ .

Пусть  $\varepsilon \in (0; 1)$ . Положим  $M_0 = \varphi^{-1}[0; 1 - \varepsilon]$ ;  $M_1 = \varphi^{-1}[0; 1 + \varepsilon]$ ;  $M_2 = \varphi^{-1}[0; 2 + \varepsilon]$ ,  $M_4 = S^4$ ,  $\Sigma_i = \partial M_i$ . Из теории Морса (см., например, [7], теоремы 3.1, 3.2) следует, что многообразие  $M_0$  является замкнутым шаром, многообразие  $M_k$  при  $k \in \{1, 2\}$  получается приклеиванием  $k$ -ручки к  $M_{k-1}$ , многообразие  $M_4$  получается приклеиванием 4-ручки к  $M_2$ .

Из этого следует, что многообразия  $\Sigma_0, \Sigma_2$  являются 3-сферами, а  $\Sigma_1$  диффеоморфно  $S^2 \times S^1$ . Из теоремы 3.2 из [7], примененной к функции  $\varphi^{-1}$ , следует, что многообразие  $M_4 \setminus \text{int } M_1$  получено из  $M_4 \setminus \text{int } M_2$  приклеиванием 2-ручки и многообразие  $\Sigma_1 = \partial M_1 = \partial M_4 \setminus \text{int } M_1$  получено из сферы  $\Sigma_2 = \partial M_4 \setminus \text{int } M_2$  при помощи хирургической операции Дэна вдоль замкнутой кривой  $c = \Sigma_2 \cap W_{\sigma_2}^s$ . Из [8] (теорема 3) следует, что кривая  $c$  тривиально вложена в  $S^3$  (то есть ограничивает 2-диск).

Пусть  $a^t$  — поток в пространстве  $\mathbb{R}^4$ , заданный формулой  $a^t(x_1, \dots, x_4) = ((\frac{1}{2})^t x_1, \dots, (\frac{1}{2})^t x_4)$ ,  $S_r^3 = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + \dots + x_4^2 = r^2\}$ ,  $S^1 = \{(x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = x_4 = 0\}$ . Из [8] (теорема 1) следует, что существует гомеоморфизм  $h : \Sigma_2 \rightarrow S_1^3$  такой, что  $h(\Sigma_2 \cap W_{\sigma_2}^s) = S^1$ . Для каждой точки  $x \in \Sigma_2$  обозначим через  $l_x$  ее траекторию и для любой точки  $y \in l_x$  положим  $t_y = tg \frac{\pi(2 + \varepsilon - \varphi(y))}{2} + 1$ ,  $H(y) = a^{t_y}(h(x))$ . Гомеоморфизм  $H : W_\alpha^u \setminus \alpha \rightarrow \mathbb{R}^4 \setminus \{O\}$  переводит траектории потока  $f^t|_{W_\alpha^u \setminus \alpha}$  в траектории потока  $a^t|_{\mathbb{R}^4 \setminus \{O\}}$  с сохранением ориентации на траекториях, множество  $W_{\sigma_2}^s \setminus \sigma_2$  — на множество  $Ox_1x_2 \setminus \{O\}$  и продолжается по непрерывности на точку  $\alpha$ . Следовательно, сфера  $R_{f^t} = W_{\sigma_2}^s \cup \alpha$  вложена локально плоско в точке  $\alpha$ .

**Доказательство теоремы 1.2.** Первые три утверждения леммы являются непосредственными следствиями утверждения 2.1. Действительно, если  $\varphi : S^4 \rightarrow [0, 4]$  — самоиндексирующаяся энергетическая функция для потока  $f^t$ , то достаточно положить  $\Sigma_{f^t} = \varphi^{-1}(1, 5)$ .

Пересечение  $W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t}$  является поверхностью без контакта для ограничения потока  $f^t$  на множество  $W_{\sigma_1}^s \setminus \sigma_1$ , поэтому  $W_{\sigma_1}^s \setminus \sigma_1$  диффеоморфно прямому произведению  $(W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t}) \times \mathbb{R}$ , и  $(W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t})$  — деформационный ретракт для  $W_{\sigma_1}^s \setminus \sigma_1$ . Поскольку  $W_{\sigma_1}^s \setminus \sigma_1$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$  и, следовательно, односвязно, то  $W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t}$  также односвязно. Тогда  $W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t}$  гомеоморфно либо плоскости  $\mathbb{R}^2$ , либо двумерной сфере. В первом случае множество  $W_{\sigma_1}^s \setminus \sigma_1$  гомеоморфно  $\mathbb{R}^3$ , что невозможно, поэтому  $W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t}$  гомеоморфно сфере.

Положим  $S_{f^t}^2 = W_{\sigma_1}^s \cap \Sigma_{f^t}$ . Сфера  $S_{f^t}^2$  ограничивает шар  $B^3 \subset W_{\sigma_1}^s$  такой, что  $\sigma_1 \in \text{int } B^3$ . Следовательно, коэффициент зацепления сферы  $S_{f^t}^2$  и дуги  $A_{f^t}$  равен единице. Поэтому сфера  $S^2$  не ограничивает никакого шара в  $\Sigma_{f^t}$  (т. к. в этом случае коэффициент зацепления сфер  $S^2$  и  $A_{f^t}$  был бы равен нулю).

Аналогично доказывается, что множество  $W_{\sigma_2}^u \cap \Sigma_{f^t}$  является замкнутой дугой  $S_{f^t}^1$ , имеющей с 2-сферой  $R_{f^t}$  коэффициент зацепления, равный единице. Пусть  $N \subset \Sigma_{f^t}$  — замкнутая трубчатая окрестность дуги  $S_{f^t}^1$ . Поток  $f^t$  индуцирует гомеоморфизм  $\psi : \Sigma_{f^t} \setminus \text{int } N \rightarrow \Sigma_2 \setminus \text{int } \tilde{N}$ , где  $\Sigma_2 = \varphi^{-1}(2, 5)$ ,  $\tilde{N} \subset \Sigma_2$  — некоторая замкнутая окрестность дуги  $W_{\sigma_2}^s \cap \Sigma_2$ . По доказанному выше  $\Sigma_2 \setminus \text{int } \tilde{N}$  является полноторием, следовательно,  $\Sigma_{f^t} \setminus \text{int } N$  также является полноторием, и существует гомеоморфизм  $h : \Sigma_{f^t} \rightarrow \mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$  такой, что  $h(S_{f^t}^1) = \{x\} \times \mathbb{S}^1$ ,  $x \in \mathbb{S}^{n-1}$ . Так как сфера  $h(S_{f^t}^2)$  гомотопична сфере  $\mathbb{S}^2 \times \{s\}$ ,  $s \in \mathbb{S}^1$ , и индекс пересечения является гомотопическим и топологическим инвариантом, то индекс пересечения сферы  $h(S_{f^t}^2)$  и дуги  $\{x\} \times \mathbb{S}^1$ , а также индекс пересечения сферы  $S_{f^t}^2$  и дуги  $S_{f^t}^1$  равен единице.

**Благодарности.** Авторы благодарят В.С. Медведева и В.З. Гринеса за внимание к работе и плодотворные обсуждения. Работа, за исключением доказательства теоремы 1.2 выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041), доказательство теоремы 1.2 поддержано Программой фундаментальных исследований в НИУ ВШЭ в 2018 году.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, “О структуре несущего многообразия для систем Морса Смейла без гетероклинических пересечений”, *Труды Математического института им. В.А. Стеклова РАН*, **297** (2017), 201–210.
2. Е.Я. Гуревич, Д.А. Павлова, “О простейших потоках Морса-Смейла с гетероклиническими пересечениями на сфере  $S^n$ ”, *Журнал СВМО*, **19:2** (2017), 25–30.
3. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73:6** (1967), 747–817.
4. E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, “Morse-Smale systems with few non-wandering points”, *Topology and its Applications*, **160:3** (2013), 498–507.
5. K.R. Meyer, “Energy functions for Morse Smale systems”, *American Journal of Mathematics*, **90:4** (1968), 1031–1040.
6. J. C. Cantrell, C. H. Edwards, “Almost locally flat imbeddings of minifolds”, *The Michigan Mathematical Journal*, **1965:2**, 217–223.
7. Y. Matsumoto, *An introduction to Morse theory*, Oxford University Press, 2001.
8. C. Gordon, J. Luecke, “Knots are determined by their complements”, *Journal American Mathematical Society*, **2** (1989):2, 371–415.

*Поступила 13.10.2018*



MSC2010 37D15

# On embedding of invariant manifolds of the simplest Morse-Smale flows with heteroclinical intersections

© E. Y. Gurevich<sup>1</sup>, D. A. Pavlova<sup>2</sup>

**Abstract.** We study a structure of four-dimensional phase space decomposition on trajectories of Morse-Smale flows admitting heteroclinical intersections. More precisely, we consider a class  $G(S^4)$  of Morse-Smale flows on the sphere  $S^4$  such that for any flow  $f \in G(S^4)$  its non-wandering set consists of exactly four equilibria: source, sink and two saddles. Wandering set of such flows contains finite number of heteroclinical curves that belong to intersection of invariant manifolds of saddle equilibria. We describe a topology of embedding of saddle equilibria's invariant manifolds; that is the first step in the solution of topological classification problem. In particular, we prove that the closures of invariant manifolds of saddle equilibria that do not contain heteroclinical curves are locally flat 2-sphere and closed curve. These manifolds are attractor and repeller of the flow. In set of orbits that belong to the basin of attraction or repulsion we construct a section that is homeomorphic to the direct product  $S^2 \times S^1$ . We study a topology of intersection of saddle equilibria's invariant manifolds with this section.

**Key Words:** topological equivalence, Morse-Smale flows, heteroclinic curves

## REFERENCES

1. Grines V. Z., Zhuzhoma E. V., Medvedev V. S., "On the structure of the carrier variety for Morse Smale systems without heteroclinic intersections", *Trudy matematicheskogo instituta V. A. Steklov*, **297** (2017), 201–210 (In Russ.).
2. E.Y. Gurevich, D.A. Pavlova, "On the simplest Morse-Smale flows with heteroclinic intersections on the sphere  $S^n$ ", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19:2** (2017), 25–30 (In Russ.).
3. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73:6** (1967), 747–817.
4. E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev., "Morse-Smale systems with few non-wandering points", *Topology and its Applications*, **160:3** (2013), 498–507.
5. K.R. Meyer, "Energy Functions for Morse Smale Systems", *American Journal of Mathematics*, **90:4** (1968), 1031–1040.
6. J. C. Cantrell, C. H. Edwards, "Almost locally flat imbeddings of minifolds", *The Michigan Mathematical Journal*, **1965:2**, 217–223.
7. Y. Matsumoto, *An Introduction to Morse Theory*, Oxford University Press, 2001.
8. C. Gordon, J. Luecke, "Knots are determined by their complements", *Journal American Mathematical Society*, **2** (1989):2, 371–415.

Submitted 13.10.2018

<sup>1</sup>**Elena Y. Gurevich**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, egurevich@hse.ru

<sup>2</sup>**Daria A. Pavlova**, student, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8634-4143>, dapavlova\_1@mail.ru

УДК 517.9

# Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида

© М. В. Донцова<sup>1</sup>

**Аннотация.** Рассмотрена задача Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида. Исследование разрешимости этой задачи в исходных координатах основано на методе дополнительного аргумента. Доказано существование локального решения задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида, гладкость которого не ниже, чем гладкости начальных условий. Определены достаточные условия существования нелокального решения задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Доказательство нелокальной разрешимости задачи Коши для системы квазилинейных уравнений первого порядка с правыми частями специального вида опирается на глобальные оценки.

**Ключевые слова:** метод дополнительного аргумента, глобальные оценки, задача Коши, уравнения с частными производными первого порядка

## 1. Введение

Рассмотрим систему вида

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + (a_1(t)u(t, x) + b_1(t)v(t, x))\partial_x u(t, x) = a_2 u(t, x) + b_2(t)v(t, x), \\ \partial_t v(t, x) + (c_1(t)u(t, x) + g_1(t)v(t, x))\partial_x v(t, x) = g_2 v(t, x), \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $u(t, x), v(t, x)$  – неизвестные функции;  $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t)$  – известные функции;  $a_2, g_2$  – известные константы.

Для системы уравнений (1.1) определим начальные условия:

$$u(0, x) = \varphi_1(x), \quad v(0, x) = \varphi_2(x). \quad (1.2)$$

Задача (1.1)–(1.2) определена на

$$\Omega_T = \{(t, x) | 0 \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}.$$

В статье [1] определены достаточные условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы (1.1), где  $u(t, x), v(t, x)$  – неизвестные функции,

$$a_1(t) = a_1, \quad b_1(t) = b_1, \quad b_2(t) = b_2, \quad c_1(t) = c_1, \quad g_1(t) = g_1;$$

$a_1, b_i, c_1, g_1, i = 1, 2$  – известные положительные константы,  $a_2, g_2$  – известные константы,  $(t, x) \in \Omega_T$  с начальными условиями (1.2).

<sup>1</sup>Донцова Марина Владимировна, ассистент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2915-0881>, dontsowa.marina2011@yandex.ru

В данной работе определены достаточные условия существования и единственности локального решения задачи Коши (1.1)–(1.2), при которых решение имеет такую же гладкость по  $x$ , как и начальные функции задачи Коши и достаточные условия нелокальной разрешимости задачи Коши (1.1)–(1.2) с помощью метода дополнительного аргумента.

## 2. Существование локального решения

С помощью метода дополнительно аргумента и преобразований получена следующая система интегральных уравнений [1–12]:

$$\eta_1(s, t, x) = x - \int_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau, \quad (2.1)$$

$$\eta_2(s, t, x) = x - \int_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau, \quad (2.2)$$

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(\eta_1(0, t, x)) + \int_0^s (a_2w_1 + b_2(\tau)w_3)d\tau, \quad (2.3)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(\eta_2(0, t, x)) + \int_0^s g_2w_2d\tau, \quad (2.4)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, \eta_1), \quad (2.5)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1(s, s, \eta_2). \quad (2.6)$$

Подставим (2.1)–(2.2) в (2.3)–(2.6), получим следующую систему:

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1\left(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau\right) + \int_0^s (a_2w_1(\tau, t, x) + b_2(\tau)w_3(\tau, t, x))d\tau, \quad (2.7)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2\left(x - \int_0^t (c_1(\tau)w_4(\tau, t, x) + g_1(\tau)w_2(\tau, t, x))d\tau\right) + \int_0^s g_2w_2(\tau, t, x)d\tau, \quad (2.8)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2\left(s, s, x - \int_s^t (a_1(\tau)w_1 + b_1(\tau)w_3)d\tau\right), \quad (2.9)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1\left(s, s, x - \int_s^t (c_1(\tau)w_4 + g_1(\tau)w_2)d\tau\right). \quad (2.10)$$

Обозначим  $\Gamma_T = \{(s, t, x) | 0 \leq s \leq t \leq T, x \in (-\infty, +\infty), T > 0\}$ ,

$$C_\varphi = \max\left\{\sup_R |\varphi_i^{(l)}| \mid i = 1, 2, l = \overline{0, 2}\right\},$$

$$l = \max\left\{\sup_{[0, T]} a_1(t), \sup_{[0, T]} b_1(t), \sup_{[0, T]} b_2(t), \sup_{[0, T]} c_1(t), \sup_{[0, T]} g_1(t), |a_2|, |g_2|\right\},$$

$$\|U\| = \sup_{\Gamma_T} |U(s, t, x)|, \quad \|f\| = \sup_{\Omega_T} |f(t, x)|,$$

$\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$  – пространство функций один раз дифференцируемых по переменной  $t$ , дважды дифференцируемых по переменной  $x$ , имеющих смешанные производные второго порядка

и ограниченные вместе со своими производными на  $\Omega_T$ ;  $\bar{C}^2(R)$  – пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными первого и второго порядка на  $R$ ;  $C([0, T])$  – пространство функций, определенных и непрерывных на отрезке  $[0, T]$ .

Введем условия

$$\begin{aligned} a_1(t) > 0, \quad b_1(t) < 0, \quad b_2(t) < 0, \quad c_1(t) > 0, \quad g_1(t) < 0, \quad t \in [0, T], \\ \varphi'_1(x) \geq 0, \quad \varphi'_2(x) \leq 0, \quad x \in R. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (1.1)–(1.2), имеющего такую же гладкость по  $x$ , как и начальные функции.

**Т е о р е м а 2.1** Пусть

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R), \quad a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0, T])$$

и выполняются условия (2.11). Тогда для любого  $T \leq \min\left(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l}\right)$  задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение  $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ , которое определяется из системы интегральных уравнений (2.7)–(2.10).

Теорема следует из выполнения условий трех лемм.

**Л е м м а 2.1** Если функции  $w_j(s, t, x)$ ,  $j = \overline{1, 4}$  удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.7)–(2.10) и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными, то функции  $u(t, x) = w_1(t, t, x)$ ,  $v(t, x) = w_2(t, t, x)$  будут решением задачи Коши (1.1)–(1.2) на  $\Omega_{T_0}$ ,  $T_0 \leq T$ , где  $T_0$  – константа, определяемая через исходные данные.

Утверждение доказывается аналогично утверждению из работ [2–8].

**Л е м м а 2.2** При выполнении условий

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R), \quad a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0, T]),$$

$$a_1(t) > 0, \quad b_1(t) < 0, \quad b_2(t) < 0, \quad c_1(t) > 0, \quad g_1(t) < 0, \quad t \in [0, T]$$

и

$$T \leq \min\left(\frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l}\right) \quad (2.12)$$

система интегральных уравнений (2.7)–(2.10) имеет единственное решение

$$w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [2]. Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (2.7)–(2.10) зададим равенствами  $w_{10}(s, t, x) = \varphi_1(x)$ ,  $w_{20}(s, t, x) = \varphi_2(x)$ .

Первое и последующие приближения системы уравнений (2.7)–(2.10) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений ( $n = 1, 2, \dots$ )

$$w_{1n}(s, t, x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1n} + b_1(\tau)w_{3n})d\tau) + \int_0^s (a_2w_{1n} + b_2(\tau)w_{3n})d\tau, \quad (2.13)$$

$$w_{2n}(s, t, x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c_1(\tau)w_{4n}(\tau, t, x) + g_1(\tau)w_{2n}(\tau, t, x))d\tau) + \int_0^s g_2w_{2n}(\tau, t, x)d\tau, \quad (2.14)$$

$$w_{3n}(s, t, x) = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1n} + b_1(\tau)w_{3n})d\tau), \quad (2.15)$$

$$w_{4n}(s, t, x) = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4n} + g_1(\tau)w_{2n})d\tau). \quad (2.16)$$

Докажем существование решения с помощью метода последовательных приближений для каждого фиксированного  $n$ . Нулевое приближение (при фиксированном  $n$ ) определим равенствами:  $w_{jn}^0 = w_{j(n-1)}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ . Для системы уравнений (2.13)–(2.16) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений

$$w_{1n}^{k+1}(s, t, x) = \varphi_1(x - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1n}^k + b_1(\tau)w_{3n}^k)d\tau) + \int_0^s (a_2w_{1n}^k + b_2(\tau)w_{3n}^k)d\tau, \quad (2.17)$$

$$w_{2n}^{k+1}(s, t, x) = \varphi_2(x - \int_0^t (c_1(\tau)w_{4n}^k(\tau, t, x) + g_1(\tau)w_{2n}^k(\tau, t, x))d\tau) + \int_0^s g_2w_{2n}^k(\tau, t, x)d\tau, \quad (2.18)$$

$$w_{3n}^{k+1}(s, t, x) = w_{2(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1n}^k + b_1(\tau)w_{3n}^k)d\tau), \quad (2.19)$$

$$w_{4n}^{k+1}(s, t, x) = w_{1(n-1)}(s, s, x - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4n}^k + g_1(\tau)w_{2n}^k)d\tau). \quad (2.20)$$

Так же, как в [2], устанавливается, что при выполнении условия

$$T \leq \min \left( \frac{1}{20C_\varphi l}, \frac{1}{4l} \right) \quad (2.21)$$

последовательные приближения (2.17)–(2.20) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (2.13)–(2.16), для которого выполняется  $\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

При выполнении условия (2.21) справедливы оценки

$$\|w_{1nx}^{k+1}\| \leq 4C_\varphi, \|w_{2nx}^{k+1}\| \leq 4C_\varphi, \|w_{3nx}^{k+1}\| \leq 6C_\varphi, \|w_{4nx}^{k+1}\| \leq 6C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.21) последовательные приближения  $w_{jn}^k$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , сходятся при  $k \rightarrow \infty$ , а значит, существуют производные  $w_{jnx}$ ,  $j = \overline{1, 4}$  и справедливы оценки

$$\|\partial_x w_{1n}\| \leq 4C_\varphi, \|\partial_x w_{2n}\| \leq 4C_\varphi, \|\partial_x w_{3n}\| \leq 6C_\varphi, \|\partial_x w_{4n}\| \leq 6C_\varphi.$$

При выполнении условия (2.21) последовательные приближения, определяемые из системы (2.13)–(2.16), сходятся к непрерывному решению системы (2.7)–(2.10), для которого справедливы оценки  $\|w_j\| \leq 2C_\varphi$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

При выполнении условия (2.12)  $w_{jnx} \rightarrow w_{jx} = \partial_x w_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , где функции  $\partial_x w_j$  являются непрерывными по всем своим аргументам на  $\Gamma_T$ . Справедливы оценки

$$\|\partial_x w_i\| \leq 4C_\varphi, \quad i = 1, 2, \quad \|\partial_x w_3\| \leq 6C_\varphi, \quad \|\partial_x w_4\| \leq 6C_\varphi.$$

*М. В. Донцова. Условия нелокальной разрешимости системы квазилинейных ...*

Аналогично доказывается, что  $w_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$  имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной  $t$  на  $\Gamma_T$ . Единственность решения доказывается так же, как в статье [2].

**Л е м м а 2.3** Пусть  $\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R)$ ,  $a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0, T])$ , тогда при выполнении условий (2.11), (2.12) функции  $w_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , представляющие собой решение системы уравнений (2.7)–(2.10), имеют непрерывные и ограниченные производные  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$ ,  $j = \overline{1, 4}$  на  $\Gamma_T$ , где  $T \leq \min \left( \frac{1}{25C_\varphi l}, \frac{1}{10l} \right)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

Дважды продифференцируем последовательные приближения (2.13)–(2.16) по  $x$ . Обозначим  $\omega_j^n = w_{jnxx}$ ,  $j = \overline{1, 4}$ , получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \omega_1^n = & -\varphi_1' \int_0^t (a_1(\tau)\omega_1^n + b_1(\tau)\omega_3^n) d\tau + \int_0^s (a_2\omega_1^n + b_2(\tau)\omega_3^n) d\tau + \\ & + \varphi_1'' \cdot \left(1 - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1nx} + b_1(\tau)w_{3nx}) d\tau\right)^2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^n = & -\varphi_2' \int_0^t (c_1(\tau)\omega_4^n + g_1(\tau)\omega_2^n) d\tau + \int_0^s g_2\omega_2^n d\tau + \\ & + \varphi_2'' \cdot \left(1 - \int_0^t (c_1(\tau)w_{4nx} + g_1(\tau)w_{2nx}) d\tau\right)^2, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \omega_3^n = & \omega_2^{n-1} \cdot \left(1 - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1nx} + b_1(\tau)w_{3nx}) d\tau\right)^2 - \\ & - w_{2(n-1)x} \int_s^t (a_1(\tau)\omega_1^n + b_1(\tau)\omega_3^n) d\tau, \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} \omega_4^n = & \omega_1^{n-1} \cdot \left(1 - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4nx} + g_1(\tau)w_{2nx}) d\tau\right)^2 - \\ & - w_{1(n-1)x} \int_s^t (c_1(\tau)\omega_4^n + g_1(\tau)\omega_2^n) d\tau. \end{aligned} \quad (2.25)$$

При выполнении условия (2.12) с учетом установленных выше оценок  $\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi$ ,  $j = \overline{1, 4}$  получим  $\left| \int_s^t (a_1(\tau)w_{1nx} + b_1(\tau)w_{3nx}) d\tau \right| \leq tl(\|w_{1n}\| + \|w_{3n}\|) \leq 4tlC_\varphi \leq \frac{4lC_\varphi}{25lC_\varphi} \leq 0.16$ ,  $\left| \int_s^t (c_1(\tau)w_{4nx} + g_1(\tau)w_{2nx}) d\tau \right| \leq tl(\|w_{4n}\| + \|w_{2n}\|) \leq 4tlC_\varphi \leq \frac{4lC_\varphi}{25lC_\varphi} \leq 0.16$ .

Зафиксируем точку  $x_0 \in R^1$ . Рассмотрим множество

$$\Omega_{x_0} = \{x \mid x_0 - 0.16 \leq x \leq x_0 + 0.16\}.$$

Возьмем  $x_1, x_2 \in \Omega_{x_0}$ .

При выполнении условий (2.11)–(2.12) установлено, что справедливы неравенства:  $|\eta_{1n}(s, t, x_1) - \eta_{1n}(s, t, x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ ,  $|\eta_{2n}(s, t, x_1) - \eta_{2n}(s, t, x_2)| \leq |x_1 - x_2|$ , где

$$\eta_{1n}(s, t, x) = x - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1n}(\tau, t, x) + b_1(\tau)w_{3n}(\tau, t, x))d\tau,$$

$$\eta_{2n}(s, t, x) = x - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4n}(\tau, t, x) + g_1(\tau)w_{2n}(\tau, t, x))d\tau.$$

Установлена равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n$ ,  $\omega_2^n$  по  $x$  при  $x \in \Omega_{x_0}$ , из которой следует равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n$ ,  $\omega_2^n$  по  $x$  в выбранной, произвольной точке  $x_0$ , т. е. на  $R$ . Равностепенная непрерывность функций  $\omega_1^n$ ,  $\omega_2^n$  по  $x$  используется для доказательства сходимости последовательных приближений  $\omega_j^n$ ,  $j = \overline{1, 4}$ .

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^n = & -\varphi_1'(\eta_1(0, t, x)) \int_0^t (a_1(\tau)\tilde{\omega}_1^n + b_1(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau + \int_0^s (a_2\tilde{\omega}_1^n + b_2(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau + \\ & + \varphi_1'' \cdot (1 - \int_0^t (a_1(\tau)w_{1x} + b_1(\tau)w_{3x})d\tau)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2^n = & -\varphi_2'(\eta_2(0, t, x)) \int_0^t (c_1(\tau)\tilde{\omega}_4^n + g_1(\tau)\tilde{\omega}_2^n)d\tau + \int_0^s g_2\tilde{\omega}_2^n d\tau + \\ & + \varphi_2'' \cdot (1 - \int_0^t (c_1(\tau)w_{4x} + g_1(\tau)w_{2x})d\tau)^2, \end{aligned}$$

$$\tilde{\omega}_3^n = \tilde{\omega}_2^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (a_1(\tau)w_{1x} + b_1(\tau)w_{3x})d\tau)^2 - w_{2x}(s, s, \eta_1(s, t, x)) \int_s^t (a_1(\tau)\tilde{\omega}_1^n + b_1(\tau)\tilde{\omega}_3^n)d\tau,$$

$$\tilde{\omega}_4^n = \tilde{\omega}_1^{n-1} \cdot (1 - \int_s^t (c_1(\tau)w_{4x} + g_1(\tau)w_{2x})d\tau)^2 - w_{1x}(s, s, \eta_2(s, t, x)) \int_s^t (c_1(\tau)\tilde{\omega}_4^n + g_1(\tau)\tilde{\omega}_2^n)d\tau.$$

Докажем, что при выполнении условий (2.11)–(2.12)  $\tilde{\omega}_j^n \rightarrow \tilde{\omega}_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$  справедливы оценки

$$\|\tilde{\omega}_1\| \leq 2C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_2\| \leq 2C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_3\| \leq 3C_\varphi, \quad \|\tilde{\omega}_4\| \leq 3C_\varphi.$$

Далее докажем, что последовательные приближения  $\omega_j^n$  сходятся к функциям  $\tilde{\omega}_j$ ,  $j = \overline{1, 4}$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Получим, что  $w_{jnx} \rightarrow w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$ , где функции  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$ ,  $j = \overline{1, 4}$  непрерывны и ограничены на  $\Gamma_T$  при выполнении условий (2.11)–(2.12).

Аналогично установим, что существуют непрерывные и ограниченные производные  $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x \partial t}$ ,  $j = \overline{1, 4}$  на  $\Gamma_T$  при выполнении условий (2.11)–(2.12).

### 3. Существование нелокального решения

**Т е о р е м а 3.1** Пусть

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x) \in \bar{C}^2(R), \quad a_1(t), b_1(t), b_2(t), c_1(t), g_1(t) \in C([0, T])$$

и выполняются условия (2.11). Тогда для любого  $T > 0$  задача Коши (1.1)–(1.2) имеет единственное решение  $u(t, x), v(t, x) \in \bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ , которое определяется из системы интегральных уравнений (2.7)–(2.10).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Продифференцируем систему уравнений (1.1) по  $x$ . Обозначим  $p(t, x) = \partial_x u(t, x), q(t, x) = \partial_x v(t, x)$ , получим

$$\begin{cases} \partial_t p + (a_1(t)u(t, x) + b_1(t)v(t, x))\partial_x p = -a_1(t)p^2 - b_1(t)pq + a_2p + b_2(t)q, \\ \partial_t q + (c_1(t)u(t, x) + g_1(t)v(t, x))\partial_x q = -g_1(t)q^2 - c_1(t)pq + g_2q, \\ p(0, x) = \varphi'_1(x), \quad q(0, x) = \varphi'_2(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Добавим к системе уравнений (2.1)–(2.6) два уравнения

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1(s, t, x)}{ds} = -a_1(s)\gamma_1^2 - b_1(s)\gamma_1\gamma_2(s, s, \eta_1) + a_2\gamma_1 + b_2(s)\gamma_2(s, s, \eta_1), \\ \frac{d\gamma_2(s, t, x)}{ds} = -g_1(s)\gamma_2^2 - c_1(s)\gamma_1(s, s, \eta_2)\gamma_2 + g_2\gamma_2. \end{cases} \quad (3.2)$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0, t, x) = \varphi'_1(\eta_1), \quad \gamma_2(0, t, x) = \varphi'_2(\eta_2). \quad (3.3)$$

Перепишем систему уравнений (3.2) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_1(s, t, x) = \varphi'_1(\eta_1) + \int_0^s [-a_1(\tau)\gamma_1^2 + (b_2(\tau) - b_1(\tau)\gamma_1)\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1) + a_2\gamma_1]d\tau, \\ \gamma_2(s, t, x) = \varphi'_2(\eta_2) + \int_0^s [-g_1(\tau)\gamma_2^2 - c_1(\tau)\gamma_1(\tau, \tau, \eta_2)\gamma_2 + g_2\gamma_2]d\tau. \end{cases} \quad (3.4)$$

Аналогично тому, как это выполнено в [1; 5–7] доказывается существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (3.4). Следовательно,

$$\gamma_1(t, t, x) = p(t, x) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma_2(t, t, x) = q(t, x) = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Так же, как в статье [1], установлено, что справедливы оценки

$$\|v\| \leq C_\varphi \exp(|g_2|T), \quad \|u\| \leq C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)). \quad (3.5)$$

Далее, из (3.2) имеем:

$$\begin{cases} \gamma_1(s, t, x) = \varphi'_1(\eta_1) \exp\left(-\int_0^s (a_1(\tau)\gamma_1 + b_1(\tau)\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1) - a_2)d\tau\right) + \\ + \int_0^s b_2(\tau)\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1) \exp\left(-\int_0^\tau (a_1(\nu)\gamma_1 + b_1(\nu)\gamma_2(\nu, \nu, \eta_1) - a_2)d\nu\right)d\tau, \\ \gamma_2(s, t, x) = \varphi'_2(\eta_2) \exp\left(-\int_0^s (g_1(\tau)\gamma_2 + c_1(\tau)\gamma_1(\tau, \tau, \eta_2) - g_2)d\tau\right). \end{cases} \quad (3.6)$$



Из (3.6) при выполнении условий

$$a_1(t) > 0, b_1(t) < 0, b_2(t) < 0, c_1(t) > 0, g_1(t) < 0, \quad t \in [0, T], \varphi_1'(x) \geq 0, \varphi_2'(x) \leq 0, \quad x \in R$$

получим, что  $\gamma_1 \geq 0$ ,  $\gamma_2 \leq 0$ , на  $\Gamma_T$ , значит,

$$\|\gamma_2\| \leq C_\varphi \exp(|g_2|T), \quad \|\gamma_1\| \leq C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)),$$

следовательно,

$$\|\partial_x v\| \leq C_\varphi \exp(|g_2|T), \quad \|\partial_x u\| \leq C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)). \quad (3.7)$$

Далее, так же, как в [5–7], выведем, что при всех  $t$  и  $x$  справедливы оценки

$$|\partial_{x^2}^2 u| \leq E_{11} ch(T\sqrt{C_{12}C_{21}}) + E_{21} \sqrt{\frac{C_{12}}{C_{21}}} sh(T\sqrt{C_{12}C_{21}}), \quad (3.8)$$

$$|\partial_{x^2}^2 v| \leq E_{21} ch(T\sqrt{C_{12}C_{21}}) + E_{11} \sqrt{\frac{C_{21}}{C_{12}}} sh(T\sqrt{C_{12}C_{21}}), \quad (3.9)$$

где  $E_{11}$ ,  $E_{21}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$  – постоянные, определяемые через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для  $u$ ,  $v$ ,  $\partial_x u$ ,  $\partial_x v$ ,  $\partial_{x^2}^2 u$ ,  $\partial_{x^2}^2 v$  ((3.5), (3.7)–(3.9)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток  $[0, T]$ .

Взяв в качестве начальных значений  $u(T_0, x)$ ,  $v(T_0, x)$ , продлим решение на промежуток  $[T_0, T_1]$ , а затем, выбирая начальные значения  $u(T_1, x)$ ,  $v(T_1, x)$ , – на промежуток  $[T_1, T_2]$ . Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, поскольку определяется величинами  $\|\partial_x u\|$ ,  $\|\partial_x v\|$ , которые в силу глобальных оценок (3.7) ограничены значениями  $C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T))$ ,  $C_\varphi \exp(|g_2|T)$  на любом промежутке разрешимости. В частности, начальные значения  $u(T_k, x)$ ,  $v(T_k, x) \in \bar{C}^2(R)$ ,

$$|u(T_k, x)| \leq C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)), \quad |v(T_k, x)| \leq C_\varphi \exp(|g_2|T).$$

$$|\partial_x u(T_k, x)| \leq C_\varphi \exp(|a_2|T)(1 + Tl \exp(|g_2|T)), \quad |\partial_x v(T_k, x)| \leq C_\varphi \exp(|g_2|T).$$

Для вторых производных справедливы оценки (3.8)–(3.9), где в качестве  $t$  можно взять  $T$ . В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток  $[0, T]$ .

Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

**Благодарности.** Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00125 мол\_а

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с правыми частями специального вида”, *Уфимский математический журнал*, **6**:4 (2014), 71–82.
2. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.

