ISSN 2587 – 7496 (Online) ISSN 2079 – 6900 (Print)

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga Mathematical Society Journal

Том/Vol. 20 №/No. 3

2018

Средне-Волжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет

ISSN 2587-7496 (Online) ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Том 20, № 3. 2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

Middle Volga Mathematical Society

National Research Mordovia State University

ISSN 2587-7496 (Online) ISSN 2079-6900 (Print)

DOI 10.15507/2079-6900

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Vol. 20, no. 3. 2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

– «Математика»,

– «Прикладная математика и механика»,

– «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика, 01.02.00 Механика, 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских ученых – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68).

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68)

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: http://journal.svmo.ru

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal "Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva" publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- "Mathematics",
- "Applied Mathematics and Mechanics",
- "Mathematical modeling and computer science".

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics, 01.02.00 Mechanics, 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC).

One can subscript to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society"(68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society"(68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, Web: http://journal.svmo.ru

Редакционная коллегия

Редакционный совет

Editorial Board

Editorial Council

Содержание

Математика

Прикладная математика и механика

Математическое моделирование и информатика

Математическая жизнь

Contents

Mathematics

Applied Mathematics and Mechanics

Mathematical Modeling and Informatics

Mathematical life

Математика

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.260-272

УДК 517.9

О методе функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

© **А. С. Андреев** [1], **О. А. Перегудова** [2]

Аннотация. В статье рассмотрена задача о применении метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, правая часть которых представляет собой сумму составляющих мгновенного действия, а также с конечным и бесконечным запаздыванием. Актуальность задачи состоит в широком применении таких сложных по своей структуре уравнений в моделировании систем управления механическими системами при помощи интегральных регуляторов, биологических, физических и других процессов. Проведено развитие метода в направлении выявления предельных свойств решений посредством функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной. Доказаны теоремы о квазиинвариантности положительного предельного множества ограниченного решения, об асимптотической устойчивости (в том числе, равномерной) нулевого решения. Результаты основаны на построении новой структуры топологической динамики исследуемых уравнений. Доказанные теоремы применяются в решении задачи об устойчивости двух модельных систем, представляющих собой обобщения ряда известных моделей естествознания и техники.

Ключевые слова: нелинейные системы интегро-дифференциальных уравнений, функционал Ляпунова, устойчивость, топологическая динамика, предельное уравнение.

1. Введение

Работы В. Вольтерра по интегро-дифференциальным уравнениям [1] положили основу для большого современного раздела теоретической и прикладной математики – теории функционально-дифференциальных уравнений и ее приложений в естествознании и техники. Основным методом исследования задач об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений является метод функционалов Ляпунова, впервые представленный в конце 50-х годов XX века в работах Н.Н. Красовского [2]. С тех пор теоретическому и прикладному развитию этого метода было посвящено огромное количество работ. Активные исследования в этом направлении продолжаются и в настоящее время (см., например, [3]).

[1] **Андреев Александр Сергеевич**, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42.), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9408-0392, asa5208@mail.ru

[2] **Перегудова Ольга Алексеевна**, профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (432017, Россия, г. Ульяновск, ул. Л. Толстого, д. 42.), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2701-9054, peregudovaoa@gmail.com

Отсутствие универсального алгоритма построения функционала Ляпунова для различных классов задач стимулирует исследования по модификации и обобщению широко известных, ставших классическими, теорем [4], [5], [6]. Эффективными в приложениях представляются обобщения, заключающиеся в выводе достаточных условий асимптотической устойчивости посредством функционала Ляпунова со знакопостоянной производной. Для автономных и периодических по времени, неавтономных уравнений с конечным запаздыванием такие условия выведены в [2]–[7]. Важной особенностью доказанных теорем является использование динамических свойств решений этих уравнений. Сложность вывода подобных результатов для уравнений с бесконечным и с неограниченным запаздыванием состоит, прежде всего, в построении функциональных пространств решений этих уравнений.

Проблема аксиоматического построения функциональных пространств функционально-дифференциальных уравнений с бесконечным запаздыванием во многом решена [8], [9]). Это решение позволило выявить особенности определений устойчивости для таких уравнений, провести соответствующее развитие метода функционалов Ляпунова [8], [10], [11].

Интегро-дифференциальные уравнения типа В. Вольтерра составляют определенный класс функционально-дифференциальных уравнений общего типа. Поэтому к ним широко применимы соответствующие общие методы исследования устойчивости. Однако решения этих уравнений имеют определенные качественные свойства [12], позволяющие существенно расширить применение функционалов Ляпунова [13]–[16].

В настоящей статье представлено развитие метода функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости интегро-дифференциального уравнений, включающих члены с конечным и бесконечным запаздыванием. Представлены теоремы о предельном поведении, асимптотической устойчивости, в том числе, равномерной. Основу для такого развития составило построение топологической динамики уравнений (параграф 2). В параграфе 4 получены условия равномерной асимптотической устойчивости систем уравнений, являющихся обобщением целого ряда моделей естествознания и техники.

2. Топологическая динамика уравнений

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра, включающее в себя составляющие с конечным и неограниченным запаздыванием

$$\dot{x}(t) = f^{(1)}(t, x(t)) + f^{(2)}(t, x(t-\mu^{(1)}(t)) + \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} g^{(1)}(t, s, x(t), x(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} g^{(2)}(t, s, x(t), x(s))ds, \tag{2.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ – $n-$мерное линейное действительное пространство с некоторой нормой $|x|$, функции $\mu^{(j)}(t)$, $f^{(j)}(t,x)$ и $g^{(j)}(t,s,x,y)$ ($j = 1,2$) таковы, что $\mu^{(j)} \in C^1(\mathbb{R}^+ \to [0,\mu_0], \mu_0 = const > 0)$, $f^{(j)} \in C(\mathbb{R}^+ \times D \to \mathbb{R}^n)$, $g^{(1)} \in C(\mathbb{R}^+ \times [-\mu_0, \infty) \times D \times D \to \mathbb{R}^n)$, $g^{(2)} \in C(S^+ \times D \times D \to \mathbb{R}^n)$, где $D \subset \mathbb{R}^n$ есть некоторая область, $S^+ = \{(t,s) : t \in \mathbb{R}^+, 0 \le s \le t\}$.

Полагаем, что для производных функций $\mu^{(j)}(t)$ ($j = 1,2$) при всех $t \in \mathbb{R}^+$ имеют место неравенства

$$\mu_2 \le \frac{d\mu^{(j)}(t)}{dt} \le 1 - \mu_1, \quad \mu_2 = const, 0 < \mu_1 < 1, \mu_1 = const, \quad (j = 1,2).$$

Остальные функции ограничены и удовлетворяют относительно каждого компактного множества $K \subset D$ условиям Липшица следующего вида

$$\begin{gathered}
|f^{(j)}(t,x)| \le m_1,\ |f^{(j)}(t,x^{(2)}) - f^{(j)}(t,x^{(1)})| \le L_1|x^{(2)} - x^{(1)}| \\
\forall (t,x), (t,x^{(1)}), (t,x^{(2)}) \in \mathbb{R}^+ \times K, \\
|g(t,s,x,y)| \le m_1,\ |g(t_2,s_2,x^{(2)},y^{(2)}) - g(t_1,s_1,x^{(1)},y^{(1)})| \le \\
\le L_2(|x^{(2)} - x^{(1)}| + |y^{(2)} - y^{(1)}| + |t_2 - t_1| + |s_2 - s_1|) \\
\forall (t,\tau,x,y), (t_1,\tau_1,x^{(1)},y^{(1)}), (t_2,\tau_2,x^{(2)},y^{(2)}) \in S^+ \times K \times K \\
m_j = m_j(K),\ L_j = L_j(K) \quad (j = 1,2).
\end{gathered} \tag{2.2}$$

Положим также, что функция $g^{(2)}(t,s,x,y)$ на каждом компактном множестве $K \subset D \times D$ удовлетворяет неравенствам

$$\begin{gathered}
|g^{(2)}(t,s,x,y)| \le g_0(s-t,K) \quad \forall (t,s,x,y) \in S^+ \times K, \\
\int\limits_{-\infty}^{0} g_0(\nu,K)d\nu \le m(K) < +\infty.
\end{gathered} \tag{2.3}$$

Введем фазовое пространство непрерывных функций $C_\mu = \{\varphi : [-\mu_0, 0] \to \mathbb{R}^n\}$ с нормой $\|\varphi\| = \sup(|\varphi(s)|, -\mu_0 \le s \le 0)$.

Для непрерывной функции $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ определим функции: $x_{\mu t} \in C_\mu$, $x_{\mu t} = x(t+s)$, $-\mu_0 \le s \le 0$; $x_t = x(t+s)$, $-\infty < s \le 0$.

Из условий (2.2) и (2.3) следует, что для каждой начальной точки $(\alpha,\varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C_\mu$: $\varphi(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$, будет существовать единственное решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ уравнения (2.1), удовлетворяющее условию $x_\alpha^{(0)} = x(\alpha+s) = \varphi(s)$, $\mu(\alpha) \le s \le 0$.

Для решения уравнения (2.1), ограниченного при всех $t \ge t_0 - \mu(t_0)$ компактом $K \subset \mathbb{R}^n$, будем иметь оценку

$$|x(t_2,t_0,x_0) - x(t_1,t_0,x_0)| \le (2m_1(K) + 2m_2(K))|t_2 - t_1| \quad \forall t_1,t_2 \ge t_0 + \mu_0.$$

Пусть C_∞ есть множество функций $\psi = \psi(t)$, определенных и непрерывных по $t \in (-\infty, 0]$. Для некоторой последовательности чисел $\{r_j\}$, такой, что $0 < r_1 < r_2 < \ldots < r_k < \ldots$, $r_k \to \infty$ при $k \to \infty$, выделим подмножества $K_j \subset C_\infty$ функций $\psi = \psi(\tau)$ таких, что $\forall \tau, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ выполнены неравенства

$$|\psi(\tau)| \le r_j, \quad |\psi(\tau_2) - \psi(\tau_1)| \le (2m_1(K) + m_2(K))|t_2 - t_1|.$$

Множество $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$ с нормой $|||\psi||| = \sup(|\psi(s)|, -\infty < s \le 0)$ будет являться полным сепарабельным банаховым пространством.

В силу условий (2.2) семейства сдвигов

$$\mathcal{F}^{(j)} = \{f_\tau^{(j)}(t,x) = f(\tau+t,x), \quad \tau \in \mathbb{R}\}, \quad j = 1,2,$$

$$\begin{gathered}
\mathcal{G}^{(j)} = \{g_\tau^{(j)}(t,s,x,y) = g^{(j)}(\tau+t,\tau+s,x,y), \quad \tau \in \mathbb{R}\}, \quad j = 1,2, \\
\mathcal{M}^{(j)} = \{\mu_\tau^{(j)}(t) = \mu^{(j)}(t+\tau), \quad \tau \in \mathbb{R}\}, \quad j = 1,2
\end{gathered}$$

являются предкомпактными в некоторых функциональных пространствах [4], [17]: $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \times D \to \mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{G} = \{g : S \times D \times D \to \mathbb{R}^n\}$, $\mathcal{M} = \{\mu : \mathbb{R} \to [0,\mu_0]\}$.

Назовем $(f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, \mu_*^{(j)})$, $j = 1, 2,$ предельной совокупностью, если функции $f_*^{(j)}$, $g_*^{(j)}$, $\mu_*^{(j)}$, $j = 1, 2$ являются предельными для одной и той же последовательности $t_k \to \infty$, согласно [4], [17], соответственно

$$f_*^{(j)}(t, x) = \frac{d}{dt} \lim_{t_k \to +\infty} \int\limits_0^t f^{(j)}(t_k + \tau, x) d\tau,$$

$$g_*^{(j)}(t, s, x, y) = \lim_{t_k \to +\infty} g^{(j)}(t_k + \tau, t_k + s, x, y),$$

$$\mu_*^{(j)}(t) = \lim_{t_k \to +\infty} \mu^{(j)}(t_k + t).$$

Множество таких совокупностей определим как оболочку $H^+(f, g, \mu)$.

Для каждой предельной совокупности $(f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, \mu_*^{(j)}) \in H^+(f, g, \mu)$, $j = 1, 2$ можно ввести предельное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = f_*^{(1)}(t, x(t)) + f_*^{(2)}(t, x(t - \mu_*^{(1)}(t)))+ \\ + \int\limits_{t-\mu_*^{(2)}}^{t} g_*^{(1)}(t, \tau, x(t), x(\tau)) d\tau + \int\limits_{-\infty}^{t} g_*^{(2)}(t, \tau, x(t), x(\tau)) d\tau \end{gathered} \tag{2.4}$$

с областью определения $\mathbb{R} \times \Gamma$.

Из этого построения следует, что для каждой начальной точки $(\alpha, \psi) \in \mathbb{R} \times \Gamma$ решение $x = x^*(t, \alpha, \psi)$ уравнения (2.4), удовлетворяющее условию $x_\alpha^*(\alpha, \psi) = \psi$, будет единственным ($x_\alpha^*(\alpha, \psi) = x^*(\alpha + s, \alpha, \psi)$, $-\infty < s \leq 0$).

Определение 2.1 *Пусть $x = x(t, \alpha, \varphi)$ есть некоторое решение уравнения (2.1), определенное для всех $t \geq \alpha - h$. Функция $\psi \in \Gamma$ называется положительной предельной точкой этого решения, если существуют последовательности $t_m \to \infty$ и $T_m \to \infty$, такие что $x(t_m + s, t_0, \varphi) \to \psi(s)$ равномерно по $s \in [-T_m, 0]$ при $m \to \infty$. Множество всех таких точек образует в Γ положительное предельное множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$.*

Следуя [15], [16], можно доказать следующую теорему.

Теорема 2.1 *Пусть $x = x(t, t_0, x_0)$ есть решение уравнения (2.1), ограниченное компактом $K \subset D$ при всех $t \geq t_0$. Тогда для каждой предельной точки $\psi \in \Omega^+$ существует совокупность $(f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, \mu_*^{(j)}) \in H^+(f, g, \mu)$, $j = 1, 2$, такая, что решение $x = x^*(t, 0, \psi)$ уравнения (2.4) содержится в Ω^+, т.е. $x_t^*(0, \psi) \in \Omega^+$ при $t \in \mathbb{R}$.*

3. Теоремы об устойчивости

Введем функционал Ляпунова, определяемый вдоль произвольной функции $x \in C^1([t_0 - \mu_0, +\infty) \to D)$ равенством

$$\begin{gathered} V(t) = V^{(0)}(t, x(t)) + \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{t-\mu^{(j)}(t)}^{t} V^{(j)}(t, s, x(t), x(s)) ds+ \\ + \int\limits_{t-\mu_0}^{t} \int\limits_{s}^{t} V^{(3)}(t, s, \nu, x(t), x(s), x(\nu)) d\nu ds + \int\limits_{t_0}^{t} V^{(4)}(t, s, x(t), x(s)) ds+ \\ + \int\limits_{t_0}^{t} \int\limits_{s}^{t} V^{(5)}(t, s, \nu, x(t), x(s), x(\nu)) d\nu ds, \end{gathered} \tag{3.1}$$

где $V^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots, 5)$ – скалярные функции, определенные и непрерывно дифференцируемые в областях задания своих переменных в соответствии с уравнением (2.1). При этом функции $V^{(4)}$ и $V^{(5)}$ таковы, что функционал $V(t)$ существует.

Допустим, что производная функционала (3.1) вдоль решения $x = x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.1) удовлетворяет при $t > \alpha + \mu_0$ неравенству

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \le & -W^{(0)}(t, x(t)) - \sum_{j=1}^{2} W^{(j)}(t, x(t - \mu^{(j)}(t)))- \\ & - \int_{t-\mu_0}^{t} W^{(3)}(t, s, x(t), x(s))ds - \int_{t_0}^{t} W^{(4)}(t, s, x(t), x(s))ds- \\ & - \int_{t_0}^{t}\int_{s}^{t} W^{(5)}(t, s, \nu, x(t), x(s), x(\nu))d\nu ds, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $W^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots, 5)$ – скалярные неотрицательные функции со свойствами типа (2.2), предполагающими предкомпактность семейств их сдвигов по t, (t, s), (t, s, ν) и существование для $W^{(4)}$ и $W^{(5)}$ оценки типа (2.3).

Тем самым могут быть построены предельные семейства $\{\mu_*^{(j)}, f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, W_*^{(k)}\}$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, 6$. Для функционалов $W_*^{(4)}$ и $W_*^{(5)}$ имеет место существование интегралов вида

$$\int_{-\infty}^{t} W_*^{(4)}(t, s, x(t), x(s))ds, \qquad \int_{-\infty}^{t}\int_{s}^{t} W_*^{(5)}(t, s, \nu, x(t), x(s), x(\nu))d\nu ds,$$

если $x(t) \in K \subset D$, $\forall t \in \mathbb{R}$.

Может быть доказана следующая теорема.

Теорема 3.1 *Предположим, что:*

1) существует функционал $V = V(t, x_t) \ge 0$ вида (3.1), производная которого вдоль каждого решения уравнения (2.1) удовлетворяет неравенству (3.2);

2) решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (2.1) ограничено некоторым компактом $K \subset \mathbb{R}^n$ при всех $t \ge t_0$.

Тогда положительное предельное множество $\Omega^+(\alpha, \varphi)$ может быть представлено в виде объединения по всем предельным совокупностям $(f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, W_*^{(k)})$, $j = 1, 2$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, решений $x = x^*(t, 0, \psi)$ предельных уравнений (2.4), таких что

$$\begin{gathered} W_*^{(0)}(t, x^*(t, 0, \psi)) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R}; \\ W_*^{(j)}(t, x^*(t - \mu_*^{(j)}(t), 0, \psi)) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R} \quad j = 1, 2; \\ W_*^{(3)}(t, s, x^*(t, 0, \psi), x^*(s, 0, \psi)) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R},\ t - \mu_0 \le s \le t; \\ W_*^{(4)}(t, s, x^*(t, 0, \psi), x^*(s, 0, \psi)) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R},\ -\infty < s \le t; \\ W_*^{(5)}(t, s, \nu, x^*(t, 0, \psi), x^*(s, 0, \psi), x^*(\nu, 0, \psi)) \equiv 0, \quad t \in \mathbb{R},\ -\infty < s \le \nu \le t. \end{gathered} \tag{3.3}$$

Замечание 3.1 *Теорема 3.1 представляет собой теорему типа принципа квазиинвариантности для уравнения (2.1)* [4], [18].

Исследуем задачу об устойчивости нулевого решения уравнения (2.1), полагая, что $f^{(1)}(t, 0) \equiv 0$, $f^{(2)}(t, \tau, 0, 0) = 0$, $g^{(j)}(t, \tau, 0, 0) \equiv 0$, $j = 1, 2$. Для этого введем обозначение через $a_i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ для функции типа Хана, $i = 1, 2, 3$ [19].

Теорема 3.2 *Предположим, что можно найти функционал вида (3.1), такой что* $V_1(t,x) \geq a_1(||x||)$ $\forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times D$, *а его производная вдоль решения уравнения (2.1) удовлетворяет неравенству (3.2). При этом для любой предельной совокупности* $(f_*^{(j)}, g_*^{(j)}, W_*^{(k)})$, $j=1,2$, $k=0,1,\ldots,5$, *не существует решений предельного уравнения (2.4), таких что имеют место тождества (3.3), кроме нулевого* $x=0$.

Тогда решение $x=0$ *уравнения (2.1) асимптотически устойчиво.*

Теорема 3.3 *При добавлении в условия теоремы 3.2 условия* $V^{(0)}(t,x) \leq a_2(|x|)$, $|V^{(j)}(t,\tau,x,y)| \leq a_2(|x|+|y|)$, $j=1,2$, *получим равномерную асимптотическую устойчивость нулевого решения* $x=0$ *уравнения (2.1).*

Соответствующими видоизменениями могут быть доказаны теоремы об асимптотической устойчивости, равномерной по x_0, о неустойчивости.

4. Примеры

Пример 4.1

Пусть $x' = (y', z')'$, $y \in \mathbb{R}^l$, $z \in \mathbb{R}^m$, $l+m=n$, $m \geq l$, $(\cdot)'$ – *операция транспонирования. Рассмотрим систему уравнений вида*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A^{(11)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial y} + A^{(12)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial z}, \\ \dot{z}(t) = A^{(21)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial y} + A^{(22)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial z} + \\ +B(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t-\mu^{(2)}(t)))}{\partial z} + \displaystyle\int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} G^{(1)}(t,s)\dfrac{\partial \Pi(x(s))}{\partial z}ds + \int\limits_{t_0}^{t} G^{(2)}(t,s)\dfrac{\partial \Pi(x(s))}{\partial z}ds, \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\Pi \in C^2(\mathbb{R}^n \to \mathbb{R})$ *есть некоторая скалярная функция, такая, что*

$$\begin{gathered} \frac{\partial \Pi(x(0))}{\partial x} = 0; \quad \left|\frac{\partial \Pi(x)}{\partial y}\right| \geq a_1(|y|), \\ a_2(|z|) \leq \left|\frac{\partial \Pi(x)}{\partial z}\right| \leq a_3(|z|) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, \end{gathered} \tag{4.2}$$

функции $\mu^{(j)} \in \mathcal{M}$, *матрицы* $A^{(ij)}$, B, $G^{(j)}$ *для всех* $(t,x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{2n}$ *удовлетворяют условиям типа (2.2) и (2.3), а также имеют место неравенства*

$$y'(A^{(11)}(t,x) + (A^{(11)}(t,x))')y \leq 0, \quad |D(t,x)| \geq d_0 = const > 0 \quad \forall (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n, \tag{4.3}$$

где $D(t,x)$ – *какой-либо минор порядка* m *матрицы* $A^{(21)} = -(A^{(12)})'$.

Для рассматриваемой системы (4.1) в соответствии с п. 2 выполнены все условия ее предкомпактности, предельные системы имеют следующий вид

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A_*^{(11)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial y} + A_*^{(12)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial z}, \\ \dot{z}(t) = A_*^{(21)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial y} + A_*^{(22)}(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t))}{\partial z} + \\ +B_*(t,x(t))\dfrac{\partial \Pi(x(t-\mu_*^{(2)}(t)))}{\partial z} + \displaystyle\int\limits_{t-\mu_*^{(2)}(t)}^{t} G_*^{(1)}(t,s)\dfrac{\partial \Pi(x(s))}{\partial z}ds + \int\limits_{-\infty}^{t} G_*^{(2)}(t,s)\dfrac{\partial \Pi(x(s))}{\partial z}ds, \end{cases} \tag{4.4}$$

где матрицы $A_*^{(ij)}$, B_* , $G_*^{(i)}$ $(i,j=1,2)$ *являются предельными для соответствующих матриц из (4.1) согласно представленному для уравнения (2.1) построению. В частности,*

$$A_*^{(ij)}(t,x)=\frac{d}{dt}\lim_{t_k\to\infty}\int\limits_0^t A^{(ij)}(t_k+\tau)d\tau,$$

$$G_*^{(j)}(t,s)=\lim_{t_k\to\infty}G^{(j)}(t_k+t,t_k+s),$$

минор $D^*(t,x)$ *матрицы* $A_*^{(21)}(t,x)$, *соответствующий* $D(t,x)$, *удовлетворяет условию*

$$|D^*(t,x)|\geq d_0=const>0. \tag{4.5}$$

Для исследования устойчивости нулевого решения $x=0$ *системы выберем функционал Ляпунова следующим образом: вдоль* $x\in C^1([t_0,+\infty)\to\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}V(x(t))=\Pi(x(t))+\int\limits_{t-\mu^{(1)}(t)}^{t}\left(\frac{\partial\Pi(x(s))}{\partial z}\right)'P^{(1)}\frac{\partial\Pi(x(s))}{\partial z}ds+\\+\int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t}\int\limits_{s}^{t}\left(\frac{\partial\Pi(x(\nu))}{\partial z}\right)'P^{(2)}\frac{\partial\Pi(x(\nu))}{\partial z}d\nu ds+\int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial\Pi(x(s))}{\partial z}\right)'P^{(3)}(t,s)\frac{\partial\Pi(x(s))}{\partial z}ds,\end{aligned} \tag{4.6}$$

где $P^{(j)}\in\mathbb{R}^{m\times m}$, $(P^{(j)})'=P^{(j)}$, $z'P^{(j)}z\geq 0\ \ \forall z\in\mathbb{R}^m$, $j=1,2,3$; $z'(\partial P^{(3)}(t,s)/\partial t)z\leq 0$ $(=0\Leftrightarrow z=0)$.

Допустим, что матрицы $P^{(j)}$, $j=1,2,3$, *функционала (4.6) могут быть подобраны такими, что*

$$\begin{aligned}z'\Bigg(\frac{1}{2}\left(A^{(22)}(t,x)+(A^{(22)}(t,x))'\right)+P^{(1)}+\frac{1}{4\mu_1}B(t,x)(P^{(1)})^{-1}B'(t,x)+\mu^{(2)}P^{(2)}+\\+\frac{1}{4\mu_1}\int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t}G^{(1)}(t,s)(P^{(2)})^{-1}(G^{(1)}(t,s))'ds+P^{(3)}(t,t)+\\+\frac{1}{4}\int\limits_{t_0}^{t}G^{(2)}(t,s)(P_t^{(3)}(t,s))^{-1}(G^{(2)}(t,s))'ds\Bigg)z\leq-\gamma_1|z|^2\quad\forall z\in\mathbb{R}^m,\end{aligned} \tag{4.7}$$

где $\gamma_1=const>0$.

При выполнении условий (4.7) для производной функционала (4.6) будем иметь оценку

$$\dot V(t,x(t))\leq-W_0(x(t))\equiv-\gamma_1\left|\frac{\partial\Pi}{\partial z}(x(t))\right|^2\leq 0. \tag{4.8}$$

Множество $\{\partial\Pi(x(t))/\partial z=0\}=\{z(t)=0\}$ *может содержать лишь те решения* $(y(t),z(t))=(y(t),0)$ *системы (4.4), для которых*

$$A_*^{(21)}(t,x(t))\frac{\partial\Pi(x(t))}{\partial y}\equiv 0,$$

что возможно в соответствии с неравенством (4.5), если только $\partial\Pi(x(t))/\partial y\equiv 0$ *или* $y(t)\equiv 0$.

Из теоремы 3.3 следует, что при условиях (4.2) и (4.3) решение $x(t)=0$ *системы (4.1) равномерно асимптотически устойчиво.*

П р и м е р 4.2

Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = D(x(t))(C(t) + A(t)F(x(t)) + B(t)F(x(t - \mu^{(1)}(t)))+ + \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} G^{(1)}(t,s)F(x(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} G^{(2)}(t,s)F(x(s))ds), \tag{4.9}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$; $\mu^{(j)} \in \mathcal{M}$; *вектор-функция* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, *матричные функции* $D = diag(d_1(x_1), d_2(x_2), \dots, d_n(x_n))$, $C, B : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$, $G^{(j)} : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *удовлетворяют условиям (2.2) и (2.3).*

Допустим, что для некоторого вектора $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n_+$, $\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_k > 0, k = 1, 2, \dots, n\}$ *имеют место тождества*

$$C(t) + (A(t) + B(t) + \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} G^{(1)}(t,s)ds + \int\limits_{t_0}^{t} G^{(2)}(t,s)ds)F(x^{(0)}) \equiv 0,$$

так что система (4.9) имеет положение равновесия $x = x^{(0)}$.

Рассмотрим задачу об устойчивости этого положения относительно начальных возмущений $(\alpha, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times C^+_\mu$, $C^+_\mu = \{\varphi \in C_\mu : \varphi(s) > 0, -\mu_0 \leq s \leq 0\}$.

Положим $y = x - x^{(0)}$ *и введем уравнения возмущенного движения*

$$\frac{dy(t)}{dt} = \tilde{D}(y(t))(A(t)\tilde{F}(y(t)) + B(t)\tilde{F}(y(t - \mu^{(1)}(t)))+ + \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} G^{(1)}(t,s)\tilde{F}(y(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} G^{(2)}(t,s)\tilde{F}(y(s))ds), \tag{4.10}$$

где $\tilde{D}(y) = diag(d_1(x_1^{(0)} + y_1), \dots, d_n(x_n^{(0)} + y_n))$, $\tilde{F}(y) = F(x^{(0)} + y)$.

Положим

$$F(0) = 0,\, |F(y)| \geq a(|y|),\, d_k(0) = 0,\, d_k(x_k) > 0 \text{ при } x_k > 0,\, \int\limits_1^0 \frac{d\nu}{d_k(\nu)} = \infty,$$

существует скалярная функция $\Pi = \Pi(y)$, *такая что*

$$\Pi(0) = 0,\, \frac{\partial \Pi(y)}{\partial y} = (\tilde{D}(y))^{-1}\tilde{F}(y),\, \Pi(y) \to \infty \text{ при } |y| \to \infty.$$

Из этих условий следует положительная полуинвариантность области $\mathbb{R}^n_+$ *и единственность положения равновесия* $y = 0$.

Системы, предельные для (4.10), имеют вид

$$\frac{dy(t)}{dt} = \tilde{D}(y(t))(A_*(t)\tilde{F}(y(t)) + B_*(t)\tilde{F}(y(t - \mu_*^{(1)}(t)))+ + \int\limits_{t-\mu_*^{(2)}(t)}^{t} G_*^{(1)}(t,s)\tilde{F}(y(s))ds + \int\limits_{t_0}^{t} G_*^{(2)}(t,s)\tilde{F}(y(s))ds). \tag{4.11}$$

Для исследования устойчивости $x = x^{(0)}$ *системы (4.9) или* $y = 0$ *системы (4.10) выберем функционал Ляпунова в виде*

$$
\begin{aligned}
V(x(t)) = \Pi(x(t)) + \int\limits_{t-\mu^{(1)}(t)}^{t} (\tilde{F}(y(s)))' P^{(1)} \tilde{F}(y(s)) ds + \\
+ \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} \int\limits_{s}^{t} (\tilde{F}(y(\nu)))' P^{(2)} \tilde{F}(y(\nu)) d\nu ds + \\
+ \int\limits_{t_0}^{t} (\tilde{F}(y(s)))' P^{(3)}(t,s) \tilde{F}(y(s)) ds.
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

Допустим, что матрицы $P^{(j)} \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $j = 1, 2, 3$, *имеют такие же свойства, что и в (4.6), и могут быть подобраны так, чтобы выполнялось неравенство*

$$
\begin{aligned}
y'(\frac{1}{2}(A(t) + A'(t)) + P^{(1)} + \frac{1}{4\mu} B(t)(P^{(1)})^{-1} B'(t) + \mu^{(2)} P^{(2)} + \\
+ \frac{1}{4\mu_1} \int\limits_{t-\mu^{(2)}(t)}^{t} G^{(1)}(t,s)(P^{(2)})^{-1}(G^{(1)}(t,s))' ds + P^{(3)}(t,t) + \\
+ \frac{1}{4} \int\limits_{t_0}^{\infty} G^{(2)}(t,s)(P_t^{(3)}(t,s))^{-1}(G^{(2)}(t,s))' ds) y \le -y' L y \le 0,
\end{aligned}
$$

где $L \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $L' = L = const$.

