

ISSN 2079 – 6900 (Print)

ISSN 2587 – 7496 (Online)

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  20  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  2

2018



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

DOI 10.15507/2079-6900

## Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 20, № 2. 2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201802

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: ежеквартально

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

ISSN 2079-6900 (Print)

ISSN 2587-7496 (Online)

DOI 10.15507/2079-6900

# **Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva**

**Middle Volga Mathematical Society Journal**

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 20, NO. 2. 2018

DOI 10.15507/2079-6900.20.201802

Published since December 1998

Issued quarterly

# Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика, 01.02.00 Механика, 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управление.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Статьи, опубликованные в журнале, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (согласно заключению президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских учёных – Российский индекс научного цитирования (РИНЦ).

Подписка на журнал осуществляется в любом отделении почтовой связи на территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединённом каталоге «Пресса России» — 94016.

Материалы журнала «Журнал Средневолжского математического общества» доступны по лицензии Creative Commons «Attribution» («Атрибуция») 4.0 Всемирная.

**УЧРЕДИТЕЛИ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68).

**ИЗДАТЕЛЬ:** федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68)

**РЕДАКЦИЯ:** межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, Россия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), тел.: 8(8342)270-256, e-mail: [journal@svmo.ru](mailto:journal@svmo.ru), web: <http://journal.svmo.ru>

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal "Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva" publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- "Mathematics",
- "Applied Mathematics and Mechanics",
- "Mathematical modeling and computer science".

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics, 01.02.00 Mechanics, 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations (RISC).

One can subscript to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

All the materials of the journal «Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva» are available under Creative Commons «Attribution» 4.0 license.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, Web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе ИПМ им. М. В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (Саранск, Россия)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малазийского института стратегических и международных исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

**Ахтямов Азамат Мухтарович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Петр Александрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Дерюгин Юрий Николаевич** — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института теоретической и математической физики РЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГАОУ ВО «Казанский федеральный университет» (Казань, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, генеральный директор Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики ФГБОУ ВО «Санкт-Петербургский государственный университет» (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений ФГБОУ ВО «Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)» (Москва, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Логинов Борис Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — профессор, доктор физико-математических наук, директор Политехнического института ФГБОУ ВО «Югорский государственный университет» (Ханты-Мансийск, Россия)

**Матус Петр Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета имени Иоанна Павла II (Люблин, Польша)

**Починка Ольга Витальевна** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики ФГБОУ ВО «Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО «Самарский государственный технический университет» (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им Р. Е. Алексеева» (Нижний Новгород, Россия)

**Салахитдинов Махмуд Салахитдинович** — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Спивак Семен Израилевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Терехин Михаил Тихонович** — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина» (Рязань, Россия)

**Ион Анка Вероника** — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Морозкин Николай Данилович** — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Сенин Петр Васильевич** — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева» (Саранск, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарева», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — профессор, доктор технических наук, первый проректор — проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)



## EDITORIAL BOARD

**Vladimir F. Tishkin** — Editor in Chief, Corresponding Member of RAS, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Nikolay D. Kuzmichev** — Deputy Editor, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Pavel A. Shamanaev** — Executive Secretary, Associate Professor, Ph.D. (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Aleksandr S. Andreev** — Full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Shavkat A. Alimov** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

**Azamat M. Akhtyamov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Shavkat A. Ayupov** — the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Ilya V. Boykov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Higher and Applied Mathematics, Penza State University (Penza, Russia)

**Petr A. Velmisov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Vladimir K. Gorbunov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and Mathematical Methods and Information Technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Vyacheslav Z. Grines** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Yuriy N. Derugin** — Senior Researcher, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Scientist of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Aleksey P. Zhabko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Valentin I. Zhegalov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Kazan Federal University (Kazan, Russia)

**Tynysbek Sh. Kalmenov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Director, Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

**Aleksandr M. Kamachkin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Evgeny B. Kuznetsov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Vladimir N. Krizskii** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation, Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Boris V. Loginov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Sergey I. Martynov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Director of Polytechnic Institute, Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

**Petr P. Matus** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Olga V. Pochinka** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics, Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Vladimir P. Radchenko** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Applied Mathematics and Informatics, Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Irina P. Ryazantseva** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University named for R. E. Alekseev (Nizhny Novgorod, Russia)

**Mahmud S. Salahitdinov** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), the Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, of Uzbekistan)

**Semen I. Spivak** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Mikhail T. Terekhin** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

**Anca V. Ion** — Ph.D. in Mathematics, Senior Researcher III, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics, Romanian Academy (Buharest, Romania)

## EDITORIAL COUNCIL

**Morozkin Nikolay Danilovich** — Full Professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), Rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Senin Petr Vasilievich** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), Vice-Rector for Science and Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Suharev Lev Alexandrovich** — Ph.D. (Phys.-Math.), Head of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Yarushkina Nadezda Glebovna** — Full Professor, Dr.Sci. (Engineering), First Vice-Rector – Vice-Rector for Science of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

**С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова**

О локальной разрешимости некоторого класса дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка . . . . . 132

---

**А. М. Ахтямов, И. М. Утяшев**

Восстановление полиномиального потенциала в задаче Штурма–Лиувилля . . . . . 148

---

**В. З. Гринес Е. Д. Куренков**

Представление просторно расположенных совершенных аттракторов диффеоморфизмов геодезическими ламинациями . . . . . 159

---

**У. П. Зараник, С. Е. Купцова, Н. А. Степенко**

Достаточные условия существования асимптотического положения покоя в системах с запаздыванием . . . . . 175

---

**А. О. Казаков, А. Д. Козлов**

Несимметричный аттрактор Лоренца как пример нового псевдогиперболического аттрактора в трехмерных системах . . . . . 187

---

**Д. В. Сироткин**

О сложности построения 3-раскраски планарных графов с короткими гранями . . . . . 199

---

**Г. А. Смолкин**

Об одной оценке в пространстве Соболева, порождаемой вырождающимся эллиптическим оператором второго порядка, определённой в полуплоскости . . . . . 206

---

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

**Д. В. Баландин, Е. Н. Ежов, И. А. Федотов**

Двухкритериальные задачи оптимальной виброзащиты упругих  
конструкций . . . . . 215

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

---

**Д. А. Куликов**

Устойчивость и локальные бифуркации в модели Солоу с запаз-  
дыванием . . . . . 225

---

# Contents

---

## MATHEMATICS

---

**S. N. Alekseenko**, **L. E. Platonova**

On local resolvability of a certain class of the first-order partial differential equations . . . . . 132

---

**A. M. Akhtyamov**, **I.M. Utyashev**

Reconstruction of the polynomial potential in the Sturm-Liouville problem . . . . . 148

---

**V. Z. Grines**, **E. D. Kurenkov**

Representation of sparsely situated perfect attractors of diffeomorphisms by geodesic laminations . . . . . 159

---

**U. P. Zaranik**, **C. E. Купцова**, **Н. А. Степенко**

Sufficient conditions for the existence of an asymptotic quiescent position in time-delay systems. . . . . 175

---

**A. O. Kazakov**, **A. D. Kozlov**

The asymmetric Lorenz attractor as an example of a new pseudohyperbolic attractor of three-dimensional systems . . . . . 187

---

**D. V. Sirotkin**

On the complexity of constructing a 3-colouring for planar graphs with short facets . . . . . 199

---

**G. A. Smolkin**

On an estimate in the Sobolev space generated by the second order degenerate elliptic operator defined in the half-plane . . . . . 206

---

## APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

**D. V. Balandin**, **E. N. Ezhov**, **I. A. Fedotov**

Two-criteria problems for optimal protection of elastic constructions . 215

---

## MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

**D. A. Kulikov**

On the question of expediency of taking into account the delay factor in the Solow model . . . . . 225

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.20.201802.132-147

УДК 517.9

# О локальной разрешимости некоторого класса дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

© С. Н. Алексеенко<sup>1</sup>, Л. Е. Платонова<sup>2</sup>

**Аннотация.** Исследовано квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка общего вида с различными начальными условиями: в первом случае линия, несущая начальные данные, задается параметрически; во втором случае линия, несущая начальные данные, задается в декартовых координатах и имеет бесконечную длину; в третьем случае линия, несущая начальные данные, задается в декартовых координатах и имеет ограниченную длину. В каждом из случаев для рассматриваемого квазилинейного уравнения сформулированы условия локальной разрешимости и показано, что решение имеет ту же гладкость, что и функция, задающая начальные условия. Для исследования вышеперечисленных задач использовался метод дополнительного аргумента. В рамках этого метода решается некоторая система интегральных уравнений, решение которой дает решение задачи Коши для исходного уравнения.

**Ключевые слова:** квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента, локальная разрешимость, интегральное уравнение.

## 1. Введение

Основным объектом исследования в данной работе является квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка:

$$a_1(x_1, x_2, z)\partial_1 z + a_2(x_1, x_2, z)\partial_2 z = f(x_1, x_2, z), \quad (1.1)$$

где  $\partial_i z = \frac{\partial z}{\partial x_i}$ ,  $i = 1, 2$ ;  $a_1(x_1, x_2, z), a_2(x_1, x_2, z), f(x_1, x_2, z)$  — непрерывно дифференцируемые функции в множестве  $Q_T$ , которая будет определена ниже.

В работах [1]–[2] решается задача Коши с начальным условием

$$z(x_1, x_2)|_L = \gamma(\tau), \quad (1.2)$$

где кривая  $L$ , несущая начальные данные, задается параметрически уравнениями  $x_1 = \alpha_1(\tau)$ ,  $x_2 = \alpha_2(\tau)$ ,  $0 \leq \tau \leq T$ . Предполагается, что функции

<sup>1</sup> **Алексеенко Сергей Николаевич**, профессор кафедры прикладной математики, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, д. 24), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1455-1263>, [sn-alekseenko@yandex.ru](mailto:sn-alekseenko@yandex.ru)

<sup>2</sup> **Платонова Любовь Евгеньевна**, старший преподаватель кафедры математики и математического образования, ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный педагогический университет имени К. Минина» (604950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Ульянова, д. 1), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-3601-2276>, [fluff13@yandex.ru](mailto:fluff13@yandex.ru)

$\alpha_1(\tau)$ ,  $\alpha_2(\tau)$ ,  $\gamma(\tau)$  являются дважды непрерывно дифференцируемыми на  $[0; T]$ . В этих работах рассмотрен случай, когда кривая  $L$  и множество, на котором определено решение  $z(x_1, x_2)$ , содержатся в ограниченном множестве  $\Omega_T = \{(x_1, x_2) : \min_{\tau \in [0; T]} (\alpha_i(\tau) - \alpha_{i0}) \leq x_i \leq \max_{\tau \in [0; T]} (\alpha_i(\tau) + \alpha_{i0}), i = 1, 2\}$ ,  $\alpha_{10}, \alpha_{20} \in \mathbb{R}$ .

В работах [1]–[2] предполагалось, что известные функции уравнения (1.1) определены на множестве  $Q_{TK} = \{\Omega_T \times [-K_z; K_z]\}$ , где величина  $K_z$  может быть сколь угодно велика. Однако поскольку целью работы являлось доказательство существования ограниченного решения задачи (1.1)–(1.2), определенного в некоторой окрестности кривой  $L$ , то на множество значений неизвестной функции накладывалось ограничение  $|z| \leq K_U$ , где  $K_U$  могла быть произвольным, но должно соблюдаться условие  $K_U \leq K_z$ . В зависимости от величины  $K_U$  определяется также множество существования решения. Важно, что для конечного положительного числа  $K_U$  определяется ограниченное непустое множество существования решения. В нижеследующих выкладках и оценках все используемые константы вычисляются в предположении, что известные функции уравнения (1.1) определены на множестве  $Q_T = \{\Omega_T \times [-K_U; K_U]\}$ .

В данной работе наряду с поиском неизвестной функции  $z(x_1, x_2)$  исследуется вопрос о множестве, на котором определено решение. При этом постоянные  $\alpha_{10}$ ,  $\alpha_{20}$  должны быть достаточно велики, чтобы искомое множество, на котором определено решение  $z(x_1, x_2)$ , входило в  $\Omega_T$ . Обозначим это заранее неизвестное множество через  $Q_\varepsilon$ . Поскольку речь идет о локальной разрешимости, то множество  $Q_\varepsilon$  представляет собой некоторую окрестность кривой  $L$ .

Сформулируем условия для  $L$ , при выполнении которых справедливы приведенные в статье утверждения.

Предположим, что в  $\Omega_T$  существует окрестность  $D$  кривой  $L$  и постоянное во всем множестве  $D$  направление  $\vec{\lambda}$  такие, что каждая прямая, проходящая через внутреннюю точку множества  $D$  параллельно  $\vec{\lambda}$ , пересекает  $L$  лишь в одной точке. Таким образом каждой точке из  $D$  поставлена в соответствие ее проекция на  $L$  по направлению  $\vec{\lambda}$ . Поскольку каждой точке на  $L$  соответствует определенное значение  $\tau$ , то каждой точке  $(x_1, x_2) \in D$  соответствует определенное значение параметра на кривой при проектировании в направлении  $\vec{\lambda}$ . Предположим, что это соответствие задано в виде функции  $\theta(x_1; x_2) = \tau$ . Всем точкам  $(x_1, x_2)$ , лежащим на одной прямой, которая проходит через  $D$  в направлении  $\vec{\lambda}$ , соответствует одно значение  $\tau$ . По существу предполагается соответствие между множеством таких прямых и множеством  $\tau \in [0, T]$ . Для целей настоящего исследования достаточно иметь функцию  $\theta(x_1; x_2) = \tau$ . Будем называть кривую, описываемую данной функцией, однонаправленно регулярной. Обозначим через  $\cos \varphi_1$ ,  $\cos \varphi_2$  направляющие косинусы  $\vec{\lambda}$ ; не нарушая общности, можно считать, что эти косинусы положительны. Множество  $\Omega_\varepsilon$ , на котором определено решение, будем искать в виде полосы шириной  $\varepsilon$  в направлении  $\vec{\lambda}$ , прилегающей к  $L$  с одной стороны, точнее  $\Omega_\varepsilon = \{(x_1; x_2) : \alpha_i(\tau) \leq x_i \leq \alpha_i(\tau) + \varepsilon \cos \varphi_i, i = 1, 2, 0 \leq \tau \leq T\}$ ,  $\Omega_\varepsilon \subset D \subset \Omega_T$ . Параметр  $\varepsilon$  подлежит определению, а ограничение на величину  $\varepsilon$  является одним из основных условий разрешимости задачи (1.1)–(1.2).

## 2. Обзор результатов

В рамках метода дополнительного аргумента (МДА) [3] запишем для задачи Коши (1.2) расширенную характеристическую систему:

$$\begin{cases} \frac{d\eta_1}{ds} = a_1(\eta_1, \eta_2, u), \\ \frac{d\eta_2}{ds} = a_2(\eta_1, \eta_2, u), \\ \frac{du}{ds} = f(\eta_1, \eta_2, u) \end{cases} \quad (2.1)$$

с начальными данными

$$\eta_1|_{s=\omega(x_1, x_2)} = x_1, \eta_2|_{s=\omega(x_1, x_2)} = x_2, u|_L = \gamma(\tau). \quad (2.2)$$

Здесь  $\omega(x_1, x_2)$ ,  $\eta_1(s, x_1, x_2)$ ,  $\eta_2(s, x_1, x_2)$ ,  $u(s, x_1, x_2)$  — новые неизвестные функции, непрерывно дифференцируемые по всем переменным;  $s$  — дополнительный аргумент,  $0 \leq s \leq \omega(x_1, x_2)$ .

Значение  $\omega$  на кривой, заданной уравнениями  $x_1 = \alpha_1(\tau)$ ,  $x_2 = \alpha_2(\tau)$ , полагаем равной нулю, т. е.  $\omega(\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau)) = 0$ . Для получения решения в исходных координатах решения системы уравнений (2.1) должны быть представимы в виде:

$$\eta_i = x_i - \int_s^{\omega(x_1, x_2)} a_i(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), u(\delta, x_1, x_2)) d\delta, \quad i = 1, 2. \quad (2.3)$$

Представление (2.3) оправдано, если можно определить новую, заранее неизвестную функцию  $\theta(x_1, x_2)$ , для которой в некотором множестве изменения ее аргументов были бы справедливы соотношения:

$$\alpha_i(\theta(x_1, x_2)) = x_i - \int_0^{\omega(x_1, x_2)} a_i(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), u(\delta, x_1, x_2)) d\delta, \quad i = 1, 2. \quad (2.4)$$

Из равенств (2.1)–(2.2) при допустимости (2.3) получим:

$$u(s, x_1, x_2) = \gamma(\theta(x_1, x_2)) + \int_0^s f(\eta_1(\delta, x_1, x_2), \eta_2(\delta, x_1, x_2), u(\delta, x_1, x_2)) d\delta. \quad (2.5)$$

**Л е м м а 2.1** *Непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений (2.2)–(2.3), (2.5) дает решение задачи Коши (1.1)–(1.2).*

При доказательстве леммы в работе [1] было установлено, что

$$J = \begin{vmatrix} \alpha'_1 & a_1 \\ \alpha'_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.6)$$

В работе [1] для задачи Коши (1.1)–(1.2) с помощью МДА [3]–[10] была разработана схема, позволяющая свести вопрос о разрешимости задачи (1.1)–(1.2) в исходных координатах к определению интервала разрешимости системы из 15 интегральных уравнений, которая была названа резольвентной [2]. Поскольку при доказательстве существования решения системы интегральных уравнений производные рассматриваются как новые неизвестные функции, введем соответствующие обозначения:

$$u(s, x_1, x_2) = U(s, x_1, x_2), \omega = W_1, \theta = W_2, \theta_{xi} = W_{2i}, u_{xi} = U_i,$$



$$(\alpha_{1\psi}; \alpha_{2\psi}) = (\alpha_1(\psi(x_1; x_2)); \alpha_2(\psi(x_1; x_2))), \omega_{xi} = W_{1i}, \eta_i = H_i, \eta_{ij} = H_{ij}, (i, j = 1, 2).$$

Тогда запишем основную резольвентную систему запишется следующим образом:

$$U = \gamma(W_2) + \int_0^s f(H_1, H_2, U) d\delta, \quad (2.7)$$

$$U_i = \gamma'(W_2) W_{2i} + \int_0^s (f_1 H_{1i} + f_2 H_{2i} + f_U U_i) d\delta, \quad (2.8)$$

$$H_i = x_i - \int_s^{W_1} a_i(H_1, H_2, U) d\delta, \quad (2.9)$$

$$H_{lk} = \delta_k^l - a_l W_{1k} - \int_s^{W_1} (a_{l1} H_{1k} + a_{l2} H_{2k} + a_{lU} U_k) d\delta, \quad (2.10)$$

$$W_i = \begin{cases} \int_{(x_1; x_2)}^{(\alpha_{1\psi}; \alpha_{2\psi})} (W_{11} \cos \varphi_1 + W_{12} \cos \varphi_2) dl, i = 1, \\ \int_{(x_1; x_2)}^{(\alpha_{1\psi}; \alpha_{2\psi})} (W_{21} \cos \varphi_1 + W_{22} \cos \varphi_2) dl + \Psi(x_1; x_2), i = 2, \end{cases} \quad (2.11)$$

$$W_{1k} = J^{-1} \left( (-1)^k \alpha'_{3-k} + \int_0^{W_1} \left( \alpha'_2 \left( \sum_{i=1}^2 a_{1i} H_{ik} + a_{1U} U_k \right) - \alpha'_1 \left( \sum_{i=1}^2 a_{2i} H_{ik} + a_{2U} U_k \right) \right) d\delta \right), \quad (2.12)$$

$$W_{2l} = J^{-1} \left( (-1)^{l+1} \alpha'_{3-l} + \int_0^{W_1} \left( a_1 \left( \sum_{i=1}^2 a_{2i} H_{il} + a_{2U} U_l \right) - a_2 \left( \sum_{i=1}^2 a_{1i} H_{il} + a_{1U} U_l \right) \right) d\delta \right), \quad (2.13)$$

где  $i, j, k = 1, 2$ ,  $\delta_k^l$  – символ Кронекера-Капелли. В системе (2.7)–(2.13) определены новые неизвестные функции  $U(s, x_1, x_2)$ ,  $U_1(s, x_1, x_2)$ ,  $U_2(s, x_1, x_2)$ ,  $H_1(s, x_1, x_2)$ ,  $H_2(s, x_1, x_2)$ ,  $H_{11}(s, x_1, x_2)$ ,  $H_{12}(s, x_1, x_2)$ ,  $H_{21}(s, x_1, x_2)$ ,  $H_{22}(s, x_1, x_2)$ ,  $W_1(x_1, x_2)$ ,  $W_{11}(x_1, x_2)$ ,  $W_{12}(x_1, x_2)$ ,  $W_2(x_1, x_2)$ ,  $W_{21}(x_1, x_2)$ ,  $W_{22}(x_1, x_2)$ . Аргументы данных функций в системе (2.7)–(2.13) для краткости не записаны.

$$\begin{aligned} \text{Пусть } \varepsilon_0 &= \min \left( \frac{9}{10(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2)}; \frac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \frac{10\zeta_1 - K_{\gamma'}\sigma_3}{\zeta_1 + 100\zeta_1^2\zeta_2 + 10\zeta_1\zeta_3}; \frac{10\zeta_1 - K_{\gamma'}\sigma_4}{\zeta_1 + 100\zeta_1^2\zeta_2 + 10\zeta_1\zeta_4} \right), \\ \zeta_1 &= K_0(K_{\alpha'_2} + K_{\alpha'_1}) + K_0(K_{a_1} + K_{a_2})(K_{\alpha'_1} + K_{\alpha'_2} + K_{\gamma'}) + 2 + X_1 + X_2 + N_\gamma, \\ \sigma_1 &= K_0(M_{a_1}K_{\alpha'_2} + M_{a_2}K_{\alpha'_1})(K_{a_1} + K_{a_2} + 1) + K_{\gamma'}K_0(M_{a_2}K_{a_1} + M_{a_1}K_{a_2}) + M_{a_1} + M_{a_2} + \\ &\quad + M_f, \sigma_2 = K_{a_1} + K_{a_2} + K_f, \sigma_3 = K_{\Psi} + K_{\tilde{\Psi}} + K_{\Psi_1}, \sigma_4 = K_{\Psi} + K_{\tilde{\Psi}} + K_{\Psi_2}, \\ \xi_1 &= (K_{a_1} + K_{a_2})(c_1 + c_2) + K_{\gamma'}(c_3 + c_4), \xi_2 = M_{a_1} + M_{a_2} + M_f, \xi_3 = K_{a_{11}} + K_{a_{21}} + K_{f1}, \\ \xi_4 &= K_{a_{12}} + K_{a_{22}} + K_{f2}, J = \alpha'_1 a_2 - \alpha'_2 a_1, K_J = K_0^{-1}, \end{aligned}$$

где константы определены как максимумы известных функций и их производных.

Справедливо утверждение (см. [1]–[2]).

**Т е о р е м а 2.1** Пусть  $a_1(x_1, x_2, z)$ ,  $a_2(x_1, x_2, z)$ ,  $f(x_1, x_2, z)$  – непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам в множестве  $Q_T; L$  – однонаправленная регулярная кривая;  $\alpha_1(\tau), \alpha_2(\tau), \gamma(\tau) \in C^2([0; T])$ ; выполнено основное условие разрешимости  $|J| \geq K_J = \text{const} > 0$ . Тогда при  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$  задача Коши (1.1)–(1.2) имеет единственное решение  $z \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ , которое при  $s = W_1$  совпадает с функцией  $U(s, x_1, x_2) = U(s, x_1, x_2)$ , определяемой из резольвентной системы (2.7)–(2.13).

В работах [11]–[12] задача Коши ставится следующим образом:

$$z|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in (-\infty; +\infty). \quad (2.14)$$

Кривая  $L$  задается уравнением  $x_2 = \varphi(x_1)$ ,  $-\infty < x_1 < +\infty$  и множество, на котором определено решение  $z(x_1, x_2)$ , содержится во множестве  $\Omega_\beta = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \min_{(-\infty; +\infty)}(\varphi(x_1) - \beta_0) \leq x_2 \leq \max_{(-\infty; +\infty)}(\varphi(x_1) + \beta_0)\}, \beta_0 \in \mathbb{R}$ .

В нижеследующих выкладках и оценках все используемые константы вычисляются в предположении, что известные функции  $a_1(x_1, x_2, z)$ ,  $a_2(x_1, x_2, z)$ ,  $f(x_1, x_2, z)$  определены в множестве  $Q_\rho = \Omega_\beta \times [-\rho N_\gamma; \rho N_\gamma]$ , где  $\rho$  – некоторое положительное число;  $|\gamma(x_1)| \leq N_\gamma$ ;  $x_1 \in (-\infty; +\infty)$ .

Множество  $\Omega_\varepsilon$ , на котором определено решение, ищется в виде полосы шириной  $\varepsilon$  в направлении  $Ox_2$ , прилегающей к  $L$  с одной стороны, т. е. в виде  $\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \varphi(x_1) \leq x_2 \leq \varphi(x_1) + \varepsilon\}, \Omega_\varepsilon \subset \Omega_\beta$ .

Расширенная характеристическая система имеет такой же вид, как для задачи (1.2) с начальными данными

$$\eta_1|_{s=\omega(x_1, x_2)} = x_1, \eta_2|_{s=\omega(x_1, x_2)} = x_2, u|_L = \gamma(x_1), \quad (2.15)$$

где  $\omega(x_1, x_2), \eta_1(s, x_1, x_2), \eta_2(s, x_1, x_2), u(s, x_1, x_2)$  – новые неизвестные функции, непрерывно дифференцируемые по всем переменным;  $s$  – дополнительный аргумент,  $0 \leq s \leq \omega(x_1, x_2)$ .

Значение  $\omega$  на кривой, заданной уравнением  $x_2 = \varphi(x_1)$ , полагаем равной нулю, т. е.  $\omega(x_1, \varphi(x_1)) = 0$ . Для получения решения в исходных координатах решения системы уравнений (2.1) должны быть представимы в виде, аналогичном (2.3) в предыдущей задаче.

Представление (2.3) оправдано, если можно определить новую, заранее неизвестную функцию  $\theta(x_1, x_2)$ , для которой в некотором множестве изменения ее аргументов были бы справедливы равенства, совпадающие с равенствами (2.4), при  $\alpha_1 = id$ ,  $\alpha_2 = \varphi$ .

Из соотношений (2.1), (2.15) при выполнении (2.3) мы получим равенство, совпадающее с (2.5).

Справедлива лемма (см. [4]).

**Л е м м а 2.2** Непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений (2.3), (2.5), (2.15) дает решение задачи Коши (1.1), (2.14).

Получим систему интегральных уравнений вида (2.7)–(2.13), положив в ней  $H_1 = x_1 - \mu_1$ ;  $H_{11} = 1 - \mu_{11}$ ;  $H_{12} = -\mu_{12}$ ;  $W_{21} = 1 - \mu_{21}$ ;  $W_{22} = -\mu_{22}$ ;  $W_2 = x_1 - \mu_2$ ;  $\alpha'_1 = 1$ ;  $\alpha'_2 = \varphi'$  (в уравнениях для  $W_{11}$  и  $W_{12}$ ), При этом уравнения (2.11) примут вид:

$$W_1 = \int_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12} dx_2, \quad \mu_2 = \int_0^{W_1} a_1(x_1 - \mu_1, H_2, U) d\delta. \quad (2.16)$$

Пусть  $\varepsilon_0 = \min \left( \frac{9}{10(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2)}; \frac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \frac{10\zeta_1}{\xi_1 + 10\zeta_1\xi_2}; \frac{10\zeta_1}{\xi_3 + 10\zeta_1\xi_2} \right)$ ,  
 $\zeta_1 = K_0(K_{\varphi'} + 1) + K_0(K_{a_1} + K_{a_2})(1 + K_{\varphi'} + K_{\gamma'}) + 2 + X_2 + N_\gamma$ ,

$\sigma_1 = K_0 (M_{a_1} K_{\varphi'} + M_{a_2}) (K_{a_1} + K_{a_2} + 1) + K_{\gamma'} K_0 (M_{a_2} K_{a_1} + M_{a_1} K_{a_2}) + M_{a_1} + M_{a_2} + M_f$ ,  
 $\sigma_2 = K_{a_1} + K_{a_2} + K_f$ ,  $\xi_1 = c K_{\varphi'} ((K_{\gamma'} + 1) K_{a_1} + K_{a_2}) + 10 \zeta_1 ((K_{\gamma'} + 1) K_{a_{11}} + K_{f_1} + K_{a_{21}})$ ,  
 $\xi_2 = 10 \zeta_1 ((K_{\gamma'} + 1) M_{a_1} + M_{a_2} + M_f)$ ,  $\xi_3 = c ((K_{\gamma'} + 1) K_{a_1} + K_{a_2})$ ,  $J = a_2 - a_1 \varphi'$ ,  
 $K_J = K_0^{-1}$ , где константы определены как максимумы известных функций и их производных.

Справедлива теорема (см. [11]–[12]).

**Т е о р е м а 2.2** Пусть  $a_1(x_1, x_2, z)$ ,  $a_2(x_1, x_2, z)$ ,  $f(x_1, x_2, z)$  непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам в множестве  $Q_\rho$ ;  $L$  — кривая, несущая начальные данные:  $x_2 = \varphi(x_1)$ ;  $\varphi(x_1), \gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty; +\infty)$ ; выполнено основное условие разрешимости  $|J| \geq K_J$ . Тогда существует такое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение  $z \in \overline{C}^1(\Omega_\varepsilon)$ , которое при  $s = \omega$  совпадает с функцией  $u(s, x_1, x_2) = U(s, x_1, x_2)$ , определяемой из резольвентной системы (2.7)–(2.10), (2.12)–(2.13) (с введенными выше обозначениями), (2.16).

### 3. Постановка и решение задачи Коши

Рассмотрим задачу Коши с начальным условием:

$$z|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in [X_1; X_2], \quad (3.1)$$

где кривая  $L$  задается в явном виде уравнением  $x_2 = \varphi(x_1)$ ,  $X_1 \leq x_1 \leq X_2$ .

Множество, на котором определена неизвестная функция  $z(x_1, x_2)$  в (1.1), содержится в множестве  $\Omega_\beta = \{(x_1, x_2) : X_1 \leq x_1 \leq X_2, \min_{x_1 \in [X_1; X_2]} (\varphi(x_1) - \beta_0) \leq x_2 \leq \max_{x_1 \in [X_1; X_2]} (\varphi(x_1) + \beta_0)\}$ ,  $\beta_0 \in \mathbb{R}$ .