3. М. И. Иманалиев, П. С. Панков, С. Н. Алексеенко, “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия: Математика, механика, информатика. Спец. выпуск*, **1** (2006), 60–64.
4. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **14** (2012), 34–41.
5. С. Н. Алексеенко, Т. А. Шемякина, М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки*, **177:3** (2013), 190–201.
6. С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова, “Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18:2** (2016), 115–124.
7. М. В. Донцова, “Условия нелокальной разрешимости задачи Коши для системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями”, *Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика*, **4** (2014), 116–130.
8. М. В. Донцова, “Нелокальное существование ограниченного решения системы двух дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с непрерывными и ограниченными правыми частями”, *Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика*, **3** (2014), 21–36.
9. Т. А. Шемякина, “Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13:2** (2011), 127–131.
10. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument”, *Applicable Analysis*, **96:9** (2017), 1444–1465.
11. Т. А. Шемякина, “Теорема существования ограниченного решения задачи Коши для системы Франкля гиперболического типа”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико–математические науки*, **146:2** (2012), 190–201.
12. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument”, *Applicable Analysis*, **96:9** (2017), 1444–1465.

Поступила 18.09.2018

MSC2010 35F50, 35F55, 35A01, 35A02, 35A05

# The nonlocal solvability conditions for a system of quasilinear equations of the first order special right-hand sides

© M. V. Dontsova<sup>1</sup>

**Abstract.** The Cauchy problem for a system of first-order quasilinear equations with special right-hand sides is considered. The study of solvability of this system in the original coordinates is based on the method of additional argument. It is proved that the local solution of such system exists and that its smoothness is not lower than the smoothness of the initial conditions. For system of two equations non-local solutions are considered that are continued by finite number of steps from the local solution. Sufficient conditions for the existence of such non-local solution are derived. The proof of the non-local resolvability of the system relies on original global estimates.

**Key Words:** method of additional argument, global estimates, global estimates, Cauchy problem, first-order partial differential equations

## REFERENCES

1. M. V. Dontsova, “Nonlocal solvability conditions for Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with special right-hand sides”, *Ufa Mathematical Journal*, **6**:4 (2014), 68–80 (In Russ.).
2. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, “To the question of the existence of a smooth bounded solution for a system of two first-order nonlinear partial differential equations”, *Doklady RAN*, **379**:1 (2001), 16–21 (In Russ.).
3. M. I. Imanaliev, P. S. Pankov, S. N. Alekseenko, “Method of an additional argument”, *Vestnik KazNU. Series: Mathematics, mechanics, informatics. Spec. issue*, **1** (2006), 60—64 (In Russ.).
4. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, “The investigation of a solvability of the system of equations, describing a distribution of electrons in an electric field of sprite”, *Matem. vestnik pedvuzov, universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **14** (2012), 34–41 (In Russ.).
5. S. N. Alekseenko, T. A. Shemyakina, M. V. Dontsova, “Nonlocal solvability conditions for systems of first order partial differential equations”, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, **177**:3 (2013), 190–201 (In Russ.).
6. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, “The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:2 (2016), 115–124 (In Russ.).
7. M. V. Dontsova, “Nonlocal solvability conditions of the Cauchy problem for a system of first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides”, *Vestnik of VSU. Series: Physics. Mathematics*, **4** (2014), 116–130 (In Russ.).

<sup>1</sup>**Marina V. Dontsova**, Assistant, Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin Av., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2915-0881>, dontsova.marina2011@yandex.ru

8. M. V. Dontsova, “The nonlocal existence of a bounded solution of the Cauchy problem for a system of two first order partial differential equations with continuous and bounded right-hand sides”, *Vestnik TvGU. Seriya: Prikladnaya matematika*, **3** (2014), 21–36 (In Russ.).
9. T. A. Shemyakina, “Conditions for the existence and diferenciability of solutions of Frankl in the hyperbolic case”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:2 (2011), 127–131 (In Russ.).
10. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument”, *Applicable Analysis*, **96**:9 (2017), 1444–1465.
11. T. A. Shemyakina, “The theorem on existence of a bounded solution of the Cauchy problem for the Frankl system of hyperbolic type”, *St. Petersburg State Polytechnical University Journal. Physics and Mathematics*, **146**:2 (2012), 130–140 (In Russ.).
12. S. N. Alekseenko, M. V. Dontsova, D. E. Pelinovsky, “Global solutions to the shallow-water system with a method of an additional argument”, *Applicable Analysis*, **96**:9 (2017), 1444–1465.

*Submitted 18.09.2018*

УДК 514.7

# Структура римановых слоений со связностью Эресмана

© Н. И. Жукова<sup>1</sup>

**Аннотация.** Показано, что структурная теория Молино для римановых слоений на компактных многообразиях и на полных римановых многообразиях обобщается на римановы слоения со связностями Эресмана. При этом никаких ограничений на коразмерность слоения и размерность многообразия не накладывается. Для любого риманова слоения  $(M, F)$ , допускающего связность Эресмана, доказано, что замыкание любого слоя образует минимальное множество, а множество всех таких замыканий образует риманово слоение с особенностями  $(M, \overline{F})$ , причем в  $M$  существует связное открытое всюду плотное  $\overline{F}$ -насыщенное подмножество  $M_0$ , на котором индуцированное слоение  $(M_0, \overline{F}|_{M_0})$  образовано слоями локально тривиального расслоения над некоторым хаусдорфовым гладким многообразием. Доказана также эквивалентность ряда свойств для римановых слоений  $(M, F)$ , допускающих связность Эресмана. В частности, доказано, что равенство нулю структурной алгебры Ли слоения  $(M, F)$  эквивалентно тому, что пространство слоев естественным образом наделяется структурой гладкого орбифолда. Построены примеры, показывающие, что для слоений с трансверсальной линейной связностью и конформных слоений аналогичные утверждения, вообще говоря, не верны.

**Ключевые слова:** риманово слоение, связность Эресмана для слоения, локальная устойчивость слоя, минимальное множество

## 1. Введение

Исследованию римановых слоений посвящены многочисленные статьи и монографии ряда авторов. Прежде всего, следует отметить работы Р. Германа [1], Б. Рейнхарта [2], А. Хефлигера [3], П. Молино [4] и Ф. Тондеура (Ph. Tondeur). Теоремы о стабильности в смысле Роба и Эресмана некомпактных слоев римановых слоений, в том числе для слоений с особенностями, доказаны в работах автора [5] и [6].

Во всех перечисленных выше работах о римановых слоениях  $(M, F)$  предполагается либо компактность многообразия  $M$ , либо полнота ассоциированной трансверсально проектируемой римановой метрики  $g$  на  $M$ , называемой Б. Рейнхардом метрикой, подобной расслаивающейся («bundle like metric») [2], либо (как минимум) трансверсальная полнота слоения, означающая, что натуральный параметр на каждой максимальной геодезической, ортогональной слоению, изменяется на всей числовой прямой.

Р. А. Блоченталь и Дж. Хебда ввели понятие связности Эресмана для гладкого слоения  $(M, F)$  коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном гладком многообразии  $M$ , где  $0 < q < n$ . Связностью Эресмана для  $(M, F)$  называется такое  $q$ -мерное распределение на  $M$ , трансверсальное этому слоению, для которого определены переносы его интегральных кривых вдоль любых слоевых кусочно гладких кривых (строгое определение дано в параграфе 2.3.),

Цель данной работы – показать, что структурная теория Молино для римановых слоений на компактных многообразиях [4] и на полных римановых многообразиях ([3] и [7]) обобщается на римановы слоения со связностью Эресмана, а также доказать эквивалентность ряда свойств для римановых слоений, допускающих связность Эресмана.

<sup>1</sup>**Жукова Нина Ивановна**, профессор кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ (603155 Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4553-559X>, [nzhukova@hse.ru](mailto:nzhukova@hse.ru)

Подчеркнем, что любое трансверсально полное риманово слоение, как и риманово слоение на полном римановом многообразии  $(M, g)$  с ассоциированной метрикой  $g$ , допускает в качестве связности Эресмана ортогональное распределение  $\mathfrak{M}$  размерности  $q$ , равной коразмерности слоения. Обратное утверждение неверно, как показывает Пример 1.

Таким образом, преимущество применения связности Эресмана состоит не только в большей общности по сравнению с указанными требованиями полноты, но и в том, что связность Эресмана носит дифференциально-топологический характер, в отличие от полноты, и не зависит от трансверсальной римановой метрики, фигурирующей в определении риманова слоения.

В параграфе 2.3. мы приводим определение и свойства слоеного расслоения с поднятым  $e$ -слоением  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  над римановым слоением  $(M, F)$  и его свойства.

Применяя методы исследования трансверсально однородных слоений в смысле [8], а также метод псевдогрупп голономии и результаты работ [3], [7] и [9], докажем следующую теорему.

**Т е о р е м а 1.1** Пусть  $(M, F)$  — риманово слоение, допускающее связность Эресмана  $\mathfrak{M}$ , и  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  — его поднятое  $e$ -слоение. Тогда

- 1) замыкания слоев слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  являются слоями некоторого локально тривиального расслоения  $\pi_b: \mathcal{R} \rightarrow W$  над гладким многообразием  $W$ ;
- 2) слоение  $(\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{F}|_{\bar{\mathcal{L}}})$ , индуцированное на замыкании  $\bar{\mathcal{L}}$  слоя  $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$ , является слоением Ли с всюду плотными слоями.

Следующее определение корректно, то есть не зависит от выбора слоя  $\mathcal{L} \in \mathcal{F}$ .

**О п р е д е л е н и е 1.1** Структурная алгебра  $\mathfrak{g}_0$  слоения Ли с всюду плотными слоями  $(\bar{\mathcal{L}}, \mathcal{F}|_{\bar{\mathcal{L}}})$  называется структурной алгеброй риманова слоения  $(M, F)$  со связностью  $\mathfrak{M}$  и обозначается через  $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}_0(M, F)$ .

Подчеркнем, что для компактных многообразий  $M$  данное определение структурной алгебры Ли риманова слоения со связностью Эресмана совпадает с определением структурной алгебры Ли, данным П. Молино [4].

Напомним, что подмножество многообразия  $M$  со слоением  $(M, F)$  называется  $F$ -насыщенным, если его можно представить как объединение некоторых слоев слоения. Непустое замкнутое насыщенное подмножество  $M$  многообразия  $M$  называется минимальным множеством слоения  $(M, F)$ , если любой слой из  $M$  всюду плотен в  $M$ .

Применяя Теорему 1.1 и результаты работы [10], докажем следующую структурную теорему.

**Т е о р е м а 1.2** Если риманово слоение  $(M, F)$  допускает связность Эресмана, то замыкание  $\bar{L}$  каждого его слоя  $L$  является минимальным множеством и вложенным подмногообразием в  $M$ , а совокупность всех замыканий слоев образует риманово слоение с особенностями  $(M, \bar{F})$ . Существует связное открытое  $\bar{F}$ -насыщенное всюду плотное подмножество  $M_0$  в  $M$  такое, что слоение  $(M_0, \bar{F}|_{M_0})$  образовано слоями локально тривиального расслоения с проекцией  $p: M_0 \rightarrow B$  на хаусдорфово гладкое многообразие  $B$ .

Понятие устойчивости слоев слоений введены основателями теории слоений Эресманом и его учеником Рибом.

Слой слоения  $(M, F)$  называется собственным, если он — вложенное подмногообразие в  $M$ . Слоение, все слои которого собственные, называется собственным. Слой  $L$  слоения  $(M, F)$  называется замкнутым, если  $L$  — замкнутое подмножество в  $M$ . Как известно, любой замкнутый и, в частности, компактный слой является собственным.

**О п р е д е л е н и е 1.2** Слои  $L$  слоения  $(M, F)$  коразмерности  $q$  называется локально устойчивым (в смысле Эресмана и Роба), если существует семейство насыщенных окрестностей  $\{W_k | k \in \mathbb{N}\}$ , обладающее следующими свойствами:

1) существует такая субмерсия  $f_1 : W_1 \rightarrow L$ , что для любого  $k \in \mathbb{N}$  тройка  $(W_k, f_k, L)$ , где  $f_k = f_1|_{W_k}$  — локально тривиальное расслоение со стандартным слоем  $q$ -мерным диском  $D^q$ , причем слои этого расслоения трансверсальны слоям слоения  $(W_k, F|_{W_k})$ ;

2) для произвольной точки  $x \in L$ , множество  $\{W_k \cap f_1^{-1}(x) | k \in \mathbb{N}\}$  — база топологии слоя  $f_1^{-1}(x)$  в точке  $x$ .

Согласно известной теореме Роба [11], любой компактный слой слоения с конечной группой голономии локально устойчив.

Следующий критерий локальной устойчивости собственного слоя для римановых слоений со связностью Эресмана доказан нами в [6], Теорема 1.

**Т е о р е м а 1.3** Пусть  $L$  — слой риманова слоения  $(M, F)$ , допускающего связность Эресмана. Тогда следующие три условия эквивалентны:

- (i) слой  $L$  — собственный;
- (ii) слой  $L$  — замкнутый;
- (iii) слой  $L$  локально устойчив.

Следующее утверждение указывает ряд специфических свойств римановых слоений со связностью Эресмана.

**Т е о р е м а 1.4** Пусть  $(M, F)$  — риманово слоение, допускающее связность Эресмана. Тогда следующие условия эквивалентны:

- (i) структурная алгебра Ли  $\mathfrak{g}_0(M, F)$  равна нулю;
- (ii) все слои слоения  $(M, F)$  замкнуты в  $M$ ;
- (iii) слоение  $(M, F)$  — собственное;
- (iv) каждый слой слоения  $(M, F)$  локально устойчив в смысле Роба и Эресмана;
- (v) существует собственный слой с конечной (ростковой) группой голономии;
- (vi) пространство слоев  $M/F$  естественным образом наделяется структурой гладкого  $q$ -мерного орбифолда, причем фактор-отображение  $f : M \rightarrow M/F$  является субмерсией орбифолдов.

**З а м е ч а н и е 1.1** Отметим, что если пространство слоев  $M/F$  слоения  $(M, F)$ , допускающего связность Эресмана, естественным образом наделяется структурой гладкого  $q$ -мерного орбифолда, причем фактор-отображение  $M \rightarrow M/F$  является субмерсией орбифолдов, то это слоение — риманово, все его слои замкнуты и локально устойчивы, а группы голономии — конечны.

**З а м е ч а н и е 1.2** Р. Герман [1] первым доказал, что пространство слоев риманова слоения, все слои которого замкнуты, на полном римановом многообразии хаусдорфова и естественным образом наделяется структурой метрического пространства.

## 2. Обозначения и основные понятия

### 2.1. Обозначения

Заметим, что для простоты под гладкостью мы понимаем гладкость класса  $C^\infty$ , хотя практически результаты верны при гладкости класса  $C^r$ ,  $r \geq 2$ .

Через  $\mathcal{Fol}$  обозначается категория слоений, в которой морфизмами являются гладкие отображения, переводящие слои одного слоения в слои другого слоения. Через  $A(M, F)$  обозначается группа автоморфизмов слоения  $(M, F)$  в категории  $\mathcal{Fol}$ .

Алгебра гладких функций на многообразии  $M$  обозначается  $\mathfrak{F}(M)$ . Гладкая функция называется базисной, если она постоянна на слоях слоения. Через  $\Omega_b^0(M, F)$  обозначается подалгебра базисных функций алгебры  $\mathfrak{F}(M)$ .

Модуль векторных полей на многообразии  $M$  обозначается через  $\mathfrak{X}(M)$ , а множество векторных полей, касательных к распределению  $\mathfrak{M}$  на  $M$ , — через  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ . Если  $\mathfrak{M} = TF$  — распределение, касательное к слоению  $(M, F)$ , то  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$  обозначается также через  $\mathfrak{X}_F(M)$ . Сужение слоения  $(M, F)$  на открытое подмножество  $U \subset M$  обозначается  $F_U$ . Пусть  $k : N \rightarrow M$  — сюръективная субмерсия, причем на  $M$  задано распределение  $\mathfrak{M}$ . Тогда на  $N$  индуцировано распределение  $\mathfrak{N} = \{\mathfrak{N}_u \mid u \in N\}$ , где  $\mathfrak{N}_u := \{Y \in T_u N \mid k(Y) \in \mathfrak{M}_{k(u)}\}$ , которое будем обозначать  $k^*\mathfrak{M}$ .

Символ  $\cong$  обозначает изоморфность объектов в соответствующей категории.

### 2.2. Римановы слоения

Пусть  $N$  — гладкое  $q$ -мерное многообразие, связность которого не предполагается. Пусть  $(M, F)$  — гладкое слоение произвольной коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$ , где  $0 < q < n$ , заданное  $N$ -коциклом  $\xi = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$ . Это означает, что:

- 1)  $\{U_i \mid i \in J\}$  — открытое покрытие многообразия  $M$ ;
- 2)  $f_i : U_i \rightarrow N$  — субмерсии в  $N$  со связными слоями, принадлежащими слоям слоения;
- 3) если  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , то существует диффеоморфизм  $\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j)$ , удовлетворяющий равенству:  $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$  на пересечении  $U_i \cap U_j$ .

Будем считать, что  $\eta = \{V_i \mid V_i = f_i(U_i), i \in J\}$  — покрытие  $N$ . Поскольку субмерсии являются открытыми отображениями,  $\eta$  — открытое покрытие.

Если на многообразии  $N$  существует такая риманова метрика  $g^N$ , что все преобразования  $\gamma_{ij}$  являются изометриями соответствующих открытых подмножеств в  $(N, g^N)$ , то  $(M, F)$  называется *римановым* слоением, заданным  $(N, g^N)$ -коциклом  $\xi$ .

Напомним, что  $q$ -мерное многообразие  $N$  называется *параллелизуемым*, если существует  $q$  гладких векторных полей  $Y_1, \dots, Y_q$  на  $N$ , образующих базис касательного векторного пространства  $T_x N$  в каждой точке  $x \in N$ . Векторные поля  $Y_1, \dots, Y_q$  называются *параллелизацией*  $N$ .

Если существует параллелизация  $Y_1, \dots, Y_q$  многообразия  $N$  такая, что дифференциал  $\gamma_{ij*}$  каждого преобразования  $\gamma_{ij}$  из  $N$ -коцикла  $\xi = \{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in J}\}$ , задающего слоение  $(M, F)$ , сохраняют эту параллелизацию, то  $(M, F)$  называется *трансверсально параллелизуемым*, или *e-слоением*. Подчеркнем, что любое *e-слоение* является римановым.

Риманова метрика  $g$  на  $M$  называется трансверсально проектируемой относительно слоения  $(M, F)$ , если  $L_X g = 0$ , где  $L_X g$  — производная Ли от  $g$  вдоль произвольного векторного поля  $X \in \mathfrak{X}_F(M)$ .

Как известно, имеет место следующая характеристика риманова слоения.



**Предложение 2.1** Слоение  $(M, F)$  является римановым тогда и только тогда, когда на  $M$  существует трансверсально проектируемая относительно  $(M, F)$  риманова метрика.

**Замечание 2.1** Риманово слоение  $(M, F)$  является трансверсально полным в смысле Определения 1.1 тогда и только тогда, когда оно, рассматриваемое как картаново слоение, является полным в смысле [10].

### 2.3. Слоеное расслоение над римановым слоением

Для произвольного риманова слоения  $(M, F)$  коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$  определено расслоение  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$  трансверсальных ортогональных реперов, которое представляет собой главное  $H$ -расслоение,  $H = O(q)$ , с индуцированным слоением  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ , слои которого посредством  $\pi$  накрывают соответствующие слои слоения  $(M, F)$  (см., например [10]). Предполагается, что группа  $H$  действует на  $\mathcal{R}$  справа, и через  $R_a$  обозначается действие элемента  $a \in H$  на  $\mathcal{R}$ .

Пусть  $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$  – полупрямое произведение подгруппы  $H$  и нормального делителя  $\mathbb{R}^q$ . Через  $\mathfrak{h}$  и  $\mathfrak{g}$  обозначим алгебры Ли групп Ли  $H$  и  $G$  соответственно. На многообразии  $\mathcal{R}$  определена также  $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма  $\tilde{\omega}$ , причем выполняются условия:

- (i)  $\tilde{\omega}(A^*) = A$  для любого  $A \in \mathfrak{h}$ ;
- (ii)  $R_a^* \tilde{\omega} = \text{Ad}_G(a^{-1}) \tilde{\omega}$  для всех  $a \in H$ ;
- (iii) отображение  $\tilde{\omega}_u : T_u(\mathcal{R}) \rightarrow \mathfrak{g} \ \forall u \in \mathcal{R}$  сюръективно, причем  $\ker \tilde{\omega}_u = T_u F$ ;
- (iv) слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  является трансверсально параллелизуемым.

Слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  называется *поднятым*.

### 2.4. Связность Эресмана для слоения

Понятие связности Эресмана введено Блюменталем и Хебдой в [12].

Напомним терминологию, используемую нами в [10]. Пусть  $(M, F)$  — гладкое слоение коразмерности  $q \geq 1$ , и  $\mathfrak{M}$  —  $q$ -мерное трансверсальное распределение.

Все рассматриваемые кривые предполагаются кусочно гладкими. Кривая называется *вертикальной*, если она лежит в одном слое слоения  $(M, F)$ . Кривая называется *горизонтальной*, если все ее касательные вектора принадлежат распределению  $\mathfrak{M}$ . Другими словами, кусочно гладкая кривая является горизонтальной, если каждый ее гладкий кусок, — интегральная кривая распределения  $\mathfrak{M}$ .

*Вертикально-горизонтальной гомотопией* называется кусочно гладкое отображение  $H : I_1 \times I_2 \rightarrow M$ , где  $I_1 = [a, b]$ ,  $I_2 = [c, d]$ , для которого сужение  $H|_{I_1 \times \{t\}}$ ,  $t \in I_2$ , — горизонтальная кривая, а сужение  $H|_{\{s\} \times I_2}$ ,  $s \in I_1$  — вертикальная кривая. Пара путей  $(H|_{I_1 \times \{0\}}, H|_{\{0\} \times I_2})$  с общим началом называется *базой* вертикально-горизонтальной гомотопии  $H$ . Пара путей  $(\sigma, h)$  где  $\sigma : I_1 \rightarrow M$  — горизонтальная, а  $h : I_2 \rightarrow M$  — вертикальная кривая, называется *допустимой для вертикально-горизонтальной гомотопии*.

Распределение  $\mathfrak{M}$  называется *связностью Эресмана для слоения  $(M, F)$* , если для любой допустимой пары путей  $(\sigma, h)$  существует вертикально-горизонтальная гомотопия с базой  $(\sigma, h)$ . Если существует вертикально-горизонтальная гомотопия  $H$  с базой  $(\sigma, h)$ , то такая гомотопия — единственная.

Путь  $\tilde{\sigma} := H|_{I_1 \times \{1\}}$  называется *переносом* пути  $\sigma$  вдоль  $h$  и обозначается  $\sigma \xrightarrow{\sigma} \tilde{\sigma}$ . Аналогично, путь  $\tilde{h} := H|_{\{1\} \times I_2}$  называется переносом пути  $h$  вдоль  $\sigma$  и обозначается через  $\sigma \xrightarrow{h} \tilde{h}$ .

**З а м е ч а н и е 2.2** Согласно Замечанию 2.1, трансверсально полное риманово слоение  $(M, F)$  можно рассматривать как полное картаново слоение, поэтому из [10] (Предложение 3) вытекает, что дополнительное по ортогональности распределение  $\mathfrak{M}$  на многообразии  $(M, g)$  с адаптированной римановой метрикой является связностью Эресмана для слоения  $(M, F)$ .

## 2.5. Слоенные и трансверсальные векторные поля

Пусть  $(M, F)$  — слоение со связностью Эресмана  $\mathfrak{M}$ . Напомним, что векторное поле  $X \in \mathfrak{X}(M)$  называется *слоеным*, если  $[X, Y] \in \mathfrak{X}_F(M)$  для любого векторного поля  $Y \in \mathfrak{X}_F(M)$ . Так как  $T_x M = \mathfrak{M}_x \oplus T_x F$ , то любое векторное поле  $X \in \mathfrak{X}(M)$  однозначно представимо в виде суммы  $X = X^{\mathfrak{M}} + X^F$ , где  $X^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ ,  $X^F \in \mathfrak{X}_F(M)$ . Если  $X \in \mathfrak{X}(M)$  — слоенное векторное поле, то его проекция  $X^{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$  называется *трансверсальным* векторным полем. Модуль трансверсальных векторных полей обозначается через  $l(M, F)$  [4].

## 3. Доказательства теорем

### 3.1. Трансверсально параллелизуемые слоения со связностью Эресмана

Слоение  $(M, F)$  называется *однородным* [8], если группа автоморфизмов  $A(M, F)$  в категории слоений  $\mathcal{Fol}$  действует транзитивно на  $M$ . Как известно, транзитивность действия  $A(M, F)$  на каждом слое слоения всегда имеет место.

Напомним, что подмножество многообразия со слоением называется *насыщенным*, если его можно представить в виде объединения некоторых слоев этого слоения. *Насыщением*  $N(V)$  подмножества  $V$  называется объединение всех слоев, пересекающих  $V$ .

Сначала докажем следующую теорему.

**Т е о р е м а 3.1** Пусть  $(M, F)$  — трансверсально параллелизуемое слоение со связностью Эресмана на  $n$ -мерном многообразии  $M$  и  $q = \text{codim}(M, F)$ . Тогда:

- (i) слоение  $(M, F)$  — трансверсально однородное;
- (ii) замыкания слоев слоения  $(M, F)$  образуют минимальные множества слоения  $(M, F)$  и являются слоями субмерсии  $\pi_b: M \rightarrow W$  на некоторое  $q_b$ -мерное гладкое многообразием  $W$ , где  $0 \leq q_b \leq q$ ;
- (iii) субмерсия  $\pi_b: M \rightarrow W$  является проекцией локально тривиального расслоения;
- (iv) слоение  $(\bar{L}, F|_{\bar{L}})$ , индуцированное на замыкании  $\bar{L}$  слоя  $L \in F$ , является слоением Ли со всюду плотными слоями.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $(M, F)$  — трансверсально параллелизуемое слоение коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$  со связностью Эресмана  $\mathfrak{M}$ . Поскольку трансверсально параллелизуемое слоение является римановым слоением, на  $M$  определена трансверсально проектируемая метрика  $g$ , относительно которой распределение  $\mathfrak{M}$

ортогонально слоям. Как показано Рейнхартом в [2],  $\mathfrak{M}$  — вполне геодезическое распределение на римановом многообразии  $(M, g)$ .

(i). Предположим, что векторные поля  $X_i \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ ,  $i = 1, \dots, q$ , образуют трансверсальную параллелизацию слоения  $(M, F)$ . Поскольку мы не предполагаем их полными, в окрестности  $U$  любой точки  $x_0 \in M$ , адаптированной к  $(M, F)$ , они определяют локальные 1-параметрические группы локальных диффеоморфизмов  $\varphi_t^{X_i}$ . Уменьшая в случае необходимости  $U$ , не нарушая общности, можно считать, что  $\varphi_t^{X_i}$  определены на  $U$  при любом  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  для всех  $i = 1, \dots, q$  и порождают вместе с  $A(M, F)$  группу автоморфизмов  $\hat{A}(M, F)$ , транзитивно действующую на  $U$ .

Из существования связности Эресмана для  $(M, F)$  вытекает, что 1-параметрические группы локальных диффеоморфизмов  $\varphi_t^{X_i}$  определены в насыщении  $N(U)$  окрестности  $U$  при  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ . Отсюда следует, что группа автоморфизмов  $A(M, F)$  транзитивно действует на  $N(U)$ . Следовательно, каждая орбита группы  $A(M, F)$  представляет собой открытое подмножество в  $M$ . Поэтому дополнение орбиты группы  $A(M, F)$  состоит из открытых орбит и также открыто в  $M$ . Таким образом, каждая орбита группы  $A(M, F)$  есть открыто-замкнутое подмножество в  $M$ . Благодаря связности  $M$ , многообразие  $M$  состоит из одной орбиты группы  $A(M, F)$ , и  $(M, F)$  — трансверсально однородное слоение в смысле [8].

(ii). Через  $\mathfrak{X}_F(M)$  обозначается подалгебра алгебры Ли векторных полей, касательных к слоям слоения  $(M, F)$ . Подчеркнем, что если  $X \in \mathfrak{X}_F(M)$ , то  $X(f) = 0$  для любой функции  $f \in \Omega_b^0(M, F)$ , т. е. гладкой функции на  $M$ , постоянной на слоях слоения  $(M, F)$ . Рассмотрим множество векторных полей

$$\mathfrak{X}_F^b(M) := \{X \in \mathfrak{X}(M) \mid X(f) = 0 \quad \forall f \in \Omega_b^0(M, F)\}.$$

При этом  $\mathfrak{X}_F(M) \subset \mathfrak{X}_F^b(M)$ .

Сохраняя обозначения из [8], положим по определению

$$E := \{E_x \mid x \in M\}, \quad E_x = \{X \in \mathfrak{X}_F^b(M)\}.$$

Однородность слоения  $(M, F)$  влечет постоянство размерности  $E_x$ ,  $x \in M$ . Таким образом,  $E$  — гладкое распределение на  $M$ . Поскольку  $E$  инвариантно относительно скобки Ли векторных полей, согласно теореме Фробениуса,  $E$  интегрируемо и определяет слоение, которое обозначается через  $(M, F_b)$  и называется *базисным*. При этом  $E = TF_b$ . Пусть  $q_b = \text{codim}(F_b)$  — коразмерность  $(M, F_b)$ . Кроме того,  $\mathfrak{X}_{F_b}(M) = \mathfrak{X}_F^b(M)$ , следовательно, каждый слой слоения  $(M, F)$  содержится в некотором слое слоения  $(M, F_b)$ , поэтому  $0 \leq q_b \leq q$ .

Используя те же аргументы, что и при доказательстве Теоремы 4.3 в [8], мы получим, что  $A(M, F) \subset A(M, F_b)$  и, следовательно,  $(M, F_b)$  — также однородное слоение. Следовательно все его слои диффеоморфны. Кроме того, пространство слоев  $M/F_b = W$  — хаусдорфово гладкое  $q_b$ -мерное многообразие, которое обозначается через  $W$  и называется базовым, а фактор-отображение  $\pi_b : M \rightarrow M/F_b = W$  является субмерсией, слои которой совпадают со слоями слоения  $(M, F_b)$ . Отсюда вытекает тривиальность групп голономии всех слоев слоения  $(M, F_b)$ .

Поскольку  $(M, F)$  — риманово слоение со связностью Эресмана, то согласно Предложению 2, доказанному нами в [9], псевдогруппа голономии  $\mathcal{H}(M, F)$  является полной псевдогруппой локальных изометрий многообразия  $(N, g^N)$ . Благодаря этому к  $(M, F)$  можно применить результаты А. Хефлигера [3] и Е. Салем [7], из которых следует, что базисное слоение  $(M, F_b)$  образовано замыканиями слоев слоения  $(M, F)$ , причем каждый слой  $L$  слоения  $(M, F)$  всюду плотен в содержащем его слое  $\mathcal{L}$  слоения  $(M, F_b)$ . Следовательно,  $\mathcal{L} = \bar{L}$  — минимальное множество слоения  $(M, F)$ . Это завершает доказательство утверждения (ii).

(iii). В каждой точке  $x \in M$  существует координатная окрестность  $U$ , адаптированная к обоим слоениям  $(M, F)$  и  $(M, F_b)$ . Существуют  $q_b$  базисных функций  $f_1, \dots, f_{q_b}$ , дифференциалы которых линейно независимы на  $U$ . При этом

$$E_x = \cap_{i=1}^{q_b} \text{Ker}(df_i)_x$$

для  $x \in U$ . Отсюда вытекает, что слоение  $(U, F_b|_U)$  образовано слоями субмерсии  $s : U \rightarrow \mathbb{R}^{q_b}$ , где  $s(y) = (f_1(y), \dots, f_{q_b}(y))$ ,  $y \in U$ . Поскольку функции  $f_1, \dots, f_{q_b}$  постоянны на каждом слое слоения  $(M, F_b)$ , то любой слой этого слоения, пересекающий  $U$ , пересекает  $U$  строго по одному локальному слою. Рассмотрим насыщение  $N(U)$  окрестности  $U$  слоями слоения  $(M, F_b)$ , тогда пространство слоев  $V := N(U)/F_b = U/F_b \cong \mathbb{R}^{q_b}$ . Обозначим через  $k : N(U) \rightarrow N(U)/F_b = V$  фактор-отображение на пространство слоев.

Пусть  $Z_1, \dots, Z_{q_b}$  — гладкие векторные поля на многообразии  $V$ , образующие глобальный базис  $TV$ . Заметим, что существуют гладкие векторные поля  $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_{q_b} \in l(N(U), F_b|_{N(U)})$  такие, что  $\bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_{q_b} \in l(N(U), F_b|_{N(U)})$  и  $k_*(\bar{Z}_i) = Z_i$ ,  $1 \leq i \leq q_b$ . При этом определено гладкое  $q_b$ -мерное распределение  $\mathfrak{M}_b$  на  $N(U)$  с глобальным базисом  $\bar{Z}_i$ ,  $1 \leq i \leq q_b$ .

Используя то, что  $\mathfrak{M}$  — связность Эресмана для  $(M, F)$ , причем каждый слой базисного слоения является минимальным множеством слоения  $(M, F)$ , докажем, что  $\mathfrak{M}_b$  — связность Эресмана для слоения  $(N(U), F_b|_{N(U)})$ . Применяя Теорему 1.3 к риманову слоению без голономии  $(N(U), F_b|_{N(U)})$  со связностью Эресмана, мы видим, что оно образовано слоями локально тривиального расслоения с проекцией  $s : N(U) \rightarrow V$ . Из этого следует, что исходное слоение  $(M, F_b)$  образовано слоями локально тривиального расслоения с проекцией  $\pi_b : M \rightarrow W$  на некоторое  $q_b$ -мерное многообразие  $W$ .

(iv). Учитывая доказанное выше, утверждение (iv) доказывается аналогично Теореме 4.9 в [8]. Доказательство завершено.

### 3.2. Доказательство Теоремы 1.1

Пусть  $(M, F)$  — риманово слоение со связностью Эресмана  $\mathfrak{M}$ . Рассмотрим слоеное расслоение  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$  над  $(M, F)$  с поднятым слоением  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ . Нетрудно проверить, что индуцированное распределение  $\mathfrak{N} := \pi^*\mathfrak{M}$  — связность Эресмана для слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ .

Таким образом, поднятое слоение является трансверсально параллелизуемым слоением со связностью Эресмана, поэтому все утверждения Теоремы 1.1 вытекают из доказанной выше Теоремы 3.1. Доказательство завершено.

### 3.3. Доказательство Теоремы 1.2

Пусть  $(M, F)$  — риманово слоение, допускающее связность Эресмана  $\mathfrak{M}$ . Для того чтобы применить результаты из [10], будем рассматривать  $(M, F)$  как картаново слоение типа  $(G, H)$ , где, как и выше,  $H = O(q)$ ,  $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$ .