Тогда для производной функционала (4.12) будем иметь оценку

$$\dot{V}(t) \le -(\tilde{F}(y(t)))' L \tilde{F}(y(t)) \le 0.$$

По теореме 3.2 каждое решение системы (4.10) будет неограниченно приближаться при $t \to +\infty$ *к максимально квазиинвариантному по отношению к семейству предельных систем (4.11) подмножеству множества* $\{L\tilde{F}(y) = 0\}$.

Если множество $\{L\tilde{F}(y) = 0\}$ *не содержит других решений системы (4.11), кроме* $y = 0$, *тогда согласно теореме 3.3 решение* $y = 0$ *системы (4.10) или положение равновесия* $x = x^{(0)}$ *системы (4.9) равномерно асимптотически устойчиво.*

5. Заключение

Результаты работы представляют собой развитие методики вывода предельных свойств решений дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений в предположении существования функции и функционала Ляпунова со знакопостоянной производной. Основное содержание методики представлено в работах [4], [6], [18]. Проведенное в разделе 1 построение топологической динамики дополняет соответствующие построения, представленные в работах [8]–[10]. Теоремы 3.1 –3.3 обобщают теоремы классического типа из [8], [11]. Примеры, представленные в разделе 4, являются обобщенными моделями физических и экономических процессов, биологического взаимодействия популяций [20].

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках государственного задания по НИР [9.5994.2017/БЧ] и РФФИ [18-41-730022].

Список литературы

1. В. Вольтерра, *Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений*, Наука. Главная редакция физико-математической литературы, М., 1982, 304 с.

2. Н. Н. Красовский, *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматгиз, М., 1959, 211 с.

3. L. Hatvani, “Marachkov type stability conditions for non-autonomous functional differential equations with unbounded right-hand sides”, *Electronic Journal of Qualitive Theory of Differential Equations*, **64** (2015), 1–11.

4. А. С. Андреев, “Метод функционалов Ляпунова в задачах об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений”, *Автоматика и телемеханика*, 2009, № 9, 4—55.

5. T. A. Burton, *Volterra Integral and Differential Equations, 2nd ed.*, Mathematics in Science and Engineering 202, Elsevier B. V., Amsterdam, 2005.

6. О. А. Перегудова, “Развитие метода функций Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **44**:12 (2008), 1638—1647.

7. J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

8. C. Corduneanu, and V. Lakshmikantham, “Equations with unbounded delay: a survey”, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **4** (1980), 831–877.

9. J. Hale, and J. Kato, “Phase space for retarded equations with infinite delay”, *Fukcialaj Ekvacioj*, **21** (1978), 11–41.

10. S. Murakami, “Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations”, *J. Differential Eqns.*, **59** (1985), 314–335.

11. G. Makay, “On the asymptotic stability of the solutions of functional differential equations with infinite delay”, *J. Differential Eqns.*, **108** (1994), 139–151.

12. В. С. Сергеев, “О резонансных колебаниях в некоторых системах с последействием”, *Прикладная математика и механика*, **79**:5 (2015), 615–626.

13. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, “О стабилизации программных движений голономной механической системы без измерения скоростей”, *Прикладная математика и механика*, **81**:2 (2017), 137–153.

14. A. Andreev, O. Peregudova, “Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems”, *Systems Science and Control Engineering*, **6**:1 (2018), 12–19.

15. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, “Нелинейные регуляторы в задаче о стабилизации положения голономной механической системы”, *Прикладная математика и механика*, **82**:2 (2018), 156–176.

16. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, С. Ю. Раков, "Уравнения Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора", *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:3 (2016), 8–18.

17. Z. Artstein, "Topological dynamics of an ordinary differential equation", *J. Different. Equat.*, **23**:2 (1977), 216–223.

18. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, "Метод сравнения в задачах об асимптотической устойчивости", *Прикладная математика и механика*, **70**:6 (2006), 965–976.

19. Н. Руш, П. Абетс, and М. Лалуа, *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости*, Мир, М., 1980.

20. F. Chen, "Global asymptotic stability in n-species non-autonomous Lotka-Volterra competitive systems with infinite delays and feedback control", *Applied Mathematics and Computation*, **170** (2005), 1452–1468.

Поступила 28.06.2018

MSC2010 45K05

On the Lyapunov functionals method in the stability problem of Volterra integro-differential equations

© **A. S. Andreev**[1], **O. A. Peregudova** [2]

Abstract. In this paper, we consider the problem of applying the method of Lyapunov functionals to investigate the stability of non-linear integro-differential equations, the right-hand side of which is the sum of the components of the instantaneous action and also ones with a finite and infinite delay. The relevance of the problem is the widespread use of such complicated in structure equations in modeling the controllers using integral regulators for mechanical systems, as well as biological, physical and other processes. We develop the Lyapunov functionals method in the direction of revealing the limiting properties of solutions by means of Lyapunov functionals with a semi-definite derivative. We proved the theorems on the quasi-invariance of a positive limit set of bounded solution as well as ones on the asymptotic stability of the zero solution including a uniform one. The results are achieved by constructing a new structure of the topological dynamics of the equations under study. The theorems proved are applied in solving the stability problem of two model systems which are generalizations of a number of known models of natural science and technology.
Key Words: nonlinear systems of integro-differential equations, Lyapounov functional, stability, topological dynamics, limiting equation

References

1. V. Volterra, *Theory of Functionals and Integral and Integro-Differential Equations*, Dover, New York, 1959.

2. N. N. Krasovskii, *Stability of Motion*, Standford University Press, Standford, 1963.

3. L. Hatvani, "Marachkov type stability conditions for non-autonomous functional differential equations with unbounded right-hand sides", *Electronic Journal of Qualitive Theory of Differential Equations*, **64** (2015), 1–11.

4. A. S. Andreev, "The Lyapunov functionals method in stability problems for functional differential equations", *Automation and Remote Control*, **70** (2009), 1438—1486.

5. T. A. Burton, *Volterra Integral and Differential Equations, 2nd ed.*, Amsterdam: Mathematics in Science and Engineering 202, Elsevier B. V., 2005.

6. O. A. Peregudova, "Development of the Lyapunov function method in the stability problem for functional-differential equations", *Differential Equations*, **44**:12 (2008), 1701—1710.

7. J. Hale, *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1977.

8. C. Corduneanu, and V. Lakshmikantham, "Equations with unbounded delay: a survey", *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, **4** (1980), 831–877.

[1] **Aleksandr S. Andreev**, Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University, (42 Leo Tolstoi Str., Ulyanovsk 432017, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9408-0392, asa5208@mail.ru

[2] **Olga A. Peregudova**, Professor, Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University, (42 Leo Tolstoi Str., Ulyanovsk 432017, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2701-9054, peregudovaoa@gmail.com

9. J. Hale, and J. Kato, "Phase space for retarded equations with infinite delay", *Fukcialaj Ekvacioj*, **21** (1978), 11–41.

10. S. Murakami, "Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations", *J. Differential Eqns.*, **59** (1985), 314–335.

11. G. Makay, "On the asymptotic stability of the solutions of functional differential equations with infinite delay", *J. Differential Eqns.*, **108** (1994), 139–151.

12. V. S. Sergeev, "Resonance Oscillations in Some Systems with Aftereffect", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **79**:5 (2015), 432–439.

13. A. S. Andreev, and O. A. Peregudova, "Stabilization of the preset motions of a holonomic mechanical system without velocity measurement", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **81**:2 (2017), 95–105.

14. A. Andreev, O. Peregudova, "Non-linear PI regulators in control problems for holonomic mechanical systems", *Systems Science and Control Engineering*, **6**:1 (2018), 12–19.

15. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, "Nelineynyye regulyatory v zadache o stabilizatsii polozheniya golonomnoy mekhanicheskoy sistemy", *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*, **82**:2 (2018), 156–176 (In Russ.).

16. A. S. Andreev, O. A. Peregudova, and S. Y. Rakov, "Uravneniya Vol'terra v modelirovanii nelineynogo integral'nogo regulyatora [On Modeling a nonlinear integral regulator on the base of the Volterra equations]", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **18**:3 (2016), 8–18 (In Russ.).

17. Z. Artstein, "Topological dynamics of an ordinary differential equation", *J. Different. Equat.*, **23**:2 (1977), 216–223.

18. A. S. Andreyev, O. A. Peregudova, "The Comparison Method in Asymptotic Stability Problems,", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **70**:6 (2006), 865–875.

19. N. Rouche, P. Habets, and M. Laloy, *Stability Theory by Lyapunov's Direct Method*, Springer, New York, 1977.

20. F. Chen, "Global asymptotic stability in n-species non-autonomous Lotka-Volterra competitive systems with infinite delays and feedback control", *Applied Mathematics and Computation*, **170** (2005), 1452–1468.

Submitted 28.06.2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.273-281

УДК 517.9

О рождении синфазного предельного цикла в ансамбле возбуждающе связанных элементов ФитцХью-Нагумо

© **А. Г. Коротков**[1], **Т. А. Леванова**[2]

Аннотация. В работе предложена и исследована эффективная с вычислительной точки зрения феноменологическая модель ансамбля двух нейроноподобных элементов ФитцХью-Нагумо, связанных с помощью симметричных синаптических возбуждающих связей. Используемая в работе связь между элементами задается функцией, зависящей от фазы активного элемента и являющейся гладкой аппроксимацией прямоугольной импульсной функции, часто используемой при моделировании связи между элементами. Данная функция зависит от трех управляющих параметров, задающих начало активации элемента, длительность его активации и силу связи. В работе с использованием аналитических методов показано существование в фазовом пространстве исследуемой модели синфазного предельного цикла, отвечающего регулярным колебаниям, при которых фазы и частоты обоих элементов совпадают. Доказано, что данный цикл возникает в результате суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа. На плоскости параметров модели, задающих начало активации элемента и длительность активации, построена карта режимов активности и определены границы бифуркаций, приводящих к рождению этого цикла.

Ключевые слова: система ФитцХью-Нагумо, нейронный ансамбль, возбуждающая связь, синфазная спайковая активность, бифуркация Андронова-Хопфа.

1. Введение

Одной из задач нейродинамики является изучение моделей, описывающих поведение как отдельных нейронов, так и больших нейронных ансамблей. Такие математические модели могут быть разделены на два класса: реалистичные биологические и феноменологические модели. В первом случае различные биологические данные и биофизические принципы [1]–[2] должны быть учтены максимально подробно. К таким моделям относится, например, известная модель Ходжкина-Хаксли [3] и ее различные модификации. В случае создания феноменологических моделей требуется воспроизведение конкретного, наблюдаемого в эксперименте биологического явления, и модель конструируется с учетом этого без рассмотрения лишних биологических нюансов. Некоторые из них представляют собой редукцию исходных реалистичных биологических моделей, как, например, широко используемая модель ФитцХью-Нагумо [4].

При составлении модели считается, что связь, с помощью которой передается потенциал действия (импульс) от пресинаптического нейрона (активного) к постсинаптическому (активируемому), определяется уравнением вида:

$$I_{syn}(t) = -g(t) \cdot (V(t) - V_{rev}),$$

[1] **Коротков Александр Геннадьевич**, аспирант, кафедра теории управления и динамики систем, Национальный исследовательский университет Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9256-1643, koralg81@gmail.com

[2] **Леванова Татьяна Александровна**, ассистент, кафедра теории управления и динамики систем, Национальный исследовательский университет Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, д. 23), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2034-7346, tatiana.levanova@itmm.unn.ru

где $I_{syn}(t)$ — синаптический ток; V_{rev} — реверсивный потенциал; $g(t)$ — синаптическая проводимость; $V(t)$ — мембранный потенциал постсинаптического нейрона [5]– [6]. Существуют различные способы учета влияния этих процессов в математической модели. Это можно сделать с помощью дифференциального уравнения [7], с использованием уравнения с запаздывающим аргументом [8]–[9] или так называемой α-функции [10], [11]. При использовании α-функции синаптический ток расчитывается по следующей формуле:

$$I_{syn}(t) = -g \cdot \alpha(t - t_0) \cdot (V(t) - V_{rev}),$$

где g — пиковая синаптическая проводимость; t_0 — время начала взаимодействия; $\alpha(t) = \dfrac{t}{\tau}\exp(-\dfrac{t}{\tau})$ — α-функция с параметром τ, определяющим характеристическое время взаимодействия между пре- и постсинаптическим нейронами.

Целью настоящей работы является аналитическое исследование возможности возникновения нейроноподобной активности в модели двух возбуждающе связанных элементов ФитцХью-Нагумо. При этом особое внимение будет уделено анализу бифуркаций рождения предельного *синфазного цикла*, на котором оба элемента совершают периодические колебания и имеют одинаковую фазу. В данной работе также предложен простой, с вычислительной точки зрения, способ феноменологического моделирования синаптической связи между элементами. С учетом этой связи для моделирования ансамбля импульс от пресинаптического элемента приходит на постсинаптический элемент, когда полярный угол пресинаптического элемента лежит в диапазоне, задаваемом двумя параметрами модели.

2. Модель ансамбля

В настоящей работе рассматривается ансамбль из двух возбудимых нейроноподобных элементов ФитцХью-Нагумо [4], связанных симметричными возбуждающими связями, которые, в соответствии с общими принципами, описанными, например, в [12], задаются функцией вида:

$$I(\phi) = \frac{g}{1 + e^{k(\alpha-\phi)} + e^{k(\phi-\beta)}}. \tag{2.1}$$

Здесь параметр g характеризует силу связи между элементами. При достаточно большом значении параметра k функция, задающая связь $I(\phi)$, где $\phi = \arctan\dfrac{y}{x}$ [1], является гладкой и хорошо аппроксимирует прямоугольную импульсную функцию.

Передача активности от одного элемента другому происходит следующим образом. При достижении фазой ϕ активного пресинаптического элемента значения α на постсинаптический элемент подается ток постоянной амплитуды. Время его воздействия задается разностью $\delta = \beta - \alpha$, то есть воздействие прекращается, как только изображающая точка пресинаптического элемента на фазовой плоскости (x_i, y_i) активного i-го элемента $(i = 1, 2)$ выйдет из сектора, заключенного между углами α и β. Если в момент начала активации постсинаптический элемент будет находиться в состоянии, близком к состоянию покоя, то в системе возникнет отклик. Описанный механизм схематично приведен на рис. 1 а. На нем изображена проекция предельного цикла на фазовую плоскость элемента. Когда изображающая точка находится в секторе, заключенном между углами α и $\alpha + \delta$ (часть проекции предельного цикла, попадающая в этот сектор, изображена красным цветом), на другой элемент подается активирующий импульс. На рис.1 b приведен график функции $I(\phi)$.

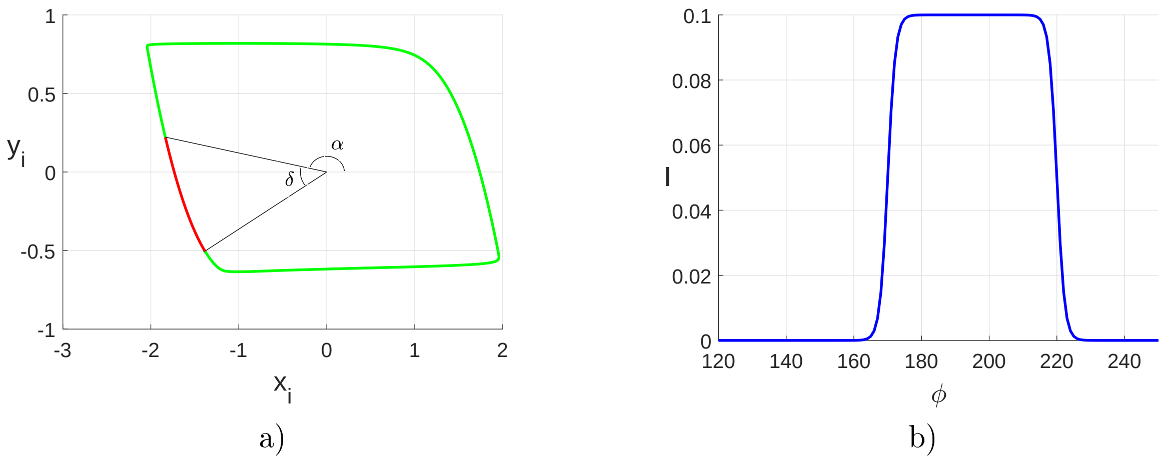


Рис. 1: (a) Механизм передачи активности от одного элемента другому. (b) График зависимости функции активации I от фазового угла ϕ.

Таким образом, ансамбль из двух связанных нейроноподобных элементов задается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \epsilon \dot{x_1} = x_1 - {x_1}^3/3 - y_1 + I(\phi_2), \\ \dot{y_1} = x_1 - a, \\ \epsilon \dot{x_2} = x_2 - {x_2}^3/3 - y_2 + I(\phi_1), \\ \dot{y_2} = x_2 - a, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\phi_i = \arctan \dfrac{y_i}{x_i}$ $(i = 1, 2)$.

Заметим, что указанная система является инвариантной относительно замены $x_1 \leftrightarrow x_2, y_1 \leftrightarrow y_2$. В результате такой симметрии для каждой траектории системы $(x_1^*(t), y_1^*(t), x_2^*(t), y_2^*(t))$ либо существует симметричная относительно инвариантной плоскости $\{P : x_1 = x_2, y_1 = y_2\}$ траектория $(x_2^*(t), y_2^*(t), x_1^*(t), y_1^*(t))$, либо эта траектория симметрична самой себе (в частности, лежит в инвариантной плоскости P).

Далее зафиксируем следующие значения параметров: $a = -1.01$ (элементы находятся в возбудимом режиме), $\epsilon = 0.01$, $k = 50$, $g = 0.1$. Из физического смысла параметра δ, задающего длительность активации элементов, следует, что $\delta > 0$, то есть $\alpha < \beta$. В последующих разделах исследуем влияние параметров связи α и δ на динамику ансамбля (2.2).

3. Аналитические исследования модели

В этом разделе мы приведем аналитические результаты исследования бифуркаций состояния равновесия в исследуемой системе и покажем, что при некоторых значениях параметров из него рождается синфазный предельный цикл в результате суперкритической бифуркации Андронова-Хопфа.

Состояния равновесия в системе определяются из соотношений

[1] В этой формуле y может быть приближенно выражено через x следующим образом: если изображающая точка находится в области медленных движений, то $y \approx x - x^3/3$, иначе $y = \pm\dfrac{2}{3}$.

$$\begin{cases} x_1 - {x_1}^3/3 - y_1 + I(\phi_2) = 0, \\ x_1 - a = 0, \\ x_2 - {x_2}^3/3 - y_2 + I(\phi_1) = 0, \\ x_2 - a = 0, \end{cases}$$

Отсюда найдем $x_1 = x_2 = a$ и получим систему для нахождения y_1 и y_2:

$$\begin{cases} y_1 = a - a^3/3 + I(\arctan \frac{y_2}{a}) = \tilde{I}(y_2), \\ y_2 = a - a^3/3 + I(\arctan \frac{y_1}{a}) = \tilde{I}(y_1). \end{cases} \tag{3.1}$$

Решениями этой системы являются неподвижные точки и точки периода 2 отображения $\bar{y} = \tilde{I}(y)$. Каждой неподвижной точке y_0 соответствует состояние равновесия $O(a, y_0, a, y_0)$ системы (2.2), а паре точек периода 2 $y_{10} = \tilde{I}(y_{20})$ и $y_{20} = \tilde{I}(y_{10})$ — пара состояний равновесия $O_1(a, y_{10}, a, y_{20})$ и $O_2(a, y_{20}, a, y_{10})$. Матрица Якоби системы (2.2) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \frac{1 - {x_1}^2}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} & \frac{\partial I(\phi_2)}{\epsilon \partial x_2} & \frac{\partial I(\phi_2)}{\epsilon \partial y_2} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial I(\phi_1)}{\epsilon \partial x_1} & \frac{\partial I(\phi_1)}{\epsilon \partial y_1} & \frac{1 - {x_2}^2}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Следовательно, характеристическое уравнение может быть записано в виде

$$\left(\lambda\left(\lambda - \frac{1 - {x_1}^2}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\epsilon}\right)\left(\lambda\left(\lambda - \frac{1 - {x_2}^2}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\epsilon}\right) - \left(\frac{I_{x_1}}{\epsilon}\lambda + \frac{I_{y_1}}{\epsilon}\right)\left(\frac{I_{x_2}}{\epsilon}\lambda + \frac{I_{y_2}}{\epsilon}\right) = 0. \tag{3.2}$$

В состоянии равновесия $O(a,\, y_0,\, a,\, y_0)$ для частных производных функции связи $I(\phi)$ выполняются следующие соотношения: $I_{x_1}(a, y_0) = I_{x_2}(a, y_0) = I_x$, $I_{y_1}(a, y_0) = I_{y_2}(a, y_0) = I_y$. Тогда характеристическое уравнение (3.2) может быть преобразовано к виду

$$\left(\lambda\left(\lambda - \frac{1 - a^2}{\epsilon}\right) + \frac{1}{\epsilon}\right)^2 - \left(\frac{I_x}{\epsilon}\lambda + \frac{I_y}{\epsilon}\right)^2 = 0.$$

Найдем корни указанного характеристического уравнения:

$$\begin{cases} \lambda_{1,2} = \dfrac{1 - a^2 + I_x \pm \sqrt{(1 - a^2)^2 + 2(1 - a^2)I_x + {I_x}^2 - 4\epsilon(1 - I_y)}}{2\epsilon}, \\ \lambda_{3,4} = \dfrac{1 - a^2 - I_x \pm \sqrt{(1 - a^2)^2 - 2(1 - a^2)I_x + {I_x}^2 - 4\epsilon(1 - I_y)}}{2\epsilon}. \end{cases}$$

Таким образом, состояние равновесия $O(a,\, y_0,\, a,\, y_0)$ претерпевает бифуркацию Андронова-Хопфа при выполнении одного из двух условий:

$$\begin{cases} 1 - a^2 + I_x = 0, \\ (1 - a^2)^2 + 2(1 - a^2)I_x + {I_x}^2 - 4\epsilon(1 - I_y) < 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

или

$$\begin{cases} 1 - a^2 - I_x = 0, \\ (1 - a^2)^2 - 2(1 - a^2)I_x + {I_x}^2 - 4\epsilon(1 + I_y) < 0. \end{cases} \tag{3.4}$$

Условия (3.3) и (3.4) можно привести к виду

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - a^2 + I_x = 0 \\ I_y < 1 \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} 1 - a^2 - I_x = 0 \\ I_y > -1 \end{array} \right. \tag{3.5}$$

Далее определим частные производные I_x и I_y от функции связи, заданной уравнением (2.1):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial I}{\partial x} = \dfrac{gky\left(e^{k(\arctan\frac{y}{x} - \beta)} - e^{k(\alpha - \arctan\frac{y}{x})}\right)}{(x^2 + y^2)\left(1 + e^{k(\alpha - \arctan\frac{y}{x})} + e^{k(\arctan\frac{y}{x} - \beta)}\right)^2}, \\ \dfrac{\partial I}{\partial y} = -\dfrac{gkx\left(e^{k(\arctan\frac{y}{x} - \beta)} - e^{k(\alpha - \arctan\frac{y}{x})}\right)}{(x^2 + y^2)\left(1 + e^{k(\alpha - \arctan\frac{y}{x})} + e^{k(\arctan\frac{y}{x} - \beta)}\right)^2} = -\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial I}{\partial x}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Используя соотношение (3.6) и условия (3.5), можно получить следующие выражения:

$$\left\{ \begin{array}{l} I_x = a^2 - 1 \\ \dfrac{a(1 - a^2)}{y_0} < 1 \end{array} \right. \text{ или } \left\{ \begin{array}{l} I_x = 1 - a^2 \\ \dfrac{a(1 - a^2)}{y_0} < 1 \end{array} \right. \tag{3.7}$$

Поскольку $0 < I(\phi) < g$, то $a - \frac{a^3}{3} < \tilde{I}(y) < a - \frac{a^3}{3} + g$. Тогда из системы (3.1) следует, что $a - \frac{a^3}{3} < y_0 < a - \frac{a^3}{3} + g$. При выбранных значениях параметров a и g из последнего неравенства следует, что $y_0 < 0$, а значит, неравенство $\frac{a(1-a^2)}{y_0} < 1$ выполнено. В итоге, в условиях (3.7) остаются только равенства. Дополнив эти равенства соотношением для определения координаты y_0 состояния равновесия O $a - a^3/3 - y_0 + I(\arctan\frac{y_0}{a}) = 0$, получим два условия, определяющих бифуркации Андронова-Хопфа:

$$\begin{cases} I_x = a^2 - 1, \\ a - a^3/3 - y_0 + I(\arctan\frac{y_0}{a}) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

или

$$\begin{cases} I_x = 1 - a^2, \\ a - a^3/3 - y_0 + I(\arctan\frac{y_0}{a}) = 0. \end{cases} \tag{3.9}$$

Далее определим условия возникновения синфазного цикла качественными методами. Для синфазного предельного цикла выполняются условия $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$ и $y_1(t) = y_2(t) = y(t)$. Тогда система (2.2) принимает вид

$$\begin{cases} \epsilon\dot{x} = x - x^3/3 - y + I(\phi), \\ \dot{y} = x - a. \end{cases}$$

При достаточно малом $I(\phi)$ неявная функция $y(x)$, задаваемая равенством

$$F(x, y) = x - x^3/3 - y + I(\phi) = 0, \tag{3.10}$$

имеет 2 экстремума. Бифуркация, в результате которой рождается синфазный цикл, происходит, когда функция $y(x)$ имеет экстремум при $x = a$: $y'(a) = 0$ (рождение предельного цикла происходит при переходе точки минимума влево от прямой $x = a$, в противном случае цикл пропадает). Найдем производную функции, неявно заданной соотношением (3.10): $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x^2 + I_x}{1 - I_y}$. В итоге кривая бифуркации рождения цикла находится из условия

$$\begin{cases} 1 - a^2 + I_x = 0, \\ a - a^3/3 - y_0 + I(\arctan \dfrac{y_0}{a}) = 0, \end{cases}$$

которое совпадает с условием (3.8) бифуркации Андронова-Хопфа.

Чтобы из этих же соображений получить условие (3.9), нужно заметить, что для функции связи $I(\phi; \alpha, \beta)$ выполняется равенство $I(\phi; \alpha, \beta) \approx g - I(\phi; \beta, \alpha + 2\pi)$ (причем выполняется равенство $\lim\limits_{k \to +\infty} (I(\phi; \alpha, \beta) + I(\phi; \beta, \alpha + 2\pi)) = g$). Тогда неявная функция $y(x)$ задается равенством $x - x^3/3 - y + g - I(\phi) = 0$, а ее производная имеет вид $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 - x^2 - I_x}{1 + I_y}$. Тогда кривая бифуркации рождения цикла будет задаваться системой

$$\begin{cases} 1 - a^2 - I_x = 0, \\ a - a^3/3 - y_0 + I(\arctan \frac{y_0}{a}) = 0. \end{cases}$$

Это условие совпадает с условием (3.9).

Таким образом, показано, что в результате бифуркации Андронова-Хопфа рождается устойчивый предельный синфазный цикл. Аналитическим путем найдены бифуркационные кривые, см. бифуркационную диаграмму на рис. 2.

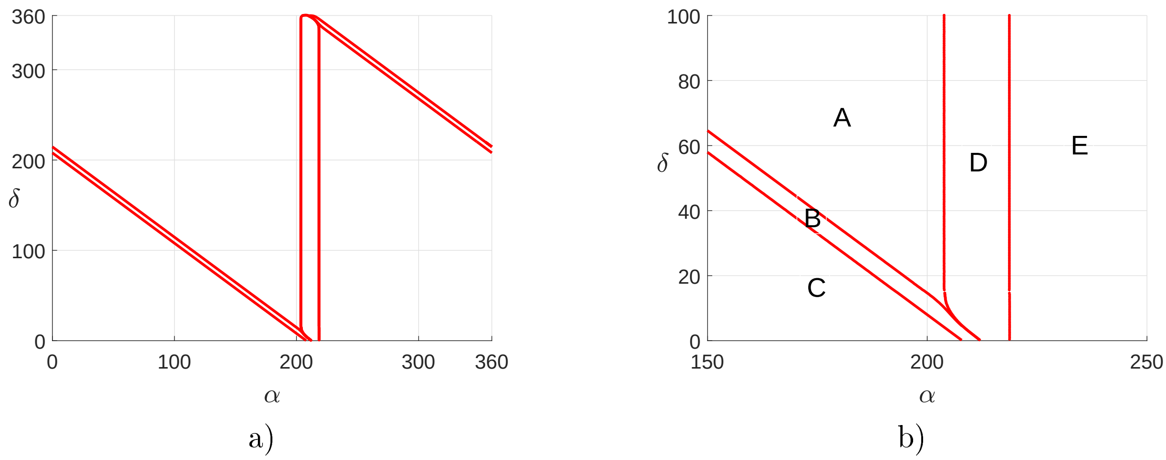


Рис. 2: Бифуркационная диаграмма и ее увеличенный фрагмент.

Отметим, что на построенной бифуркационной диаграмме область, отвечающая существованию устойчивого синфазного цикла, заключена между двумя почти вертикальными линиями (область D на рис. 2 b). В областях A, C и E аттрактором является состояние равновесия. В области D существует устойчивый синфазный предельный цикл, а состояние равновесия является седло-фокусом. В области B состояние равновесия также является седло-фокусным, однако, мы не можем утверждать, что здесь так же как и в области D возникает устойчивый синфазный цикл. Бифуркации в этой области требуют дополнительных исследований. При этом в области B (так же, как в D) состояние равновесия системы является седло-фокусным. Однако мы не можем утверждать, что в данном случае также рождается устойчивый синфазный цикл. Бифуркации в этой области требуют дополнительного изучения. Мы планируем провести такие исследования в последующих работах.