Множество  $\Omega_\varepsilon$ , на котором определено решение, ищется в виде:  
 $\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : X_1 \leq x_1 \leq X_2, \varphi(x_1) \leq x_2 \leq \varphi(x_1) + \varepsilon\}$ ,  $\Omega_\varepsilon \subset \Omega_\beta$ .

Так же, как и при решении предыдущих двух задач, будем использовать МДА, так как он дает возможность получить решение в исходных координатах ([3]).

Расширенная характеристическая система имеет такой же вид, как для задачи (1.2), т. е. получим систему уравнений (2.1) с начальными данными вида (2.15).

Здесь  $\omega(x_1, x_2)$ ,  $\eta_1(s, x_1, x_2)$ ,  $\eta_2(s, x_1, x_2)$ ,  $u(s, x_1, x_2)$  — новые неизвестные функции непрерывно дифференцируемые по всем переменным;  $s$  — дополнительный аргумент,  $0 \leq s \leq \omega(x_1, x_2)$ .

Значение  $\omega$  на кривой, заданной в явном виде уравнением  $x_2 = \varphi(x_1)$ , полагаем равным нулю, т. е.  $\omega(x_1, \varphi(x_1)) = 0$ .

Для получения решения в исходных координатах с использованием МДА, решения характеристических уравнений  $\frac{d\eta_1}{ds} = a_1(\eta_1, \eta_2, u)$ ,  $\frac{d\eta_2}{ds} = a_2(\eta_1, \eta_2, u)$  должны быть представимы в виде, аналогичном (2.3).

Представление (2.3) оправдано, если можно определить новую, заранее неизвестную функцию  $\theta(x_1, x_2)$ , для которой в некотором множестве изменения ее аргументов были бы справедливы равенства, совпадающие с (2.4), если положить  $\alpha_1 = id$ ,  $\alpha_2 = \varphi$ .

Из соотношений (2.1), (2.15) при выполнении (2.3) имеем равенство, совпадающее с (2.5).

**Л е м м а 3.1** Непрерывно дифференцируемое решение системы интегральных уравнений (2.3), (2.5), (2.15) дает решение задачи Коши (1.1)–(3.1).

Для краткости записи опустим аргументы функций  $\theta(x_1, x_2)$ ,  $\omega(x_1, x_2)$ ,  $a_1(\eta_1, \eta_2, u)$ ,  $a_2(\eta_1, \eta_2, u)$ ,  $\eta_1(s, x_1, x_2)$ ,  $\eta_2(s, x_1, x_2)$ ,  $u(s, x_1, x_2)$ ,  $\varphi(x_1)$ . Для вывода основного условия разрешимости проведем следующие выкладки: продифференцируем первое и второе уравнение (2.4), где  $\alpha_1 = id$ ;  $\alpha_2 = \varphi$  по  $x_1$  и  $x_2$ . Получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= 1 - a_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \int_0^{\omega(x_1, x_2)} \left( \frac{\partial a_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) d\delta, \\ \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= -a_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \int_0^{\omega(x_1, x_2)} \left( \frac{\partial a_1}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_1}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) d\delta;\end{aligned}\quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}\varphi' \frac{\partial \theta}{\partial x_1} &= -a_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} - \int_0^{\omega(x_1, x_2)} \left( \frac{\partial a_2}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} + \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) d\delta, \\ \varphi' \frac{\partial \theta}{\partial x_2} &= 1 - a_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - \int_0^{\omega(x_1, x_2)} \left( \frac{\partial a_2}{\partial \eta_1} \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial \eta_2} \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) d\delta.\end{aligned}\quad (3.3)$$

Умножим первое уравнение системы (3.2) на  $a_1$ , второе – на  $a_2$ , затем сложим полученные выражения и получим равенство:

$$\begin{aligned}a_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} + a_1 \left( a_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - 1 \right) &= - \int_0^{\omega(x_1, x_2)} \left( \frac{\partial a_1}{\partial \eta_1} \left( a_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial a_1}{\partial \eta_2} \left( a_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial a_1}{\partial u} \left( a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right) d\delta.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Проведем аналогичные операции с первым уравнением системы (3.2):

$$\begin{aligned}\varphi' \left( a_1 \frac{\partial \theta}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \right) + a_2 \left( a_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - 1 \right) &= - \int_0^{\omega(x_1, x_2)} \left( \frac{\partial a_2}{\partial \eta_1} \left( a_1 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \eta_1}{\partial x_2} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial a_2}{\partial \eta_2} \left( a_1 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \eta_2}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial a_2}{\partial u} \left( a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \right) d\delta.\end{aligned}\quad (3.5)$$

Пусть  $W(\zeta) = a_1 \frac{\partial \zeta}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \zeta}{\partial x_2}$ , тогда

$$\begin{cases} W(\theta) + a_1 \left( a_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - 1 \right) = - \int_0^{\omega(x_1, x_2)} \left( \frac{\partial a_1}{\partial \eta_1} W(\eta_1) + \frac{\partial a_1}{\partial \eta_2} W(\eta_2) + \frac{\partial a_1}{\partial u} W(u) \right) d\delta, \\ \varphi' W(\theta) + a_2 \left( a_1 \frac{\partial \omega}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial \omega}{\partial x_2} - 1 \right) = - \int_0^{\omega(x_1, x_2)} \left( \frac{\partial a_2}{\partial \eta_1} W(\eta_1) + \frac{\partial a_2}{\partial \eta_2} W(\eta_2) + \frac{\partial a_2}{\partial u} W(u) \right) d\delta. \end{cases}\quad (3.6)$$

Полученная система разрешима, если (см. [1]):

$$J = \begin{vmatrix} 1 & a_1 \\ \varphi' & a_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (3.7)$$

В лемме 3.1. доказано, что решение задачи (1.1), (3.1) дает решение системы уравнений (2.3), (2.5),

(2.15) и наоборот: непрерывно дифференцируемое решение задачи (2.3),(2.5),(2.15) при  $s = \omega(x_1, x_2)$  будет решением задачи (1.1), (3.1).

Следуя разработанной в работе [1] схеме, составим резольвентную систему, используя те же обозначения, что в работах [1],[2],[11]:

$$U = \gamma(W_2) + \int_0^s f(H_1, H_2, U) d\delta, \quad (3.8)$$

$$U_i = \gamma'(W_2) W_{2i} + \int_0^s (f_1 H_{1i} + f_2 H_{2i} + f_U U_i) d\delta, \quad (3.9)$$

$$H_i = x_i - \int_s^{W_1} a_i(H_1, H_2, U) d\delta, \quad (3.10)$$

$$H_{lk} = \delta_k^l - a_l W_{1k} + \int_s^{W_1} (a_{l1} H_{1k} + a_{l2} H_{2k} + a_{lU} U_k) d\delta, \quad (3.11)$$

$$W_i = \begin{cases} \int_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12} dx_2, i = 1, \\ x_1 - \int_0^{W_1} a_1(H_1, H_2, U) d\delta, i = 2, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$W_{11} = J^{-1} \left( -\varphi' + \int_0^{W_1} \left( \varphi' \left( \sum_{i=1}^2 a_{1i} H_{i1} + a_{1U} U_1 \right) - \left( \sum_{i=1}^2 a_{2i} H_{i1} + a_{2U} U_1 \right) \right) d\delta \right), \quad (3.13)$$

$$W_{12} = J^{-1} \left( 1 + \int_0^{W_1} \left( \varphi' \left( \sum_{i=1}^2 a_{1i} H_{i2} + a_{1U} U_2 \right) - \left( \sum_{i=1}^2 a_{2i} H_{i2} + a_{2U} U_2 \right) \right) d\delta \right), \quad (3.14)$$

$$W_{2l} = J^{-1} \left( (-1)^{l+1} a_{3-l} + \int_0^{W_1} \left( a_1 \left( \sum_{i=1}^2 a_{2i} H_{il} + a_{2U} U_l \right) - a_2 \left( \sum_{i=1}^2 a_{1i} H_{il} + a_{1U} U_l \right) \right) d\delta \right), \quad (3.15)$$

где  $i, j, k = 1, 2$ ,  $\delta_k^l$  — символ Кронекера;

$U, U_1, U_2, H_1, H_2, H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}, W_1, W_2, W_{11}, W_{12}, W_{21}, W_{22}$  — новые неизвестные функции. Для краткости аргументы вышеперечисленных функций были опущены.

$$\text{Пусть } \varepsilon_0 = \min \left( \frac{9}{10(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2)}; \frac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \frac{10\zeta_1 - K_{\gamma'}}{\zeta_1 + 10\zeta_1\zeta_2}; \frac{10\zeta_1}{\zeta_3 + 10\zeta_1\zeta_2} \right),$$

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= K_0(K_{\varphi'} + 1) + K_0(K_{a_1} + K_{a_2})(1 + K_{\varphi'} + K_{\gamma'}) + 2 + X_1 + X_2 + N_\gamma, \\ \sigma_1 &= K_0(M_{a_1}K_{\varphi'} + M_{a_2})(K_{a_1} + K_{a_2} + 1) + K_{\gamma'}K_0(M_{a_2}K_{a_1} + M_{a_1}K_{a_2}) + M_{a_1} + M_{a_2} + M_f, \\ \sigma_2 &= K_{a_1} + K_{a_2} + K_f, \quad \xi_1 = cK_{\varphi'}((K_{\gamma'} + 1)K_{a_1} + K_{a_2}) + 10\zeta_1((K_{\gamma'} + 1)K_{a_{11}} + K_{f_1} + \\ &\quad + K_{a_{21}}), \quad \xi_2 = 10\zeta_1((K_{\gamma'} + 1)M_{a_1} + M_{a_2} + M_f), \quad J = a_2 - a_1\varphi', \quad K_J = K_0^{-1}, \\ \xi_3 &= c((K_{\gamma'} + 1)K_{a_1} + K_{a_2}) + 10\zeta_1((K_{\gamma'} + 1)K_{a_{12}} + K_{f_2} + K_{a_{22}}), \end{aligned}$$

где константы определены как максимумы абсолютных значений известных функций и их производных.

Установим существование решения системы (3.8)–(3.15) интегральных уравнений и его единственность. Будем использовать метод последовательных приближений. За начальные приближения примем:  $H_1^0 = x_1$ ,  $H_2^0 = x_2$ ,  $U^0 = \gamma(W_2^0)$ ,  $W_1^0 = 0$ ,  $W_2^0 = x_1$ ,  $H_{11}^0 = 1$ ,  $H_{12}^0 = 0$ ,  $H_{21}^0 = 0$ ,  $H_{22}^0 = 1$ ,  $U_1^0 = \gamma'$ ,  $U_2^0 = 0$ ,  $W_{11}^0 = 0$ ,  $W_{12}^0 = 0$ ,  $W_{21}^0 = 1$ ,  $W_{22}^0 = 0$ . Прежде, чем записать резольвентную систему, составленную для последовательных приближений, будем обозначать верхним индексом  $n$  –  $n$ -ое приближение функции, вместо  $W_1^n$  в верхнем пределе интегрирования будем писать  $W_1 \setminus n$ . Запишем резольвентную систему для последовательных приближений, с учетом введенных обозначений:

$$H_i^{n+1} = x_i - \int_s^{W_1 \setminus n+1} a_i^n d\delta, \quad (3.16)$$

$$U^{n+1} = \gamma(W_2^{n+1}) + \int_0^s f^n d\delta, \quad (3.17)$$

$$W_i^{n+1} = \begin{cases} \int_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}^n dx_2, i = 1, \\ x_1 - \int_0^{W_1 \setminus n+1} a_1^n d\delta, i = 2, \end{cases} \quad (3.18)$$

$$H_{lk}^{n+1} = \delta_k^l - a_l^{n+1} W_{1l}^{n+1} - \int_s^{W_1 \setminus n+1} (a_{1l}^n H_{1k}^n + a_{l2}^n H_{2k}^n + a_{lU}^n U_k^n) d\delta, \quad (3.19)$$

$$U_i^{n+1} = \gamma'(W_2^{n+1}) W_{2i}^{n+1} + \int_0^s (f_1^n H_{1i}^n + f_2^n H_{2i}^n + f_U^n U_i^n) d\delta, \quad (3.20)$$

$$W_{11}^{n+1} = J_{n+1}^{-1} \left( -\varphi'(W_2^{n+1}) + \int_0^{W_1 \setminus n+1} \left( \varphi'(W_2^n) \left( \sum_{i=1}^2 a_{1i}^n H_{i1}^n + a_{1U}^n U_1^n \right) - \left( \sum_{i=1}^2 a_{2i}^n H_{i1}^n + a_{2U}^n U_1^n \right) \right) d\delta \right), \quad (3.21)$$

$$W_{12}^{n+1} = J_{n+1}^{-1} \left( 1 + \int_0^{W_1 \setminus n+1} \left( \varphi'(W_2^n) \left( \sum_{i=1}^2 a_{1i}^n H_{i2}^n + a_{1U}^n U_2^n \right) - \left( \sum_{i=1}^2 a_{2i}^n H_{i2}^n + a_{2U}^n U_2^n \right) \right) d\delta \right), \quad (3.22)$$

$$W_{2l}^{n+1} = J_{n+1}^{-1} \left( (-1)^{l+1} a_{3-l}^{n+1} + \int_0^{W_1 \setminus n+1} \left( a_1^n \left( \sum_{i=1}^2 a_{2i}^n H_{il}^n + a_{2U}^n U_l^n \right) - a_2^n \left( \sum_{i=1}^2 a_{1i}^n H_{il}^n + a_{1U}^n U_l^n \right) \right) d\delta \right), \quad (3.23)$$

где  $W_1 \setminus n$  есть  $n$ -ое последовательное приближение для функции  $W_1$ .

Решение системы уравнений (3.16)–(3.23) в множестве  $\Omega_\varepsilon$  будем искать в предположении, что  $|U| \leq K_U$ , и, кроме того,  $|f| \leq K_f$ ,  $|\gamma| \leq K_\gamma$ . Пусть  $\varepsilon = \max_{x_1, x_2 \in \Omega_\varepsilon} |x_2 - \varphi(x_1)|$ ;

$X_1 = \max_{x_1 \in [X_1; X_2]} \{|X_1|; |X_2|\}; X_2 = \max_{x_1 \in [X_1; X_2]} \{|\varphi(x_1) - \beta_0|, |\varphi(x_1) + \beta_0|\}$ . С учетом того, что:  $|a_i^m| \leq K_{ai}, |f^m| \leq K_f, |a_{ij}^m| \leq K_{aij}, |a_{iHj}^m| \leq K_{aiHj}, |a_{iU}^m| \leq K_{aiU}, |f_{Hi}^m| \leq K_{fHi}, |f_U^m| \leq K_{fU}, |\gamma(W_2^m)| \leq N_\gamma, |\gamma'(W_2^m)| \leq K_{\gamma'}, |\varphi'(W_2^m)| \leq K_{\varphi'}, \frac{1}{|J_m|} = \frac{1}{|a_2^m - a_1^m \varphi'(W_2^m)|} \leq \frac{1}{K_{a_2} + K_{\varphi'} K_{a_1}} = K_0$ , где  $1 \leq m \leq n$ . Обозначим  $v^n = \max_{\Omega_\varepsilon} |W_{11}^n| + \max_{\Omega_\varepsilon} |W_{12}^n| + \max_{\Omega_\varepsilon} |H_1^n| + \max_{\Omega_\varepsilon} |H_2^n| + \max_{\Omega_\varepsilon} |U^n| + \max_{\Omega_\varepsilon} |H_{11}^n| + \max_{\Omega_\varepsilon} |H_{12}^n| + \max_{\Omega_\varepsilon} |H_{21}^n| + \max_{\Omega_\varepsilon} |H_{22}^n| + \max_{\Omega_\varepsilon} |U_1^n| + \max_{\Omega_\varepsilon} |U_2^n|$ ,  $\zeta_1 = K_0(K_{\varphi'} + 1) + K_0(K_{a_1} + K_{a_2})(1 + K_{\varphi'} + K_{\gamma'}) + 2 + X_1 + X_2 + N_\gamma$ ,  $\sigma_2 = K_{a_1} + K_{a_2} + K_f$ ,  $\sigma_1 = K_0(M_{a_1}K_{\varphi'} + M_{a_2})(K_{a_1} + K_{a_2} + 1) + K_{\gamma'}K_0(M_{a_2}K_{a_1} + M_{a_1}K_{a_2}) + M_{a_1} + M_{a_2} + M_f$ . Выпишем оценки для правых частей уравнений системы (3.16)–(3.23):

$$\begin{aligned} |H_i^{n+1}| &\leq X_i + |W_1^{n+1}| K_{a_i}, |W_2^{n+1}| \leq X_1 + |W_1^{n+1}| K_{a_1}, |U^{n+1}| \leq N_\gamma + |W_1^{n+1}| K_f, \\ |W_1^{n+1}| &\leq \varepsilon \|W_{12}^n\|, |H_{lk}^{n+1}| \leq \delta_k^l + K_{a_l} |W_{1k}^{n+1}| + M_{a_l} |W_1^{n+1}| (\|H_{1k}^n\| + \|H_{2k}^n\| + \|U_k^n\|), \\ |U_i^{n+1}| &\leq K_{\gamma'} |W_{2i}^{n+1}| + M_f |W_1^{n+1}| (\|H_{1i}^n\| + \|H_{2i}^n\| + \|U_i^n\|), \\ |W_{11}^{n+1}| &\leq K_0 K_{\varphi'} + K_0 (K_{\varphi'} M_{a_1} + M_{a_2}) |W_1^{n+1}| (\|H_{11}^n\| + \|H_{21}^n\| + \|U_1^n\|), \\ |W_{12}^{n+1}| &\leq K_0 + K_0 (K_{\varphi'} M_{a_1} + M_{a_2}) |W_1^{n+1}| (\|H_{12}^n\| + \|H_{22}^n\| + \|U_2^n\|), \\ |W_{2i}^{n+1}| &\leq K_0 K_{a_3-i} + K_0 |W_1^{n+1}| (K_{a_1} M_{a_2} + K_{a_2} M_{a_1}) (\|H_{1i}^n\| + \|H_{2i}^n\| + \|U_i^n\|), \end{aligned}$$

где  $i, j, k = 1, 2$ ,  $\delta_k^l$  – символ Кронекера.

Сложив левые и правые части полученных неравенств и учитывая введенные раннее обозначения, получим:  $v^{n+1} \leq \zeta_1 + \varepsilon (\sigma_1 (v^n)^2 + \sigma_2 v^n)$ . Потребуем, чтобы  $\zeta_1 + \varepsilon ((10\zeta_1)^2 \sigma_1 + 10\zeta_1 \sigma_2) \leq 10\zeta_1$ , тогда  $\varepsilon \leq \frac{9}{10(10\zeta_1 \sigma_1 + \sigma_2)}$ . Таким образом, если  $v^n \leq 10\zeta_1$ , то  $v^{n+1} \leq \zeta_1 + \varepsilon \sigma_1 (v^n)^2 + \varepsilon \sigma_2 v^n \leq 10\zeta_1$ . Т.е.  $v^{n+1}$  – конечна при  $0 \leq \varepsilon \leq \frac{9}{10(10\zeta_1 \sigma_1 + \sigma_2)}$ , тогда из  $|W_{11}^{n+1}| + |W_{12}^{n+1}| + |H_1^{n+1}| + |H_2^{n+1}| + |U^{n+1}| + |H_{11}^{n+1}| + |H_{12}^{n+1}| + |H_{21}^{n+1}| + |H_{22}^{n+1}| + |U_1^{n+1}| + |U_2^{n+1}| \leq 10\zeta_1$  следует, что  $|W_{11}^{n+1}|, |W_{12}^{n+1}|, |H_1^{n+1}|, |H_2^{n+1}|, |U^{n+1}|, |H_{11}^{n+1}|, |H_{12}^{n+1}|, |H_{21}^{n+1}|, |H_{22}^{n+1}|, |U_1^{n+1}|, |U_2^{n+1}|$  тоже ограничены, а значит,  $|W_{11}^{n+1}|, |W_{12}^{n+1}|$  также ограничены. Тогда  $|W_1^{n+1}| \leq \varepsilon \|W_{12}^{n+1}\|, |W_1^{n+1}| \leq 10\zeta_1 \varepsilon$ , а следовательно,  $|W_2^{n+1}| \leq X_1 + 10\zeta_1 \varepsilon K_{a_1}$ .

Таким образом, все рассматриваемые  $n+1$ -ые приближения ограничены в множестве  $\Omega_\varepsilon$ , где  $\varepsilon \leq \min\left(\frac{9}{10(10\zeta_1 \sigma_1 + \sigma_2)}; \frac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}\right)$ , и последовательность, составленная из последовательных приближений, ограничена в множестве  $\Omega_\varepsilon$ .

Обозначая  $V^{n+1} = \text{colon}(H_1^{n+1}, H_2^{n+1}, U^{n+1}, W_1^{n+1}, W_{11}^{n+1}, W_{12}^{n+1}, W_2^{n+1}, W_{21}^{n+1}, W_{22}^{n+1}, H_{11}^{n+1}, H_{12}^{n+1}, H_{21}^{n+1}, H_{22}^{n+1}, U_1^{n+1}, U_2^{n+1})$ ,  $\|V^{n+1} - V^n\| = |H_1^{n+1} - H_1^n| + |H_2^{n+1} - H_2^n| + |U^{n+1} - U^n| + |W_1^{n+1} - W_1^n| + |W_{11}^{n+1} - W_{11}^n| + |W_{12}^{n+1} - W_{12}^n| + |W_2^{n+1} - W_2^n| + |W_{21}^{n+1} - W_{21}^n| + |W_{22}^{n+1} - W_{22}^n| + |H_{11}^{n+1} - H_{11}^n| + |H_{12}^{n+1} - H_{12}^n| + |H_{21}^{n+1} - H_{21}^n| + |H_{22}^{n+1} - H_{22}^n| + |U_1^{n+1} - U_1^n| + |U_2^{n+1} - U_2^n|$ ,  $\chi = \max_{1 \leq i \leq 15} \chi_i$ , где  $\chi_i$  – постоянные, которые равны максимумам из коэффициентов, стоящих соответственно при  $\|H_1^{n+1} - H_1^n\|, \|H_2^{n+1} - H_2^n\|, \|U^{n+1} - U^n\|, \|W_1^{n+1} - W_1^n\|, \|W_{11}^{n+1} - W_{11}^n\|, \|W_{12}^{n+1} - W_{12}^n\|, \|W_2^{n+1} - W_2^n\|, \|W_{21}^{n+1} - W_{21}^n\|, \|W_{22}^{n+1} - W_{22}^n\|, \|H_{11}^{n+1} - H_{11}^n\|, \|H_{12}^{n+1} - H_{12}^n\|, \|H_{21}^{n+1} - H_{21}^n\|, \|H_{22}^{n+1} - H_{22}^n\|, \|U_1^{n+1} - U_1^n\|, \|U_2^{n+1} - U_2^n\|$ , и складывая разности  $n+1$  и  $n$  приближений для каждой из неизвестных функций, входящих в систему (3.16)–(3.23) получим  $\|V^{n+1} - V^n\| \leq \varepsilon \chi \|V^n - V^{n-1}\|$ . Подберем  $\varepsilon$  таким образом, чтобы  $\varepsilon \chi < 1$ ,  $\left(0 \leq \varepsilon \leq \min\left(\frac{9}{10(10\zeta_1 \sigma_1 + \sigma_2)}; \frac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \frac{1}{\chi + 1}\right)\right)$ , а  $V^n = V^0 + V^1 - V^0 + V^2 - V^1 + \dots + V^n - V^{n-1}$  можно было оценить суммой.

Введем обозначения:

$$I_1 = \|(H_1^0, H_2^0, U^0, W_1^0, W_{11}^0, W_{12}^0, W_2^0, W_{21}^0, W_{22}^0, H_{11}^0, H_{12}^0, H_{21}^0, H_{22}^0, U_1^0, U_1^0)\|, \\ I_2 = \|(H_1^1, H_2^1, U^1, W_1^1, W_{11}^1, W_{12}^1, W_2^1, W_{21}^1, W_{22}^1, H_{11}^1, H_{12}^1, H_{21}^1, H_{22}^1, U_1^1, U_1^1)\|,$$

тогда  $\|V^0\| \leq I_1$ ,  $\|V^i - V^{i-1}\| \leq \varepsilon^{i-1} \chi^{i-1} I_2$ ,  $1 \leq i \leq n$ .

Таким образом, для ряда  $V^0 + V^1 - V^0 + V^2 - V^1 + \dots + V^n - V^{n-1} + \dots$ , была получена оценка его частичной суммы:  $\|V^n\| \leq \|V^0\| + \|V^1 - V^0\| + \|V^2 - V^1\| + \dots + \|V^n - V^{n-1}\| \leq I_1 + \frac{I_2}{1 - \varepsilon \chi}$ . Следовательно, ряд  $\sum_{i=0}^{\infty} V^i$  сходится.

Единственность решения следует из того факта, что для разности двух возможных решений  $u_I$  и  $u_{II}$  уравнения (2.5) будет выполняться неравенство  $\|u_{II} - u_I\| \leq \varepsilon \chi_3 \|u_{II} - u_I\|$ , где  $\varepsilon \chi_3 < 1$ .

Для завершения доказательства теоремы в соответствии с общей схемой, изложенной в [11], [12], необходимо доказать, что  $H_{11} = \frac{\partial H_1}{\partial x_1}$ ,  $H_{12} = \frac{\partial H_1}{\partial x_2}$ ,  $H_{21} = \frac{\partial H_2}{\partial x_1}$ ,  $H_{22} = \frac{\partial H_2}{\partial x_2}$ ,  $U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}$ ,  $U_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}$ ,  $W_{11} = \frac{\partial W_1}{\partial x_1}$ ,  $W_{12} = \frac{\partial W_1}{\partial x_2}$ ,  $W_{21} = \frac{\partial W_2}{\partial x_1}$ ,  $W_{22} = \frac{\partial W_2}{\partial x_2}$ .

Чтобы показать, что  $\frac{\partial H_1^n}{\partial x_1} \rightarrow H_{11}$ ,  $\frac{\partial H_1^n}{\partial x_2} \rightarrow H_{12}$ ,  $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \rightarrow H_{21}$ ,  $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \rightarrow H_{22}$ ,  $\frac{\partial U^n}{\partial x_1} \rightarrow U_1$ ,  $\frac{\partial U^n}{\partial x_2} \rightarrow U_2$  сложим выражения для  $|H_{11} - \frac{\partial H_1^n}{\partial x_1}|$ ,  $|H_{12} - \frac{\partial H_1^n}{\partial x_2}|$ ,  $|H_{21} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}|$ ,  $|H_{22} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}|$ ,  $|U_1 - \frac{\partial U^n}{\partial x_1}|$ ,  $|U_2 - \frac{\partial U^n}{\partial x_2}|$ .

Введя обозначения  $\widehat{V} = \widehat{V}(H_{11}, H_{12}, H_{21}, H_{22}, U_1, U_2)$ ,

$$\tilde{V}^n = \tilde{V} \left( \frac{\partial H_1^n}{\partial x_1}, \frac{\partial H_1^n}{\partial x_2}, \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}, \frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}, \frac{\partial U^n}{\partial x_1}, \frac{\partial U^n}{\partial x_2} \right), \|\widehat{V} - \tilde{V}^n\| = \left\| H_{11} - \frac{\partial H_1^n}{\partial x_1} \right\| + \left\| H_{12} - \frac{\partial H_1^n}{\partial x_2} \right\| + \\ + \left\| H_{21} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \right\| + \left\| H_{22} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \right\| + \left\| U_1 - \frac{\partial U^n}{\partial x_1} \right\| + \left\| U_2 - \frac{\partial U^n}{\partial x_2} \right\|,$$

получим  $\|\widehat{V} - \tilde{V}^n\| \leq 10\zeta_1 \varepsilon (M_{a_1} + M_{a_2} + M_f) \cdot \|\widehat{V} - \tilde{V}^{n-1}\| + \Pi_n$ , где

$$\Pi_n = (K_{a_1} + K_{a_2}) \cdot \left( \left\| W_{11} - \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1} \right\| + \left\| W_{12} - \frac{\partial W_1^n}{\partial x_2} \right\| \right) + L_{\gamma'} |W_2 - W_2^n| \cdot (|W_{21}| + |W_{22}|) + \\ + K_{\gamma'} \cdot \left( \left\| W_{21} - \frac{\partial W_2^n}{\partial x_1} \right\| + \left\| W_{22} - \frac{\partial W_2^n}{\partial x_2} \right\| \right) + (L_{a_1} + L_{a_2}) \left( \|H_1 - H_1^{n-1}\| + \right. \\ \left. + \|H_2 - H_2^{n-1}\| + \|U - U^{n-1}\| \right) \cdot \left( \left\| \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial W_1^n}{\partial x_2} \right\| \right) + \\ + (M_{a_1} + M_{a_2}) \cdot |W_1 - W_1^n| \cdot \left( \|H_{11}\| + \|H_{21}\| + \|U_1\| + \|H_{12}\| + \|H_{22}\| + \|U_2\| \right) + \\ + |W_1^n| \cdot \left( \left( \left\| \frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_2} \right\| \right) (L_{a_{11}} + L_{a_{21}}) + \right. \\ \left. + \left( \left\| \frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_2} \right\| \right) (L_{a_{12}} + L_{a_{22}}) + \left( \left\| \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_2} \right\| \right) (L_{a_{1U}} + L_{a_{2U}}) \right) \cdot \\ \cdot (\|H_1 - H_1^{n-1}\| + \|H_2 - H_2^{n-1}\| + \|U - U^{n-1}\|) + |s| \cdot \left( \left( \left\| \frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_1} \right\| + \right. \right.$$



$$\begin{aligned}
& + \left\| \frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_2} \right\| \Big) L_{f_1} + \left( \left\| \frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_2} \right\| \right) L_{f_2} + \\
& + \left( \left\| \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_2} \right\| \right) L_{f_U} \left( \|H_1 - H_1^{n-1}\| + \|H_2 - H_2^{n-1}\| + \|U - U^{n-1}\| \right).
\end{aligned}$$

Покажем, что  $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial W_2^n}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial W_2^n}{\partial x_2}$  ограничены. Действительно,

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1} \right| &= \left| \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{W_1^n(x_1 + \Delta x_1, x_2) - W_1^n(x_1, x_2)}{\Delta x_1} \right| = \\
&= \left| \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_1} \left( \int_{\varphi(x_1 + \Delta x_1)}^{x_2} W_{12}^{n-1} dx_2 - \int_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}^{n-1} dx_2 \right) \right| \leq \\
&\leq \|W_{12}^{n-1}\| \left| \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \frac{-(\varphi(x_1 + \Delta x_1) - \varphi(x_1))}{\Delta x_1} \right| = \|W_{12}^{n-1}\| \cdot |\varphi'(x_1)| \leq \|W_{12}^{n-1}\| K_{\varphi'}.
\end{aligned}$$

Ранее было доказано, что  $|W_1^n|$  ограничена, и, следовательно, отсюда  $|W_{11}^n|$  и  $|W_{12}^n|$  также ограничены. Можно сказать, что  $|W_{12}^n| \leq \varepsilon c$ , а значит,  $\left\| \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1} \right\| \leq \varepsilon c K_{\varphi'}$ .