Согласно Теореме 1.1, замыкания  $\bar{\mathcal{L}}_\alpha$  слоев  $\mathcal{L}_\alpha$  поднятого слоения образуют локально тривиальное расслоение  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow W$  над некоторым базовым многообразием  $W$ . По аналогии с Теоремой 2 из [10]  $M$  докажем, что определено гладкое слоение с особенностями  $(M, \mathcal{O})$ , образованное образами  $\pi(\bar{\mathcal{L}})$  замыканий слоев  $\mathcal{L}$  поднятого слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ . Продолжая терминологию из [10], будем называть это слоение ореольным. Так же, как в [10], докажем, что любой его слой  $\mathcal{O}(L)$  —  $F$ -насыщенное множество, причем каждый слой  $L_\alpha$  слоения  $(M, F)$ , принадлежащий  $\mathcal{O}(L)$ , всюду плотен в  $\mathcal{O}(L)$ . Кроме того, пространство слоев  $M/\mathcal{O}$  гомеоморфно пространству орбит  $W/H$  индуцированного действия группы  $H = O(q)$  на базовом многообразии  $W$ , поэтому можно отождествить  $M/\mathcal{O}$  с  $W/H$ . Отсюда вытекает, что пространство слоев  $M/\mathcal{O}$ , как и пространство орбит компактной группы

Ли  $W/H$ , является хаусдорфовым. Следовательно, каждый ореол замкнут в  $M$  и является минимальным множеством слоения  $(M, F)$ .

Таким образом, для риманова слоения со связностью Эресмана выполняется равенство  $\mathcal{O}(L) = \bar{L}$ .

Из теории компактных групп преобразований известно, что в пространстве орбит  $W/H$  существует открытое всюду плотное связное подмножество  $V_0$ , являющееся гладким многообразием. Пусть  $f : M \rightarrow M/\mathcal{O}$  — проекция на пространство слоев. Тогда  $M_0 := f^{-1}(V_0)$  — связное открытое всюду плотное  $\bar{F}$ -насыщенное подмножество в  $M$ . Поскольку сужение  $(M_0, \bar{F}_{M_0})$  — риманово слоение, все группы голономии которого тривиальны, а каждый слой является минимальным множеством слоения со связностью Эресмана, то те же аргументы, что и при доказательстве Теоремы 3.1, позволяют утверждать, что слоение  $(M_0, \bar{F}_{M_0})$  образовано слоями локально тривиального расслоения с проекцией  $f|_{M_0} : M_0 \rightarrow M_0/\mathcal{O} = V_0$ . Доказательство завершено.

### 3.4. Доказательство Теоремы 1.4

Пусть  $(M, F)$  — риманово слоение, допускающее связность Эресмана  $\mathfrak{M}$ .

Предположим, что структурная алгебра этого слоения равна нулю:  $\mathfrak{g}_0(M, F) = 0$ . Тогда из Теоремы 1.1 вытекает, что все слои поднятого слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  замкнуты.

Таким образом, (1)  $\Rightarrow$  (2).

Из Теоремы 1.2 следует эквивалентность условий (2)  $\Leftrightarrow$  (3)  $\Leftrightarrow$  (4).

Как известно, любое гладкое слоение имеет слои с тривиальной группой голономии, поэтому (4)  $\Rightarrow$  (5).

Предположим теперь, что выполняется (5), т. е. существует собственный слой с конечной группой голономии. Тогда согласно теореме о глобальной устойчивости, доказанной нами в [6] (Теорема 2), все слои этого слоения замкнуты и имеют конечную группу голономии, а пространство слоев слоения  $M/F$  естественным образом наделяется структурой гладкого  $q$ -мерного орбифолда. Заметим, что проекция на пространство слоев становится субмерсией орбифолдов. Это означает, что (5)  $\Rightarrow$  (6).

Пусть выполняется (6), т. е. пространство слоев слоения  $M/F$  — гладкий орбифолд. Из хаусдорфовости орбифолда вытекает, что все слои слоения  $(M, F)$  замкнуты и, следовательно, собственные. Пусть  $L$  — слой с тривиальной группой голономии. Тогда любой слой  $\mathcal{L}$  поднятого слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ , лежащий над  $L$ , также собственный. Таким образом, риманово слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ , допускающее связность Эресмана, имеет собственный слой с тривиальной группой голономии. Как отмечено выше, согласно теореме о глобальной устойчивости ([6], Теорема 2), все слои этого слоения замкнуты, следовательно, структурная алгебра Ли  $\mathfrak{g}_0(M, F)$  слоения  $(M, F)$  равна нулю. Таким образом, (6)  $\Rightarrow$  (1).  $\square$

## 4. Примеры

**Пример 4.1** Пусть  $M = \mathbb{E}^1 \times (\mathbb{E}^3 \setminus \{0\})$ , тогда  $M$  — четырехмерное односвязное многообразие, представляющее собой риманово произведение евклидовой прямой  $\mathbb{E}^1$  и открытого подмногообразия  $\mathbb{E}^3 \setminus \{0\}$  евклидова пространства  $\mathbb{E}^3$ . Подчеркнем, что  $M$  — неполное локальное евклидово многообразие. При этом  $F = \{\mathbb{E}^1 \times \{z\} \mid z \in \mathbb{E}^3 \setminus \{0\}\}$  — риманово слоение, не являющееся трансверсально полным. Однако распределение  $\mathfrak{M}$ , касательное к ортогональному слоению  $F^\perp$  коразмерности один, является интегрируемой связностью Эресмана для слоения  $(M, F)$ .

Этот пример показывает, что существование связности Эресмана для риманова слоения является более слабым условием, чем его полнота.

**Пример 4.2** Определим действие группы целых чисел  $\mathbb{Z}$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$  следующим образом:

$$\Phi : \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(n, (x, y)) = (x + n, \frac{1}{3^n}y), \quad n \in \mathbb{Z}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Поскольку группа  $\mathbb{Z}$  действует на  $\mathbb{R}^2$  свободно и собственноразрывно, то определено фактор-многообразие  $M = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$  с проекцией  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ . На  $M$  индуцированы два слоения  $F := \{k(\mathbb{R}^1 \times \{y\}) \mid y \in \mathbb{R}^1\}$  и  $F^\perp := \{k(\{x\} \times \mathbb{R}^1) \mid x \in \mathbb{R}^1\}$ , причем касательное распределение  $\mathfrak{M} = TF^\perp$  — интегрируемая связность Эресмана для слоения  $(M, F)$ . Подчеркнем, что единственный компактный слой этого слоения, диффеоморфный окружности, не локально устойчив в смысле Руба и Эресмана.

Заметим, что слоение  $(M, F)$  — трансверсально подобное, поэтому оно является слоением с трансверсальной линейной связностью. Это слоение собственное и имеет нулевую структурную алгебру Ли [10], однако не все его слои являются замкнутыми, поэтому теорема, аналогичная Теореме 1.4, для него не выполняется, как и Теорема 1.3

Этот пример показывает, в частности, что для слоений с трансверсальной линейной связностью пространство слоев собственного слоения не является орбифолдом, и не все слои локально устойчивы.

**Пример 4.3** Этот пример использует конструкцию надстройки, подробное изложение которой можно найти, например, в [9].

Пусть  $B_k$  — гладкое замкнутое трехмерное многообразие, гомеоморфное связной сумме  $\sharp_{i=1}^k \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$   $k$  экземпляров произведения  $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ . Тогда  $\pi_1(B_k, b) = \langle g_1, \dots, g_k \rangle$  — свободная группа ранга  $k$ . Через  $\text{Conf}(\mathbb{S}^q)$  будем обозначать группу Ли всех конформных преобразований  $q$ -мерной сферы  $\mathbb{S}^q$ .

Пусть задано конечное множество непересекающихся замкнутых шаров  $\mathcal{B}_1^+, \dots, \mathcal{B}_k^+, \mathcal{B}_1^-, \dots, \mathcal{B}_k^-$  в сфере  $\mathbb{S}^q$  и такое конформное преобразование  $\psi_i \in \text{Conf}(\mathbb{S}^q)$ , что  $\psi_i(\text{int}(\mathcal{B}_i^+)) = \text{ext}(\mathcal{B}_i^-)$ . Предполагается, что для любых  $\mathcal{B}_i^+$  и  $\mathcal{B}_i^-$  существует диффеоморфизм сферы  $\mathbb{S}^q$ , переводящий эти шары в круглые шары. Группа  $\Psi$  с образующими  $\psi_1, \dots, \psi_k$  называется группой Шоттки. Как известно, группа Шоттки  $\Psi$  является свободной группой ранга  $k$ , т. е.  $\Psi = \langle \psi_1, \dots, \psi_k \rangle$ , и имеет минимальное множество  $\Lambda(\Psi)$ , гомеоморфное канторову подмножеству отрезка  $[0, 1]$ . Следовательно, топологическая размерность  $\Lambda(\Psi)$  равна нулю.

Определим изоморфизм групп  $\rho_k : \pi_1(B_k, b) \rightarrow \Psi$ , полагая  $\rho_k(g_i) = \psi_i$ ,  $i = \overline{1, k}$ . Надстроечное слоение  $(M_k, F_k) = \text{Sus}(\mathbb{S}^q, B_k, \rho_k)$ , полученное надстройкой гомоморфизма

$$\rho_k : \pi_1(B_k, b) \rightarrow \text{Conf}(\mathbb{S}^q),$$

является полным конформным слоением и имеет глобальный аттрактор, представляющий собой исключительное минимальное множество [9].

Дискретность группы Шоттки  $\Psi$  в группе Ли  $\text{Conf}(\mathbb{S}^q)$  влечет равенство нулю структурной алгебры Ли  $\mathfrak{g}_0(M, F)$ .

Этот пример показывает, в частности, что для конформных слоений, допускающих связность Эресмана с нулевой структурной алгеброй Ли, пространство слоев не хаусдорфово, и не существует аналогов Теорем 1.3 и 1.4.

**Благодарности:** Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01041).

Н. И. Жукова. Структура римановых слоений со связностью Эресмана

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Hermann, “The differential geometry of foliations”, *Ann. of Math.*, **72**:3 (1960), 445–457.
2. B. Reinhart, “Foliated manifolds with bundle-like metrics”, *Ann. of Math.*, **69**:3 (1959), 119–132.
3. A. Haefliger, “Pseudogroups of local isometries”, *Res. Notes in Math.*, **131** (1985), 174–197.
4. P. Molino, *Riemannian foliations. Progress in Math. Vol. 73*, Boston; Basel, Birkhauser Boston, 1988, 339 p.
5. N. Zhukova, “On the stability of leaves of Riemannian foliations”, *Ann. Global Anal. and Geom.*, **5**:3 (1987), 261–271.
6. N.I. Zhukova, “Local and global stability of leaves os conformal foliations”, *Foliations 2012. Proceedings of the International Conference. Singapur, Word Scientific Press*, 2013, 215–233.
7. E. Salem, “Riemannian foliations and pseudogroups of isometries”, *Application D in [4]*, 265–296.
8. I. Moerdijk, J. Mrcun, *Introduction to foliations and Lie groupoids. Cambridge studies in advanced mathematics. Vol. 91*, New York, Cambridge University Press, 2003, 173 p.
9. N. I. Zhukova, “Global attractors of complete conformal foliations”, *Sbornik: Mathematics*, **203**:3 (2012), 380–405.
10. N. I. Zhukova, “Minimal sets of Cartan foliations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256**:1 (2007), 105–135.
11. I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction. Translations of Math. Monographs. Vol. 87*, Providence, Rhode Island, AMS, 1992, 317 p.
12. R. A. Blumenthal, J.J. Hebda, “Ehresmann connections for foliations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:4 (1984), 597–611.

Поступила 14.09.2018

MSC2010 53C12, 57R30

# Riemannian foliations with Ehresmann connection

© N. I. Zhukova<sup>1</sup>

**Abstract.** It is shown that the structural theory of Molino for Riemannian foliations on compact manifolds and complete Riemannian manifolds may be generalized to a Riemannian foliations with Ehresmann connection. Within this generalization there are no restrictions on the codimension of the foliation and on the dimension of the foliated manifold. For a Riemannian foliation  $(M, F)$  with Ehresmann connection it is proved that the closure of any leaf forms a minimal set, the family of all such closures forms a singular Riemannian foliation  $(M, \overline{F})$ . It is shown that in  $M$  there exists a connected open dense  $\overline{F}$ -saturated subset  $M_0$  such that the induced foliation  $(M_0, \overline{F}|_{M_0})$  is formed by fibers of a locally trivial bundle over some smooth Hausdorff manifold. The equivalence of some properties of Riemannian foliations  $(M, F)$  with Ehresmann connection is proved. In particular, it is shown that the structural Lie algebra of  $(M, F)$  is equal to zero if and only if the leaf space of  $(M, F)$  is naturally endowed with a smooth orbifold structure. Constructed examples show that for foliations with transversally linear connection and for conformal foliations the similar statements are not true in general.

**Key Words:** Riemannian foliation, Ehresmann connection, local stability of a leaf, minimal set

## REFERENCES

1. R. Hermann, “The differential geometry of foliations”, *Ann. of Math.*, **72**:3 (1960), 445–457.
2. B. Reinhart, “Foliated manifolds with bundle-like metrics”, *Ann. of Math.*, **69**:3 (1959), 119–132.
3. A. Haefliger, “Pseudogroups of local isometries”, *Res. Notes in Math.*, **131** (1985), 174–197.
4. P. Molino, *Riemannian foliations. Progress in Math. Vol. 73*, Boston; Basel, Birkhauser Boston, 1988, 339 p.
5. N. Zhukova, “On the stability of leaves of Riemannian foliations”, *Ann. Global Anal. and Geom.*, **5**:3 (1987), 261–271.
6. N. I. Zhukova, “Local and global stability of leaves os conformal foliations”, *Foliations 2012. Proceedings of the International Conference. Singapur, Word Scientific Press*, 2013, 215–233.
7. E. Salem, “Riemannian foliations and pseudogroups of isometries”, *Application D in [4]*, 265–296.
8. I. Moerdijk, J. Mrcun, *Introduction to foliations and Lie groupoids. Cambridge studies in advanced mathematics. Vol. 91*, New York, Cambridge University Press, 2003, 173 p.
9. N. I. Zhukova, “Global attractors of complete conformal foliations”, *Sbornik: Mathematics*, **203**:3 (2012), 380–405.

<sup>1</sup>**Nina I. Zhukova**, Professor, Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (25/12, Bolshaya Pecherskaya St., Nizhni Novgorod 603155, Russia), Dr.Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-4553-559X>, [nzhukova@hse.ru](mailto:nzhukova@hse.ru)



10. N. I. Zhukova, “Minimal sets of Cartan foliations”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **256**:1 (2007), 105–135.
11. I. Tamura, *Topology of foliations: an introduction. Translations of Math. Monographs. Vol. 87*, Providence, Rhode Island, AMS, 1992, 317 p.
12. R. A. Blumenthal, J. J. Hebda, “Ehresmann connections for foliations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:4 (1984), 597–611.

*Submitted 14.09.2018*

УДК 517.938.5, 512.721

## Современное изложение классификации грубых преобразований окружности

© А. Е. Колобянина<sup>1</sup>, Е. В. Ноздринова<sup>2</sup>, О. В. Починка<sup>3</sup>

**Аннотация.** В настоящей работе авторы излагают решение проблемы топологической классификации грубых преобразований окружности в канонической постановке с использованием современных методов и подходов. Современная теория динамических систем под полной топологической классификацией понимает нахождение топологических инвариантов, доказательство полноты множества найденных инвариантов и построение по заданному множеству топологических инвариантов стандартного представителя. Именно, в первой теореме данной работы устанавливается тип периодических данных грубых преобразований окружности, во второй теореме — необходимые и достаточные условия их сопряженности, состоящие в совпадении периодических данных и чисел вращения, в третьей теореме допустимый набор параметров реализуется грубым преобразованием окружности. При доказательстве теорем мы предполагаем известными результаты по локальной топологической классификации гиперболических периодических точек, а также результаты о глобальном представлении объемлющего многообразия в виде объединения инвариантных многообразий периодических точек.

**Ключевые слова:** грубые преобразования окружности, топологическая классификация

### 1. Введение

Нижний Новгород (ранее-Горький) по праву можно считать местом рождения гиперболической теории. В 1937 г. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин [1] ввели понятие *грубой* системы дифференциальных уравнений на плоскости. По определению в таких системах решения не меняют качественного поведения при  $C^1$  малых изменениях правых частей уравнений. Оказалось, что грубые системы имеют весьма лаконичное описание: состояния равновесия и предельные циклы являются гиперболическими, их число конечно, и нет траекторий, идущих из седла в седло. Представителем горьковской школы А. Г. Майером [2] было введено понятие грубости для динамических систем с дискретным временем (каскадов) на окружности. Из его результатов следует, что грубые каскады на окружности, как и потоки на плоскости, типичны и имеют достаточно ясную динамику. А именно, грубый каскад имеет только конечное число периодических точек, причем каждая такая точка является гиперболической.

В 1959 г. М. Пейшото [3] распространил результаты А. А. Андропова и Л. С. Понтрягина на произвольные ориентируемые замкнутые поверхности. При этом М. Пейшото

<sup>1</sup>Колобянина Анна Евгеньевна, студентка образовательной программы "Математика ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5312-4478>, [anayakolobyaynina@mail.ru](mailto:anayakolobyaynina@mail.ru)

<sup>2</sup>Ноздринова Елена Вячеславовна, стажер-исследователь лаборатории Топологических методов в динамике, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5209-377X>, [maati@mail.ru](mailto:maati@mail.ru)

<sup>3</sup>Починка Ольга Витальевна, заведующая лабораторией Топологических методов в динамике, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru)

модифицировал понятие грубости, опустив требование близости к тождественному отображению для гомеоморфизма, сопрягающего динамику близких систем. Новое понятие "*структурная устойчивость*" стало более употребимым в теории динамических систем. Результат М. Пейшото по своей формулировке дословно повторяет критерий грубости Андронова-Понтрягина. Отметим, что М. Пейшото передоказал часть результатов А.Г. Майера, не зная о его работе.

Действительно, статья [2] была напечатана в малодоступном журнале "Записки горьковского государственного университета" и до сих пор многие отечественные и зарубежные математики не знают о ее существовании, а также о том, что А. Г. Майер был первым, кто классифицировал грубые диффеоморфизмы на окружности. Это была одна из пионерских работ по топологической классификации динамических систем.

С тех пор гиперболическая теория получила колоссальное развитие. В частности, Ч. Мане [4] и К. Робинсоном [5] получен критерий структурной устойчивости для произвольных диффеоморфизмов на многообразиях. С. Смейлом, Дж. Палисом, В. ди Мелу [6], [7], [8], [9] была стройная теория простейших структурно устойчивых систем, так называемых *систем Морса-Смейла*, включающая и вопросы их классификации (см. также [10] для систематизированного изложения).

Современная теория динамических систем под полной топологической классификацией некоторого класса  $G$  динамических систем понимается решение следующих задач:

- нахождение топологических инвариантов динамических систем из класса  $G$ ;
- доказательство полноты множества найденных инвариантов, то есть доказательство того, что совпадение множеств топологических инвариантов является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности (сопряженности) двух динамических систем из  $G$ ;
- реализация, то есть построение по заданному множеству топологических инвариантов стандартного представителя, принадлежащего  $G$ .

Заметим, что классификационные результаты в работе А. Г. Майера явно не выделялись — они были частью доказательства грубости и типичности диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности; не решалась и задача реализации. В настоящей работе авторам хотелось бы изложить решение проблемы топологической классификации грубых преобразований окружности именно в такой, канонической, постановке с использованием современных методов и подходов.

## 2. Периодические данные грубых преобразований окружности

Прежде всего напомним, что окружность  $S^1$  является единственным замкнутым (компактным без края) одномерным многообразием и гомеоморфна стандартной единичной окружности

$$\mathbb{S}^1 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Нас будут интересовать классы эквивалентности диффеоморфизмов  $f : S^1 \rightarrow S^1$  относительно отношения топологической сопряженности: диффеоморфизмы  $f, f' : S^1 \rightarrow S^1$  называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм  $h : S^1 \rightarrow S^1$  такой, что  $hf = f'h$ . Более того, мы будем изучать *грубые (структурно устойчивые)* диффеоморфизмы, то есть те, для которых  $C^1$ —близкие (по координатно и по производной) к ним диффеоморфизмы принадлежат одному и тому же классу эквивалентности.

А. Г. Майер [2] пришел к выводу, что грубые диффеоморфизмы (обозначим их множество через  $G$ ) имеют очень простую динамику, которая с современной точки зрения может быть описана следующим предложением (см., например, [10]).

**Предложение 2.1** Пусть  $f \in G$ . Тогда

1)  $f$  имеет конечное (не меньшее двух) число периодических точек  $p$ , то есть точек, для которых существует натуральное число  $m_p$  такое, что  $f^{m_p}(p) = p$  и  $f^j(p) \neq p$  для любого целого  $0 < j < m_p$  (обозначим через  $Per(f)$  множество периодических точек диффеоморфизма  $f$ );

2) в окрестности  $U_p$  точки  $p$ , являющейся компонентой связности множества  $S^1 \setminus (Per(f) \setminus p)$ , диффеоморфизм  $f^{m_p}$  топологически сопряжен либо с растяжением

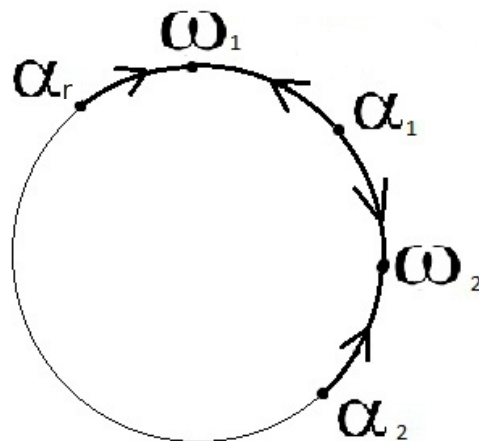
$$a_{\pm}(x) = \pm 2x : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

(в этом случае точка  $p$  называется источником, а окрестность  $U_p$  — его неустойчивым многообразием  $W_p^u$ ), либо со сжатием

$$a_{\pm}^{-1}(x) = \pm x/2 : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

(в этом случае точка  $p$  называется стоком, а окрестность  $U_p$  — его устойчивым многообразием  $W_p^s$ ).

Непосредственным следствием такого описания грубого преобразования окружности  $f$  является тот факт, что множество  $Per(f)$  содержит одинаковое число (обозначим его через  $r$ ) источников и стоков, которые чередуются на окружности, а фазовый портрет  $f$  с точностью до периодичности имеет вид, изображенный на рис. 2.1, где  $\omega_1, \dots, \omega_r$  — стоки;  $\alpha_1, \dots, \alpha_r$  — источники. Компоненты связности множества  $W_{\omega_i}^s \setminus \omega_i$  называются устойчивыми сепаратрисами стока  $\omega_i$ , а компоненты связности множества  $W_{\alpha_i}^u \setminus \alpha_i$  — неустойчивыми сепаратрисами источника  $\alpha_i$ .



Р и с у н о к 2.1

Фазовый портрет грубого преобразования окружности

Будем считать окружность ориентированной по ходу часовой стрелки и называть ориентацию на дуге  $\gamma \subset S^1$  *положительной* (*отрицательной*), если она совпадает (не совпадает) с ориентацией окружности.

Напомним, что гомеоморфизм  $g : S^1 \rightarrow S^1$  называется *сохраняющим* (*меняющим*) *ориентацию*, если для любых точек  $a, b, c \in S^1$  таких, что точка  $b$  лежит на положительно

ориентированной дуге  $[a, c] \subset S^1$ , следует, что точка  $g(b)$  лежит на положительно (отрицательно) ориентированной дуге  $[g(a), g(c)]$ .

Разобьем множество  $G$  на два подкласса  $G_+$  и  $G_-$ , состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно.

Непосредственным следствием определения ориентируемости отображения и предложения 2.1 являются следующие факты.

### С л е д с т в и е 2.1

1. Любой диффеоморфизм  $f \in G_-$  имеет неподвижную точку.
2. Любой диффеоморфизм  $f \in G_+$  ( $f \in G_-$ ) на многообразии  $W_{\omega_i}^s$  топологически сопряжен посредством некоторого гомеоморфизма  $h_{\omega_i} : W_{\omega_i}^s \rightarrow \mathbb{R}$  диффеоморфизму  $a_+^{-1}$  ( $a_-^{-1}$ ) и на многообразии  $W_{\alpha_i}^u$  топологически сопряжен посредством некоторого гомеоморфизма  $h_{\alpha_i} : W_{\alpha_i}^u \rightarrow \mathbb{R}$  диффеоморфизму  $a_+$  ( $a_-$ ).

В следующей теореме уточняется структура периодических данных диффеоморфизмов класса  $G$ .

### Т е о р е м а 2.1

1. Для каждого диффеоморфизма  $f \in G_+$  множество  $Per(f)$  состоит из  $2n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  периодических орбит, каждая из которых имеет период  $k$ .
2. Для каждого диффеоморфизма  $f \in G_-$  множество  $Per(f)$  состоит из  $2q$ ,  $q \in \mathbb{N}$  периодических точек, две из которых являются неподвижными, а другие имеют период 2.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $f \in G$  и периодические точки диффеоморфизма  $f$  занумерованы, как на рис. 2.1. Проиндексируем сепаратрисы диффеоморфизма  $f$  следующим образом: обозначим сепаратрису, ограниченную точками  $\omega_i$  и  $\alpha_i$ , через  $\ell_{2i-1}$ , а сепаратрису, ограниченную точками  $\alpha_i$  и  $\omega_{i+1}$ , через  $\ell_{2i}$  (см. рис. 2.2).

Далее рассмотрим два случая а) диффеоморфизм  $f$  имеет хотя бы одну неподвижную точку, б) все периодические точки диффеоморфизма  $f$  имеют период, больший единицы.

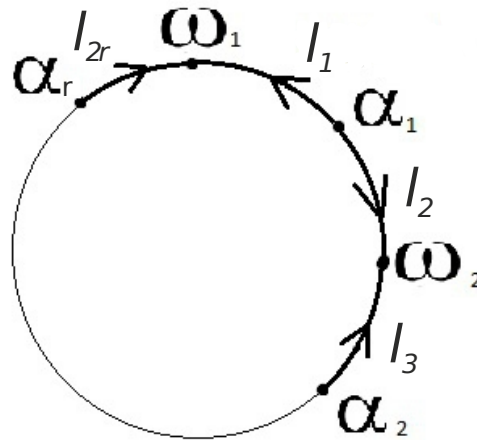
В случае а) положим для определенности, что неподвижной является точка  $\omega_1$  (этого всегда можно добиться перенумерацией точек или переходом к диффеоморфизму  $f^{-1}$ ). В силу следствия 2.1 возможны два подслучая: а+) диффеоморфизм  $f|_{W_{\omega_1}^s}$  топологически сопряжен диффеоморфизму  $a_+^{-1}$  и  $f \in G_+$ ; либо а-) диффеоморфизм  $f|_{W_{\omega_1}^s}$  топологически сопряжен диффеоморфизму  $a_-^{-1}$  и  $f \in G_-$ .

В случае а+) сепаратриса  $\ell_1$  неподвижна и, из условия, неподвижной является точка  $\alpha_1$ . Аналогичные рассуждения в окрестности  $\alpha_1$  приводят к тому, что неподвижной является точка  $\omega_2$ , и т. д. Следовательно, все периодические точки диффеоморфизма  $f$  являются неподвижными.

В случае а-) сепаратриса  $\ell_1$  имеет период 2. Тогда точка  $\alpha_1$  либо неподвижна, и в этом случае  $f$  — меняющий ориентацию диффеоморфизм "источник-сток" либо имеет период 2 и  $f(\alpha_1) = \alpha_r$ . Продолжая рассуждения в последнем случае, получим, что точка  $\omega_2$  либо неподвижная, либо имеет период 2, и т. д. Поскольку на ориентированной дуге  $[\alpha_1, \alpha_n] \subset S^1$  меняющий ориентацию диффеоморфизм  $f$  имеет в точности одну неподвижную точку, то, либо сток  $\omega_q$ ,  $q > 1$ , либо источник  $\alpha_q$  окажутся неподвижными, а все остальные периодические точки, кроме  $\omega_1$ , будут иметь период 2.

В случае б), согласно следствию 2.1,  $f \in G_+$ . По предположению, все периодические точки  $f$  имеют период, больший единицы. Обозначим через  $k$  наименьший из этих периодов. Положим для определенности, что точка  $\omega_1$  имеет период  $k$  (этого всегда можно добиться перенумерацией точек или переходом к диффеоморфизму  $f^{-1}$ ). Положим  $g = f^k$ .

Тогда  $g \in G_+$ , и точка  $\omega_1$  является неподвижной точкой диффеоморфизма  $g$ . Применяя рассуждения пункта а+), получим, что все периодические точки диффеоморфизма  $g$  являются неподвижными. Из условия минимальности периода  $k$  следует, что все периодические точки диффеоморфизма  $f$  имеют период  $k$ .



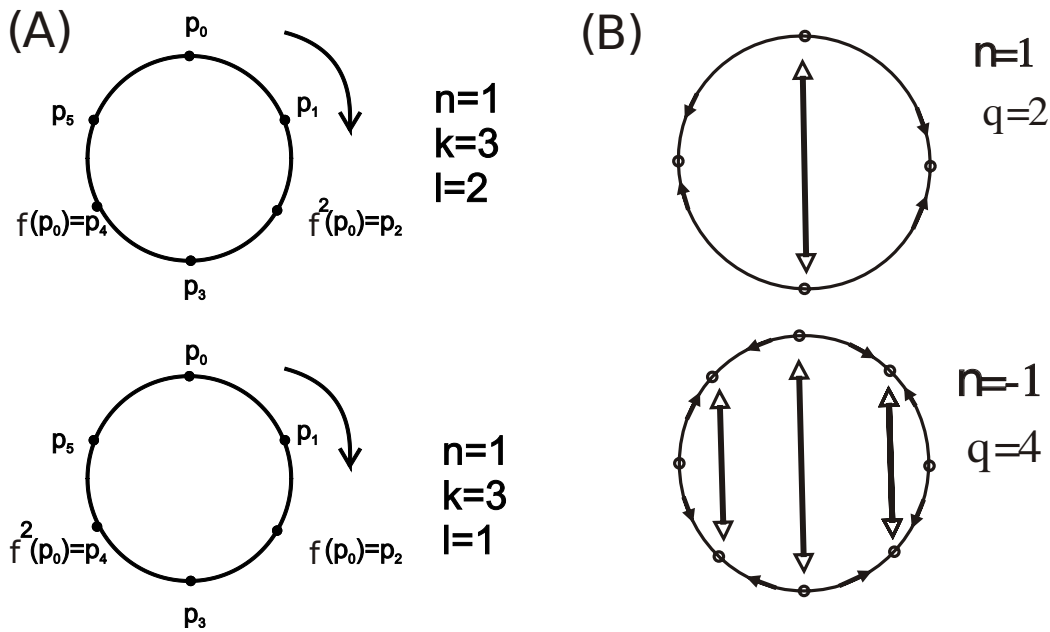
Р и с у н о к 2.2

Нумерация сепатрис диффеоморфизма  $f \in G$

### 3. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности грубых преобразований окружности

Пусть  $f \in G_+$ . Пронумеруем периодические точки множества  $Per(f)$ :  $p_0, p_1, \dots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$  начиная с произвольной периодической точки  $p_0$  по часовой стрелке, тогда существует целое число  $l$  такое, что  $f(p_0) = p_{2nl}$ , причем  $l = 0$  для  $k = 1$ ,  $l \in \{1, \dots, k-1\}$  для  $k > 1$ , и числа  $(k, l)$  являются взаимно простыми. Заметим, что  $l$  не зависит от выбора точки  $p_0$  (см. рис. 3.1 (А)).

Для  $f \in G_-$  положим  $\nu = -1$ ;  $\nu = 0$ ;  $\nu = +1$ , если его неподвижные точки являются источниками; стоком и источником; стоками соответственно. Заметим, что  $\nu = 0$ , если  $q$  — нечетное и  $\nu = \pm 1$ , если  $q$  — четное (см. рис. 3.1 (В)).



Р и с у н о к 3.1

(А) диффеоморфизм из класса  $G_+$ ; (В) диффеоморфизм из класса  $G_-$

Следующий результат позволяет получить необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов класса  $G$ .

### Т е о р е м а 3.1

1. Диффеоморфизмы  $f; f' \in G_+$  с параметрами  $n, k, l; n', k', l'$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда  $n = n', k = k'$  и верно одно из следующих утверждений:

- $l = l'$  (при этом если  $l \neq 0$ , то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию),
- $l = k' - l'$  (при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию).

2. Диффеоморфизмы  $f; f' \in G_-$  с параметрами  $q, \nu; q', \nu'$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда  $q = q'$  и  $\nu = \nu'^4$ .

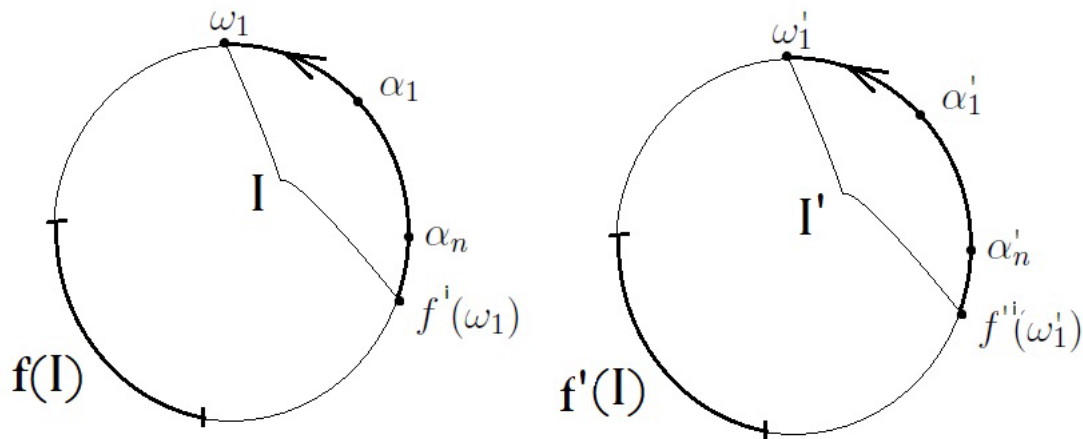
**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Необходимость условий теоремы 3.1 является непосредственным следствием свойства сопрягающего гомеоморфизма сохранять устойчивые и неустойчивые многообразия периодических точек и их период. Докажем достаточность отдельно в каждом классе  $G_+$  и  $G_-$ .

Пусть  $f, f' \in G_+$ ,  $n = n', k = k'$  и верно одно из следующих утверждений:

- $l = l'$ ,
- $l = k' - l'$ .

Обозначим через  $I$  замыкание компоненты связности множества  $S^1 \setminus (\bigcup_{j=0}^{k-1} f^j(\omega_1))$ , являющееся ориентированной дугой с начальной точкой  $\omega_1$ . Конец этой дуги совпадает с точкой  $f^i(\omega_1)$  для некоторого  $i \in \{0, \dots, k-1\}$ . Внутренности интервалов  $I, f(I), \dots, f^{k-1}(I)$  попарно не пересекаются и  $S^1 = \bigcup_{j=0}^{k-1} f^j(I)$ . Таким образом, полуинтервал  $\dot{I} = I \setminus f^i(\omega_1)$  содержит ровно  $2n$  периодических точек, по одной из каждой орбиты (см. рис. 3.2).