4. Заключение

В работе проведены исследования рождения режима колебательной нейроноподобной активности в модели двух возбуждающе связанных элементов ФитцХью-Нагумо. Основным результатом работы является аналитическое доказательство возникновения синфазного предельного цикла, при движении по которому оба элемента совершают периодические колебания, оставаясь в одной фазе. На плоскости параметров, задающих связь между элементами, построены бифуркационные кривые, отвечающие возникновению такого режима.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ №17-72-10228.

Список литературы

1. C. Koch, *Biophysics of computation: information processing in single neurons*, Oxford University Press, 2004.
2. E. De Schutter, ed., *Computational neuroscience: realistic modeling for experimentalists*, CRC Press, 2000.
3. A. L. Hodgkin, A. F. Huxley, “A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve”, *The Journal of Physiology*, **117**:4 (1952), 500–544.
4. H. P. Schwan, ed., *Biological engineering*, McGraw-Hill Companies, 1969.
5. E. De Schutter, ed., *Computational modeling methods for neuroscientists*, The MIT Press, 2009, 432 p.
6. J. Baladron, D. Fasoli, O. Faugeras, J. Touboul, “Mean-field description and propagation of chaos in networks of Hodgkin-Huxley and FitzHugh-Nagumo neurons”, *The Journal of Mathematical Neuroscience*, **2**:1 (2012), 10.
7. J. P. Keener, J. Sneyd, *Mathematical physiology*, Springer, New York, 1998.
8. O. Valles-Codina, R. Mobius, S. Rudiger, L. Schimansky-Geier, “Traveling echo waves in an array of excitable elements with time-delayed coupling”, *Physical Review E.*, **83**:3 (2011), 036209.
9. D. Rankovic, “Bifurcations of Fitzhugh-Nagumo excitable systems with chemical delayed coupling”, *Matematickiy vesnik*, **63**:2 (2011), 103–114.
10. W. Shin, S. G. Lee, S. Kim, “Stochastic excitation of coherent dynamical states of two coupled FitzHugh-Nagumo neurons”, *Journal of the Korean Physical Society*, **48** (2006), 179–185.
11. D. Hansel, G. Mato, C. Meunier, “Phase dynamics for weakly coupled Hodgkin-Huxley neurons”, *EPL (Europhysics Letters)*, **23**:5 (1993), 367.

12. A. Destexhe, Z. F. Mainen, T. J. Sejnowski, "An efficient method for computing synaptic conductances based on a kinetic model of receptor binding", *Neural Computation*, **6**:1 (1994), 14–18.

Поступила 11.05.2018

MSC2010 34C23,34C25,34C26

On born of in-phase limit cycle in ensemble of excitatory coupled FitzHugh-Nagumo elements

© **A. G. Korotkov**[1], **T. A. Levanova**[2]

Abstract. We proposed and studied numerically efficient phenomenological model of ensemble of two FitzHugh-Nagumo neuron-like elements that are coupled by symmetric synaptic excitatory coupling. This coupling is defined by function that depends on phase of active element and that is smooth approximation of rectangular impulse function. Above-mentioned coupling depends on three parameters that define the beginning of element activation, the duration of the activation and the coupling strength. We show analytically that in the phase space of the model there exists stable in-phase limit cycle that corresponds to regular oscillations with equal phases and frequencies of elements. It is proved that this limit cycle is a result of supercritical Andronov-Hopf bifurcation. The chart of activity regimes is depicted on the plane of parameters that define beginning and duration of activation. The boundaries of bifurcations that lead to birth of this cycle are found.
Key Words: FitzHugh-Nagumo system, neural ensemble, excitatory coupling, in-phase spike activity, Andronov-Hopf bifurcation.

References

1. C. Koch, *Biophysics of computation: information processing in single neurons*, Oxford University Press, 2004.
2. E. De Schutter, ed., *Computational neuroscience: realistic modeling for experimentalists*, CRC Press, 2000.
3. A. L. Hodgkin, A. F. Huxley, "A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve", *The Journal of physiology*, **117**:4 (1952), 500–544.
4. H. P. Schwan, ed., *Biological engineering*, McGraw-Hill Companies, 1969.
5. E. De Schutter, ed., *Computational Modeling Methods for Neuroscientists*, The MIT Press, 2009, 432 p.
6. J. Baladron, D. Fasoli, O. Faugeras, J. Touboul, "Mean-field description and propagation of chaos in networks of Hodgkin-Huxley and FitzHugh-Nagumo neurons", *The Journal of Mathematical Neuroscience*, **2**:1 (2012), 10.

[1] **Alexander G. Korotkov**, PhD student, Department of Control Theory and System Dynamics, National Research University Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky (23 Prospekt Gagarina, 603950 Nizhni Novgorod, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9256-1643, koralg81@gmail.com

[2] **Tatiana A. Levanova**, assistant, Department of Control Theory and System Dynamics, National Research University Nizhny Novgorod State University named after N.I. Lobachevsky (23 Prospekt Gagarina, 603950 Nizhni Novgorod, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-2034-7346, tatiana.levanova@itmm.unn.ru

7. J. P. Keener, J. Sneyd, *Mathematical physiology*, Springer, New York, 1998.

8. O. Valles-Codina, R. Mobius, S. Rudiger, L. Schimansky-Geier, “Traveling echo waves in an array of excitable elements with time-delayed coupling”, *Physical Review E.*, **83**:3 (2011), 036209.

9. D. Rankovic, “Bifurcations of Fitzhugh-Nagumo excitable systems with chemical delayed coupling”, *Matematicki vesnik*, **63**:2 (2011), 103–114.

10. W. Shin, S. G. Lee, S. Kim, “Stochastic excitation of coherent dynamical states of two coupled FitzHugh-Nagumo neurons”, *Journal of the Korean Physical Society*, **48** (2006), 179–185.

11. D. Hansel, G. Mato, C. Meunier, “Phase dynamics for weakly coupled Hodgkin-Huxley neurons”, *EPL (Europhysics Letters)*, **23**:5 (1993), 367.

12. A. Destexhe, Z. F. Mainen, T. J. Sejnowski, “An efficient method for computing synaptic conductances based on a kinetic model of receptor binding”, *Neural computation*, **6**:1 (1994), 14–18.

Submitted 11.05.2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.282-294

УДК 517.925, 539.376

Об аналитическом решении одной задачи ползучести

© **Е. Б. Кузнецов**[1], **С. С. Леонов**[2]

Аннотация. В статье рассматривается аналитическое решение одной начальной задачи для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающей процесс разрушения металлических конструкций при неоднородном напряженно-деформированном состоянии в условиях ползучести. Подобные задачи возникают при расчете прочностных характеристик и оценке остаточных деформаций при проектировании ядерных реакторов, в строительной и аэрокосмической отраслях, машиностроении. Большое значение для практики имеет разрешимость используемой системы определяющих соотношений ползучести. Возможность получения точного аналитического решения позволяет значительно упростить как идентификацию характеристик ползучести, так и процесс исследования модели. С использованием теоремы Чебышева об интегрировании биномиального дифференциала получены необходимые и достаточные условия интегрируемости начальной задачи, накладываемые на параметры модели. Даны рекомендации по численному решению рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: ползучесть, разрушение, длительная прочность, параметр поврежденности, биномиальный дифференциал, задача Коши, система обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Начиная со второй половины XX в. значительно возрос интерес к задачам определения деформационно-прочностных характеристик элементов конструкций, работающих в условиях сложного напряженно-деформированного состояния при различных температурно-силовых воздействиях. Это связано с появлением новых задач в аэрокосмической отрасли (например расчет характеристик лопаток и дисков турбин авиационных двигателей), машиностроении, проектировании зданий и ядерных реакторов. Поэтому значительное место занимали и продолжают занимать исследования поведения металлов.

В большинстве случаев для исследования поведения металлов и других материалов (таких как бетон) в холодном состоянии достаточно учитывать только упругую и пластическую деформации. Однакл при расчете конструкций, работающих при высоких температурах, необходим также учет ползучести материала.

Термином «ползучесть», согласно известной монографии Ю. Н Работнова [1, с. 9], «будем называть всю совокупность явлений, которые можно объяснить, допустив, что зависимость между напряжениями и деформациями содержит время, явно или через посредство некоторых операторов». Более узкое определение дает Н. Н. Малинин: «напряжения и деформации, возникшие при нагружении деталей, изменяются во времени, даже если нагрузки остаются постоянными. Это явление называют ползучестью материала. Одну

[1] **Кузнецов Евгений Борисович**, профессор кафедры «Моделирование динамических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9452-6577, kuznetsov@mai.ru

[2] **Леонов Сергей Сергеевич**, доцент кафедры «Моделирование динамических систем», ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское ш., д. 4), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6077-0435, powerandglory@yandex.ru

сторону этого явления – изменение во времени деформаций – называют собственно ползучестью или последействием, а другую – изменение во времени напряжений – релаксацией» [2, с. 241].

На рис. 1 приведены кривые, изображающие зависимости деформации от времени при различных напряжениях. На кривой $\varepsilon(t)$, соответствующей напряжению σ_2, можно выделить три четко выраженных участка (стадии ползучести) [3, с. 20]:

I – неустановившаяся ползучесть, т. е. участок, на котором скорость ползучести монотонно уменьшается до своего наименьшего значения,

II – установившаяся ползучесть, т. е. участок, на котором скорость ползучести сохраняет постоянное наименьшее значение,

III – участок ускоряющейся ползучести, предшествующий разрушению.

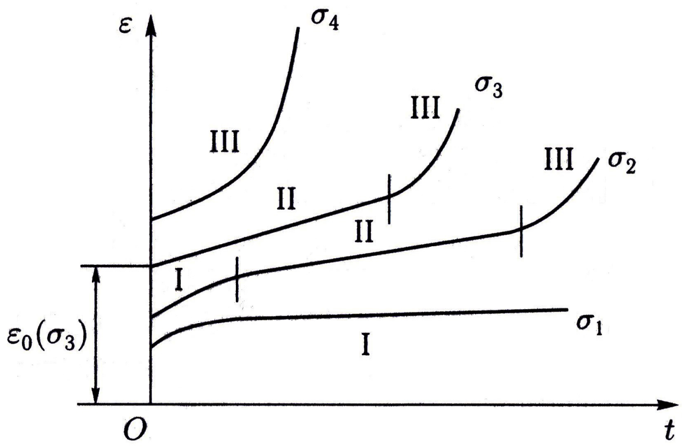


Рис. 1: Зависимости деформации ε от времени t

В предположении, что время нагружения до заданного значения напряжения мало по сравнению с длительностью испытания, кривые $\varepsilon(t)$ начинаются со значения деформации ε_0, соответствующего мгновенному нагружению. Мгновенная деформация складывается из упругой ε^e и пластической ε^p составляющих. Разность между полной и мгновенной деформацией есть деформация ползучести ε^c (в дальнейшем верхний индекс c при обозначении деформации ползучести будет опускаться) [3, с. 19–20].

В зависимости от величины напряжения, на кривой $\varepsilon(t)$ могут отсутствовать некоторые стадии ползучести как это показано на рис. 1.

Довольно сложной задачей при расчете элементов конструкций на ползучесть и длительную прочность является выбор определяющих соотношений ползучести или критерия длительной прочности. В обзорах А. М. Локощенко [4]–[6] приведено множество определяющих соотношений и критериев длительной прочности для одномерных, плоских и пространственных задач ползучести. При описании прикладных задач большое значение имеет интегрируемость определяющих соотношений. Наличие аналитического решения значительно облегчает исследование рассматриваемой задачи, а также идентификацию характеристик ползучести (материальных констант, входящих в определяющие соотношения). Но в большинстве случаев определяющие соотношения ползучести являются нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями и проинтегрировать их удается лишь в частных случаях.

В данной статье для одного класса определяющих соотношений ползучести, описывающих одномерный процесс ползучести металлических конструкций при чистом растяжении с постоянной нагрузкой, даны необходимые и достаточные условия интегрируемости, в зависимости от значений материальных констант. Прежде чем переходить к постановке задачи и формулировке результатов, подробнее остановимся на используемых определяющих соотношениях ползучести.

2. Определяющие соотношения ползучести

Впервые ползучесть наблюдалась еще в начале XIX века в экспериментах К. Л. М. А. Навье (1826), Г. Г. Кориолиса (1830) и Л. Ж. Вика (1834). Но систематические исследования ползучести металлов начались только в 40-х годах прошлого века. В конце 50-х годов XX века Л. М. Качанов [7] и Ю. Н. Работнов [8] пришли к выводу, что использующихся в то время терминов механики деформируемого твердого тела (тензоры напряжений и деформаций, вектор перемещений) недостаточно для описания процесса длительного разрушения материалов и элементов конструкций в условиях ползучести. Ими был предложен новый подход к исследованию длительной прочности, названный кинетическим. Этот подход основан на использовании введенного параметра поврежденности ω. Исходному состоянию материала (при $t = 0$) соответствует значение $\omega = 0$, при разрушении параметр ω становится равным единице. Этот подход в дальнейшем был развит в монографии Ю. Н. Работнова [1] и получил название кинетической теории ползучести.

При использовании уравнений кинетической теории к расчету ползучести и длительной прочности конструкции задачи определения напряженно-деформированного состояния и длительной прочности совмещаются. Одним из наиболее распространенных подходов к моделированию процессов ползучести и разрушения металлических конструкций является использование уравнений теории структурных параметров Ю. Н. Работнова [1, с. 363-364], которые в одномерном случае с одним скалярным параметром поврежденности можно записать в виде системы, состоящей из определяющего уравнения, связывающего деформацию ползучести ε с действующим напряжением σ, вида

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{f_1(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)} \tag{2.1}$$

и эволюционного уравнения, описывающего развитие поврежденности в конструкции, вида

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{f_2(\sigma, T)}{\Psi(\omega, T)}. \tag{2.2}$$

Здесь t – время, T – температура, σ – в общем случае переменное действующее напряжение, функциональные зависимости, входящие в правые части уравнений (2.1) и (2.2), определяются по результатам эксперимента.

В случае постоянной температуры $T = \mathrm{const}$, запишем уравнения (2.1) и (2.2) в виде системы

$$\begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \dfrac{f_1(\sigma)}{\Psi(\omega)}, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{f_2(\sigma)}{\Psi(\omega)}. \end{cases} \tag{2.3}$$

В качестве начальных условий для системы ОДУ (2.3) берутся однородные

$$\varepsilon(0) = 0, \omega(0) = 0. \tag{2.4}$$

Искомыми функциями в задаче (2.3)-(2.4) являются $\varepsilon(t)$ и $\omega(t)$, $\sigma(t,\varepsilon)$ – известная непрерывная функция времени и деформации ползучести, в частности постоянная величина. Решение задачи ищется в области $V = \{(\varepsilon,\omega,t)\,|\,0 \le \varepsilon \le \varepsilon^*,\, 0 \le \omega \le 1,\, 0 \le t \le t^*\}$, где ε^* – значение деформации ползучести в момент разрушения, t^* – длительная прочность конструкции.

Отметим некоторые особенности системы (2.3). Рассматриваются процессы деформирования, для которых $\dot{\varepsilon} \ge 0$ и $\dot{\omega} \ge 0$, т. е. процессы деформирования и накопления повреждений в материале предполагаются монотонными. Функции $f_1(\sigma)$ и $f_2(\sigma)$ будем считать непрерывными, монотонными и положительными. Дополнительно будем полагать, что $f_1(\sigma) = \varphi(t)\cdot\psi_1(\varepsilon)$ и $f_2(\sigma) = \varphi(t)\cdot\psi_2(\varepsilon)$, где $\varphi(t), \psi_1(\varepsilon)$ и $\psi_2(\varepsilon)$ являются положительными и непрерывными функциями своих аргументов. В качестве $\Psi(\omega)$ будем рассматривать неотрицательные функции, причем для неупрочняющихся материалов, т. е. таких материалов, для которых стадия неустановившейся ползучести отсутствует, будем применять монотонно убывающие функции, такие что $\Psi(1) = 0$, а для упрочняющихся материалов немонотонные унимодальные функции, для которых $\Psi(0) = 0$ и $\Psi(1) = 0$.

По аналогии со статьей [9] докажем, что при сделанных предположениях существует единственное решение задачи (2.3)-(2.4). Поделим первое уравнение системы (2.3) на второе и разделим переменные

$$\frac{\psi_2(\varepsilon)}{\psi_1(\varepsilon)}\,d\varepsilon = d\omega.$$

Интегрируя это соотношение, получим выражение для параметра поврежденности

$$\omega = \int_0^{\varepsilon} \frac{\psi_2(\varepsilon)}{\psi_1(\varepsilon)}\,d\varepsilon = H(\varepsilon). \tag{2.5}$$

Подставив выражение (2.5) в первое уравнение системы (2.3) и разделив переменные, получим соотношение

$$\frac{\Psi\left[H(\varepsilon)\right]}{\psi_1(\varepsilon)}\,d\varepsilon = \varphi(t)\,dt.$$

После его интегрирования, получим неявное выражение для деформации ползучести

$$\int_0^{\varepsilon} \frac{\Psi\left[H(\varepsilon)\right]}{\psi_1(\varepsilon)}\,d\varepsilon = \int_0^{t} \varphi(t)\,dt \quad \text{или} \quad G(\varepsilon) = \Phi(t).$$

Осталось показать, что существует обратная функция $G^{-1}(\tau)$. Отметим сначала, что производная $H'(\varepsilon) = \psi_2(\varepsilon)/\psi_2(\varepsilon) > 0$, т. е. между значениями деформации ползучести ε и параметра поврежденности ω существует взаимно однозначное соответствие. По теореме о неявной функции [10, с. 312] существует обратная функция $H^{-1}(\omega) = \varepsilon$. По аналогии можно получить и выражение для времени $t = \Phi^{-1}\left[G(\varepsilon)\right]$. Так как производная $G'(\varepsilon) = \Psi\left[H(\varepsilon)\right]/\psi_1(\varepsilon)$ положительна в открытой области $V_0 = \{(\varepsilon,\omega,t)\,|\,0 < \varepsilon < \varepsilon^*, 0 < \omega < 1, 0 < t < t^*\}$, то в ней существует обратная функция $G^{-1}(\tau)$. Учитывая, что начальный момент времени однозначно определяется начальными условиями, а момент разрушения значениями $\omega = 1$, $\varepsilon = \varepsilon^* = H^{-1}(1)$ и $t = t^* = \Phi^{-1}\left[G(\varepsilon^*)\right]$, можно продолжить обратную функцию $G^{-1}(\tau)$ на всю область V. Таким образом, выражение для деформации ползучести примет вид

$$\varepsilon = G^{-1}\left[\Phi(t)\right], \tag{2.6}$$

а длительная прочность конструкции вычисляется по формуле

$$t^* = \Phi^{-1}\left\{G\left[H^{-1}(1)\right]\right\}. \tag{2.7}$$

Решение задачи Коши (2.3)-(2.4) дается соотношениями (2.5)-(2.7). Но для получения аналитического решения нужно вычислить интегралы, входящие в них. Это удается сделать не всегда, в особенности при громоздкой правой части системы (2.3). Проиллюстрируем процесс решения на задаче деформирования трубчатых образцов из нержавеющей стали Х18Н10Т под действием постоянной одноосной растягивающей нагрузки при постоянной температуре в условиях ползучести вплоть до разрушения. Установим условия ее интегрируемости.

3. Постановка задачи растяжения образцов из стали Х18Н10Т

Для описания растяжения образцов из нержавеющей стали Х18Н10Т будем использовать уравнения теории структурных параметров Ю. Н. Работнова вида (2.3), которые, в случае отсутствия упрочнения, запишем в форме [11]

$$\begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \dfrac{A\cdot\sigma^n}{(1-\omega^r)^n}, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{B\cdot\sigma^n}{(1-\omega^r)^n} \end{cases} \tag{3.1}$$

с начальными условиями (2.4). Здесь A, B, n, r – характеристики ползучести и разрушения конструкции. Из физического смысла задачи на характеристики ползучести накладываются ограничения

$$A > 0,\ B > 0,\ n > 0,\ r > 0. \tag{3.2}$$

Ограничимся также рассмотрением только таких физических процессов, для которых справедливо неравенство $A < B$.

При деформировании конструкции в условиях ползучести под действием постоянных нагрузок, введем гипотезу о равномерном распределении деформации по длине образца [11]. Тогда, в случае малых деформаций, выражение для напряжения примет вид

$$\sigma(t) = \sigma_0\cdot(1+\varepsilon(t)), \tag{3.3}$$

где σ_0 – начальное напряжение.

Учитывая соотношение (3.3), перейдем от системы (3.1) к

$$\begin{cases} \dfrac{d\varepsilon}{dt} = \dfrac{A\cdot\sigma_0^n\cdot(1+\varepsilon)^n}{(1-\omega^r)^n}, \\ \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{B\cdot\sigma_0^n\cdot(1+\varepsilon)^n}{(1-\omega^r)^n}. \end{cases} \tag{3.4}$$

При $\varphi(t) = \sigma_0^n = \mathrm{const}$, $\psi_1(\varepsilon) = A\cdot(1+\varepsilon)^n$, $\psi_2(\varepsilon) = B\cdot(1+\varepsilon)^n$ и $\Psi(\omega) = (1-\omega^r)^n$ задача (3.4), (2.4) совпадает по виду с задачей (2.3)-(2.4), а функции правых частей уравнений системы (2.3) удовлетворяют описанным выше требованиям. Это означает, что существует единственное решение задачи (3.4), (2.4) в рассматриваемой области, представимое в интегральном виде (2.5)-(2.7). Получим условия аналитического вычисления интегралов в соотношениях (2.5)-(2.7).

4. Аналитическое решение

Поделив первое уравнение системы (3.1) или (3.4) на второе можно получить связывающее деформацию ε и параметр ω соотношение

$$\varepsilon(t) = \frac{A}{B} \cdot \omega(t). \tag{4.1}$$

Но даже используя соотношение (4.1), аналитическое решение задачи (3.1), (2.4) или (3.4), (2.4) удается получить далеко не при всех значениях параметров n и r. Уже при постоянном напряжении для задачи (3.1), (2.4) справедлива

Теорема 4.1 *Задача (3.1), (2.4) при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$ интегрируется аналитически тогда и только тогда, когда параметры модели n и r удовлетворяют одному из следующих условий*

1. *n - натуральное число;*
2. *$1/r$ - натуральное число;*
3. *$1/r + n$ – натуральное число.*

Доказательство. В известной работе П. Л. Чебышева по интегрированию иррациональных дифференциалов [12] даются необходимые и достаточные условия выражения интеграла от биномиального дифференциала

$$\int x^m \left(a + bx^k\right)^p \, dx \tag{4.2}$$

конечной комбинацией элементарных функций. Они состоят в следующем

1. p - целое число;
2. $\dfrac{m+1}{k}$ – целое число;
3. $\dfrac{m+1}{k} + p$ – целое число.

Учитывая выражение (4.1), решение задачи (3.1), (2.4) при постоянном напряжении $\sigma = \sigma_0 = \mathrm{const}$ сводится к интегрированию задачи Коши

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{B \cdot \sigma_0^n}{\left(1 - \omega^r\right)^n}, \quad \omega(0) = 0,$$

решение которой, в свою очередь, сводится к вычислению интеграла

$$\int\limits_0^\omega \left(1 - \omega^r\right)^n d\omega. \tag{4.3}$$

Для интеграла (4.3) $m = 0,\ p = n,\ k = r,\ a = 1,\ b = -1$. Из условий Чебышева и положительности параметров задачи, получим утверждение теоремы.
Доказательство закончено.

Для задачи (3.4), (2.4) приходится накладывать более строгие ограничения на значения параметров n и r. Докажем следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.2 *Задача (3.4), (2.4) интегрируется аналитически тогда и только тогда, когда параметры модели n и r удовлетворяют одному из следующих условий:*

1. *n - натуральное число;*
2. *r - натуральное число;*
3. *$1/r$ – натуральное число.*

При этих условиях существует аналитическое решение задачи (3.4), (2.4) даваемое выражением (4.1)

$$\varepsilon(t) = (A/B) \cdot \omega(t)$$

и равномерно сходящимися функциональными рядами

– *для натуральных r*

$$t = \frac{1}{B \cdot \sigma_0^n} \cdot \int_0^\omega \frac{(1-\omega^r)^n}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n} d\omega = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{\alpha_k}{B \cdot \sigma_0^n} \cdot \int_0^\omega \frac{\omega^{k\cdot r}}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n} d\omega, \quad (4.4)$$

– *для дробных r*

$$t = \frac{1}{B \cdot \sigma_0^n} \cdot \int_0^\omega \frac{(1-\omega^r)^n}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n} d\omega = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \frac{\beta_k}{B \cdot \sigma_0^n} \cdot (A/B)^k \cdot \int_0^\omega \omega^k \cdot (1-\omega^r)^n \, d\omega. \quad (4.5)$$

Здесь $\alpha_k = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$ *и* $\beta_k = \dfrac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Проинтегрируем второе уравнение системы (3.4)

$$\int_0^\omega \frac{(1-\omega^r)^n}{(1+\varepsilon)^n} d\omega = B \cdot \sigma_0^n \cdot t. \quad (4.6)$$

Рассмотрим случай натурального r.

Используя соотношение (4.1), заменим в интеграле, входящем в (4.6), ε на $(A/B)\cdot\omega$

$$\int_0^\omega \frac{(1-\omega^r)^n}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n} d\omega = B \cdot \sigma_0^n \cdot t. \quad (4.7)$$

Разложим числитель подынтегрального выражения (4.7) в ряд Маклорена [13, с. 138–141]

$$(1-\omega^r)^n = 1 - n\cdot\omega^r + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\omega^{2r} + \dots + (-1)^k \cdot \alpha_k \cdot \omega^{k\cdot r} + \cdots, \quad (4.8)$$

где $\alpha_k = \dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$.

Тогда подынтегральное выражение, входящее в (4.7), примет вид

$$\frac{(1-\omega^r)^n}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \cdot \alpha_k \cdot \frac{\omega^{k\cdot r}}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n}. \quad (4.9)$$

Учитывая, что $(A/B)\cdot\omega \geqslant 0$, для $\omega \in [0;1]$ при $k = 0,1,2,\ldots$ справедливы оценки

$$\left|\alpha_k \cdot \frac{\omega^{k\cdot r}}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n}\right| \leqslant |\alpha_k|\,.$$

Константы, ограничивающие сверху члены функционального ряда в (4.9), являются членами биномиального ряда

$$(1+x)^n = 1 + n\cdot x + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot x^2 + \cdots + \alpha_k\cdot x^k + \cdots$$

при $x = 1$. Для задачи (3.4), (2.4) рассматриваются только $n > 0$, а значит, числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha_k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}$$

сходится абсолютно [14, с. 405–406]. Тогда и ряд, составленный из модулей

$$\sum_{k=0}^{+\infty}|\alpha_k|\,,$$

будет сходиться. Таким образом, по признаку Вейерштрасса [13, с. 101–102] функциональный ряд в (4.9) будет сходиться равномерно на отрезке $\omega \in [0;1]$.

Почленно интегрируя правую и левую часть равенства (4.9), запишем интеграл, входящий в соотношение (4.7), в виде

$$\int_0^{\omega}\frac{(1-\omega^r)^n}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n}d\omega = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\cdot\alpha_k\cdot\int_0^{\omega}\frac{\omega^{k\cdot r}}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n}d\omega. \tag{4.10}$$

Для того, чтобы интеграл, стоящий слева в выражении (4.10), вычислялся аналитически необходимо и достаточно, чтобы все интегралы, стоящие справа, вычислялись аналитически. Применим к ним условия Чебышева. Тогда возможны три случая

1. n - натуральное число;
2. $k\cdot r+1$ – натуральное число;
3. $k\cdot r+1-n$ – натуральное число.

При этом, последние два случая должны выполняться для любых $k = 0,1,2,\ldots$. Отсюда следует, что аналитическое вычисление интеграла при натуральных значениях r возможно при любых значениях n. При этих условиях существует решение в виде равномерно сходящегося на отрезке $\omega \in [0;1]$ ряда вида (4.4).

Рассмотрим случай дробного r.

В этом случае функция $(1-\omega^r)^n$ не может быть разложена в ряд (4.8). Поступим другим образом. Разложим выражение $\dfrac{1}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n}$ в ряд Маклорена

$$\frac{1}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n} = 1 - n\cdot(A/B)\cdot\omega + \frac{n(n+1)}{2!}\cdot(A/B)^2\cdot\omega^2 + \cdots + \\ + (-1)^k\cdot\beta_k\cdot(A/B)^k\cdot\omega^k + \cdots\,,$$

где $\beta_k = \dfrac{n(n+1)\dots(n+k-1)}{k!}$.

Тогда подынтегральное выражение в (4.7) примет вид

$$\frac{(1-\omega^r)^n}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\cdot\beta_k\cdot(A/B)^k\cdot\omega^k\cdot(1-\omega^r)^n\,. \tag{4.11}$$

Поскольку $\omega\in[0;1]$, то выражение $\omega^k\cdot(1-\omega^r)^n<1$ для любых $k,\,n,\,r>0$. Из этого следует следующая оценка членов функционального ряда (4.11)

$$\beta_k\cdot(A/B)^k\cdot\omega^k\cdot(1-\omega^r)^n<\beta_k\cdot(A/B)^k.$$

Числовой ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\beta_k\cdot(A/B)^k \tag{4.12}$$

получается из степенного ряда

$$\frac{1}{[1-x]^n} = 1+n\cdot x+\frac{n(n+1)}{2!}\cdot x^2+\dots+\beta_k\cdot x^k+\cdots \tag{4.13}$$

при $x=A/B$. Ряд (4.13) сходится абсолютно при $x=A/B<1$, а значит и ряд (4.12) сходится абсолютно. Таким образом, функциональный ряд (4.11) сходится равномерно на отрезке $\omega\in[0;1]$ для любых значений r и n.

Почленно интегрируя правую и левую часть равенства (4.11), получим

$$\int_0^{\omega}\frac{(1-\omega^r)^n}{[1+(A/B)\cdot\omega]^n}d\omega = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\cdot\beta_k\cdot(A/B)^k\cdot\int_0^{\omega}\omega^k\cdot(1-\omega^r)^n\,d\omega. \tag{4.14}$$

Для того, чтобы стоящий слева в (4.14) интеграл вычислялся аналитически, необходимо и достаточно, чтобы все интегралы, стоящие справа, вычислялись аналитически. По условиям Чебышева это возможно только в трех случаях

1. n - натуральное число;
2. $\dfrac{k+1}{r}$ – натуральное число;
3. $\dfrac{k+1}{r}+n$ – натуральное число.