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial W_1^n}{\partial x_2} \right| &= \left| \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{W_1^n(x_1, x_2 + \Delta x_2) - W_1^n(x_1, x_2)}{\Delta x_2} \right| = \\
&= \left| \lim_{\Delta x_2 \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x_2} \left( \int_{\varphi(x_1)}^{x_2 + \Delta x_2} W_{12}^{n-1}(x_1; \delta) d\delta - \int_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}^{n-1}(x_1; \delta) d\delta \right) \right| \leq \|W_{12}^{n-1}\|, \text{ то } \left\| \frac{\partial W_1^n}{\partial x_2} \right\| \leq \varepsilon c.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Поскольку } \left| \frac{\partial W_2^n}{\partial x_1} \right| &= \left| 1 - a_1^{n-1} \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1} - \int_s^{W_1^n} \left( a_{11}^{n-1} \left( \frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_1} - 1 \right) + a_{11}^{n-1} + a_{12}^{n-1} \frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1} + \right. \right. \\
&+ \left. \left. a_{1U}^{n-1} \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1} \right) d\delta \right| \leq 1 + K_{a_1} \left| \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1} \right| + |W_1^n| M_{a_1} \left( \left\| \frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_1} - 1 \right\| + \left\| \frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1} \right\| \right) + \\
&+ |W_1^n| K_{a_1}, \text{ то}
\end{aligned}$$

$$\left| \frac{\partial W_2^n}{\partial x_1} \right| \leq 1 + \varepsilon c K_{a_1} K_{\varphi'} + 10\zeta_1 \varepsilon M_{a_1} \left( \left\| \frac{\partial H_1^{n-1}}{\partial x_1} - 1 \right\| + \left\| \frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1} \right\| + \left\| \frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1} \right\| \right) + 10\zeta_1 \varepsilon K_{a_1}. \quad (3.24)$$

Выведем оценки для  $\frac{\partial H_1^n}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial U^n}{\partial x_1}$ . Сложив неравенства для  $\left\| \frac{\partial H_1^n}{\partial x_1} - 1 \right\|$ ,  $\left\| \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \right\|$ ,  $\left\| \frac{\partial U^n}{\partial x_1} \right\|$ , и введя обозначения  $v_1^n = \max_{\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial H_1^n}{\partial x_1} - 1 \right| + \max_{\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \right| + \max_{\Omega_\varepsilon} \left| \frac{\partial U^n}{\partial x_1} \right|$ ,  $\xi_1 = cK_{\varphi'}((K_{\gamma'} + 1)K_{a_1} + K_{a_2}) + 10\zeta_1((K_{\gamma'} + 1)K_{a_{11}} + K_{a_{21}} + K_{f_1})$ ,  $\xi_2 = 10\zeta_1((K_{\gamma'} + 1) \cdot M_{a_1} + M_{a_2} + M_f)$ , получим  $v_1^n \leq K_{\gamma'} + \varepsilon(\xi_1 + \xi_2 v_1^{n-1})$ . Найдем такое  $\varepsilon$ , чтобы  $K_{\gamma'} + \varepsilon(\xi_1 + 10\zeta_1 \xi_2) \leq 10\zeta_1$ , т. е.  $\varepsilon \leq \frac{10\zeta_1 - K_{\gamma'}}{\xi_1 + 10\zeta_1 \xi_2}$ .

Таким образом, если  $v_1^{n-1} \leq 10\zeta_1$ , то  $v_1^n \leq 10\zeta_1$ . Мы получили, что  $v_1^n$  конечна при  $0 \leq \varepsilon \leq \frac{10\zeta_1 - K_{\gamma'}}{\xi_1 + 10\zeta_1 \xi_2}$ , тогда из неравенства  $\left| \frac{\partial H_1^n}{\partial x_1} - 1 \right| + \left| \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \right| + \left| \frac{\partial U^n}{\partial x_1} \right| \leq$

$\leq 10\zeta_1$  следует, что величины  $\left| \frac{\partial H_1^n}{\partial x_1} - 1 \right|$ ,  $\left| \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \right|$ ,  $\left| \frac{\partial U^n}{\partial x_1} \right|$  ограничены, а значит, ограничена и  $\frac{\partial H_1^n}{\partial x_1}$ . С учетом формулы (3.24):

$$\left| \frac{\partial W_2^n}{\partial x_1} \right| \leq 1 + \varepsilon c K_{a_1} K_{\varphi'} + (10\zeta_1)^2 \varepsilon M_{a_1} + 10\zeta_1 \varepsilon K_{a_1}, \quad \left\| \frac{\partial W_2^n}{\partial x_1} \right\| \leq \varepsilon (c K_{a_1} K_{\varphi'} + (10\zeta_1)^2 M_{a_1} + 10\zeta_1 K_{a_1}).$$

Аналогично показывается, что при  $0 \leq \varepsilon \leq \frac{10\zeta_1}{\xi_3 + 10\zeta_1 \xi_2}$  ограничены  $\frac{\partial H_1^n}{\partial x_2} - 1$ ,  $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial U^n}{\partial x_2}$ , а следовательно, и  $\frac{\partial H_1^n}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial W_2^n}{\partial x_2}$ . Здесь  $\zeta_1, \xi_2$  определены выше, а  $\xi_3 = c((K_{\gamma'} + 1)K_{a_1} + K_{a_2}) + 10\zeta_1((K_{\gamma'} + 1)K_{a_{12}} + K_{a_{22}} + K_{f_2})$ .

В силу  $W_{11}^n \rightarrow W_{11}$ , что  $\frac{\partial W_1}{\partial x_1} = W_{11}$  и  $|W_1^n - W_1| \leq \varepsilon_1$ , т. к.  $W_1^n \rightarrow W_1$ , получим  $\left| W_{11} - \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1} \right| \leq \varepsilon_1$ . Таким образом  $W_{11} = \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$ .

Равенства  $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2} = W_{12}$ ,  $\frac{\partial W_2^n}{\partial x_1} = W_{21}$ ,  $\frac{\partial W_2^n}{\partial x_2} = W_{22}$  доказываются аналогично.

Поскольку  $W_{11}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} W_{11}$ ,  $W_{12}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} W_{12}$ ,  $W_{21}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} W_{21}$ ,  $W_{22}^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} W_{22}$  и  $a_1^n, a_2^n, \gamma'(W_2^n)$ ,  $\frac{\partial W_2^n}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial W_2^n}{\partial x_2}$ ,  $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$ ,  $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}$  ограничены, то  $\forall \tilde{\varepsilon}_{\max} > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall n \geq N \|\Pi_n\| < \tilde{\varepsilon}_{\max}$ .

Значит,  $\|\hat{V} - \tilde{V}^n\| \leq 10\zeta_1 \varepsilon (M_{a_1} + M_{a_2} + M_f) \|\hat{V} - \tilde{V}^{n-1}\| + \tilde{\varepsilon}_{\max}$ .

Обозначим  $A_{\max} = 10\zeta_1 \varepsilon (M_{a_1} + M_{a_2} + M_f)$ , причем  $A_{\max} < 1$ . Тогда записанное выше неравенство примет вид  $\|\hat{V} - \tilde{V}^n\| \leq A_{\max} \|\hat{V} - \tilde{V}^{n-1}\| + \tilde{\varepsilon}_{\max}$ . Из этого следует, что для любого  $p \in \mathbb{N}$  имеем  $\|\hat{V} - \tilde{V}^{n+p}\| \leq A_{\max}^{p+1} \|\hat{V} - \tilde{V}^{n-1}\| + \frac{\tilde{\varepsilon}_{\max}}{1 - A_{\max}}$ . Поскольку  $A_{\max} < 1$ , переходя к пределу при  $n \rightarrow \infty$ , получим:  $\|\hat{V} - \tilde{V}^n\| \leq \delta$ , где  $\delta = \frac{\tilde{\varepsilon}_{\max}}{1 - A_{\max}}$ .

Мы доказали, что  $\tilde{V}^n$  в пространстве  $C^1(\Omega_\varepsilon)$  сходится по норме  $\|\tilde{V}^n\|$  при  $n \rightarrow \infty$ , то есть  $\frac{\partial H_1^n}{\partial x_1} \rightarrow H_{11}$ ,  $\frac{\partial H_1^n}{\partial x_2} \rightarrow H_{12}$ ,  $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \rightarrow H_{21}$ ,  $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \rightarrow H_{22}$ ,  $\frac{\partial U^n}{\partial x_1} \rightarrow U_1$ ,  $\frac{\partial U^n}{\partial x_2} \rightarrow U_2$  в пространстве  $C^1(\Omega_\varepsilon)$  сходится по норме  $\|\tilde{V}^n\|$ .

В результате для последовательностей  $\{H_1^n\}$ ,  $\{H_2^n\}$ ,  $\{U^n\}$  были установлены следующие свойства:  $H_1^n \rightarrow H_1 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ ,  $H_2^n \rightarrow H_2 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ ,  $U^n \rightarrow U \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ . В силу полноты и замкнутости  $C^1(\Omega_\varepsilon)$  получаем, что  $H_1 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ ,  $H_2 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ ,  $U \in C^1(\Omega_\varepsilon)$ , а значит, обладают частными производными по  $s, x_1, x_2$ , причем  $\frac{\partial H_1^n}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial H_1}{\partial x_1} \equiv H_{11}$ ,  $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \equiv H_{21}$ ,  $\frac{\partial H_1^n}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial H_1}{\partial x_2} \equiv H_{12}$ ,  $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \equiv H_{22}$ ,  $\frac{\partial U^n}{\partial x_1} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_1} \equiv U_1$ ,  $\frac{\partial U^n}{\partial x_2} \rightarrow \frac{\partial U}{\partial x_2} \equiv U_2$ . Таким образом, теорема доказана.

**Т е о р е м а 3.1** Пусть  $a_1(x_1, x_2, z)$ ,  $a_2(x_1, x_2, z)$ ,  $f(x_1, x_2, z)$  непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам в множестве  $Q_\rho$ ;  $L$  — кривая, несущая начальные данные:  $x_2 = \varphi(x_1)$ ;  $\varphi(x_1), \gamma(x_1) \in \overline{C}^2[X_1; X_2]$ ; выполнено основное условие разрешимости  $|J| \geq K_J$ . Тогда существует такое число  $\varepsilon_0 > 0$ , что при  $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$ , задача Коши (1.1), (3.1) имеет единственное решение  $z \in \overline{C}^1(\Omega_\varepsilon)$ , которое при  $s = \omega$  совпадает с функцией  $u(s, x_1, x_2) = U(s, x_1, x_2)$ , определяемой из резольвентной системы (3.8) — (3.15).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова, “Построение основной разрешающей системы интегральных уравнений для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2011, № 13, 61–70.
2. С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова, “Доказательство локальной разрешимости резольвентной системы интегральных уравнений, соответствующей квазилинейному уравнению в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2012, № 14, 41–51.
3. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “Условия целесообразности применения метода дополнительного аргумента к квазилинейным дифференциальным уравнениям первого порядка в частных производных общего вида”, *Асимптотические топологические и компьютерные методы в математике*, Труды междунар. научн. конф. посвящ. 70-летию академика М. И. Иманалиева (Бишкек, КГНУ), Сер. 3. Естеств. и техн. науки, Матем. науки. Информ. и инф. технологии, Вестник КГНУ, 2001, 6–7.
4. С. Н. Алексеенко, “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию разрешимости «одноосной» задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2009, № 11, 40–49.
5. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Доклады РАН*, **329**:5 (1993), 543–546.
6. С. Н. Алексеенко, “Доказательство сходимости последовательных приближений, построенных с помощью метода дополнительного аргумента в «одноосной» задаче Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2010, № 12, 51–57.
7. М. И. Иманалиев, П. С. Панков, С. Н. Алексеенко, “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. Специальный выпуск*, 2006, № 1, 60–64.
8. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.
9. М. И. Иманалиев, С. Н. Алексеенко, “К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема”, *Докл. АН*, **323**:3 (1992), 410–424.
10. М. И. Иманалиев, *Нелинейные интегро-дифференциальные уравнения с частными производными*, Илим, Бишкек, 1992, 111 с.

11. С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова, “Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:3 (2012), 21–28.
12. С. Н. Алексеенко, Л. Е. Платонова, “Доказательство теоремы о локальной разрешимости квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 27–37.

Поступила 10.02.2018

MSC2010 34C20

## A first-order partial differential equation of the common type with different ways of initial data

© S. N. Alekseenko<sup>1</sup>, L. E. Platonova<sup>2</sup>

**Abstract.** The Cauchy problem for a quasi-linear first order partial differential equation is studied for different cases of initial data. In the first case, the line carrying the initial data is specified parametrically; in the second case, this line is described in Cartesian coordinates and has an infinite length; in the third case, the line is specified in Cartesian coordinates and its length is finite. In each case, the local resolvability conditions are formulated for the considered quasi-linear equation and it is shown that the solution has the same smoothness as the function defining the initial conditions. To study the above problems the method of additional argument was used. Using this method, some system of integral equations is solved, and the solution of this system gives the solution of the Cauchy problem for the original equation.

**Key Words:** quasi-linear first order partial differential equation, Cauchy problem, method of an additional argument, local resolvability, integral equation.

## REFERENCES

1. S. N. Alekseenko, L. E. Platonova, “The construction of the basic resolution of the system of integral equations for quasi-linear partial differential equations of the first order in the case of parametric setting initial data”, *Matematicheskiiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **13** (2011), 61–70 (In Russ.).
2. S. N. Alekseenko, L. E. Platonova, “Proof of local solvability of the resolvent of a system of integral equations corresponding to quasi-linear equations of the first order in the case of parametric setting initial data”, *Matematicheskiiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **14** (2012), 41–51 (In Russ.).

<sup>1</sup> **Sergey N. Alekseenko**, Professor of the Applied Mathematics Chair, Nizhniy Novgorod State Technical University named after R. E. Alekseev (24 Minin St., Nizhniy Novgorod 603950, Russia), Dr.Sci.(Physies and Mathematics), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-1455-1263>, [sn-alekseenko@yandex.ru](mailto:sn-alekseenko@yandex.ru)

<sup>2</sup> **Lyubov E. Platonova**, Assistant Lecture of the Mathematical Analysis Chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University named after Kozma Minin (1 Ylyanov St., Nizhniy Novgorod 604950, Russia), ORCID:<http://orcid.org/0000-0003-3601-2276>, [fluff13@yandex.ru](mailto:fluff13@yandex.ru)

3. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, "The terms of expedience of application of the method of additional argument to a quasilinear differential equations of the first order equations general form", *Asimptoticheskiye topologicheskkiye i kompyuternye metody v matematike*, Trudy mezhdunar. nauch. konf. posvyashch. 70-ti letiyu akademika M. I. Imanalieva (Bishkek, KGNU), Ser. 3 Estestv. i tekhn. nauki, **6**, Matem.nauki. Inform. i inf. tekhnologii, Vestnik KGNU, 2001, 6–7 (In Russ.).
4. S. N. Alekseenko, "[Application of the method of an additional argument to the study of the solvability of the "uniaxial" Cauchy problem for quasilinear partial differential equations of the first order]", *Matematicheskiiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **11** (2009), 40–49 (In Russ.).
5. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, "[On the theory of nonlinear equations with a differential operator of the type of the total time derivative]", *Doklady RAN*, **329**:5 (1993), 543–546 (In Russ.).
6. S. N. Alekseenko, "[Proof of the convergence of successive approximations constructed using the method of an additional argument in the "uniaxial" Cauchy problem for quasilinear partial differential equations of the first order]", *Matematicheskiiy vestnik pedvuzov i universitetov Volgo-Vyatskogo regiona*, **12** (2010), 51–57 (In Russ.).
7. M. I. Imanaliev, P. S. Pankov, S. N. Alekseenko, "[Additional argument method]", *Vestnik KazNU. Seriya matematika, mekhanika, informatika. Spetsial'nyy vypusk*, **1** (2006), 60–64 (In Russ.).
8. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, "[On the existence of a smooth bounded solution for a system of two nonlinear partial differential equations of the first order]", *Dokl. RAN*, **379**:1 (2001), 16–21 (In Russ.).
9. M. I. Imanaliev, S. N. Alekseenko, "[On the theory of non-linear integro-differential partial differential equations of Whitham type]", *Dokl. AN*, **323**:3 (1992), 410–424 (In Russ.).
10. M. I. Imanaliev, *Nelineynye integro-differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Nonlinear integro-differential equations with partial derivatives], Ilim, Bishkek, 1992 (In Russ.), 111 p.
11. S. N. Alekseenko, L. E. Platonova, "A first-order partial differential equation of the common type with initial data in Cartesian coordinates on an infinite length line", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **14**:3 (2012), 21–28 (In Russ.).
12. S. N. Alekseenko, L. E. Platonova, "The proof of a local solvability theorem for a quasi-linear first-order partial differential equation of the common type with initial data in Cartesian coordinates on an infinite length line", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **15**:2 (2013), 27–37 (In Russ.).

*Submitted 10.02.2018*

УДК 517.984

## Восстановление полиномиального потенциала в задаче Штурма–Лиувилля

© А. М. Ахтямов<sup>1</sup>, И. М. Утяшев<sup>2</sup>

**Аннотация.** Рассмотрена задача идентификации полиномиального коэффициента упругости среды по собственным частотам колеблющейся в этой среде струны. Приведен метод решения задачи, основанный на представлении линейно независимых решений дифференциального уравнения в виде рядов Тейлора по переменным  $x$  и  $\lambda$ . Разработан также метод, который позволяет доказывать не одного или многих восстановленного полиномиальных коэффициентов упругости среды по конечному числу собственных частот колебаний струны. Данный метод основан на методе вариации произвольной постоянной. Приведены примеры решения задачи и оценка погрешности результата. В работе показано, что для однозначной идентификации  $n + 1$  коэффициентов полинома степени  $n$ , являющимся потенциалом в задаче Штурма–Лиувилля, достаточно использовать  $n + 1$  собственное значение. При этом собственные значения берутся из двух разных краевых задач, отличающихся одним из краевых условий. Количество собственных значений в каждой задаче берется по половине. Если это число является нечетным, то количество собственных значений из спектра одной из задач будет на единицу большим. Приведен контрпример, из которого следует, что использование собственных частот только из одного спектра не позволяет найти единственное решение. По сути, приведенные результаты уточняют известную теорему Борга на случай, когда потенциал является полиномом. Кроме этого, метод, позволяющий выявить класс изоспектральных задач, для которых спектр собственных частот совпадает.

**Ключевые слова:** спектральная задача, идентификация потенциала, струна, обратная задача, собственные значения, полиномиальный потенциал, задача Штурма–Лиувилля, восстановление потенциала.

### 1. Введение

В 1929 г. В. А. Амбарцумян показал [1], что для краевой задачи с дифференциальным уравнением

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y = s^2 y \quad (1.1)$$

и краевыми условиями  $y'(0) = y'(\pi) = 0$ , где  $q(x)$  – действительная непрерывная функция, и если  $\lambda_n = n^2$ , ( $n = 0, 1, \dots$ ), то  $q(x) \equiv 0$ . Другими словами, было показано, что если спектр уравнения  $y'' + \lambda y = 0$  при тех же краевых условиях сохранился, то вероятность возмущения отсутствовала. В 1946 г. [2] Г. Борг показал (см. также [3]), что один спектр не определяет уравнения, и случай Амбарцумяна является исключением. Г. Боргом были рассмотрены способы построения уравнения по двум спектрам. В дальнейшем в 50-х и 60-х г. XX в. в работах В. А. Марченко, Б. М. Левитана и М. Г. Гасимова были

<sup>1</sup> Ахтямов Азамат Мухтарович, профессор кафедры математического моделирования, ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет" (450074, Россия, г. Уфа, ул. З. Валиди, д. 32), ФГБНУ Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН (450054, Россия, г. Уфа, пр. Октября, д. 71), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2080-6648>, [akhtyamovam@mail.ru](mailto:akhtyamovam@mail.ru)

<sup>2</sup> Утяшев Ильнур Мирзович, научный сотрудник, ФГБНУ Институт механики им. Р. Р. Мавлютова УФИЦ РАН (450054, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, пр. Октября, д. 71), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2342-0492>, [utyashevim@mail.ru](mailto:utyashevim@mail.ru)

найжены необходимые и достаточные условия, при которых оператор Штурма-Лиувилля с дискретным спектром однозначно определяется двумя спектрами краевых задач с различными граничными условиями в нулевой точке и одинаковыми граничными условиями на другом конце. В частности, непрерывная функция  $q(x)$  может быть однозначно определена по спектрам двух задач  $L_0$  и  $L_1$ , где через  $L_0$  и  $L_1$  обозначены следующие задачи Штурма-Лиувилля:

З а д а ч а  $L_0$  :

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y; \quad y(0) = y(1) = 0, \lambda = s^2; \quad (1.2)$$

З а д а ч а  $L_1$  :

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y, \quad y'(0) = y(1) = 0, \lambda = s^2. \quad (1.3)$$

После публикации классических монографий В. А. Марченко [4] и Б. М. Левитана [5], где потенциал  $q(x)$  представлял собой либо непрерывную, либо суммируемую функцию, основные усилия ученых были направлены на обобщение полученных результатов как в направлении восстановления более общих потенциалов и дифференциальных уравнений [6]–[9], так и в направлении использования более общих краевых условий [10]–[15]. Во всех указанных работах для восстановления непрерывной функции или более общей функции  $q(x)$  требуется минимум два бесконечных набора собственных чисел. Однако для задач физики и механики такой подход мало эффективен, т. к. в реальных условиях с помощью частотомеров можно определить лишь конечные наборы собственных частот. Кроме этого, как правило, об идентифицируемом объекте имеется некоторая дополнительная информация, которая позволяет конкретизировать класс искомых функций. Поэтому возникает задача идентификации потенциала специального вида по конечному числу собственных частот. Тем не менее эффективных методов решения этой задачи предложено не было. Ранее решались задачи идентификации видов и параметров краевых условий по конечному числу собственных частот [16]–[18]. Для идентификации краевых условий задачи Штурма-Лиувилля с потенциалом специального вида авторами был использован метод разложения в ряд Тейлора по переменным  $x$  и  $\lambda$  линейно независимых решений дифференциального уравнения. В работах [17]–[18] было замечено, что если разложить в ряды решения уравнения Штурма-Лиувилля с линейным потенциалом  $q(x)$ , то краевые условия можно достаточно точно восстановить по собственным значениям задачи Штурма-Лиувилля, используя только главную часть ряда. В настоящей работе этот метод предлагается использовать для восстановления полиномиального потенциала вида

$$q(x) = q_0 + q_1x + \dots + q_{n-1}x^{n-1}, \quad (1.4)$$

где  $q_m \in \mathbb{R}$  ( $m = 1, 2, \dots, n-1$ ).

**Пример 1.1** Пусть искомым коэффициентом упругости среды описывается линейным потенциалом  $q(x) \equiv q_0 + q_1x$ , а собственными значениями задачи

$$ly = -y'' + q(x)y = \lambda y; \quad y(0) = y(1) = 0, \lambda = s^2, \quad (1.5)$$

являются числа  $s_1^2 = 6,4405^2$ ,  $s_2^2 = 9,5303^2$ . По этим двум собственным числам  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  задачи (1.5) требуется восстановить линейный потенциал  $q(x)$ .

Если  $y_1(x, \lambda)$  и  $y_2(x, \lambda)$  – линейно независимые решения уравнения (1.5), удовлетворяющие условиям

$$y_1(0, \lambda) = 1, \quad y_1'(0, \lambda) = 0, \quad y_2(0, \lambda) = 0, \quad y_2'(0, \lambda) = 1, \quad (1.6)$$

то характеристическим определителем задачи (1.5) является функция

$$\Delta_0(\lambda) = y_2(1, \lambda). \quad (1.7)$$

Решения  $y_1(x, \lambda)$  и  $y_2(x, \lambda)$  можно найти в виде ряда Тейлора с помощью пакета аналитических вычислений. Данные решения будут содержать неизвестные коэффициенты  $q_0$  и  $q_1$ . Подставив числа  $s_1^2 = 6,4405^2$ ,  $s_2^2 = 9,5303^2$  и главную часть ряда Тейлора (150 первых членов ряда) для  $y_2(x, \lambda)$  в (1.7), получим систему двух нелинейных уравнений относительно  $q_0$  и  $q_1$ . Решив эту систему в пакете аналитических вычислений, найдем:  $q_0 = 1,0000$  и  $q_1 = 2,0000$ , откуда  $q(x) = 1 + 2x$ . Пакет аналитических вычислений находит только одно из решений. Мы не можем гарантировать, что не существует других значений  $q_0$  и  $q_1$ , которые также являются решениями. Для доказательства единственности или неединственности решения, а также отыскания класса изоспектральных краевых задач (краевых задач с общим спектром) мы предлагаем метод, основанный на следующей лемме.

**Л е м м а 1.1** Произвольное решение  $y(x) = y(x, \lambda)$  уравнения (1.1) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} y(x) = & y(0) \cos(sx) + C_2 \frac{\sin(sx)}{s} + \\ & + q_0 \left( -\cos(sx) \int_0^x \frac{\sin(s\xi)}{s} y(\xi) d\xi + \frac{\sin(sx)}{s} \int_0^x \cos(s\xi) y(\xi) d\xi \right) + \\ & + q_1 \left( -\cos(sx) \int_0^x \xi \frac{\sin(s\xi)}{s} y(\xi) d\xi + \frac{\sin(sx)}{s} \int_0^x \xi \cos(s\xi) y(\xi) d\xi \right) + \\ & + \dots + \\ & + q_{n-1} \left( -\cos(sx) \int_0^x \xi^{n-1} \frac{\sin(s\xi)}{s} y(\xi) d\xi + \frac{\sin(sx)}{s} \int_0^x \xi^{n-1} \cos(s\xi) y(\xi) d\xi \right), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $C_2$  – некоторое постоянное число.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Уравнение (1.1) можно переписать в виде

$$y'' + s^2 y = q(x)y. \quad (1.9)$$

Однородное уравнение  $y'' + s^2 y = 0$  имеет фундаментальную систему решений  $\cos(sx)$  и  $\frac{1}{s} \sin(sx)$ . Поэтому, рассматривая (1.9) как неоднородное уравнение с правой частью  $q(x)y$  и применяя метод вариации произвольных постоянных, получим

$$y = C_1 \cos(sx) + C_2 \frac{\sin(sx)}{s} - \cos(sx) \int_0^x \frac{\sin(s\xi)}{s} q(\xi) y(\xi) d\xi + \frac{\sin(sx)}{s} \int_0^x \cos(s\xi) q(\xi) y(\xi) d\xi$$

Рассматривая функцию на границе  $x = 0$ , из последнего уравнения получим  $y(0) = C_1 \cdot 1 + 0$ , откуда

$$y = y(0) \cos(sx) + C_2 \frac{\sin(sx)}{s} - \cos sx \int_0^x \frac{\sin(s\xi)}{s} q(\xi) y(\xi) d\xi + \frac{\sin(sx)}{s} \int_0^x \cos(s\xi) q(\xi) y(\xi) d\xi.$$

Поскольку  $q(\xi) = q_0 + q_1 \xi + \dots + q_{n-1} \xi^{n-1}$ , то выполняется уравнение (1.8). Доказательство завершено.



В примере 1.1 был найден линейный потенциал  $q(x) = 1 + 2x$ . Проверим, является ли данный потенциал единственным решением обратной задачи. Подставив  $y_2(x, \lambda)$ , полученный с учетом  $q(x) = 1 + 2x$ , в качестве  $y$  в формулу (1.8) и учитывая, что  $y_2(0) = 0$ , получим:

$$y_2(x, \lambda) = C_2 \cdot \frac{\sin(s)}{s} + \\ + q_0 \left( -\cos(sx) \int_0^x \frac{\sin(s\xi)}{s} y_2(\xi, s) d\xi + \frac{\sin(sx)}{s_i} \int_0^x \cos(s\xi) y_2(\xi, s) d\xi \right) + \\ + q_1 \left( -\cos(sx) \int_0^x \xi \frac{\sin(s\xi)}{s} y_2(\xi, s) d\xi + \frac{\sin(sx)}{s} \int_0^x \xi \cos(s\xi) y_2(\xi, s) d\xi \right). \quad (1.10)$$

Из (1.10) и того, что  $y_2'(0, \lambda) = 1$ , следует, что  $C_2 = 1$ . Подставив первые два собственных значения  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  задачи (1.5) и  $x = 1$  в (1.10), получим систему двух уравнений:

$$y_2(1, \lambda_i) = \frac{\sin(s_i)}{s_i} + \\ + q_0 \left( -\cos(s_i) \int_0^1 \frac{\sin(s_i \xi)}{s_i} y_2(\xi, s_i) d\xi + \frac{\sin(s_i)}{s_i} \int_0^1 \cos(s_i \xi) y_2(\xi, s_i) d\xi \right) + \\ + q_1 \left( -\cos(s_i) \int_0^1 \xi \frac{\sin(s_i \xi)}{s_i} y_2(\xi, s_i) d\xi + \frac{\sin(s_i)}{s_i} \int_0^1 \xi \cos(s_i \xi) y_2(\xi, s_i) d\xi \right) \quad (1.11)$$

или

$$0,024 - 0,012q_0 - 0,006q_1 = 0, \quad -0,011 + 0,0055q_0 + 0,0027q_1 = 0. \quad (1.12)$$

Эти уравнения эквивалентны одному уравнению  $4 - 2q_0 - q_1 = 0$ . Таким образом, задачи с потенциалами

$$q(x) = C + (4 - 2C)x, \quad (1.13)$$

где  $C$  – произвольная константа, имеют одинаковые собственные значения. Случай  $q(x) = 1 + 2x$  соответствует случаю  $C = 1$ . Случаю  $C = 3$  соответствует потенциал  $q(x) = 3 - 2x$ . Для этого потенциала и потенциала  $q(x) = 1 + 2x$  совпадают не только собственные значения  $s_1^2 = 6,4405^2$ ,  $s_2^2 = 9,5303^2$ , но и все остальные. Например, первые пять значений  $s_i$  для задач с потенциалами  $q(x) = 1 + 2x$  и  $q(x) = 3 - 2x$ , вычисленные с точностью до 40 значащих цифр, совпадают и равны следующим числам:

$$s_1 = 3,444592241548059895610761118187224604007, \\ s_2 = 6,440475610421840155099076164164271139007, \\ s_3 = 9,530331543667758339267096856447256452604, \\ s_4 = 12,64571658723299479266848704707473243409, \\ s_5 = 15,77150681554023652826610297003474673742.$$

Таким образом, задача идентификации линейного потенциала по собственным значениям краевой задачи  $L_0$  имеет не одно решение. Однако как было отмечено выше,  $q(x)$  однозначно определяется по спектрам двух задач  $L_0$  и  $L_1$ . Это наводит на мысль, что линейная функция  $q(x)$  может быть однозначно определена по двум собственным значениям, первое из которых является собственным значением задачи  $L_0$ , а второе – задачи  $L_1$ .