<sup>4</sup>Именно в таком виде необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов класса  $G$  были впервые сформулированы (без доказательства) в работе [11].



Р и с у н о к 3.2

Иллюстрация к построению сопрягающего гомеоморфизма

В случае  $l = l'$  отрезок  $I'$  для диффеоморфизма  $f'$  строится аналогичным образом, а в противном случае так, что  $\omega_1$  является его конечной точкой. Далее будем предполагать, что  $l = l'$ ; в противном случае рассуждения аналогичны.

Построим гомеоморфизм  $h_i : I \rightarrow I'$ , сопрягающий диффеоморфизмы  $f^k|_I$  и  $f'^k|_{I'}$ . С этой целью, для  $i \in \{1, \dots, n\}$  положим

$$h_{\ell_{2i-1}} = h_{\omega'_i}^{-1} h_{\omega_i} : \ell_{2i-1} \rightarrow \ell'_{2i-1}, \quad h_{\ell_{2i}} = h_{\omega'_{i+1}}^{-1} h_{\omega_{i+1}} : \ell_{2i} \rightarrow \ell'_{2i}.$$

Тогда гомеоморфизм  $h_i$  совпадает с  $h_{\ell_{2i-1}}$  на  $\ell_{2i-1}$ , с  $h_{\ell_{2i}}$  — на  $\ell_{2i}$ , и  $h(\omega_i) = \omega'_i$ ,  $h(\alpha_i) = \alpha'_i$ . Продолжим гомеоморфизм  $h$  на всю окружность следующим образом: для  $y \in f^j(I)$ ,  $j \in \{0, \dots, k-1\}$  положим

$$h(y) = f'^j(h_I(f^{-j}(y))).$$

Пусть теперь  $f, f' \in G_-$ ,  $q = q'$  и  $\nu = \nu'$ . В этом случае отрезок  $I$  ограничен двумя неподвижными точками, гомеоморфизм  $h_I$  строится аналогично сохраняющему ориентацию случаю, сопрягает диффеоморфизмы  $f^2|_I$  и  $f'^2|_{I'}$  и продолжается на всю окружность формулой  $h(y) = f'(h_I(f^{-1}(y)))$  для  $y \in S^1 \setminus I$ .

## 4. Реализация грубых преобразований окружности

Следующая теорема реализации является заключительным этапом топологической классификации и гарантирует существование грубого диффеоморфизма окружности с любым допустимым набором параметров.

### Т е о р е м а 4.1

1. Для любой тройки целых чисел  $n, k, l$  такой, что  $n, k \in \mathbb{N}$ ,  $l = 0$  для  $k = 1$ ,  $l \in \{1, \dots, k-1\}$  и является взаимно простым с  $k$  для  $k > 1$ , существует грубый сохраняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с заданными параметрами.

2. Для любой пары целых чисел  $q, \nu$  такой, что  $\nu = 0$ , если  $q$  — нечетное; и  $\nu = \pm 1$ , если  $q$  — четное, существует грубый меняющий ориентацию диффеоморфизм окружности с заданными параметрами.



**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Для построения диффеоморфизмов окружности с заданными периодическими данными используем универсальное накрытие окружности прямой:

$$p(x) = e^{2\pi i x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1.$$

Заметим, что для любого  $r \in \mathbb{N}$  диффеоморфизм

$$G_r(x) = x + \frac{1}{4\pi r} \sin(2\pi r x) : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

посредством  $p$  проектируется на окружность диффеоморфизмом  $g_r : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , имеющим ровно  $2r$  неподвижных точек, половина из которых является стоками, а другая половина — источниками. Для любого  $\theta \in \mathbb{R}$  диффеоморфизм

$$\Psi_\theta(x) = x + \theta : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

посредством  $p$  проектируется на окружность диффеоморфизмом  $\psi_\theta : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , являющимся поворотом на угол  $2\pi\theta$ . Наконец, диффеоморфизм

$$W(x) = -x : \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$$

посредством  $p$  проектируется на окружность диффеоморфизмом  $w : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ , являющимся отражением относительно оси  $OX$ .

Тогда диффеоморфизм  $f \in G_+$  с параметрами  $n, k, l$  реализуется композицией  $\psi_{\frac{l}{k}} \circ g_{nk}$ , то есть является проекцией в силу  $p$  диффеоморфизма

$$F(x) = x + \frac{1}{4\pi nk} \sin(2\pi nkx) + \frac{l}{k}.$$

Диффеоморфизм  $f \in G_-$  с параметрами  $q, -1$  или  $q, 0$  реализуется композицией  $w \circ g_q$ , то есть является проекцией в силу  $p$  диффеоморфизма

$$F(x) = -x - \frac{1}{4\pi q} \sin(2\pi qx).$$

Диффеоморфизм  $f \in G_-$  с параметрами  $q, +1$  является проекцией в силу  $p$  диффеоморфизма

$$F(x) = -x + \frac{1}{4\pi q} \sin(2\pi qx).$$

*Благодарности.* Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 18-31-00022, в рамках проекта ЦФИ НИУ ВШЭ в 2018 г.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247–250.
2. А. Г. Майер, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Ученые записки Горьк. гос. ун-та.*, **12** (1939), 215–229.
3. М. М. Peixoto, “On structural stability”, *Ann. Math.*, **69** (1959), 199–222.

А. Е. Колобянина, Е. В. Ноздринова, О. В. Починка. Современное изложение...

4. Mañé R., “A proof of  $C^1$  stability conjecture”, *Publ. Math. IHES.*, **66** (1988), 161–210.
5. Robinson C., “Structural stability of  $C^1$  diffeomorphisms”, *J. Diff. Equat.*, **22**:1 (1976), 28–73.
6. С. Смейл, “Дифференцируемые динамические системы”, *Успехи мат. наук*, **25** (1970), 113–185.
7. J. Palis, “On Morse-Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404.
8. J. Palis, S. Smale, “Structural stability theorems”, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 223–231.
9. Ж. Палис, В. ди Мелу, *Геометрическая теория динамических систем*, Мир, 1998, 301 с.
10. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer International Publishing Switzerland, 2016, 313 p.
11. V. Grines, Yu. Levchenko, V. Medvedev, O. Pochinka, “The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets”, **28** (2015), 4081–4102.

*Поступила 16.08.2018*

MSC2010 05C62, 14J80, 37D15

# Classification of rough transformations of a circle from a modern point of view

© A. E. Kolobyana<sup>1</sup>, E. V. Nozdrinova<sup>2</sup>, O. V. Pochinka<sup>3</sup>

**Abstract.** In this paper the authors use modern methods and approaches to present a solution to the problem of the topological classification of circle's rough transformations in canonical formulation. In the modern theory of dynamical systems such problems are understood as the complete topological classification: finding topological invariants, proving the completeness of the set of invariants found and constructing a standard representative from a given set of topological invariants. Namely, in the first theorem of this paper the type of periodic data of circle's rough transformations is established. In the second theorem necessary and sufficient conditions of their conjugacy are proved. These conditions mean coincidence of periodic data and rotation numbers. In the third theorem the admissible set of parameters is implemented by a rough transformation of a circle. While proving the theorems, we assume that the results on the local topological classification of hyperbolic periodic points, as well as the results on the global representation of the ambient manifold as a union of invariant manifolds of periodic points, are known.

**Key Words:** rough transformations of a circle, topological classification

## REFERENCES

1. A.A. Andronov, L.S. Pontryagin, "Rough systems", *Report of the Academy of Sciences of the USSR.*, **14**:5 (1937), 247–250 (In Russ.).
2. A.G. Mayer, "Coarse transformation of a circle into a circle", *Scientific notes Gorky. state. University.*, **12** (1939), 215–229 (In Russ.).
3. M. M. Peixoto, "On structural stability", *Ann. Math.*, **69** (1959), 199–222 (In Russ.).
4. R. Mañé, "A proof of  $C^1$  stability conjecture", *Publ. Math. IHES.*, **66** (1988), 161–210 (In Russ.).
5. C. Robinson, "Structural stability of  $C^1$  diffeomorphisms", *J. Diff. Equat.*, **22**:1 (1976), 28–73 (In Russ.).
6. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:1 (1967), 741–817 (In Russ.).
7. J. Palis, "On Morse-Smale dynamical systems", *Topology*, **8**:4 (1969), 385–404 (In Russ.).
8. J. Palis, S. Smale, "Structural stability theorems", *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math.*, **14** (1970), 223–231 (In Russ.).

<sup>1</sup>**Anna E. Kolobyana**, Student of the educational program «Mathematics», National Research University Higher School of Economics ( 25/12, Bolshaya Pecherskaya St., Nizhniy Novgorod, 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5312-4478>, [anyakolobyana@mail.ru](mailto:anyakolobyana@mail.ru)

<sup>2</sup>**Elena V. Nozdrinova**, Trainee Researcher, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (Bolshaya Pecherskaya St., Nizhniy Novgorod, 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5209-377X>, [maati@mail.ru](mailto:maati@mail.ru)

<sup>3</sup>**Olga V. Pochinka**, Laboratory Head, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (Bolshaya Pecherskaya St., Nizhniy Novgorod, 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6587-5305>, [olga-pochinka@yandex.ru](mailto:olga-pochinka@yandex.ru)

9. J. Palis, W. de Melo, *Geometric theory of dynamical systems*, New York, Heidelberg, Berlin, Springer-Verlag, 1982 (In Russ.), 301 c.
10. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer International Publishing Switzerland, 2016 (In Russ.), 313 c.
11. V. Grines, Yu. Levchenko, V. Medvedev, O. Pochinka, “The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets”, **28** (2015), 4081–4102 (In Russ.).

*Submitted 16.08.2018*

УДК 517.9

# О числе модулей градиентных потоков функции высоты поверхности

© В. Е. Круглов<sup>1</sup>

**Аннотация.** В 1978 г. Ж. Палисом было открыто наличие континуума топологически не сопряженных потоков (каскадов) в окрестности системы с гетероклиническим касанием — наличие модулей. В. Ди Мелу и С. Ван Стрин в 1987 г. охарактеризовали класс диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей. Оказалось, что условие конечности модулей накладывает ограничение на длину цепочки седел, участвующих в гетероклиническом касании: таких седел не может быть больше трех. Удивительным образом подобного эффекта не обнаруживается для непрерывных динамических систем. В настоящей работе рассматриваются градиентные потоки функции высоты вертикальной ориентируемой поверхности рода  $g > 0$ . Такие потоки обладают цепочкой, состоящей из  $2g$  седловых точек. В настоящей работе устанавливается, что число модулей таких потоков равно  $2g - 1$ . Этот результат является непосредственным следствием достаточных условий топологической сопряженности потоков в окрестности таких систем, установленных в данной статье. Полным топологическим инвариантом топологической эквивалентности для таких систем является четырехцветный граф, несущий информацию о взаимном расположении ячеек. Оснащение ребер графа аналитическими параметрами — модулями, связанными с седловыми связками — дает достаточные условия топологической сопряженности потоков рассматриваемого класса

**Ключевые слова:** модуль устойчивости, градиентный поток, топологическая сопряженность, четырехцветный граф, топологический инвариант.

## 1. Введение и формулировка результатов

*Топологическая сопряженность* двух динамических систем означает существование гомеоморфизма, переводящего траектории одной системы в траектории другой с сохранением направления и времени движения. Для непрерывных систем (потоков) это отношение отличается от *топологической эквивалентности*, которая не требует сохранения времени.

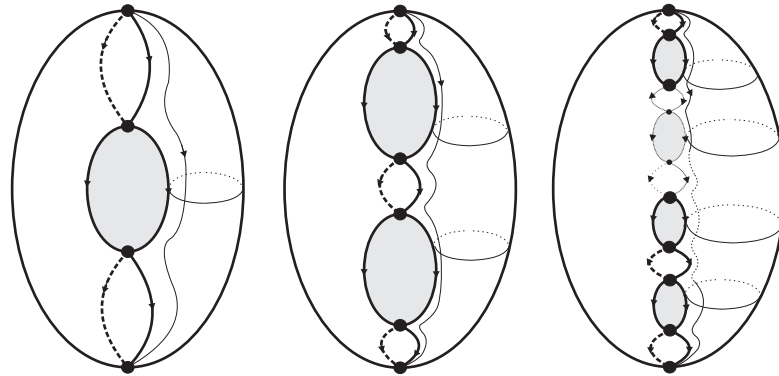
В 1978 г. Ж. Палисом [1] было открыто наличие континуума топологически не сопряженных динамических систем в окрестности системы с гетероклиническим касанием на поверхности. Именно он рассмотрел окрестность орбиты гетероклинического касания и показал, что для топологической сопряженности систем в двух таких окрестностях необходимо совпадение параметров, выражающихся через собственные значения седел, сепаратрисы которых касаются. Таким образом, любая окрестность системы с касанием в пространстве динамических систем содержит бесконечное множество попарно различных классов топологической сопряженности. Параметры, с помощью которых описываются классы в некоторой такой окрестности, называются *модулями топологической сопряженности*.

В. Ди Мелу и С. Ван Стрин [2] в 1987 г. охарактеризовали класс диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей. Оказалось, что условие конечности модулей

<sup>1</sup>**Круглов Владислав Евгеньевич**, аспирант кафедры фундаментальной математики, стажер-исследователь лаборатории «Топологические методы в динамике», НИУ ВШЭ, (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д.25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, [kruglovslava21@mail.ru](mailto:kruglovslava21@mail.ru)

накладывает ограничение на длину цепочки седел, участвующих в гетероклиническом касании: таких седел не может быть больше трех. Удивительным образом подобного эффекта не обнаруживается для непрерывных динамических систем.

В настоящей работе речь пойдет о классе  $G$  градиентных потоков  $f^t : S_g \rightarrow S_g$  класса гладкости  $C^2$ , порожденных градиентным векторным полем функции высоты вертикальной ориентируемой поверхности  $S_g$  рода  $g > 0$ . Неблуждающее множество таких систем состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек: одного источника, одного стока и  $2g$  седловых точек, образующих цепочку, каждый элемент которой соединяется со следующим двумя седловыми сепаратрисами (см. Рис. 1.1).



Р и с у н о к 1.1

Градиентные потоки функции высоты

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема.

**Т е о р е м а 1.1** *Любой поток  $f^t : S_g \rightarrow S_g$  из класса  $G$  имеет в точности  $2g - 1$  модулей.*

## 2. Топологическая эквивалентность $\Omega$ -устойчивых потоков поверхности

В данном разделе приводятся необходимые для дальнейшего изложения результаты по топологической классификации (относительно топологической эквивалентности)  $\Omega$ -устойчивых потоков  $f^t$ , заданных на замкнутой поверхности  $S$ .

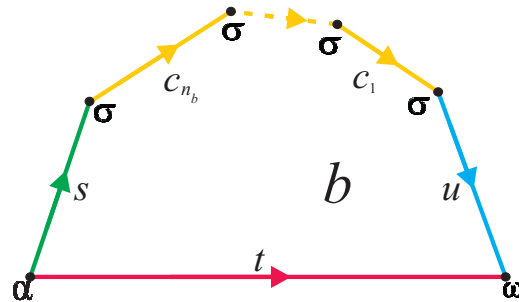
Согласно работе К. Пью и М. Шуба [3], неблуждающее множество  $\Omega_{f^t}$  потока  $f^t$  состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек, которые не образуют циклов, то есть множеств неподвижных точек  $q_1, q_2, \dots, q_k, q_{k+1} = q_1$  со свойством  $W_{q_i}^u \cap W_{q_{i+1}}^s \neq \emptyset, i = 1, \dots, k$ , где  $W_{q_i}^s$  и  $W_{q_i}^u$  — устойчивое и неустойчивое многообразия точки  $q_i$  соответственно.

Обозначим через  $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$  множества неподвижных точек потока  $f^t$ , имеющих размерность неустойчивого многообразия 0, 1, 2, т. е. стоков, седел, источников соответственно. Везде далее будем предполагать, что множество  $\Omega_{f^t}^1$  не пусто, поскольку в противном случае все потоки принадлежат одному классу топологической сопряженности.

Назовем компоненту связности множества  $\tilde{S} = S \setminus \left( \bigcup_{p \in \Omega_{f^t}^1} (cl W_p^u \cup cl W_p^s) \right)$  ячейкой. Согласно [4], любая ячейка  $J$  потока  $f^t$  содержит единственный сток  $\omega$  и источник  $\alpha$  в замыкании.

Выберем в каждой ячейке  $J$   $t$ -кривую, т. е. траекторию, соединяющую источник со стоком. Обозначим через  $\mathcal{T}$  объединение  $t$ -кривых потока  $f^t$ . Будем называть  $s$ -кривой

связку,  $s$ -кривой и  $u$ -кривой устойчивую и неустойчивую седловую сепаратрису, не являющуюся связкой, соответственно. Назовем компоненту связности множества  $\hat{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}$  *многоугольной областью*. Согласно [4], любая многоугольная область  $b$  потока  $f^t$  гомеоморфна открытому диску, и ее граница состоит из замыканий одной  $t$ -кривой, одной  $u$ -кривой, одной  $s$ -кривой и конечного (возможно, пустого) множества  $c$ -кривых (см. Рис. 2.1). Будем называть эти кривые *цветными кривыми* и *сторонами* многоугольной области. Каждая  $c$ -кривая принадлежит границам в точности двух многоугольных областей  $b$ , поэтому ей приписывается пара ее порядковых номеров в этих областях, соответственно.

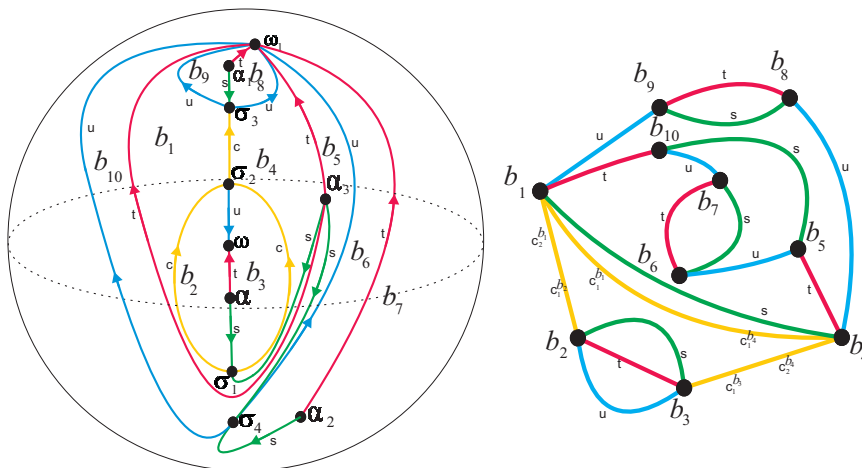


Р и с у н о к 2.1

Многоугольная область

Граф  $\Gamma_{f^t}$  с ребрами цветов  $u$ ,  $s$ ,  $t$  и  $c$  называется *четырёхцветным графом* потока  $f^t$ , если:

- каждой многоугольной области  $b$  потока  $f^t$  соответствует вершина  $b$  графа  $\Gamma_{f^t}$ ;
- каждой цветной кривой области  $b$  соответствует цветное ребро графа  $\Gamma_{f^t}$  такого же цвета;
- все  $c$ -ребра графа  $\Gamma_{f^t}$  имеют ту же пару номеров, что и соответствующие им  $c$ -кривые (см. Рис. 2.2).



Р и с у н о к 2.2

Поток из класса  $G$  и его четырехцветный граф

**Предложение 2.1** ([4], теорема 1)  $\Omega$ -устойчивые потоки поверхности топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их четырехцветные графы изоморфны посредством изоморфизма, сохраняющего цветность и нумерацию ребер.

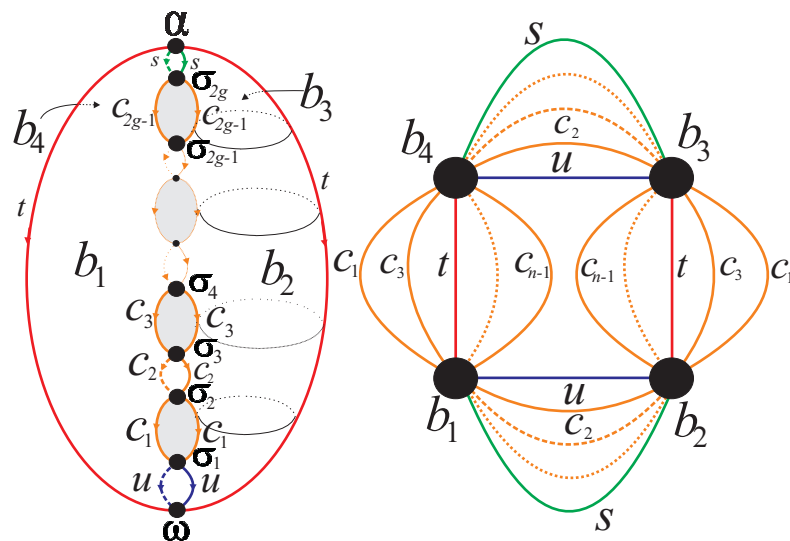
### 3. Аналитические инварианты потока из класса $G$

В этом разделе рассматривается класс  $G$  градиентных потоков  $f^t : S_g \rightarrow S_g$  класса гладкости  $C^2$ , порожденных градиентным векторным полем функции высоты вертикальной ориентируемой поверхности  $S_g$  рода  $g > 0$ . Неблуждающее множество таких систем состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек: одного источника  $\alpha$ , одного стока  $\omega$  и  $2g$  седловых точек  $\sigma_1, \dots, \sigma_{2g}$  таких, что

$$W_{\sigma_i}^s \setminus \sigma_i = W_{\sigma_{i+1}}^u \setminus \sigma_{i+1}, i = 1, \dots, 2g - 1.$$

Обозначим  $c_i$  компоненту связности множества  $W_{\sigma_i}^s \setminus \sigma_i$ .

Поток  $f^t$  не имеет циклов и, следовательно, является  $\Omega$ -устойчивым. Из результатов предыдущего раздела следует, что поток  $f^t$  имеет две ячейки и четыре многоугольные области, его четырехцветный граф изображен на Рис. 3.1.



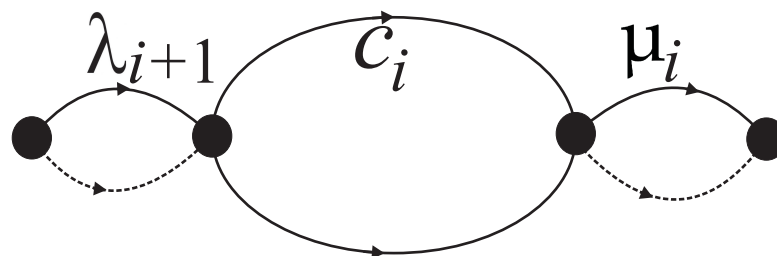
Р и с у н о к 3.1

Поток из класса  $G$  и его четырехцветный граф

Таким образом, потоки  $f^t, f^{tt} : S_g \rightarrow S_g$  из класса  $G$  имеют изоморфные графы и, следовательно, являются топологически эквивалентными. Однако из результатов Ж. Палиса [1] следует, что они не являются топологически сопряженными. Более детально.

Пусть  $\mu_i$  — положительное собственное значение и  $\lambda_i$  — отрицательное собственное значение седловой точки  $\sigma_i$  (см. Рис. 3.2). Положим

$$\theta_i = \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_i}, i = 1, \dots, 2g - 1.$$



Р и с у н о к 3.2

Связка  $c_i$ , ее седла и собственные значения



Введем аналогичные обозначения для потока  $f^t$ . Покажем, что совпадение параметров  $\theta_i, \theta'_i$  является необходимым условием топологической сопряженности потоков  $f^t, f'^t : S_g \rightarrow S_g$ , откуда будет следовать, что число модулей потока класса  $G$  не менее  $2g - 1$ .

Обозначим через  $F_{\mu_i, \lambda_i}^t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , где  $\mu_i > 0, \lambda_i < 0$  – поток на плоскости, определяемый системой

$$\begin{cases} \dot{x} = \mu_i x, \\ \dot{y} = \lambda_i y, \end{cases}$$

Заметим, что  $u_{\mu_i, \lambda_i} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x||y|^{-\frac{\mu_i}{\lambda_i}} < 1\}$  – инвариантная окрестность его седловой точки  $O(0, 0)$ .

**Предложение 3.1** ([5], лемма 2.2) Пусть  $\sigma_i$  – седловая точка потока  $f^t \in G$  с собственными значениями  $\lambda_i < 0, \mu_i > 0$ . Тогда существует инвариантная окрестность  $U_i$  седла  $\sigma_i$  и диффеоморфизм  $\zeta_i : U_i \rightarrow u_{\mu_i, \lambda_i}$ , топологически сопрягающий потоки  $f^t|_{U_i}$  и  $F_{\mu_i, \lambda_i}^t|_{u_{\mu_i, \lambda_i}}$ .

Окрестность  $U_i$  из предложения 3.1 называется *линеаризирующей окрестностью* точки  $\sigma_i$ .

Обозначим через  $(x_i, y_i)$  координаты в окрестности  $u_{\mu_i, \lambda_i}$ . Положим  $V_i^s = \zeta_i(U_i \cap U_{i+1})$  и  $V_{i+1}^u = \zeta_{i+1}(U_i \cap U_{i+1})$ . Тогда (см. рис. 3.3) отображение перехода

$$g_i = \zeta_{i+1}\zeta_i^{-1} : V_i^s \rightarrow V_{i+1}^u$$

во введенных координатах имеет вид

$$g_i(x_i, y_i) = (\delta_i(x_i, y_i), \gamma_i(x_i, y_i)) = (x_{i+1}, y_{i+1}).$$

Не уменьшая общности, будем считать, что линеаризирующие окрестности выбраны так, что

$$x_{i+1} = \delta_i(x_i, y_i) = y_i^{\frac{\mu_i+1}{\lambda_i}}.$$

Этого всегда можно добиться подходящей заменой координат.

**Лемма 3.1** <sup>2</sup> Для любой точки  $(0, y_i^0) \in V_i^s$  верно, что

$$\frac{\partial \gamma_i}{\partial y_i}(0, y_i^0) = 0, \quad \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(0, y_i^0) \neq 0.$$

**Доказательство.** По определению  $g_i(Ox_i) = Oy_{i+1}$  и, значит,  $\gamma_i(Ox_i) \equiv 0$ , откуда  $\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(x_i^0, 0) = 0$ . Поскольку  $g_i$  – диффеоморфизм, то его якобиан не равен нулю. Поскольку  $\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(x_i^0, 0) = 0$ , то  $\frac{\partial \gamma_i}{\partial y_i}(x_i^0, 0) \neq 0$ .

**Доказательство закончено.**

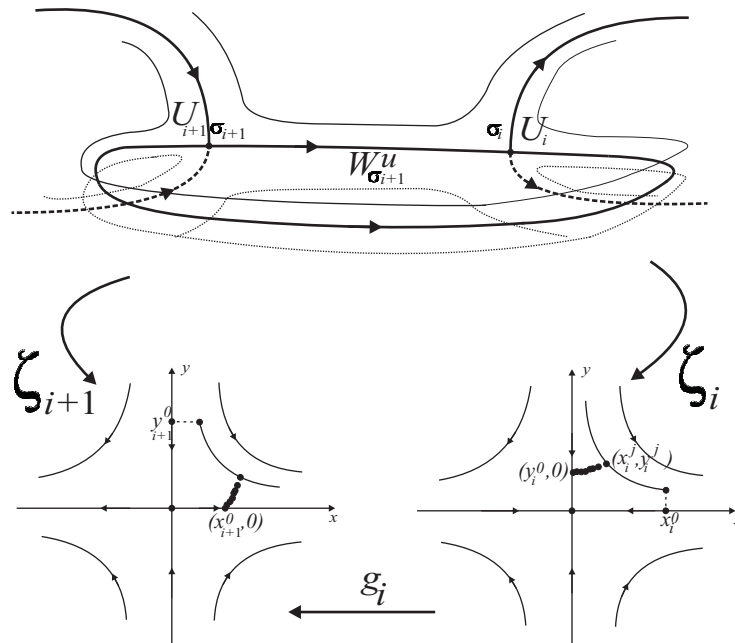
Положим

$$k_i = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(0, y_i^0).$$

**Лемма 3.2** Пусть  $(x_i^j, y_i^j) \subset V_i^s$  – последовательность точек, сходящаяся к  $(0, y_i^0)$  при  $j \rightarrow \infty$  такая, что  $x_i^j \neq 0$  (см. Рис. 3.3). Тогда  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{y_{i+1}^j}{x_i^j} = k_i$ .

<sup>2</sup>Аналогичные приведенным в этом разделе утверждения для диффеоморфизмов можно найти, например, в разделе 2 работы [6] (предложения 2.4 (пункт 1) и 2.5 (пункт 1)).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Используя формулу конечных приращений и тот факт, что  $\gamma_i(0, y_i^0) = 0$ , получим  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{y_{i+1}^j}{x_i^j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i(x_i^j, y_i^j)}{x_i^j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\gamma_i(x_i^j, y_i^j) - \gamma_i(0, y_i^j)}{x_i^j} =$   
 $= \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(\nu \cdot x_i^j, y_i^j) x_i^j}{x_i^j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(\nu \cdot x_i^j, y_i^j) = \frac{\partial \gamma_i}{\partial x_i}(0, y_i^0) = k_i.$   
**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**



Р и с у н о к 3.3

Отображение перехода

**П р е д л о ж е н и е 3.2** Пусть потоки  $f^t, f^{t'} : S_g \rightarrow S_g \in G$  топологически сопряжены. Тогда  $\theta_i = \theta'_i$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из топологической сопряженности потоков  $f^t, f^{t'}$  следует существование гомеоморфизма  $h : S_g \rightarrow S_g$  такого, что  $h \circ f^t = f^{t'} \circ h$  для любого  $t \in \mathbb{R}$ . Выберем последовательность  $(x_{i+1}^j, y_{i+1}^j) \subset V_i^u$ , как в лемме 3.2. Положим для определенности  $y_{i+1}^j, x_{i+1}^j > 0, x_i^j > 0, y_i^j > 0$ . Зафиксируем  $y_{i+1}^0 > 0, x_i^0 > 0$  (см. Рис. 3.3) и выберем времена  $t_{i+1}^j, t_i^j$  такими, что

$$y_{i+1}^0 = y_{i+1}^j \cdot e^{-\lambda_{i+1} \cdot t_{i+1}^j}, \quad x_i^0 = x_i^j \cdot e^{\mu_i \cdot t_i^j}.$$

Тогда  $x_i^0 = y_{i+1}^0 \cdot e^{\lambda_{i+1} \cdot t_{i+1}^j} \cdot k_i^j \cdot e^{\mu_i \cdot t_i^j}$ , где  $k_i^j = \frac{x_i^j}{y_{i+1}^j}$ . Откуда  $\lambda_{i+1} \cdot t_{i+1}^j + \mu_i \cdot t_i^j = \ln \frac{x_i^j}{y_{i+1}^j \cdot k_i^j}$  и, следовательно,

$$\frac{t_i^j}{t_{i+1}^j} = \frac{\ln \frac{x_i^j}{y_{i+1}^j \cdot k_i^j}}{\mu_i \cdot t_{i+1}^j} - \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_i}.$$

В силу лемм 3.1, 3.2 и того, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} t_j^{i+1} = \infty$ , получим:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{t_i^j}{t_{i+1}^j} = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{x_i^0}{y_{i+1}^0 \cdot k_i}}{\mu_i \cdot t_{i+1}^j} - \frac{\lambda_{i+1}}{\mu_i} = -\frac{\lambda_{i+1}}{\mu_i} = -\theta_i.$$

Положим  $h_i = \zeta_i' h \zeta_i^{-1}$ ,  $(x_{i+1}^j, y_{i+1}^j) = h_{i+1}(x_{i+1}^j, y_{i+1}^j)$ ,  $(0, y_{i+1}^0) = h_{i+1}(0, y_{i+1}^0)$ ,  $(x_i^0, 0) = h_i(x_i^0, 0)$  (см. Рис. 3.3). Поскольку  $h$  – сопрягающий гомеоморфизм, имеют место следующие равенства:

$$y_{i+1}^0 = y_{i+1}^j \cdot e^{-\lambda_{i+1}' \cdot t_{i+1}^j}, \quad x_i^0 = x_i^j \cdot e^{\mu_i' \cdot t_i^j}.$$

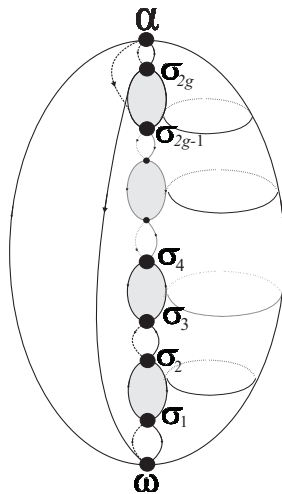
Из рассуждений, аналогичных вышеприведенным, получим, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{t_i^j}{t_{i+1}^j} = -\theta_i'$ . Таким образом,  $\theta_i = \theta_i'$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

#### 4. Топологическая сопряженность потоков в окрестности системы из класса $G$

В настоящем разделе показывается, что для двух потоков в окрестности системы из класса  $G$  достаточными условиями их топологической сопряженности являются изоморфность их цветных графов и совпадение аналитических инвариантов, из чего следует, что число модулей потока класса  $G$  не более  $2g - 1$ . Рассмотрим данное утверждение более детально.

В силу  $\Omega$ -устойчивости потока  $f^t : S_g \rightarrow S_g$  из класса  $G$  любой поток  $\phi^t$  в некоторой окрестности  $U(f^t)$  потока  $f^t$  имеет такое же, как и  $f^t$ , неблуждающее множество, по типу и количеству входящих в неблуждающее множество точек, поэтому мы сохраним обозначения этих точек. Каждый такой поток  $\phi^t$  получается из потока  $f^t$  разрушением конечного числа связок (см. Рис. 4.1) и, соответственно, является  $\Omega$ -устойчивым потоком. Таким образом, для него корректно определен четырехцветный граф  $\Gamma_{\phi^t}$  и параметры  $\theta_i$ ,  $i = 1, \dots, 2g - 1$ .



Р и с у н о к 4.1

Поток из окрестности системы из класса  $G$

**Л е м м а 4.1** Пусть  $\phi^t, \phi'^t \in U(f^t)$ . Если графы  $\Gamma_{\phi^t}, \Gamma_{\phi'^t}$  изоморфны и  $\theta_i = \theta_i'$  для всех  $i = 1, \dots, 2g - 1$ , то потоки  $\phi^t$  и  $\phi'^t$  топологически сопряжены.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно предложению 2.1, из изоморфности графов  $\Gamma_{\phi^t}$  и  $\Gamma_{\phi'^t}$  следует, что потоки топологически эквивалентны посредством некоторого гомеоморфизма  $h: S_g \rightarrow S_g$ . Положим  $p' = h(p)$  для любой точки  $p \in \Omega_{f^t}$  и  $c'_i = h(c_i)$  для любой  $c_i$ -кривой. Покажем, как модифицировать гомеоморфизм  $h$  до гомеоморфизма  $H: S_g \rightarrow$

$S_g$ , осуществляющего топологическую сопряженность. Везде далее будем использовать обозначения предыдущего раздела.