Учитывая, что последние два случая должны выполняться для всех значений $k=0,1,2,\dots$, интеграл (4.7) вычисляется аналитически только при натуральном n или $1/r$. При этих условиях существует решение в виде равномерно сходящегося на отрезке $\omega\in[0;1]$ ряда вида (4.5).

Дополняя выражение (4.4) или (4.5) для t выражением (4.1) для ε – получим решение задачи (3.4), (2.4).

Получить аналитические зависимости деформации ползучести ε и времени t от параметра поврежденности ω как аргумента удается только при указанных значениях параметров n и r. При необходимости можно получить зависимость ω и t от ε. При этом, согласно выражению (4.1), характер сходимости рядов (4.4) и (4.5) не изменяется, также и условия, накладываемые на параметры n и r, остаются неизменными.

Осталось показать, что построить зависимость ω и ε от t можно только при указанных ограничениях на параметры задачи. Пусть такая зависимость построена

$$\omega = \varphi(t),\ \varepsilon = \psi(t).$$

Из выражения (4.1) получим

$$\varepsilon = (A/B) \cdot \omega = (A/B) \cdot \varphi(t) = \psi(t).$$

Таким образом, решение задачи (3.4), (2.4) определяется только одной функцией $\varphi(t)$. Поскольку зависимость ω от t является монотонной, то существует обратная функция

$$t = \varphi^{-1}(\omega).$$

Так как помимо задаваемых рядами (4.4) и (4.5) решений нет, то обратная функция $\varphi^{-1}(\omega)$ должна совпадать с одним из них. И других решений быть не может.
Доказательство закончено.

Замечание 4.1 *Подчеркнем, что результаты теоремы 4.2 доказаны в предположении $A < B$. Можно ли их обобщить на случай $A \geqslant B$? Легко видеть, что при натуральных значениях r результаты теоремы 4.2 справедливы для любых значений A и B. Для произвольных значений $r > 0$ это не так. При $A = B$ рассматриваемые в доказательстве ряд (4.5) будет равномерно сходиться лишь на открытом полуинтервале $\omega \in [0; 1)$, а при $\omega = 1$ равномерная сходимость будет только для $0 < n \leqslant 1$. При $A > B$ результаты будут аналогичными случаю $A = B$, за исключением длины отрезка равномерной сходимости – $\omega \in [0; B/A]$. Таким образом, можно утверждать, что для описания произвольно больших деформаций задача (3.4), (2.4) малоприменима.*

5. Выводы и заключение

В статье исследована возможность аналитического решения задачи деформирования образцов из стали Х18Н10Т при постоянных одноосной растягивающей нагрузке и температуре в условиях ползучести, описываемой системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений теории структурных параметров Ю. Н. Работнова с однородными начальными условиями. Для данной задачи получены необходимые и достаточные условия интегрируемости, накладываемые на материальные константы. Согласно полученным результатам, аналитическое решение возможно только при натуральных значениях материальных констант n и r, а также натуральном значении $1/r$. Но при указанных значениях параметров n и r с удовлетворительной точностью удается описать только очень узкий круг задач. В частности, в статье [11] для задачи чистого растяжения трубок из стали Х18Н10Т с внешним диаметром 12 мм, толщиной стенки 0.5 мм и рабочей длиной 70-100 мм при постоянных растягивающей нагрузке (в диапазоне напряжений $\sigma_0 =$ 39.2-78.5 МПа) и температуре $850\,^{\circ}$С получены параметры $n = 3.2$ и $r = 2.1$. Эта задача, как и большинство задач ползучести такого вида, не могут быть проинтегрированы. Поэтому основным инструментом решения задач ползучести являются численные методы.

Но и численное решение задач ползучести сопряжено со значительными трудностями. На рис. 1 видно, что при приближении к моменту разрушения скорость деформации ползучести возрастает, стремясь к бесконечности. Тоже происходит и на стадии упрочнения в окрестности начального момента времени. Это означает, что при описании всех трех стадий ползучести определяющие соотношения ползучести имеют две предельные особые точки. Традиционные явные методы решения задач Коши могут пропускать момент разрушения за счет накапливаемой погрешности, но не могут преодолеть предельную особую точку в начальный момент времени, что делает их малоэффективными для данного класса задач. Использование же специальных методов решения жестких и плохо обусловленных задач, в том числе и неявных методов, гораздо более трудоемко.

Наиболее эффективным методом численного решения плохо обусловленных задач является метод продолжения решения по наилучшему аргументу, известный также как метод наилучшей параметризации и arc length method. Он состоит в замене исходного аргумента задачи на новый, отсчитываемый по касательной к интегральной кривой рассматриваемой задачи. Главным свойством наилучшего аргумента является то, что преобразованная к нему задача имеет наилучшую обусловленность и не имеет особенностей. Преобразованная к наилучшему аргументу задача может быть решена любыми методами решения задачи Коши, в том числе и явными. В дальнейших работах будет рассмотрено численное решение рассматриваемой задачи растяжения образцов из стали Х18Н10Т с использованием метода продолжения решения по аргументам различного вида и показаны его преимущества по сравнению с традиционными явными методами.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты №16-08-00943а и 18-38-00424мол_а.

Список литературы

1. Ю. Н. Работнов, *Ползучесть элементов конструкций*, Наука, М., 2014, 752 с.

2. Н. Н. Малинин, *Прикладная теория пластичности и ползучести*, Машиностроение, М., 1975, 400 с.

3. А. М. Локощенко, *Ползучесть и длительная прочность металлов*, Физматлит, М., 2016, 504 с.

4. А. М. Локощенко, “Применение кинетической теории при анализе длительного высокотемпературного разрушения металлов в условиях сложного напряженного состояния (обзор)”, *Прикладная механика и техническая физика*, **53**:4 (2012), 149–164.

5. А. М. Локощенко, “Длительная прочность металлов при сложном напряженном состоянии (обзор)”, *Известия РАН. Механика твердого тела*, **3** (2012), 116–136.

6. А. М. Локощенко, “Результаты исследований ползучести и длительной прочности металлов в Научно-исследовательском институте механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (к юбилею Ю. Н. Работнова)”, *Прикладная механика и техническая физика*, **55**:1 (2014), 144–165.

7. Л. М. Качанов, “О времени разрушения в условиях ползучести”, *Изв. АН СССР. Отд. технических наук*, **8** (1958), 26–31.

8. Ю. Н. Работнов, “О механизме длительного разрушения”, *Вопросы прочности материалов и конструкций.*, Изд-во АН СССР, М., 1959, 5–7.

9. Е. Б. Кузнецов, С. С. Леонов, “Примеры параметризации задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений с предельными особыми точками”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **58**:6 (2018), 914–933.

Е. Б. Кузнецов, С. С. Леонов. Об аналитическом решении одной задачи ползучести

10. Л. Д. Кудрявцев, *Курс математического анализа. В 3-х т. Т. 2. Ряды. Дифференциальное и интегральное исчисление функций многих переменных*, Дрофа, М., 2003, 720 с.

11. А. М. Локощенко, С. А. Шестериков, "Методика описания ползучести и длительной прочности при чистом растяжении", *Прикладная механика и техническая физика*, **21**:3 (1980), 155–159.

12. П. Л. Чебышев, "Об интегрировании иррациональных дифференциалов", *Полное собрание сочинений П. Л. Чебышева. Т. 2. Математический анализ*, Изд-во АН СССР, М., 1947, 52–69.

13. Н. Н. Воробьев, *Теория рядов*, Наука, М., 1979, 408 с.

14. Г. М. Фихтенгольц, *Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. Т. II*, Физматлит, М., 2003, 864 с.

Поступила 11.07.2018

MSC2010 34A12, 34A34

On the analytical solution of one creep problem

© **E. B. Kuznetsov**[1], **S. S. Leonov**[2]

Abstract. The analytical solution of one initial value problem for the system of two ordinary differential equations describing the fracture process of metal structures in deflected mode at creep conditions is considered in the paper. Similar problems arise when calculating the strength characteristics and estimating residual deformations in the design of nuclear reactors, in building and aerospace industries and in mechanical engineering. The solvability of the creep constitutive equations' system is of great practical importance. The possibility of obtaining an exact analytical solution makes it possible to significantly simplify both the identification of creep characteristics and the process of model examination. Necessary and sufficient integrability conditions imposed on the parameters of the model are obtained for the initial problem using Chebyshev's theorem on the integration of a binomial differential. The recommendations for the numerical solution of the considered problem are given.

Key Words: creep, fracture, long-term strength, damage parameter, binomial differential, initial problem, system of ordinary differential equations.

References

1. Yu. N. Rabotnov, *[Creep problems in structural members]*, Nauka, Moscow, 2014 (In Russ.), 752 p.

2. N. N. Malinin, *[Applied theory of plasticity and creep]*, Mashinostroyeniye, Moscow, 1975 (In Russ.), 400 p.

[1] **Evgenii B. Kuznetsov**, Professor, Department of Dynamic Systems Modeling, Moscow Aviation Institute (4 Volokolamskoye highway, Moscow 125993, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-9452-6577, kuznetsov@mai.ru

[2] **Sergey S. Leonov**, Associate Professor, Department of Dynamic Systems Modeling, Moscow Aviation Institute (4 Volokolamskoye highway, Moscow 125993, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6077-0435, powerandglory@yandex.ru

3. A. M. Lokoshchenko, *[Creep and long-term strength of metals]*, Fizmatlit, Moscow, 2016 (In Russ.), 504 p.

4. A. M. Lokoshchenko, "Application of kinetic theory to the analysis of high-temperature creep rupture of metals under complex stress (review)", *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, **53**:4 (2012), 599–610.

5. A. M. Lokoshchenko, "Long-term strength of metals in complex stress state (a survey)", *Mechanics of Solids*, **3** (2012), 116–136.

6. A. M. Lokoshchenko, "Results of studying creep and long-term strength of metals at the Institute of Mechanics at the Lomonosov Moscow State University (To Yu. N. Rabotnov's Anniversary)", *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, **55**:1 (2014), 118–135.

7. L. M. Kachanov, "[On the time of failure under creep conditions]", *Izvestiya AN SSSR. Otdeleniye tekhnicheskikh nauk*, **8** (1958), 26–31 (In Russ.).

8. Yu. N. Rabotnov, "[On the long-term fracture mechanism]", *Voprosy prochnosti materialov i konstruktsiy*, AN SSSR Publ., Moscow, 1959, 5–7 (In Russ.).

9. E. B. Kuznetsov, S. S. Leonov, "Examples of parametrization of the Cauchy problem for systems of ordinary differential equations with limiting singular points", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **58**:6 (2018), 881–897 (In Russ.).

10. L. D. Kudryavtsev, *[Course of mathematical analysis. Vol. 2. Series. Differential and integral calculus of functions of several variables]*, Drofa, Moscow, 2003 (In Russ.), 720 p.

11. A. M. Lokoshchenko, S. A. Shesterikov, "Method for description of creep and long-term strength with pure elongation", *J. of Applied Mechanics and Technical Physics*, **21**:3 (1980), 414–417.

12. P. L. Chebyshev, "[On the integration of irrational differentials]", *Polnoye sobraniye sochineniy P. L. Chebysheva. T. 2. Matematicheskiy analiz*, AN SSSR Publ., Moscow, 1947, 52–69 (In Russ.).

13. N. N. Vorobyev, *[Theory of series]*, Nauka, Moscow, 1979 (In Russ.), 408 p.

14. G. M. Fikhtengolts, *[Course of differential and integral calculus. Vol. II]*, Fizmatlit, Moscow, 2003 (In Russ.), 864 p.

Submitted 11.07.2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.295-303

УДК 517.9

Применение алгебр и групп Ли к решению задач частичной устойчивости динамических систем

© **В. И. Никонов**[1]

Аннотация. Статья посвящена анализу частичной устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием алгебр и групп Ли. Показывается, что существование у исследуемой системы группы преобразований, инвариантной относительно частичной устойчивости, позволяет упростить анализ частичной устойчивости исходной системы. Для этого необходимо, чтобы ассоциированный линейный дифференциальный оператор лежал в обертывающей алгебре Ли исходной системы, а оператор, определяемый однопараметрическую группу Ли был коммутативен с этим оператором. При этом, если найденная группа обладает инвариантностью относительно частичной устойчивости, то найденное преобразование приводит к декомпозиции исследуемой системы, а вопрос частичной устойчивости сводится к исследованию выделенной подсистемы. Нахождение искомого преобразования использует первые интегралы исходной системы. Приведены примеры, иллюстрирующие предлагаемый подход.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, алгебра Ли, группа Ли, частичная устойчивость, декомпозиция.

1. Введение

Как известно [1], основными направлениями исследования устойчивости относительно заданной части координат фазового вектора динамических систем являются:

– метод функций и вектор-функций Ляпунова [2];

– исследование на основе уравнений линейного приближения [3];

– метод нелинейных преобразований переменных [4]–[5].

В данной работе предлагается использование двух последних подходов.

Как отмечено в [6], фундаментальное открытие Ли состояло в том, что сложные нелинейные условия инвариантности системы относительно преобразований из группы в случае непрерывных групп можно заменить эквивалентными, но гораздо более простыми линейными условиями, отражающими «инфинитозимальную инвариантность» этой системы относительно образующих этой группы.

Именно этот момент послужил для автора данной работы мотивом к использованию алгебр и групп Ли к решению задач частичной устойчивости нелинейных систем дифференциальных уравнений.

В работах [6]–[8] приводятся основы теории алгебр и групп Ли для решения задач декомпозиции и приводимости систем нелинейных дифференциальных уравнений.

Данная статья посвящена применению этого подхода к задаче анализа частичной устойчивости нелинейных автономных систем дифференциальных уравнений.

[1] **Никонов Владимир Иванович**, доцент кафедры алгебры и геометрии, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7202-9679, nik_vl_@mail.ru

2. Основные понятия, определения и теоремы

Известно [7], что произвольное линейное отображение многообразия $\mathfrak{D}(G)$ функций $\mathfrak{D}$, заданных в области G, удовлетворяющее условию

$$X(fg) = X(f)g + fX(g), f, g \in \mathfrak{D}(G), \tag{2.1}$$

называется векторным полем.

Множество $\mathfrak{D}^1(G)$ векторных полей на многообразии $\mathfrak{D}(G)$ образует структуру линейного пространства и совместно с операцией умножения

$$[X, Y] = XY - YX, \tag{2.2}$$

которую принято называть скобкой Пуассона, становится алгеброй Ли. При этом произвольное поле X имеет вид

$$X = \sum_{i=1}^{n} v_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.3}$$

где $v_1(x), ..., v_n(x)$ – функции из многообразия $\mathfrak{D}(G)$.

Рассмотрим автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \tag{2.4}$$

в области $\bar{G} = I \times G$, $I \subset R$, $G \subset R^n$ существования и единственности решения.

Если $\varphi(x) \in \mathfrak{D}(G)$, то на траекториях решений системы (2.4) имеем

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} = X(\varphi)dt,$$

где $X = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)\dfrac{\partial}{\partial x_i}$ – ассоциированный дифференциальный оператор системы (2.4) [7].

Поскольку правые части системы зависят от некоторых параметров – скаляров некоторого поля P, то получим бесконечную совокупность дифференциальных операторов $\sigma = \{X_1, X_2, ...\}$.

Обертывающей алгеброй Ли $\mathfrak{B}$ системы (2.4) называется алгебра дифференциальных операторов, образованная рекуррентной последовательностью множеств

$$\sigma^1 = \sigma \cup [\sigma, \sigma], \sigma^2 = \sigma^1 \cup [\sigma^1, \sigma^1], ..., \sigma^k = \sigma^{k-1} \cup [\sigma^{k-1}, \sigma^{k-1}],$$

$$[\sigma^i, \sigma^i] = Z, Z = [X, Y], X, Y \in \sigma^{i-1}.$$

Определение 2.1 [7] *Пусть $X \in \mathfrak{D}^1(G)$ – произвольный линейный дифференциальный оператор первого порядка, тогда рядом Ли называется ряд*

$$e^{sX(x)}f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{s^i}{i!} X^i(x)f(x), f \in \mathfrak{D}(G). \tag{2.5}$$

Определение 2.2 [7] *Система* (2.4) *называется приводимой (агрегируемой) в области* $G(\operatorname{loc} G)$, *если существует обратимая замена переменных*

$$z = \psi(x),\ x = \psi^{-1}(z), \quad \psi, \psi^{-1} \in \mathfrak{D}(G),$$

преобразующая исходную систему к совокупности g *последовательно интегрируемых подсистем*

$$\begin{aligned} &\frac{dz_{\nu_1}}{dt} = f_{\nu_1}(z_{\nu_1}),\\ &\frac{dz_{\nu_2}}{dt} = f_{\nu_2}(z_{\nu_1}, z_{\nu_2}),\\ &\ldots\\ &\frac{dz_{\nu_g}}{dt} = f_{\nu_g}(z_{\nu_1}, z_{\nu_2}, ..., z_{\nu_g}). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Теорема 2.1 [7] *Пусть ряд Ли* (2.5) *используется в качестве замены переменных*

$$x_1^{'} = e^{(s-s_0)X(x)}x_1,\ ...,\ x_n^{'} = e^{(s-s_0)X(x)}x_n. \tag{2.7}$$

Тогда преобразования (2.7) *являются точечными, т. е. для любой функции* $\varphi(x) \in \mathfrak{D}(G)$ *имеет место тождество*

$$\varphi(e^{(s-s_0)X(x)}x_1, ..., e^{(s-s_0)X(x)}x_n) = e^{(s-s_0)X(x)}\varphi(x_1, ..., x_n). \tag{2.8}$$

Доказательство теоремы 2.1 содержится в [7].

Система (2.4) называется инвариантной относительно преобразования $x = \varphi(x')$ $(x' = \varphi^{-1}(x))$, определенного в области G, если в результате преобразования она остается неизменной, т. е. переходит в систему $\dfrac{dx'}{dt} = f(x')$.

Вопрос об инвариантных преобразованиях однопараметрических групп вида

$$x_j = e^{sX'(x')}x_i^{'},\ x_j^{'} = e^{-sX(x)}x_j, \quad j = \overline{1, n}, \tag{2.9}$$

действующих локально в области G, рассматривается следующей теоремой.

Теорема 2.2 [7] *Для того чтобы уравнение* (2.4) *было инвариантно относительно однопараметрической группы* (2.9), *необходимо и достаточно, чтобы оператор* X *был коммутативен с ассоциированным оператором системы, т. е. выполнялось тождество* $[U, X] \equiv 0$.

Отметим, что знание преобразования (2.9) облегчает интегрирование исходной системы. При этом структура оператора X может быть существенно проще, чем U. Поэтому если уравнение $Xf = 0$ допускает некоторые решения $\Omega_1 = \{\psi_1(x), ..., \psi_m(x)\}$, то эти решения могут быть расширены с помощью ассоциированного оператора системой $\{U\psi_1(x), ..., U\psi_m(x)\}$. Таким образом, выбирая из объединения систем решений функционально независимую систему Ω_2 и применяя к ней подобную процедуру, придем на некотором шаге к непополняемой системе решений Ω. Такая совокупность интегралов называется полной относительно оператора U.

Т е о р е м а 2.3 [7] *Если имеется совокупность интегралов* $\Omega = \{\psi_1(x), ..., \psi_m(x)\}$, *полная относительно оператора* U, *то можно указать замену переменных* $x' = \psi(x), x = \psi^{-1}(x')$ *которая, по крайней мере локально в области* G, *приводит систему к квазитреугольному виду*

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_1, ..., x_m), \quad i = \overline{1, m}, \\ \frac{dx_j}{dt} &= F_j(x_1, ..., x_n), \quad j = \overline{m+1, n}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Т е о р е м а 2.4 [7] *Пусть обертывающая группа* $\mathfrak{G}$ *системы* (2.4) *транзитивна над* $\mathfrak{D}(G)$. *Система* (2.4) *приводима (агрегируема) тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих эквивалентных условий.*

1. Обертывающая алгебра $\mathfrak{B}$ *системы имеет цепочку идеалов*

$$\mathfrak{B} \equiv \mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, ..., \mathfrak{B}_{g-1};$$

$$\mathfrak{B}_0 \supset \mathfrak{B}_1 \supset ... \supset \mathfrak{B}_{g-1}; [\mathfrak{B}_j, \mathfrak{B}_{j+p}] \supset \mathfrak{B}_{j-p}, p \geq 1,$$

в которой фактор-алгебры $\mathfrak{B}^{(j)} = \mathfrak{B}_{j-1}/\mathfrak{B}_j$ *имеют размерности* $\nu_j, \nu_1 + ... + \nu_g = n$.

2. Обертывающая группа $\mathfrak{G}$ *системы имеет* g *систем импримитивности* $\mathfrak{M}_j$, *определяемых функциями*

$$\mathfrak{M}_j = \{u_{1\nu_1}(x), ..., u_{\nu_1\nu_1}(x), ..., u_{1\nu_j}(x), ..., u_{\nu_j\nu_j}(x)\}, j = \overline{1, g},$$

таких, что для всех $T_X \in \mathfrak{G}$ *имеют место соотношения*

$$T_X u_{1\nu_j}(x) = \Phi_{X_1\nu j}(u_{1\nu_1}, ..., u_{\nu_1\nu_1}, ..., u_{1\nu_j}, ..., u_{\nu_j\nu_j});$$

$$T_X u_{\nu_j\nu_j}(x) = \Phi_{X_{\nu_j\nu_j}}(u_{1\nu_1}, ..., u_{\nu_1\nu_1}, ..., u_{1\nu_j}, ..., u_{\nu_j\nu_j}), j = \overline{1, g}.$$

3. Обертывающая группа $\mathfrak{G}$ *обладает кампозиционным рядом* $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}^{(1)}, ..., \mathfrak{G}^{(g-1)}, 1$, *составленным из нормальных делителей, и рядом фактор-групп* $\mathfrak{U}, \mathfrak{U}_1, ..., \mathfrak{U}_{g-1}, \mathfrak{U}_g$, $\mathfrak{U}_j \equiv \equiv \mathfrak{G}^{(j)}/\mathfrak{G}^{(j+1)}, \dim \mathfrak{U}_j = \nu_j$, *причем* $\mathfrak{U}_j\mathfrak{U}_{j+p} \supset \mathfrak{U}_{j+p}, p \geq 1$.

Замена переменных

$$z_{1\nu_j} = u_{1\nu_j}(x), \ ..., z_{\nu_j\nu_j} = u_{\nu_j\nu_j}(x), \quad j = \overline{1, g},$$

преобразует систему (2.4) *к виду* (2.6).

Т е о р е м а 2.5 [7] *Для того чтобы переменные в преобразованной системе разделялись, необходимо и достаточно, чтобы существовали* $n - s$ *несвязных операторов* $X_{s+1}, ..., X_n$, *коммутативных с базисными операторами* $X_1, ..., X_s$:

$$[X_i, X_j] \equiv 0, i = \overline{1, s}, j = \overline{s+1, n}.$$

3. Достаточные условия устойчивости по части переменных

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = X(x), \tag{3.1}$$

где $x = (x_1, ..., x_n) = (y_1, ..., y_m, z_1, ..., z_p) = (y, z), X(0) = 0, m > 0, p \geq 0, n = m + p$.

Предположим, что исследуется устойчивость невозмущенного движения $x = 0$ относительно переменных $y_1, ..., y_m$.

Представим систему (3.1) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Y(y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= Z(y, z), \end{aligned} \tag{3.2}$$

где $y \in R^m, z \in R^p, Y(0, 0) = 0, Z(0, 0) = 0$.

Т е о р е м а 3.1 *Если для системы* (3.1)–(3.2) *имеется совокупность интегралов* $\Omega = \{\psi_1(x), ..., \psi_m(x)\}$, *полная относительно оператора* U *и такая, что можно указать замену переменных* $x = \psi(x')$, $x' = \psi^{-1}(x)$ *сохраняющую частичную устойчивость по крайней мере локально в области* G, *то эта замена приводит систему к квазитреугольному виду:*

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= F_i(x_1, ..., x_k), \quad i = \overline{1, k}, \\ \frac{dx_j}{dt} &= F_j(x_1, ..., x_n), \quad j = \overline{k + 1, n}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

а вопрос y *-устойчивости исходной системы сводится к вопросу устойчивости системы невозмущенного движения системы*

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, ..., x_k), \quad i = \overline{1, k}. \tag{3.4}$$

.

Доказательство данной теоремы полностью повторяет доказательство теоремы 2.3 [7]. Отличие состоит в том, что к преобразованию переменных предъявляются более жесткие требования. Преобразование должно сохранять свойство устойчивости относительно компонент $y_1, ..., y_m$ фазового вектора x.

Рассмотрим примеры анализа частичной устойчивости нелинейных автономных систем.

П р и м е р 3.1 *Для системы третьего порядка*

$$\begin{cases} \dot{y_1} = ay_1 + z_1^2 z_2, \\ \dot{z_1} = bz_1 + y_1 z_1, \\ \dot{z_2} = cz_2 - 2y_1 z_2, \end{cases} \tag{3.5}$$

где $a, b, c-$ *постоянные, ставится задача об исследовании устойчивости нулевого положения равновесия системы по отношению к переменной* y_1.

Ассоциированный линейный дифференциальный оператор системы (3.5) имеет вид

$$X = (ay_1 + z_1^2 z_2)\frac{\partial}{\partial y_1} + (bz_1 + y_1 z_1)\frac{\partial}{\partial z_1} + (cz_2 - 2y_1 z_2)\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Очевидно, что оператор X представим в виде

$$X = y_1(a\frac{\partial}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2}) + z_1^2 z_2\frac{\partial}{\partial y_1} + bz_1\frac{\partial}{\partial z_1} + cz_2\frac{\partial}{\partial z_2} = X_1 + X_2,$$

где

$$X_1 = y_1(a\frac{\partial}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2}), X_2 = z_1^2 z_2\frac{\partial}{\partial y_1} + bz_1\frac{\partial}{\partial z_1} + cz_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Найдем обертывающую алгебру Ли исходной системы:

$$\sigma = \{X_1, X_2\}; [X_1, X_1] = 0,$$

$$[X_1, X_2] = X_3 = -z_1^2 z_2(a\frac{\partial}{\partial y_1} + z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial}{\partial z_2}), [X_1, X_3] = -aX_3, [X_2, X_3] = (2b + c)X_3;$$

$$\sigma_1 = \{X_1, X_2, X_3\}.$$

Отметим, что оператор X_3 является линейно связным с операторами X_1 и X_2, так как

$$X_3 = -\frac{z_1^2 z_2}{y_1}X_1.$$

Таким образом, таблица коммутирований обертывающей алгебры Ли исходной системы имеет вид

	X_1	X_2	X_3
X_1	0	X_3	$-aX_3$
X_2	$-X_3$	0	$(2b+c)X_3$
X_3	aX_3	$-(2b+c)X_3$	0

Очевидно, что в обертывающей алгебре Ли имеется подалгебра $\mathfrak{B}_1 = \{X_3\}$, которая является двусторонним идеалом этой алгебры. Следовательно, согласно теореме 3.1, исходная система приводится к квазитреугольному виду.

Таким образом, система операторов $\{X_1, X_2\}$ является полной.

Чтобы понизить порядок системы на единицу, достаточно найти один первый интеграл и сформировать замену переменных, инвариантную относительно устойчивости относительно переменной y_1.

От уравнения $X_1\psi = 0$ приходим к системе

$$\frac{dy_1}{a} = \frac{dz_1}{z_1} = \frac{dz_2}{-2z_2}.$$

Откуда найдем один первый интеграл, не зависящий от переменной y_1 :

$$z_1^2 z_2 = C_1.$$

Следовательно, $\psi_1 = z_1^2 z_2$. При этом $X_2(\psi_1) = \psi_1$. Поэтому

$$X(\psi_1) = (2b + c)\psi_1.$$

Для нахождения второй функции для замены переменных найдем частное решение уравнения

$$X_1(v(z_1, z_2)) = y \Leftrightarrow z_1\frac{\partial v}{\partial z_1} - 2z_2\frac{\partial v}{\partial z_2} = 1,$$

интегрируя которое, получим частное решение

$$\psi_2 = \frac{1}{z_1} + z_1^2 z_2.$$

Таким образом, искомая замена переменных, инвариантная относительно y-устойчивости, имеет вид

$$\overline{z}_1 = z_1^2 z_2, \ \overline{z}_2 = \frac{1}{z_1} + z_1^2 z_2. \tag{3.6}$$

Указанная замена является локально обратимой, т. к. якобиан системы имеет вид

$$\frac{\partial(\psi_1, \psi_2)}{\partial(z_1, z_2)} = 1.$$

Найдем вид ассоциированного оператора исходной системы в новых координатах:

$$\overline{X} = (ay_1 + \overline{z}_1)\frac{\partial}{\partial y_1} + (2b + c)\overline{z}_1\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} + ((2b + c)\overline{z}_1 - (b + y_1)(\overline{z}_2 - \overline{z}_1))\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}.$$

Тогда исходная система дифференциальных уравнений в новых координатах принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + \overline{z}_1, \\ \dot{\overline{z}}_1 = (2b + c)\overline{z}_1, \\ \dot{\overline{z}}_2 = ((2b + c)\overline{z}_1 - (b + y_1)(\overline{z}_2 - \overline{z}_1)). \end{cases} \tag{3.7}$$

Из этого следует, что вопрос y_1- устойчивости решается подсистемой

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = ay_1 + \overline{z}_1, \\ \dot{\overline{z}}_1 = (2b + c)\overline{z}_1. \end{cases} \tag{3.8}$$

Тогда, учитывая преобразование (3.6), из устойчивости линейной системы (3.8) следует устойчивость нулевого решения нелинейной системы (3.5) относительно переменной y_1.

П р и м е р 3.2 *Для системы четвертого порядка*

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + y_2 z_1 z_2, \\ \dot{y}_2 = -2y_2, \\ \dot{z}_1 = 2z_1, \\ \dot{z}_2 = -z_2 \end{cases} \tag{3.9}$$

ставится задача об исследовании устойчивости положений равновесия систем по переменным y_1 *и* y_2.