Пусть  $q(x) \equiv q_0 + q_1x$ ; одним из собственных значений задачи  $L_0$  является  $6,4405^2$ ; одним из собственных значений задачи  $L_1$  является  $2,0134^2$ . По этим двум собственным числам требуется восстановить линейный потенциал  $q(x) = q_0 + q_1x$ . Если  $y_1(x, \lambda)$  и  $y_2(x, \lambda)$  – линейно независимые решения уравнения (1.5), удовлетворяющие (1.6), то характеристическим определителем задачи  $L_0$  является функция (1.7), а  $L_1$  – функция

$$\Delta_1(\lambda) = y_1(1, \lambda). \quad (1.14)$$

Подставив главную часть ряда Тейлора для  $y_2(x, 6,4405^2)$  в (1.7), а для  $y_1(x, 2,0134^2)$  в (1.14), получим систему уравнений относительно  $q_0$  и  $q_1$ . Решив данную систему в пакете аналитических вычислений, найдем  $q_0 = 1,0000$  и  $q_1 = 2,0000$  откуда  $q(x) = 1 + 2x$ . Для доказательства единственности решения воспользуемся леммой 1.1

Подставив собственное значение  $6,4405^2$  задачи (1.5) и  $x = 1$  в (1.10), получим первое уравнение из системы (1.12):

$$0,024 - 0,012q_0 - 0,006q_1 = 0. \quad (1.15)$$

Подставив собственное значение  $2,0134^2$  и  $y_1(x, 2,0134^2) = \Delta_1(2,0134^2) = 0$  в качестве  $y$  в формулу (1.8), получим уравнение

$$\begin{aligned} y_1(1, \lambda_1) = & y_1(0) \cdot \cos(2,0134) + C_2 \cdot \frac{\sin(2,0134)}{2,0134} + \\ & + q_0 \left( -\frac{\cos(2,0134)}{2,0134} \int_0^1 \sin(2,0134\xi) y_1(\xi, 2,0134) d\xi + \right. \\ & + \left. \frac{\sin(2,0134\pi)}{2,0134} \int_0^1 \cos(2,0134\xi) y_1(\xi, 2,0134) d\xi \right) + \\ & + q_1 \left( -\frac{\cos(2,0134\pi)}{2,0134} \int_0^1 \xi \sin(2,0134\xi) y_1(\xi, 2,0134) d\xi + \right. \\ & + \left. \frac{\sin(2,0134)}{2,0134} \int_0^1 \xi \cos(2,0134\xi) y_1(\xi, 2,0134) d\xi \right). \end{aligned} \quad (1.16)$$

Найдем  $C_2$ , воспользовавшись условием (1.6) для  $y_1$ :  $y_1'(0, \lambda) = 0 + C_2 \cdot 1 + 0 = 0$ . Отсюда и из (1.16) получим:

$$-0,42 + 0,26q_0 + 0,08q_1 = 0. \quad (1.17)$$

Решив систему уравнений (1.15) и (1.17), получим единственное решение  $q_0 = 1,00$ ,  $q_1 = 2,00$ . Таким образом, потенциал  $q(x) = 1 + 2x$  однозначно идентифицируется по двум собственным значениям, где одно взято из задачи  $L_0$ , а другое – из  $L_1$ .

Рассмотрим еще один пример.

**Пример 1.2** Пусть  $q(x) \equiv q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4$ ; собственными значениями задачи  $L_0$  являются числа  $s_1^2 = 3.7200^2$ ,  $s_2^2 = 6.6531^2$ ,  $s_3^2 = 9.6823^2$ ; а собственными значениями задачи  $L_1$  – числа  $s_4^2 = 2.1936^2$ ,  $s_5^2 = 5.1710^2$ . По этим пяти собственным числам требуется восстановить полином  $q(x) \equiv q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + q_4x^4$ .

Подставив главную часть ряда Тейлора для  $y_2(x, s_i^2)$ ,  $i = 1, 2, 3$  в (1.7), а для  $y_1(x, s_i^2)$ ,  $i = 4, 5$  в (1.14), получим систему уравнений относительно  $q_0$ ,  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$  и  $q_4$ . Решив эту систему уравнений в пакете аналитических вычислений, найдем:  $q_0 = 1,0000$ ,  $q_1 = 2,0000$ ,  $q_2 = 3,0000$ ,  $q_3 = 4,0000$  и  $q_4 = 5,0000$ . Откуда  $q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$ . Для доказательства единственности решения воспользуемся леммой 1.1

Подставив собственные значения  $s_i^2$ ,  $i = 1, 2, 3$  задачи  $L_0$  и  $x = 1$  в

$$\begin{aligned} y_2(1, \lambda_i) = & \frac{\sin(s_i)}{s_i} + \\ & + q_0 \left( -\cos(s_i) \int_0^1 \frac{\sin(s_i \xi)}{s_i} y_2(\xi, s_i) d\xi + \frac{\sin(s_i)}{s_i} \int_0^1 \cos(s_i \xi) y_2(\xi, s_i) d\xi \right) + \\ & + q_1 \left( -\cos(s_i) \int_0^1 \xi \frac{\sin(s_i \xi)}{s_i} y_2(\xi, s_i) d\xi + \frac{\sin(s_i)}{s_i} \int_0^1 \xi \cos(s_i \xi) y_2(\xi, s_i) d\xi \right) + \\ & + \dots + \\ & + q_4 \left( -\cos(s_i) \int_0^1 \xi^4 \frac{\sin(s_i \xi)}{s_i} y_2(\xi, s_i) d\xi + \frac{\sin(s_i)}{s_i} \int_0^1 \xi^4 \cos(s_i \xi) y_2(\xi, s_i) d\xi \right). \end{aligned} \quad (1.18)$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} -0.14696 + 0.03233q_0 + 0.01773q_1 + 0.01043q_2 + 0.00655q_3 + 0.00434q_4 &= 0, \\ 0.05434 - 0.01089q_0 - 0.00570q_1 - 0.00370q_2 - 0.00268q_3 - 0.00204q_4 &= 0, \\ -0.02630 + 0.00524q_0 + 0.00269q_1 + 0.00177q_2 + 0.00131q_3 + 0.00103q_4 &= 0. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Подставив собственные значения  $s_i^2$ ,  $i = 4, 5$  задачи  $L_1$  и  $x = 1$  в

$$\begin{aligned} y_2(1, \lambda_i) = & \cos(s_i) + \\ & + q_0 \left( -\cos(s_i) \int_0^1 \frac{\sin(s_i \xi)}{s_i} y_2(\xi, s_i) d\xi + \frac{\sin(s_i)}{s_i} \int_0^1 \cos(s_i \xi) y_2(\xi, s_i) d\xi \right) + \\ & + q_1 \left( -\cos(s_i) \int_0^1 \xi \frac{\sin(s_i \xi)}{s_i} y_2(\xi, s_i) d\xi + \frac{\sin(s_i)}{s_i} \int_0^1 \xi \cos(s_i \xi) y_2(\xi, s_i) d\xi \right) + \\ & + \dots + \\ & + q_4 \left( -\cos(s_i) \int_0^1 \xi^4 \frac{\sin(s_i \xi)}{s_i} y_2(\xi, s_i) d\xi + \frac{\sin(s_i)}{s_i} \int_0^1 \xi^4 \cos(s_i \xi) y_2(\xi, s_i) d\xi \right), \end{aligned} \quad (1.20)$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} -0.58332 + 0.22989q_0 + 0.07130q_1 + 0.03159q_2 + 0.01670q_3 + 0.00985q_4 &= 0, \\ 0.44268 - 0.09763q_0 - 0.04614q_1 - 0.03012q_2 - 0.02124q_3 - 0.01549q_4 &= 0. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Решив систему уравнений (1.19) и (1.21), получим единственное решение  $q_0 = 1.0000$ ,  $q_1 = 2.0000$ ,  $q_2 = 3.0000$ ,  $q_3 = 4.0000$ ,  $q_4 = 5.0000$ . Таким образом, потенциал  $q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$  однозначно идентифицируется по пяти собственным значениям, где три взяты из задачи  $L_0$ , а две — из  $L_1$ .

## 2. О методах, использованных в работе

Метод поиска собственных значений с помощью разложения в степенной ряд был применен в книге [19], однако собственные значения находились не путем обрыва ряда и решения соответствующего алгебраического уравнения, а с помощью получения рекуррентных формул.

Метод, основанный на методе вариации произвольной постоянной и использованный нами для доказательства единственности или неединственности найденного полиномиального потенциала, был использован ранее (см., например, [20]) для другой цели — получения асимптотических соотношений для фундаментальной системы решений при больших  $|\lambda|$ .

### 3. Оценка погрешности вычисления собственных значений

Для вычислений в пакете аналитических вычислений использование первых 50–60 членов ряда (некоторые коэффициенты которого могут быть равны нулю) дает удовлетворительные результаты как при вычислении собственных значений, так и при отыскании потенциала. Связано это с тем, что характеристический определитель оказывается знакопередающимся рядом. Например, для  $q(x) = 1 + 2x$  он представляет собой следующую сумму:

$$\Delta(\lambda) = 1.3679 - 0.2025s^2 + 0.0096s^4 + \dots + 2.4884 \cdot 10^{-77}s^{56} - 7.2107 \cdot 10^{-81}s^{58}.$$

Известно, что по признаку Лейбница остаток ряда  $R_{56} = -7.210682962 \cdot 10^{-81}s^{58} + \dots$  можно оценить его первым слагаемым, т. е.

$$|R_{56}| \leq 7.21069 \cdot 10^{-81}s^{58}.$$

Для  $s_i < 10$  остаток  $|R_{56}| < 10^{-22}$ , поэтому погрешности в вычислении собственных значений являются малыми.

При  $q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$  характеристический определитель для краевых условий  $y(0) = y(1) = 0$  при использовании первых 56 членов ряда имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = 1,9130 - 0,25616s^2 + 0,011489s^4 + \dots + 2,48841 \cdot 10^{-77}s^{56} - 7,21068 \cdot 10^{-81}s^{58},$$

а характеристический определитель для краевых условий  $y'(0) = y(1) = 0$  –

$$\Delta_1(\lambda) = 2,0798 - 0,27320 \cdot s^2 + 0,012101 \cdot s^4 + \dots + 2,4884 \cdot 10^{-77}s^{56} - 7,2107 \cdot 10^{-81}s^{58}.$$

Поэтому для потенциала  $q(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$ , так же как для случая  $q(x) = 1 + 2x$ , остаток ряда  $|R_{56}| < 10^{-22}$  при  $s_i < 10$ .

### 4. Оценка погрешности решения обратной задачи

Для оценки того, как меняется погрешность в решении обратной задачи при изменении погрешности частот, был проведен следующий вычислительный эксперимент. В качестве «точных» значений решения обратной задачи были взяты значения  $q_0, q_1, q_2, q_3, q_4$ , вычисленные с точностью до 40 значащих цифр. При расчетах было использовано разложение фундаментальной системы решений в степенной ряд до 60-й степени. Далее все пять собственных частот подверглись возмущению, после чего были определены соответствующие абсолютные погрешности решения. В таблице 1 приведены абсолютные погрешности собственных значений  $\lambda_1$  и найденного коэффициента  $q_0$  а также их отношение, из которого видно, что абсолютная погрешность результата приблизительно в 17–18 раз больше абсолютной погрешности входных данных.

Таблица 1: Отношение абсолютных погрешностей выходных данных к входным

| $\Delta(\lambda_1)$ | $\Delta(q_0)$ | $\Delta(q_0)/\Delta(\lambda_1)$ |
|---------------------|---------------|---------------------------------|
| 10-2                | 1,74356·10-1  | 17,43559                        |
| 10-3                | 1,75764·10-2  | 17,57644                        |
| 10-4                | 1,75907·10-3  | 17,59066                        |
| 10-5                | 1,75921·10-4  | 17,59208                        |
| 10-6                | 1,75922·10-5  | 17,59222                        |
| 10-7                | 1,75922·10-6  | 17,59224                        |
| 10-8                | 1,75922·10-7  | 17,59224                        |
| 10-9                | 1,75922·10-8  | 17,59224                        |

## 5. Заключение

В работе показано, что потенциал, заданный в виде полинома степени  $n$ , идентифицируется по конечному набору собственных значений. Приведен контрпример, из которого следует, что частоты из одного спектра не дают однозначного решения. Предложен метод, позволяющий выявить класс изоспектральных задач, для которых спектр собственных частот совпадает. Данный метод был применен для доказательства того факта, что однозначно идентифицировать потенциал можно по двум конечным наборам собственных частот, взятых из разных спектров одной и той же задачи при различных краевых условиях (по сути, таким образом была доказана теорема Борга для случая, когда потенциал является полиномом).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научных проектов №№ 17-41-020230-р\_а, 17-41-020400-р\_а, 18-01-00150-А.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. W. A. Ambarzumijan, “Über eine Frage der Eigenwerttheorie”, *Zeitschrift für Physik*, 1929, № 53, 690–695.
2. G. Borg, “Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwert Aufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte”, *Acta Math.*, **78**:1 (1946), 1–96.
3. N. Levinson, “The inverse Sturm–Liouville problem”, *Math. Tidsskr.*, **3** (1949), 25–30.
4. В. А. Марченко, *Операторы Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977, 329 с.
5. Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма–Лиувилля и их приложения*, Наука, Москва, 1984, 240 с.
6. А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Обратные задачи для оператора Штурма–Лиувилля с потенциалами из пространств Соболева. Равномерная устойчивость”, *Функц. анализ и его приложения*, **44**:4 (2010), 34–53.
7. В. А. Юрко, *Введение в теорию обратных спектральных задач*, Физматлит, Москва, 2007, 384 с.
8. И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, “Обратная спектральная задача для пучков дифференциальных операторов”, *Математический сборник*, **198**:11 (2007), 47–66.
9. И. М. Набиев, “Обратная квазипериодическая задача для оператора диффузии”, *ДАН*, **415**:2 (2007), 168–170.
10. В. А. Садовничий, “Единственность решения обратной задачи в случае уравнения второго порядка с нераспадающимися условиями, регуляризованные суммы части собственных чисел. Факторизация характеристического определителя”, *ДАН СССР*, **206**:2 (1972), 293–296.
11. V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, A. M. Akhtyamov, “General inverse Sturm–Liouville problem with symmetric potential”, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **5**:2 (2015), 96–108.

12. М. Г. Гасымов, И. М. Гусейнов, И. М. Набиев, “Обратная задача для оператора Штурма–Лиувилля с неразделенными самосопряженными граничными условиями”, *Сибирский математический журнал*, **31**:6 (1991), 46–54.
13. Е. Л. Коротяев, Д. С. Челкак, “Обратная задача Штурма–Лиувилля со смешанными краевыми условиями”, *Алгебра и анализ*, **21**:5 (2009), 114–137.
14. Kh.R. Mamedov, F. Cetinkaya, “Inverse problem for a class of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in boundary condition”, *Bound. Value Probl. electronic only.*, 2013, 16, <http://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/13661>.
15. E.S. Panakhov, H. Koyunbakan, Ic. Unal, “Reconstruction formula for the potential function of Sturm–Liouville problem with eigenparameter boundary condition”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **18**:1 (2010), 173–180.
16. A. M. Akhtyamov, A. V. Mouftakhov, “Identification of boundary conditions using natural frequencies”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **12**:4 (2004), 393–408.
17. А. М. Ахтямов, И. М. Утяшев, “Идентификация краевых условий на обоих концах струны по собственным частотам колебаний”, *Акустический журнал*, **61**:6 (2015), 647–655.
18. И. М. Утяшев, А. М. Ахтямов, “Идентификация краевых условий струны по собственным частотам колебаний”, *Труды Института механики им. Р. Р. Мавлютова*, **11**:1 (2016), 38–52.
19. А. Коллатц, *Задачи на собственные значения (с техническими приложениями)*, Наука, Москва, 1968, 504 с.
20. М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, Москва, 1969, 526 с.

Поступила 14.03.2018

MSC2010 35P05

# Restoration of the polynomial potential in the Sturm-Liouville problem

© A. M. Akhtyamov<sup>1</sup>, I. M. Utyashev<sup>2</sup>

**Abstract.** The problem of identification of medium elasticity by eigenfrequencies of the string oscillating in this medium is considered. The elasticity is supposed to be some polynomial. A solution method based on the representation of linearly independent solutions of the differential equation in the form of Taylor series by variables  $x$  and  $\lambda$  is presented. A method is also developed that allows to prove uniqueness or non-uniqueness of reconstructed polynomial elasticity coefficient by a finite number of natural frequencies of string vibrations. The latter method is based on the method of arbitrary constant variation. The examples of the problem solution and of the error estimation for the result are given. It is shown that for the unambiguous identification of  $n + 1$  coefficients of the  $n$ th power polynomial, which is a potential in the Sturm-Liouville problem, it is sufficient to use  $n + 1$  eigenvalue. These eigenvalues are found from two different boundary value problems, that differ in one of the boundary conditions. Only a half of eigenvalues' number in each problem must be taken into account. If this number is odd, the number of eigenvalues that should be taken from one of the problems' spectra must be increased by one. A counterexample is given showing that eigenfrequencies taken only from one spectrum don't allow to find the unique solution. In fact, these results improve the well-known Borg theorem in the case when the potential is a polynomial. Also the method is proposed that helps to find the isospectral class of problems for which the range of frequencies is the same.

**Key Words:** eigenvalue problem, potential identification, string, inverse problem, eigenvalues.

## REFERENCES

1. W. A. Ambarzumijan, "Über eine frage der eigenwerttheorie", *Zeitschrift für Physik*, **53** (1929), 690–695.
2. G. Borg, "Eine Umkehrung der Sturm–Liouvilleschen Eigenwert Aufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte", *Acta Math*, **78**:1 (1946), 1–96.
3. N. Levinson, "The inverse Sturm-Liouville problem", *Math. Tidsskr.*, **3** (1949), 25–30.
4. V. A. Marchenko, *[Operators of Sturm-Liouville and their applications]*, Naukova dumka, Kiev, 1977 (In Russ.), 329 c.
5. B. M. Levitan, *[Inverse Sturm-Liouville problems and their applications]*, Nauka Publ., Moscow, 1984 (In Russ.), 240 c.
6. A. M. Savchuk, A. A. Shkalikov, "[Inverse problems for Sturm-Liouville operators with potentials in Sobolev spaces: Uniform stability]", *Functional Analysis and Its Applications*, **44**:4 (2010), 270–285 (In Russ.).

<sup>1</sup> **Azamat M. Akhtyamov**, Professor of the Department of Mathematical Modeling, Bashkir State University (32 Z. Validi Str., Ufa, 450074, Republic of Bashkortostan, Russia), Chief Researcher Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS (71 Prospect of October, Ufa, 450054, Republic of Bashkortostan, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2080-6648>, [akhtyamovam@mail.ru](mailto:akhtyamovam@mail.ru)

<sup>2</sup> **Ilnur M. Utyashev**, Researcher Mavlyutov Institute of Mechanics UFRC RAS (71 Prospect of October, Ufa, 450054, Republic of Bashkortostan, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-2342-0492>, [utyashevilm@mail.ru](mailto:utyashevilm@mail.ru)

7. V. A. Yurko, *[Introduction to the theory of inverse spectral problems]*, Fizmatlit Publ., Moscow, 2007 (In Russ.), 384 c.
8. I. M. Guseinov, I. M. Nabiev, “[The inverse spectral problem for pencils of differential operators]”, *Mathematics Sbornik*, **198**:11 (2007), 1579–1598 (In Russ.).
9. I. M. Nabiev, “[The inverse quasiperiodic problem for a diffusion operator]”, *Doklady Mathematics*, **76**:1 (2007), 527–529 (In Russ.).
10. V. A. Sadovnichii, “[The uniqueness of the solution of the inverse problem in the case of a second-order equation with non-decomposable conditions, the regularized sums of a part of the eigenvalues. Factorization of the characteristic determinant]”, *Soviet Mathematics*, **206**:2 (1972), 293–296 (In Russ.).
11. V. A. Sadovnichii, Ya. T. Sultanaev, A. M. Akhtyamov, “General inverse Sturm-Liouville problem with symmetric potential”, *Azerbaijan Journal of Mathematics*, **5**:2 (2015), 96–108.
12. M. G. Gasymov, I. M. Guseynov, I. M. Nabiev, “[The inverse problem for the Sturm-Liouville operator with non-separated self-adjoint boundary conditions]”, *Sibirskiy Matematicheskii zhurnal*, **31**:6 (1991), 46–54 (In Russ.).
13. E. L. Korotyaev, D. S. Chelkak, “[The inverse Sturm-Liouville problem with mixed boundary conditions]”, *St. Petersburg Math.*, **21**:5 (2010), 761–778 (In Russ.).
14. Kh. R. Mamedov, F. Cetinkaya, “Inverse problem for a class of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in boundary condition”, *Bound. Value Probl. electronic only*, 2013, 16, Available at: <http://link.springer.com/journal/volumesAndIssues/13661>.
15. E. S. Panakhov, H. Koyunbakan, Ic. Unal, “Reconstruction formula for the potential function of Sturm-Liouville problem with eigenparameter boundary condition”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **18**:1 (2010), 173–180.
16. A. M. Akhtyamov, A. V. Mouftakhov, “Identification of boundary conditions using natural frequencies”, *Inverse Problems in Science and Engineering*, **12**:4 (2004), 393–408.
17. A. M. Akhtyamov, I. M. Utyashev, “[Identification of the boundary conditions at both ends of the string according to the natural frequencies of the oscillations]”, *Akusticheskiy zhurnal*, **61**:6 (2015), 647–655 (In Russ.).
18. I. M. Utyashev, A. M. Akhtyamov, “[Identification of the string boundary conditions using natural frequencies]”, *Trudy Instituta mekhaniki im. R. R. Mavlyutova*, **11**:1 (2016), 38–52 (In Russ.).
19. A. Kollatts, *[Tasks for eigenvalues (with technical applications)]*, Nauka Publ., Moscow, 1968 (In Russ.), 504 c.
20. M. A. Naymark, *[Linear differential operators]*, Nauka Publ., Moscow, 1969 (In Russ.), 526 c.

*Submitted 14.03.2018*



УДК 517.9

# Представление просторно расположенных совершенных аттракторов диффеоморфизмов геодезическими ламинациями

© В. З. Гринес<sup>1</sup>, Е. Д. Куренков<sup>2</sup>

**Аннотация.** Статья посвящена топологической классификации одномерных базисных множеств диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме  $A$  С. Смейла и заданных на ориентируемых поверхностях отрицательной Эйлеровой характеристики, снабженных метрикой постоянной отрицательной кривизны. С помощью методов геометрии Лобачевского каждому совершенному просторно расположенному одномерному аттрактору  $A$ -диффеоморфизма однозначно ставится в соответствие геодезическая ламинация на поверхности. Устанавливается, что при отсутствии в аттракторе связок степени два существует гомотопный тождественному гомеоморфизм поверхности, отображающий аттрактор на геодезическую ламинацию таким образом, что непересекающиеся неустойчивые многообразия из аттрактора отображаются в различные слои геодезической ламинации. Более того, если неблуждающие множества гомотопных  $A$ -диффеоморфизмов обладают совершенными просторно расположенными аттракторами без связок степени два, то соответствующие этим аттракторам геодезические ламинации совпадают. Полученные результаты позволяют разработать топологическую классификацию ограничений  $A$ -диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей на одномерные совершенные просторно расположенные базисные множества посредством псевдоаносовских гомеоморфизмов.

**Ключевые слова:** диффеоморфизм, аксиома  $A$ , совершенное базисное множество, аттрактор, репеллер, геодезическая ламинация

## 1. Введение и формулировка результатов

В настоящей работе рассматриваются диффеоморфизмы, заданные на замкнутом ориентируемом двумерном многообразии  $M^2$  рода  $p \geq 2$ , удовлетворяющие аксиоме  $A$  С. Смейла [1] ( $A$ -диффеоморфизмы). Согласно спектральной теореме С. Смейла, неблуждающее множество  $NW(f)$   $A$ -диффеоморфизма  $f$  представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных базисных множеств, каждое из которых содержит всюду плотную траекторию.

Примерами нетривиальных (отличных от периодических орбит) базисных множеств диффеоморфизмов двумерных многообразий являются двумерное базисное множество диффеоморфизма  $f$  на  $M^2$  (в этом случае базисное множество совпадает с многообразием  $M^2$ , которое есть двумерный тор, а  $f$  – диффеоморфизм Аносова) и одномерное базисное множество  $DA$ -диффеоморфизма двумерного тора, полученного из диффеоморфизма Аносова применением "хирургической операции" [1]. В работе [5] хирургическая

<sup>1</sup> Вячеслав Зигмундович Гринес, Научный руководитель лаборатории топологических методов в динамике, ФГБУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4709-6858>, [vgrines@hse.ru](mailto:vgrines@hse.ru)

<sup>2</sup> Куренков Евгений Дмитриевич, стажер-исследователь лаборатории топологических методов в динамике, ФГБУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3544-1143>, [ekurenkov@hse.ru](mailto:ekurenkov@hse.ru)

операция С. Смейла была обобщена на случай псевдоаносовских гомеоморфизмов поверхностей таким образом, что путем применения ее к любому псевдоаносовскому гомеоморфизму, заданному на ориентируемой поверхности рода  $g \geq 2$ , строится структурно устойчивый диффеоморфизм этой же поверхности, неблуждающее множество которого состоит в точности из одного совершенного одномерного просторно расположенного аттрактора и конечного числа источников периодических точек (см. определения 1.1, 1.2 ниже). Однако вопрос о нахождении условий, при выполнении которых полученные диффеоморфизмы являются топологически сопряженными, авторами не рассматривался.

В настоящей работе делается первый шаг в решении этой задачи. Для каждого одномерного совершенного проторно расположенного аттрактора  $\Lambda$   $A$ -диффеоморфизма  $f$  строится единственная геодезическая ламинация  $\mathcal{L}$ , дополнение к которой состоит из конечного числа областей, гомеоморфных диску. В случае, когда аттрактор не содержит связок степени 2 (см. определение 1.3 ниже), устанавливается существование гомотопного тождественному гомеоморфизма поверхности, переводящего неустойчивые многообразия точек аттрактора  $\Lambda$  в слои построенной геодезической ламинации  $\mathcal{L}$ . Более того, если неблуждающие множества гомотопных  $A$ -диффеоморфизмов  $f$  и  $f'$  обладают совершенными просторно расположенными аттракторами  $\Lambda$  и  $\Lambda'$ , то соответствующие этим аттракторам геодезические ламинации  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  совпадают.

**О п р е д е л е н и е 1.1** *Нетривиальное базисное множество  $\Lambda$   $A$ -диффеоморфизма  $f: M^2 \rightarrow M^2$  назовем совершенным, если его дополнение  $M^2 \setminus \Lambda$  состоит из конечного числа областей  $\Delta_i$ ,  $i = \overline{1, k}$  гомеоморфных диску.*

Согласно [2], дадим следующее определение.

**О п р е д е л е н и е 1.2** *Базисное множество  $\Lambda$   $A$ -диффеоморфизма  $f: M^2 \rightarrow M^2$  называется просторно расположенным, если для различных точек  $x, y \in \Lambda$  любая замкнутая кривая, составленная из дуг  $[x, y]^s \subset W_x^s$  и  $[x, y]^u \subset W_x^u$ , не гомотопна нулю<sup>3</sup>.*

Отметим, что нетривиальные базисные множества  $A$ -диффеоморфизмов, построенных в [5], являются совершенными и просторно расположенными.

В разделе 2. (лемма 2.1) будет показано, что совершенное базисное множество  $A$ -диффеоморфизма  $f: M^2 \rightarrow M^2$  является связным одномерным множеством. С другой стороны, из работы [2] (Теорема 3) следует, что одномерное базисное множество  $A$ -диффеоморфизма двумерной поверхности является либо аттрактором, либо репеллером, и в силу [2] (Теорема 1) содержит в первом случае неустойчивые, а во втором случае устойчивые многообразия своих точек<sup>4</sup>.

Пусть  $\Lambda$  — одномерный просторно расположенный совершенный аттрактор  $A$ -диффеоморфизма  $f: M^2 \rightarrow M^2$ . Следуя [3] и [7], назовем периодическую точку  $p \in \Lambda$  граничной периодической точкой базисного множества, если одна из компонент линейной связности множества  $W_p^s \setminus p$ , не пересекается с  $\Lambda$ . Согласно [7], граничные периодические точки в одномерном аттракторе существуют, и их число конечно. Аналогично [7] устанавливается, что достижимая изнутри граница<sup>5</sup> каждой области  $\Delta$ , принадлежащей

<sup>3</sup>  $[x, y]^s, [x, y]^u, (x, y)^u, (x, y)^s$  обозначают отрезки и интервалы, ограниченные точками  $x, y$ , содержащиеся в одномерных устойчивом  $W_x^s$  и неустойчивом  $W_x^u$  многообразиях соответственно.

<sup>4</sup> Базисное множество  $A$ -диффеоморфизма  $f$  называется аттрактором, если существует такая компактная окрестность  $U$  множества  $A$ , что  $f(U) \subset \text{int}(U)$  и  $\bigcap_{k=0}^{\infty} f^k(U) = A$ , базисное множество называется репеллером, если оно является аттрактором для диффеоморфизма  $f^{-1}$  (см., например, [14])

<sup>5</sup> Достижимой изнутри границей области  $\Delta$  называется подмножество  $C \subset \Lambda$  такое, что множество  $C \cup \Delta$  является линейно связным.

$M^2 \setminus \Lambda$ , состоит из конечного числа одномерных неустойчивых многообразий  $W_{p_1}^u, \dots, W_{p_{r_C}}^u$  ( $r_C \geq 1$ ) граничных периодических точек  $p_1, \dots, p_{r_C}$  множества  $\Lambda$  (набор точек  $p_1, \dots, p_{r_C}$ , и их число  $r_C$  зависит от компоненты  $\Delta$ ). Согласно [4], дадим определение.