**Шаг 1.** Положим  $\bar{h}_i = \zeta'_i h \zeta_i^{-1} : u_{\mu_i, \lambda_i} \rightarrow u_{\mu'_i, \lambda'_i}$ . Не уменьшая общности, будем полагать, что  $\bar{h}_i$  сохраняет ориентацию координатных осей  $Ox, Oy$  (в противном случае можно линеаризующий гомеоморфизм заменить на его композицию с отображением симметрии относительно оси). Положим

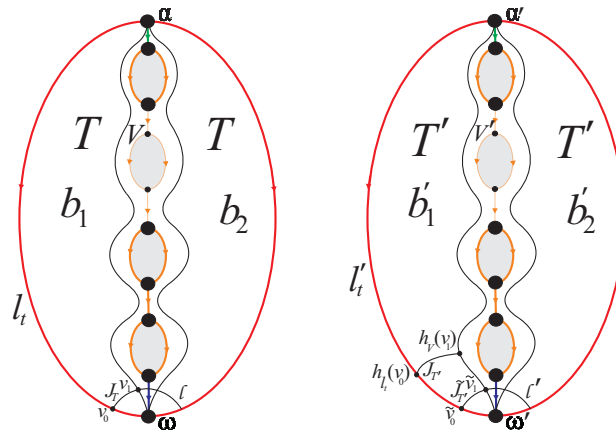
$$\rho_i = \frac{\mu'_i}{\mu_i}, \beta_i = \frac{\lambda'_i}{\lambda_i}.$$

Определим гомеоморфизм  $\bar{H}_i : u_{\mu_i, \lambda_i} \rightarrow u_{\mu'_i, \lambda'_i}$  формулой  $\bar{H}_i(\pm x, \pm y) = (\pm A_i x^{\rho_i}, \pm B_i y^{\beta_i})$ , где  $x \geq 0, y \geq 0$ ,  $A_i, B_i$  – некоторые положительные константы. Непосредственно проверяется, что при любом выборе коэффициентов гомеоморфизм  $\bar{H}_i$  сопрягает потоки  $F_{\mu_i, \lambda_i}^t$  и  $F_{\mu'_i, \lambda'_i}^t$ . Выберем константы  $A_i, B_i$  по следующему правилу:

1.  $A_1 = B_1 = 1$ ;
2.  $A_{i+1} = B_i^{\frac{\mu'_{i+1}}{\lambda_i}}$ ;
3.  $B_{i+1} = A_i \cdot \frac{k'_i}{k_i^{\rho_i}}$ , если хотя бы одна из неустойчивых сепаратрис седла  $\sigma_{i+1}$  является связкой, и  $B_{i+1} = 1$  в противном случае.

Положим  $H_i = \zeta_i'^{-1} h \zeta_i : U_i \rightarrow U'_i$ . Из условия  $\theta_i = \theta'_i$  (следовательно,  $\beta_{i+1} = \rho_i$ ) и леммы 3.2 следует, что построенные отображения совпадают на пересечениях линеаризующих окрестностей. Обозначим через  $h_V$  гомеоморфизм, построенный на объединении седловых линеаризующих окрестностей и через  $V, V'$  само это объединение у потока  $f^t, f'^t$  соответственно.

**Шаг 2.** Построим гомеоморфизм в оставшихся частях поверхности. Рассуждения аналогичны доказательству основной теоремы в [7]. Обозначим  $V_b = V \cap cl(b)$  область в  $b$ , где уже построен  $h_V$  (см. Рис. 4.2). Заметим, что  $h_V$  может быть очевидно продолжен на  $cl(V_b)$  в силу непрерывности.



Р и с у н о к 4.2

Построение гомеоморфизма в области  $T$

Обозначим  $T = cl(b) \setminus V_b$ . Аналогично –  $T'$ . Построим гомеоморфизм  $h_T : T \rightarrow T'$ .

Пусть  $\ell$  и  $\ell'$  – две измеримые замкнутые кривые без контакта, являющиеся границей некоторых окрестностей стоков  $\omega$  и  $\omega'$  соответственно (их существование следует из гиперболичности стоков), и, очевидно, общие для всех областей с  $\omega, \omega'$  соответственно в границе.

Обозначим  $t$ -кривую области  $b$  через  $l_t$  и области  $b'$  через  $l'_t$ . Пусть  $\{v_0\} = \ell \cap l_t$  и  $\{\tilde{v}_0\} = \ell' \cap l'_t$ . Построим сопрягающий гомеоморфизм  $h_{l_t}: l_t \rightarrow l'_t$  так, что если  $z = f^{t_z}(v_0)$ , то  $z' = h_{l_t}(z)$  при  $z' = f^{t_z}(\tilde{v}_0)$  (см. рис. 4.2).

Пусть  $J_T = \ell \cap T$  и пусть  $v_0, v_1$  – концы дуги  $J_T$ , при этом  $v_1 \in \partial V_b$ . Аналогично дуга  $\tilde{J}_{T'} = \ell' \cap T'$  ограничена точками  $\tilde{v}_0, \tilde{v}_1$ , принадлежащими  $l'_t, \partial V_{b'}$  соответственно. Положим  $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$  такими, что  $f^{t_0}(\tilde{v}_0) = h_{l_t}(v_0)$ ,  $f^{t_1}(\tilde{v}_1) = h_V(v_1)$  и положим  $\rho: \tilde{J}_{T'} \rightarrow [0, 1]$  – гомеоморфизм такой, что  $\rho(\tilde{v}_j) = j, j = 0, 1$ . Пусть

$$J_{T'} = \{f^{t_z}(\tilde{z}) \mid \tilde{z} \in \tilde{J}_{T'}, t_z = t_0 + (t_1 - t_0)\rho(\tilde{z})\}.$$

Зададим произвольный гомеоморфизм  $h_J: J_T \rightarrow J_{T'}$  так, что  $h_J(v_0) = h_{l_t}(v_0)$  и  $h_J(v_1) = h_V(v_1)$ . Тогда любая точка  $z$  из  $T$  определяется единственным образом точкой  $z_0$  такой, что  $\{z_0\} = \mathcal{O}_z \cap J_T$  и значением времени  $t_z \in \mathbb{R}$  таким, что  $f^{t_z}(z_0) = z$ . Определим гомеоморфизм  $h_T: T \rightarrow T'$  формулой  $h_T(f^{t_z}(z_0)) = f^{t_z}(h_J(z_0))$ . Построим итоговый гомеоморфизм  $h_b: cl(b) \rightarrow cl(b')$  так, что  $h_b|_{cl(V)} = h_V$  и  $h_b|_T = h_T$ . Он, очевидно, совпадает с гомеоморфизмами на соседних областях.

Таким образом,  $H: S_g \rightarrow S_g$  задается формулой  $H(x) = h_b$  при  $x \in b$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

*Благодарности.* Автор благодарит Починку Ольгу Витальевну за внимательное прочтение рукописи. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-31-00022 мол\_а, кроме необходимого условия основной теоремы, которое доказано как результат исследовательского проекта «Топология и хаос в динамике систем, слоений и деформации алгебр Ли (2018)» в НИУ ВШЭ.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. Palis, “A Differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability”, *Astérisque*, **51** (1978), 335–346.
2. W. De Melo, S. J. van Strien, “Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **7** (1987), 415–462.
3. C. Pugh, M. Shub, “The  $\Omega$ -stability theorem for flows”, *Inven. Math.*, **11** (1970), 150–158.
4. В. Е. Круглов, Д. С. Малышев, О. В. Починка, “Многоцветный граф как полный топологический инвариант для  $\Omega$ -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях”, *Математический сборник*, **209:1** (2018), 100–126.
5. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике: Пер. с англ.*, Институт компьютерных исследований, Москва-Ижевск, 2003.
6. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания”, *Труды мат. инст. им. В. А. Стеклова*, **270** (2010), 198–219.
7. V. Kruglov, “Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces (accepted for publishing)”, *Dinamicheskie sistemy*, **8(36):1** (2018), 15–21.

Поступила 17.09.2018

MSC2010 34C20

# On number of moduli for gradient surface height function flows

© V. E. Kruglov<sup>1</sup>

**Abstract.** In 1978 J. Palis invented continuum topologically non-conjugate systems in a neighbourhood of a system with a heteroclinic contact; in other words, he invented so-called moduli. W. de Melo and C. van Strien in 1987 described a diffeomorphism class with a finite number of moduli. They discovered that a chain of saddles taking part in the heteroclinic contact of such diffeomorphism includes not more than three saddles. Surprisingly, such effect does not happen in flows. Here we consider gradient flows of the height function for an orientable surface of genus  $g > 0$ . Such flows have a chain of  $2g$  saddles. We found that the number of moduli for such flows is  $2g - 1$  which is the straight consequence of the sufficient topological conjugacy conditions for such systems given in our paper. A complete topological equivalence invariant for such systems is four-colour graph carrying the information about its cells relative position. Equipping the graph's edges with the analytical parameters — moduli, connected with the saddle connections, gives the sufficient conditions of the flows topological conjugacy.

**Key Words:** modulus of stability, gradient flow, topological conjugacy, four-colour graph, topological invariant

## REFERENCES

1. J. Palis, “A Differentiable Invariant of Topological Conjugacies and Moduli of Stability”, *Astérisque*, **51** (1978), 335–346.
2. W. de Melo, S. J. van Strien, “Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli”, *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, **7** (1987), 415–462.
3. C. Pugh, M. Shub, “The  $\Omega$ -stability theorem for flows”, *Inven. Math.*, **11** (1970), 150–158.
4. V. E. Kruglov, D. S. Malyshev, O. V. Pochinka, “Multicolour graph as a complete topological invariant for  $\Omega$ -stable flows without periodic trajectories on surfaces”, *Matematicheskiiy sbornik*, **209**:1 (2018), 100–126 (In Russ.).
5. L. P. Shilnikov, A. L. Shilnikov, D. V. Turaev, L. O. Chua, *Metody kachestvennoy teorii v nelineynoy dinamike [Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics]*, Institut kompyuternykh issledovaniy Publ., Moscow-Izhevsk, 2003 (In Russ., transl. from Eng.).
6. T. M. Mitryakova, O. V. Pochinka, “Necessary and sufficient conditions for the topological conjugacy of surface diffeomorphisms with a finite number of orbits of heteroclinic tangency”, *Trudy mat. inst. im. V. A. Steklova*, **270** (2010), 198–219 (In Russ.).
7. V. Kruglov, “Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces (accepted for publishing)”, *Dinamicheskie sistemy*, **8(36)**:1 (2018), 15–21.

Submitted 17.09.2018

<sup>1</sup>Vladislav E. Kruglov, Post-Graduated Student, at Department of fundamental mathematics, trainee-researcher of the laboratory “Topological methods in dynamics”, Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod, 603155 Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, [kruglovlava21@mail.ru](mailto:kruglovlava21@mail.ru)

УДК 519.6:517.962

# Аппроксимация смешанной краевой задачи

© Ф. В. Лубышев<sup>1</sup>, М. Э. Файрузов<sup>2</sup>

**Аннотация.** Рассматривается смешанная краевая задача для уравнения эллиптического типа дивергентного вида с переменными коэффициентами. Предполагается, что область интегрирования имеет достаточно гладкую границу, причем граница области интегрирования есть объединение двух непересекающихся кусков, на одном из которых задано граничное условие Дирихле, а на другом задано граничное условие Неймана. Поставленная задача – это задача с разрывным граничным условием. Подобные задачи со смешанными условиями на границе наиболее часто встречаются на практике при моделировании процессов и представляют значительный интерес для разработки методов их решения. В частности, ряд задач теории упругости, теории диффузии, фильтрации, геофизики, ряд задач расчета и оптимизации процессов электро-тепло-массопереноса в сложных многоэлектродных электрохимических системах сводятся к краевым задачам указанного типа. В настоящей работе предложена аппроксимация исходной смешанной краевой задачи третьей краевой задачей с параметром. Исследуется сходимость предложенных аппроксимаций. Установлены оценки скорости сходимости предложенных аппроксимаций в Соболевских нормах.

**Ключевые слова:** эллиптическое уравнение, смешанная краевая задача, Соболевское пространство, теорема вложения, аппроксимация, сходимость аппроксимаций

## 1. Постановка смешанной краевой задачи

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  – ограниченная область с достаточно гладкой границей  $\Gamma \equiv \partial\Omega$ . Предполагается, что  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  – непустые открытые подмножества  $\partial\Omega = \Gamma$  с достаточно гладкими границами, причем  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ ,  $\overline{\Gamma_1} \cup \Gamma_2 = \Gamma = \partial\Omega$ .

Рассматривается следующая смешанная граничная задача:

$$Lu(x) = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (1.1)$$

$$u(x) = \mu_1(x), \quad x \in \Gamma_1, \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial N}(x) = \mu_2(x), \quad x \in \Gamma_2. \quad (1.3)$$

Здесь

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cos(\widehat{\nu, x_\alpha}) = \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}(x) \nu_\alpha(x), \quad x \in \Gamma_2,$$

<sup>1</sup>Лубышев Федор Владимирович, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, [maham721@mail.ru](mailto:maham721@mail.ru)

<sup>2</sup>Файрузов Махмут Эрнстович, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (450076, Россия, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, [fairuzovme@mail.ru](mailto:fairuzovme@mail.ru)

– кономальная производная;  $\nu_\alpha(x)$ ;  $\alpha = 1, 2$  – направляющие косинусы вектора внешней нормали:

$$\nu = (\nu_1(x), \nu_2(x)) = (\cos(\nu, x_1), \cos(\nu, x_2)),$$

причем  $k_\alpha(x)$ ,  $f(x)$ ,  $\mu_1(x)$ ,  $\mu_2(x)$  – заданные функции;  $k_\alpha(x) \in L_\infty(\Omega)$ ,  $f(x) \in L_2(\Omega)$ ,  $\mu_1(s) \in L_2(\Gamma_1)$ ,  $\mu_2(s) \in L_2(\Gamma_2)$ ,  $0 < \nu_0 \leq k_\alpha(x) \leq \bar{\nu}_0$ ,  $\alpha = 1, 2$ .

Задачи такого типа со смешанными условиями на границе  $\Gamma$ , соответствующими различному характеру взаимодействия рассматриваемой среды  $\Omega$  на различных участках  $\partial\Omega_i = \Gamma_i$  ее границы  $\Gamma = \partial\Omega$ , являются наиболее часто встречающимися на практике (на  $\Gamma = \partial\Omega$  задаются условия разных типов).

Смешанные краевые условия (1.2)–(1.3) соответствуют, например, заданному распределению температуры на участке  $\Gamma_1 = \partial\Omega_1$  границы  $\Gamma = \partial\Omega$  и заданному потоку тепла на участке  $\Gamma_2 = \partial\Omega_2 \subset \Gamma$ .

Задачи такого типа представляют значительный интерес для приложений и разработки методов их исследования [1]–[23]. В частности, ряд задач теории упругости, теории диффузии, фильтрации, геофизики, ряд задач расчета и оптимизации процессов электро-тепло-массопереноса в сложных многоэлектродных электрохимических системах сводятся к задачам типа (1.1)–(1.3)

Краевая задача (1.1)–(1.3) это задача с разрывным граничным условием. Вопросы существования и единственности решения задачи типа (1.1)–(1.3) изучались, например, в работе [21]. Задача типа (1.1)–(1.3) исследовалась еще Зарембой [21].

Под решением задачи (1.1)–(1.3) будем понимать слабое решение, а именно которое находится следующим образом. Пусть  $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$  такая, что  $\mu_1(s) \in L_2(\Gamma_1)$  – след этой функции на  $\Gamma_1$  как элемент пространства  $L_2(\Gamma_1)$  (т.е.  $\mu_1(s) \in L_2(\Gamma_1)$  и функция  $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$  удовлетворяют соотношениям:  $\Phi(x)|_{\Gamma_1} = \mu(s)$  на  $\Gamma_1$  в смысле теории следов [8]–[9]; [11]; [13]; [20]; [22]). Пусть  $\mu_2(s) \in L_2(\Gamma_2)$ ,  $f(x) \in L_2(\Omega)$ , и пусть

$$V = \{v(x) \in W_2^1(\Omega) : v = 0 \text{ на } \Gamma_1 \text{ в смысле теории следов}\} = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega, \Gamma_1).$$

Функцию  $u(x) \in W_2^1(\Omega)$  назовем слабым решением задачи (1.1)–(1.3), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$1) \quad z = u - \Phi \in V, \quad (1.4)$$

$$2) \quad A(u, v) = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} d\Omega = \int_{\Gamma_2} \mu_2(s) v(s) ds + \int_{\Omega} f(x) v(x) d\Omega \quad (1.5)$$

для любого  $v \in V$ .

**З а м е ч а н и е 1.1** Краевую задачу (1.1)–(1.3) следует отнести к задаче с разрывным граничным условием.

**З а м е ч а н и е 1.2** Неоднородное граничное условие (1.2) здесь определяется (выражено) функцией  $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$ , для которой

$$\Phi = \mu_1(s) \quad \text{на } \Gamma_1 \text{ в смысле теории следов.}$$

Таким образом, выполнение граничного условия (1.2) в данном случае обеспечивается условием (1.4) (здесь  $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$  это функция, описывающая неоднородное граничное условие (1.2)). Под следом функции  $u(x) \in W_2^1(\Omega)$  на  $\Gamma_1 \subset \Gamma = \partial\Omega$  надо понимать ограничение следа (функции)  $u(s) \in L_2(\Gamma)$ . Следовательно, рассматривается лишь та «часть» функции  $u(s)$ , которая «принадлежит»  $\Gamma_1$ . Здесь через  $s$  обозначен параметр длины дуги на  $\Gamma$ .



Справедлива следующая [13]

**Л е м м а 1.1** *Смешанная краевая задача (1.1)–(1.3) имеет одно(и только одно) слабое решение  $u(x) \in W_2^1(\Omega)$ ; существует такая постоянная  $C > 0$ , независимая от функций  $f$ ,  $\Phi$ ,  $\mu_2$ , для которой выполняется соотношение*

$$\|u(x)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \left[ \|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|\Phi\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \right]. \quad (1.6)$$

**З а м е ч а н и е 1.3** *При рассмотрении случая, когда граничное условие (1.2) является однородным, надо положить в определении слабого решения задачи (1.1)–(1.3):  $\Phi(x) = 0$  в  $W_2^1(\Omega)$ , так что  $\Phi(x)$  – нулевая функция в данной ситуации.*

**З а м е ч а н и е 1.4** *Напомним некоторые факты. Известно, что в случае, когда граница  $\Gamma = \partial\Omega$  области  $\Omega$  ограничена и достаточно регулярна, можно определить единственным образом след функции  $u \in W_2^1(\Omega)$  на  $\Gamma = \partial\Omega$ , который обозначим через  $\gamma u = u|_\Gamma$ . При этом  $\gamma u = u|_\Gamma \in L_2(\Gamma)$ , т. е. след функции  $u \in W_2^1(\Omega)$  определен на  $\Gamma = \partial\Omega$  как элемент  $L_2(\Gamma)$  [13]; [22]; [23] (и даже  $W_2^{1/2}(\Gamma)$  см. далее), и отображение  $u \rightarrow \gamma u = u|_\Gamma$  является линейным и непрерывным отображением из  $W_2^1(\Omega)$  в  $L_2(\Gamma)$  ( $W_2^1(\Omega) \rightarrow L_2(\Gamma)$ ).*

Однако данное утверждение далеко не лучший возможный результат в том смысле, что отображение  $u \rightarrow \gamma u = u|_\Gamma$  не сюръективно из  $W_2^1(\Omega)$  в  $L_2(\Gamma)$  [23].

Можно усилить этот результат введением пространства с дробным индексом  $W_2^{1/2}(\Gamma)$ : образ  $W_2^1(\Omega)$  при отображении  $\gamma$  уже, чем  $L_2(\Gamma)$ , и совпадает с  $W_2^{1/2}(\Gamma)$ . Оказывается, отображение  $u \rightarrow \gamma u = u|_\Gamma$  является линейным, непрерывным и сюръективным отображением  $W_2^1(\Omega) \rightarrow W_2^{1/2}(\Gamma)$  [14]; [23].

Так что справедлива следующая [11]

**Л е м м а 1.2** *Если  $\Phi \in W_2^1(\Omega)$ , то след  $v = \Phi|_\Gamma$  принадлежит пространству  $W_2^{1/2}(\Gamma)$ , и выполняется оценка*

$$\|v\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} \leq C \|\Phi\|_{W_2^1(\Omega)}.$$

Обратно: для каждой функции  $v \in W_2^{1/2}(\Gamma)$  существует функция  $\Phi \in W_2^1(\Omega)$  такая, что

$$\Phi|_\Gamma = v(s), \quad s \in \Gamma.$$

и справедлива оценка

$$\|\Phi\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_* \|v\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)}. \quad (1.7)$$

Ниже мы воспользуемся тем, что отображение  $v \rightarrow \Phi$  является линейным и непрерывным отображением из  $W_2^{1/2}(\Gamma)$  в  $W_2^1(\Omega)$  ( $W_2^{1/2}(\Gamma) \rightarrow W_2^1(\Omega)$ ). Здесь и выше [14]; [19] класс  $W_2^{1/2}(\Gamma)$  представляет собой пространство с дробным индексом и состоит из функций  $v(s)$ ,  $s \in \Gamma$ , являющихся следом на  $\Gamma$  для функций  $\Phi$  класса  $W_2^1(\Omega)$ :  $v(s) = \Phi|_\Gamma$  с нормой в  $W_2^{1/2}(\Gamma)$ , определяемой равенством

$$\|v\|_{W_2^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{\substack{\Phi \in W_2^1(\Omega) \\ \gamma\Phi = v}} \|\Phi\|_{W_2^1(\Omega)},$$

причем нижняя грань берется по всем тем функциям  $\Phi(x) \in W_2^1(\Omega)$ , для которых

$$\Phi(s) = v(s), \quad s \in \Gamma.$$

Пространство  $W_2^{1/2}(\Gamma)$  – образ пространства  $W_2^1(\Omega)$  при отображении  $\gamma$ , т. е.  $W_2^{1/2}(\Gamma) = \gamma[W_2^1(\Omega)]$  [14].

Класс функций  $W_2^{1/2}(\Gamma)$  является подпространством пространства  $L_2(\Gamma)$ .

Таким образом, пространство функций с дробной производной  $W_2^{1/2}(\Gamma)$  позволяет произвести более углубленный анализ проблемы следов.

Преобразуем оценку (1.6). Выбирая в лемме 1.2 в качестве  $v(s) \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$  граничную функцию  $\mu_1(s) \in W_2^{1/2}(\Gamma_1)$  задачи (1.1)–(1.3):

$$v(s) = \mu_1(s), \quad s \in \Gamma_1, \quad (1.8)$$

заметим, что (1.7) примет вид (в силу вложения  $W_2^{1/2}(\Gamma_1) \subset W_2^1(\Omega)$ ):

$$\|\Phi\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_* \|\mu_1\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)}. \quad (1.9)$$

Следовательно, из оценки (1.6) найдем априорную оценку вида

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C_{**} \left[ \|\mu_2\|_{L_2(\Gamma_2)} + \|\mu_1\|_{W_2^{1/2}(\Gamma_1)} + \|f\|_{L_2(\Omega)} \right]. \quad (1.10)$$

**З а м е ч а н и е 1.5** *Справедливо утверждение [11]; [19]: если  $u \in W_2^2(\Omega)$ , то для этой функции имеет смысл производная по нормали  $\frac{\partial u}{\partial n}$ , причем справедлива оценка*

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{W_2^{1/2}(\partial\Omega)} \leq \hat{C} \|u\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad \hat{C} > 0. \quad (1.11)$$

**З а м е ч а н и е 1.6** *Из определения  $W_2^s(\Omega)$  – пространств с дробным индексом [11]; [19] – вытекает неравенство*

$$\|u\|_{W_2^\gamma(\Omega)} \leq C \|u\|_{W_2^s(\Omega)} \text{ при } s > \gamma, \quad (1.12)$$

т. е. если функция  $u \in W_2^s(\Omega)$ , то она является также элементом из  $W_2^\gamma(\Omega)$ , и справедливо (1.12). Соотношение, аналогичное (1.12), справедливо и для пространств  $W_2^s(\partial\Omega)$ .

Запишем также неравенство

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial n} \right\|_{L_2(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad C > 0. \quad (1.13)$$

## 2. Аппроксимация смешанной краевой задачи третьей краевой задачей. Сходимость аппроксимаций

Для решения задачи (1.1)–(1.3) рассмотрим метод, заключающийся в приближенной замене смешанной задачи (1.1)–(1.3) третьей краевой задачей с параметром  $\varepsilon > 0$ :

$$-\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) = f(x), \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial N} + \varepsilon(s) u_\varepsilon = g(s), \quad s \in \Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2, \quad (2.15)$$

где

$$\varepsilon(s) = \begin{cases} \varepsilon, & s \in \Gamma_1, \\ 0, & s \in \Gamma_2, \end{cases} \quad g(s) = \begin{cases} \varepsilon \mu_1(s), & s \in \Gamma_1, \\ \mu_2(s), & s \in \Gamma_2, \end{cases} \quad \varepsilon = \text{const} > 0. \quad (2.16)$$

Будем считать, что при  $\varepsilon \rightarrow +\infty$  решение задачи (2.14)–(2.16) стремится к решению исходной смешанной краевой задачи (1.1)–(1.3).

Обобщенным решением краевой задачи (2.14)–(2.16) называется функция  $u_\varepsilon(x) \in W_2^1(\Omega)$ , удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\begin{aligned} A_1(u_\varepsilon, v) &= \int_{\Omega} - \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} d\Omega + \varepsilon \int_{\Gamma_1} u_\varepsilon(s) v(s) ds = \\ &= \varepsilon \int_{\Gamma_1} \mu_1(s) v(s) ds + \int_{\Gamma_2} \mu_2(s) v(s) ds + \int_{\Omega} f(x) v(x) d\Omega = l_\varepsilon(v), \end{aligned} \quad (2.17)$$

для всех  $v(x) \in W_2^1(\Omega)$ .

Справедлива следующая

**Л е м м а 2.1** *Задача (2.14)–(2.16) однозначно разрешима в классе  $W_2^1(\Omega)$ .*

Доказательство леммы может быть произведено на основе леммы Лакса-Мильграмма [5]; [9]; [13].

**Т е о р е м а 2.1** *При  $\varepsilon \rightarrow +\infty$  решение задачи (2.14)–(2.16) сходится по норме  $W_2^1(\Omega)$  к решению задачи (1.1)–(1.3).*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Введем функцию  $\omega_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$ . Покажем, что

$$u_\varepsilon(x) \rightarrow u(x) \text{ при } \varepsilon \rightarrow +\infty \text{ в норме } W_2^1(\Omega). \quad (2.18)$$

Нетрудно убедиться, что функция  $\omega_\varepsilon(x)$  решает задачу:

$$L\omega_\varepsilon(x) = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left( k_\alpha(x) \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad (2.19)$$

$$\frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial N} + \varepsilon(s)\omega_\varepsilon = - \frac{\partial u}{\partial N}(s), \quad s \in \Gamma_1, \quad (2.20)$$

$$\frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial N} = 0, \quad s \in \Gamma_2. \quad (2.21)$$

Умножим (2.19) на  $\omega_\varepsilon(x)$  и проинтегрируем по  $\Omega$ . Используя формулу Грина [13], получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} L\omega_\varepsilon(x) \omega_\varepsilon(x) d\Omega &= \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial N}(s) \omega_\varepsilon(s) ds = \\ &= \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \left( \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial N}(s) \omega_\varepsilon(s) ds - \int_{\Gamma_2} \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial N}(s) \omega_\varepsilon(s) ds = 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Итак, получим соотношение

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \left( \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega + \varepsilon \int_{\Gamma_1} \omega_\varepsilon^2(s) ds = - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial N}(s) \omega_\varepsilon(s) ds.$$

Следовательно,

$$\nu_0 \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega + \varepsilon \int_{\Gamma_1} \omega_\varepsilon^2(s) ds \leq - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial N}(s) \omega_\varepsilon(s) ds. \quad (2.23)$$

Из (2.23) получим

$$\varepsilon \|\omega\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)} \cdot \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}, \quad (2.24)$$

т. е. находим оценку:

$$\|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}. \quad (2.25)$$

Далее из (2.23) запишем:

$$\nu_0 \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega \leq \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)} \cdot \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}. \quad (2.26)$$

Принимая во внимание оценку (2.25), из (2.26) получим:

$$\nu_0 \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega \leq \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2. \quad (2.27)$$

Итак, имеем оценку:

$$\int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega = \int_{\Omega} |\nabla \omega_\varepsilon|^2 d\Omega \leq \frac{1}{\nu_0 \varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2. \quad (2.28)$$

Напомним обозначения:

$$\begin{aligned} \nabla u &= \text{grad } u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right), \\ |\nabla u| &= \left( \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 \right)^{1/2}, \\ |\nabla u|^2 &= \sum_{\alpha=1}^n \left| \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right|^2, \\ \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx &= \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx, \\ \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} &= \left( \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx \right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Оценку (2.28) запишем в виде

$$\|\nabla \omega_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |\nabla \omega_\varepsilon|^2 dx = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx \leq \frac{1}{\nu_0 \varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2. \quad (2.30)$$

Из оценок (2.25), (2.30) получим:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \|\nabla \omega_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 = 0, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 = 0. \quad (2.31)$$

Далее, справедливо неравенство [13]

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 &\leq C_0 \left( \|\nabla \omega_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 \right) = \\ &= C_0 \left\{ \left( \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\Gamma_1} \omega_\varepsilon^2 ds \right)^{1/2} \right\} = \\ &= C_0 \left\{ \left( \int_{\Omega} |\nabla \omega_\varepsilon|^2 dx \right)^{1/2} + \left( \int_{\Gamma_1} \omega_\varepsilon^2 ds \right)^{1/2} \right\}, \end{aligned} \quad (2.32)$$

где константа  $C_0 > 0$  зависит лишь от  $\Omega$  и  $\Gamma_1$ .

Из оценок (2.31)–(2.32) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} = 0. \quad (2.33)$$

Из оценок (2.31)–(2.33) следует, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +\infty} \|\omega_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} = 0. \quad (2.34)$$

Далее из (2.25) и (2.30) в силу (2.32) получим

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)} &\leq C_0 \left[ \frac{1}{\sqrt{\nu_0}\sqrt{\varepsilon}} \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)} + \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)} \right] = \\ &= C_0 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left( \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right) \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Поэтому из (2.25), (2.30), (2.35) получим

$$\begin{aligned} \|\omega_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}^2 &= \int_{\Omega} \left[ \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\partial \omega_\varepsilon}{\partial x_\alpha} \right)^2 + \omega_\varepsilon^2 \right] dx = \|\nabla \omega_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|\omega_\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\nu_0 \varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 + \frac{C_0^2}{\varepsilon} \left( \frac{1}{\sqrt{\nu_0}} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right)^2 \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2 = \\ &= \left[ \frac{1}{\nu_0} + \left( \frac{1}{\nu_0^{1/2}} + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \right)^2 C_0^2 \right] \frac{1}{\varepsilon} \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, установлена также оценка скорости сходимости:

$$\|\omega_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \theta_\varepsilon \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)}, \quad (2.36)$$

где

$$\theta_\varepsilon = \left[ \frac{1}{\nu_0} + \left( \frac{1}{\nu_0^{1/2}} + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \right)^2 C_0^2 \right]^{1/2} \rightarrow \frac{1}{\nu_0^{1/2}} (1 + C_0^2)^{1/2} = C_1 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow +\infty.$$

Доказательство закончено.

**З а м е ч а н и е 2.1** Пусть решение  $u(x)$  задачи (1.1)–(1.3) принадлежит пространству  $W_2^2(\Omega)$ , тогда, принимая во внимание оценку

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial N} \right\|_{L_2(\Gamma_1)} \leq C_2 \|u\|_{W_2^2(\Omega)}, \quad (2.37)$$

установим следующую оценку величины  $\|\omega_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)}$ :

$$\|\omega_\varepsilon\|_{W_2^1(\Omega)} \leq \theta_\varepsilon \frac{C_2}{\varepsilon^{1/2}} \|u\|_{W_2^2(\Omega)}. \quad (2.38)$$

Здесь  $\omega_\varepsilon(x) = u_\varepsilon(x) - u(x)$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Л. Рвачев, А. П. Слесаренко, *Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах*, Наукова думка, Киев, 1976, 288 с.
2. И. И. Ляшко, И. М. Великоиваненко, *Численно-аналитическое решение краевых задач теории фильтрации*, Наукова думка, Киев, 1973, 264 с.
3. И. Н. Молчанов, *Численные методы решения некоторых задач теории упругости*, Наукова думка, Киев, 1979, 316 с.
4. К. Бреббия, Ж. Теллес, Л. Врuebas, *Методы граничных элементов*, Мир, М., 1987, 524 с.
5. Ф. Сьярле, *Метод конечных элементов для эллиптических задач*, Мир, М., 1980, 512 с.
6. Р. Гловински, Ж.-Л. Лионс, Р. Тремольер, *Численное исследование вариационных неравенств*, Мир, М., 1979, 576 с.
7. К. Байокки, А. Капело, *Вариационные и квазивариационные неравенства*, Наука, М., 1988.
8. Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка*, Наука, М., 1989, 464 с.
9. Ж.-П. Обэн, *Приближенное решение эллиптических краевых задач*, Мир, М., 1977, 384 с.
10. Д. Киндерлерер, Г. Стампаккья, *Введение в вариационные неравенства и их приложения*, Мир, М., 1983, 256 с.
11. А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987, 296 с.
12. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Вычислительная теплопередача*, Либроком, М., 2009, 784 с.
13. К. Ректорис, *Вариационные методы в математической физике и технике*, Мир, М., 1985, 592 с.
14. И. Главачек, Я. Гаслингер, И. Нечас, Я. Ловишек, *Решение вариационных неравенств в механике*, Мир, М., 1986, 272 с.
15. Р. Темам, *Математические задачи теории пластичности*, Наука, М., 1991, 288 с.
16. Я. А. Каменярж, *Предельный анализ пластических тел и конструкций*, Наука, М., 1997, 512 с.
17. И. И. Ворович, *Математические проблемы нелинейной теории полых оболочек*, Наука, М., 1989, 376 с.
18. Ф. Сьярле, П. Рабье, *Уравнения Кармана*, Мир, М., 1983, 172 с.

19. Г. И. Марчук, В. И. Агошков, *Введение в проекционно-сеточные методы*, Наука, М., 1981, 416 с.
20. А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука, М., 1988, 304 с.
21. М. И. Вишик, Г. И. Эскин, “Эллиптические уравнения в свертках в ограниченной области и их приложения”, *УМН*, **22**:1(133) (1967), 15–76.
22. В. П. Михайлов, *Дифференциальные уравнения в частных производных*, Наука, М., 1976, 394 с.
23. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980, 384 с.