Ассоциированный линейный дифференциальный оператор системы (3.9) имеет вид

$$X = (-y_1 + y_2 z_1 z_2)\frac{\partial}{\partial y_1} - 2y_2\frac{\partial}{\partial y_2} + 2z_1\frac{\partial}{\partial z_1} - z_2\frac{\partial}{\partial z_2}.$$

Поскольку $X(y_2 z_1 z_2) = -y_2 z_1 z_2$, то можно ввести замену

$$\overline{z}_1 = y_2 z_1 z_2, \ \overline{z}_2 = z_2. \tag{3.10}$$

В новых координатах ассоциированный оператор принимает вид

$$\overline{X} = (-y_1 + \overline{z}_1)\frac{\partial}{\partial y_1} - 2y_2\frac{\partial}{\partial y_2} - \overline{z}_1\frac{\partial}{\partial \overline{z}_1} - \overline{z}_2\frac{\partial}{\partial \overline{z}_2}.$$

Тогда исходная система дифференциальных уравнений в новых координатах принимает вид

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + \overline{z}_1, \\ \dot{y}_2 = -2y_2, \\ \dot{\overline{z}}_1 = -\overline{z}_1, \\ \dot{\overline{z}}_2 = -\overline{z}_2. \end{cases} \tag{3.11}$$

Из этого следует, что вопрос y_1, y_2-устойчивости решается подсистемой

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -y_1 + \overline{z}_1, \\ \dot{y}_2 = -2y_2, \\ \dot{\overline{z}}_1 = -\overline{z}_1. \end{cases} \tag{3.12}$$

Тогда, учитывая преобразование (3.10), из устойчивости линейной системы (3.12) следует устойчивость нулевого решения нелинейной системы (3.9) по переменным y_1 и y_2.

Список литературы

1. В. И. Воротников, В. В. Румянцев, *Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения*, Научный мир, М., 2001, 320 с.

2. В. В. Румянцев, А. С. Озиранер, *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, М., 1987, 253 с.

3. В. П. Прокопьев, “Об устойчивости относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня”, *ПММ*, **39**:3 (1975), 422–426.

4. В. И. Воротников, *Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных*, Наука, М., 1991, 288 с.

5. В. И. Воротников, “Об устойчивости движения относительно части переменных для некоторых нелинейных систем”, *ПММ*, **43**:3 (1979), 441–450.

6. П. Олвер, *Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям: Пер. с англ.*, Мир, М., 1989, 639 с.

7. Ю. А. Митропольский, А. К. Лопатин, *Теоретико-групповой подход в асимптотических методах нелинейной механики*, Наукова думка, Киев, 1987, 270 с.

8. Л. В. Овсянников, *Групповой анализ дифференциальных уравнений*, Наука, М., 1978, 399 с.

Поступила 2.06.2018

MSC2010 34C20

The application of Lie algebras and groups to the solution of problems of partial stability of dynamical systems

© **V. I. Nikonov**[1]

Abstract. The article is devoted to the analysis of partial stability of nonlinear systems of ordinary differential equations using Lie algebras and groups. It is shown that the existence of a group of transformations invariant under partial stability in the system under study makes it possible to simplify the analysis of the partial stability of the initial system. For this it is necessary that the associated linear differential operator Lie in the enveloping Lie algebra of the original system, and the operator defined by the one-parameter Lie group is commutative with this operator. In this case, if the found group has invariance with respect to partial stability, then the resulting transformation performs to the decomposition of the system under study, and the partial stability problem reduces to the investigation of the selected subsystem. Finding the desired transformation uses the first integrals of the original system. Examples illustrating the proposed approach are given.

Key Words: nonlinear ordinary differential equations, Lie algebra, Lie groups, partial stability, decomposition

References

1. V. I. Vorotnikov, V. V. Rumyantsev, *Stability and control with respect to part of the coordinates of the phase vector of dynamical systems: theory, methods and applications*, Nauchnyy Mir, Moscow, 2001 (In Russ.), 320 p.

2. V. V. Rumyantsev, A. S. Oziraner, *Stability and stabilization of motion with respect to a part of the variables*, Nauka, Moscow, 1987 (In Russ.), 256 p.

3. V. P. Prokopyev, "[On stability with respect to some of the variables in the critical case of a single zero root.]", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **39** (1975), 422-426 (In Russ.).

4. V. I. Vorotnikov, *Stability of dynamical systems with respect to a part of variables*, Nauka, Moscow, 1991 (In Russ.), 288 p.

5. V. I. Vorotnikov, "[On the stability of dynamical systems with respect to a part of variables]", *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **43** (1979), 441-450 (In Russ.).

6. P. Olver, *Applications of Lie groups to differential equations*, Mir, Moscow, 1989 (In Russ.), 639 p.

7. U. A. Mitropolsky, A. K.Lopatin, *The group-theoretical approach in asymptotic methods of nonlinear mechanics*, Naukova dumka, Kiev, 1987 (In Ukr.), 270 p.

8. V. I. Ovsjannikov, *Group analysis of differential equations*, Nauka, Moscow, 1978 (In Russ.), 399 p.

Submitted 2.06.2018

[1] **Vladimir I. Nikonov**, Associate Professor, Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-7202-9679, nik_vl_@mail.ru

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.304-317

УДК 517.9

Достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений

© П. А. Шаманаев[1], О. С. Язовцева[2]

Аннотация. В статье получены достаточные условия полиустойчивости по части переменных для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточно гладкой правой частью. Доказательство полученных теорем основано на установлении локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру. Для этого в банаховом пространстве строится оператор, связывающий решения нелинейной системы и ее линейного приближения. Данный оператор удовлетворяет условиям принципа Шаудера, следовательно, он имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Далее с использованием оценок ненулевых элементов фундаментальной матрицы получены условия, обеспечивающие переход свойств полиустойчивости тривиального решения системы линейного приближения на решения нелинейной системы, локально покомпонентно асимптотически эквивалентной своему линейному приближению. Приведены примеры, иллюстрирующие применение доказанных достаточных условий к исследованию полиустойчивости нулевого решения нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, в том числе в критическом случае, а также при наличии положительных собственных значений.

Ключевые слова: нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность по Брауэру, принцип Шаудера о неподвижной точке, устойчивость по части переменных, полиустойчивость.

1. Введение

В работе А. М. Ляпунова [1] было отмечено, что «можно рассматривать более общую задачу: об устойчивости того же движения, но по отношению не ко всем, а только к некоторым из определяющих его величин».

Позже, в 1938 г., к вопросу переноса теорем об устойчивости системы по всем переменным на случай части фазовых координат вернулся И. Г. Малкин [2]. Он указал (без доказательства) такие условия переноса.

В работе В. В. Румянцева [3] было проведено систематическое исследование задачи для конечномерных нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с непрерывной правой частью на основе прямого метода Ляпунова, изложены основные определения и положения теории частичной устойчивости, доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по части переменных, приведены примеры практического применения этой теории к задачам механики.

[1] **Шаманаев Павел Анатольевич**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1.), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

[2] **Язовцева Ольга Сергеевна**, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1.), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8075-4491, kurinaos@gmail.com

Далее теория устойчивости по части переменных получила развитие в работах [4]-[9]. Частичная устойчивость в критическом случае рассмотрена в работах [10]-[12].

Работы [13]–[14] посвящены исследованию частичной устойчивости положений равновесия нелинейных систем на основе покомпонентной асимптотической эквивалентности.

В работах [15]–[16] предложено развитие идей Е. В. Воскресенского о покомпонентной асимптотической эквивалентности в предположении, что между начальными точками исследуемых систем устанавливается соответствие только в окрестности нулевого положения равновесия; введено определение локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности, получены достаточные условия асимптотической устойчивости и устойчивости нулевых решений нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в форме векторных полиномов, в том числе в критическом случае.

В работе [17] введены определения полиустойчивости и полиустойчивости по отношению к части переменных, получены достаточные условия полиустойчивости нулевого решения на основании метода функций Ляпунова.

В настоящей работе представлены достаточные условия полиустойчивости по отношению к части переменных в смысле работы [17] нулевого решения нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с достаточно гладкой правой частью.

2. Основные определения и положения

Рассмотрим множество Ξ всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{2.1}$$

где $x \in R^n, f \in C^{(0,1)}([T,+\infty) \times R^n, R^n), T \geq 0, f(t,0) \equiv 0.$

Будем считать, что у системы вида (2.1) из множества Ξ существует совокупность решений $x(t:t_0,x^{(0)})$, определенных при всех $t \geq t_0 \geq T$ и $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$, где D — некоторая область пространства R^n, содержащая окрестность нуля.

Обозначим через $x(t:t_0,x^{(0)})$ и $y(t:t_0,y^{(0)})$ решения с начальными данными $(t_0,x^{(0)})$ и $(t_0,y^{(0)})$ соответственно системы (2.1) и системы

$$\frac{dy}{dt} = g(t,y), \tag{2.2}$$

принадлежащей множеству Ξ.

Приведем определение локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности систем из множества Ξ, развивающее идеи Е. В. Воскресенского из работ [13], [14].

Определение 2.1 [15] *Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.1) и (2.2) будем называть локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций $\mu_i(t)$, $i \in M_0$, если при фиксированном $t_0 \geq T$ существуют два отображения $P^{(1)}: V \to U$ и $P^{(2)}: U \to V$ такие, что для всех $i \in M_0$*

$$x_i(t:t_0,x^{(0)}) = y_i(t:t_0,P^{(2)}x^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \tag{2.3}$$

$$y_i(t:t_0,y^{(0)}) = x_i(t:t_0,P^{(1)}y^{(0)}) + o(\mu_i(t)) \tag{2.4}$$

при $t \to \infty$. Здесь $x_i(t:t_0,x^{(0)})$, $y_i(t:t_0,y^{(0)})$ — i-ые компоненты решений, для которых $x^{(0)} \in U$, $y^{(0)} \in V$, U, $V \subseteq D$ — некоторые области, содержащие окрестность нуля, $\mu_i \in C([T,+\infty),[0,+\infty))$.

Определение 2.2 [15] *Будем говорить, что система* (2.1) *имеет локальное асимптотическое равновесие по переменным* x_i, $i \in M_0$, *если каждая компонента* $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, *любого решения* $x(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U$, *системы* (2.1) *обладает свойством*

$$\lim_{t\to\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = b_i < \infty. \quad (2.5)$$

И наоборот, для любого набора чисел b_i, $i \in M_0$, *таких, что* $(b_1, ..., b_n) \in V \subseteq D$, *существует решение* $x(t : t_0, x^{(0)})$, $x^{(0)} \in U$, *системы* (2.1) *для компонент* $x_i(t : t_0, x^{(0)})$, $i \in M_0$, *которого справедливы равенства* (2.5).

В работах [13]–[14] показано, что из покомпонентной асимптотической эквивалентности систем по Брауеру вообще говоря не следует сохранение свойств устойчивости и асимптотической устойчивости соответствующих компонент нулевого решения. Это верно и для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем по Брауеру.

Одним из условий сохранения свойств устойчивости и асимптотической устойчивости соответствующих компонент нулевого решения является требование равномерности $o(\mu_i(t))$ по начальным точкам $x^{(0)}$, $y^{(0)}$.

В работах [15]–[16] приведены условия, при выполнении которых для локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем свойства полиустойчивости по части переменных сохраняются. Запишем эти условия в следующей форме.

Теорема 2.1 *Пусть*

1) справедливы равенства

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, P^{(2)}x^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t : t_0, x^{(0)}), \quad (2.6)$$

$$y_i(t : t_0, x^{(0)}) = x_i(t : t_0, P^{(1)}y^{(0)}) + \mu_i(t)\gamma_i(t : t_0, y^{(0)}), \quad (2.7)$$

где $i \in M_0$, $\delta_i(t : t_0, x^{(0)})$ *и* $\gamma_i(t : t_0, y^{(0)})$ *стремятся к нулю при* $t \to +\infty$ *равномерно по* $x^{(0)}$ *и* $y^{(0)}$ *соответственно;*

2) $P^{(1)}(0) = 0$, $P^{(2)}(0) = 0$, *причем отображения* $P^{(1)}$ *и* $P^{(2)}$ *являются непрерывными в соответствующих областях определения.*

Тогда если у одной системы существует нулевое решение, устойчивое (асимптотически устойчивое) по i*-ым переменным,* $i \in M_0$, *и* $\mu_i(t)$ *– ограниченная (убывающая) функция при всех* $t \geq T$, *то вторая система имеет так же устойчивое (асимптотически устойчивое) по* i*-ым переменным нулевое решение,* $i \in M_0$; *кроме того, если одна система имеет локальное асимптотическое равновесие по* i*-ым переменным,* $i \in M_0$, *и* $\lim\limits_{t\to\infty} \mu_i(t) = d_i, d_i \in R^1$, *то этим же свойством будут обладать и решения второй системы.*

Доказательство. Пусть у системы (2.2) существует нулевое решение устойчивое по переменным y_i, $i \in M_0$. Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и t_0 можно указать $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon, t_0)$ такое, что из $||y^{(0)}|| < \delta_0$ следует

$$|y_i(t : t_0, y^{(0)})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, t \geq t_0,\ i \in M_0. \quad (2.8)$$

Сопоставим начальным значениям $y^{(0)} \in V$ решений системы (2.2) начальные значения $x^{(0)} = P^{(1)}y^{(0)}$ соответствующих решений системы (2.1). Тогда, учитывая условие 2) для отображения $P^{(1)}$, получим, что существует достаточно малое $\delta_1 > 0$ такое, что

$$||x^{(0)}|| = ||P^{(1)}y^{(0)}|| < \delta_1. \quad (2.9)$$

Поскольку $\delta_i(t : t_0, x^{(0)})$ стремится к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $x^{(0)} \in U$ и $\mu_i(t)$ – ограниченная функция при всех $t \geq T$, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что при $||x^{(0)}|| < \delta_2$ будет выполняться

$$\mu_i(t)|\delta_i(t : t_0, x^{(0)})| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, t \geq t_0,\ i \in M_0.$$

Тогда, оценивая равенство (2.6), получим:

$$|x_i(t : t_0, x^{(0)})| \leq |y_i(t : t_0, y^{(0)})| + \mu_i(t)|\delta_i(t : t_0, x^{(0)})| \leq \varepsilon \quad \forall\, t \geq t_0,\ i \in M_0. \tag{2.10}$$

Полагая $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, заключим, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и t_0 можно указать δ такое, что из $||x^{(0)}|| < \delta$ следует справедливость (2.10), что и доказывает устойчивость по переменным $x_i,\ i \in M_0$ нулевого решения системы (2.1).

Учитывая оценку (2.10), из асимптотической устойчивости по переменным $y_i,\ i \in M_0$, нулевого решения системы (2.2) следует асимптотическая устойчивость по переменным $x_i,\ i \in M_0$, нулевого решения системы (2.1).

Пусть теперь решения системы (2.2) при $y^{(0)} \in V$ имеют локальное асимптотическое равновесие по переменным $y_i,\ i \in M_0$. Тогда, учитывая, что

$$\lim_{t \to +\infty} y_i(t : t_0, y^{(0)}) = b_i,\ b_i \in R^1, i \in M_0, \tag{2.11}$$

из (2.6) следует

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = b_i, \quad b_i \in R^1, \quad i \in M_0.$$

Покажем теперь, что для любых чисел $b_i,\ i \in M_0$, таких, что $(b_1, ..., b_n) \in V \subseteq D$, существует решение $x(t : t_0, x^{(0)})$ системы (2.2) такое, что справедливо равенство (2.5).

Действительно, так как решения системы (2.2) при $y^{(0)} \in V$ имеют локальное асимптотическое равновесие по переменным $y_i,\ i \in M_0$, то для фиксированных чисел $b_i,\ i \in M_0$, таких что $(b_1, ..., b_n) \in V \subseteq D$, существуют компоненты $y_i(t : t_0, y^{(0)})$ решения системы (2.2) такие, что справедливы пределы (2.11). Тогда, переходя к пределу в равенствах (2.6) получим (2.5). Следовательно, система (2.1) имеет локальное асимптотическое равновесие по переменным $x_i,\ i \in M_0$.

Аналогично доказывается, что при выполнении (2.7) из устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевого решения системы (2.1) по переменным x_i следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) нулевого решения системы (2.2) по переменным y_i; кроме того, из локального асимптотического равновесия по переменным $x_i,\ i \in M_0$, системы (2.1) следует локальное асимптотическое равновесие по переменным $y_i,\ i \in M_0$, системы (2.2).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Достаточные условия полиустойчивости по части переменных

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений из множества Ξ

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x), \tag{3.1}$$

где A – постоянная $(n \times n)$-матрица; $f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$; $f(0) \equiv 0$; $f(x) = colon(f_1(x), ..., f_n(x))$;

$$|f_j(x_1, ..., x_n)| \leq \psi_j(|x_1|, ..., |x_n|), \quad \forall\, x \in V \subseteq R^n,\ j = \overline{1, n}, \tag{3.2}$$

где $\psi_j \in C(R^n, R^n)$; $\psi_j(a_1, ..., a_n) \le \psi_j(b_1, ..., b_n)$; $a_i \le b_i$, $i = \overline{1, n}$.

Пусть собственные значения λ_i $(i = \overline{1, n})$ матрицы A линейного приближения

$$\frac{dy}{dt} = Ay \tag{3.3}$$

системы (3.1) имеют следующие вещественные части:

$$Re\ \lambda_1 = ... = Re\ \lambda_{l_1} = \Lambda_1,\ \ldots,\ Re\ \lambda_{l_{r-1}+1} = ... = Re\ \lambda_n = \Lambda_r,$$

где числа l_i, $i = \overline{1, r}$ образуют r непересекающихся множеств

$$N_1 = \{1, 2, \ldots, l_1\},\ N_2 = \{l_1 + 1, \ldots, l_2\},\ \ldots,\ N_r = \{l_{r-1} + 1, \ldots,\ l_r = n\}.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 < ... < \Lambda_r. \tag{3.4}$$

Заметим, что одно из чисел в неравенстве (3.4) может принимать нулевое значение.

Представим фундаментальную матрицу системы (3.3) в виде

$$Y(t - t_0) = [y^{(1)}(t - t_0), y^{(2)}(t - t_0), ..., y^{(n)}(t - t_0)],$$

где $y^{(j)}(t - t_0)$ – вектор-функции размерности n, представляющие собой линейно независимые решения системы (3.3), такие, что при $j \in N_k, k = \overline{1, r}$ справедливы неравенства [18]:

$$||y^{(j)}(t - t_0)|| \le D_0 e^{(\Lambda_k + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \ge t_0, \tag{3.5}$$

$$||y^{(j)}(t - t_0)|| \le D_0 e^{(\Lambda_k - \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \le t_0, \tag{3.6}$$

где $\varepsilon \ge 0$ – достаточно малое вещественное число. Заметим, что если алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения с вещественной частью Λ_k совпадают, то можно положить $\varepsilon = 0$.

Введем множества $K = \{(i, j) : i, j = \overline{1, n}\}$, $K_0 = \{(i, j) : y_{ij}(t - t_0) \equiv 0, \forall\, t, t_0 \ge T\}$.

Рассмотрим i-ую строку фундаментальной матрицы $Y(t - t_0)$. Учитывая (3.5) и (3.6), получим оценки для элементов i-й строки фундаментальной матрицы

$$|y_{ij}(t - t_0)| \le D_0 e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \ge t_0, \quad (i, j) \in K \backslash K_0, \tag{3.7}$$

$$|y_{ij}(t - t_0)| \le D_0 e^{(\alpha_i - \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \le t_0, \quad (i, j) \in K \backslash K_0, \tag{3.8}$$

где при фиксированном i в качестве β_i и α_i выбираются соответсвенно максимальное и минимальное из Λ_k в оценках (3.5) и (3.6), когда j пробегает по всем столбцам фундаментальной матрицы, содержащей ненулевые элементы $y_{ij}(t - t_0)$.

Сформулируем достаточные условия полиустойчивости по части переменных нулевого положения равновесия системы (3.1).

Т е о р е м а 3.1 *Пусть интегралы*

$$I_{ij} = \int_0^{+\infty} e^{(-\alpha_i + \varepsilon)s} \psi_j(c_1 e^{(\beta_1 + \varepsilon)s}, c_2 e^{(\beta_2 + \varepsilon)s}, ..., c_n e^{(\beta_n + \varepsilon)s}) ds, \quad (i, j) \in K \backslash K_0 \tag{3.9}$$

сходятся равномерно относительно c_i, $i = \overline{1, n}$, $c = (c_1, ..., c_n) \in D$. *Тогда системы* (3.1) *и* (3.3) *являются локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по*

Брауеру относительно функций $\mu_i(t) = e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)}$, $i \in N$, *и нулевое решение системы* (3.1)

1) асимптотически устойчиво по тем переменным x_i, *для которых* $\beta_i < 0$;

2) устойчиво по тем переменным x_i, *для которых* $\beta_i = 0$, *а алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают; причем нулевое решение системы* (3.1) *имеет локальное асимптотическое равновесие по этим переменным.*

Доказательство. Рассмотрим банахово пространство

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C([T, +\infty), R^n),\ |\varphi_i(t)| \le c_i e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)},\ t \ge t_0,\ \varepsilon > 0,\ c_i \in R^1_+,\ i = \overline{1,n}\},$$

с нормой

$$||\varphi||_\Omega = \max_{i=\overline{1,n}} \sup_{t \ge t_0} \left\{ |\varphi_i(t)| e^{-(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \right\}. \tag{3.10}$$

Определим на Ω оператор

$$L\varphi = y(t) - \int\limits_t^{+\infty} Y(t-s) f(\varphi(s)) ds, \tag{3.11}$$

где $y(t) = Y(t-t_0)y^{(0)}$.

Для компонент решения системы (3.3) воспользуемся оценками из работ [16], [18]

$$|y_i(t)| \le \sum_{j=1}^{n} |y_{ij}(t-t_0)|\, |y_j^{(0)}| \le D_0 e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} ||y^{(0)}||, \quad t \ge t_0,\ i = \overline{1,n}.$$

Покажем, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$, где $\Omega_0 = \{\varphi : ||\varphi||_\Omega \le c_0,\ c_0 \in R^1_+\}$.

Пусть $||\varphi||_\Omega \le c_0$. Получим оценку для i-ой компоненты $(i \in N)$ оператора L при всех $t \ge t_0$

$$|(L\varphi)_i| \le e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \left[D_0 ||y^{(0)}|| + D_0 \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)s} \psi_j(c_1 e^{(\beta_1+\varepsilon)s}, c_2 e^{(\beta_2+\varepsilon)s}, ..., c_n e^{(\beta_n+\varepsilon)s}) ds \right].$$

Учитывая условие (3.8) и равномерную сходимость интегралов (3.9) по c_i, подберем t_0 такое, что при всех $t \ge t_0$

$$D \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} e^{(-\alpha+\varepsilon)s} \psi_j(c_1 e^{(\beta_1+\varepsilon)s}, c_2 e^{(\beta_2+\varepsilon)s}, ..., c_n e^{(\beta_n+\varepsilon)s}) ds \le \theta < 1, \tag{3.12}$$

где $\theta = \theta(c_1, ..., c_n)$.

Зафиксируем $y^{(0)}$ такое, что

$$||y^{(0)}|| \le \frac{1-\theta}{D_0} c_0. \tag{3.13}$$

Тогда из неравенств (3.12) -(3.13) получим

$$||L\varphi|| \le c_0 e^{(\beta_i+\varepsilon)(t-t_0)} \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \Omega_0,$$

и, следовательно,

$$||L\varphi||_\Omega \le c_0 \quad \text{при всех} \quad \varphi \in \Omega_0.$$

Отсюда следует, что $L : \Omega_0 \to \Omega_0$.

Аналогично работе [16] показывается, что оператор L является вполне непрерывным на Ω_0, и следовательно, удовлетворяет всем условиям принципа Шаудера [19] о существовании неподвижной точки для уравнения

$$\varphi = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0, \tag{3.14}$$

где φ – неподвижная точка оператора L.

Учитывая (3.11), запишем уравнение (3.14) в следующем виде:

$$\varphi(t) = y(t) - \int\limits_t^{+\infty} Y(t-s) f(\varphi(s)) ds. \tag{3.15}$$

Оператор L построен таким образом, что если в качестве $\varphi(t)$ в уравнении (3.15) взять решение $x(t : t_0, x^{(0)})$ системы (3.1) с начальными данными $x^{(0)}$, удовлетворяющими соотношению

$$y^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{\infty} Y(t_0 - s) f(x(s : t_0, x^{(0)})) ds, \tag{3.16}$$

то $y(t)$ в уравнении (3.15) будет решением системы (3.3) с начальными данными $y^{(0)}$, вычисляемом так же по формуле (3.16). Справедливо и обратное: если $y(t)$ является решением системы (3.3), то $x(t)$ будет решением системы (3.1), причем их начальные данные будут связаны соотношением (3.16).

Существование отображения (3.16) следует из уравнения (3.15).

Следовательно, в качестве отображения $P^{(2)}$ можно взять

$$P^{(2)} x^{(0)} = x^{(0)} + \int\limits_{t_0}^{+\infty} Y(t_0 - s) f(x(s : t_0, x^{(0)})) ds. \tag{3.17}$$

Существование отображения $P^{(1)}$ такого, что $x^{(0)} = P^{(1)} y^{(0)}$ доказывается аналогично работе [13].

Покомпонентая запись уравнения (3.15) имеет вид

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, y^{(0)}) - \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s) f_j(x(s : t_0, x^{(0)})) ds, \ i = \overline{1, n}. \tag{3.18}$$

Из (3.12) и (3.15) получим

$$|x_i(t : t_0, x^{(0)}) - y_i(t : t_0, y^{(0)})| \le \theta e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \le t_0, \tag{3.19}$$

где $i \in N$ и справедливо $y^{(0)} = P^{(2)} x^{(0)}$.

Тогда, согласно определению 1.1 из работы [16] системы (3.1) и (3.3) являются локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций $\mu_i(t) = e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}, i \in N$.

Покажем справедливость соотношений (2.6) и (2.7). Сопоставляя равенства (2.6) и соотношение (3.18), получим

$$\mu_i(t) \delta_i(t : t_0, x^{(0)}) = - \sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s) f_j(x(s : t_0, x^{(0)})) ds. \tag{3.20}$$

Далее, учитывая оценки (3.19) и равномерную сходимость интегралов (3.9) по c_i ($i = \overline{1,n}$), заключим, что $\delta_i(t : t_0, x^{(0)})$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $x^{(0)}$.

Аналогично сопоставляя равенства (2.7) и соотношение (3.18), получим

$$\mu_i(t)\gamma_i(t : t_0, y^{(0)}) = -\sum_{j=1}^{n} \int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s) f_j(x(s : t_0, P^{(1)} y^{(0)}))ds, \tag{3.21}$$

и, следовательно, $\gamma_i(t : t_0, y^{(0)})$ стремятся к нулю при $t \to +\infty$ равномерно по $y^{(0)}$.

Таким образом, все условия теоремы 2.1 выполнены, и, следовательно, нулевое решение системы (3.1) асимптотически устойчиво по переменным x_i, $i \in N$, для которых $\beta_i < 0$; устойчиво по переменным x_i, $i \in N$, для которых $\beta_i = 0$ и алгебраические и геометрические кратности собственных значений с нулевыми вещественными частями совпадают, причем нулевое решение системы (3.1) имеет локальное асимптотическое равновесие по этим переменным.

Доказательство закончено.

Приведем примеры, иллюстрирующие применение полученных достаточных условий к исследованию устойчивости по части переменных положений равновесия нелинейных систем.

Пример 3.1 *Для системы третьего порядка*

$$\begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -\dfrac{x^2 y}{1+z^2} \\ \dot{z} = z \end{cases}, \tag{3.22}$$

где x, y, z $\in R$ ставится задача об исследовании устойчивости нулевого положения равновесия системы по части переменных.

Собственными значениями матрицы линейного приближения системы (3.22) являются $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$.

Фундаментальная матрица линейного приближения системы (3.22) имеет вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Для проверки выполнения условий теоремы 3.1 докажем равномерную сходимость интегралов (3.9). Используя оценки (3.7) и (3.8), из вида фундаментальной матрицы вычислим $\alpha = 0$, $\beta_1 = -1$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$.

Учитывая, что

$$f_1(x,y,z) \equiv 0, \quad f_2(x,y,z) = -\frac{x^2 y}{1+z^2}, \quad f_3(x,y,z) \equiv 0.$$

из оценок (3.2) находим

$$\psi_1(u,v,w) = 0, \quad \psi_2(u,v,w) = -\frac{u^2 v}{1+w^2}, \quad \psi_3(u,v,w) = 0.$$

где $u = |x|$, $v = |y|$, $w = |z|$.

Из вида фундаментальной матрицы следует, что

$$K \backslash K_0 = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}.$$

Тогда несобственные интегралы (3.9) примут вид:

$$I_{11} = 0, \quad I_{22} = \int\limits_0^{+\infty} \frac{c_1 e^{-s} ds}{1 + c_2^2 e^{2s}}, \quad I_{33} = 0.$$

Из равномерной сходимости интегралов I_{11}, I_{22}, I_{33} относительно c_i, $i = \overline{1,3}$, на основании теоремы 3.1 можно сделать вывод, что нулевое положение равновесия системы (3.22) асимптотически устойчиво по переменной x, устойчиво по переменной y. Кроме того, по переменной y оно имеет локальное асимптотическое равновесие.

П р и м е р 3.2 *Для системы третьего порядка*

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{(x+1)(2z^2 + z + 8)}{z^2 + 3}, \\ \dot{y} = \dfrac{(x+1)^2 (z+2)}{z^2+3}, \\ \dot{z} = -\dfrac{(z+2)(xy - z^2 - 3x + y - 6)}{z^2 + 3}, \end{cases} \tag{3.23}$$

где $x, y, z \in R$ ставится задача об исследовании устойчивости положений равновесия системы по части переменных.

Положения равновесия системы (3.23) в пространстве R^3 образуют множество точек с координатами $(-1, c, -2)^T$, где $c \in R$.