**О п р е д е л е н и е 1.3** Множество  $C = \bigcup_{j=1}^{r_C} W_{p_j}^u(\Delta)$ , являющееся достижимой изнутри границей компоненты связности  $\Delta$  множества  $M^2 \setminus \Lambda$ , называется связкой степени  $r_C$ .

В разделе 2.2. (следствие 2.1) будет показано, что любой одномерный совершенный пространно расположенный аттрактор на поверхности рода  $g \geq 2$  обладает по крайней мере одной связкой степени не менее третьей.

Введем на  $M^2$  аналитическую структуру, превращающую  $M^2$  в риманову поверхность. Рассмотрим конформное отображение  $\pi$  универсальной накрывающей  $\bar{M}^2$  на  $M^2$ , где  $M^2$  — плоскость Лобачевского в реализации Пуанкаре на внутренности круга  $|z| < 1$  комплексной  $z$ -плоскости. Известно [13], что  $M^2$  соответствует однозначно определенная дискретная группа  $\Gamma$  неевклидовых переносов таких, что  $M^2$  конформно эквивалентно  $\bar{M}^2/\Gamma$  и  $\Gamma$  изоморфна фундаментальной группе  $\pi_1(M^2)$  многообразия  $M^2$ . Обозначим через  $\pi: \bar{M}^2 \rightarrow M^2$  естественную проекцию.

Каждый элемент  $\gamma \in \Gamma$  имеет две и только две неподвижные точки: устойчивую  $\gamma^+$  и неустойчивую  $\gamma^-$ , и эти точки лежат на абсолюте  $\mathbb{E} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ . Согласно [6], точки абсолюта, являющиеся неподвижными для какого-либо элемента  $\gamma \in \Gamma$  ( $\gamma \neq id$ ), называются рациональными. Множество рациональных точек является счетным и всюду плотным на абсолюте [13]. Точки, принадлежащие дополнению к множеству рациональных точек на абсолюте, называются иррациональными.

Обозначим через  $\bar{\Lambda} = \pi^{-1}(\Lambda)$  полный прообраз множества  $\Lambda$  на  $\bar{M}^2$ . Пусть  $W_x^u$  — неустойчивое многообразие точки  $x$  аттрактора  $\Lambda$ ,  $\bar{w}_{\bar{x}}^u$  ( $\pi(\bar{x}) = x$ ) — компонента линейной связности прообраза  $W_x^u$  (при проекции  $\pi$ ), содержащая точку  $\bar{x}$ .

Следующие утверждения взяты из предложения 2.3 (пункты 1,5,6) и используются в конструкции геодезической ламинации:

- $\bar{w}_{\bar{x}}^u$  является гладкой кривой, граница которой состоит из двух точек  $u_{\bar{x}}^1, u_{\bar{x}}^2$  ( $u_{\bar{x}}^1 \neq u_{\bar{x}}^2$ ), лежащих на абсолюте и являющихся иррациональными;
- если  $\bar{w}_{\bar{x}}^u$  и  $\bar{w}_{\bar{y}}^u$  — компоненты линейной связности прообразов неустойчивых многообразий, не содержащих граничных периодических точек, такие что  $\bar{w}_{\bar{x}}^u \cap \bar{w}_{\bar{y}}^u = \emptyset$ , то точки  $u_{\bar{x}}^1, u_{\bar{x}}^2, u_{\bar{y}}^1, u_{\bar{y}}^2$  попарно различны;
- если  $\bar{w}_{\bar{p}}^u \subset \bar{\Lambda}$  — компонента линейной связности прообраза неустойчивого многообразия, содержащего граничную периодическую точку  $p$ , то существуют граничные периодические точки  $q, r \in \Lambda$ , отличные от  $p$  ( $q$  может совпадать с  $r$ ); единственная кривая  $\bar{w}_{\bar{q}}^u \subset \bar{\Lambda}$  такая, что  $\bar{w}_{\bar{q}}^u$  имеет одной из своих граничных точек на абсолюте точку  $u_{\bar{p}}^2$ , и единственная кривая  $\bar{w}_{\bar{r}}^u \subset \bar{\Lambda}$  такая, что  $\bar{w}_{\bar{r}}^u$  имеет одной из своих граничных точек на абсолюте точку  $u_{\bar{p}}^1$  (если  $q = r$ , то  $\bar{w}_{\bar{q}}^u = \bar{w}_{\bar{r}}^u$ ).

Следуя [9], введем понятие геодезической ламинации  $\mathcal{L}$ , соответствующей совершенному пространно расположенному аттрактору  $\Lambda$   $A$ -диффеоморфизма  $f$ .

Пусть  $\Lambda$  — совершенный аттрактор;  $w_{\bar{x}}^u$  — компонента линейной связности множества  $\bar{\Lambda}$  с граничными точками  $u_{\bar{x}}^1, u_{\bar{x}}^2$  на абсолюте, тогда обозначим через  $\bar{l}(u_{\bar{x}}^1, u_{\bar{x}}^2)$  геодезическую на  $\bar{M}^2$  с граничными точками  $u_{\bar{x}}^1, u_{\bar{x}}^2$ . Если  $W_x^u = \pi(w_{\bar{x}}^u)$  ( $\pi(\bar{x}) = x$ ), то назовем

геодезическую  $l(W_x^u) = \pi(\bar{l})$  соответствующей неустойчивому многообразию  $W_x^u$ . Множество геодезических, построенных для всех компонент линейной связности из множества  $\bar{\Lambda}$ , обозначим через  $\bar{\mathcal{L}}$ . Положим  $\mathcal{L} = \pi(\bar{\mathcal{L}})$  и назовем множество  $\mathcal{L}$  *геодезической ламинацией*, соответствующей базисному множеству  $\Lambda$ . Если  $W_p^u$  является неустойчивым многообразием граничной периодической точки  $p$  и не принадлежит связке степени 2, то поставленную ей в соответствие геодезическую  $l$  будем называть *граничной* геодезической; в противном случае геодезическую, соответствующую  $W_p^u$  будем называть *внутренней*. Согласно построению, каждому неустойчивому многообразию базисного множества  $\Lambda$  ставится в соответствие единственная геодезическая из ламинации  $\mathcal{L}$ , при этом связке степени 2 соответствует единственная геодезическая из ламинации  $\mathcal{L}$ , а каждой геодезической из ламинации  $\mathcal{L}$  (кроме тех, которые соответствуют связке степени 2) соответствует в точности одно неустойчивое многообразие из  $\Lambda$ .

Основным результатом настоящей работы являются следующие теоремы.

**Т е о р е м а 1.1** *Для ламинации  $\mathcal{L}$  верны следующие свойства.*

1. Множество  $\mathcal{L}$  является замкнутым.
2. Любая геодезическая  $l$  из  $\mathcal{L}$  плотна в  $\mathcal{L}$ .
3. Множество  $M^2 \setminus \mathcal{L}$  состоит из конечного числа областей, гомеоморфных открытому диску, достижимая изнутри граница каждой из которых состоит из конечного числа (не меньше 3) граничных геодезических.

**Т е о р е м а 1.2** *Пусть  $f: M^2 \rightarrow M^2$  и  $f': M^2 \rightarrow M^2$  — гомотопные  $A$ -диффеоморфизмы, обладающие совершенными просторно расположенными аттракторами  $\Lambda$  и  $\Lambda'$  соответственно. Тогда соответствующие этим аттракторам геодезические ламинации  $\mathcal{L}$  и  $\mathcal{L}'$  совпадают.*

**Т е о р е м а 1.3** *Пусть  $\Lambda$  совершенный просторно расположенный аттрактор  $A$ -диффеоморфизма  $f: M^2 \rightarrow M^2$  без связок степени 2. Тогда существует гомотопный тождественному гомеоморфизм  $h: M^2 \rightarrow M^2$  такой, что  $h(\Lambda) = \mathcal{L}$  и для любого многообразия  $W_x^u$ ,  $x \in \Lambda$  существует единственный слой  $l$  ламинации  $\mathcal{L}$  такой, что  $h(W_x^u) = l$ .*

## 2. Вспомогательные сведения и результаты

### 2.1. Связность и одномерность совершенного базисного множества

Основной результат данного раздела (лемма 2.1) основан на на следующем топологическом факте. Пусть  $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$  — стандартный открытый диск.

**П р е д л о ж е н и е 2.1** *Пусть  $M^2$  — произвольная связная компактная поверхность;  $\varphi_i: D^2 \rightarrow M^2$ ,  $i = \overline{1, k}$  — вложения диска  $D^2$  в поверхность  $M^2$  такие, что  $\varphi_i(D^2) \cap \varphi_j(D^2) = \emptyset$  для любых  $i \neq j$ . Тогда  $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D^2)$  является связным компактным множеством.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $D_r^2 \subset D^2$  — открытый диск радиуса  $r > 0$  (считаем, что  $D_1^2 = D^2$ ), а  $S_r^1$  — окружность радиуса  $r$ . Покажем, что множество  $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D_r^2)$  при

$0 < r < 1$  — связное компактное множество. Действительно, т.к.  $\varphi_i$  — гомеоморфизмы на образ, то  $\bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D_r^2)$  — открытое множество, значит  $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D_r^2)$  замкнуто и, следовательно, компактно, как замкнутое подмножество компактного пространства. Покажем, что  $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D_r^2)$  — линейно связное множество. Пусть  $p, q \in M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D_r^2)$  — произвольные точки, а  $l: I \rightarrow M^2$  ( $I = [0, 1]$ ) — путь, соединяющий их в  $M^2$ . Покажем, что точки  $x, y$  можно соединить путем, лежащим в  $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D_r^2)$ . Если  $l(I) \subset M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D_r^2)$ , то путь  $l$  — искомым. Предположим, что  $l(I) \cap \varphi_i(D_r^2) \neq \emptyset$  для некоторого  $i$ . В силу теоремы Жордана, примененной к множеству  $\varphi_i(D_r^2)$ , пересечение  $\varphi_i(S_r^1) \cap l(I)$  непусто. Поскольку множество  $\varphi_i(S_r^1) \cap l(I)$  замкнуто, то среди точек  $l^{-1}(\varphi_i(S_r^1) \cap l(I))$  найдутся минимальная  $x_m$  и максимальная  $x_M$ . При этом  $x_m \neq x_M$  в силу открытости  $\varphi_i(D_r)$ . Построим путь  $l_i: I \rightarrow M^2 \setminus \varphi_i(D_r^2)$ , совпадающий с  $l$  на отрезках  $[0, x_m]$  и  $[x_M, 1]$  а также с одной из дуг окружности  $\varphi(S_r^1)$  на отрезке  $[x_m, x_M]$ . Повторяя, если нужно, описанную процедуру последовательно для всех индексов  $i$  таких, что  $l(I) \cap \varphi(D_r^2) \neq \emptyset$ , получим путь  $\tilde{l}: I \rightarrow M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D_r^2)$ , соединяющий точки  $p$  и  $q$ . Таким образом, множество  $M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D_r^2)$  является линейно связным, а, следовательно, связным.

Рассмотрим произвольную монотонно возрастающую последовательность  $\{r_j\}_{j \in \mathbb{N}}$   $r_j \rightarrow 1$  при  $j \rightarrow \infty$ . Ей соответствует последовательность вложенных компактных связных множеств  $A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_j \supset \dots$ , где  $A_j = M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D_{r_j}^2)$ . Положим  $A = M^2 \setminus \bigcup_{i=1}^k \varphi_i(D^2)$ .

Покажем, что для любой открытой окрестности  $U$  множества  $A$  найдется номер  $N \in \mathbb{N}$  такой, что для любого  $j > N$  выполнено включение  $A_j \subset U$ . Предположим противное, тогда  $A_j \cap (M^2 \setminus U) \neq \emptyset$  для бесконечного числа индексов  $j$ . Рассмотрим последовательность точек  $\{y_{j_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$  такую, что  $y_{j_i} \in A_{j_i} \cap (M^2 \setminus U)$ . Поскольку множество  $M^2 \setminus U$  компактно как замкнутое подмножество компактного пространства, то без ограничения общности последовательность  $\{y_{j_i}\}$  можно считать сходящейся к некоторой точке  $y \in M^2 \setminus U$ . Т.к. каждое множество  $A_j$  замкнутое, то имеет место включение  $y \in A_j$  для любого  $j \in \mathbb{N}$ , но тогда в силу  $A = \bigcap_{j=0}^{\infty} A_j$  имеет место включение  $y \in A$ , что противоречит тому, что  $A \subset U$ .

Покажем теперь, что множество  $A$  связно. Предположим противное, тогда найдется пара непустых непересекающихся замкнутых множеств  $B_1$  и  $B_2$  таких, что  $A = B_1 \cup B_2$ . Поскольку поверхность  $M^2$  является нормальным топологическим пространством, то найдутся две непересекающиеся открытые окрестности  $U_1$  и  $U_2$  множеств  $B_1$  и  $B_2$ . В силу доказанного выше найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что для любого  $j > N$  имеют место включения  $A_j \subset U_1 \cup U_2$ , причем  $A_j \cap U_1 \neq \emptyset$  и  $A_j \cap U_2 \neq \emptyset$  в силу того, что  $A \subset A_j$  для любого  $j \in \mathbb{N}$ . Получили противоречие со связностью множества  $A_j$ .

**До к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .**

Согласно [16], любое базисное множество  $\Lambda$  единственным образом представляется в виде конечного объединения  $\Lambda = \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_q$ ,  $q \geq 1$  замкнутых подмножеств, называемых периодическими компонентами такими, что  $f(\Lambda_i) = \Lambda_{i+1}$  при  $i = \overline{1, q-1}$ ,  $f(\Lambda_q) = \Lambda_1$ . Для любой точки  $x \in \Lambda_i$  множества  $W_x^s \cap \Lambda_i$  и  $W_x^u \cap \Lambda_i$  плотны в  $\Lambda_i$ .

**Л е м м а 2.1** *Совершенное базисное множество  $\Lambda$   $A$ -дiffeоморфизма  $f: M^2 \rightarrow M^2$  замкнутой поверхности  $M^2$  является связным одномерным множеством и, следовательно, состоит в точности из одной периодической компоненты.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из определения совершенности базисного множества следует, что дополнение к  $\Lambda$  состоит из конечного числа областей, гомеоморфных диску. Тогда в силу предложения 2.1 оно является связным и, следовательно, состоит из одной периодической компоненты. Покажем теперь, что  $\Lambda$  является одномерным. Предположим противное, тогда  $\Lambda$  либо нульмерно, либо двумерно. Если  $\Lambda$  нульмерно, то в силу его нетривиальности оно состоит более чем из одной точки. С другой стороны, в силу нульмерности оно должно быть вполне несвязным, что противоречит его связности.

Предположим, что  $\Lambda$  двумерно. Тогда множество  $\Lambda$  совпадает с объемлющим многообразием  $M^2$  (см, например, [14], Теорема 8.1.1), что противоречит определению совершенного базисного множества.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

**Л е м м а 2.2** *Пусть  $\Lambda$  — совершенное базисное множество;  $C = \bigcup_{i=1}^r W_{p_i}^u$  — достижимая изнутри граница диска  $\Delta$ , принадлежащего дополнению  $M^2 \setminus \Lambda$ . Тогда для любой точки  $y \in C$  найдется путь  $\psi_y: I \rightarrow \Delta \cup C$  такой, что  $\psi_y(1) = y$  и  $\psi_y(t) \in \Delta$  для любого  $t \in [0, 1)$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим множество  $W_{p_i}^u \subset C$  с топологией, совпадающей со стандартной топологией прямой  $\mathbb{R}^1$ . Пусть  $V \subset W_{p_i}^u$  — множество точек  $y \in W_{p_i}^u$ , для которых существует путь  $\psi_y: I \rightarrow \Delta \cup W_{p_i}^u$  такой, что  $\psi_y(1) = y$  и  $\psi_y(t) \in \Delta$  для любого  $t \in [0, 1)$ . Покажем, что  $V$  является открытым множеством. Рассмотрим произвольную точку  $y \in V$ . В силу [2] (теорема 2) найдется окрестность  $U$  точки  $y$  такая, что  $U \cap \Lambda$  гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на интервал. Из этого следует, что если  $l$  — компонента линейной связности множества  $U \cap \Lambda$ , содержащая точку  $y$ , то компонента связности множества  $U \setminus l$ , содержащая образ полуинтервала  $\psi([0, 1))$ , не пересекается с  $\Lambda$ . Из этого следует включение  $l \subset V$ . Аналогично показывается, что дополнения  $W_{p_i}^u \setminus V$  открыто, а следовательно,  $V$  замкнуто.

Таким образом, множество  $V$  является непустым открытым и замкнутым подмножеством  $W_{p_i}^u$ , и, следовательно, с ним совпадает.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

## 2.2. Асимптотическое поведение прообразов устойчивых и неустойчивых многообразий одномерного совершенного аттрактора на плоскости Лобачевского. Построение совершенной геодезической ламинации

Пусть  $\Lambda$  — одномерный совершенный аттрактор  $A$ -дiffeоморфизма  $f: M^2 \rightarrow M^2$ . Следующее определение и предложения 2.2, 2.3 были введены и доказаны в серии работ [7] [4], [10], [11], [12] (см. также [14], Лемма 9.1.3., Теорема 9.1.2., Лемма 9.3.2.) в предположениях различной общности.

**О п р е д е л е н и е 2.1** *Простая замкнутая кривая  $C_\Lambda$  называется квазитрансверсалью аттрактора  $\Lambda$ , если:*

- 1)  $C_\Lambda$  является объединением дуг  $C^u = [z, y]^u \subset W_z^u$  и  $C^s = [y, z]^s \subset W_z^s$  для некоторых точек  $z, y \in \Lambda$ ;

2)  $(y, z)^s \cap \Lambda \neq \emptyset$ ;

3) индекс пересечения  $W_z^u$  и  $W_z^s$  принимает одно и то же значение в точках  $z$  и  $y$ .

Существование квазитрансверсали для совершенного аттрактора следует непосредственно из плотности неустойчивых многообразий точек в аттракторе (см. [14], Лемма 9.1.1). Кроме того, в силу просторной расположенности множества  $\Lambda$  квазитрансверсаль  $C_\Lambda$  является негомотопной нулю кривой.

Из свойств универсального накрытия  $\pi: \bar{M}^2 \rightarrow M^2$  следует, что полный прообраз  $\bar{C}_\Lambda = \pi^{-1}(C_\Lambda)$  на  $\bar{M}^2$  разбивается на счетное множество кривых без самопересечений таких, что:

- 1) каждая кривая  $\bar{c} \in \bar{C}_\Lambda$  имеет в точности две граничные точки, являющиеся неподвижными точками некоторого элемента  $\gamma_{\bar{c}}$  такого, что для любой точки  $\bar{x} \in \bar{c}$  дуга  $(\bar{x}, \gamma_{\bar{c}}(\bar{x}))$  не содержит когруэнтных точек в силу какого-либо элемента группы  $\Gamma$ , отличного от тождественного;
- 2) любые две кривые  $\bar{c}, \bar{c}'$  из множества  $\bar{C}_\Lambda$  не имеют общих граничных точек на абсолюте.

Существование квазитрансверсали позволяет исследовать асимптотические свойства прообразов устойчивых и неустойчивых многообразий точек совершенного просторно расположенного аттрактора  $\Lambda$  на универсальном накрытии поверхности  $M^2$  (плоскости Лобачевского).

Согласно [7] (Лемма 2.2), для любой точки  $x \in \Lambda$  каждая из компонент линейной связности множества  $W_x^u \setminus x$  плотна в  $\Lambda$ , и пересечение компоненты линейной связности  $W_x^s \setminus x$ , не содержащей граничной периодической точки из  $\Lambda$ , с множеством  $\Lambda$  также плотно в  $\Lambda$ .

Пусть  $W_x^{\delta+}$ , где  $\delta \in \{s, u\}$  — плотная в  $\Lambda$  компонента связности множества  $W_x^\delta \setminus x$ . Тогда из определения квазитрансверсали следует, что пересечение  $W_x^{\delta+} \cap C_\Lambda$  не пусто и состоит из счетного множества точек. Поэтому существует последовательность кривых  $\bar{c}_1, \bar{c}_2, \dots, \bar{c}_i, \dots \subset \bar{C}_\Lambda$  таких, что пересечение  $\bar{c}_i \cap \bar{w}_{\bar{x}}^{\delta+}$  не пусто для любого  $i \in \mathbb{N}$ , где  $\pi(\bar{w}_{\bar{x}}^\delta) = W_x^\delta$  и  $\bar{w}_{\bar{x}}^{\delta+}$  — компонента связности множества  $w_{\bar{x}}^\delta \setminus \bar{x}$  такая, что  $\pi(\bar{w}_{\bar{x}}^{\delta+}) = W_x^{\delta+}$ .

Следующие два предложения доказываются аналогично [6] (Теорема 1) (см. также [14] Леммы 9.1.3., Теорема 9.1.2., Лемма 9.3.2.).

**Предложение 2.2** *Топологический предел кривых  $\bar{c}_i$  на множестве  $\bar{M}^2 \cup \mathbb{E}$  состоит из единственной иррациональной точки, принадлежащей  $\mathbb{E}$ .*

Для совершенного аттрактора  $\Lambda$  обозначим через  $\bar{\Lambda} = \pi^{-1}(\Lambda)$  полный прообраз множества  $\Lambda$  на  $\bar{M}^2$ .

**Предложение 2.3** *Пусть  $W_x^{s(u)}$  — устойчивое (неустойчивое) многообразие точки  $x$  аттрактора  $\Lambda$ ;  $\bar{w}_{\bar{x}}^{s(u)}$  ( $\pi(\bar{x}) = x$ ) — компонента линейной связности прообраза  $W_x^{s(u)}$  (при проекции  $\pi$ ), содержащая точку  $\bar{x}$ . Тогда*

- 1)  $\bar{w}_{\bar{x}}^u$  является гладкой кривой, граница которой состоит из двух точек  $u_{\bar{x}}^1, u_{\bar{x}}^2$  ( $u_{\bar{x}}^1 \neq u_{\bar{x}}^2$ ), лежащих на абсолюте и являющихся иррациональными точками;
- 2) если  $W_x^s$  не содержит граничной периодической точки, то  $\bar{w}_{\bar{x}}^s$  является гладкой кривой, граница которой состоит из двух точек  $s_{\bar{x}}^1, s_{\bar{x}}^2$  ( $s_{\bar{x}}^1 \neq s_{\bar{x}}^2$ ), лежащих на абсолюте и являющихся иррациональными точками;

- 3) если  $W_x^s$  содержит граничную периодическую точку  $p$ , то  $\bar{w}_x^s$  является гладкой кривой, граница которой состоит из одной граничной точки  $s_{\bar{x}}$ , лежащей на абсолюте и являющейся иррациональной точкой, и одной граничной точки  $\bar{p}$  такой, что  $\pi(\bar{p}) = p$ ;
- 4) если  $p \in \Lambda$  — внутренняя периодическая точка периода  $k$  и  $\bar{f}_k$  поднятие отображения  $f^k$  такое, что  $\bar{f}_k(\bar{p}) = \bar{p}$ , то гомеоморфизм  $\bar{f}_k^2$  имеет единственную неподвижную точку  $\bar{p}$  на  $\bar{M}^2$  и в точности четыре неподвижные точки  $u_{\bar{p}}^1, u_{\bar{p}}^2, s_{\bar{p}}^1, s_{\bar{p}}^2$  на абсолюте  $\mathbb{E}$ .
- 5) если  $\bar{w}_x^u$  и  $\bar{w}_y^u$  — компоненты линейной связности прообразов неустойчивых многообразий, не содержащих граничных периодических точек таких что  $\bar{w}_x^u \cap \bar{w}_y^u = \emptyset$ , тогда точки  $u_{\bar{x}}^1, u_{\bar{x}}^2, u_{\bar{y}}^1, u_{\bar{y}}^2$  попарно различны;
- 6) если  $\bar{w}_{\bar{p}}^u \subset \bar{\Lambda}$  — компонента линейной связности прообраза неустойчивого многообразия, содержащего граничную периодическую точку  $p$ , то существуют граничные периодические точки  $q, r \in \Lambda$ , отличные от  $p$  ( $q$  может совпадать с  $r$ ), единственная кривая  $\bar{w}_q^u \subset \bar{\Lambda}$  такая, что имеет одной из своих граничных точек на абсолюте точку  $u_{\bar{p}}^1$ , и единственная кривая  $\bar{w}_r^u \subset \bar{\Lambda}$  такая, что имеет одной из своих граничных точек на абсолюте точку  $u_{\bar{p}}^2$  (если  $q = r$ , то  $\bar{w}_q^u = \bar{w}_r^u$ ).

**Л е м м а 2.3** Пусть  $\Delta$  — открытый диск, принадлежащий дополнению  $M^2 \setminus \Lambda$ ;  $C = \bigcup_{j=1}^{r_C} W_{p_j}^u$  — его достижимая изнутри граница. Тогда каждая компонента связности его прообраза  $\pi^{-1}(\Delta \cup C)$  представляет собой идеальный криволинейный многоугольник<sup>6</sup> с  $r$  граничными точками  $e_1, e_2, \dots, e_r$  на абсолюте, являющимися его вершинами.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

**Шаг 1.** Покажем, что прообраз  $\pi^{-1}(\Delta)$  представляет собой счетное объединение непесекающихся открытых дисков  $\bar{\Delta}_i$ , гомеоморфных  $\Delta$ .

Пусть  $\bar{\Delta}$  — произвольная компонента линейной связности прообраза  $\pi^{-1}(\Delta)$ . Покажем, что ограничение  $\pi|_{\bar{\Delta}}: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$  является гомеоморфизмом. Заметим, что в силу того, что  $\pi^{-1}(\Delta)$  — открытое и локально линейно связное множество, компонента линейной связности  $\bar{\Delta}$  прообраза  $\pi^{-1}(\Delta)$  является открытым множеством. Покажем, что ограничение  $\pi|_{\bar{\Delta}}: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$  является инъективным. Предположим противное, тогда найдутся две различные точки  $\bar{x}_1, \bar{x}_2 \in \bar{\Delta}$  такие, что  $\pi(\bar{x}_1) = \pi(\bar{x}_2) = x$ . Рассмотрим путь  $\bar{\psi}: I \rightarrow \bar{\Delta}_1$ , соединяющий точки  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ . Тогда  $\pi \circ \bar{\psi}: I \rightarrow \Delta$  является петлей в точке  $x$ , содержащейся в диске  $\Delta$ . В силу односвязности  $\Delta$  существует гомотопия  $\Psi: I \times I \rightarrow \Delta$ , стягивающая петлю  $\pi \circ \bar{\psi}$  в точку  $x$ . Но тогда теореме о накрывающей гомотопии, путь  $\bar{\psi}$  также можно было бы стянуть в точку с сохранением неподвижных концов в точках  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ , что не является возможным. Покажем, что  $\pi|_{\bar{\Delta}_i}$  является сюръективным. Пусть  $\bar{x} \in \bar{\Delta}$  — произвольная точка. Положим  $\pi(\bar{x}) = x$ . Рассмотрим произвольную точку  $y \in \Delta$ . Тогда найдется путь  $\psi_y: I \rightarrow \Delta$ , соединяющий точки  $x$  и  $y$ . Пусть  $\bar{\psi}_y$  — поднятие данного пути с началом в точке  $\bar{x}$ . Очевидно, что  $\bar{\psi}_y(1) \in \bar{\Delta}$  и  $\pi(\bar{\psi}_y(1)) = y$ . Таким образом,  $\pi|_{\bar{\Delta}}: \bar{\Delta} \rightarrow \Delta$  является взаимно-однозначным ограничением локального гомеоморфизма  $\pi$  на открытое множество  $\bar{\Delta}$ , и, следовательно, является гомеоморфизмом.

**Шаг 2.** Пусть  $\bar{w}_{p_i}$  — компонента линейной связности прообраза  $\pi^{-1}(W_{p_i}^u)$  неустойчивого многообразия  $W_{p_i}^u \subset C$ . Покажем, что существует ровно одна компонента линейной связности  $\bar{\Delta}$  множества  $\pi^{-1}(\Delta)$  такая, что множество  $\bar{w}_{p_i} \cup \bar{\Delta}$  является линейно связным.

<sup>6</sup> В геометрии Лобачевского идеальным называется многоугольник, сторонами которого являются геодезические, а вершины принадлежат абсолюту.



Рассмотрим поднятие пути  $\psi: I \rightarrow \Delta \cup W_{p_i}^u$ , соединяющего какую-либо точку  $x \in W_{p_i}^u$  с точкой  $y \in \Delta$ , т.е.  $\psi(0) = x$  и  $\psi(1) = y$ . Обозначим через  $\bar{\Delta}$  компоненту связности прообраза  $\pi^{-1}(\Delta)$ , содержащую точку  $\bar{\psi}(1)$ , где  $\bar{\psi}: I \rightarrow \bar{M}^2$  — поднятие пути  $\psi$  с начальной точкой  $\bar{x} \in \bar{w}_{p_i}$ . Тогда множество  $\bar{w}_{p_i} \cup \bar{\Delta}$  является линейно связным.

Покажем, что  $\bar{\Delta}$  является единственной компонентой, обладающей указанным свойством. Предположим противное. Тогда найдется компонента  $\bar{\Delta}_1$ , отличная от  $\bar{\Delta}$  и обладающая этим свойством. Из леммы 2.2 следует, что найдется путь  $\bar{\psi}: I \rightarrow \bar{\Delta} \cup \bar{\Delta}_1 \cup \bar{w}_{p_i}$  такой, что  $\bar{\psi}([0, 1/2)) \subset \bar{\Delta}$ ,  $\bar{\psi}((1/2, 1]) \subset \bar{\Delta}_1$  и  $\bar{\psi}(1/2) \in \bar{w}_{p_i}$ . Однако, силу того, что  $\pi$  является локальным гомеоморфизмом, у точки  $\bar{\psi}(1/2)$  найдется окрестность  $U$  такая, что  $U \cap \bar{\Delta}$  гомеоморфно прямому произведению канторовского множества на интервал. Заметим, что в силу того, что граничные точки кривой  $\bar{w}_{p_i}$  лежат на абсолюте, окрестность  $U$  можно выбрать достаточно малой так, чтобы она пересекалась с  $\bar{w}_{p_i}$  лишь по одному интервалу. Поскольку канторовское множество не содержит изолированных точек, кривые  $\bar{\psi}([0, 1/2)) \subset \bar{\Delta}$  и  $\bar{\psi}((1/2, 1]) \subset \bar{\Delta}_1$  имеют непустое пересечение с одной и той же компонентой связности множества  $U \setminus \bar{w}_{p_i}$ ; следовательно,  $\bar{\Delta} \cap \bar{\Delta}_1 \neq \emptyset$ , а это противоречит результату шага 1.