Поступила 13.07.2018

MSC2010 65N06

## Approximation of a mixed boundary value problem

© F. V. Lubyshev<sup>1</sup>, M. E. Fairuzov<sup>2</sup>

**Abstract.** The mixed boundary value problem for the divergent-type elliptic equation with variable coefficients is considered. It is assumed that the integration domain has a sufficiently smooth boundary that is the union of two disjoint pieces. The Dirichlet boundary condition is given on the first piece, and the Neumann boundary condition is given on the other one. So the problem has discontinuous boundary condition. Such problems with mixed boundary conditions are the most common in practice when modeling processes and are of considerable interest in the development of methods for their solution. In particular, a number of problems in the theory of elasticity, theory of diffusion, filtration, geophysics, a number of problems of optimization in electro-heat and mass transfer in complex multielectrode electrochemical systems are reduced to the boundary value problems of this type. In this paper, we propose an approximation of the original mixed boundary value problem by the third boundary value problem with a parameter. The convergence of the proposed approximations is investigated. Estimates of the approximations' convergence rate in Sobolev norms are established.

**Key Words:** Elliptic equations, mixed boundary value problem, Sobolev spaces, embedding theorems, approximation, convergence of approximations

## REFERENCES

1. V. L. Rvachev, A. P. Slesarenko, *Logic algebra and integral transformations in boundary value problems*, Naukova dumka, Kiev, 1976 (In Russ.), 288 с.
2. I. I. Lyashko, I. M. Velikoivanenko, *A numerical-analytical solution of boundary value problems of filtration theory*, Naukova dumka, Kiev, 1973 (In Russ.), 264 с.
3. I. N. Molchanov, *Numerical methods for solving some problems in the theory of elasticity*, Naukova dumka, Kiev, 1979 (In Russ.), 316 с.

<sup>1</sup>**Fedor V. Lubyshev**, Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Bashkir state University» (32, Zaki Validi St., Ufa, 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru

<sup>2</sup>**Mahmut E. Fairuzov**, associate Professor, Department of Information Technology and Computer Mathematics, «Bashkir state University» (32, Zaki Validi St., Ufa, 450076, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, fairuzovme@mail.ru

4. K. Brebbiya, Zh. Telles, L. Vroubel, *Boundary element methods*, Mir, M., 1987 (In Russ.), 524 c.
5. F. S'yarle, *Finite Element Method for Elliptic Problems*, Mir, M., 1980 (In Russ.), 512 c.
6. R. Glowinski, Zh.-L. Lions, R. Tremol'yer, *Numerical study of variational inequalities*, Mir, M., 1979 (In Russ.), 576 c.
7. K. Bayokki, A. Kapelo, *Variational and quasi-variational inequalities*, Nauka, M., 1988 (In Russ.).
8. D. Gilbarg, N. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Nauka, M., 1989 (In Russ.), 464 c.
9. Zh.-P. Oben, *Approximate solution of elliptic boundary value problems*, Mir, M., 1977 (In Russ.), 384 c.
10. D. Kinderlerer, G. Stampakk'ya, *Introduction to variational inequalities and their applications*, Mir, M., 1983 (In Russ.), 256 c.
11. A. A. Samarskij, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, *Difference schemes for differential equations with generalized solutions*, Vysshaya shkola, M., 1987 (In Russ.), 296 c.
12. A. A. Samarskij, P. N. Vabishchevich, *Computational heat transfer*, Librokom, M., 2009 (In Russ.), 784 c.
13. K. Rektoris, *Variational methods in mathematical physics and technology*, Mir, M., 1985 (In Russ.), 592 c.
14. I. Glavachek, Ya. Gaslinger, I. Nechas, Ya. Lovishek, *Solution of variational inequalities in mechanics*, Mir, M., 1986 (In Russ.), 272 c.
15. R. Temam, *Mathematical problems of plasticity theory*, Nauka, M., 1991 (In Russ.), 288 c.
16. Ya. A. Kamenyazh, *Limit analysis of plastic bodies and structures*, Nauka, M., 1997 (In Russ.), 512 c.
17. I. I. Vorovich, *Mathematical problems of the nonlinear theory of shallow shells*, Nauka, M., 1989 (In Russ.), 376 c.
18. F. S'yarle, P. Rab'ye, *Karman equations*, Mir, M., 1983 (In Russ.), 172 c.
19. G. I. Marchuk, V. I. Agoshkov, *Introduction to projection methods*, Nauka, M., 1981 (In Russ.), 416 c.
20. A. Kufner, S. Fuchik, *Nonlinear differential equations*, Nauka, M., 1988 (In Russ.), 304 c.
21. M. I. Vishik, G. I. Eskin, "Elliptic convolution equations in a bounded domain and their applications", *Russian Mathematical Surveys*, **22**:3 (1967), 13–15.
22. V. P. Mikhaylov, *Partial differential equations*, Nauka, M., 1976 (In Russ.), 394 c.
23. G. Dyuvo, Zh.-L. Lions, *Inequalities in mechanics and physics*, Nauka, M., 1980 (In Russ.), 384 c.

*Submitted 13.07.2018*



УДК 517.9

# Класс управляемых систем дифференциальных уравнений за бесконечное время

© А. Ю. Павлов<sup>1</sup>

**Аннотация.** В статье получены необходимые условия управляемости систем нелинейных дифференциальных уравнений за бесконечное время без предположения существования асимптотического равновесия у системы линейного приближения. Это позволяет определить новый класс управляемых систем дифференциальных уравнений. Решение задачи об управляемости за бесконечное время сводится к построению оператора, зависящего от выбранного управления, которое, в свою очередь, зависит от переводимой точки, и доказательству существования его неподвижной точки. Показано, что условие существования асимптотического равновесия не является в общем случае необходимым для управляемости систем за бесконечное время. Приведен пример, иллюстрирующий применение теоремы об управляемости за бесконечное время. Далее в статье приведена теорема, обобщающая неравенство Важевского. Доказательство теоремы основано на неравенстве Коши-Буняковского. Сделано замечание о верности теоремы для случая, если матрица и вектор-функции, стоящие в правой части нелинейного дифференциального уравнения, являются комплексными, а  $x$  – вектор с комплексными компонентами. На основании левой части неравенства из теоремы об обобщении неравенства Важевского получены необходимые условия управляемости за бесконечное время. Эти условия проверены на том же примере скалярного уравнения.

**Ключевые слова:** нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, управляемость за конечное время, управляемость за бесконечное время, неравенство Важевского, асимптотическое равновесие.

## 1. Введение

В математической теории управления большое значение имеют задачи об управляемости систем дифференциальных уравнений за бесконечное время [1–4]. Задача об управляемости за бесконечное время заключается в переводе произвольной фиксированной точки в сколь угодно малую окрестность другой точки. Причем в дальнейшем из этой окрестности переводимая точка не выходит. Известно, что в теоремах об управляемости требуется существование асимптотического равновесия у системы первого приближения.

В работе [1] Е.В. Воскресенским рассмотрен вопрос об управляемости за бесконечное время системы, имеющей вид

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u + f(t, x, u) + F(t) \quad (1.1)$$

в определенном классе допустимых управлений  $K$ . Данная задача решается методом сравнения [5]. В качестве уравнения сравнения используется

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + B(t)u + F(t). \quad (1.2)$$

<sup>1</sup>Павлов Андрей Юрьевич, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1664-898X>, pavlovayul8@yandex.ru

Задача об управляемости за бесконечное время сводится к тому, чтобы подобрать оператор  $P$ , зависящий от выбранного управления  $u$ , которое, в свою очередь, зависит от переводимой точки  $y_0 = P_u x_0$ . И доказать существование у оператора неподвижной точки.

Теоремы из работы [1] объединяет то, что в каждой из них требуется существование асимптотического равновесия, которое ввёл Л. Чезари в работе [6], у системы первого приближения для системы (1.1)

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y. \quad (1.3)$$

Понятие асимптотического равновесия рассмотрено Е.В. Воскресенским в работе [7]. Однако можно показать, что это условие не является в общем случае необходимым для управляемости системы (1.1) за бесконечное время.

В работе [8] приведен пример скалярного уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -x + u. \quad (1.4)$$

Показано, что данная система является управляемой за бесконечное время, хотя уравнение первого приближения не имеет асимптотического равновесия. Далее была получена теорема 1.2 об управляемости за бесконечное время без предположения существования асимптотического равновесия у системы первого приближения.

## 2. Пример системы, управляемой за бесконечное время, уравнение первого приближения которого не имеет асимптотического равновесия.

**Пример 2.1** Вновь рассмотрим уравнение (1.4) из примера 1.1 работы [8]

$$\frac{dx}{dt} = -x + u.$$

Покажем, что это уравнение при некоторых  $u$ , произвольных  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$  удовлетворяет теореме 1.2 из работы [8].

Представим уравнение (1.4) в виде:

$$\dot{x} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x + u$$

В обозначениях теорем можно положить

$$A(t) = \Lambda(t) = -\frac{3}{4}, \quad f(t, x, u) = -\frac{1}{4}x + u(t), \quad \phi(t) = -\frac{3}{4}x_1$$

Тогда  $|f(t, y + x_1, u) + A(t)x_1| = |-\frac{1}{4}y - \frac{1}{4}x_1 + u - \frac{3}{4}x_1| \leq \frac{1}{4}|y| + |u(t) - x_1|$ ,  $u$ , следовательно,  $\psi(t) \equiv \frac{1}{4}, \eta(t) = |u(t) - x_1|$ . Далее

$$\int_{t_0}^{+\infty} (\Lambda(s) + \Psi(s))ds = \int_{t_0}^{+\infty} (-\frac{3}{4} + \frac{1}{4})ds = -\int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{2}ds = -\infty,$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\Lambda(t) + \Psi(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t) - x_1|}{-\frac{1}{2}}.$$

Пусть  $u(t) = x_1 + \frac{1}{t}$ . Тогда последний предел равен нулю и

$$\int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_l^{t_0} (\Lambda(s) + \Psi(s)) ds\right) dl = \int_{t_0}^{+\infty} \frac{1}{l} \exp\left(-\int_l^{t_0} \frac{1}{2} ds\right) dl = +\infty.$$

Таким образом, при  $u(t) = x_1 + \frac{1}{t}$  выполняются все условия теоремы 1.2 работы [8].

### 3. Обобщение неравенства Важевского

Для получения еще одного класса управляемых систем приведем обобщение неравенства Важевского.

**Т е о р е м а 3.1** Для любого решения дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x) + \phi(t), \quad (3.1)$$

где  $A(t) = (a_{ij}(t))_{n \times n}$ ,  $a_{ij} \in \mathbb{C}([t_0; +\infty); \mathbb{R})$ ,  $f \in \mathbb{C}([t_0; +\infty) \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ ,  $\phi \in \mathbb{C}([t_0; +\infty]; \mathbb{R}^n)$ , при  $t_0 \leq t < +\infty$  справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \eta(l) \exp\left(\int_l^t (\lambda(s) - \psi(s)) ds\right) dl + \|x(t_0)\| \exp\left(\int_{t_0}^t (\lambda(s) - \psi(s)) ds\right) &\leq \\ &\leq \|x(t)\| \leq \\ &\leq \int_{t_0}^t \eta(l) \exp\left(\int_l^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right) dl + \|x(t_0)\| \exp\left(\int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds\right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\lambda(t)$  и  $\Lambda(t)$  — наименьший и наибольший характеристические корни симметризованной матрицы  $A^H(t) = \frac{1}{2}[A(t) + A^T(t)]$  соответственно; функции  $f$  и  $\phi$  удовлетворяют неравенству  $\|f(t, x) + \phi(t)\| \leq \psi(t)\|x\| + \eta(t)$ ,  $\psi, \eta \in \mathbb{C}([t_0; +\infty); \mathbb{R})$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  — нетривиальное решение системы (3.1). Очевидно,  $\|x\|^2 = x^T x$ . В силу системы (3.1) и учитывая, что  $\frac{dx^T}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^T = x^T A^T(t) + f^T(t, x) + \phi^T(t)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\|x\|^2) &= x^T \frac{dx}{dt} + \frac{dx^T}{dt} x = \\ &= x^T (A(t)x + f(t, x) + \phi(t)) + (x^T A^T(t) + f^T(t, x) + \phi^T(t))x = \\ &= x^T (A(t)x + A^T(t)x) + x^T f(t, x) + f^T(t, x)x + x^T \phi(t) + \phi^T(t)x = \\ &= 2x^T A^H(t)x + x^T f(t, x) + f^T(t, x)x + x^T \phi(t) + \phi^T(t)x. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Поскольку матрица  $A^H(t)$  симметрична, то [9, с.34]  $\forall t \in [t_0; +\infty)$  будем иметь

$$\lambda(t)x^T x \leq x^T A^H(t)x \leq \Lambda(t)x^T x,$$

где  $\lambda(t)$  и  $\Lambda(t)$  — наименьший и наибольший корни уравнения  $\det(A^H - \lambda E) = 0$ . Поэтому на основании формулы (3.3) найдем

$$\begin{aligned} 2\lambda(t)\|x\|^2 + x^T f(t, x) + f^T(t, x)x + x^T \phi(t) + \phi^T(t)x &\leq \\ &\leq \frac{d}{dt}(\|x\|^2) \leq \\ &\leq 2\Lambda(t)\|x\|^2 + x^T f(t, x) + f^T(t, x)x + x^T \phi(t) + \phi^T(t)x; \\ 2\lambda(t)\|x\|^2 - |x^T(f(t, x) + \phi(t))| - |(f^T(t, x) + \phi^T(t))x| &\leq \\ &\leq \frac{d}{dt}(\|x\|^2) \leq \\ &\leq 2\Lambda(t)\|x\|^2 + |x^T(f(t, x) + \phi(t))| + |(f^T(t, x) + \phi^T(t))x|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Применяя неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\begin{aligned} 2\lambda(t)\|x\|^2 - 2\|x\| \|f(t, x) + \phi(t)\| &\leq \\ &\leq \frac{d}{dt}(\|x\|^2) \leq \\ &\leq 2\Lambda(t)\|x\|^2 + 2\|x\| \|f(t, x) + \phi(t)\|; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2\lambda(t)\|x\|^2 - 2\|x\| \|f(t, x) + \phi(t)\| &\leq \\ &\leq 2\|x\| \frac{d}{dt}(\|x\|) \leq \\ &\leq 2\Lambda(t)\|x\|^2 + 2\|x\| \|f(t, x) + \phi(t)\|; \end{aligned}$$

$$\lambda(t)\|x\| - \|f(t, x) + \phi(t)\| \leq \frac{d}{dt}(\|x\|) \leq \Lambda(t)\|x\| + \|f(t, x) + \phi(t)\|.$$

Поскольку  $\|f(t, x) + \phi(t)\| \leq \psi(t)\|x\| + \eta(t)$ , то

$$(\lambda(t) - \psi(t))\|x\| - \eta(t) \leq \frac{d}{dt}(\|x\|) \leq (\Lambda(t) + \psi(t))\|x\| + \eta(t). \quad (3.5)$$

Пусть  $y(t) = \|x(t)\|$ . Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dt} = (\Lambda(t) + \psi(t))y + \eta(t).$$

Частное решение этого уравнения, проходящее через точку  $(t_0; \|x(t_0)\|)$ , имеет вид

$$y(t) = c(t) \exp \left( \int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right),$$

$$\text{где } c(t) = \int_{t_0}^t \eta(l) \exp \left( - \int_{t_0}^l (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) dl + \|x(t_0)\|.$$

Поэтому из (3.5) на основании теоремы из [10, с.40] следует, что

$$\|x(t)\| = y(t) \leq \int_{t_0}^t \eta(l) \exp \left( \int_l^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right) dl + \|x(t_0)\| \exp \left( \int_{t_0}^t (\Lambda(s) + \psi(s)) ds \right). \quad (3.6)$$

Аналогично на основании замечания из [10, с.40] доказывается левая часть неравенства в формуле (3.2).

Доказательство закончено.

**З а м е ч а н и е 3.1** Доказанная теорема остается верной, если  $A(t)$  — комплексная матрица,  $f(t, x)$  и  $\phi(t)$  — комплексные вектор-функции, а  $x$  — вектор с комплексными компонентами. В этом случае вместо операции транспонирования в теореме нужно выполнять операцию эрмитова сопряжения; матрица  $A^H(t)$  в этом случае будет эрмитово-симметричной.

## 4. Новый класс управляемых систем за бесконечное время

Вновь рассмотрим систему (1.6) из работы [8]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t, x, u) \\ x(t_0) = x_0, \quad x(+\infty) = x_1, \end{cases} \quad (4.1)$$

где  $x(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in \mathbb{R}^m, T \leq t < +\infty, A(\cdot) : [T, +\infty) \mapsto \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  — непрерывное отображение,  $a \in C([T, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ .

Необходимо перевести точку  $x_0$  в точку  $x_1$  по траектории уравнения (4.1) за бесконечное время.

Получим на основании левой части неравенства (3.2) необходимое условие управляемости за бесконечное время системы (4.1).

Положим  $y = x - x_1$ . Тогда перепишем систему (4.1) в виде [8]:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = A(t)y + A(t)x_1 + f(t, y + x_1, u), \\ y(t_0) = x_0 - x_1, \quad y(+\infty) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Для системы (4.2) по теореме 3.1 будем иметь

$$\begin{aligned} \|y(t)\| &\geq - \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \exp \left( \int_l^t (\lambda(s) - \psi(s)) ds \right) dl + \|x_0 - x_1\| \exp \left( \int_{t_0}^t (\lambda(s) - \psi(s)) ds \right) = \\ &= \exp \left( \int_{t_0}^t (\lambda(s) - \psi(s)) ds \right) \left[ \|x_0 - x_1\| - \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \times \right. \\ &\quad \times \exp \left[ \int_l^t (\lambda(s) - \psi(s)) ds - \int_{t_0}^t (\lambda(s) - \psi(s)) ds \right] dl = \\ &= \exp \left( \int_{t_0}^t (\lambda(s) - \psi(s)) ds \right) \left[ \|x_0 - x_1\| - \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \times \exp \left[ \int_l^{t_0} (\lambda(s) - \psi(s)) ds \right] dl \right] \end{aligned}$$

Последнее выражение при  $t \rightarrow +\infty$  должно стремиться к неположительному числу. Рассмотрим

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\|x_0 - x_1\| - \int_{t_0}^t \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_l^{t_0} (\lambda(s) - \psi(s)) ds\right) dl}{\exp\left(\int_{t_0}^t (\psi(s) - \lambda(s)) ds\right)}.$$

Предположим, что выполняется одна из следующих альтернатив:

1.  $\int_{t_0}^{+\infty} (\psi(s) - \lambda(s)) ds = +\infty$ ,  $\int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_l^{t_0} (\lambda(s) - \psi(s)) ds\right) dl = \infty$ ,
2.  $\int_{t_0}^{+\infty} (\psi(s) - \lambda(s)) ds = -\infty$ ,  $\|x_0 - x_1\| - \int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_l^{t_0} (\lambda(s) - \psi(s)) ds\right) dl = 0$ ,

а функция  $u(t)$  такова, что к пределу можно применить правило Лопиталя. Тогда последний предел равен

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{-\eta(t, u(t)) \exp\left(\int_t^{t_0} (\lambda(s) - \psi(s)) ds\right)}{\exp\left(\int_{t_0}^t (\psi(s) - \lambda(s)) ds\right) (\psi(t) - \lambda(t))} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\lambda(t) - \psi(t)}.$$

Таким образом доказана следующая

**Т е о р е м а 4.1** *Если система (4.1) управляема за бесконечное время и выполняется одна из следующих альтернатив*

$$1) \int_{t_0}^{+\infty} (\psi(s) - \lambda(s)) ds = +\infty, \int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_l^{t_0} (\lambda(s) - \psi(s)) ds\right) dl = \infty, \quad (4.3)$$

$$2) \int_{t_0}^{+\infty} (\psi(s) - \lambda(s)) ds = -\infty,$$

$$\|x_0 - x_1\| - \int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp\left(\int_l^{t_0} (\lambda(s) - \psi(s)) ds\right) dl = 0, \quad (4.4)$$

то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\lambda(t) - \psi(t)} \leq 0 \quad (4.5)$$

**П р и м е р 4.1** *Рассмотрим уравнение из примера 1.1 работы [8]:*

$$\dot{x} = -x + u. \quad (4.6)$$

*Покажем, что данное уравнение при некоторых  $u$  удовлетворяет теореме (1.3). Для этого вновь представим уравнение (1.4) в виде*

$$\dot{x} = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x + u. \quad (4.7)$$

В обозначениях теоремы (1.3) можно положить

$$A(t) = \lambda(t) \equiv -\frac{3}{4}, \quad f(t, x, u) = -\frac{1}{4}x + u(t), \quad \phi(t) = -\frac{3}{4}x_1.$$

Так как  $|f(t, y + x_1, u) + A(t)x_1| = |-\frac{1}{4}y - \frac{1}{4}x_1 + u - \frac{3}{4}x_1| \leq \frac{1}{4}|y| + |u(t) - x_1|$ , то  $\psi(t) \equiv \frac{1}{4}$ ,  $\eta(t) = |u(t) - x_1|$ . Следовательно

$$\int_{t_0}^{+\infty} (\Psi(s) - \lambda(s))ds = \int_{t_0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) ds = \int_{t_0}^{+\infty} ds = +\infty, \quad (4.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\eta(t, u(t))}{\lambda(t) - \Psi(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{|u(t) - x_1|}{-1}. \quad (4.9)$$

Кроме того, должно выполняться условие

$$\int_{t_0}^{+\infty} \eta(l, u(l)) \exp \left( \int_l^{t_0} (\lambda(s) - \psi(s))ds \right) dl = \int_{t_0}^{+\infty} |u(l) - x_1| \exp(l - t_0) dl = \infty \quad (4.10)$$

Таким образом, для управляемости уравнения (1.4) необходимо, чтобы  $u(t)$  была непрерывной функцией такой, что

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t) - x_1| \geq 0.$$

Другими словами, необходимо существование конечного предела  $\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t)|$  и выполнение условия (4.10). Управление  $u(t) = x_1 + \frac{1}{t}$  из примера (1.4) удовлетворяет этим требованиям.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Е. В. Воскресенский, *Асимптотические методы: теория и приложения*, СВМО, Саранск, 2001, 300 с.
2. В. И. Зубов, *Лекции по теории управления*, Наука, Москва, 1975, 495 с.
3. В. И. Зубов, *Теория колебаний: учеб. пособие для университетов*, Высшая школа, Москва, 1979, 400 с.
4. А. Ю. Павлов, *Метод сравнения и управляемость нелинейных систем*, дис. ... канд. физ.-мат. наук, Саранск, 1995, 143 с.
5. Е. В. Воскресенский, *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Изд-во Сарат. ун-та. Саран. фил., Саранск, 1990, 224 с.
6. Л. Чезари, *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, Москва, 1964, 480 с.
7. Е. В. Воскресенский, "О задаче Чезари", *Дифференциальные уравнения*, **25:9** (1989).

А. Ю. Павлов. Класс управляемых систем дифференциальных уравнений за...

8. А. Ю. Павлов, “Управляемость за бесконечное время и асимптотическое равновесие”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17:2** (2015), 81–84.
9. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, гл. ред. физ-мат. лит., М., 1967, 472 с.
10. Ф. Хартман, *Обыкновенные дифференциальные уравнения*, Мир, Москва, 1970, 720 с.

Поступила 7.08.2018

MSC2010 34C20

## Class of controllable systems of differential equations for infinite time

© А. Yu. Pavlov<sup>1</sup>

**Abstract.** In the article necessary conditions for a controllability of systems of nonlinear differential equations in an infinite time are obtained without assuming the existence of an asymptotic equilibrium for the system of linear approximation. Thus, a new class of controlled systems of differential equations is presented. The problem of controllability for an infinite time (i.e. the transfer of an arbitrary point into an arbitrary small domain of another point) comes down to choosing an operator depending on the selected control, which in turn depends on the point being transferred. Then one is to prove the existence of a fixed point for this operator. It is known that the theorems on controllability require existence of an asymptotic equilibrium for system of the first approximation. It is shown in the paper that in general case the condition of asymptotic equilibrium's existence is not necessary for controllability of systems in an infinite time. An example on the theorem on controllability for an infinite time is given. The theorem generalizing Vazhevsky inequality is proved by implementation of Cauchy-Bunyakovsky inequality. A remark is made about the theorem's validity for the case when the matrix and vector from the right-hand side of nonlinear differential equation are complex and  $x$  is vector with complex components. Basing on the left-hand side of the inequality in the theorem generalizing Vazhevsky inequality, the necessary conditions for controllability in an infinite time are obtained. These conditions are verified on the same example of a scalar equation that was mentioned before.

**Key Words:** nonlinear systems of ordinary differential equations, controllability in finite and infinite time, Vazhevsky inequality, asymptotic equilibrium

## REFERENCES

1. E. V. Voskresenskiy, [*Asymptotic methods: theory and regulations*], SVMO, Saransk, 2001 (In Russ.), 300 p.
2. V. I. Zubov, [*Lectures by the control theory*], Nauka, Moscow, 1975 (In Russ.), 495 p.
3. V. I. Zubov, [*Theory of oscillations: textbook for universities*], Vyshaya shkola, Moscow, 1979 (In Russ.), 400 p.
4. A. Yu. Pavlov, [*Equal method and a controllability of non-linear systems*], [PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1995 (in Russ.), 143 p.

<sup>1</sup>**Andrey Yu. Pavlov**, Associate Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1664-898X>, pavlovayu18@yandex.ru



5. E. V. Voskresenskiy, *Metody sravneniya v nelineynom analize*, Saratov University Publishing House, Saransk Branch, Saransk, 1990 (In Russ.), 224 p.
6. L. Cesari, “[Asymptotic behavior and solutions stability of ordinary differential equations]”, *Mir*, 1964 (In Russ.), 480 p.
7. E. V. Voskresenskiy, “About Cesari problem”, *Differentsyialnye uravneniya*, **25**:9 (1989).
8. A. Yu. Pavlov, “Controllability for infinite time and asymptotic equilibrium”, **17**:2 (2015), 81–84 (In Russ.).
9. B. P. Demidovich, *[Lectures by the mathematical stability theory]*, Nauka, Moscow, 1967 (In Russ.), 472 p.
10. P. Hartman, *Ordinary differential equations*, Mir, M., 1970 (In Russ.), 720 p.

*Submitted 7.08.2018*

УДК 519.63

## Построение параллельного вычислительного алгоритма на основе разрывного метода Галеркина для решения задач конвективного теплообмена на разнесенных неструктурированных сетках

© Р. В. Жалнин<sup>1</sup>, В. Ф. Масягин<sup>2</sup>, Е. Е. Пескова<sup>3</sup>

**Аннотация.** Настоящая работа посвящена построению параллельного вычислительного алгоритма для решения задач конвективного теплообмена с использованием метода Галеркина с разрывными базисными функциями на неструктурированных разнесенных сетках. Вычислительный алгоритм реализован на основе технологии параллельных вычислений MPI. Особенностью алгоритма является то, что в межпроцессорном обмене не участвуют вспомогательные переменные, возникающие при аппроксимации диффузионных членов с помощью разрывного метода Галеркина. Разработанный параллельный алгоритм применен для решения задачи о распределении температуры в нефтяном пласте с трещиной гидроразрыва и вертикальной нагнетательной скважиной. В работе представлены результаты вычислительного эксперимента и приведены оценки эффективности параллельного алгоритма.

**Ключевые слова:** метод Галеркина с разрывными базисными функциями, вертикальная нагнетательная скважина, гидравлический разрыв пласта, уравнение конвективного теплообмена, разнесенные сетки, параллельные вычисления, технология MPI

### 1. Введение

Работа посвящена построению параллельного численного алгоритма для решения уравнений конвекции-диффузии с помощью метода Галеркина с разрывными базисными функциями (DG). Метод DG широко используется для решения уравнений конвекции-диффузии [1–3]. В последнее время активно развиваются модификации DG на разнесенных сетках, которые получили название Staggered Discontinuous Galerkin Method. Применение данных модификаций к решению различных задач показывает хорошие результаты [4–8]. Данный подход позволяет сочетать в себе преимущества DG и методов на разнесенных сетках.

<sup>1</sup>**Жалнин Руслан Викторович**, заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

<sup>2</sup>**Масягин Виктор Федорович**, старший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6738-8183>, vmasyagin@gmail.com

<sup>3</sup>**Пескова Елизавета Евгеньевна**, младший научный сотрудник, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, e.e.peskova@mail.ru

Ранее авторами была предложена оригинальная модификация метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений диффузионного типа на неструктурированных разнесенных сетках [13–17]. В данном подходе вспомогательные величины, возникающие при аппроксимации исходных уравнений с помощью DG, ищутся на двойственной сетке, ячейки которой представляют собой медианные контрольные объемы вокруг узлов основной сетки.

Несмотря на очевидные достоинства метода, его реализация требует значительных вычислительных затрат. Настоящая работа посвящена построению и реализации параллельного алгоритма на основе метода Галекркина с разрывными базисными функциями для решения задач конвективного теплообмена на неструктурированных разнесенных сетках.

## 2. Метод Галеркина с разрывными базисными функциями

Рассмотрение численного алгоритма для метода Галеркина с разрывными базисными функциями проведем на примере следующей начально-краевой задачи для переноса тепла:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right), \quad (x, y) \in D, \quad 0 < t \leq T, \quad (2.1)$$

Задаются начальные и граничные условия:

$$\begin{aligned} T(x, y, t) &= g(x, y, t), \quad (x, y) \in \partial D, \\ T(x, y, 0) &= T_0(x, y), \quad (x, y) \in D, \end{aligned}$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности;  $V_x, V_y$  — компоненты вектора скорости движения теплоносителя;  $g$  — температура на границе области;  $T_0$  — температура в начальный момент времени.

Производные второго порядка не могут быть согласованы напрямую в слабой вариационной формулировке с использованием пространства разрывных функций. Поэтому отдельно рассматриваются потоковые переменные как вспомогательные неизвестные уравнения теплопроводности. Исходное уравнение переформулируется в следующую сопряженную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \omega_x + \frac{\partial}{\partial y} \omega_y - \left( V_x \frac{\partial T}{\partial x} + V_y \frac{\partial T}{\partial y} \right), \\ \omega_x = \lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \\ \omega_y = \lambda \frac{\partial T}{\partial y}. \end{cases} \quad (2.2)$$

Для применения метода Галеркина с разрывными базисными функциями область  $D$ , на которой ищется решение, покрывается треугольной сеткой, удовлетворяющей критерию Делоне. Также вводится в рассмотрение сетка, построенная из медианных контрольных объемов  $D_j$ , построенных относительно вершин основной треугольной сетки. На каждом треугольном элементе  $K_j$  температура ищется в виде проекции на пространство полиномов  $P(x, y)$  степени  $st$  в базисе  $\{\phi_i^j(x, y)\}$  с зависящими от времени коэффициентами:

$$T_j(x, y, t) = \sum_{k=0}^{st} T_{kj}(t) \phi_k^j(x, y).$$

На каждом элементе  $D_j$  потоковые переменные ищутся в виде проекции на пространство полиномов  $P(x, y)$  степени  $st$  в базисе  $\{\psi_i^j(x, y)\}$  с зависящими от времени коэффициентами:

$$\begin{aligned}\omega_{xj}(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{st} \omega_{xkj}(t) \psi_k^j(x, y), \\ \omega_{yj}(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{st} \omega_{ykj}(t) \psi_k^j(x, y).\end{aligned}$$

В работе в качестве пробных (базисных) функций на треугольниках используется базис Тейлора:

$$\phi_0^j = 1, \phi_1^j = \frac{x - x_{cj}}{\Delta x_j}, \phi_2^j = \frac{y - y_{cj}}{\Delta y_j},$$

где  $(x_{cj}, y_{cj})$  — координаты центра масс треугольника  $K_j$ ;  $\Delta x_j, \Delta y_j$  — проекции треугольника  $K_j$  на соответствующие оси координат.

В качестве пробных (базисных) функций на ячейках двойственной сетки также используется базис Тейлора:

$$\psi_0^j = 1, \psi_1^j = \frac{x - x'_{cj}}{\Delta x'_j}, \psi_2^j = \frac{y - y'_{cj}}{\Delta y'_j},$$

где  $(x'_c, y'_c)$  — координаты центра масс соответствующей ячейки двойственной сетки  $\Delta x', \Delta y'$  — проекции ячейки  $D_j$  двойственной сетки на соответствующие оси координат.

Приближенное решение системы (2.2) в разрывном методе Галеркина ищется как решение следующих систем:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 \frac{\partial T_{ij}}{\partial t} \int_{K_j} \phi_i^j \phi_k^j dS &= \oint_{\partial K_j} n_x \omega_x^\Gamma \phi_k^j dl + \oint_{\partial K_j} n_y \omega_y^\Gamma \phi_k^j dl - \int_{K_j} \omega_x \frac{\partial \phi_k^j}{\partial x} dS - \int_{K_j} \omega_y \frac{\partial \phi_k^j}{\partial y} dS - \\ &- \left( \oint_{\partial K_j} V_x T^\Gamma n_x \phi_k^j dl + \oint_{\partial K_j} V_y T^\Gamma n_y \phi_k^j dl \right) + \\ &+ \left( \int_{K_j} T_j \frac{\partial (V_x \phi_k^j)}{\partial x} dS + \int_{K_j} T_j \frac{\partial (V_y \phi_k^j)}{\partial y} dS \right), \quad \forall \phi_k^j(x, y), \quad k = 0 \dots 2,\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 \omega_{xij} \int_{D_j} \psi_i^j \psi_k^j dS &= \oint_{\partial D_j} n_x \lambda T^\Gamma \psi_k^j dl + \oint_{\partial D_j} n_y \lambda T^\Gamma \psi_k^j dl - \\ &- \int_{D_j} T \lambda \frac{\partial \psi_k^j}{\partial x} dS - \int_{D_j} T \lambda \frac{\partial \psi_k^j}{\partial y} dS, \quad \forall \psi_k^j(x, y), \quad k = 0 \dots 2,\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^2 \omega_{yij} \int_{D_j} \psi_i^j \psi_k^j dS &= \oint_{\partial D_j} n_x \lambda T^\Gamma \psi_k^j dl + \oint_{\partial D_j} n_y \lambda T^\Gamma \psi_k^j dl - \\ &- \int_{D_j} T \lambda \frac{\partial \psi_k^j}{\partial x} dS - \int_{D_j} T \lambda \frac{\partial \psi_k^j}{\partial y} dS, \quad \forall \psi_k^j(x, y), \quad k = 0 \dots 2,\end{aligned}\tag{2.5}$$

В системе (2.3) значения потоковых величин  $T^\Gamma$  в конвективных членах на ребрах треугольников выбираются в зависимости от направления вектора скорости подобно тому, как это сделано для уравнений газовой динамики в работе [9]. Для вычисления потоковых величин в диффузионных членах на границе элементов используются стабилизирующие добавки подобно тому, как это сделано в работе [10]. Для вычисления интегралов в системах (2.3)–(2.5) используются квадратурные формулы Гаусса необходимой точности [11]. Применяется двухточечный шаблон для вычисления интегралов по контуру и трехточечный – для вычисления интегралов по элементам. Для обеспечения монотонности решения применяется TVD-ограничитель на каждом шаге по времени [12]. Для аппроксимации по времени используется явная схема Эйлера.