Заменой

$$x = x_1 - 1, y = x_2 + c, z = x_3 - 2 \tag{3.24}$$

перейдем к исследованию нулевого положения равновесия системы

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -2x_1 - \dfrac{x_1 x_3}{(x_3 - 2)^2 + 3}, \\ \dot{x_2} = \dfrac{{x_1}^2 x_3}{(x_3 - 2)^2 + 3}, \\ \dot{x_3} = x_3 - \dfrac{x_1 (x_2 + c - 3) x_3}{(x_3 - 2)^2 + 3}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Линейным приближением для системы (3.25) будет система

$$\begin{cases} \dot{y_1} = -2y_1, \\ \dot{y_2} = 0, \\ \dot{y_3} = y_3. \end{cases} .$$

Собственные значения матрицы в линейной части системы (3.25) равны $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 1$, и, следовательно, фундаментальная матрица системы линейного приближения примет вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Проверим условия выполнения теоремы 3.1 Для этого, используя оценки (3.7) и (3.8), вычислим $\alpha = \beta_1 = -2$, $\beta_2 = 0$, $\beta_3 = 1$.

Учитывая, что

$$f_1(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 x_3}{(x_3-2)^2+3},$$

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = \frac{{x_1}^2 x_3}{(x_3-2)^2+3},$$

$$f_3(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1\,(x_2+c-3)\,x_3}{(x_3-2)^2+3},$$

из оценок (3.2) найдем

$$\psi_1(u, v, w) = \frac{uw}{(w-2)^2+3},$$

$$\psi_2(u, v, w) = \frac{u^2 w}{(w-2)^2+3},$$

$$\psi_3(u, v, w) = \frac{u\,(v+c-3)\,w}{(w-2)^2+3},$$

где $u = |x_1|$, $v = |x_2|$, $w = |x_3|$.

Определим множество $K \backslash K_0$ из вида фундаментальной матрицы:

$$K \backslash K_0 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\}.$$

Тогда интегралы (3.9) примут вид:

$$I_{11} = \int\limits_0^{+\infty} e^{2s} \frac{c_1 e^{-2s} c_3 e^s}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds = \int\limits_0^{+\infty} \frac{c_1 c_3 e^s}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds,$$

$$I_{22} = \int\limits_0^{+\infty} e^{2s} \frac{c_1^2 e^{-4s} c_3 e^s}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds = \int\limits_0^{+\infty} \frac{c_1^2 c_3 e^{-s}}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds,$$

$$I_{33} = \int\limits_0^{+\infty} e^{2s} \frac{c_1 e^{-2s} (c_2-3) c_3 e^s}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds = \int\limits_0^{+\infty} \frac{c_1 (c_2-3) c_3 e^s}{(c_3 e^s - 2)^2 + 3} ds.$$

Поскольку интегралы I_{11}, I_{22}, I_{33} сходятся равномерно относительно c_i, $i = \overline{1,3}$, таких что $(c_1, c_2, c_3)^T$ принадлежит достаточно малой окрестности нуля, то условия теоремы 3.1 выполнены. Тогда с учетом замены (3.24) каждое из положений равновесия $(-1, c, -2)^T$, $c \in R$ системы (3.23) является асимптотически устойчивым по переменной x и имеет локальное асимптотическое равновесие по переменной y.

Список литературы

1. А. М. Ляпунов, *Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения*, Собр. соч., **2**, Изд-во АН СССР, М.-Л., 1956, 272–331.

2. И. Г. Малкин, “Об устойчивости движения в смысле Ляпунова”, *Мат. сб.*, **3**:1 (1949), 63–100.

3. В. В. Румянцев, “Об устойчивости движения по отношению к части переменных”, *Вестник Моск. ун-та. Сер. мат., мех., астроном., физ., хим.*, 1957, 9–16.

4. В. В. Румянцев, А. С. Озиранер, *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, М., 1987, 253 с.

5. В. И. Воротников, *Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных*, Наука, М., 1991, 271 с.

6. В. И. Воротников, “Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности”, *Автомат. и телемех.*, **3**:1 (1993), 3–62.

7. K. Peiffer, N. Rouche, “Liapounov’s second method applied to partial stability”, *J. Mecanique*, **8**:2 (1969), 323–334.

8. P. Fergola, V. Moauro, “On partial stability”, *Ricerche Mat.*, **19**:2 (1970), 185–207.

9. C. Corduneanu, “Some problems concerning partial stability”, *Meccanica Non-lineare Stability*, **6** (1971), 141–154.

10. В. Н. Щенников, “Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями”, *Дифференц. уравнения*, **20**:9 (1984), 1645–1649.

11. В. Н. Щенников, “О частичной устойчивости в критическом случае 2k чисто мнимых корней”, *Дифференциальные и интегральные уравнения: Методы топологической динамики*, 1985, 46–50.

12. В. П. Прокопьев, “Об устойчивости относительно части переменных в критическом случае одного нулевого корня”, *ПММ*, **39**:3 (1975), 422–426.

13. Е. В. Воскресенский, *Асимптотические методы: теория и приложения*, СВМО, Саранск, 2000, 300 с.

14. Е. В. Воскресенский, *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Изд-во Сарат. ун-та, Саранск, 1990, 224 с.

15. О. С. Язовцева, “Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и ее применение к исследованию устойчивости по части переменных”, *Огарёв-online*, **13** (2017), Режим доступа: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx.

16. П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева, “Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **19**:1 (2017), 102–115. DOI: 10.15507/2079-6900.19.2017.01.102-115.

17. А. Б. Аминов, Т. К. Сиразетдинов, “Метод функций Ляпунова в задачах полиустойчивости движения”, *Прикладная математика и механика*, **51**:5 (1987), 709–716.

П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева. Достаточные условия полиустойчивости по . . .

18. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, М., 1966, 576 с.

19. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 249 с.

Поступила 15.06.2018

MSC2010 34C20

The sufficient conditions for polystability of solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations

© **P. A. Shamanaev**[1] **O. S. Yazovtseva**[2]

Abstract. The article states the sufficient polystability conditions for part of variables for nonlinear systems of ordinary differential equations with a sufficiently smooth right-hand side. The obtained theorem proof is based on the establishment of a local componentwise Brauer asymptotic equivalence. An operator in the Banach space that connects the solutions of the nonlinear system and its linear approximation is constructed. This operator satisfies the conditions of the Schauder principle, therefore, it has at least one fixed point. Further, using the estimates of the non-zero elements of the fundamental matrix, conditions that ensure the transition of the properties of polystability are obtained, if the trivial solution of the linear approximation system to solutions of a nonlinear system that is locally componentwise asymptotically equivalent to its linear approximation. There are given examples, that illustrate the application of proven sufficient conditions to the study of polystability of zero solutions of nonlinear systems of ordinary differential equations, including in the critical case, and also in the presence of positive eigenvalues.
Key Words: nonlinear ordinary differential equations, local componentwise Brauer asymptotic equivalence, the Shauder principle for a fixed point, stability with respect to a part of variables.

References

1. A. M. Lyapunov, *The investigation of one special cases of the problem of motion stability*, Sobr. soch., **2**, Izd-vo AN SSSR, M.-L., 1956, 272–331.

2. I. G. Malkin, "[On the stability of motion in the sense of Lyapunov]", *Mat. sb.*, **3**:1 (1949), 63–100 (In Russ.).

3. V. V. Rumyantsev, "[On motion stability with respect to a part of variables]", *Vestn. Mosk. Univ., Ser. Mat., Phiz., Astron., Khim.*, 1957, 9–16 (In Russ.).

4. V. V. Rumyantsev, *[Stability and stabilization of motion with respect to a part of the variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 253 p.

5. V. I. Vorotnikov, *[Stability of dynamical systems with respect to a part of variables]*, Nauka Publ, Moscow, 1991 (In Russ.), 271 p.

6. V. I. Vorotnikov, "[Problems and methods of investigation of stability and stabilization with respect to a part of the variables: research directions, results, features]", *Avtomat. i telemekh.*, **3**:1 (1993), 3–62 (In Russ.).

7. K. Peiffer, N. Rouche, "Liapounov's second method applied to partial stability", *J. Mecanique*, **8**:2 (1969), 323–334.

8. P. Fergola, V. Moauro, "On partial stability", *Ricerche Mat.*, **19**:2 (1970), 185–207.

[1] **Pavel A. Shamanaev**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-0135-317X, korspa@yandex.ru

[2] **Olga S. Yazovtseva**, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-8075-4491, kurinaos@gmail.com

9. C. Corduneanu, “Some problems concerning partial stability”, *Meccanica Non-lineare Stability*, **6** (1971), 141–154.

10. V. N. Shchennikov, “Investigation of the stability with respect to part of the variables of differential systems with homogeneous right-hand sides”, *Differ. Uravn.*, **20**:9 (1984), 1645–1649 (In Russ.).

11. V. N. Shchennikov, “[On partial stability in the critical case of 2k pure imaginary roots]”, *Differentscialnye i integralnye uravneniya: metody topologicheskoy dinamiki*, 1985 (In Russ.).

12. V. P. Prokopyev, “[On stability with respect to some of the variables in the critical case of a single zero root.]”, *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, **39** (1975) (In Russ.).

13. E. V. Voskresenskiy, *[Asymptotic methods: theory and applications]*, SVMO Publ., Saransk, 2000 (In Russ.), 300 p.

14. E. V. Voskresenskiy, *Metody sravneniya v nelineynom analize [Comparison methods in nonlinear analysys]*, Sarat. Univercity publ., Saransk, 1990 (In Russ.), 224 p.

15. O. S. Yazovtseva, “[The local component-wise asymptotic equivalence and its application to investigate for stability with respect to a part of variables]”, *Ogarev-online*, **13** (2017) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/lokalnaya-pokomponentnaya-asimptoticheskaya-ekvivalentnost-i-ee-primenenie-k-issledovaniyu-ustojchivosti-po-chasti-peremennyx.

16. P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva, “[The sufficient conditions of local asymptotic equivalence of nonlinear systems of ordinary differential equations and its application for investigation of stability respect to part of variables]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **19** (2017) (In Russ. DOI: 10.15507/2079-6900.19.2017.01.102-115).

17. A. B. Aminov, T. K. Sirazetdinov, “[The Lyapunov functions method in the problems of polystability of movements]”, *Appl. Maths. Mechs.*, **51**:5 (1987), 709–716 (In Russ.).

18. B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *[The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

19. V. A. Trenogin, *[Functional analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 249 p.

Submitted 15.06.2018

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.318-326

УДК 532.529:541.182

Динамика осаждения частицы в вязкой жидкости при наличии двух плоских стенок.

© С. И. Мартынов [1], Т. В. Пронькина [2], Н. В. Дворянинова [3], Т. В. Карягина [4]

Аннотация. Рассматривается модельная задача об осаждении твердой сферической частицы в вязкой жидкости, граничащей с двумя твердыми плоскими поверхностями. Для нахождения решения уравнений гидродинамики в приближении малых чисел Рейнольдса с граничными условиями на частице и двух плоскостях используется процедура, разработанная для численного моделирования динамики большого числа частиц в вязкой жидкости с одной плоской стенкой. Процедура основана на использовании фиктивных частиц, расположенных симметрично реальных относительно плоскости. Для решения задачи об осаждении реальной частицы при наличии двух плоскостей получается система фиктивных частиц. Приближенное решение найдено с использованием четырех фиктивных частиц. На основе этого решения получены численные результаты по моделированию динамики осаждения частицы для случая параллельной и перпендикулярной ориентации плоскостей относительно друг друга. В частности, найдены значения линейной и угловой скорости частицы в зависимости от расстояния до каждой из плоскостей и направления действия силы тяжести. В предельном случае, когда одна из плоскостей находится бесконечно далеко от частицы поучаем известные результаты вдоль и перпендикулярно одной плоскости.

Ключевые слова: численное моделирование, вязкая жидкость, частица, гидродинамическое взаимодействие, осаждение, плоские стенки.

1. Введение

В последние годы интенсивно развиваются микрфолюидные системы [1], [2], [3]. Одно из перспективных направлений развития - лаборатории на чипе (lab-on-a-chip) [4]. Их основой являются так называемые микрофлюидные модули, в которых происходит управление объемами жидкостей (объемом от 10^{-9} до 10^{-15} л). Такие капли являются

[1] **Мартынов Сергей Иванович**, профессор кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО "Югорский государственный университет " (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16.), доктор физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6420-3315, martynovsi@mail.ru

[2] **Пронькина Татьяна Васильевна**, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО "Югорский государственный университет " (628000 г. Ханты-Мансийск, ул. Чехова, д.16.), кандидат физико-математических наук, ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4331-3675, pronkinatv@mail.ru

[3] **Дворянинова Наталья Васильевна**, ведущий программист вычислительной лаборатории факультета математики и информационных технологий, ФГБОУ ВО "Мордовский государственный университет им.Н.П. Огарева " (430005 г. Саранск, ул. Большевистская, д.68.), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6280-6454, dvorjaninovanv@mail.ru

[4] **Карягина Татьяна Васильевна**, доцент кафедры информатики и прикладной математики факультета информационных технологий, ФГБОУ ВПО "Российский государственный социальный университет " (129226 г. Москва, ул. Вильгельма Пика, д.4, стр.1.), кандидат технических наук, доцент, ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1778-2980, zolinatv@mail.ru

своеобразными реакционными камерами , окруженными инертной средой, в которых могут быть проведены химические реакции или другие взаимодействия исследуемого объекта и изучаемого материала: подготовка проб, транспортировка, смешивание, разделение, детектирование, дозирование и другие операции. Применение микрофлюидных модулей в медицине, биологии, фармацевтике, промышленности и других областях открывает новые возможности по существенному снижению стоимости, сложности и сроков проведения анализов, исследований, контроля. Моделирование динамики капель и частиц в каналах таких устройств представляет актуальную задачу. Одна из возможных форм - каналы с плоскими стенками. Задача о движении одиночной частицы в вязкой жидкости при наличии плоской стенки при малых числах Рейнольдса рассматривалась во многих работах. Фактически задача состоит из двух: движение частицы перпендикулярно плоской стенке и движение частицы параллельно плоской стенке. Классическое решение об осаждении одиночной частицы получено с помощью биполярных координат и приведено в работе [5]. Основная трудность в получение решения - удовлетворить граничным условиям на двух геометрически разных поверхностях: сфере и плоскости. Различные способы нахождения приближенного аналитического решения задачи, в том числе и методом отражения, приведены в [6]. Асимптотическое решение для движения сферы вблизи плоской стенки дано в [7], [8]. В последние годы появилось много работ по численному моделированию динамики частицы или капли в каналах с плоскими стенками [9], [10]. Однако применяемые методы решения задачи о взаимодействии частицы с плоскостью или двумя плоскостями затруднительно применить для случая большого числа взаимодействующих частиц в потоке жидкости при наличии плоских стенок.

В работе [11] разработан метод и его программная реализация для численного расчета динамики конечного числа частиц в потоке вязкой жидкости при наличии плоской стенки. Метод сводит задачу о взаимодействии частиц со стенкой к задаче о взаимодействии реальных и фиктивных частиц, расположенных симметрично первых относительно плоскости стенки. Граничные условия на стенке удовлетворяются точно, а на частицах – приближенно. Метод отличен от известных, использующих фиктивные частицы, например от метода зеркальных отражений, и позволяет рассчитывать динамику группы частиц, взаимодействующих между собой и стенкой. На основе этого метода проведено численное моделирование динамики осаждения частицы в вязкой жидкости для двух ориентаций плоских поверхностей - параллельной и перпендикулярной.

2. Постановка задачи и метод решения

Пусть единичная твердая частица A радиуса a помещена в неограниченную несжимаемую жидкость вязкости η. В жидкости также присутствует неподвижные плоские твердые поверхности α и β (Рис. 2.1). Скорость и давление невозмущенного потока жидкости (т.е. такого потока, который был бы в отсутствии частиц) предполагаются заданными в виде двух функций: $\vec{U}(\vec{x})$, $P(\vec{x})$.

Скорость $\vec{u}'(\vec{x})$ и давление $p'(\vec{x})$ возмущенного потока будем рассматривать в виде суммы скорости и давления невозмущенного потока и скорости и давления потока возмущения

$$\vec{u}'(\vec{x}) = \vec{U}(\vec{x}) + \vec{u}(\vec{x})$$

$$p'(\vec{x}) = P(\vec{x}) + p(\vec{x})$$

Считая $Re < 1$, запишем уравнения для скорости $\vec{u}(\vec{x})$ и давления $p(\vec{x})$ возмущения в приближении Стокса

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0, \quad \eta \nabla^2 \vec{u} = \nabla p \tag{2.1}$$

Плоские стенки α и β считаем неподвижными с граничными условиями на них в виде

$$\begin{aligned} u_i &= 0 \quad (\vec{x} + \vec{h}) \perp \vec{h}, \\ u_i &= 0 \quad (\vec{x} + \vec{m}) \perp \vec{m} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь и далее через u_i будем обозначать i-ую компоненту вектора $\vec{u}$, i принимает значения 1, 2, 3. На поверхности частицы граничное условие записывается в виде

$$|\vec{x}| = a: \quad U_i(\vec{x}) + u_i(\vec{x}) = V_i + \Gamma_{ij} x_j \tag{2.3}$$

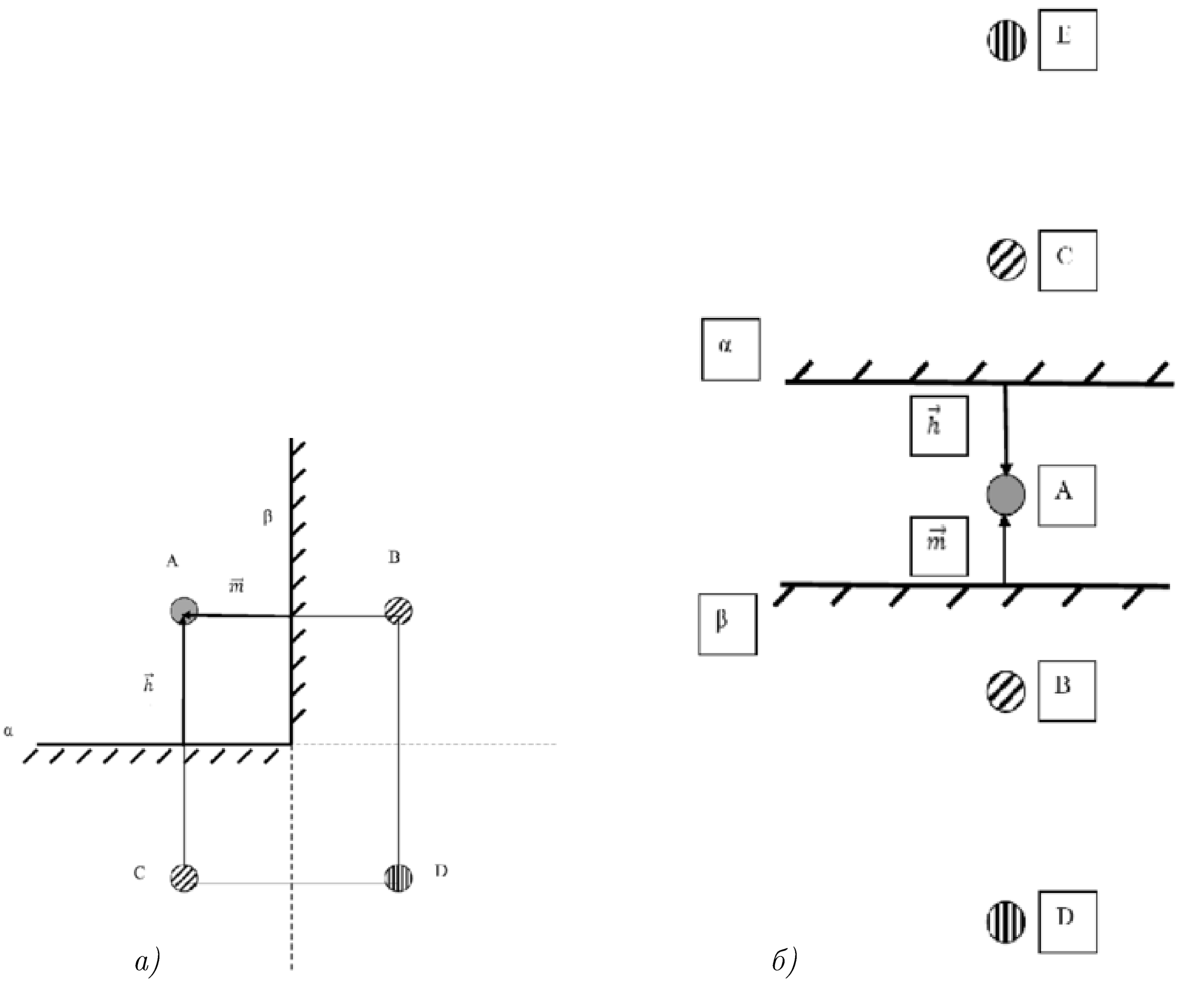
Здесь $\Gamma_{ij} = \varepsilon_{ikj}\omega_k$, $\vec{V}$, $\vec{\omega}$ - векторы линейной и угловой скоростей частицы соответственно, ε_{ikj} - тензор Леви-Чевиты (антисимметричный тензор третьего ранга, $\varepsilon_{123} = 1$). По повторяющимся индексам происходит суммирование (правило Эйнштейна). Наличие свободных индексов означает, что указанное уравнение должно выполняться при всех значениях этих индексов от 1 до 3.

Возмущения скорости и давления, возникающие при движении частицы, должны удовлетворять условию:

$$|\vec{x}| \to \infty: \quad u_i(\vec{x}) \to 0, \quad p(\vec{x}) \to 0 \tag{2.4}$$

Метод решения заключается в том, чтобы заменить плоскую стенку частицей и воспользоваться разработанной в [12] процедурой решения задачи о взаимодействии любого конечного числа частиц. Для этого вводится дополнительная фиктивная частица B, симметричная данной A относительно плоской стенки β и частица C, симметричная данной A относительно плоской стенки α (Рис. 2.1 а), а затем используется форма записи решения задачи о взаимодействии двух частиц A и B, A и C [11]. Аналогично вводится дополнительная фиктивная частица D, симметричная B и C относительно стенок α и β соответственно, и используется форма записи решения о взаимодействии двух частиц B и D, C и D [11]. Точно такая же процедура применяется и для случая параллельного расположения плоскостей (Рис. 2.1 б). Решение уравнений (2.1) для скорости имеет вид:

$$\begin{gathered}
u_i = -\tfrac{2}{3} H A_i L_0(\vec{x}) - \tfrac{1}{6} H A_j L_{ij}(\vec{x}) x^2 - \tfrac{3}{5} H A_{i,j} L_j(\vec{x}) - \tfrac{1}{10} H A_{j,k} L_{i,j,k}(\vec{x}) x^2 - \\
- \tfrac{4}{7} H A_{i,j,k} L_{j,k}(\vec{x}) - \tfrac{1}{14} H A_{j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{x}) x^2 - \tfrac{5}{9} H A_{i,j,k,l} L_{j,k,l}(\vec{x}) - \tfrac{1}{18} H A_{j,k,l,n} L_{i,j,k,l,n}(\vec{x}) x^2 - \\
- \tfrac{2}{3} G C_i L_0(\vec{y}) - \tfrac{1}{6} G C_j L_{i,j}(\vec{y}) y^2 - \tfrac{3}{5} G C_{i,j} L_j(\vec{y}) - \tfrac{1}{10} G C_{j,k} L_{i,j,k}(\vec{y}) y^2 - \\
- \tfrac{4}{7} G C_{i,j,k} L_{j,k}(|vecy) - \tfrac{1}{14} G C_{j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{y}) y^2 - \tfrac{2}{3} G B_i L_0(\vec{z}) - \tfrac{1}{6} G B_j L_{i,j}(\vec{z}) z^2 - \\
- \tfrac{3}{5} G B_{i,j} L_j(\vec{z}) - \tfrac{1}{10} G B_{j,k} L_{i,j,k}(\vec{z}) z^2 - \tfrac{4}{7} G B_{i,j,k} L_{j,k}(\vec{z}) - \tfrac{1}{14} G B_{j,k,l} L_{i,j,k,l} z^2 - \\
- \tfrac{2}{3} G E_i L_0(y\vec{1}) - \tfrac{1}{6} G E_j L_{i,j}(y\vec{1}) y1^2 - \tfrac{3}{5} G E_{i,j} L_j(y\vec{1}) - \tfrac{1}{10} G E_{j,k} L_{i,j,k}(y\vec{1}) - \\
- \tfrac{4}{7} G E_{i,j,k} L_{j,k}(y\vec{1}) - \tfrac{1}{14} G E_{j,k,l} L_{i,j,k,l}(y\vec{1}) y1^2 - \tfrac{5}{9} G E_{i,j,k} L_{j,k}(y\vec{1}) - \\
- \tfrac{1}{18} G E_{j,k,l,n} L_{i,j,k,l,n}(y\vec{1}) y1^2 - \tfrac{6}{11} G E_{i,j,k,l,n} L_{j,k,l,n}(y\vec{1}) - \tfrac{1}{22} G E_{j,k,l,n,s} L_{i,j,k,l,n,s}(y\vec{1}) y1^2 - \\
- \tfrac{2}{3} G D_i L_0(z\vec{1}) - \tfrac{1}{6} G D_j L_{i,j}(z\vec{1}) z1^2 - \tfrac{3}{5} G D_{i,j} L_j(z\vec{1}) - \\
- \tfrac{1}{10} G D_{j,k} L_{i,j,k}(z\vec{1}) z1^2 - \tfrac{4}{7} G D_{i,j,k} L_{j,k}(z\vec{1}) - \tfrac{1}{14} G D_{j,k,l} L_{i,j,k,l}(z\vec{1}) z1^2 - \\
- \tfrac{5}{9} G D_{i,j,k,l} L_{j,k,l}(z\vec{1}) - \tfrac{1}{18} G D_{j,k,l,n} L_{i,j,k,l,n}(z\vec{1}) z1^2 - \tfrac{6}{11} G D_{i,j,k,l,n} L_{j,k,l,n}(z\vec{1}) - \\
- \tfrac{1}{22} G D_{j,k,l,n,s} L_{i,j,k,l,n,s}(z\vec{1}) z1^2
\end{gathered} \tag{2.5}$$



Р и с у н о к **2.1**

Зависимость безразмерных координат частицы A от безразмерного времени при различных углах наклона поверхности α к горизонту

Давление представляется следующей функцией

$$
\begin{gathered}
p = HA_i L_i(\vec{x}) + HA_{[i,j} L_{i,j}(\vec{x}) + HA_{i,j,k} L_{i,j,k}(\vec{x}) + HA_{i,j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{x}) + GC[i] L_i(\vec{y}) + \\
+ GC_{i,j} L_{i,j}(\vec{y}) + GC_{i,j,k} L_{i,j,k}(\vec{y}) + GB_i L_i(\vec{z}) + GB_{i,j} L_{i,j}(\vec{z}) + GB_{i,j,k} L_{i,j,k}(\vec{z}) + \\
+ GE_i L_i(\vec{y1}) + GE_{i,j} L_{i,j}(\vec{y1}) + GE_{i,j,k} L_{i,j,k}(\vec{y1}) + GE_{i,j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{y1}) + \\
+ GE_{i,j,k,l,n} L_{i,j,k,l,n}(\vec{y1}) + GD_i L_i(\vec{z1}) + GD_{i,j} L_{i,j}(\vec{z1}) + GD_{i,j,k} L_{i,j,k}(\vec{z1}) + \\
+ GD_{i,j,k,l} L_{i,j,k,l}(\vec{z1}) + GD_{i,j,k,l,n} L_{i,j,k,l,n}(\vec{z1})
\end{gathered}
\tag{2.6}
$$

Здесь $\vec{y1}$, $\vec{y}$, $\vec{z1}$, $\vec{z}$ - радиус-векторы, соединяющие центры фиктивных частиц B, C, D с произвольной точкой в жидкости. Так же, как и в работе [11] неизвестные тензорные коэффициенты находятся из граничных условий на поверхности стенок ((2.2)) и частицы A (2.3). Отличие от задачи с одной стенкой заключается в том, что граничные условия на двух плоских поверхностях и частицы выполняются приближенно с заданной точностью. Тензорные коэффициенты находились методом разложения по малому параметру $\varepsilon = a/h$ с точностью до $o(\varepsilon^3$. В качестве параметра задавалось отношение $\lambda = m/h$.

3. Результаты моделирования

Для расчета динамики осаждения решались уравнения квазистационарного движения частицы под действием гидродинамической силы $\vec{F}$ и момента $\vec{T}$, определяемыми из решения (2.5), (2.6), и силы тяжести $\rho_p \vec{g}$ и выталкивающей силы в жидкости $-\rho_l \vec{g}$. Система уравнений в этом случае имеет вид:

$$\vec{F} + (\rho_p - \rho_l)\vec{g} = 0, \quad \vec{T} = 0$$

Результаты численного моделирования динамики частицы A для случая перпендикулярно расположенных плоских стенок представлены на (Рис.3.1) и (Рис. 3.2). Здесь в качестве характерного параметра использовалась скорость осаждения V_0 частицы A в отсутствии стенок.