**Шаг 3.** Покажем, что для любой компоненты связности  $\bar{\Delta}$  прообраза  $\pi^{-1}(\Delta)$  и для любой кривой  $W_{p_i}^u \in C$  найдется ровно одна компонента линейной связности  $\bar{w}_{p_i}$  прообраза  $\pi^{-1}(W_{p_i}^u)$  такая, что множество  $\bar{\Delta} \cup \bar{w}_{p_i}$  линейно связно.

Рассмотрим поднятие пути  $\psi: I \rightarrow \Delta \cup W_{p_i}^u$ , соединяющего какую-либо точку  $x \in \Delta$  с точкой  $y \in W_{p_i}^u$ , т.е.  $\psi(0) = x$  и  $\psi(1) = y$ , обозначим через  $\bar{w}_{p_i}$  компоненту линейной связности прообраза  $\pi^{-1}(W_{p_i}^u)$ , содержащую точку  $\bar{\psi}(1)$ , где  $\bar{\psi}: I \rightarrow \bar{M}^2$  — поднятие пути  $\psi$  с начальной точкой  $\bar{x} \in \bar{\Delta}$ . Кривая  $\bar{w}_{p_i}$  является искомой.

Предположим теперь, что найдется компонента  $\bar{w}_{p_i}^1$ , отличная от  $\bar{w}_{p_i}$  и обладающая указанным свойством. Пусть  $\bar{y}_1 \in \bar{w}_{p_i}$  и  $\bar{y}_2 \in \bar{w}_{p_i}^1$  — точки такие, что  $\pi(\bar{y}_1) = \pi(\bar{y}_2) = y$ , и пусть  $\gamma \in \Gamma$  — такой элемент, что  $\gamma(y_1) = y_2$ . Рассмотрим достаточно малую связную окрестность  $U$  точки  $\bar{y}_1$  такую, что множество  $U \setminus \bar{w}_{p_i}$  состоит из двух компонент связности  $U_1$  и  $U_2$  таких, что  $U_1 \subset \bar{\Delta}$  и  $U_2 \cap \bar{\Delta} = \emptyset$ . Положим  $\tilde{U} = \gamma(U)$ . Аналогично множество  $\tilde{U} \setminus \bar{w}_{p_i}^1$  состоит из двух компонент связности  $\tilde{U}_1$  и  $\tilde{U}_2$  таких, что  $\tilde{U}_1 \subset \gamma(\bar{\Delta})$  и  $\tilde{U}_2 \cap \gamma(\bar{\Delta}) = \emptyset$ .  $\gamma(U \cap \bar{w}_{p_i}) = \tilde{U} \cap \bar{w}_{p_i}^1$ , имеет место ровно одна из следующих пар равенств: либо  $\gamma(U_1) = \tilde{U}_1$ ,  $\gamma(U_2) = \tilde{U}_2$ , либо  $\gamma(U_1) = \tilde{U}_2$ ,  $\gamma(U_2) = \tilde{U}_1$ . Т.к. в силу шага 1  $\gamma(\bar{\Delta}) \cap \bar{\Delta} = \emptyset$ , то первая пара равенств не удовлетворяет требованиям. Если бы при этом выполнялась вторая пара равенств, то множества  $\bar{\Delta} \cup \bar{w}_{p_i}^1$  и  $\gamma(\bar{\Delta}) \cup \bar{w}_{p_i}^1$  являлись бы линейно связными, что противоречило бы результату шага 2. Полученное противоречие доказывает единственность.

**Шаг 4.** Утверждение леммы непосредственно вытекает из результатов шагов 1–3 и свойств 1 и 6 предложения 2.3

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

**С л е д с т в и е 2.1** Если  $\Lambda$  — совершенный пространно расположенный аттрактор  $A$ -диффеоморфизма  $f: M^2 \rightarrow M^2$  поверхности  $M^2$  рода  $g \geq 2$ , то  $\Lambda$  содержит связку степени не меньше 3.

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** Предположим противное, тогда все связки аттрактора  $\Lambda$  имеют степень 2. Прообраз  $\pi^{-1}(\Delta \cup C)$  каждого множества  $\Delta \cup C$  представляет собой объединение криволинейных идеальных двуугольников, не содержащих конгруэнтных точек.

Пусть  $\bar{\Delta} \cup \bar{C}$  — один из таких двуугольников. Поскольку множество  $\bar{\Delta} \cup \bar{C} \cup e_1 \cup e_2$  гомеоморфно замкнутому диску, то можно построить слоение без особенностей  $\bar{L}_{\bar{\Delta}}$  в

диске  $\bar{\Delta}$ , для которого компоненты линейной связности множества  $\bar{C}$  являются слоями. Дорасслоим оставшиеся диски прообраза  $\pi^{-1}(\Delta)$  с помощью элементов группы  $\Gamma$ , т.е. в каждом диске  $\bar{\Delta}_i \subset \pi^{-1}(\Delta)$  рассмотрим слоение  $\gamma(\bar{L}_{\bar{\Delta}})$ , где  $\gamma \in \Gamma$  такой элемент, что  $\gamma(\bar{\Delta}) = \bar{\Delta}_i$ . Проведя аналогичные операции с прообразами других дисков, из множества  $M^2 \setminus \Lambda$  получили слоение без особенностей на  $\bar{M}^2$ . Т.к. каждый из дисков  $\bar{\Delta}$  прообраза  $\pi^{-1}(\Delta)$  не содержит конгруэнтных точек, то данное слоение проектируется на поверхность  $M^2$ , и в результате получается слоение без особенностей на поверхности рода  $g \geq 2$ , что не является возможным. Полученное противоречие доказывает следствие.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

В дальнейших рассмотрениях мы будем использовать конструкцию, аналогичную введенной в [9]. Рассмотрим множество  $(\mathbb{E} \times \mathbb{E}) \setminus \Delta$ , где  $\Delta$  — диагональ прямого произведения  $\mathbb{E} \times \mathbb{E}$ , и определим на нем отношение эквивалентности  $\sim$  такое, что  $(e_1, e_2) \sim (e_2, e_1)$  для любых  $e_1, e_2 \in \mathbb{E}$ . Положим  $\mathbb{F} = ((\mathbb{E} \times \mathbb{E}) \setminus \Delta) / \sim$ . Непосредственно проверяется, что множество  $\mathbb{F}$  гомеоморфно многообразию, полученному из пленки Мебиуса после удаления ее края. Пусть  $\bar{L}$  — множество кривых без самопересечений на  $\bar{M}^2$ , каждая из которых имеет ровно две различные граничные точки на абсолюте. Определим отображение  $\psi: \bar{L} \rightarrow \mathbb{F}$ , ставящее в соответствие кривой  $\bar{l} \in \bar{L}$  с граничными точками  $e_1, e_2$  класс эквивалентности элемента  $(e_1, e_2) \in (\mathbb{E} \times \mathbb{E}) \setminus \Delta$ , принадлежащий  $\mathbb{F}$ . Заметим, что по построению  $\psi(\bar{L}) = \psi(\bar{\Lambda})$ .

**П р е д л о ж е н и е 2.4** Пусть  $\Lambda$  — совершенный аттрактор; и  $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  — последовательность точек в  $\bar{\Lambda}$ , сходящаяся к некоторой точке  $\bar{x} \in \bar{\Lambda}$ . Если  $\{\bar{w}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  и  $\bar{w}$  — кривые из  $\bar{\Lambda}$  такие, что  $\bar{x}_i \in \bar{w}_i$  для любого  $i \in \mathbb{N}$  и  $\bar{x} \in \bar{w}$ , то последовательность  $\{\psi(\bar{w}_i)\}_{i \in \mathbb{N}}$  сходится к точке  $\psi(\bar{w})$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Положим  $f = \psi(\bar{w})$  и  $f_i = \psi(\bar{w}_i)$ . Пусть  $U$  — произвольная окрестность точки  $f$ ;  $(e_1, e_2) \in \mathbb{E} \times \mathbb{E}$  — представитель класса эквивалентности  $f$ . Рассмотрим окрестность  $V \subset U$  точки  $f$  такую, что  $V = ((I_1 \times I_2) \cup (I_2 \times I_1)) / \sim$ , где  $I_1, I_2 \subset \mathbb{E}$  — непересекающиеся открытые интервалы, содержащие точки  $e_1$  и  $e_2$  соответственно.

В силу предложения 2.2 для любого  $j \in \{1, 2\}$  найдутся такие кривые  $\bar{c}_j \subset \bar{C}_{\Lambda}$ , что граничные точки  $\bar{c}_j$  содержатся в открытом интервале  $I_j$ . В силу непрерывной зависимости неустойчивых многообразий на компактных множествах найдется такой номер  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех  $i > N$  имеет место  $\bar{w}_i \cap \bar{c}_j \neq \emptyset$ . В силу того, что пересечение  $\bar{w}_i \cap \bar{c}_j$  состоит из единственной точки, граничные точки кривых  $\bar{w}_i$  принадлежат интервалам  $I_1$  и  $I_2$  соответственно при  $i > N$ . Следовательно,  $\psi(\bar{w}_i) \in V$  для всех  $i > N$ , что и означает сходимость последовательности  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  к точке  $f$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.**

### 3. Свойства геодезической ламинации, представляющей совершенный просторно расположенный аттрактор

Пусть  $\mathcal{L}$  — геодезическая ламинация, соответствующая совершенному просторно расположенному аттрактору  $\Lambda$   $A$ -диффеоморфизма  $f$  (см. раздел 1.).

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.1** **Докажем пункт 1.** Вначале покажем, что множество  $\psi(\bar{\Lambda})$  является замкнутым в  $\mathbb{F}$ . Для этого рассмотрим произвольную предельную точку  $f$  множества  $\psi(\bar{\Lambda})$  и сходящуюся к ней последовательность  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $f_i \in \psi(\bar{\Lambda})$ . Покажем, что  $f \in \psi(\bar{\Lambda})$ , т.е. найдется кривая  $\bar{w} \subset \bar{\Lambda}$  (являющаяся прообразом неустойчивого многообразия некоторой точки из множества  $\Lambda$ ) такая, что  $\psi(\bar{w}) = f$ . Рассмотрим

последовательность  $\{\bar{w}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $\bar{w}_i \subset \Lambda$  такую, что  $\psi(\bar{w}_i) = f_i$ . Пусть  $(e_1, e_2)$  — точка из класса эквивалентности  $f$ . Зададим положительное направление обхода абсолюта  $\mathbb{E}$  таким образом, что область  $\bar{M}^2$  остается слева. Поскольку множество рациональных точек всюду плотно на абсолюте, существуют элементы  $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$  такие что, точки  $\gamma_1^+, e_1, \gamma_2^+, e_2$  встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта. Пусть  $U_1, U_2 \subset \mathbb{E}$  — связные окрестности точек  $\gamma_1^+$  и  $\gamma_2^+$  соответственно, не содержащие точек  $e_1, e_2$ . Рассмотрим произвольную кривую  $\bar{w}_u \subset \bar{\Lambda}$  с граничными точками  $u_1$  и  $u_2$  на абсолюте. В силу свойств элементов группы  $\Gamma$  найдутся целые числа  $n_1$  и  $n_2$  такие, что  $(\gamma_1^+)^{n_1}(u_1), (\gamma_1^+)^{n_1}(u_2) \in U_1$  и  $(\gamma_2^+)^{n_2}(u_1), (\gamma_2^+)^{n_2}(u_2) \in U_2$ . Положим  $\bar{w}_a = (\gamma_1^+)^{n_1}(\bar{w}_u)$  и  $\bar{w}_b = (\gamma_2^+)^{n_2}(\bar{w}_u)$ . Тогда точки  $a_1, a_2, e_1, b_1, b_2, e_2$  встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта в положительном направлении, где  $a_1, a_2 \in \mathbb{E}$  и  $b_1, b_2 \in \mathbb{E}$ , граничные точки кривых  $\bar{w}_a, \bar{w}_b \subset \bar{\Lambda}$  соответственно. Выберем любую кривую  $\bar{v}$  из  $\bar{L}$  с граничными точками  $v_1, v_2$  на абсолюте такую, что:

- 1) точки  $a_1, v_1, a_2, e_1, b_1, v_2, b_2, e_2$  встречаются в указанном порядке при обходе абсолюта в положительном направлении;
- 2) каждое из пересечений  $\bar{v} \cap \bar{w}_a$  и  $\bar{v} \cap \bar{w}_b$  состоит ровно из одной точки.

Поскольку  $f_i \rightarrow f$  при  $i \rightarrow \infty$ , то при достаточно больших значениях  $i$  кривые  $\bar{w}_i$  пересекаются с  $\bar{v}$ . Без ограничения общности можно считать, что для любого  $i \in \mathbb{N}$  пересечение  $\bar{w}_i \cap \bar{v}$  не пусто и содержится в компактном фрагменте кривой  $\bar{v}$ , ограниченном точками  $\bar{v} \cap \bar{w}_a$  и  $\bar{v} \cap \bar{w}_b$ . В каждом из множеств  $\bar{w}_i \cap \bar{v}$  выберем по точке  $\bar{x}_i$ . Последовательность  $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  имеет предельную точку  $\bar{x} \in \bar{M}^2$ , т.к. она целиком содержится в компактном куске кривой  $\bar{v}$ , ограниченном точками  $\bar{v} \cap \bar{w}_a$  и  $\bar{v} \cap \bar{w}_b$ . Так как множество  $\bar{\Lambda}$  замкнуто, то найдется кривая  $\bar{w} \in \bar{\Lambda}$ , содержащая точку  $\bar{x}$ . В силу предложения 2.4 имеем равенство  $\psi(\bar{w}) = f$ . Таким образом,  $\psi(\bar{\Lambda})$  является замкнутым множеством.

Теперь покажем, что множество  $\bar{\mathcal{L}}$  является замкнутым на  $\bar{M}^2$ . Пусть  $\bar{x}$  — произвольная предельная точка множества  $\bar{\mathcal{L}}$ ,  $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  последовательность точек из  $\bar{\mathcal{L}}$ , сходящаяся к точке  $\bar{x}$ , такая, что  $\bar{x} \neq \bar{x}_i$  для любого  $i \in \mathbb{N}$ . Пусть  $\{\bar{l}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  — последовательность геодезических из  $\bar{\mathcal{L}}$ , содержащих точки последовательности  $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ . Положим  $f_i = \psi(\bar{l}_i)$ . Покажем, что последовательность  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  имеет предельную точку  $f \in \mathbb{F}$ . Пусть  $U$  — произвольная компактная окрестность точки  $\bar{x}$ ;  $L_U$  — множество всех геодезических на  $\bar{M}^2$ , имеющих непустое пересечение с  $U$ . Поскольку в модели Пуанкаре геодезические являются дугами окружностей, ортогональных абсолюту, то множество  $\psi(L_U)$  является компактным подмножеством в  $\mathbb{F}$ . Т.к. все геодезические последовательности  $\{\bar{l}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , начиная с некоторой, содержатся в  $L_U$ , то последовательность  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  имеет предельную точку  $f$ , содержащуюся в  $\psi(L_U)$ . Множество  $\psi(\bar{\mathcal{L}})$  совпадает с  $\psi(\bar{\Lambda})$  и, следовательно, является замкнутым, поэтому  $f \in \psi(\bar{\mathcal{L}})$ . Тогда найдется геодезическая  $\bar{l} \subset \bar{\mathcal{L}}$  такая, что  $\psi(\bar{l}) = f$ . В силу свойств геодезических в модели Пуанкаре  $\bar{x} \in \bar{l}$ .

Замкнутость множества  $\mathcal{L}$  следует теперь из равенств  $\pi^{-1}(\pi(\bar{\mathcal{L}})) = \bar{\mathcal{L}}$ ,  $\mathcal{L} = \pi(\bar{\mathcal{L}})$  и замкнутости  $\bar{\mathcal{L}}$ .

**Докажем пункт 2.** Для этого достаточно показать что для любой кривой  $\bar{w} \subset \bar{\Lambda}$  множество  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \psi(\gamma(\bar{w}))$  плотно в  $\psi(\bar{\Lambda})$ . Действительно, отсюда следует что для любой геодезической  $\bar{l} \subset \bar{\mathcal{L}}$  множество  $\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(\bar{l})$  плотно в  $\bar{\mathcal{L}}$  и, следовательно, в силу свойств накрытия  $\pi$  геодезическая  $l = \pi(\bar{l}) \subset \mathcal{L}$  плотна в  $\mathcal{L}$ .

Рассмотрим произвольную точку  $f_0 \in \psi(\bar{\Lambda})$ . По построению найдется единственная кривая  $\bar{w}_0 \subset \bar{\Lambda}$  такая, что  $\psi(\bar{w}_0) = f_0$ . Пусть  $w \subset \Lambda$  — произвольная кривая из  $\Lambda$ .

Покажем, что найдется последовательность  $\{\bar{w}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  такая, что  $\pi(\bar{w}_i) = w$ , и последовательность  $\{f_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ , где  $f_i = \psi(\bar{w}_i)$  сходится к точке  $f_0$ . Рассмотрим произвольную точку  $x_0 \in \bar{w}_0$ . Поскольку множество  $\pi^{-1}(w)$  плотно в  $\bar{\Lambda}$ , то найдется последовательность точек  $\{\bar{x}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  такая, что  $\bar{x}_i \in \pi^{-1}(w)$ , и  $\bar{x}_i \rightarrow \bar{x}_0$  при  $i \rightarrow \infty$ . В силу предложения 2.4 в качестве  $\bar{w}_i$  можно выбрать кривую из  $\pi^{-1}(w)$ , содержащую точку  $\bar{x}_i$ .

**Докажем пункт 3.** Пусть  $\Delta$  — открытый диск, принадлежащий дополнению  $M^2 \setminus \Lambda$  с достижимой изнутри границей  $C = \bigcup_{i=1}^{r_C} W_{p_i}^u$ , где  $r_C \geq 3$ . В силу леммы 2.2 каждая компонента связности прообраза  $\pi^{-1}(\Delta \cup C)$  представляет собой идеальный криволинейный многоугольник с  $r$  граничными точками  $e_1, e_2, \dots, e_r$  на абсолюте, являющимися его вершинами.

По построению геодезической ламинации  $\bar{\mathcal{L}}$  существует геодезический многоугольник  $A$ , принадлежащий  $\bar{M}^2 \cup \mathbb{E}$ , граница которого состоит из объединения точек  $e_1, e_2, \dots, e_r$  и геодезических с граничными точками из множества  $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ . Покажем, что ограничение  $\pi|_{\text{int}(A)}$  является гомеоморфизмом на образ. Т.к. накрытие  $\pi$  является локальным гомеоморфизмом, а множество  $\text{int}(A)$  открыто, то достаточно показать, что ограничение  $\pi|_{\text{int}(A)}$  является инъективным. Предположим противное, тогда найдутся две точки  $x, y \in A$  такие, что при некотором  $\gamma \in \Gamma$  будет иметь место равенство  $\gamma(x) = y$ . Заметим, что элемент  $\gamma$  оставляет инвариантной геодезическую  $l_\gamma$  на плоскости Лобачевского, проходящую через точки  $x$  и  $y$ . Поскольку  $l_\gamma$  имеет рациональные граничные точки, а точки  $e_1, e_2, \dots, e_k$  — иррациональные, то она обязана пересечься ровно с двумя сторонами геодезического многоугольника  $A$ . Пусть  $l_\alpha$  — та из них, для которой точки  $z = l_\alpha \cap l_\gamma, x, y$  располагаются на геодезической  $l_\gamma$  в указанном порядке. Рассмотрим геодезическую  $\gamma(l_\alpha)$ . Она делит плоскость Лобачевского  $\bar{M}^2$  на две части так, что геодезическая  $l_\alpha$  и точка  $y$  находятся по разные стороны от геодезической  $\gamma(l_\alpha)$ . Отсюда следует, что геодезическая  $\gamma(l_\alpha)$  пересекается с одной из сторон многоугольника  $A$ , что невозможно, т.к. геодезическая  $\gamma(l_\alpha)$  принадлежит ламинации  $\bar{\mathcal{L}}$ . Таким образом, множество  $\pi(\text{int}(A))$  гомеоморфно открытому диску.

Покажем, что любая точка  $\bar{x} \in \bar{M}^2$  принадлежит либо внутренности некоторого геодезического многоугольника  $A$ , либо геодезической ламинации  $\bar{\mathcal{L}}$ . Предположим противное, тогда найдется точка  $\bar{x} \in \bar{M}^2 \setminus \bar{\mathcal{L}}$ , не принадлежащая внутренности никакого геодезического многоугольника. Через точку  $\bar{x}$  проведем геодезический луч  $\bar{l}^+$ , пересекающийся с  $\bar{\mathcal{L}}$ . Т.к. множество  $\bar{\mathcal{L}}$  замкнутое, то на геодезическом луче  $\bar{l}^+$  найдется точка  $\bar{y} \in \bar{\mathcal{L}}$  такая, что отрезок луча  $\bar{l}^+$ , ограниченный точками  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ , не содержит точек, принадлежащих  $\bar{\mathcal{L}}$ . Тогда по построению ламинации  $\bar{\mathcal{L}}$  геодезическая  $\bar{l} \subset \bar{\mathcal{L}}$ , содержащая точку  $\bar{y}$ , является граничной, но тогда по точка  $\bar{x}$  обязана принадлежать внутренности некоторого геодезического многоугольника. Полученное противоречие завершает доказательство.

**Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .**

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.2** Без ограничения общности можно считать, что отображения  $f$  и  $f'$  таковы, что каждый диск из дополнения  $M^2 \setminus \Lambda$  и  $M^2 \setminus \Lambda'$  содержит единственную периодическую точку отображения  $f$  и  $f'$  соответственно, являющуюся источником. Пусть  $p \in \Lambda$  — внутренняя периодическая точка периода  $k$  отображения  $f$ , а  $\bar{p} \in \bar{\Lambda}$  — один из ее прообразов. В силу пункта 4 предложения 2.3 найдется такое поднятие  $\bar{f}_k$  отображения  $f^k$ , для которого точка  $\bar{p}$  будет являться неподвижной. Рассмотрим отображение  $\bar{f}_k^2$ . Т.к.  $f$  и  $f'$  — гомотопные отображения, то найдется поднятие  $\bar{f}_{2k}'$  отображения  $f'^{2k}$ , индуцирующее такое же действие на абсолюте, что и отображение  $\bar{f}_k^2$ .

Рассмотрим два экземпляра пространства  $\bar{M}^2 \cup \mathbb{E}$ , склеенных по тождественному отображению абсолюта  $\mathbb{E}$  на себя. Данное пространство пространством гомеоморфно двумерной

сфере  $\mathbb{S}^2$ . Пара отображений  $\bar{f}_k^2$  и  $\bar{f}_{2k}'$  индуцируют отображение сферы  $F: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  на себя такое, что точка  $\bar{p}$  является седловой неподвижной точкой, а точки  $u_{\bar{p}}^1, u_{\bar{p}}^2, s_{\bar{p}}^1, s_{\bar{p}}^2$  — неподвижными узловыми. Тогда из формулы Лефшеца о сумме индексов неподвижных точек следует, что на копии  $\bar{M}^2$ , не содержащей точку  $\bar{p}$ , найдется по крайней мере одна неподвижная седловая точка  $\bar{p}'$  отображения  $F$ . Точка  $\bar{p}'$  является неподвижной седловой точкой отображения  $\bar{f}_{2k}'$ , причем  $\bar{p}' \in \bar{L}'$ . Из этого следует, что в ламинации  $\bar{\mathcal{L}}'$  содержится геодезическая  $\bar{l}$  с граничными точками  $u_{\bar{p}}^1$  и  $u_{\bar{p}}^2$  на абсолюте. Положим  $l = \pi(\bar{l})$ . Т.к.  $l \subset \mathcal{L}$  и  $l \subset \mathcal{L}'$ , то в силу пунктов 1 и 2 теоремы 1.1  $\mathcal{L} = cl(l)$  и  $\mathcal{L}' = cl(l)$ , а следовательно,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ .

Доказательство закончено.

Теорема 1.3 доказывается методами, аналогичными методам, примененным при доказательстве Теоремы 2.2. из работы [9], поэтому мы его опускаем.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ (проект 17-11-01041), за исключением раздела 2.1., посвященного доказательству связности и одномерности совершенных базисных множеств, полученному в рамках выполнения программы ЦФИ (проект 95) НИУ ВШЭ за 2018 г.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
2. Р. В. Плыкин, “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84(126)**:2 (1971), 301–312.
3. Р. В. Плыкин, “Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, **94(136)**:2(6) (1974), 243–264.
4. Р. В. Плыкин, “О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов”, *УМН*, **39**:6(240) (1984), 75–113.
5. А. Ю. Жиров, Р. В. Плыкин, “Соответствие между одномерными гиперболическими аттракторами диффеоморфизмов поверхностей и обобщенными псевдоаносовскими диффеоморфизмами”, *Матем. заметки*, **58**:1 (1995), 779–781.
6. С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем)”, *Матем. сб.*, **90(132)**:3 (1973), 372–402.
7. В. З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I”, *Труды Московского математического общества*, **32** (1975), 35–60.
8. В. З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах II”, *Труды Московского математического общества*, **34** (1977), 243–252.
9. С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “О представлении минимальных множеств потоков на двумерных многообразиях геодезическими линиями”, *Известия Российской академии наук. Серия математическая*, **42**:1 (1978), 104–129.

10. В. З. Гринес, “О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами”, *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 57-94.
11. V. Z. Grines, “Topological classification of one-dimensional attractors and repellers of A-diffeomorphisms of surfaces by means of automorphisms of fundamental groups of supports”, *J. Math. Sci.*, **95**:5 (1999), 2523-2545.
12. V. Z. Grines, “On topological classification of A-diffeomorphisms of surfaces”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6**:1 (2000), 97-126.
13. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen”, *Acta Math.*, **50**:1 (1927), 189-358.
14. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», М.-Ижевск, 2011.
15. Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Терстону*, Фазис, М.:, 1998.
16. R. Bowen, “Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377-397.

Поступила 7.03.2018

MSC2010 37C70

# Representation of spaciously situated perfect attractors of diffeomorphisms by geodesic laminations

© V. Z. Grines<sup>1</sup>, E. D. Kurenkov<sup>2</sup>

**Abstract.** The present paper is devoted to the topological classification of one-dimensional basic sets of diffeomorphisms satisfying Smale's axiom A and defined on orientable surfaces of negative Euler characteristic equipped with a metric of constant negative curvature. Using methods of Lobachevsky geometry, each perfect one-dimensional attractor of A-diffeomorphism is uniquely associated with a geodesic lamination on the surface. It is established that, in the absence of special pairs of boundary periodic points in the attractor, there exists a homeomorphism of the surface homotopic to the identity that maps unstable manifolds of the basic set points into leaves of the geodesic lamination. Moreover, from the method of constructing geodesic laminations it follows that if the diffeomorphisms whose non-wandering sets contain perfect spaciously situated attractors are homotopic, then the geodesic laminations corresponding to these attractors coincide.

**Key Words:** diffeomorphism, axiom A, perfect basic set, attractor, repeller, geodesic lamination

## REFERENCES

1. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747-817.
2. R.V. Plykin, "[The topology of basic sets for Smale diffeomorphisms]", *Mat. Sb.*, **84(126)**:2 (1971), 301-312 (In Russ.).
3. R.V. Plykin, "[Sources and sink of A-diffeomorphisms of surfaces]", *Mat. Sb.*, **94(136)**:2(6) (1974), 243-264 (In Russ.).
4. R.V. Plykin, "[On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades]", *Russian Mathematical Surveys*, **39**:6 (1984), 75-113 (In Russ.).
5. A.Yu. Zhironov, R.V. Plykin, "[On the relationship between onedimensional hyperbolic attractors of surfaces diffeomorphisms and generalized pseudo-anosov diffeomorphisms]", *Mathematica Votes*, **58**:1 (1995), 779-781 (In Russ.).
6. S.H. Aranson, V.Z. Grines, "[On some invariants of dynamical systems on two-dimensional manifolds (necessary and sufficient conditions sorthe of topological equivalence of transitive dynamical systems)]", *Matem. Sbornik*, **90**:3 (1973(132)), 372-402 (In Russ.).
7. V.Z. Grines, "[On topological conjugacy of diffeomorphisms of 2-manifolds on onedimensional orientable basic sets I]", *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, **32** (1975), 35-60 (In Russ.).

<sup>1</sup> **Viacheslav Z. Grines**, academic supervisor of laboratory TMD, National Research University Higher School of Economics (25 Bolshaya Pechyorskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4709-6858>, [vgrines@hse.ru](mailto:vgrines@hse.ru)

<sup>2</sup> **Evgeniy D. Kurenkov**, research assistant of laboratory TMD, National Research University Higher School of Economics (25 Bolshaya Pechyorskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3544-1143>, [ekurenkov@hse.ru](mailto:ekurenkov@hse.ru)

8. V.Z. Grines, “[On topological conjugacy of diffeomorphisms of 2-manifolds on onedimensional orientable basic sets I]”, *Trudy Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, **34** (1977), 243-252 (In Russ.).
9. S.H. Aranson, V.Z. Grines, “[On the representation of minimal sets of currents on two-dimensional manifolds by geodesic]”, *Mathematic of the USSR- Izvestiya*, **42**:1 (1978), 104-129 (In Russ.).
10. V.Z. Grines, “[On the topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with onedimensional attractors and repellers]”, *Sb. Math.*, **188**:4 (1997), 57-94 (In Russ.).
11. V.Z. Grines, “Topological classification of one-dimensional attractors and repellers of A-diffeomorphisms of surfaces by means of automorphisms of fundamental groups of supports.”, *J. Math. Sci.*, **95**:5 (1999), 2523-2545.
12. V.Z. Grines, “On Topological Classification of A-Diffeomorphisms of Surfaces”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **6**:1 (2000), 97-126.
13. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen”, *Acta Math.*, **50**:1 (1927), 189-358.
14. V.Z. Grines, O.V. Pochinka, *Introduction to topological classification of cascades on manifolds of dimension two and three*, Regular. Khaotich. Dinam., Moscow–Izhevsk., 2011 (In Russ.).
15. A.J. Casson, S.A. Bleiler, *Automorphisms of surfaces after Nielsen and Thurston*, Cambridge University Press, 1998.
16. R. Bowen, “Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms”, *Trans.Amer. Math. Soc.*, **154** (1971), 377-397.