### 3. Параллельный вычислительный алгоритм

Построение параллельного вычислительного алгоритма основано на технологии MPI. С помощью пакета METIS проведено геометрическое разбиение расчетной области на множество связанных подобластей по количеству используемых процессоров (рис. 3.1), на каждой из которых вычисляются значения температурного поля с использованием известных начальных и граничных условий. На Рис. 3.2 представлен фрагмент расчетной сетки возле трещины гидроразрыва, где генерируется подробная сетка, поскольку именно в этой области наблюдается высокий градиент температуры. При таком разбиении в сетке могут присутствовать сильно вытянутые ячейки, на которых возникают проблемы с вычислением потоковых переменных. Методика на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями [13–17] лишена этого недостатка за счет рассмотрения потоковых переменных на медианных контрольных объемах [18]. В других областях генерируется менее подробная сетка для сокращения времени вычислений.

На каждой из подобластей дополнительно хранится информация о соседях первого (соседи по ребру) и второго (соседи по вершине, исключая соседей первого уровня) уровней. Для определения граничных условий между соседними подобластями организован межпроцессорный обмен, для которого использовались команды библиотеки MPICH. Он устроен таким образом, что соседние подобласти обмениваются только искомыми функциями  $T_j$ , при этом потоковые величины  $\omega_{xj}, \omega_{yj}$  не участвуют в обмене за счет того, что вся необходимая информация для их вычисления хранится на каждом процессоре. Такой подход существенно снижает объем передаваемых данных. Для отправки и получения данных применяются парные блокирующие функции  $MPI\_Send()$ ,  $MPI\_Recv()$ , выбор которых обусловлен наличием в параллельном алгоритме только обменов между двумя процессорами.

В общем виде вычислительный алгоритм описывается следующим образом:

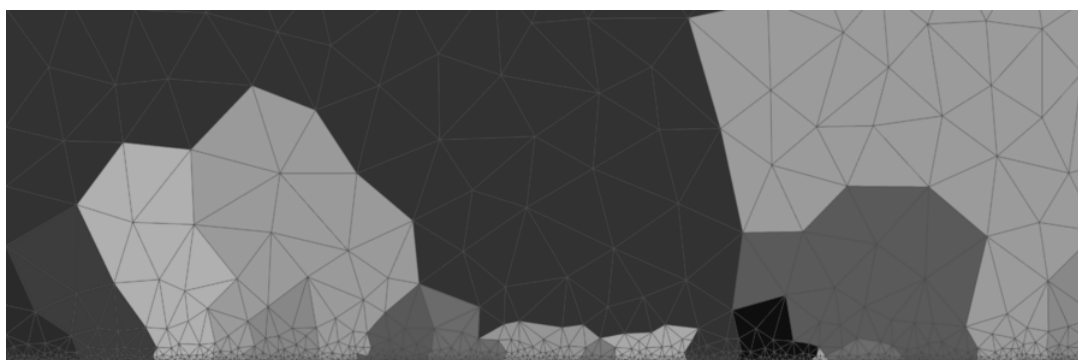
1. начальная инициализация данных;
2. межпроцессорный обмен данными основной сетки;
3. вычисление вспомогательных потоковых величин на ячейках двойственной сетки на текущем шаге по времени с использованием значений температуры на предыдущем шаге по времени или начальное значение для всех внутренних и граничных узлов процессора, согласно системам (2.4)–(2.5);
4. вычисление температуры согласно системе (2.3):
  - (а) вычисление конвективных членов в правой части системы;

- (b) вычисление диффузионных членов в правой части системы;
  - (c) вычисление температуры на текущем шаге по времени;
5. вывод промежуточных результатов расчета, если число шагов кратно значению специальной настройки;
  6. увеличение «счетчика» времени;
  7. если не достигнуто конечное значение времени, переход к п. 2;
  8. завершение работы программы.



Р и с у н о к 3.1

Декомпозиция расчетной области



Р и с у н о к 3.2

Расчетная сетка возле трещины

Исследование эффективности параллельного алгоритма осуществлялось посредством оценки времени выполнения программы на одном процессоре и на нескольких процессорах. При оценке использовались следующие характеристики – ускорение:

$$S_p = \frac{T_p}{T_1}, \quad (3.1)$$

где  $T_1$  – время выполнения на одном процессоре;  $T_p$  – время выполнения на  $p$  процессорах; эффективность:

$$E_p = \frac{S_p}{p}. \quad (3.2)$$

Таблица 1: Ускорение и эффективность работы параллельного алгоритма, 60 169 ячеек

Число процессоров	Время работы программы, с	Ускорение	Эффективность
1	168	–	–
2	83	2.024	1.012
4	42	4.000	1.000
8	22	7.636	0.955
16	12	14.000	0.875

Таблица 2: Ускорение и эффективность работы параллельного алгоритма, 125 052 ячеек

Число процессоров	Время работы программы, с	Ускорение	Эффективность
1	354	–	–
2	174	2.034	1.017
4	89	3.978	0.994
8	45	7.867	0.983
16	24	14.750	0.922

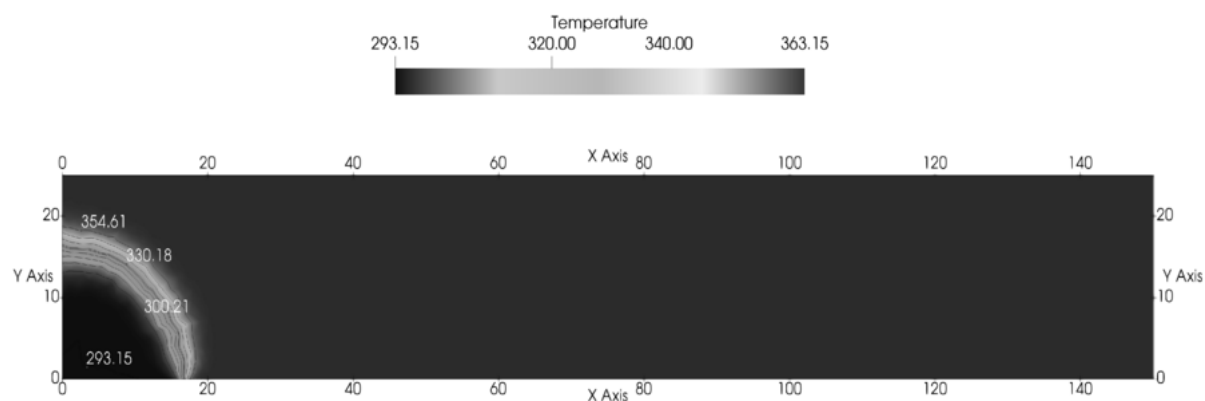
В таблицах 1 и 2 показано время выполнения программы в зависимости от числа используемых в расчетах процессоров с количеством расчетных ячеек 60 169 и 125 052 соответственно. Расчет проводился для 100 шагов по времени. Из таблиц видно, что разработанный параллельный алгоритм достаточно эффективен и дает значительное ускорение при увеличении числа процессоров.

Все расчеты для задачи, описанной в следующем разделе, проводились на кластере с вычислительными ядрами CPU Intel Xeon.

#### 4. Математическое моделирование распространения температуры в пласте с трещиной гидроразрыва и вертикальной нагнетательной скважиной

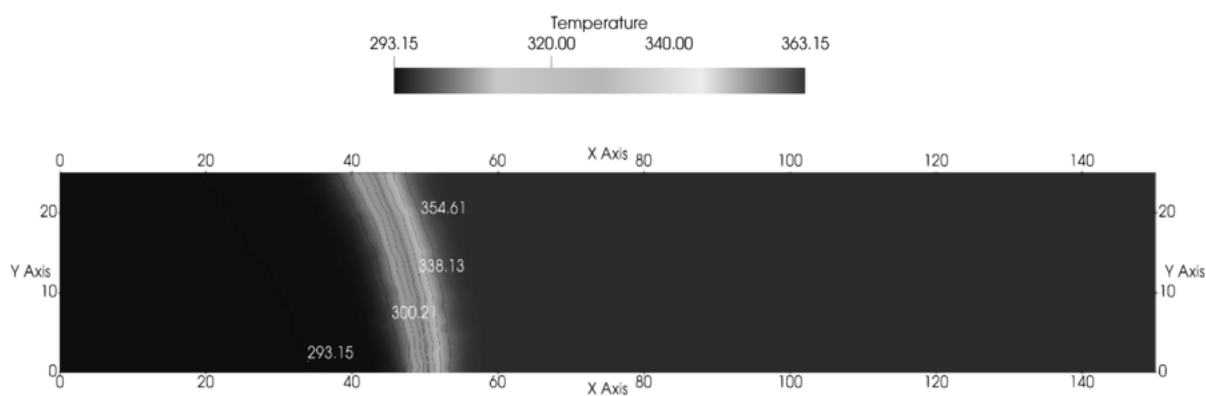
С помощью разработанного параллельного алгоритма проведено математическое моделирование динамики распространения температуры в нефтяном пласте с трещиной и вертикальной нагнетательной скважиной [14].

На Рис. 4.1–4.4 представлено распространение температурного фронта по пласту в различные моменты времени. Ввиду симметрии рассматриваемой области и граничных условий достаточно рассматривать только четверть расчетной области. Из рисунков видно, как во время работы нагнетательной скважины холодная закачиваемая жидкость охлаждает пласт. Значительные изменения температуры наблюдаются вблизи скважины и вдоль распространения трещины, в частности, на створках трещины.



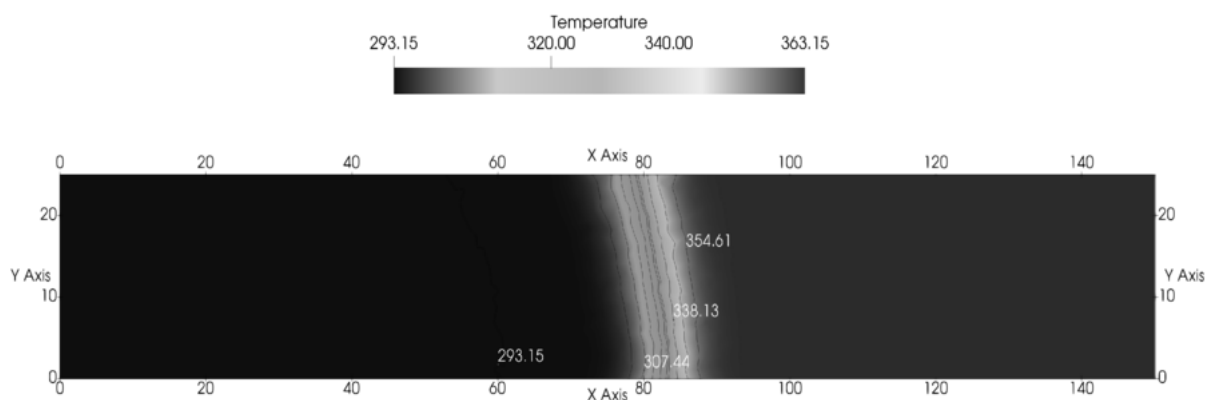
Р и с у н о к 4.1

Распределение температуры на момент времени  $t = 1.0$ , 60 169 ячеек



Р и с у н о к 4.2

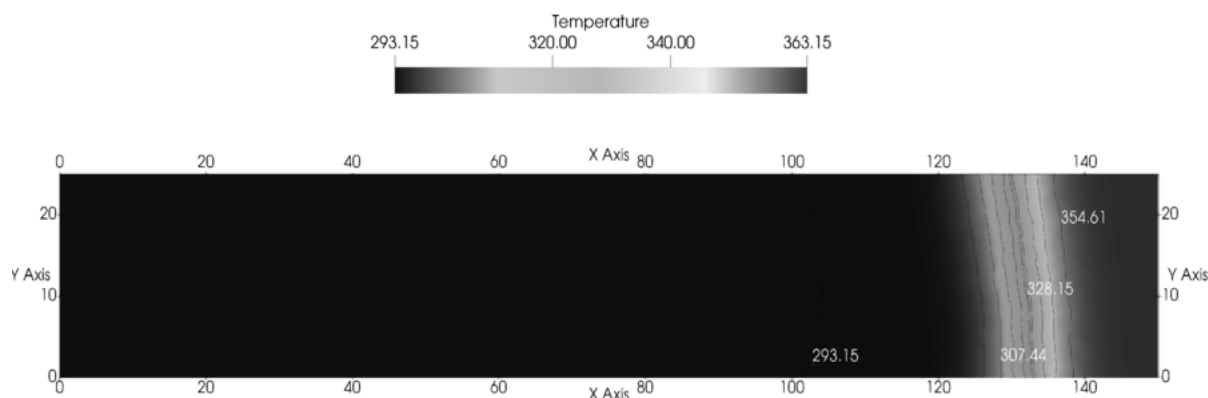
Распределение температуры на момент времени  $t = 3.0$ , 60 169 ячеек



Р и с у н о к 4.3

Распределение температуры на момент времени  $t = 5.0$ , 60 169 ячеек





Р и с у н о к 4.4

Распределение температуры на момент времени  $t = 8.0, 60, 169$  ячеек

Для верификации работы параллельного алгоритма проведено сравнение численных результатов последовательной и параллельной версий программы на разном количестве процессоров с использованием сеток различной размерности. Совпадение результатов получено во всех случаях, что позволяет сделать вывод о правильности построенного параллельного алгоритма.

Таким образом, разработан и реализован эффективный параллельный алгоритм на основе метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения уравнений переноса тепла на неструктурированных разнесенных сетках. С помощью разработанного программного комплекса было проведено исследование температурного поля в нефтяном пласте с трещиной гидроразрыва и вертикальной нагнетательной скважиной. Полученные результаты вычислительного эксперимента хорошо согласуются с полученными ранее результатами с помощью метода конечных объемов на адаптивных сетках [15] и с помощью метода Галеркина с разрывными базисными функциями без использования параллельных технологий [14].

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке Минобрнауки РФ (№ 1.6958.2017/8.9), РФФИ (проект 18-31-00102) и гранта Президента РФ для молодых российских ученых — кандидатов наук (МК-2007.2018.1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. J. Sudirham, J. J. W. van der Vegt, R. M. J. van Damme, “Space-time discontinuous Galerkin method for advection-diffusion problems on time-dependent domains”, *Applied Numerical Mathematics*, **56**:2/12 (2006), 1491–1518.
2. I. Oikawa, “Hybridized discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems”, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **31**:2 (2014), 335–354.
3. H. Wang, S. Wang, Q. Zhang, C.-W. Shu, “Local discontinuous Galerkin methods with implicit-explicit time-marching for multi-dimensional convection-diffusion problems”, *ESAIM: M2AN*, **50**:4 (2016), 1083–1105.
4. L. Zhao, E.-J. Park, “A priori and a posteriori error analysis of a staggered discontinuous Galerkin method for convection dominant diffusion equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **346** (2018), 63–83.

5. J. Du, E. Chung, “An adaptive staggered discontinuous Galerkin method for the steady state convection-diffusion equation”, *Journal of Scientific Computing*, 2018, 1–29.
6. M. Tavelli, M. Dumbser, “A pressure-based semi-implicit space-time discontinuous Galerkin method on staggered unstructured meshes for the solution of the compressible Navier-Stokes equations at all Mach numbers”, *Journal of Computational Physics*, **341** (2017), 341–376.
7. E. Chung, W. Leung, “A sub-grid structure enhanced discontinuous Galerkin method for multiscale diffusion and convection-diffusion problems”, *Communications in Computational Physics*, **14**:2 (2013), 370–392.
8. M. Tavelli, M. Dumbser, “A staggered space-time discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations on two-dimensional triangular meshes”, *Computers & Fluids*, **119** (2015), 235–249.
9. С. К. Годунов, А. В. Забродин, М. Я. Иванов, А. Н. Крайко, Г. П. Прокопов, *Численное решение многомерных задач газовой динамики*, Наука, М., 1976, 400 с.
10. D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L. D. Marini, “Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **39**:5 (2001), 1749–1779.
11. B. Q. Li, *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*, Springer, Berlin, 2006, 578 p.
12. А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов, *Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. Изд. 2-е, исправл. и доп.*, Физматлит, М., 2012, 656 с.
13. Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин, “Решение трехмерных уравнений теплопроводности с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированных сетках”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **19**:3 (2015), 523–533.
14. В. Ф. Масыгин, Ю. О. Бобренёва, И. М. Губайдуллин, Р. В. Жалнин, “Применение разрывного метода Галеркина для моделирования температурного поля в вертикальной скважине с трещиной гидроразрыва”, *Системы управления и информационные технологии*, **63**:1 (2016), 13–16.
15. Ю. О. Бобренёва, И. М. Губайдуллин, Р. В. Жалнин, В. Ф. Масыгин, “Моделирование температурных полей в вертикальной скважине с техногенной трещиной с использованием адаптивных сеток”, *Параллельные вычислительные технологии (ПавТ-2016): тр. междунар. науч. конф. (г. Архангельск, 28 марта — 1 апреля 2016 г.)*, Издательский центр ЮУрГУ, Челябинск, 2016, 454–462.
16. Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин, “Решение задач о нестационарной фильтрации вещества с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированных сетках”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **56**:6 (2016), 989–998.

17. И. М. Губайдуллин, Р. В. Жалнин, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин, А. С. Шуршина, “Применение разрывного метода Галеркина для решения обратной задачи диффузии лекарственных веществ из хитозановых пленок”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18:2** (2016), 48–54.
18. Р. В. Жалнин, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Масыгин, В. Ф. Тишкин, “Об одном способе решения уравнений диффузионного типа с помощью разрывного метода Галёркина на неструктурированной сетке”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16:2** (2014), 7–13.

Поступила 21.10.2018

MSC2010 34C20

## Construction of a parallel computational algorithm based on the Galerkin discontinuous method for solving convective heat transfer problems on unstructured staggered grids

© R. V. Zhalnin<sup>1</sup>, V. F. Masyagin<sup>2</sup>, E. E. Peskova<sup>3</sup>

**Abstract.** The present paper is devoted to the construction of a parallel computational algorithm for solving convective heat transfer problems using the discontinuous Galerkin method on unstructured staggered grids. The computational algorithm is implemented on the basis of MPI parallel computing technology. A special feature of the algorithm is that auxiliary variables that occur when the diffusion terms are approximated by the discontinuous Galerkin method are not involved in interprocessor exchange. The developed parallel algorithm is applied to modelling of temperature dynamics in formation with a vertical injection well and hydraulic fracturing. The paper presents the results of a computational experiment and estimates the effectiveness of a parallel algorithm.

**Key Words:** discontinuous Galerkin method, vertical injection well, hydraulic fracturing, convective heat transfer equation, staggered grids, parallel computing, MPI technology

## REFERENCES

1. J. J. Sudirham, J. J. W. van der Vegt, R. M. J. van Damme, “Space-time discontinuous Galerkin method for advection-diffusion problems on time-dependent domains”, *Applied Numerical Mathematics*, **56:2/12** (2006), 1491–1518.
2. I. Oikawa, “Hybridized discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems”, *Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics*, **31:2** (2014), 335–354.

<sup>1</sup>**Ruslan V. Zhalnin**, Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1103-3321>, zhrv@mrsu.ru

<sup>2</sup>**Viktor F. Masyagin**, Senior Researcher, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6738-8183>, vmasyagin@gmail.com

<sup>3</sup>**Elizaveta E. Peskova**, Junior Researcher, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2618-1674>, e.e.peskova@mail.ru

3. H. Wang, S. Wang, Q. Zhang, C.-W. Shu, “Local discontinuous Galerkin methods with implicit-explicit time-marching for multi-dimensional convection-diffusion problems”, *ESAIM: M2AN*, **50**:4 (2016), 1083–1105.
4. L. Zhao, E.-J. Park, “A priori and a posteriori error analysis of a staggered discontinuous Galerkin method for convection dominant diffusion equations”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **346** (2018), 63–83.
5. J. Du, E. Chung, “An adaptive staggered discontinuous Galerkin method for the steady state convection-diffusion equation”, *Journal of Scientific Computing*, 2018, 1–29.
6. M. Tavelli, M. Dumbser, “A pressure-based semi-implicit space-time discontinuous Galerkin method on staggered unstructured meshes for the solution of the compressible Navier-Stokes equations at all Mach numbers”, *Journal of Computational Physics*, **341** (2017), 341–376.
7. E. Chung, W. Leung, “A sub-grid structure enhanced discontinuous Galerkin method for multiscale diffusion and convection-diffusion problems”, *Communications in Computational Physics*, **14**:2 (2013), 370–392.
8. M. Tavelli, M. Dumbser, “A staggered space-time discontinuous Galerkin method for the incompressible Navier-Stokes equations on two-dimensional triangular meshes”, *Computers & Fluids*, **119** (2015), 235–249.
9. S. K. Godunov, A. V. Zabrodin, M. YA. Ivanov, A. N. Kraiko, G. P. Prokopov, *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoj dinamiki*, Nauka, Moscow, 1976 (In Russ.), 400 p.
10. D. N. Arnold, F. Brezzi, B. Cockburn, L. D. Marini, “Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **39**:5 (2001), 1749–1779.
11. B. Q. Li, *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*, Springer, Berlin, 2006, 578 p.
12. A. G. Kulikovskiy, N. V. Pogorelov, A. Yu. Semenov, *[Mathematical problems in the numerical solution of hyperbolic systems]*, 2nd ed., corrected. and ext., Fizmatlit, Moscow, 2012 (In Russ.), 656 p.
13. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “[Solution of 3D heat conduction equations using the discontinuous Galerkin method on unstructured grids]”, *Vestnik Samarskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta: Fiziko-matematicheskiiye nauki*, **19**:3 (2015), 523–533 (In Russ.).
14. V. F. Masyagin, Yu. O. Bobreneva, I. M. Gubaidullin, R. V. Zhalnin, “[Application of discontinuous Galerkin method for modeling of the temperature field in a vertical well with hydraulic fracture]”, *Sistemy upravleniya i informacionnye tekhnologii*, **63**:1 (2016), 13–16 (In Russ.).
15. Yu. O. Bobreneva, I. M. Gubaidullin, R. V. Zhalnin, V. F. Masyagin, “[Modelling of temperature fields in a vertical well with a man-made crack using adaptive grids]”, *PCT 2016 Parallel Computing Technologies Proceedings of the 10th Annual International Scientific Conference on Parallel Computing Technologies*, 2016, 454–462 (In Russ.).

16. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “[Solving the problem of non-stationary filtration of substance by the discontinuous Galerkin method on unstructured grids]”, *Zhurnal vychislitel'noy matematiki i matematicheskoy fiziki*, **56**:6 (2016), 989–998 (In Russ.).
17. I. M. Gubaidullin, R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, A. S. Shurshina, “[Application of the DG method for solution of inverse problem of medicine diffusion out from the chitosan film]”, *Zhurnal SVMO*, **18**:2 (2016), 48–54 (In Russ.).
18. R. V. Zhalnin, M. E. Ladonkina, V. F. Masyagin, V. F. Tishkin, “[Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructured grids]”, *Zhurnal SVMO*, **16**:2 (2014), 7–13 (In Russ.).

*Submitted 21.10.2018*

УДК 517.956.2:51-72

## Моделирование взаимодействия разноразмерных объектов, помещенных в слабый электролит

© А. О. Сыромясов<sup>1</sup>

**Аннотация.** Решаются задачи о взаимодействии двух сферических частиц разных радиусов, а также сферической частицы и плоскости, помещенных в электролит. Толщина двойного электрического слоя предполагается большой, так что уравнение Пуассона–Больцмана, описывающее распределение электрического потенциала, линеаризуется. Поставленные задачи решаются методом мультипольного разложения; плоскость моделируется фиктивной частицей. Для коэффициентов разложения получены асимптотические представления. Вычислены силы взаимодействия между телами, находящимися в электролите. Рассмотрен предельный случай, в котором радиус одной сферы значительно превышает радиус другой. Показано, что он не сводится к описанию частицы и плоскости. Неожиданным результатом расчетов служит то, что при некоторых условиях плоскость может притягивать к себе сферу, имеющую потенциал того же знака, в то время как между двумя сферами с одноименными потенциалами на поверхностях всегда возникает отталкивание.

**Ключевые слова:** слабый электролит, линеаризованное уравнение Пуассона–Больцмана, двойной электрический слой, мультипольное разложение, асимптотические методы, фиктивная частица

### 1. Введение

Расчет электрического поля в жидком электролите, содержащем взвешенные частицы, – задача не новая, но по-прежнему актуальная. В последние десятилетия интерес к этой теме возрастает в связи с тем, что промышленность требует разработки новых материалов, а современные технологии позволяют наблюдать непосредственно за микро-частицами взвеси, измерять интенсивность их взаимодействия и даже манипулировать ими [1].

Хотя жидкость в целом нейтральна, вокруг помещенных в нее инородных тел образуются двойные электрические слои (ДЭС) с повышенной концентрацией ионов одного знака. Их перекрытие приводит к искажению электрического поля и взаимодействию тел. В зависимости от дальности и интенсивности взаимодействия результатом такого перекрытия может служить образование в электролите периодических структур [2–3].

Математической моделью электрического поля в электролите служит уравнение Пуассона–Больцмана [4], которое может быть линеаризовано в случае широких ДЭС [5].

<sup>1</sup>**Сыромясов Алексей Олегович**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, [syal1@yandex.ru](mailto:syal1@yandex.ru)

В большинстве случаев предполагается, что инородные тела в жидкости являются сферами равного радиуса [6]. Однако следует рассматривать также взаимодействие разноразмерных частиц, поскольку несущая жидкость может содержать примеси нескольких сортов. Особый интерес представляет случай, когда размеры частиц отличаются во много раз.

Еще один класс задач, возникающий при изучении дисперсных систем и тесно связанный с предыдущим, – моделирование взаимодействия тела и бесконечной поверхности (например, плоскости или круглого цилиндра). Подобные проблемы появляются, в частности, при описании левитации частиц вблизи электрода [7] или фильтрации жидкости с примесями через фильтры, представляющие собой совокупность заряженных трубок [8].

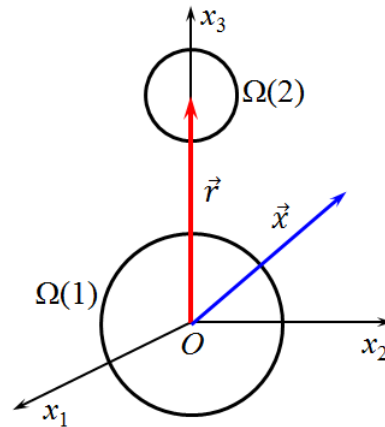
Подходы, применяемые при математическом моделировании взаимодействий вида «частица + частица в электролите» и «частица + плоскость в электролите» (уже упомянутые работы [7–8], а также [9] и т. д.), обладают следующими общими чертами.

- Предположение о том, что ДЭС узки по сравнению с размерами взаимодействующих тел. Аналогично приближению теории смазки для вязкой жидкости, это позволяет перейти от трехмерной геометрии задачи к одномерной. С другой стороны, подобная гипотеза, справедливая для сильных электролитов, исключает из рассмотрения органические вещества. Кроме того, силы, возникающие между частицами взвеси, при выполнении такой гипотезы оказываются весьма короткодействующими.
- Использование специальных систем координат – бисферической, бицилиндрической и т. д. Это позволяет разделить переменные в уравнении Пуассона–Больцмана. Однако указанные системы не могут быть эффективно применены в случаях, когда требуется описать взаимодействие большего числа тел.

Таким образом, целесообразно предложить иной метод расчета электрических полей, который бы позволял моделировать перекрытие широких ДЭС и учитывать наличие в жидкости многих тел одновременно. В настоящей статье такой метод применяется к моделированию взаимодействия двух сфер разных размеров, а также сферы и плоскости; жидкость, содержащая инородные тела, считается неподвижной.

## 2. Две сферы разных радиусов в слабом электролите

Рассмотрим частицы  $\Omega(1)$  и  $\Omega(2)$  радиусов  $a_1$  и  $a_2$ , соответственно; центры  $\Omega(1)$  и  $\Omega(2)$  соединяются вектором  $\vec{r}$  длины  $r$ . Введем прямоугольную систему координат  $Ox_1x_2x_3$  так, чтобы ее начало совпадало с центром первой сферы, а центр второй сферы лежал на оси  $Ox_3$ ; тогда  $\vec{r} = (0, 0, r)$ . Вектор  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  задает положение произвольной точки относительно начала координат (Рис. 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Геометрия задачи о двух сферах

Будем предполагать, что частицы являются твердыми и не перекрываются:

$$r \geq a_1 + a_2.$$

Потенциал поля  $\psi$  вне частиц удовлетворяет линейаризованному уравнению Пуассона–Больцмана:

$$\Delta\psi = \kappa^2\psi. \quad (2.1)$$

Здесь и далее  $\Delta$  – оператор Лапласа;  $\kappa^{-1}$  – характеристическая толщина ДЭС.

На поверхности каждой из частиц потенциал постоянен:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_{a1}, \quad |\vec{x}| = a_1, \\ \psi &= \psi_{a2}, \quad |\vec{x} - \vec{r}| = a_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Наконец, на большом удалении от начала координат возмущения, вносимые инородными телами в распределение потенциала, пренебрежимо малы:

$$\psi \rightarrow 0, \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Для решения задачи (2.1)–(2.3) используется метод, описанный ранее в [10] применительно к двум идентичным сферическим частицам. Простейшим решением (2.1), имеющим сферическую симметрию и затухающим на бесконечности, служит

$$\Lambda_0(\vec{x}) = \frac{e^{-\kappa|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}.$$

В силу линейности указанного уравнения любое его решение, удовлетворяющее (2.3), можно представить как линейную комбинацию мультиполей – частных производных  $\Lambda_0$ :

$$L_{j\dots k}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \cdots \frac{\partial}{\partial x_k} \Lambda_0(\vec{x}). \quad (2.4)$$

Структура тензорных коэффициентов перед мультиполями определяется с помощью теории нелинейных тензорных функций тензорного аргумента [11].

Для рассматриваемой конфигурации  $Ox_3$  служит осью симметрии, а плоскости  $Ox_1x_3$  и  $Ox_2x_3$  – зеркальными плоскостями, а значит, задача имеет группу симметрии  $3 \cdot m$ . Из этого



после некоторых элементарных упрощений следует, что потенциал можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \psi = & C_0(1)\Lambda_0(\vec{x}) + CB(1)\Lambda_3(\vec{x}) + CC(1)\Lambda_{33}(\vec{x}) + CD(1)\Lambda_{333}(\vec{x}) + \dots + \\ & + C_0(2)\Lambda_0(\vec{x} - \vec{r}) + CB(2)\Lambda_3(\vec{x} - \vec{r}) + CC(2)\Lambda_{33}(\vec{x} - \vec{r}) + CD(2)\Lambda_{333}(\vec{x} - \vec{r}) + \dots \end{aligned} \quad (2.5)$$

Номера 1 и 2 соответствуют мультиполям, зависящим от радиус-векторов  $\vec{x}$  и  $\vec{x} - \vec{r}$  относительно центров  $\Omega(1)$  и  $\Omega(2)$ .

Остающиеся неизвестными коэффициенты  $C_0(1)$ ,  $CB(1)$ , ... представляются в виде разложения по степеням двух малых параметров

$$\varepsilon = \frac{a_1}{r}, \quad \delta = \kappa r \quad (2.6)$$

и находятся подстановкой (2.4)–(2.5) в граничные условия (2.2).

Если  $\varepsilon$  и  $\delta$  имеют одинаковый порядок малости, то с точностью до суммарной четвертой степени параметров искомые коэффициенты имеют вид:

$$\begin{aligned} C_0(1) &= \Psi_1 \left\{ 1 - \varepsilon\beta + \varepsilon\delta\beta - \frac{1}{2}\varepsilon\delta^2\beta + \frac{1}{6}\varepsilon\delta^3\beta + \varepsilon^2\alpha - \varepsilon^2\delta(2\alpha + \beta) + \right. \\ &\quad \left. + \varepsilon^2\delta^2(2\alpha + \beta) - \varepsilon^3\alpha\beta + \varepsilon^3\delta[\alpha^2 + \alpha(1 + 3\beta)] + \varepsilon^4(\alpha^2 + \alpha^3) \right\}, \\ CB(1) &= \Psi_1 a_1 \left( \varepsilon^2\beta - \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2\beta - \varepsilon^3\alpha + \varepsilon^3\delta\alpha + \varepsilon^4\alpha\beta \right), \\ CC(1) &= \Psi_1 a_1^2 \left( -\frac{1}{2}\varepsilon^3\beta + \frac{1}{2}\varepsilon^4\alpha \right), \\ CD(1) &= -\frac{1}{6}\Psi_1 a_1^3 \varepsilon^4\beta, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где введены обозначения

$$\Psi_1 = a_1 \psi_{a1} e^{\kappa a_1}, \quad \Psi_2 = a_2 \psi_{a2} e^{\kappa a_2}, \quad \alpha = \frac{a_2}{a_1}, \quad \beta = \frac{\Psi_2}{\Psi_1}.$$

Чтобы найти  $C_0(2)$ ,  $CB(2)$ ,  $CC(2)$ ,  $CD(2)$ , следует в полученных формулах заменить  $\varepsilon$  на  $a_1/r$ , после чего поменять местами  $a_1$  и  $a_2$ ,  $\Psi_1$  и  $\Psi_2$  соответственно, а также поменять знаки у  $CB(2)$  и  $CD(2)$  на противоположные.

По известному распределению потенциала можно вычислить силу  $\vec{F}$ , действующую на каждую из частиц. Для произвольного тела  $\Omega$  с поверхностью  $\partial\Omega$  проекция этого вектора на ось  $Ox_i$  равна

$$F_i = \oint_{\partial\Omega} p_{ij} n_j dS, \quad (2.8)$$

где  $\vec{n}$  – единичный вектор внешней нормали к  $\partial\Omega$ ; по повторяющимся индексам производится суммирование;  $p_{ij}$  – компоненты тензора напряжений:

$$p_{ij} = -\frac{\varepsilon_F}{8\pi} \frac{\partial\psi}{\partial x_s} \frac{\partial\psi}{\partial x_s} \delta_{ij} + \frac{\varepsilon_F}{4\pi} \frac{\partial\psi}{\partial x_s} \frac{\partial\psi}{\partial x_s}. \quad (2.9)$$

Здесь  $\varepsilon_F = \text{const}$  – диэлектрическая проницаемость среды; выражение (2.9) записано в системе CGSE [12].

Подстановка (2.4)–(2.5), (2.7) в (2.8)–(2.9) дает для частицы  $\Omega(1)$  с центром в начале координат:

$$F_3 = \frac{\varepsilon_F \varepsilon^2 \Psi_1 \Psi_2}{a_1^2} \left[ -1 + \frac{1}{2}\delta^2 + \varepsilon \left( \beta + \frac{\alpha}{\beta} \right) - \varepsilon\delta \left( \beta + \frac{\alpha}{\beta} \right) - 3\varepsilon^2\alpha \right]. \quad (2.10)$$

Компоненты  $F_1$  и  $F_2$  равны нулю; это очевидно и из соображений симметрии.

При  $\varepsilon \rightarrow 0$ , что соответствует далеко расположенным и потому не взаимодействующим частицам, выражения (2.7) переходят в хорошо известное решение задачи о распределении потенциала вокруг одиночной сферы:

$$C_0(1) = \Psi_1, \quad C_0(2) = \Psi_2,$$

остальные множители равны нулю. При этом сила, действующая на сферу, также стремится к нулю.