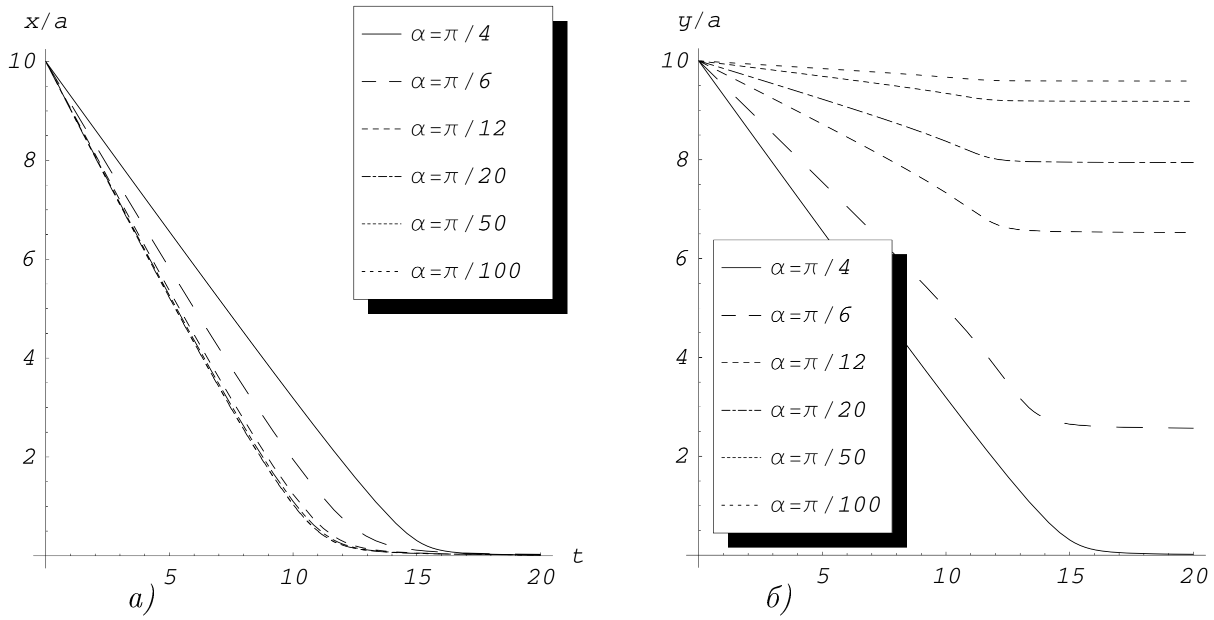
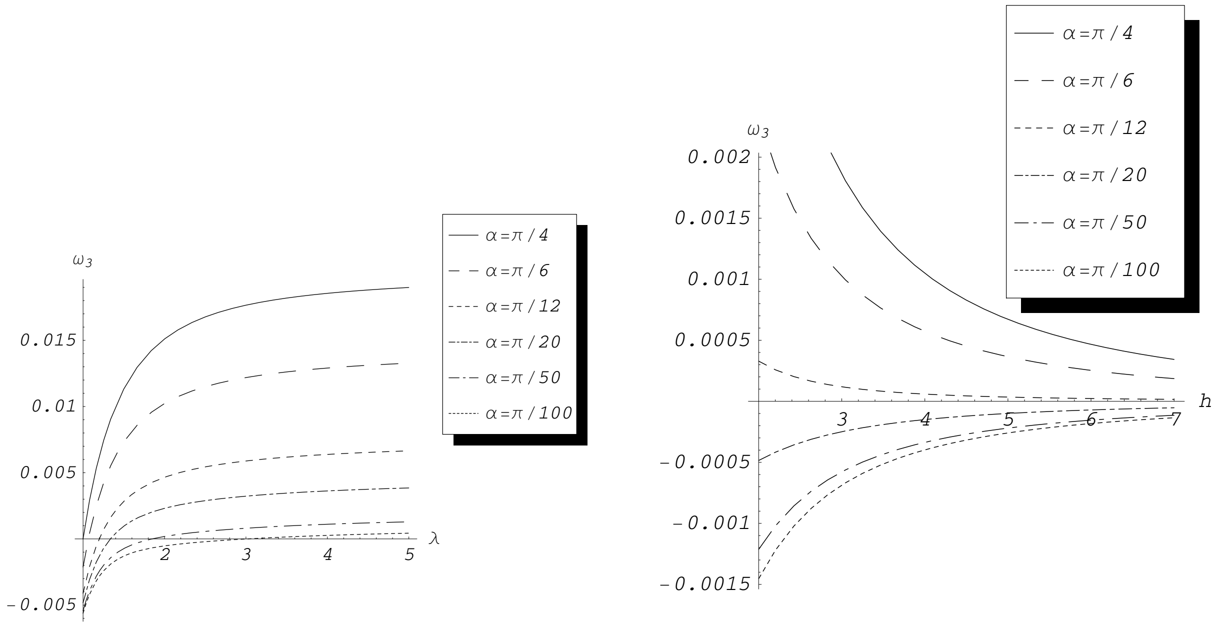


Рисунок **3.1**

Зависимость безразмерных координат частицы A от безразмерного времени при различных углах наклона поверхности α к горизонту

Как видно из графиков, осаждение частицы при угле наклона 45^0 и при одинаковом начальном расстоянии до плоскостей $\lambda = 1$ происходит без вращения. При других углах наклона и начальном положении частицы относительно плоскостей угловая скорость может изменять свой знак, то есть частица меняет направление своего вращения.

Аналогичные вычисления были проделаны для случая осаждения при параллельном расположении плоскостей. Результаты моделирования представлены на (Рис. 3.3).



а) *б)*

Рисунок **3.2**

Зависимость безразмерной угловой скорости частицы A от безразмерных параметров λ (при $h/a = 1.5$) и расстояния до стенки h/a (при $\lambda = 1.25$) при различных углах наклона поверхности α к горизонту

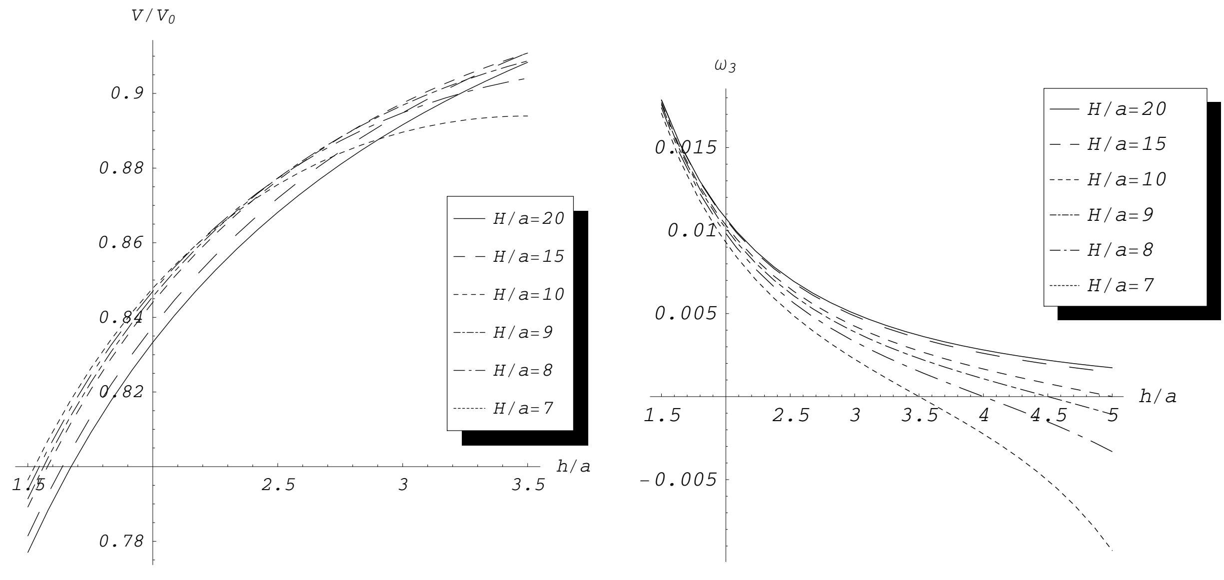


Рисунок **3.3**

Линейная и угловая скорости при осаждении частицы в случае параллельных плоскостей.

Угловая скорость частицы зависит от начального расположения относительно стенок и при переходе через середину канала меняет знак. Скорость осаждения при наличии стенок меньше характерной скорости V_0 и зависит как от начального положения частицы, так и от ширины канала.

Предложенный выше подход позволяет рассчитывать динамику частиц при различных ориентациях плоскостей относительно друг друга.

4. Заключение

Рассмотрена модельная задача об осаждении частицы в вязкой жидкости при наличии двух плоских стенок. На основе разработанного ранее метода предложено приближенное решение задачи. Метод основан на замене плоской стенки фиктивной частицей, расположенной симметрично реальной относительно плоскости стенки. При этом граничные условия на стенках и частице удовлетворяются приближенно с заданной точностью. Найденное распределении скорости и давления позволяет определить гидродинамическую силу и момент силы, действующие на частицу со стороны жидкости, и рассчитывать динамику частицы. Проведен численный расчет динамики осаждения частицы при различных ориентациях силы тяжести относительно плоских стенок. Результаты численного моделирования показывают, что предложенный метод позволяет корректно рассчитывать динамику частицы. Метод может быть использован для расчета динамики большого числа частиц при произвольной ориентации стенок относительно друг друга и при произвольном числе таких стенок.

Список литературы

1. R. Seemann, M. Brinkmann, T. Pfohl, S. Herminghaus, "Droplet based microfluidics", *Reports on progress in physics*, **75** (2012), 016601.

2. M. T. Guo, A. Rotem, J. A. Heyman, D. A. Weitz, "Droplet microfluidics for high-throughput biological assays", *Lab on a Chip.*, **12** (2012), 2146-2155.

3. A. Gunther, K. F. Jensen, "Multiphase microfluidics: from flow characteristics to chemical and materials synthesis", *Lab on a Chip.*, **6**:12 (2006), 1487-1503.

4. Sh. Gupta, K. Ramesh, S. Ahmed, V. Kakkar, "Lab-on-Chip Technology: A Review on Design Trends and Future Scope in Biomedical Applications", *International Journal of Bio-Science and Bio-Technology*, **8**:5 (2016), 311-322.

5. H. Brenner, "The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface", *Chem. Eng. Sci.*, **16** (1961), 242-251.

6. I. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodinamics*, Prentice - Hall, Englewood Giffs, 1965, 553 p.

7. M. E. O'Neill, K. Stewartson, "On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall", *J. Fluid Mech.*, **27** (1967), 705-724.

8. M. D. A. Cooley, M. E. O'Neill, "On the slow motion generated in a viscous fluid by the approaching of a sphere to a plane wall or a stationary sphere", *Mathematika*, **16** (1969), 37-49.

9. M. E. Staben, A. Z. Zinchenko, R. H. Davis, "Dynamic simulation of spheroid motion between two parallel plane walls in low-Reynolds-number Poiseuille flow", *J. Fluid Mech.*, **553** (2006), 187-226.

10. A. Z. Zinchenko, J. F. Ashley, R. H. Davis, "A moving-frame boundary-integral method for particle transport in microchannels of complex shape", *Physics of Fluids*, **24** (2012), 043302.

11. V. E. Baranov, S. I. Martynov, "Simulation of Particle Dynamics in a Viscous Fluid near a Plane Wall", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:50 (2010), 1588–1604.

12. V. E. Baranov, S. I. Martynov, "Effect of the Hydrodynamic Interaction of a Large Number of Particles on Their Sedimentation Rate in a Viscous Fluid", *Fluid Dynamics*, **39**:1 (2004), 136–147.

Поступила 27.06.2018

MSC2010 76D07, 76D09, 76D17

Dynamics of sedimentation of particle in a viscous fluid in the presence of two flat walls

© **S. I. Martynov**[1], **T. V. Pronkina**[2], **N. V. Dvoryaninova**[3], **T. V. Karyagina**[4]

Abstract. The model problem of sedimentation of a solid spherical particle in a viscous fluid bordering two solid planar surfaces is considered. To find the solution of the hydrodynamic equations in the approximation of small Reynolds numbers with boundary conditions on a particle and on two planes, a procedure developed for numerical simulation of the dynamics of a large number of particles in a viscous fluid with one plane wall is used. The procedure involves usage of fictive particles located symmetrically to real ones with respect to the plane. To solve the problem of the real particle's sedimentation in the presence of two planes, a system of fictive particles is introduced. An approximate solution was found using four fictive particles. Basing on this solution, numerical results are obtained on dynamics of particle deposition for the cases of planes oriented parallel and perpendicular to each other. In particular, the values of linear and angular velocities of a particle are found, depending on the distance to each plane and on the direction of gravity. In the limiting case, when one of the planes is infinitely far from the particle, we obtain known results on the dynamics of particle sedimentation along and perpendicular to one plane.

Key Words: numerical modeling, viscous fluid, particle, hydrodynamic interaction, sedimentation, flat walls.

References

1. R. Seemann, M. Brinkmann, T. Pfohl, S. Herminghaus, "Droplet based microfluidics", *Reports on progress in physics*, **75** (2012), 016601 (In Eng.).

[1] **Sergey I. Martynov**, Professor of the Institute of Information Systems and Technological Complexes, Ugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk, 628000, Khanty-Mansi Autonomous District - Yugra, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6420-3315, martynovsi@mail.ru

[2] **Tatyana V. Pronkina**, Assistant Professor of the Institute of Information Systems and Technological Complexes, Ugra State University (16 Chekhova st., Khanty-Mansiysk, 628000, Khanty-Mansi Autonomous District - Yugra, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4331-3675, pronkinatv@mail.ru

[3] **Natalya V. Dvoryaninova**, Leading programmer of the computer laboratory of the faculty of mathematics and information technology, Mordovia State University named after N. P. Ogarev (68 Bolshevistskaya st., Saransk, 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0001-6280-6454, dvorjaninovanv@mail.ru

[4] **Tatyana V. Karyagina**, Assistant Professor of the Institute of Information Technology, Russian State Social University (4/1 Wilhelm Peak st., Moscow, 129226, Russia), ORCID: https://orcid.org/0000-0002-1778-2980, zolinatv@mail.ru

2. M. T. Guo, A. Rotem, J. A. Heyman, D. A. Weitz, "Droplet microfluidics for high-throughput biological assays", *Lab on a Chip.*, **12** (2012), 2146-2155 (In Eng.).

3. A. Gunther, K. F. Jensen, "Multiphase microfluidics: from flow characteristics to chemical and materials synthesis", *Lab on a Chip.*, **6**:12 (2006), 1487-1503 (In Eng.).

4. Sh. Gupta, K. Ramesh, S. Ahmed, V. Kakkar, "Lab-on-Chip Technology: A Review on Design Trends and Future Scope in Biomedical Applications", *International Journal of Bio-Science and Bio-Technology*, **8**:5 (2016), 311-322 (In Eng.).

5. H. Brenner, "The slow motion of a sphere through a viscous fluid towards a plane surface", *Chem. Eng. Sci.*, **16** (1961), 242-251 (In Eng.).

6. I. Happel, H. Brenner, *Low Reynolds number hydrodinamics*, Prentice - Hall, Englewood Giffs, 1965 (In Eng.), 553 p.

7. M. E. O'Neill, K. Stewartson, "On the slow motion of a sphere parallel to a nearby plane wall", *J. Fluid Mech.*, **27** (1967), 705-724 (In Eng.).

8. M. D. A. Cooley, M. E. O'Neill, "On the slow motion generated in a viscous fluid by the approaching of a sphere to a plane wall or a stationary sphere", *Mathematika*, **16** (1969), 37-49 (In Eng.).

9. M. E. Staben, A. Z. Zinchenko, R. H. Davis, "Dynamic simulation of spheroid motion between two parallel plane walls in low-Reynolds-number Poiseuille flow", *J. Fluid Mech.*, **553** (2006), 187-226 (In Eng.).

10. A. Z. Zinchenko, J. F. Ashley, R. H. Davis, "A moving-frame boundary-integral method for particle transport in microchannels of complex shape", *Physics of Fluids*, **24** (2012), 043302 (In Eng.).

11. V. E. Baranov, S. I. Martynov, "Simulation of Particle Dynamics in a Viscous Fluid near a Plane Wall", *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **50**:50 (2010), 1588–1604 (In Eng.).

12. V. E. Baranov, S. I. Martynov, "Effect of the Hydrodynamic Interaction of a Large Number of Particles on Their Sedimentation Rate in a Viscous Fluid", *Fluid Dynamics*, **39**:1 (2004), 136–147 (In Eng.).

Submitted 27.06.2018

Математическое моделирование и информатика

DOI 10.15507/2079-6900.20.201803.327-337

УДК 519.67; 538.945

Дифференциальные уравнения для восстановления средней дифференциальной восприимчивости сверхпроводников из измерений первой гармоники намагниченности

© **Н. Д. Кузьмичев**[1], **М. А. Васютин**[2], **А. Ю. Шитов**[3], **И. В. Бурьянов**[4]

Аннотация. В работе получены неоднородные дифференциальные уравнения для восстановления средней дифференциальной восприимчивости сверхпроводников второго рода из синфазной (действительной) составляющей первой гармоники намагниченности в гистерезисном случае. На основе дифференциального уравнения 2-го порядка выполнено математическое моделирование средней дифференциальной восприимчивости для теоретической и экспериментальной зависимости действительной части первой гармоники намагниченности. Решение задачи Коши осуществлялось численно, методом Рунге-Кутты четвертого порядка точности. Для этого дифференциальное уравнение для восстановления средней восприимчивости сводилось к системе дифференциальных уравнений. На основе разработанной в работе методике была восстановлена средняя дифференциальная восприимчивость дискообразного поликристаллического сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ из экспериментально полученной первой гармоники намагниченности в интервале магнитных полей от 0 до 800 Э.

Ключевые слова: неоднородное дифференциальное уравнение, задача Коши, метод Рунге-Кутты, намагниченность, средняя дифференциальная восприимчивость, высокотемпературный сверхпроводник, действительная часть первой гармоники намагниченности, мнимая часть первой гармоники намагниченности.

1. Введение

Известно, что магнитные свойства высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП) обладают сложным поведением и разнообразием [1]–[5]. Так, слабые магнитные поля напряженностью $H \sim 1$ Э проникают в ВТСП, и их намагниченность является нелинейной функцией напряженности магнитного поля, и в больших полях обнаруживается

[1] **Кузьмичев Николай Дмитриевич**, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), доктор физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6707-4950, kuzmichevnd@yandex.ru

[2] **Васютин Михаил Александрович**, доцент кафедры конструкторско-технологической информатики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), кандидат физико-математических наук, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4856-7407, vasyutinm@mail.ru

[3] **Шитов Альмир Юрьевич**, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2029-8479, shishkin92@mail.ru

[4] **Бурьянов Игорь Валерьевич**, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68/1), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1033-0487, i.v.buryanov@gmail.com

гистерезис. Кроме того, захваченный образцом магнитный поток релаксирует. В связи с этим возникает необходимость в новой методике обработки экспериментальных данных по магнитным измерениям. Особый интерес представляют исследования магнитных свойств материалов путем обработки спектра гармоник сигнала отклика на модулированное магнитное поле. Амплитуды гармоник указанного спектра содержат богатую информацию об аналитических свойствах и механизме нелинейных и гистерезисных свойств намагниченности $M(H)$. Широко распространенным методом исследования магнитных свойств ВТСП является изучение отклика образца на внешнее постоянное и переменное магнитное поле. Для этого используется «2-х катушечный» метод, который описан, например, в работах [1]–[3]. Величина ε – ЭДС отклика пропорциональна скорости изменения намагниченности образца:

$$\varepsilon = -\mu_0 NS \cdot \frac{dM}{d\tau} \tag{1.1}$$

Здесь μ_0 – магнитная постоянная, N – число витков приемной катушки, S – площадь сечения образца, τ - время и M – намагниченность образца. Намагниченность образца ВТСП зависит от величины текущего внешнего магнитного поля, от предыстории его состояния, от температуры и в общем случае от времени (релаксация) [1]–[4], т.е. $M = M(H, T, \tau)$.

2. Теоретические предпосылки

Пусть экспериментально исследуется гистерезисная зависимость намагниченности $M(H)$. При статическом и переменном воздействии зависимость M будет периодической функцией времени τ и в регистрирующем сигнале, содержащем информацию о зависимости, имеются высшие гармоники. Следуя работам [1]–[7], разложим $M(H)$ в ряд Тейлора в точке H_0 по $z = h \cdot \cos\omega\tau$, который преобразуется в ряд Фурье:

$$M(H) = M(H_0 + h \cdot \cos(t)) = \frac{M_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cdot \left[M_n' \cdot \cos(nt) + M_n'' \cdot \sin(nt) \right] \tag{2.1}$$

В выражении (2.1) величина $t = \omega\tau$ есть безразмерное время. Ряды для амплитуд гармоник Фурье равны:

$$\begin{cases} M_n'(H_0, h) = 2\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!(n+m)!} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{2m+n} \langle M(H_0) \rangle^{(2m+n)} , \\ M_n''(H_0, h) = \frac{2}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \Delta M(H_0)^{(p)} \cdot S_{p,\,n} \cdot \frac{h^p}{p!} \end{cases} \tag{2.2}$$

Здесь $\langle M(H) \rangle = [M_-(H) + M_+(H)]/2$ – средняя кривая намагниченности, $\langle M(H) \rangle^{(k)}$, $\Delta M(H)^{(k)}$ – производная от $\langle M \rangle$ или от $\Delta M(H)$ по H порядка k, $\Delta M(H)$=$[M_-(H) + M_+(H)]$ – разностная кривая намагниченности, $M_-(H)$ и $M_+(H)$ – ветви намагниченности в убывающем и возрастающем поле соответсвенно,

$$S_{p,\,n} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{p!(n+p-2i-2)!!}{(p-i)!(p+n)!!}$$

Где при $n = 2k$, $p = 2m + 1$, а при $n = 2k + 1$, $p = 2m$. Например, $S(p, 0) = 0$, $S(p, 1) = 1/(p + 1)$, $S(p, 2) = 2/(p + 2)$, $S(p, 3) = (3p + 1)/(p + 1)(p + 3)$ и т.д.

Для первой гармоники намагниченности имеем:

$$M_1^{'}(H_0,h) = 2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!(m+1)!}\cdot\left(\frac{h}{2}\right)^{2m+1}\langle M(H_0)\rangle^{(2m+1)} \ , \qquad (2.3)$$

$$M_1^{''}(H_0,h) = \frac{2}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\triangle M(H_0)^{(2m)}\cdot\frac{h^{2m}}{(2m+1)!} \qquad (2.4)$$

В отсутствии гистерезиса $\langle M(H)\rangle = M(H)$, а $\triangle M(H)=0$. В этом случае $M_n^{''}=0$.

На Рис. 2.1 для примера приведены различные ветви намагниченности для сверхпроводника второго рода находящегося в критическом состоянии.

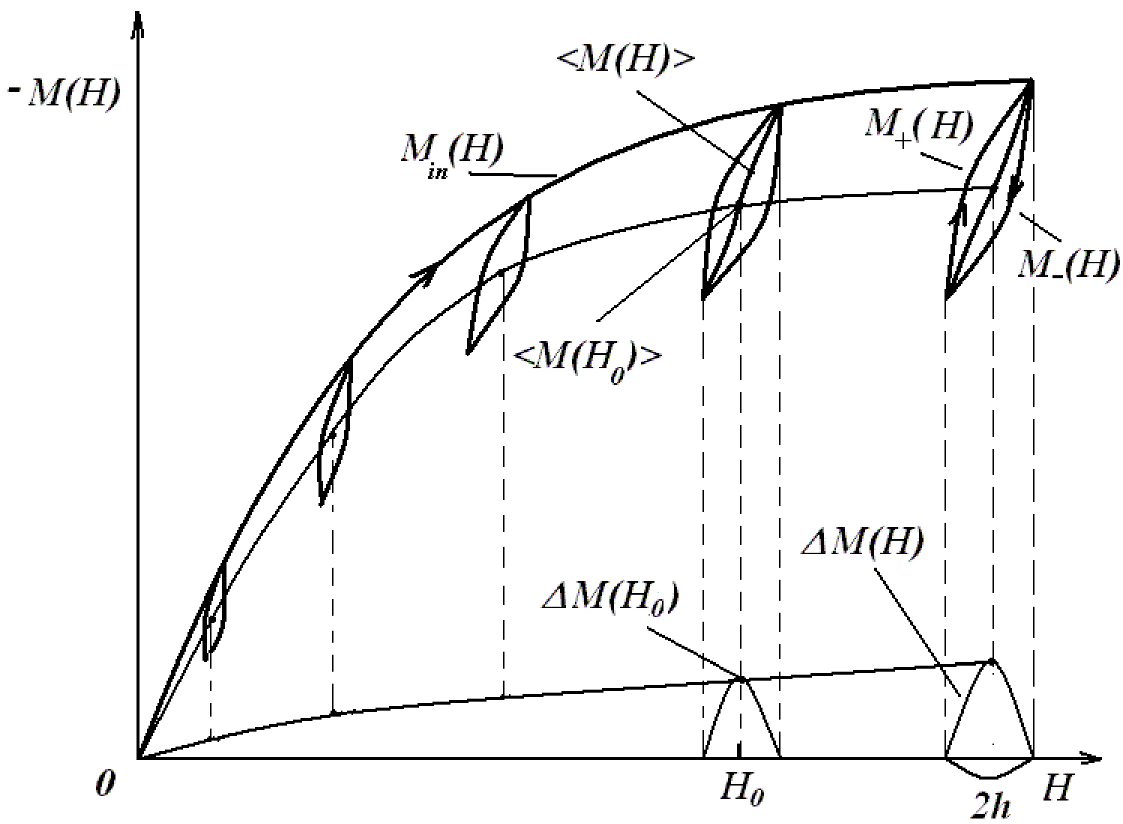


Рисунок **2.1**

Кривые и ветви намагниченности сверхпроводника второго рода находящегося в критическом состоянии. Здесь: $M_{in}(H)$ – начальная кривая намагниченности, $\langle M(H)\rangle$ - средняя кривая намагниченности для текущей напряженности магнитного поля, $H = H_0 + h\cdot\cos(\omega\tau)$, $\triangle M(H)$ – разностная кривая намагниченности, $M_{-}(H)$ – ветвь намагниченности в убывающем поле, $M_{+}(H)$ - ветвь намагниченности в возрастающем поле, $\langle M(H_0)\rangle$ - зависимость средней кривой намагниченности при медленном сканировании значения статического поля H_0, $\triangle M(H_0)$ – зависимость разностной кривой намагниченности от величины H_0.

Для гистерезисного случая при значениях малых h в (2.3) и (2.4) оставим по два члена разложения:

$$M_1^{'} \approx h\frac{d\langle M(H)\rangle}{dH}\bigg|_{H_0} + \frac{h^3}{8}\cdot\frac{d^3\langle M(H)\rangle}{dH^3}\bigg|_{H_0} \ , \qquad (2.5)$$

$$M_1^{''} \approx \frac{2}{\pi}\left[\triangle M(H_0) + \frac{h^2}{6}\cdot\frac{d^2\triangle M(H)}{dH^2}\bigg|_{H_0}\right] \tag{2.6}$$

Как правило, первый член в формуле (2.6) много меньше второго члена. При малых значениях h квадратурная (мнимая) составляющая первой гармоники приблизительно равна $M_1^{''} \approx h^2\cdot \triangle M(H_0)^{(2)}/3\pi$ и $|M_1^{'}| \gg |M_1^{''}|$. В силу отмеченной причины в модуль первой гармоники при малых h основной вклад вносит синфазная (действительная) часть, т.е. $M_1 = \sqrt{(M_1^{'})^2 + (M_1^{''})^2} \approx M_1^{'}$.

На основании формулы (2.5) можно получить дифференциальное уравнение для восстановления производной средней кривой намагниченности $d{<}M{>}/dH$ при известной зависимости первой гармоники от постоянного поля $M_1^{'}(H_0)$. Зависимость $M_1^{'}(H_0)$ можно определить экспериментально путем исследования спектра гармоник намагниченности при помещении образца в переменное магнитное поле амплитудой h и постоянное поле напряженностью H_0. Таким образом, для малых фиксированных амплитуд h формула (2.5) превращается в дифференциальное уравнение третьего порядка, которое сводится к уравнению второго порядка относительно $d{<}M{>}/dH_0$. Для простоты введем обозначение $d{<}M{>}/dH_0 \equiv X_c$, тогда уравнение имеет вид:

$$\frac{d^2X_c}{dH_0^2} + \frac{8}{h^2}\cdot X_c = \frac{8}{h^3}M_1^{'}(H_0,h) \tag{2.7}$$

В уравнении (2.7) величину X_c назовем средней дифференциальной восприимчивостью, так она является производной по полю от средней намагниченности ${<}M{>}$. При увеличении h необходимо учитывать следующий член разложения (2.3) и так далее. Это приводит к увеличению порядка дифференциального уравнения на два. Кроме того, средняя кривая намагниченности как видно из рис. 2.1 с ростом h сильнее отличается от начальной кривой намагниченности $M_{in}(H)$. Критерием применимости уравнения (2.7) является малость амплитуды 5-той гармоники по сравнению с первой, т.е.: $|M_1^{'}| \gg |M_5^{'}|$. При практическом восстановлении дифференциальной восприимчивости, кроме численного задания правой части уравнения (2.7) необходимо задавать начальные условия $X_c(H_{00})$ и $(dX_c(H)/dH)_{H_{00}}$, т.е. поставить задачу Коши. В силу численного задания экспериментально определенной правой части уравнения (2.7) его необходимо решать численно путем сведения его к системе уравнений 2-го порядка. Таким способом определенную задачу Коши можно решать методом Рунге-Кутты 4-го порядка [8]. Другим методом решения уравнения (2.7) является использование аналитического решения, записанного в виде свертки с правой частью указанного уравнения (2.8):

$$X_c(H) = A\cdot\cos\left(\frac{2\sqrt{2}}{h}\cdot H\right) + B\cdot\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{h}\cdot H\right) + \frac{2\sqrt{2}}{h^2}\cdot\int_{H_{00}}^{H} M_1^{'}(z,h)\cdot\sin\left(\frac{2\sqrt{2}}{h}\cdot(H-z)\right)dz \tag{2.8}$$

Где A и B являются постоянными определяемыми начальными условиями. Интеграл в правой части (2.8) в силу численного задания вычисляется численно.

Рассмотрим развитую методику на примере зависимости средней кривой намагниченности часто используемой для описания магнитных свойств тонкого сверхпроводящего диска находящегося в критическом состоянии. Средняя намагниченность имеет вид [2]:

$$\langle M(H)\rangle = -M_0\cdot\exp\left(\frac{-|H|}{H^*}\right)\left[\sinh\left(\frac{H}{H^*}\right)\right]$$

Первая гармоника намагниченности определялась по формуле:

$$M_1'(h, H_0) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\langle M(H_0 + h\cdot\cos(t))\rangle\cos(t)dt \tag{2.9}$$

Математическое моделирование производилось в системе MathCad. Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости приведены на рис. 2.2. Уравнение (2.7) сводилось к системе 2-х дифференциальных уравнений и решалось численно методом Рунге-Кутты. Величина h равнялась $H^*/2$.