*Submitted 7.03.2018*



УДК 517.929.4

## Достаточные условия существования асимптотического положения покоя в системах с запаздыванием

© У. П. Зараник<sup>1</sup>, С. Е. Купцова<sup>2</sup>, Н. А. Степенко<sup>3</sup>

**Аннотация.** В работе исследуется предельное поведение решений систем нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. В частности, рассматривается случай, когда у решений системы существует нулевое предельное положение, которое может не являться инвариантным множеством рассматриваемой системы. Вводится понятие асимптотического положения покоя для траекторий систем с запаздыванием. На базе второго метода Ляпунова (с помощью подхода Разумихина, в котором предлагается исследовать поведение решений системы при помощи построения классической функции Ляпунова, но оценку ее производной вдоль решений системы проводить не на всем множестве интегральных кривых, а на некотором его подмножестве) были получены достаточные условия, при выполнении которых исходная система имеет асимптотическое положение покоя, а также асимптотическое положение покоя в целом. С целью демонстрации применения полученных результатов приводятся примеры нелинейных дифференциальных уравнений с запаздыванием, имеющих асимптотическое положение покоя, на которых продемонстрировано применение полученных результатов.

**Ключевые слова:** устойчивость по Ляпунову, нелинейные системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, асимптотическое положение покоя, функция Ляпунова, подход Разумихина.

### 1. Введение

Дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом широко применяются для описания и моделирования различных динамических процессов, в которых необходимо учитывать зависимость скорости процесса не только от текущего, но и от прошлых состояний системы. Развитие теории устойчивости движений систем дифференциально-разностных уравнений, берущее начало в работах Н. Н. Красовского [1], Р. Беллмана и К. Л. Кука [2], Дж. Хейла [3] и В. И. Зубова [4]–[5], до настоящего времени является актуальной темой исследований. В предложенной работе затрагивается вопрос появления в системах дифференциально-разностных уравнений асимптотических положений покоя. Понятие асимптотического положения покоя для систем дифференциальных уравнений было введено В. И. Зубовым [6] в связи с необходимостью изучения таких движений, которые имеют предельное поведение при неограниченном возрастании времени, причем сами

<sup>1</sup> **Зараник Ульяна Петровна**, старший преподаватель кафедры теории управления, ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет" (198504, Россия, Петергоф, Университетский пр., д. 35), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7604-4999>, [zaraniik\\_u@list.ru](mailto:zaraniik_u@list.ru)

<sup>2</sup> **Купцова Светлана Евгеньевна**, доцент кафедры теории управления, ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет" (198504, Россия, Петергоф, Университетский пр., д. 35), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0168-3256>, [sekuptsova@yandex.ru](mailto:sekuptsova@yandex.ru)

<sup>3</sup> **Степенко Николай Анатольевич**, доцент кафедры теории управления, ФГБОУ ВО "Санкт-Петербургский государственный университет" (198504, Россия, Петергоф, Университетский пр., д. 35), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9532-8831>, [nick\\_st@mail.ru](mailto:nick_st@mail.ru)

предельные множества не являются инвариантными множествами исходных дифференциальных уравнений. Исследование таких движений для систем дифференциальных уравнений проводилось в работах [7]–[10], для систем разностных уравнений — в работах [11]–[12]. В настоящей работе это понятие распространяется на системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Основным методом исследования качественного поведения решений систем дифференциальных уравнений является второй метод Ляпунова. Для дифференциально-разностных уравнений данный метод разделяется на два подхода. В первом, который получил название метод Красовского, в качестве функций Ляпунова для исследования устойчивости уравнений предлагается использовать функционалы Ляпунова-Красовского. Во втором методе уравнения движения исследуются при помощи классической функции Ляпунова, но производная этой функции в силу системы оценивается не на всем множестве интегральных кривых, а на некотором его подмножестве. Этот метод получил название метода Разумихина [13]–[14] и именно он применялся в данной работе для исследования поведения решений систем дифференциально-разностных уравнений.

## 2. Основные определения и обозначения

Рассмотрим систему уравнений

$$\dot{x} = f(t, x(t), x(t-h)), \quad (2.1)$$

где  $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$  — неизвестный  $n$ -мерный вектор;  $h > 0$  — запаздывание;  $f(t, x, y) = (f_1, \dots, f_n)^T$  —  $n$ -мерная вектор-функция, относительно которой мы предполагаем, что она определена и непрерывна на множестве  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^n$  и удовлетворяет условию Липшица по всем аргументам, начиная со второго, т.е. для любого числа  $H > 0$  найдется число  $L = L(H) \geq 0$  такое, что для любых  $n$ -мерных векторов  $x, \bar{x}, y, \bar{y}$ , удовлетворяющих условию  $\|x\| \leq H$ ,  $\|\bar{x}\| \leq H$ ,  $\|y\| \leq H$ ,  $\|\bar{y}\| \leq H$  и для любого  $t \geq 0$  выполняется неравенство:

$$\|f(t, x, y) - f(t, \bar{x}, \bar{y})\| \leq L(\|x - \bar{x}\| + \|y - \bar{y}\|).$$

Под  $\|z\|$  здесь и далее понимается евклидова норма вектора.

Придерживаясь терминологии из [15], обозначим через  $PC([a, b], \mathbb{R}^n)$  бесконечномерное пространство кусочно-непрерывных на отрезке  $[a, b]$   $n$ -мерных вектор-функций с конечным числом точек разрыва первого рода, через  $x(t, t_0, \varphi)$  — решение системы (2.1), удовлетворяющее следующим начальным условиям:  $x(t, t_0, \varphi) \equiv \varphi(t - t_0)$  при  $t \in [t_0 - h, t_0]$ ,  $\varphi \in PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ . Здесь и далее предполагаем, что  $t_0 \in \mathbb{R}_+^1$ , где  $\mathbb{R}_+^1 = \{t \in \mathbb{R}^1 \mid t \geq 0\}$ . Известно [3], что при выполнении условий, наложенных на правую часть системы, найдется  $\beta > 0$  такое, что  $x(t, t_0, \varphi)$  будет продолжимо, по крайней мере, на множество  $[t_0 - h, t_0 + \beta]$ , причем  $x(t, t_0, \varphi)$  будет непрерывной функцией на отрезке  $[t_0, t_0 + \beta]$ .

Под состоянием системы в момент  $t \geq t_0$  будем понимать сегмент решения  $x(t, t_0, \varphi)$ , принадлежащий отрезку  $[t - h, t]$ , т.е.

$$x_t(t_0, \varphi) : s \rightarrow x(t + s, t_0, \varphi), \quad s \in [-h, 0].$$

При этом начальное состояние системы определится следующим образом:

$$x_{t_0}(t_0, \varphi) : s \rightarrow \varphi(s), \quad s \in [-h, 0].$$

Обозначим  $X = PC([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  и пусть  $\varphi$  – произвольный элемент множества  $X$ . Введем норму  $\varphi$  следующим образом:

$$\|\varphi\|_h = \sup_{s \in [-h, 0]} \|\varphi(s)\|.$$

**О п р е д е л е н и е 2.1** Положение  $x = 0$  назовем асимптотическим положением покоя для траекторий системы (2.1), если существует  $\varepsilon > 0$  такое, что при  $\|\varphi\|_h < \varepsilon$ , решение  $x(t, t_0, \varphi)$  системы (2.1) будет определено на множестве  $t \geq t_0$  и

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty. \quad (2.2)$$

**О п р е д е л е н и е 2.2** Положение  $x = 0$  назовем асимптотическим положением покоя в целом, если все решения системы (2.1) определены на множестве  $t \geq t_0$  и обладают свойством (2.2).

Пусть при каждом  $t \in \mathbb{R}_+^1$  на множестве  $X$  определен функционал  $W(t, \varphi)$ . Под функционалом будем понимать отображение  $W : \mathbb{R}_+^1 \times X \rightarrow \mathbb{R}^1$ .

**О п р е д е л е н и е 2.3** Функционал  $W(t, \varphi)$  будем называть непрерывным на множестве  $\mathbb{R}_+^1 \times X$  если для любых  $\varepsilon > 0$ ,  $t \in \mathbb{R}_+^1$  и  $\varphi \in X$  существует число  $\delta > 0$  такое, что для любых  $\tau \in \mathbb{R}_+^1$  и  $\psi \in X$ , удовлетворяющих соотношению  $|t - \tau| + \|\varphi - \psi\|_h < \delta$ , выполнено  $|W(t, \varphi) - W(\tau, \psi)| < \varepsilon$ .

Рассмотрим функцию  $V(t, x)$ , определенную и непрерывную на множестве  $\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^n$ , а также непрерывную и положительную на множестве  $t \geq 0$  функцию  $\lambda(t)$ .

**О п р е д е л е н и е 2.4** Функцию  $V(t, x)$  назовем отрицательно определенной на множестве  $\|x\| \geq \lambda(t)$ , если

1.  $V(t, x)$  непрерывна по всем своим аргументам на множестве  $t \geq 0$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ;
2.  $V(t, x) \leq -V_1(x)$  на множестве  $\|x\| \geq \lambda(t)$ , где  $V_1(x)$  – непрерывная в  $\mathbb{R}^n$  функция такая, что  $V_1(x) > 0$  для любого  $x \in \mathbb{R}^n$ .

После подстановки в  $V(t, x)$  решения  $x(t, t_0, \varphi)$  получим функцию времени  $v(t) = V(t, x(t, t_0, \varphi))$ . Под производной функции  $V(t, x)$  вдоль решений системы (2.1) будем понимать производную по времени от функции  $v(t)$  и обозначать  $\dot{V}|_{(2.1)}$ . В случае существования у  $V(t, x)$  частных производных,  $\dot{V}|_{(2.1)}$  может быть найдена следующим образом:

$$\dot{V}|_{(2.1)} = \frac{\partial V}{\partial t} + (\nabla V, f) = W(t, x_t). \quad (2.3)$$

Понятно, что для рассматриваемых нами систем функционал  $W(t, x_t) = \widetilde{W}(t, x(t), x(t-h))$ . Будем говорить, что  $V(t, x)$  непрерывно-дифференцируема вдоль решений системы, если функционал в правой части равенства (2.3) является непрерывным.

Введем еще одно вспомогательное определение, которое будем использовать в доказательствах теорем.

**О п р е д е л е н и е 2.5** Пусть  $v(t)$  – непрерывная на множестве  $t \geq t_0$  функция. Будем говорить, что для некоторого числа  $c$  точка  $t_1 > t_0$  обладает свойством (А) на множестве  $t \in [t_1 - \Delta, t_1]$ , если для некоторого  $\Delta > 0$  будут выполнены следующие соотношения:

$$\begin{cases} v(t_1) = c, \\ v(t) < c, \quad t \in [t_1 - \Delta, t_1]. \end{cases}$$

### 3. Достаточные условия существования асимптотического положения покоя в целом

Справедлива следующая теорема.

**Т е о р е м а 3.1** Если для системы (2.1) существуют непрерывная на множестве  $\mathbb{R}_+^1 \times \mathbb{R}^n$  функция  $V(t, x)$  и непрерывный на множестве  $\mathbb{R}_+^1 \times X$  функционал  $W(t, x_t)$  такие, что

1.  $V_1(x) \leq V(t, x) \leq V_2(x)$ , где функции  $V_1(x)$  и  $V_2(x)$  положительно определены в  $\mathbb{R}^n$  и  $V_1(x) \rightarrow +\infty$  при  $\|x\| \rightarrow +\infty$ ;
2.  $\dot{V}|_{(2.1)} = W(t, x_t)$ , причем функционал  $W(t, x_t)$  таков, что вдоль интегральных кривых системы (2.1), удовлетворяющих условию  $V(\xi, x(\xi, t_0, \varphi)) \leq g(V(t, x(t, t_0, \varphi)))$  для всех  $\xi \in [t - h, t)$ , допускает оценку

$$W(t, x_t) \leq W_1(t, x),$$

где функция  $W_1(t, x)$  отрицательно определена на множестве  $\|x\| \geq \lambda(t)$ ;

3.  $g(r)$  – длинная непрерывная, строго монотонно возрастающая на множестве  $r \geq 0$  функция, удовлетворяющая условию  $g(r) > r$  при  $r > 0$ ;
4.  $\lambda(t) \in C^0(\mathbb{R}_+^1)$ ,  $\lambda(t) > 0$  и  $\lambda(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ ,

тогда  $x = 0$  является асимптотическим положением покоя в целом для траекторий системы (2.1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выберем произвольный момент  $t_0 \geq 0$ , произвольную кусочно-непрерывную на  $[t_0 - h, t_0]$  начальную функцию  $\varphi(t)$  и рассмотрим решение  $x(t, t_0, \varphi)$ . Сделаем следующее замечание.

**З а м е ч а н и е 3.1** По условиям теоремы функционал  $W(t, x_t)$  задан и непрерывен на множестве  $\mathbb{R}_+^1 \times X$ , следовательно, у функции  $v(t) = V(t, x(t, t_0, \varphi))$  будет существовать производная  $\dot{v}(t) = w(t) = W(t, x_t(t_0, \varphi))$  на всем интервале существования решения  $t \in [t_0, T(t_0, \varphi))$  за исключением, может быть, конечного числа точек разрыва первого рода, расположенных на множестве  $[t_0, t_0 + h] \cap [t_0, T(t_0, \varphi))$ .

Для каждого  $t \geq 0$  определим функцию  $l(t)$  следующим образом:

$$l(t) = \sup_{\|x\| < \lambda(t)} V_2(x).$$

В силу выполнения первого и четвертого условий теоремы  $l(t)$  будет задана и ограничена на множестве  $t \geq 0$ , а также обладать следующим свойством

$$l(t) \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \longrightarrow +\infty. \quad (3.1)$$

Также для всех  $t$  из области определения  $x(t, t_0, \varphi)$  будут справедливы следующие соотношения

$$\begin{aligned} \text{если} \quad \|x(t, t_0, \varphi)\| < \lambda(t), \quad \text{то} \quad v(t) &\leq l(t), \\ \text{если} \quad v(t) > l(t), \quad \text{то} \quad \|x(t, t_0, \varphi)\| &\geq \lambda(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

1. Покажем продолжимость решения  $x(t, t_0, \varphi)$  на интервал  $[t_0, +\infty)$ . Пусть это не так, тогда найдется момент  $t_* \geq t_0$  такой, что решение  $x(t, t_0, \varphi)$  определено на множестве

$t \in [t_0, t_*)$  и не определено при  $t = t_*$ . Тогда либо существуют некоторое число  $H_0 > 0$  и последовательность  $\tau_k \rightarrow t_* - 0$  такие, что  $\|x(\tau_k, t_0, \varphi)\| \leq H_0$  для любого  $k \geq 1$ , что противоречит теореме существования и единственности решения основной начальной задачи [3], либо

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_* - 0,$$

что исходя из первого условия теоремы влечет за собой выполнение условия

$$v(t) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow t_* - 0. \quad (3.3)$$

В силу того, что  $w(t)$  может иметь только конечное число точек разрыва первого рода на отрезке  $[t_0, t_0 + h]$ , существует  $\Delta_1 > 0$  такое, что она будет непрерывной при  $t \in (t_* - \Delta_1, t_*)$ . Из ограниченности функции  $l(t)$  и соотношения (3.3) следует, что существует величина  $\Delta_2 > 0$  такая, что  $v(t) > l(t)$  при  $t \in [t_* - \Delta_2, t_*)$ . Положим  $\Delta = \min\{\Delta_1, \Delta_2\}$  и определим положительные число

$$L_0 = \max_{[t_0 - h, t_* - \Delta]} v(t).$$

В силу соотношения (3.3) для числа  $2L_0$  найдется точка  $t_1 \in (t_* - \Delta, t_*)$ , обладающая на  $[t_* - \Delta, t_1]$  свойством (A); следовательно,  $\dot{v}(t_1) \geq 0$ . С другой стороны,  $v(t) < v(t_1) < g(v(t_1))$  для любого  $t \in [t_1 - h, t_1]$  и в силу (3.1)  $\|x(t, t_0, \varphi)\| \geq \lambda(t)$  при  $t \in [t_* - \Delta, t_1]$ ; следовательно, в силу третьего условия теоремы,  $\dot{v}(t_1) < 0$ . Полученное противоречие устанавливает продолжимость  $x(t, t_0, \varphi)$  на множество  $t \geq t_0$ .

2. Покажем ограниченность решения  $x(t, t_0, \varphi)$ . Заметим, что в силу первого условия теоремы для этого достаточно показать ограниченность функции  $v(t)$ . Предположим, что это не так, тогда для любого числа  $M > 0$  существует число  $T = T(M) \geq t_0$  такое, что  $v(T) > M$ . Следовательно, для величины

$$L = \max_{[0, +\infty)} l(t)$$

найдется  $T_0 \geq t_0 + h$  такой, что  $v(T_0) > L$ . Определим константу

$$L_0 = \max_{[t_0, T_0]} v(t).$$

Для числа  $2L_0$  найдется точка  $t_1 > T_0$ , обладающая на  $[t_0, t_1]$  свойством (A); следовательно,  $\dot{v}(t_1) \geq 0$ . С другой стороны,  $v(t) < v(t_1) < g(v(t_1))$  для любого  $t \in [t_1 - h, t_1]$  и  $\|x(t_1, t_0, \varphi)\| \geq \lambda(t_1)$ , следовательно;  $\dot{v}(t_1) < 0$ . Полученное противоречие говорит о том, что  $v(t) \leq 2L_0$  для любого  $t \geq t_0$ , что доказывает ограниченность решения  $x(t, t_0, \varphi)$ .

3. Покажем, что  $\|x(t, t_0, \varphi)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Для этого достаточно установить, что  $v(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ , т.е. для любого  $\gamma > 0$  существует  $T = T(\gamma) > 0$  такой, что

$$v(t) \leq \gamma \quad \text{при} \quad t \geq T. \quad (3.4)$$

Обозначим через  $\Gamma$  множество всех чисел  $\gamma$ , для которых соотношение (3.4) выполнено. Это множество не является пустым, т.к. число  $2L_0$  из второго пункта доказательства теоремы, принадлежит  $\Gamma$ . Заметим, что для доказательства нашего утверждения достаточно установить, что  $\inf \Gamma = 0$ . Предположим, что это не так пусть

$$\inf \Gamma = \gamma_0 > 0. \quad (3.5)$$

Из свойств функции  $g$  следует, что существует  $\eta_0 = \eta_0(\gamma_0) > 0$  такая, что

$$g(r) - r > 2\eta_0 \quad \text{при} \quad \gamma_0 - \eta_0 \leq r \leq \gamma_0 + \eta_0. \quad (3.6)$$

В силу соотношения (3.1) существует момент  $t_1 \geq t_0 + h$  такой, что  $l(t) < \gamma_0 - \eta_0$  при  $t \geq t_1$ . Число  $\gamma_0 + \eta_0 \in \Gamma$ , следовательно, существует  $t_2 \geq t_1$  такой, что  $v(t) \leq \gamma_0 + \eta_0$  при  $t \geq t_2$ . Поскольку  $\gamma_0 - \eta_0 \notin \Gamma$ , для любого  $t \geq t_2 + h$  найдется момент  $t_3 > t$  такой, что

$$v(t_3) > \gamma_0 - \eta_0. \quad (3.7)$$

В силу непрерывности функции  $v(t)$  существует число  $\Delta > 0$  такое, что

$$\gamma_0 - \eta_0 \leq v(t) \leq \gamma_0 + \eta_0 \quad \text{для любого } t \in [t_3 - \Delta, t_3],$$

тогда из (3.6) следует, что  $\gamma_0 + \eta_0 < g(v(t))$  при  $t \in [t_3 - \Delta, t_3]$ ; следовательно, на том же отрезке будет выполнено

$$v(\xi) \leq \gamma_0 + \eta_0 < g(v(t)) \quad \text{при } \xi \in [t - h, t).$$

Из соотношения (3.2) следует, что

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \geq \lambda(t) \quad \text{при } t \in [t_3 - \Delta, t_3].$$

Таким образом, при  $t \in [t_3 - \Delta, t_3]$  можно воспользоваться вторым условием теоремы. Обозначим

$$\min_{x \in [\gamma_0 - \eta_0, \gamma_0 + \eta_0]} \overline{W}_1(x) = \alpha > 0,$$

где  $W_1(x)$  – длинная положительно определенная в  $\mathbb{R}^n$  функция такая, что

$$W_1(t, x) \leq -\overline{W}_1(x) \quad \text{на множестве } \|x\| \geq \lambda(t).$$

Тогда

$$\dot{v} \leq -\alpha \quad \text{при } t \in [t_3 - \Delta, t_3]. \quad (3.8)$$

Для момента  $t_3$  возможны два случая:

1. существует  $t_* \in [t_3 - \Delta, t_3]$  такой, что  $v(t_*) = \gamma_0 - \eta_0$ ;
2.  $v(t) > \gamma_0 - \eta_0$  для любого  $t \in [t_2 + h, t_3]$ .

В первом случае, интегрируя неравенство (3.8) в пределах от  $t_*$  до  $t_3$ , придем к противоречию с (3.7):

$$\gamma_0 - \eta_0 < v(t_3) \leq v(t_*) - \alpha(t_3 - t_*) = \gamma_0 - \eta_0 - \alpha(t_3 - t_*) < \gamma_0 - \eta_0.$$

Следовательно,  $v(t) \leq \gamma_0 - \eta_0$  для всех  $t \geq t_*$ . Во втором случае проинтегрируем неравенство (3.8) в пределах от  $t_2 + h$  до  $t$ :

$$v(t) \leq v(t_2 + h) - \alpha(t - t_2 - h) \leq \gamma_0 + \eta_0 - \alpha(t - t_2 - h).$$

Понятно, что обязательно найдется момент  $t_* > t_2 + h$ , в который впервые нарушится неравенство  $v(t) > \gamma_0 - \eta_0$ , т.е. будет справедливо равенство  $v(t_*) = \gamma_0 - \eta_0$ . Согласно (3.7), существует  $t_4 > t_*$  такой, что  $v(t_4) > \gamma_0 - \eta_0$ , а тогда для момента  $t_4$  будет возможен лишь первый из рассмотренных, для момента  $t_3$  случаев и, следовательно,  $v(t) \leq \gamma_0 - \eta_0$  для всех  $t \geq t_*$ .

Таким образом, было установлено, что число  $\gamma_0 - \eta_0 \in \Gamma$ , что противоречит предположению (3.5).

Доказательство закончено.

#### 4. Достаточные условия существования локального асимптотического положения покоя

Пусть  $H$  - некоторое положительное число. Обозначим

$$\Omega = \{(t, x) \mid t \in \mathbb{R}_+^1, \|x\| \leq H\}.$$

**Т е о р е м а 4.1** Если для системы (2.1) существуют непрерывная на множестве  $\Omega$  функция  $V(t, x)$  и непрерывный на множестве  $\mathbb{R}_+^1 \times X$  функционал  $W(t, x_t)$  такие, что

1.  $V(t, x)$  положительно определена на множестве  $\Omega$  и допускает бесконечно малый высший предел;
2.  $\dot{V}|_{(2.1)} = W(t, x_t)$ , причем функционал  $W(t, x_t)$  таков, что вдоль интегральных кривых системы (2.1), удовлетворяющих условию  $V(\xi, x(\xi, t_0, \varphi)) \leq g(V(t, x(t, t_0, \varphi)))$  для всех  $\xi \in [t - h, t]$ , допускает оценку

$$W(t, x_t) \leq W_1(t, x),$$

где функция  $W_1(t, x)$  отрицательно определена на множестве  $\lambda(t) \leq \|x\| \leq H$ ;

3.  $g(r)$  - непрерывная, строго монотонно возрастающая на множестве  $r \geq 0$  функция, удовлетворяющая условию  $g(r) > r$  при  $r > 0$ ;
4.  $\lambda(t) \in C^0(\mathbb{R}_+^1)$ ,  $\lambda(t) > 0$  и  $\lambda(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ ;
5. существует число  $H_1 > \Lambda$ ,  $H_1 < H$  такое, что

$$\sup_{\|x\| < \Lambda} V(t, x) < \inf_{\|x\| = H_1} V(t, x), \quad \text{где } \Lambda = \max_{t \geq 0} \lambda(t),$$

тогда  $x = 0$  является асимптотическим положением покоя для траекторий системы (2.1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** На множестве  $\mathbb{R}_+^1$  определим числа

$$c_0 = \sup_{\|x\| < \Lambda} V(t, x) \quad \text{и} \quad c = \inf_{\|x\| = H_1} V(t, x)$$

Рассмотрим произвольный момент  $t_0 \geq 0$ , произвольную кусочно-непрерывную на  $[t_0 - h, t_0]$  начальную функцию  $\varphi(t)$ , удовлетворяющую соотношению  $\|\varphi\|_h < \Lambda$  и интегральную кривую  $x(t, t_0, \varphi)$ . Покажем, что

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| < H_1 \quad \text{для любого } t \geq t_0. \quad (4.1)$$

Предположим противное: пусть существует момент  $t_1 > t_0$  такой, что  $\|x(t_1, t_0, \varphi)\| = H_1$ , тогда, в силу того, что  $v(t_0) \leq c_0$ ,  $v(t_1) > c$  и  $c_0 < c$ , найдется момент  $t_* \in (t_0, t_1]$ , в который впервые нарушится неравенство  $v(t) < c$ . Таким образом, для данного  $c$  число  $t_*$  на множестве  $t \in [t_0 - h, t_*)$  обладает свойством (A); следовательно, если существует  $\dot{v}(t_*)$ , то  $\dot{v}(t_*) \geq 0$ . С другой стороны,  $v(t) < v(t_*) < g(v(t_*))$  при  $t \in [t_* - h, t_*)$  и  $\|x(t_*, t_0, \varphi)\| \geq \lambda(t_*)$ , т.к.  $v(t_*) > l(t_*)$ , следовательно, по второму условию теоремы 2  $\dot{v}(t_*) < 0$ . Полученное для точки  $t_*$  противоречие назовем противоречием (B).

Если у  $v(t)$  не существует производной в точке  $t_*$ , то из замечания (3.1) следует, что найдется число  $\Delta > 0$  такое, что  $v(t)$  будет непрерывно дифференцируемой на интервале

$t \in (t_* - \Delta, t_*)$ . Также найдутся числа  $\tilde{c}$ , достаточно близкие к числу  $c$ ,  $\tilde{c} < c$  и  $\tilde{t} \in (t_* - \Delta, t_*)$ , для которых будет выполнено свойство (A), что приведет к противоречию (B).

Таким образом, справедливость соотношения (4.1) установлена. Доказательство стремления к нулю решения  $x(t, t_0, \varphi)$  будет полностью повторять третий пункт доказательства теоремы 3.1

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

**З а м е ч а н и е 4.1** Отметим, что применение приведенных теорем может быть полезно в случае исследования поведения решений систем с возмущениями

$$\dot{x} = F(t, x(t), x(t-h)) + R(t, x_t),$$

если известно, что система  $\dot{x} = F(t, x(t), x(t-h))$  имеет асимптотически устойчивое в целом нулевое решение и вектор возмущений такой, что

$$\|R(t, x_t)\| \leq \bar{R}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow +\infty.$$

## 5. Примеры использования приведенных теорем

**П р и м е р 5.1** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -2x^3(t) + x^3(t-h) + e^{-t}. \quad (5.1)$$

В качестве функции Ляпунова возьмем  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  и вычислим

$$\dot{V}|_{(5.1)} = -2x^4(t) + x(t)x^3(t-h) + x(t)e^{-t} = W(t, x(t), x(t-h)).$$

Очевидно, что функция  $V(x)$  удовлетворяет первому условию теоремы 3.1 и функционал  $W$  непрерывен в смысле определения 2.3. Обозначим  $x = x(t)$  и  $y = x(t-h)$ , выберем произвольное число  $p \in (1, \sqrt[3]{2})$  и рассмотрим множество

$$M = \{(x, y) \mid V(y) < pV(x)\} = \{(x, y) \mid |y| < p|x|\},$$

где  $g(r) = pr$  была выбрана функция  $pr$ . На множестве  $M$  функционал  $W$  допускает следующую оценку

$$W(t, x, y) < -4x^4 + 2p^3|x|^4 + 2|x|e^{-t} = -(4 - 2p^3)x^4 + 2|x|e^{-t} = W_1(t, x).$$

Обозначим  $Q = \sqrt[3]{\frac{4}{4 - 2p^3}}$  и рассмотрим функцию  $\lambda(t) = Qe^{-\frac{t}{3}}$ . Тогда

$$W_1(t, x) \leq -(2 - p^3)x^4 \quad \text{на множестве} \quad |x| \geq Qe^{-\frac{t}{3}}.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 3.1, и значит, положение  $x = 0$  является для уравнения (5.1) асимптотическим положением покоя в целом.



**Пример 5.2** Рассмотрим уравнение

$$\dot{x} = -8x^3(t) + x^3(t-h) + x^5(t) + e^{-t}. \quad (5.2)$$

Построим функции  $V(t, x)$ ,  $\lambda(t)$ ,  $g(r)$ ,  $W_1(t, x)$  и функционал  $W(t, x(t), x(t-h))$  из условий теоремы 4.1. В качестве функции  $V(t, x)$  возьмем  $V(x) = \frac{1}{2}x^2$  и вычислим

$$\dot{V}|_{(5.2)} = -8x^4(t) + x(t)x^3(t-h) + x^6(t) + x(t)e^{-t} = W(t, x(t), x(t-h)).$$

Обозначим  $x = x(t)$  и  $y = x(t-h)$  и представим функционал  $W$  в следующем виде

$$W(t, x, y) = -8x^4 + xy^3 + x^6 + xe^{-t} = \overline{W}(x, y) + x^6 + xe^{-t}.$$

На плоскости  $(x, y)$  построим множество

$$N = \{(x, y) \mid \overline{W}(x, y) < 0\} = \{(x, y) \mid y < 2x, \quad x > 0\} \cup \{(x, y) : y > 2x, \quad x < 0\}.$$

Очевидно, что

$$M = \{(x, y) \mid V(y) < \frac{3}{2}V(x)\} = \{(x, y) \mid |y| < \frac{3}{2}|x|\} \subset N.$$

где  $g(r) = \frac{3}{2}r$  была выбрана функция  $\frac{3}{2}r$ . Оценим  $W(t, x, y)$  на множестве  $M$ :

$$W(t, x, y) < -8x^4 + \frac{27}{8}|x|^4 + x^6 + |x|e^{-t} \leq -4x^4 + x^6 + |x|e^{-t} = W_1(t, x).$$

Рассмотрим функцию  $\lambda(t) = e^{-\frac{t}{3}}$ . На множестве  $\lambda(t) \leq |x| \leq \sqrt{2}$  справедлива оценка

$$W_1(t, x) \leq -4x^4 + 2x^4 + x^4 = -x^4.$$

Также заметив, что  $\Lambda = 1$  и  $H_1 = \sqrt{2}$ , убедимся в выполнении пятого условия теоремы 4.1:

$$1/2 = \sup_{|x| < 1} V(x) < \inf_{|x| = \sqrt{2}} V(x) = 1.$$

Таким образом, все решения  $x(t, t_0, \varphi)$  уравнения (5.2), при выполнении условия  $\|\varphi\|_h < 1$  будут стремиться к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н.Н. Красовский, "Некоторые задачи теории устойчивости движения", Гос. изд-во физ.-мат. литературы, М., 1959, 211 с.
2. Р. Беллман, К. Кук, "Дифференциально-разностные уравнения"/ пер. с англ.; под ред. Л. Э. Эльсгольца, М., 1967, 548 с.
3. Дж. Хейл, "Теория функционально-дифференциальных уравнений"/ пер. с англ., Мир, М., 1984, 421 с.
4. В.И. Zubov, "Лекции по теории управления", Наука, М., 1975, 496 с.