Если оставить в (2.10) слагаемые наиболее низкого порядка малости,  $F_3$  примет вид

$$F_3 = -\frac{\varepsilon_F \varepsilon^2 \Psi_1 \Psi_2}{a_1^2}. \quad (2.11)$$

Пользуясь тем, что поверхностная плотность заряда на поверхности тела  $\Omega$  равна

$$-\frac{\varepsilon_F}{4\pi} \frac{\partial \psi}{\partial n},$$

в том же «главном» приближении получим, что сферы  $\Omega(1)$  и  $\Omega(2)$  имеют заряды

$$Q(1) = \varepsilon_F a_1 \psi_{a1}, \quad Q(2) = \varepsilon_F a_2 \psi_{a2}. \quad (2.12)$$

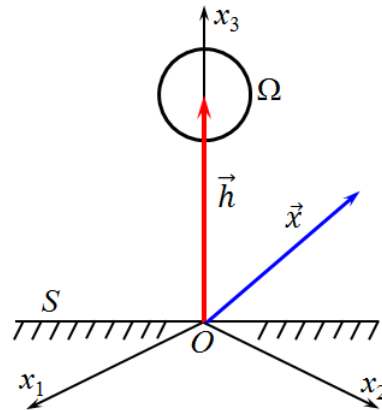
Сравнивая (2.11) и (2.12), легко прийти к выводу, что в пределе, когда сферы расположены далеко друг от друга, они взаимодействуют как точечные заряды  $Q(1)$  и  $Q(2)$ , расположенные на расстоянии  $r$  друг от друга. В частности, если  $\psi_{a1}$  и  $\psi_{a2}$  имеют одинаковые знаки, то сила, действующая между частицами, в своем «главном» приближении является силой отталкивания.

В случае, когда  $a_1 = a_2$ ,  $\psi_{a1} = \psi_{a2}$ , а значит, и  $\Psi_1 = \Psi_2$ , выражения (2.7) преобразуются в формулы, описывающие распределение потенциала вокруг двух одинаковых частиц [10], а выражение (2.10) – в соответствующую формулу для силы взаимодействия между двумя сферами.

### 3. Взаимодействие сферической частицы и плоскости

Пусть центр сферической частицы  $\Omega$ , имеющей радиус  $a$ , расположен на расстоянии  $h$  от плоскости  $S$ . Можно считать, что электролит, куда помещена частица взвеси, занимает полубесконечное пространство, ограниченное указанной плоскостью.

Для моделирования взаимодействия  $\Omega$  и  $S$  система координат  $Ox_1x_2x_3$  вводится так, что плоскость  $Ox_1x_2$  совпадает с  $S$ , а центр частицы имеет радиус-вектор  $\vec{h} = (0, 0, h)$ . Как и ранее, положение произвольной точки относительно начала координат задается вектором  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$  (Рис. 3.1).



Р и с у н о к 3.1

Геометрия задачи о сфере и плоскости

В дальнейшем размер частицы считается малым по сравнению с дистанцией от ее центра до плоскости; в свою очередь, это расстояние намного меньше характерной ширины ДЭС, поэтому

$$\varepsilon = \frac{a}{h}, \quad \delta = \kappa h$$

являются безразмерными малыми параметрами одного порядка.

Для потенциала  $\psi$  по-прежнему справедливо (2.1), но граничные условия, присоединяемые к этому уравнению, будут несколько иными, чем в предыдущем разделе.

Будем предполагать, что на поверхности сферы и на плоскости  $\psi$  принимает постоянные значения:

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_s, \quad x_3 = 0, \\ \psi &= \psi_a, \quad |\vec{x} - \vec{h}| = a. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Далеко от  $S$  и  $\Omega$  он стремится к нулю:

$$\psi \rightarrow 0, \quad x_3 \rightarrow \infty \vee |\vec{x} - \vec{h}| \rightarrow \infty. \quad (3.2)$$

Приближенное решение задачи (2.1), (3.1)–(3.2) изложено в [13–14]. Однако в этих работах сфера заменялась точечным зарядом, так что второе из условий (3.1) заведомо не выполнялось. Распределение потенциала отыскивалось в цилиндрических координатах и было записано в виде несобственного интеграла от выражения, содержащего функцию Бесселя  $J_0$ . Такая форма представления делает вычисление  $\psi$  неудобным:  $J_0$  имеет разные асимптотики при малых и больших значениях аргумента. Кроме того, из-за использования специфичной системы координат указанное решение нельзя распространить на случай нескольких частиц, находящихся в полубесконечной области.

Более общим подходом, теоретически позволяющим описать взаимодействие произвольного количества тел любой формы, является метод отражений. Традиционно он применяется при решении задач гидродинамики [15–16]. Его недостатком служит то, что граничные условия соответствующей задачи удовлетворяются лишь приближенно. В [17] предлагается более совершенный метод. Вместо взаимодействия каждой из частиц с плоскостью рассматривается взаимодействие реальной и фиктивной зеркально расположенной частицы, причем граничные условия на поверхности фиктивных частиц подбираются так, чтобы изначально заданные соотношения на плоскости выполнялись точно. Ниже мы в общих чертах будем следовать этому методу.

Представим искомый потенциал в виде

$$\psi = \psi_\infty + \psi', \quad (3.3)$$

где  $\psi_\infty$  – решение задачи об электролите, ограниченном лишь плоскостью  $S$ , без учета сферы  $\Omega$ , а  $\psi'$  – возмущение, вносимое  $\Omega$ . Тогда  $\psi_\infty$  удовлетворяет системе соотношений

$$\Delta\psi_\infty = \kappa^2\psi_\infty; \quad \psi_\infty|_{x_3=0} = \psi_s; \quad \lim_{x_3 \rightarrow \infty} \psi_\infty = 0,$$

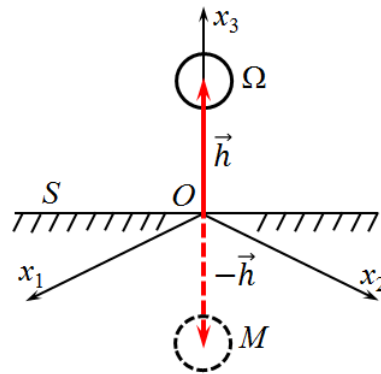
откуда

$$\psi_\infty = \psi_s e^{-\kappa x_3}. \quad (3.4)$$

Из (2.1), (3.1)–(3.3) следует, что для  $\psi'$  справедливы равенства

$$\begin{aligned} \Delta\psi' &= \kappa^2\psi', \\ \psi' &\rightarrow 0, \quad |\vec{x} - \vec{h}| \rightarrow \infty, \\ \psi' &= 0, \quad x_3 = 0, \\ \psi' + \psi_\infty &= \psi_a, \quad |\vec{x} - \vec{h}| = a. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Вместо системы «сфера  $\Omega$  + плоскость  $S$ » будем изучать иную – «сфера  $\Omega$  + фиктивная сфера  $M$ ». Расположим частицу  $M$  зеркально симметрично  $\Omega$  относительно  $S$ , чтобы ее центр находился в точке с радиус-вектором  $-\vec{h}$  (Рис. 3.2).



Р и с у н о к 3.2

Положение зеркальной частицы

Аналогично (2.5), представим  $\psi'$  в виде суперпозиции возмущений, приходящих от двух сфер:

$$\begin{aligned} \psi' &= C_0(\Omega)\Lambda_0(\vec{x} - \vec{h}) + CB(\Omega)\Lambda_3(\vec{x} - \vec{h}) + CC(\Omega)\Lambda_{33}(\vec{x} - \vec{h}) + CD(\Omega)\Lambda_{333}(\vec{x} - \vec{h}) + \dots \\ &+ C_0(M)\Lambda_0(\vec{x} + \vec{h}) + CB(M)\Lambda_3(\vec{x} + \vec{h}) + CC(M)\Lambda_{33}(\vec{x} + \vec{h}) + CD(M)\Lambda_{333}(\vec{x} + \vec{h}) + \dots \end{aligned}$$

Из определения (2.4) следует, что при  $x_3 = 0$  мультиполи четного порядка  $\Lambda_0(\vec{x} \pm \vec{h})$ ,  $\Lambda_{33}(\vec{x} \pm \vec{h})$ , ... четны по  $\vec{h} = (0, 0, h)$ , а мультиполи  $\Lambda_3(\vec{x} \pm \vec{h})$ ,  $\Lambda_{333}(\vec{x} \pm \vec{h})$ , ..., имеющие нечетный порядок, нечетны. Поэтому при

$$C_0(M) = -C_0(\Omega), \quad CB(M) = CB(\Omega), \quad CC(M) = -CC(\Omega), \quad CD(M) = CD(\Omega), \dots$$

будут выполнены все условия задачи (3.5), кроме последнего. Итак,

$$\begin{aligned} \psi' &= C_0[\Lambda_0(\vec{x} - \vec{h}) - \Lambda_0(\vec{x} + \vec{h})] + CB[\Lambda_3(\vec{x} - \vec{h}) + \Lambda_3(\vec{x} + \vec{h})] + \\ &+ CC[\Lambda_{33}(\vec{x} - \vec{h}) - \Lambda_{33}(\vec{x} + \vec{h})] + CD[\Lambda_{333}(\vec{x} - \vec{h}) + \Lambda_{333}(\vec{x} + \vec{h})] + \dots \end{aligned} \quad (3.6)$$

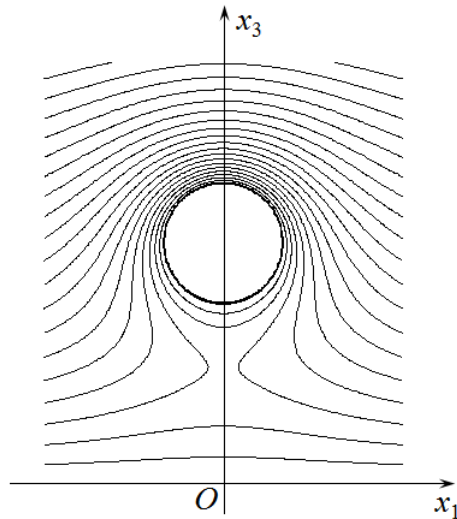
Скалярные коэффициенты  $C_0, CB, CC, CD, \dots$  находятся подстановкой (3.6) в граничное условие на поверхности  $\Omega$  и представляются разложением по степеням  $\varepsilon$  и  $\delta$ , упомянутым выше в данном разделе. Обозначив

$$\Psi_A = a\psi_a e^{\kappa a}, \quad \Psi_S = a\psi_s e^{\kappa a},$$

получим с точностью до четвертой степени малых параметров:

$$\begin{aligned} C_0 &= (\Psi_A - \Psi_S) \left( 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{8}\varepsilon^3 + \frac{1}{8}\varepsilon^4 \right) + \Psi_S \left( \delta - \frac{1}{2}\delta^2 + \frac{1}{6}\delta^3 - \frac{1}{24}\delta^4 \right) + \\ &\quad + \left( -\Psi_A + \frac{3}{2}\Psi_S \right) \varepsilon \delta + \left( \Psi_A - \frac{9}{4}\Psi_S \right) \varepsilon \delta^2 + \left( -\frac{2}{3}\Psi_A + \frac{9}{4}\Psi_S \right) \varepsilon \delta^3 + \\ &\quad + \left( -\frac{1}{2}\Psi_A + \frac{3}{4}\Psi_S \right) \varepsilon^2 \delta + \left( \Psi_A - \frac{43}{24}\Psi_S \right) \varepsilon^2 \delta^2 + \left( -\frac{1}{4}\Psi_A + \frac{1}{8}\Psi_S \right) \varepsilon^3 \delta, \\ CB &= a\varepsilon \left[ \Psi_S \left( -\delta + \delta^2 - \frac{1}{2}\delta^3 \right) + (\Psi_A - \Psi_S) \left( \frac{1}{4}\varepsilon + \frac{1}{8}\varepsilon^2 + \frac{1}{16}\varepsilon^3 \right) + \frac{1}{4}\Psi_S \varepsilon \delta + \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{2}\Psi_A + \frac{11}{8}\Psi_S \right) \varepsilon \delta^2 + \left( -\frac{1}{4}\Psi_A + \frac{3}{8}\Psi_S \right) \varepsilon^2 \delta \right] \\ CC &= a^2 \varepsilon^3 \left[ \Psi_S \left( -\frac{1}{6}\delta^2 + \frac{1}{16}\varepsilon \delta \right) + (\Psi_A - \Psi_S) \left( \frac{1}{16}\varepsilon + \frac{1}{32}\varepsilon^2 \right) \right], \\ CD &= \frac{1}{96} a^3 \varepsilon^4 (\Psi_A - \Psi_S). \end{aligned} \quad (3.7)$$

На Рис. 3.3 показаны эквипотенциальные линии  $\psi$  в плоскости  $Ox_1x_3$ , полученные после подстановки (3.4), (3.6)–(3.7) в (3.3). При расчетах параметрам были приданы следующие конкретные значения:  $a = 1$ ,  $\psi_a = \psi_s = 1$ ,  $\varepsilon = 1/4$ ,  $\delta = 1/3$ .



Р и с у н о к 3.3

Распределение потенциала возле частицы и плоскости

Легко видеть, что при  $\Psi_A = 0$  решение (3.6)–(3.7) не принимает вид (3.4), а при  $\Psi_S = 0$  – не становится решением задачи об одиночной сфере вида

$$\psi = C_0 \Lambda_0. \quad (3.8)$$

Это происходит потому, что поверхность  $|\vec{x} - \vec{h}| = a$  не является эквипотенциальной для  $\psi_\infty$ , а плоскость  $S$  – для функции (3.8).

При  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\delta \rightarrow 0$  (3.6)–(3.7) переходят в (3.8), в котором  $C_0 = \Psi_A - \Psi_S$ . Таким образом, распределение  $\psi$  в начальном приближении пропорционально разности потенциалов на поверхности частицы  $\Omega$  и на плоскости.

Силу, действующую на сферу со стороны плоскости, можно вычислить, подставив (3.3)–(3.4), (3.6)–(3.7) в (2.8)–(2.9). Очевидно,  $F_1 = F_2 = 0$ ;  $F_3$  имеет второй порядок малости и с выбранной точностью принимает значение

$$F_3 = \frac{\varepsilon_F}{a^2} \left[ \Psi_A^2 \left( -\frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2\delta^2 - \frac{1}{4}\varepsilon^3 + \frac{1}{2}\varepsilon^3\delta - \frac{3}{16}\varepsilon^4 \right) + \Psi_A\Psi_S \left( \varepsilon\delta - \varepsilon\delta^2 + \frac{1}{2}\varepsilon\delta^3 + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{13}{4}\varepsilon^2\delta^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^3 - \frac{5}{4}\varepsilon^3\delta + \frac{3}{8}\varepsilon^4 \right) + \Psi_S^2 \left( -\varepsilon\delta + 2\varepsilon\delta^2 - 2\varepsilon\delta^3 - \frac{1}{4}\varepsilon^2 + 3\varepsilon^2\delta^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{4}\varepsilon^3 + \frac{3}{4}\varepsilon^3\delta - \frac{3}{16}\varepsilon^4 \right) \right]. \quad (3.9)$$

В «главном» приближении эта сила равна

$$F_3 = \frac{\varepsilon_F}{a^2} \left[ -\frac{1}{4}\varepsilon^2 (\Psi_A - \Psi_S)^2 + \Psi_S(\Psi_A - \Psi_S)\varepsilon\delta \right],$$

что может вести к неожиданному результату: при определенном соотношении на  $\varepsilon$  и  $\delta$  между плоскостью и частицей, имеющими потенциалы одного и того же знака ( $\Psi_A\Psi_S \geq 0$ ), возникает не *отталкивание*, а *притяжение*. Это выражается в том, что  $F_3 < 0$ , а значит, вектор  $\vec{F}$  направлен в сторону плоскости, а не от нее.

В отсутствие разности потенциалов между  $\Omega$  и  $S$  их взаимодействие ожидаемо слабеет, поскольку при  $\Psi_A = \Psi_S$  величина (3.9) имеет уже третий порядок малости.

Наконец, при  $\Psi_S = 0$  выражение (3.9) переходит в

$$F_3 \approx -\frac{\varepsilon_F\varepsilon^2}{4a^2}\Psi_A^2 = -\frac{\varepsilon_F}{(2h)^2}\Psi_A^2;$$

это соответствует притяжению двух противоположных точечных зарядов, расположенных на том же расстоянии  $2h$  друг от друга, что и центры  $\Omega$  и  $M$ . Сами заряды вычисляются аналогично (2.12). Разница знаков у реального и фиктивного зарядов непосредственно вытекает из (3.6): за этот знак «отвечает» величина  $C_0$ , а множители перед  $\Lambda_0(\vec{x} - \vec{h})$  и  $\Lambda_0(\vec{x} + \vec{h})$  противоположны.

#### 4. Взаимодействие сфер с сильно различающимися радиусами

Рассмотрим случай, когда радиусы  $\Omega(1)$  и  $\Omega(2)$  отличаются во много раз, и выясним, сводится ли он к взаимодействию сферы и плоскости. Дополнительно предположим, что потенциалы на поверхностях сфер – величины одного порядка:  $\psi_{a2} \sim \psi_{a1}$ . Для определенности будем изучать действие  $\Omega(2)$  на  $\Omega(1)$ .

При  $a_2 \ll a_1$  (изучается действие маленькой сферы на большую) параметры (2.6) можно считать малыми, но произвольными. Отношения  $\alpha$  и  $\beta$  также малы, причем из-за близости  $\exp(\kappa a_1)$  и  $\exp(\kappa a_2)$  к 1 их можно считать величинами одного порядка. Зафиксировав  $\varepsilon$ ,  $\delta$ ,  $\Psi_1$  и устремляя  $\alpha$  и  $\beta$  к нулю в (2.7) и (2.10), получим

$$C_0(1) \rightarrow \Psi_1, \quad CB(1) \rightarrow 0, \quad CC(1) \rightarrow 0, \quad CD(1) \rightarrow 0, \quad F_3 \rightarrow 0,$$

т. е. большая частица «не чувствует» воздействий со стороны маленькой, а распределение  $\psi$  в целом совпадает с распределением вокруг одиночной сферы  $\Omega(1)$ .

При  $a_2 \gg a_1$  (большая сфера действует на маленькую) параметры  $\alpha$  и  $\beta$  много больше 1, и они по-прежнему одного порядка. При этом в силу неравенства  $a_1 + a_2 \leq r$  выполнены соотношения  $\varepsilon\alpha \leq 1$ ,  $\varepsilon\beta \leq 1$ . Поэтому нельзя считать, что  $\varepsilon$  меняется произвольно (в отличие от  $\delta$ ). Устремляя  $\alpha$  и  $\beta$  в формулах (2.7) и (2.10) к бесконечности, а  $\varepsilon$  и  $\delta$  — к нулю, учитывая ограничения на  $\varepsilon$ , найдем, что

$$C_0(1) \rightarrow \Psi_1(1 - \varepsilon\beta), \quad CB(1) \rightarrow 0, \quad CC(1) \rightarrow 0, \quad CD(1) \rightarrow 0, \quad F_3 \rightarrow \frac{\varepsilon_F \Psi_2^2}{a_2^2} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \varepsilon^2 (-\beta + \varepsilon\beta^2).$$

Асимптотика  $C_0(1)$  показывает, что большая сфера сильно искажает поле вблизи маленькой, только если их поверхности очень близки:  $\varepsilon\beta \rightarrow 1$ . Но даже при этом условии  $F_3 \rightarrow 0$ . Последний результат можно объяснить тем, что действующая на частицу сила обусловлена разными значениями потенциала в разных точках ее поверхности. В случае, когда радиус сферы  $\Omega(1)$  мал, главный вклад в распределение потенциала вносит возмущение, создаваемое  $\Omega(2)$ , а оно не успевает сильно измениться на расстоянии, равном диаметру маленькой частицы.

Наконец, изучим вопрос о возможности предельного перехода от задачи о двух сферах разного радиуса к задаче о сфере и плоскости. Пусть по-прежнему  $a_2 \gg a_1$ , а значит, роль «плоскости» будет играть поверхность сферы  $\Omega(2)$ . С формальной точки зрения далее требуется в формулах (2.6)–(2.7) заменить  $\varepsilon = a_1/r$  на выражение  $a_1/(h + a_2)$ , после чего устремить  $a_2$  к бесконечности.

Однако такой подход приводит к неустраняемому противоречию. При рассмотрении двух сфер выполнялись неравенства  $r \geq a_1 + a_2$  и  $\delta = \kappa r \ll 1$ , откуда следовало, что и  $\kappa a_2 \ll 1$ . Однако ширина ДЭС  $\kappa^{-1}$  есть величина, фиксированная для заданного электролита, а потому при  $a_2 \rightarrow \infty$  неравенство  $\kappa a_2 \ll 1$  принципиально не может быть выполнено. Следовательно, и переход к задаче «частица + плоскость» невозможен.

## 5. Заключение

В настоящей работе задачи о распределении электрического потенциала в системах с разной геометрией решены одним и тем же методом мультипольного разложения; тем самым показана пригодность этого подхода к достаточно широкому кругу задач. На основе этого решения найдены силы, действующие на сферические частицы, помещенные в электролит. При этом получено, что сферические частицы, поверхности которых имеют потенциалы одного знака, всегда отталкиваются, а между сферой и плоскостью при определенных геометрических параметрах системы может возникать притяжение.

Изучено взаимодействие сфер, радиусы которых отличаются во много раз; выведено условие, при котором большая частица сильно искажает распределение потенциала вблизи меньшей. Показано, что взаимодействие двух сферических частиц в рамках рассматриваемого приближения не может быть сведено к взаимодействию сферы и плоскости: у этих систем разные геометрии, и бесконечное увеличение радиуса одной из сфер ведет к необходимости соответственного увеличения ширины ДЭС, что для фиксированного электролита невозможно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Habdas, E. R. Weeks, “Video microscopy of colloidal suspensions and colloidal crystals”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, **7** (2002), 196–203.

2. И. Ф. Ефремов, *Периодические коллоидные структуры*, Химия, Л., 1971, 192 с.
3. M. F. Hsu, E. R. Dufresne, D. A. Weitz, “Charge stabilization in nonpolar solvents”, *Langmuir*, **21** (2005), 4881–4887.
4. Г. А. Остроумов, *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. Физические основы электрогидродинамики*, Наука, М., 1979, 320 с.
5. E. J. W. Verwey, J. Th. G. Overbeek, *Theory of the stability of lyophobic colloids*, Elsevier publishing company, Inc., New York-Amsterdam-London-Brussels, 1948, i-xii, 205 p.
6. J. Zhu, Min Li, R. Rogers [et al.], “Crystallization of hard-sphere colloids in microgravity”, *Nature*, **387** (1997), 883–885.
7. E. Yariv, “Electro-hydrodynamic particle levitation on electrodes”, *Journal of Fluid Mechanics*, **645** (2010), 187–210.
8. M. Wu, A. V. Kuznetsov, W. J. Jasper, “Modeling of particle trajectories in an electrostatically charged channel”, *Phys. Fluids*, **22**:4 (2010).
9. H. Liu, H. N. Bau, “The dielectrophoresis of cylindrical and spherical particles submerged in shells and in semi-infinite media”, *Phys. Fluids*, **16**:5 (2004), 1217–1228.
10. А. О. Сыромясов, Н. В. Еремкина, “Математическое моделирование электростатического взаимодействия двух одинаковых сфер, окруженных ДЭС”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:3 (2015), 100–108.
11. В. В. Лохин, Л. И. Седов, “Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов”, *Прикладная математика и механика*, **27**:3 (1963), 393–417.
12. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гос. изд-во физ.-мат. лит-ры, М., 1959, 532 с.
13. F. N. Stillinger Jr., “Interfacial solutions of the Poisson-Boltzmann equation”, *J. Chem. Phys.*, **35**:5 (1961), 1584–1589.
14. R. Klein, H. N. von Grünberg, “Charge-stabilized colloidal suspensions. Phase behavior and effects of confinement”, *Pure and Applied Chemistry*, **73**:11 (2001), 1705–1719.
15. Дж. Хаппель, Г. Бреннер, *Гидродинамика при малых числах Рейнольдса*, Мир, М., 1976, 632 с.
16. В. Л. Сенницкий, “О силовом взаимодействии шара и вязкой жидкости в присутствии стенки”, *Прикладная механика и техническая физика*, **41**:1 (2000), 57–62.
17. В. Е. Баранов, С. И. Мартынов, “Моделирование динамики частиц в вязкой жидкости при наличии плоской стенки”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50**:9 (2010), 1669–1686.

Поступила 3.10.2018



MSC2010 35J25, 35Q70, 35B06, 35B40, 35C20

# Modeling of interaction of different-sized objects immersed in weak electrolyte

© A. O. Syromyasov<sup>1</sup>

**Abstract.** Author solves problems about interaction of two spherical particles with different radii and also about interaction of a sphere and a plane that are immersed in electrolyte. Double electric layer near the objects' surfaces is supposed to be wide, so Poisson – Boltzmann equation describing the distribution of electric potential in the medium may be linearized. The problems stated are solved by multipole expansion method; the plane is modelled by a dummy particle. Asymptotic expressions are obtained for the coefficients of the expansion. Basing on this solution, forces acting between bodies in electrolyte are found. The particular case when the size of one sphere is much larger than the size of another particle is examined. Author shows that this case can't transform to interaction of a sphere and a plane. The unexpected result of calculation is that under certain conditions the plane may attract spherical particle which has potential of the same sign on its surface, while the interaction between two spheres having potentials of the same sign is always repulsion.

**Key Words:** weak electrolyte, linearized Poisson-Boltzmann equation, double electric layer, multipole expansion, asymptotic methods, dummy particle

## REFERENCES

1. P. Habdas, E. R. Weeks, “Video microscopy of colloidal suspensions and colloidal crystals”, *Current Opinion in Colloid and Interface Science*, **7** (2002), 196–203.
2. I. F. Efremov, [*Periodic colloidal structures*], Khimiya Publ., Leningrad, 1971 (In Russ.), 192 p.
3. M. F. Hsu, E. R. Dufresne, D. A. Weitz, “Charge stabilization in nonpolar solvents”, *Langmuir*, **21** (2005), 4881–4887.
4. G. A. Ostroumov, [*Interaction of electrical and hydrodynamical fields. Physical foundations of electrohydrodynamics*], Nauka Publ., Moscow, 1979 (In Russ.), 320 p.
5. E. J. W. Verwey, J. Th. G. Overbeek, *Theory of the stability of lyophobic colloids*, Elsevier publishing company, Inc., New York-Amsterdam-London-Brussels, 1948, i-xii, 205 p.
6. J. Zhu, Min Li, R. Rogers [et al.], “Crystallization of hard-sphere colloids in microgravity”, *Nature*, **387** (1997), 883–885.
7. E. Yariv, “Electro-hydrodynamic particle levitation on electrodes”, *Journal of Fluid Mechanics*, **645** (2010), 187–210.
8. M. Wu, A. V. Kuznetsov, W. J. Jasper, “Modeling of particle trajectories in an electrostatically charged channel”, *Phys. Fluids*, **22**:4 (2010).
9. H. Liu, H. H. Bau, “The dielectrophoresis of cylindrical and spherical particles submerged in shells and in semi-infinite media”, *Phys. Fluids*, **16**:5 (2004), 1217–1228.

<sup>1</sup>**Aleksei O. Syromyasov**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall1@yandex.ru

10. A. O. Syromyasov, N. V. Eremkina, “[Mathematical modelling of electrostatic interaction among two identical spheres surrounded by double electric layers]”, *Zhurnal Sredne-Volzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **17**:3 (2015), 100–108. (In Russ.).
11. V. V. Lokhin, L. I. Sedov, “[Nonlinear tensor functions depending on several tensor arguments]”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **27**:3 (1963), 393–417. (In Russ.).
12. L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, Pergamon Press, 1960, 429 p.
13. F. H. Stillinger Jr., “Interfacial solutions of the Poisson-Boltzmann equation”, *J. Chem. Phys.*, **35**:5 (1961), 1584–1589.
14. R. Klein, H. H. von Grünberg, “Charge-stabilized colloidal suspensions. Phase behavior and effects of confinement”, *Pure and Applied Chemistry*, **73**:11 (2001), 1705–1719.
15. J. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodynamics*, Prentice-Hall, 1965, 553 p.
16. V. L. Sennitskii, “Force interaction of a sphere and a viscous fluid in the presence of a wall”, *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, **41**:1 (2000), 50–54.
17. V. E. Baranov, S. I. Martynov, “Simulation of particle dynamics in a viscous fluid near a plane wall”, *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:9 (2010), 1588 – 1604.

*Submitted 3.10.2018*

# Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском языке, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC 2010;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО - полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (только на русском);
- список литературы.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание

ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);

- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

**Ключевые слова** должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты - основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение — выводы и рекомендации.

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

**Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Перевод заглавия статьи на английский язык;
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- название книги (транслитерация);
- [Перевод названия книги в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;
- Количество страниц в издании (250 p.);
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmbib.sty.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте <http://translit.net/ru/bgn/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

*Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка, располагается за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru. ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка можно скачать из раздела Полезные материалы меню Для автора на сайте журнала.*

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX.**

## **Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**

### **Статьи в журналах на русском языке:**

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, "[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

### **Статьи в журналах на английском языке:**

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

### **Статьи в электронном журнале на русском языке:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

### **Статьи в сборниках на русском языке:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

### **Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

### **Материалы конференций на русском языке:**

A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand], *Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы программ" imeni E. V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem* [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E. V. Voskresensky with international participation] (Saransk, 12-15 July 2016), SVMO Publ., 105-107 (In Russ.)

P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative], *Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nyim uravneniyam i dinamicheskim sistemam"* [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"] (Saransk, 12-15 July 2016), 231-233 (In Russ.).

### **Диссертации на русском языке:**

P. A. Shamanaev, *Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya* [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [ PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.

# Правила верстки рукописей в системе LaTeX

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются два файла: файл-преамбула и файл-шаблон. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>.

Текст статьи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <Фамилия-ИО>.tex (который включается командой `\input` в файл-преамбулу). Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Для оформления заголовков статьи на русском и английском языках следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова}

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления занумерованных формул следует использовать окружение **equation**. Нумеровать нужно только те формулы, на которые есть ссылки в тексте статьи. Для остальных формул следует использовать окружение **equation\***.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды  $\backslash \mathbf{R}$ ,  $\backslash \mathbf{Rn}$ ,  $\backslash \mathbf{C}$ ,  $\backslash \mathbf{Z}$ ,  $\backslash \mathbf{N}$  и т. д.

Для вставок букв  $\phi$  и  $\epsilon$  необходимо использовать команды  $\backslash \text{phi}$ ,  $\backslash \text{epsilon}$  соответственно. Символы частных производных  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  вставляются командами  $\backslash \text{px}\{i\}$  и  $\backslash \text{pxtog}\{u\}\{i\}$ .

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды  $\backslash \text{textrm}$ ,  $\backslash \text{textit}$ . Например, для вставок формул  $\Gamma_i$ ,  $\mathcal{D}_i$  в текст статьи необходимо набрать команды  $\backslash \text{textrm}\{\Gamma\}_i$ ,  $\backslash \text{textit}\{\mathcal{D}\}_i$ .

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды  $\backslash \text{label}\{\text{метка}\}$  и  $\backslash \text{eqref}\{\text{метка}\}$ , где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить  $\backslash \text{label}\{\text{ivanov14}\}$ , теорему 5 из этой статьи —  $\backslash \text{label}\{\text{ivanovt5}\}$  и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду  $\backslash \text{ref}\{\text{метка}\}$ ).

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

$\backslash \text{insertpicture}\{\text{метка}\}\{\text{имя\_файла.eps}\}\{\text{степень\_сжатия}\}$

где **степень\_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

$\backslash \text{insertpicturewcap}\{\text{метка}\}\{\text{имя\_файла.eps}\}\{\text{подпись\_под\_рисунком}\}$

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

$\backslash \text{insertpicturecapscale}\{\text{метка}\}\{\text{имя\_файла.eps}\}\{\text{степень\_сжатия}\}\{\text{подпись}\}$

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

$\backslash \text{insertpicturenonum}\{\text{имя\_файла.eps}\}\{\text{степень\_сжатия}\}\{\text{подпись\_под\_рис}\}$

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

$\backslash \text{RBibitem}\{\text{метка для ссылки на источник}\}$ ,

а англоязычная библиографическая ссылка — командой

$\backslash \text{Bibitem}\{\text{метка для ссылки на источник}\}$ .

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmbib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду  $\backslash \text{cite}$  или  $\backslash \text{pgcite}$  (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок — 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.



## Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References* с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

### Статьи в журналах на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib1}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the  
form of homogeneous vector polynomials]  
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151  
\lang In Russ.
```

```
\Bibitem{shamanaevBib2}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with  
a the perturbation in the form of small linear term with delay]  
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
\yr 2016  
\vol 18  
\issue 3  
\pages 61–69  
\lang In Russ.
```

### Статьи в журналах на английском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib3}  
\by M. J. Berger, J. Oliger  
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations  
\jour Journal of Computational Physics  
\yr 1984  
\vol 53  
\pages 484–512
```

### Статьи в электронном журнале на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib4}  
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,  
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with  
nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]  
\jour Ogarev-online  
\vol 20  
\yr 2016  
\lang In Russ.  
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

**Статьи в сборниках на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib5}  
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
 \publaddr Ulyanovsk  
 \publ UIGTU Publ.  
 \yr 2014  
 \serial 10  
 \pages 4–13  
 \lang In Russ.

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib6}  
 \by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy  
 \book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]  
 \publaddr Moscow  
 \publ Nauka Publ.  
 \yr 1966  
 \totalpages 576  
 \lang In Russ.

**Материалы конференций на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib7}  
 \by A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev  
 \inbook [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand]  
 \proc Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы программ" imeni E. V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E. V. Voskresensky with international participation]  
 \procinfo Saransk, 12-15 July 2016  
 \publ SVMO Publ.  
 \pages 105–107  
 \lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib8}  
 \by P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov  
 \inbook [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative]  
 \proc Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam" [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"]  
 \procinfo Suzdal, 8-12 July 2016  
 \pages 231–233  
 \lang In Russ.

**Диссертации на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib9}  
\by P. A. Shamanaev  
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]  
\thesisinfo Diss. ...kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]  
\publaddr Saransk  
\yr 1997  
\totalpages 145  
\lang In Russ.

## Алфавитный указатель

Бойков И. В.	364	Лубышев Ф. В.	429
Бойкова А. И.	364	Масягин В. Ф.	448
Гуревич Е. Я.	378	Ноздринова Е. В.	408
Донцова М. В.	384	Павлов А. Ю.	439
Жалнин Р. В.	448	Павлова Д. А.	378
Жукова Н. И.	395	Пескова Е. Е.	448
Колобянина А. Е.	408	Починка О. В.	408
Круглов В. Е.	419	Сыромясов А. О.	460

Файрузов М. Э. 429

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

*Компьютерная верстка:* Атряхин В. А.

*Корректурa:* Язовцева О. С.

*Перевод:* Сыромясов А. О.

Дата выхода в свет 30.12.2018. Цена свободная.

Подписано в печать 04.12.2018. Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 11,9 усл. печ.л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1958.

Типография Издательства Мордовского университета

430005, г. Саранск, ул. Советская, 24