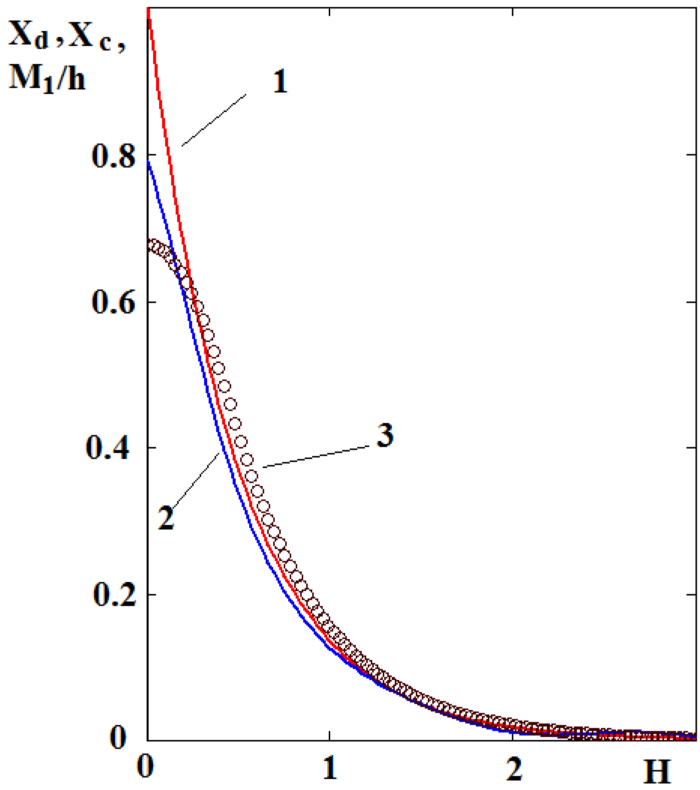


Рисунок **2.2**

Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости для $h = 0.5H^*$. На рисунке: 1 – дифференциальная восприимчивость X_d, 2 – восстановленная восприимчивость X_c с помощью уравнения (2.7) из M_1' (формула 2.9), 3 - $M_1'(H,h)/h$. Величина магнитного поля выражена в единицах H^*, а X_c, X_d и $M_1'(H,h)/h$ в единицах $X_d(0)$.

Из рисунка видно, что дифференциальная восприимчивость хорошо восстанавливается вдали от особенности находящейся в нуле поля. Для улучшения результатов необходимо уменьшать h или увеличивать степень дифференциального уравнения. То есть необходимо брать следующие члены ряда (2.3). Точность восстановления сильно зависит от выбора начальных условий $X_c(H_{00})$ и $(dX_c(H)/dH)_{H_{00}}$. Для начала счета в качестве $X_c(H_{00})$ следует взять $M_1'(H_{00})/h$. Производную $(dX_c(H)/dH)_{H_{00}}$ можно приближенно определить численно из зависимости $M_1'(H)$. Изменяя начальные условия добиваются наименьшего отклонения между кривыми $X_c(H)$ и M_1/h. Результаты вариации начальных условий приведены на рис. 2.3. Начальные условия для уравнения (2.7) отличаются от начальных условий, приводящих к оптимальному результату, представленному на рис. 2.2.

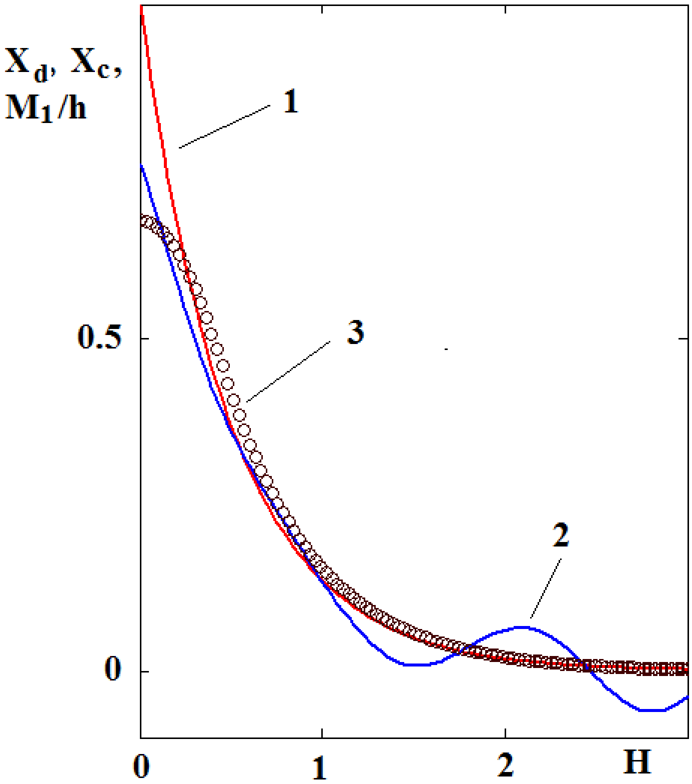


Рисунок **2.3**

Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости для $h = 0.5H^*$; 1 – дифференциальная восприимчивость X_d, 2 – восстановленная восприимчивость X_c с помощью уравнения (2.7) из M_1' (формула 2.9), 3 - $M_1'(H, h)/h$. Величина магнитного поля выражена в единицах H^*, а X_c, X_d и $M_1'(H, h)/h$ в единицах $X_d(0)$.

При уменьшении амплитуды модуляции в два раза $h = 0.25H^*$ точность восстановления увеличивается. Результаты приведены на рисунке 2.4. Из рисунка видно хорошее согласие восстановленной зависимости X_c с истиной (теоретической) зависимостью X_d.

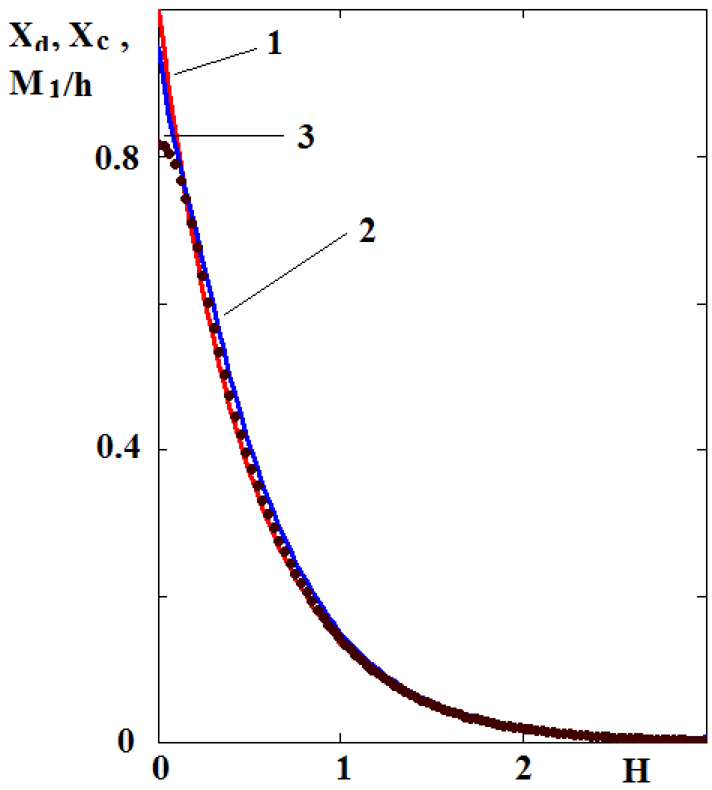


Рисунок **2.4**

Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости для $h = 0.25H^*$. На рисунке: 1 – дифференциальная восприимчивость X_d, 2 – восстановленная восприимчивость X_c с помощью уравнения (2.7) из M_1' (формула 2.9), 3 - $M_1'(H,h)/h$. Величина магнитного поля выражена в единицах H^*, а X_c, X_d и $M_1'(H,h)/h$ в единицах $X_d(0)$.

3. Восстановление средней дифференциальной восприимчивости поликристаллического высокотемпературного сверхпроводника $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в слабых магнитных полях

Измерения первой гармоники намагниченности поликристаллического ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ проводились с помощью «2-х катушечного» метода описанного во введении и более подробно в работах [2], [3] при температуре жидкого азота $T \approx 77K$. Внешнее магнитное поле создавалось двумя соленоидами для создания постоянного поля напряженностью H_0 и переменного поля напряженностью $h \cdot \cos(\omega\tau)$. Две приемные встречно направленные катушки находились внутри вышеуказанных соленоидов соосно. В одной из приемных катушек находился исследуемый образец ВТСП. Следуя формулам (1.1) и (2.1) получим для амплитуды синфазной составляющей первой гармоники ЭДС ε_1' измеряемой селективным вольтметром следующее выражение:

$$\varepsilon_1' = \mu_0 N S \omega M_1'(H_0, h) \tag{3.1}$$

Здесь $N = 500$ витков, $S \approx 3$ см^2 и $\omega \approx 3400c^{-1}$. Введем коэффициент пропорциональности $k = 1/(\mu_0 S N\omega) \approx 1556\,\text{А}/(\text{м}\cdot\text{В})$. Таким образом, получаем, что первая гармоника намагниченности приблизительно равна:

$$M_1' \approx 1556 \cdot \varepsilon_1'(A/_{M}) \tag{3.2}$$

Результаты математического моделирования приведены на рисунке 3.1. Из рисунка видно, что экспериментальные данные (кружки) и результаты восстановления (сплошная кривая) хорошо согласуются между собой.

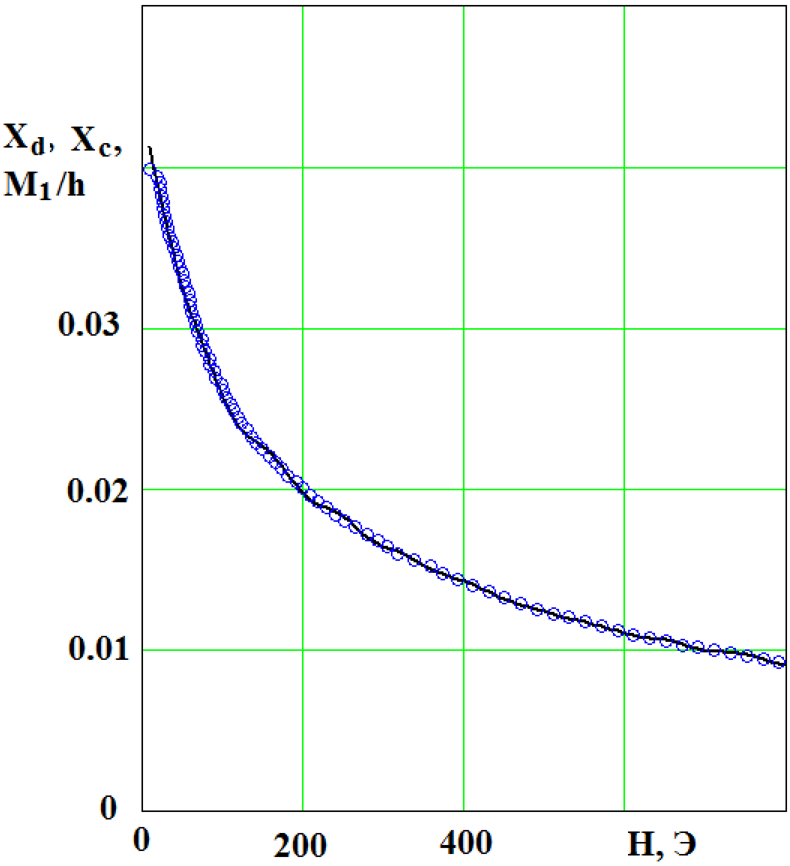


Рисунок **3.1**

Результаты восстановления дифференциальной восприимчивости поликристаллического дискообразного ВТСП $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ находящегося в критическом состоянии при температуре жидкого азота. Амплитуда модуляции составляла $h = 40$ Э (3184 А/м). Здесь кружками обозначены экспериментальные данные действительной части первой гармоники намагниченности нормированной на амплитуду модуляции h и сплошная кривая показывает результаты восстановления на основе уравнения (2.7).

4. Заключение

Таким образом, развитая методика на основе проведенного в работе математического моделирования с помощью неоднородного дифференциального уравнения (2.7) позволяет восстанавливать дифференциальную восприимчивость сверхпроводников. В работе также показано, что на основе выражений (2.3) и (2.4) можно построить неоднородные дифференциальные уравнения более высоких порядков и увеличить точность восстановления. Рассмотренный метод восстановления можно применять для исследования нелинейных вольтамперных характеристик полупроводниковых структур и сверхпроводников, а также для исследования поляризации сегнетоэлектриков.

Список литературы

1. Н. Д. Кузьмичев, "Поведение намагниченности поликристаллических образцов YBa2Cu3O7-x в слабых магнитных полях", *ЖТФ*, **17**:7 (1991), 56–60.

2. Н. Д. Кузьмичев, "Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников", *ЖТФ*, **64**:12 (1994), 63–74.

3. А. И. Головашкин, Н. Д. Кузьмичев, И. С. Левченко, Г. П. Мотулевич, "Нелинейные свойства магнитной восприимчивости керамик Y-Ba-Cu-O в сверхпроводящем состоянии на низких частотах", *ФТТ*, **31**:4 (1989), 233–235.

4. Н. Д. Кузьмичев, "Модуляционная методика восстановления исходных зависимостей и их производных в случае произвольных амплитуд модуляции", *ЖТФ*, **20**:22 (1994), 39–43.

5. Н. Д. Кузьмичев, "Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных", *ЖТФ*, **37**:7 (1996), 124–127.

6. Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, Д. А. Шилкин, "Экспериментальное определение производной вольтамперной характеристики нелинейной полупроводниковой структуры с помощью модуляционного Фурье-анализа", *ФТП*, **50**:6 (2016), 830–833.

7. Н. Д. Кузьмичев, "Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости", *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:2 (2011), 70–80.

8. В. Ф. Формалев, Д. Л. Ревизников, *Численные методы*, Физматлит, М., 2006, 399 с.

9. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, **2**, Наука, М., 1974, 656 с.

Поступила 31.06.2018

MSC2010 97-04; 90C99; 82D55

Differential equations for recovery of the average differential susceptibility of superconductors from measurements of the first harmonic of magnetization

© **N. D. Kuzmichev**[1], **M. A. Vasyutin**[2], **A. Yu. Shitov**[3], **I. V. Buryanov**[4]

Abstract. In the paper, inhomogeneous differential equations are obtained to reconstruct the average differential susceptibility of type-II superconductors from the in-phase (real) component of the magnetization's first harmonic in the hysteresis case. Basing on the second-order differential equation, mathematical modeling of the average differential susceptibility for the theoretical and experimental dependence of the real part of the magnetization's first harmonic is performed. The Cauchy problem was solved numerically by the Runge-Kutta method of the fourth order of accuracy. To do this, the differential equation for the restoration of the average susceptibility was reduced to a system of differential equations. On the basis of the method developed in the work, the average differential susceptibility of a disc-shaped polycrystalline superconductor $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ was reconstructed from the experimentally obtained first harmonic of magnetization in interval of magnetic fields from 0 to 800 Oe.

Key Words: inhomogeneous differential equation, Cauchy problem, Runge-Kutta method, magnetization, average differential susceptibility, high-temperature superconductor, real parts of the first harmonic of magnetization, imaginary parts of the first harmonic of magnetization.

References

1. N. D. Kuzmichev, "[Behavior of the magnetization of polycrystalline samples of YBa2Cu3O7-x in weak magnetic fields]", *JTF Publ.*, **17**:7 (1991), 56–60 (In Russ.).

2. N. D. Kuzmichev, "[Hysteresis magnetization and harmonic generation by magnetic materials: Analysis of the spectrum of harmonics of magnetization by the example of high-temperature superconductors]", *JTF Publ.*, **64**:12 (1994), 63–74 (In Russ.).

3. A. I. Golovashkin, N. D. Kuzmichev, I. C. Levchenko, G. P. Motulevich, V. V. Slavkin, "[Nonlinear properties of the magnetic susceptibility of Y-Ba-Cu-O ceramics in the superconducting state at low frequencies]", *FTT Publ.*, **31**:4 (1989), 233–235 (In Russ.).

4. N. D. Kuzmichev, "[Modulation technique for reconstructing the original dependencies and their derivatives in the case of arbitrary modulation amplitudes.]", *JTF Publ.*, **20**:22 (1994), 39–43 (In Russ.).

5. N. D. Kuzmichev, "[Estimates of errors of modulation recovery of the response function and its derivatives]", *JTF Publ.*, **37**:7 (1996), 124–127 (In Russ.).

[1] **Nikolay D. Kuzmichev**, Professor, Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0001-6707-4950, kuzmichevnd@yandex.ru

[2] **Mikhael A. Vasyutin**, Docent, Department of Computer Science and CAD-technology, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-4856-7407, vasyutinm@mail.ru

[3] **Almir Yu. Shitov**, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0002-2029-8479, shishkin92@mail.ru

[4] **Igor V. Buryanov**, Postgraduate Student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68/1 Bolshevistskaya St., Saransk 430005, Russia), ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1033-0487, i.v.buryanov@gmail.com

6. N. D. Kuzmichev, M. A. Vasyutin, D. A. Shilkin, “[Experimental determination of the derivative of the current-voltage characteristic of a nonlinear semiconductor structure by means of the Fourier modulation analysis]”, *FTP Publ.*, **50**:6 (2016), 830–833 (In Russ.).

7. N. D. Kuzmichev, “[Application of the Taylor-Fourier series for the numerical and experimental determination of the derivatives of the studied dependence]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **13**:2 (2011), 70–80 (In Russ.).

8. V. F. Formalev, D. L. Reviznikov, *[Numerical methods]*, Fizmatlit, M., 2006 (In Russ.), 399 p.

9. V. I. Smirnov, *[The course of higher mathematics]*, **2**, Nauka, M., 1974 (In Russ.), 656 p.

Submitted 31.06.2018

Математическая жизнь

Вельмисов Петр Александрович (к 70-летию со дня рождения)

Вельмисов Петр Александрович родился в 1948 г. в селе Малое Перекопное Балаковского р-на Саратовской обл-ти. В 1966 г. окончил с золотой медалью Березовскую среднюю школу (Пугачёвский район Саратовской области), а в 1971 г. – механико-математический факультет Саратовского государственного университета (с отличием). С 1971 по 1974 гг. обучался в аспирантуре при кафедре теоретической механики и аэрогидромеханики этого университета; по окончании защитил диссертацию кандидата физико-математических наук.

Вся научно-педагогическая деятельность П. А. Вельмисова прошла в Ульяновском государственном техническом университете (до 1994 года – Ульяновский политехнический институт) и на данный момент составляет более 43 лет.

С 1974 по 1980 гг. П. А. Вельмисов работал на кафедре «Теоретическая механика» Ульяновского политехнического института ассистентом, старшим преподавателем, затем доцентом. В 1980 г. ему было присвоено ученое звание доцента. В этом же году П. А. Вельмисов был избран на должность заведующего кафедрой «Высшая математика» Ульяновского государственного технического университета, которой руководит до настоящего времени. В 2000 г. ему была присвоена ученая степень доктора физико-математических наук, а в 2004 г. – ученое звание профессора.

П. А. Вельмисов является автором (соавтором) более 700 работ, из них 12 монографий, 8 авторских свидетельств и патентов, 52 учебных и учебно-методических пособий. Более 35 лет Вельмисов успешно руководит научными исследованиями в области математического моделирования нелинейных систем и процессов в механике, в т. ч. в аэрогидромеханике и механике аэроупругих систем. Под его руководством защищено 8 кандидатских диссертаций; в настоящее время является руководителем 4 аспирантов и научным консультантом докторанта. Является ответственным редактором сборников научных трудов «Прикладная математика и механика», «Математические методы и модели: теория, приложения и роль в образовании», а также членом редколлегий других сборников и журналов, в том числе научных журналов «Журнал Средневолжского математического общества», «Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки», входящих в перечень ВАК. Является руководителем научного направления «Исследования по дифференциальным уравнениям и приложения в механике, технике и естествознании» в УлГТУ. Под его руководством выполняются научные проекты по грантам и научно-техническим программам (федеральным, Минобрнауки, РФФИ).

Регулярно участвует в организации и проведении конференций различного ранга в качестве члена организационных или программных комитетов (около 50). Обладатель грантов различных фондов и оргкомитетов для участия в зарубежных конференциях (Болгария, Румыния, Польша, Дания, Германия, Турция, Китай, Армения); участник работы зарубежных и российских математических обществ: «Gesellschaft fur angewandte mathematic und mechanic» (Германия), «Средне-Волжское математическое общество» (Россия). Также является действительным членом общественных академий – Российской академии естественных наук (2002 г.) и Российской академии естествознания (2013 г.), референтом научных журналов «Mathematical Reviews» (США), «Zentralblatt fur Mathematic» (Германия).

Отделом образования и науки Европейской научно-промышленной палаты награжден медалью за педагогическую деятельность и проведение оригинальных исследований в области математической физики и приложений в механике, технике, естествознании (2012 г.). Награжден медалью им. В. И. Вернадского и серебряной медалью Российской академии естественных наук за научные достижения в области ноосферных технологий (2000, 2005 гг.).

П. А. Вельмисов проводит активную учебную и научно-методическую работу, читает лекции по классическим и специальным курсам математики и механики для студентов, магистров, аспирантов. Является членом Научно-методического совета по математике Минобрнауки РФ, членом Ученого и Научно-методического советов УлГТУ, членом Ученого совета инженерно-экономического факультета УлГТУ. В учебном процессе широко используются учебные пособия, разработанные П. А. Вельмисовым с коллегами, базирующиеся на современных информационных и педагогических технологиях, в том числе электронных обучающих системах по математике. Часть из них имеют гриф Научно-методического совета по математике Минобрнауки РФ и являются лауреатами различных конкурсов.

П. А. Вельмисов принимает активное участие в организации взаимодействия УлГТУ с лицеями, в работе курсов повышения квалификации учителей математики школ г. Ульяновска и Ульяновской обл-ти «Современные технологии проектирования и организации учебного процесса на основе управления индивидуальным прогрессом учащихся в соответствии с требованиями ФГОС общего образования». Постоянно участвует в работе ГЭК в качестве председателя в других вузах, – в частности, на факультете математики и информационных технологий МГУ им. Н. П. Огарёва П. А. Вельмисов является председателем с 2012 г.

Необходимо особо отметить активную роль П. А. Вельмисова в организации научных школ-семинаров и конференций, проводимых Средне-Волжским математическим обществом и МГУ им. Н. П. Огарёва. Начиная с 1994 г. он вместе с учениками является постоянным участником и членом организационных комитетов этих научных мероприятий, направляя усилия на консолидацию математиков и специалистов других областей, развитие отечественной науки.

В 2017 г. при активном участии П. А. Вельмисова между МГУ им. Н. П. Огарёва и УлГТУ был заключен договор о сотрудничестве в сфере науки и образования. За прошедший год им было опубликовано несколько работ в соавторстве с учеными МГУ им. Н. П. Огарёва, поданы заявки на гранты.

За разработку и внедрение научно-методического комплекса организационных и научно-практических мероприятий, обеспечивающих повышение качества математического образования студентов инженерно-технических направлений и специальностей П. А. Вельмисову с группой коллег в 2012 г. была присуждена премия Правительства Российской Федерации в области образования.

За заслуги в области образования П. А. Вельмисов в 2005 г. был награжден знаком Минобрнауки России «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации».

В 2009 г. за большой вклад в развитие образования Ульяновской обл-ти и многолетний добросовестный труд ему было присвоено почетное звание «Заслуженный работник образования Ульяновской области».

Многолетний труд П. А. Вельмисова в области науки и образования был также отмечен знаками Министерства образования «Победитель социалистического соревнования 1978 г.» (1979 г.), знаком «Изобретатель СССР» (1990 г.), почетной грамотой и благодарственным письмом губернатора Ульяновской области (2007, 2011 гг.) и мэрии г. Ульяновска (2002 г.), почетным знаком «Ветеран УлГТУ» (2007 г.), медалью Межотраслевого объединенного комитета по наградам «За заслуги в сфере образования» (2017 г.).

Поздравляем Петра Александровича Вельмисова с 70-летием! Желаем ему крепкого здоровья, научной и творческой активности и долголетия!

А. С. Андреев, А. В. Анкилов, Т. Е. Бадокина, Д. И. Бояркин,

И. В. Бойков, Д. К. Егорова, В. З. Гринес, С. А. Гришина,

В. К. Горбунов, Ю. Н. Дерюгин, Е.В. Десяев, Р. В. Жалнин,

И. В. Коноплева, Л. Р. Ким-Тян, В. Н. Кризский, С.И. Мартынов,

Т. Ф. Мамедова, С. М. Мурюмин, Е. Е. Пескова, Ю. В. Покладова,

О. В. Починка, В. П. Радченко, И. П. Рязанцева, С.И. Спивак,

Л. А. Сухарев, А. О. Сыромясов, В. Ф. Тишкин, И. И. Чучаев,

П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева, Н. Г. Ярушкина, Anca Veronica Ion

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском языке, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

– коды УДК и MSC 2010;

– название статьи;

– информация о каждом из авторов: ФИО - полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;

– аннотация;

– ключевые слова;

– текст статьи (только на русском);

– список литературы.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– не включать несущественные детали;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными"(написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

Текст статьи. При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

— введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

— материалы и методы решения задачи и принятые допущения;

— результаты - основное содержание статьи;

— обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;

— заключение — выводы и рекомендации.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Статьи в журнале на русском языке:

– Автор(ы) (транслитерация);

– Перевод заглавия статьи на английский язык;

– Название русскоязычного источника (транслитерация);

– [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];

– Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);

– Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

– Автор(ы) (транслитерация);

– название книги (транслитерация);

– [Перевод названия книги в квадратных скобках];

– Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;

– Количество страниц в издании (250 p.);

– Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmobib.sty.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте *http://translit.net/ru/bgn/* можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ***ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка****, располагаться за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru.* ***ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка*** *можно скачать из раздела* ***Полезные материалы*** *меню* ***Для автора*** *на сайте журнала.*

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTex**.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.

Статьи в журналах на русском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, “[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]”, Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке:

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Статьи в сборниках на русском языке:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UlGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Материалы конференций на русском языке:

A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand], Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm"imeni E.V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E.V. Voskresensky with international participation] (Saransk, 12-15 July 2016), SVMO Publ., 105-107 (In Russ.)

P.A. Shamanaev, A.A. Kyashkin, B.V. Loginov, [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative], Tezisy dokladov “Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam” [Proceeding of the “International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems”] (Saransk, 12-15 July 2016), 231-233 (In Russ.).

Диссертации на русском языке:

P. A. Shamanaev, Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost’ dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.

Правила верстки рукописей в системе LaTex

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – *http://www.miktex.org.*

Для верстки рукописи используются два файла: файл-преамбула и файл-шаблон. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: *http://www.journal.svmo.ru/page/rules.*

Текст статьи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <Фамилия-ИО>.tex (который включается командой **\input** в файл-преамбулу). Например, **\input{shamanaev.tex}**

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Для оформления заголовков статьи на русском и английском языках следует использовать команды **\headerRus** и **\headerEn**, соответственно.

Команда **\headerRus** имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда **\headerEn** имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова}

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **\sect** с одним параметром: **\sect{Заголовок}**

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды **\R**, **\Rn**, **\C**, **\Z**, **\N** и т. д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды **\phi**, **\epsilon** соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами **\px{i}** и **\pxtog{u}{i}**.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды **\textrm**, **\textit**. Например, для вставок формул Γ_i, $\textit{Д}_i$ в текст статьи необходимо набрать команды **\textrm{Г}_i**, **\textit{Д}_i**.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

\RBibitem{метка для ссылки на источник},

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

\Bibitem{метка для ссылки на источник}.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету svmobib.sty. Основой этого пакета является стилевой файл amsbib.sty. Более подробно эти команды описаны в инструкции amsbib.pdf.

Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду **\cite** или **\pgcite** (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных бибилиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных бибилиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References* с помощью команд из стилевого пакета svmobib.sty

Статьи в журналах на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib1}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib2}
\by P. A. Shamanaev
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2016
\vol 18
\issue 3
\pages 61–69
\lang In Russ.

Статьи в журналах на английском языке:

\Bibitem{shamanaevBib3}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512

Статьи в электронном журнале на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib4}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii

Статьи в сборниках на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib5}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\serial 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib6}
\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy
\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]
\publaddr Moscow
\publ Nauka Publ.
\yr 1966
\totalpages 576
\lang In Russ.

Материалы конференций на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib7}
\by A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev
\inbook [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand]
\proc Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm"imeni E.V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes"named after E.V. Voskresensky with international participation]
\procinfo Saransk, 12-15 July 2016
\publ SVMO Publ.
\pages 105–107
\lang In Russ.

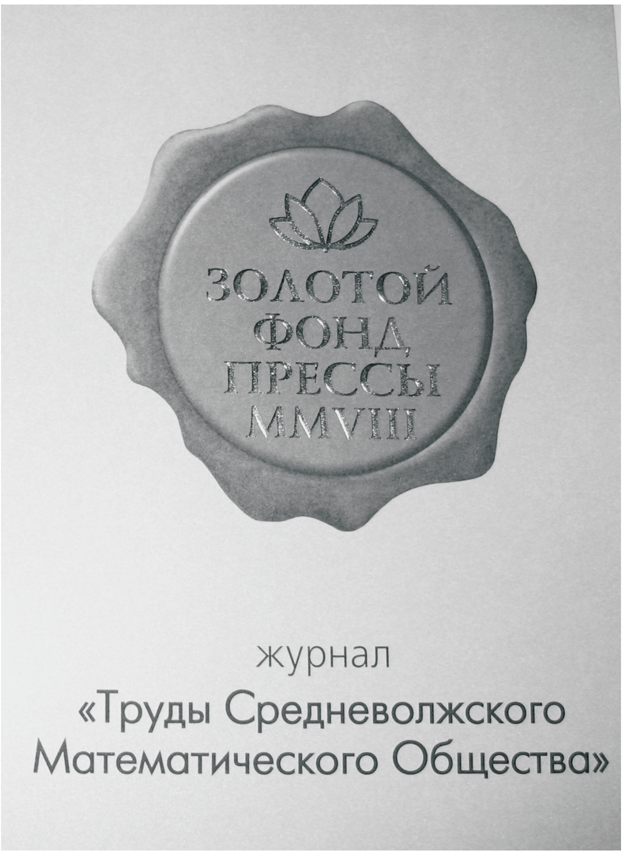
\Bibitem{shamanaevBib8}
\by P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov
\inbook [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative]
\proc Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam"[Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"]
\procinfo Suzdal, 8-12 July 2016
\pages 231–233
\lang In Russ.

Диссертации на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib9}
\by P. A. Shamanaev
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]
\thesisinfo Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]
\publaddr Saransk
\yr 1997
\totalpages 145
\lang In Russ.

Алфавитный указатель

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.
Корректура: Пудовкина Л. А., Язовцева О. С.
Перевод: Сыромясов А. О.

Дата выхода в свет 30.09.2018. Цена свободная.

Подписано в печать 06.09.2018. Формат 70x108 $\frac{1}{16}$. Объем 9,1 усл. печ.л.
Тираж 100 экз. Заказ № 1496.
Типография Издательства Мордовского университета
430005, г. Саранск, ул. Советская, 24

CBMO