У. П. Зараник, С. Е. Купцова, Н. А. Степенко. Достаточные условия...

5. В. И. Zubov, "К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом", *Известия вузов. Математика*, **6** (1958), 86–95.
6. В. И. Zubov, *"Колебания и волны"*, Изд-во ЛГУ, Л., 1989, 416 с.
7. С. Е. Купцова, "Асимптотически инвариантные множества Процессы управления и устойчивость: Тр. 37-й междунар. науч. конф. аспирантов и студентов / под ред. А. В. Платонова, Н. В. Смирнова, Изд-во С.-Петерб. ун-та, СПб, 2006.
8. С. Е. Купцова, "Об асимптотическом поведении решений систем нелинейных нестационарных дифференциальных уравнений", *Труды Средневолжского математического общества*, **8:1** (2006), 235–243.
9. О. Г. Тихомиров, Е. В. Темкина, "Асимптотическое положение покоя для систем однородных нестационарных дифференциальных уравнений", *Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 10: Прикладная математика, информатика и процессы управления*, 2014, № 2, 58–65.
10. A. V. Ekimov, M. V. Svirkin, "Analysis of asymptotic equilibrium state of differential systems using Lyapunov function method", *International conference "Stability and control processes" in memory of V. I. Zubov*, 2015, 45–47.
11. С. Е. Купцова, "Асимптотические положения покоя в системах разностных уравнений", *Системы управления и информационные технологии*, **56:2** (2014), 67–71.
12. S. Yu. Kuptsov, S. E. Kuptsova, U. P. Zaranik, "On asymptotic quiescent position of nonlinear difference systems with perturbations", *2015 International conference "Stability and control processes" in memory of V. I. Zubov (SCP) // IEEE*, 2015, 20–22.
13. Б. С. Разумихин, "Об устойчивости систем с запаздыванием", *Прикладная математика и механика*, **20:4** (1956), 500–512.
14. Б. С. Разумихин, "Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием", *Автомат. и телемех.*, **21:6** (1960), 740–748.
15. V. L. Kharitonov, *Time-Delay Systems: Lyapunov Functionals and Matrices*, Basel, Birkhäuser, 2013, 311 с.

Поступила 25.03.2018

MSC2010 34K20

# Sufficient conditions for the existence of an asymptotic quiescent position in time-delay systems

© U. P. Zaranik<sup>1</sup>, S. E. Kuptsova<sup>2</sup>, N. A. Stepenko<sup>3</sup>

**Abstract.** In the present paper we study motions of time-delay systems. In particular, the case is studied, when the system has zero limit position which may not be an invariant set with respect to initial differential-difference equations. The concept of an asymptotic quiescent position for the trajectories of time-delay systems is introduced. Sufficient conditions for existence of an asymptotic quiescent position and an asymptotic quiescent position in the large are obtained. The method of proof is based on the modification of the second Lyapunov method, which was proposed by Razumikhin. Its idea is to use the classical Lyapunov functions, but to evaluate their derivatives along the solutions of the system not on the entire set of integral curves of the system, but on its certain subset. The article considers examples of non-linear time-delay equations that have an asymptotic quiescent position illustrating the theory being developed.

**Key Words:** Lyapunov stability, nonlinear time-delay systems, asymptotic stability of quiescent position, asymptotic quiescent position, Lyapunov function, Razumihin's approach.

## REFERENCES

1. N. N. Krasovskiy, "[Some problems of the theory of stability of motions]", [State Publ. of phys. and math. literature], Moscow, 1959 (In Russ.), 221 p.
2. R. Bellman, K. L. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniia [Differential-Difference Equations]*, Mir Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 548 p.
3. J. Hale, "[Theory of functional differential equations]", Mir Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 300 p.
4. V. I. Zubov, "[Lectures on theory of control]", Nauka Publ., Moscow, 1975 (In Russ.), 496 p.
5. V. I. Zubov, "[To the theory of linear time-delay systems]", "[Proc. of Higher Educational Institutions. Mathematics]", **6** (1958), 86-95 (In Russ.).
6. V. I. Zubov, "[Oscillations and waves]", Leningrad. State University Publ., Leningrad, 1989 (In Russ.), 416 p.
7. S. E. Kuptsova, "[An asymptotically invariant sets]", *Control Processes and Stability*, 2006, 50-56 (In Russ.).

<sup>1</sup> **Uliana P. Zaranik**, Senior Lecturer, Department of Control Theory, Saint-Petersburg State University, (Universitetskii prospekt 35, Petergof, Saint-Petersburg, Russia 198504), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7604-4999>, [zaranik\\_u@list.ru](mailto:zaranik_u@list.ru)

<sup>2</sup> **Svetlana E. Kuptsova**, Associate Professor, Department of Control Theory, Saint-Petersburg State University (Universitetskii prospekt 35, Petergof, Saint Petersburg, Russia 198504), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0168-3256>, [sekuptsova@yandex.ru](mailto:sekuptsova@yandex.ru)

<sup>3</sup> **Nikolai A. Stepenko**, Associate Professor, Department of Space Technologies and Applied Astrodynamics, Saint-Petersburg State University (Universitetskii prospekt 35, Petergof, Saint Petersburg, Russia 198504), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-9532-8831>, [nick\\_st@mail.ru](mailto:nick_st@mail.ru)

8. S.E. Kuptsova, "[On the asymptotic behavior of solutions of systems of nonlinear nonstationary differential equations]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **8**:1 (2006), 235-243 (In Russ.).
9. O.G. Tikhomirov, E.V. Temkina, "[Asymptotic quiescent position for systems of homogeneous non-autonomous differential equations]", *Vestnik SPbGU. Series 10. Applied mathematics, computer science and control processes*, 2014, № 2, 58-65 (In Russ.).
10. A.V. Ekimov, M.V. Svirkin, "Analysis of asymptotic equilibrium state of differential systems using Lyapunov function method", *International conference "Stability and control processes" in memory of V. I. Zubov*, 2015, 45-47.
11. S.E. Kuptsova, "[Asymptotic quiescent positions in systems of difference equations]", *Sistemy upravleniia i informatsionnye tekhnologii*, **56**:2 (2014), 67-71 (In Russ.).
12. S.Yu. Kuptsov, S.E. Kuptsova, U.P. Zaranik, "On asymptotic quiescent position of nonlinear difference systems with perturbations", *International conference "Stability and control processes" in memory of V. I. Zubov*, 2015, 20-22.
13. B.S. Razumikhin, "[On the stability of systems with a delay]", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **20**:4 (1956), 500-512 (In Russ.).
14. B.S. Razumikhin, "[Application of Lyapunov's method to problems in the stability of systems with a delay]", *Automatika i telemekhanika*, **21**:6 (1960), 740-749 (In Russ.).
15. V.L. Kharitonov, *Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices*, Basel, Birkhäuser, 2013, 311 c.

*Submitted 25.03.2018*

УДК 519.7

# Несимметричный аттрактор Лоренца как пример нового псевдогиперболического аттрактора в трехмерных системах

© А. О. Казаков<sup>1</sup> А. Д. Козлов<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье предложен новый метод конструирования трехмерных потоковых систем, обладающих различными хаотическими аттракторами. С помощью данного метода построен пример трехмерной потоковой системы, обладающей несимметричным аттрактором Лоренца. В отличие от классического аттрактора Лоренца обнаруженный аттрактор не обладает симметрией. Однако как и классический аттрактор, он относится к классу «настоящих» хаотических, а точнее, псевдогиперболических аттракторов, теория которых была разработана Д. Тураевым и Л. П. Шильниковым. Любая траектория псевдогиперболического аттрактора обладает положительным показателем Ляпунова, и это свойство сохраняется для аттракторов близких систем. При этом, в отличие от гиперболических, псевдогиперболические аттракторы допускают гомоклинические касания. Однако бифуркации таких касаний не приводят к появлению устойчивых периодических орбит. В численных экспериментах, при построении, например, диаграмм старшего показателя Ляпунова, в окрестности псевдогиперболического аттрактора не возникает окон устойчивости, отвечающих возникновению регулярных аттракторов. Для поиска несимметричного аттрактора Лоренца мы применяли метод «седловой карты». С помощью построения диаграмм старшего показателя Ляпунова показано, что в окрестности обнаруженного аттрактора действительно не возникает окон устойчивости. Кроме этого, установлена псевдогиперболическость указанного аттрактора с помощью LMP-метода, представленного недавно в работе Гонченко, Казакова и Тураева.

**Ключевые слова:** странный аттрактор, псевдогиперболическость, гомоклиническая траектория, аттрактор Лоренца, показатели Ляпунова, несимметричный аттрактор, трехмерная система.

## 1. Введение

Все странные аттракторы многомерных гладких динамических систем условно можно разделить на два класса: *квазиаттракторы* и *«настоящие» хаотические аттракторы*. Концепция квазиаттрактора была разработана В. С. Афраймовичем и Л. П. Шильниковым в работе [1]. Такие аттракторы либо сами содержат устойчивые периодические орбиты очень больших периодов и с малыми областями притяжения, либо такие орбиты возникают при сколь угодно малых возмущениях в результате гомоклинических касаний, неизбежно возникающих в подобных аттракторах.

<sup>1</sup> Казаков Алексей Олегович, ведущий научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, ФГБОУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); доцент, кафедра теории управления и динамики систем (603950, г. Н. Новгород, пр. Гагарина, 23); кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0003-0002-6553, kazakovdz@yandex.ru

<sup>2</sup> Козлов Александр Дмитриевич, младший научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, ФГБОУ ВО "Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); аспирант, кафедра дифференциальных уравнений, математического и численного анализа (603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23); ORCID: 0000-0003-1830-4769, kozzzloff@list.ru

Для «настоящих» аттракторов хаотическое поведение траекторий сохраняется при возмущениях системы. До недавнего времени к ним можно было с уверенностью отнести только гиперболические аттракторы и аттракторы Лоренца. Для таких аттракторов инвариантные многообразия седловых периодических движений пересекаются трансверсально. Однако в работе [2] был предложен новый тип настоящих аттракторов – т.н. *дикие псевдогиперболические аттракторы* – и сконструирована геометрическая модель дикого спирального аттрактора. Такие аттракторы, как и гиперболические, остаются хаотическими при малых возмущениях, хотя при этом в них могут возникать гомоклинические касания. Однако бифуркации этих касаний не приводят к возникновению устойчивых периодических орбит (вместо этого здесь возможны только бифуркации, связанные с образованием негрубых периодических траекторий типа седло–седло, которые затем распадаются на два седла соседних индексов).

Позже в работе [3] было показано, что псевдогиперболические аттракторы также могут возникать при малых периодических возмущениях систем с аттрактором Лоренца. Следующим шагом развития теории псевдогиперболических аттракторов является открытие в классе трехмерных отображений Эно дискретных аттракторов Лоренца [4]. После этих работ стало понятно, что такие аттракторы могут возникать в семействах многомерных отображений и потоков и что необходимо изучать бифуркационные механизмы возникновения таких аттракторов, а также разрабатывать методы проверки их псевдогиперболическости.

Первыми работами в данном направлении можно считать статьи [5] – [6], где был предложен ряд новых бифуркационных сценариев, согласно которым в трехмерных отображениях могут возникать псевдогиперболические аттракторы различных типов (дискретные аттракторы Лоренца, дискретные восьмерочные аттракторы и т.д.). Что касается методов проверки псевдогиперболическости, здесь важно отметить работу [7], где был предложен достаточно простой, но эффективный LMP-метод, с помощью которого численно можно установить является ли исследуемый аттрактор псевдогиперболическим.

В настоящей работе приводится новый метод конструирования трехмерных потоковых систем, обладающих различными, в т. ч. псевдогиперболическими, аттракторами. С помощью предложенного метода построен пример трехмерной потоковой системы, обладающей псевдогиперболическим аттрактором нового типа – т.н. несимметричным аттрактором Лоренца [8]. Данный аттрактор во многом похож на хорошо известный классический потоковый аттрактор Лоренца, который содержит седловое состояние равновесия (неустойчивое многообразие которой одномерно, а седловая величина положительна) вместе с его неустойчивым многообразием, обладает симметрией  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$  и является псевдогиперболическим. Отличительная характеристика несимметричного аттрактора Лоренца – отсутствие симметрии по какой-либо из координат. Для поиска несимметричного аттрактора Лоренца в классе трехмерных потоков вида (2.1) мы воспользовались методом «седловой карты» [9], а для проверки его псевдогиперболическости применили LMP-метод [7].

## 2. Определения и методы

Приведем определение псевдогиперболического аттрактора, а затем опишем методы поиска и алгоритмы проверки псевдогиперболическости.

Определение псевдогиперболическости было дано Д.Тураевым и Л.П.Шильниковым для систем с непрерывным временем в работе [2], а для систем с дискретным временем – в работе [3]. Для удобства приведем это определение для случая систем с непрерывным

временем.

**О п р е д е л е н и е 2.1** *Аттрактор  $n$ -мерной потоковой системы  $F$  называется псевдогиперболическим, если он обладает следующими свойствами.*

- 1) *В каждой точке некоторой поглощающей области  $\mathcal{D}$  аттрактора существует два линейных, инвариантных относительно дифференциала  $DF$  потока, подпространства  $E^{ss}$  с  $\dim E^{ss} = k$  и  $E^{cu}$  с  $\dim E^{cu} = n - k$ , где  $k \geq 1$ , для которых  $DF$  экспоненциально сжимает любое направление в  $E^{ss}$  и экспоненциально растягивает объемы в  $E^{cu}$ .*
- 2) *Подпространства  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$  непрерывно зависят от точки в  $D$ .*
- 3) *Соответствующие коэффициенты сжатия и растяжения равномерно ограничены от 1.*
- 4) *Углы между любым касательным вектором к  $E^{ss}$  и любым касательным вектором в  $E^{cu}$  равномерно отделены от нуля.*
- 5) *Любое возможное сжатие в  $E^{cu}$  равномерно слабее любого сжатия в  $E^{ss}$ .*

В отличие от гиперболичности, в данном случае не требуется растяжение вдоль каждого направления в  $E^{cu}$ . Тем не менее свойство псевдогиперболичности сохраняется под воздействием малых возмущений. Поэтому если система обладает псевдогиперболическим аттрактором, то этот аттрактор является настоящим хаотическим, т. к. растяжения объемов в  $E^{cu}$  гарантирует положительность максимального показателя Ляпунова на аттракторе.

**З а м е ч а н и е 2.1** *Гиперболические аттракторы формально подходят под определение 2.1, т. к. экспоненциальное растяжение вдоль любого направления в  $E^{cu}$  для таких аттракторов автоматически влечет растяжение объемов в подпространстве  $E^{cu}$ . Однако теория гиперболического хаоса является самостоятельной, хорошо развитой теорией, в рамках которой получен целый ряд исчерпывающих результатов (см., например, [10], [11]), и поэтому мы не будем рассматривать в данном случае гиперболические аттракторы в контексте псевдогиперболических.*

Аттрактор Лоренца, впервые обнаруженный в работе [12] в трехмерной потоковой системе, является одним из основных и хорошо изученных типов псевдогиперболических аттракторов. Более того, аттракторы такого типа входят в отдельный подкласс в рамках аттракторов псевдогиперболического типа. Инвариантные многообразия седловых периодических орбит в таких аттракторах пересекаются трансверсально. Однако такие аттракторы не являются гиперболическими, т. к. для них нарушается условие 2 непрерывности подпространств  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$  из определения 2.1 Действительно, для типичной траектории на аттракторе разложение на подпространства  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$  таково, что  $\dim E^{ss} = 2$ , а  $\dim E^{cu} = 2$ . При этом в состоянии равновесия  $O(0, 0, 0)$ , принадлежащем аттрактору Лоренца [13],  $\dim E^{ss} = 2$ , а  $\dim E^{cu} = 1$ , т. к. данное состояние обладает двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями.

Несмотря на то, что аттрактор Лоренца был обнаружен в 1963 г., первые адекватные математические модели, описывающие свойства аттрактора Лоренца, были построены лишь в конце 1970-х г. Среди большого количества работа, посвященных данной тематике, особенного внимания заслуживают работы Афраймовича-Быкова-Шильникова [13].

А. О. Казаков, А. Д. Козлов. Несимметричный аттрактор Лоренца как пример...

На сегодняшний день подход Афраймовича-Быкова-Шильникова, основанный на том, что непосредственное изучение системы можно заменить исследованием т. н. геометрической модели двумерного разрывного сингулярно-гиперболического отображения с определенными эффективно проверяемыми свойствами считается наиболее оправданным и эффективным. В рамках такого подхода исследование псевдогиперболических свойств аттрактора Лоренца сводилось к теоретическим исследованиям сконструированного двумерного отображения, а тот факт, что отображение Пуанкаре в системе Лоренца удовлетворяет требованиям геометрической модели Афраймовича-Быкова-Шильникова, доказывался численно. Впервые такое доказательство было получено в 1999 г. В. Такером [14] с помощью сложной техники «computer assisted proof», основанной на достоверных компьютерных вычислениях.

Другой тип псевдогиперболических аттракторов ( т. н. *дискретные аттракторы Лоренца* ), был предсказан в работе [3], где было доказано, что псевдогиперболические аттракторы также могут возникать при малых периодических возмущениях систем с аттрактором Лоренца. При таких возмущениях хаотическому поведению траекторий в соответствующих трехмерных отображениях Пуанкаре отвечают *дискретные аттракторы Лоренца*. В отличие от аттракторов Лоренца трехмерных потоков, такие аттракторы допускают гомоклинические касания, однако эти касания не приводят к рождению устойчивых периодических орбит. Впервые предсказанные дискретные аттракторы Лоренца были обнаружены в классе трехмерных обобщенных отображений Эно в работе [15], а позже – в неголономной модели кельтского камня [16]. Еще одним важным классом псевдогиперболических аттракторов являются дикие спиральные аттракторы Тураева-Шильникова [2], впервые обнаруженные совсем недавно в классе четырехмерных потоковых систем [7]. Как и дискретные аттракторы Лоренца, такие аттракторы допускают гомоклинические касания, в результате которых могут рождаться лишь седловые периодические движения.

В настоящей работе мы приводим пример трехмерной потоковой системы, обладающей псевдогиперболическим несимметричным аттрактором Лоренца. Такой аттрактор, как и известный аттрактор Лоренца, содержит седловое состояние равновесия с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым многообразиями, а инвариантные многообразия седловых периодических траекторий, лежащих внутри этого аттрактора, пересекаются трансверсально. При этом несимметричный аттрактор Лоренца не обладает лоренцевской симметрией  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$ , в результате чего бифуркации петель пары сепаратрис для него, в отличие от лоренцевского случая, возникают «несимметричным образом», т. е. возникновение одной петли сепаратрисы автоматически не влечет за собой возникновение петли второй.

Далее опишем алгоритм поиска несимметричного аттрактора Лоренца и некоторые его свойства.

## 2.1. Метод седловой карты для поиска несимметричного аттрактора Лоренца

Рассмотрим класс трехмерных потоковых систем вида

$$\begin{cases} \dot{x} = y + g_1(x, y, z), \\ \dot{y} = z + g_2(x, y, z), \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + g_3(x, y, z), \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $A, B$  и  $C$  – параметры системы;  $g_i, i = 1, 2, 3$  – нелинейные члены, удовлетворяющие соотношениям

$$g_i(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial x}(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial y}(0, 0, 0) = \frac{\partial g_i}{\partial z}(0, 0, 0) = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2)$$

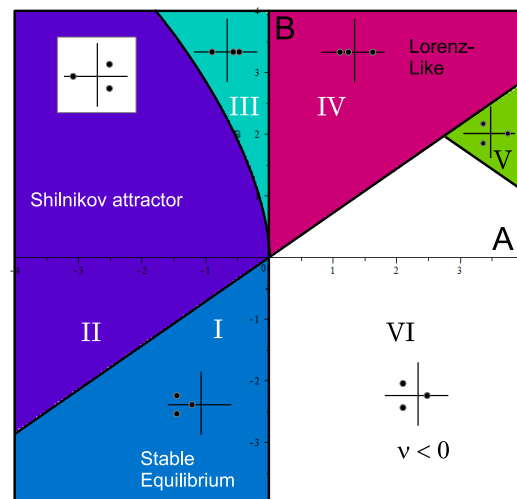


Для поиска несимметричного аттрактора Лоренца был применен метод «седловой карты», впервые предложенный для поиска *гомоклинических аттракторов* в работе [9]. Напомним, что под гомоклиническим понимается такой странный аттрактор, который содержит ровно одно седловое состояние равновесия вместе с его неустойчивым многообразием. При этом тип такого аттрактора определяется собственными числами этого состояния равновесия. К гомоклиническим аттракторам относятся многие известные странные аттракторы, например, аттрактор Лоренца [12]; спиральный аттрактор, возникающий на основе петли сепаратрисы к седло-фокусному состоянию равновесия с одномерным неустойчивым многообразием (как в цепи Чуа [17]), аттрактор Шильникова [18], возникающий на основе петли к седло-фокусу с одномерным устойчивым многообразием, и некоторые другие известные аттракторы. Идея классификации гомоклинических аттракторов по собственным числам состояния равновесия восходит к работе [19], а в работе [9] эта идея была развита для классификации и поиска гомоклинических аттракторов в классе обобщенных трехмерных отображений Эно [9].

Мы модифицировали этот метод для поиска гомоклинических странных аттракторов в трехмерных потоковых системах вида (2.1). Легко заметить, что приведенная система уравнений при любых значениях параметров  $A, B, C$  и для любых  $g_i$ , заданных согласно (2.2) и определяющих конкретный вид нелинейных членов, обладает состоянием равновесия  $O(0, 0, 0)$ , характеристическое уравнение для которого имеет вид

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - C\lambda^2 - B\lambda - A = 0 \quad (2.3)$$

и зависит только от параметров  $A, B$  и  $C$ . Таким образом, тип состояния равновесия определяется только параметрами системы (2.1) и не зависит от нелинейных членов. Суть метода седловой карты для систем вида (2.1) состоит в том, что для фиксированного значения некоторого параметра (например,  $C$ ) на плоскости оставшихся двух параметров ( $A, B$ ) выделяются области, соответствующие различным наборам корней характеристического уравнения (2.3), которые определяют вид возможного гомоклинического аттрактора, содержащего состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$ .



Р и с у н о к 2.1

Карта седел при значении параметра  $C = -1.4$

На Рис. 2.1 изображена седловая карта для системы (2.1) при  $C = -1.4$ . В области I состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$  является устойчивым, здесь не может возникнуть гомо-

клинический аттрактор, содержащий точку  $O$ . В остальных областях состояние равновесия  $O(0, 0, 0)$  становится седловым. Обозначим через  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  его собственные значения, а через  $\nu$  – его седловую величину, определяемую как сумму двух ближайших к мнимой оси собственных значений, одно из которых лежит слева от мнимой оси, а другое – справа, и определим необходимые условия для возникновения гомоклинических аттракторов следующих типов.

1. **Спиральный аттрактор.** Область V. В данном случае  $\lambda_1 > 0, \lambda_{2,3} = \gamma \pm i\omega, \gamma < 0, \omega \neq 0, \nu = \lambda_1 + \gamma > 0$ .  
Условия возникновения спирального аттрактора:  $\Delta < 0, CB + A > 0, A > 0, 2C^3 - BC + A > 0, C < 0$ . Здесь и далее  $\Delta = -4AC^3 + B^2C^2 - 18ABC + 4B^3 - 27A^2$  – дискриминант характеристического уравнения.
2. **Аттрактор Шильникова.** Область II. Здесь  $\lambda_1 < 0, \lambda_{2,3} = \gamma \pm i\omega, \gamma > 0, \omega \neq 0, \nu = \lambda_1 + \gamma < 0$ .  
Условия существования аттрактора Шильникова:  $\Delta < 0, CB + A < 0, A < 0, 2C^3 - BC + A < 0, C < 0$ .
3. **Несимметричный аттрактор типа Лоренца.** Область IV.  $\lambda_1 > 0, \lambda_3 < \lambda_2 < 0$ . Седловая величина  $\nu = \lambda_1 + \lambda_2$  должна быть положительной. Классический аттрактор Лоренца [12] может возникать только в системах, обладающих симметрией  $x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow z$ . Однако система вида (2.1) не может обладать такой симметрией, поэтому в рассматриваемой области может возникнуть только несимметричный аттрактор Лоренца [8].  
Условия существования данного аттрактора:  $\Delta > 0, CB + A > 0, A > 0, C < 0$ .
4. **Седловой аттрактор Шильникова.** Область III:  $\lambda_1 < 0, \lambda_3 > \lambda_2 > 0, \nu = \lambda_1 + \lambda_2 < 0$ . При переходе из области II в область III может, в принципе, наблюдаться такое явление: седло-фокус становится седлом (переход через беляковскую точку), а гомоклинический аттрактор продолжает существовать, но уже не имеет спиральной структуры. Насколько нам известно, такое явление ранее изучено не было.  
Условия существования такого аттрактора:  $\Delta > 0, CB + A < 0, A < 0, C < 0$ .
5. В области VI бифуркации гомоклинических петель приводят к возникновению простых аттракторов – устойчивых предельных циклов. При дальнейшем изменении параметров из этих циклов могут возникнуть странные аттракторы, которые, в свою очередь, могут стать гомоклиническими (см., например, [20]).

Отметим, что приведенные условия являются необходимыми для возникновения гомоклинического аттрактора того или иного вида. Исследование конкретных систем из класса (2.1) позволяет сделать вывод о большом влиянии на динамику вида функций  $g_i(x, y, z)$ , задающих конкретный вид нелинейности. Поэтому для комплексного исследования системы построенную карту седел нужно совмещать, например, с картой старшего показателя Ляпунова (с помощью которой удобно определять области параметров, соответствующие хаотическим режимам) и с картой расстояния от аттрактора до седловой точки (с помощью которой устанавливается принадлежность седловой точки аттрактору). В тех областях параметров, где хаотический режим с карты максимального показателя Ляпунова накладывается на одну из описанных выше областей карты седел и при этом расстояние от аттрактора до седловой точки стремится к нулю с увеличением времени счета, возникает соответствующий гомоклинический аттрактор.

Среди перечисленных аттракторов только несимметричный аттрактор Лоренца может быть псевдогиперболическим. Гомоклинические касания инвариантных многообразий седловых периодических траекторий, неизбежно возникающие в странных аттракторах любого другого типа [9], обязательно приводят к рождению устойчивых периодических орбит внутри таких аттракторов. Таким образом, любой другой гомоклинический аттрактор обязательно будет квазиаттрактором. При этом гомоклинический аттрактор, находящийся в области IV, также может не быть псевдогиперболическим. Для проверки псевдогиперболичности аттракторов, расположенных в этой области, мы применяли разработанный в работе [7] LMP-метод. Далее кратко изложим суть этого метода.

## 2.2. LMP-метод для проверки псевдогиперболичности

Для любого странного аттрактора трехмерной потоковой системы выполняются следующие соотношения на набор показателей Ляпунова  $\Lambda_1 > \Lambda_2 = 0 > \Lambda_3$ :

$$\Lambda_1 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0, \quad (2.4)$$

где первое и третье условия означают, что аттрактор является хаотическим, а второе говорит о растяжении фазового объема на аттракторе. Таким образом, в трехмерных потоковых системах псевдогиперболические аттракторы могут быть исключительно такими, для которых сильно сжимающее подпространство  $E^{ss}$  является одномерным ( $\dim E^{ss} = 1$ ), а подпространство растяжения объемов  $E^{cu}$  – двумерным ( $\dim E^{cu} = 2$ ). Другими словами условие (2.4) можно считать необходимым для возникновения псевдогиперболического аттрактора в трехмерной системе.

Суть LMP-метода заключается в проверке одного из достаточных условий непрерывности подпространства  $E^{ss}$  от точки на аттракторе. В рассматриваемом случае подпространство сильного сжатия является одномерным ( $\dim E^{ss} = 1$ ). Для непрерывности этого подпространства необходимо, чтобы угол  $d\varphi$  между любыми парами векторов в  $E^{ss}$  был малым для любых близких точек  $x$  и  $y$ , лежащих на аттракторе (теоретически  $d\varphi \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow y$ ). Фактически LMP-метод позволяет оценить эти углы для большого набора точек на аттракторе и тем самым проверить условие непрерывности поля  $E^{ss}$  от точек на этом аттракторе.

Работа в рамках LMP-метода разделяется на два этапа. Первый – стандартный: производится расчет набора показателей Ляпунова  $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$  (при этом, если в какой-то момент условие (2.4) не выполняется, мы можем остановить алгоритм). В процессе расчета набора показателей Ляпунова мы сохраняем набор точек  $\{x_n\}$ , где  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $n = 1, \dots, k$  вдоль траектории аттрактора. Второй этап максимального показателя Ляпунова для системы в обратном времени: вдоль траектории  $\{x_n\}$ , полученной на первом этапе, в обратном направлении. Отметим, что использование набора точек  $\{x_n\}$  является необходимым условием работы алгоритма, т. к. очевидно, что если мы возьмем любую точку на аттракторе, то ее обратные итерации рано или поздно убегут с него, и мы можем потерять любую информацию об аттракторе.

Заметим, что максимальный показатель Ляпунова для обратных итераций исходной системы совпадает с минимальным показателем Ляпунова  $\Lambda_3$ , взятым со знаком минус. В свою очередь, минимальный показатель Ляпунова  $\Lambda_3$  отвечает за сильное сжатие на аттракторе. На втором этапе работы алгоритма, кроме расчета  $\Lambda_3$ , необходимо найти и запомнить направление векторов  $E^{ss}(x_n)$ , отвечающих этому сжатию.

По окончании работы алгоритма конструируется LMP-график на координатной плоскости  $(dx, d\varphi)$ , где  $dx$  определяет расстояние между любыми двумя точками  $x_i$  и  $x_j$  в наборе  $\{x_n\}$ , а  $d\varphi$  – угол между соответствующими этим точкам векторами  $E^{ss}(x_i)$  и

$E^{ss}(x_j)$ . Если исследуемый аттрактор является псевдогиперболическим, то поле  $E^{ss}(x_n)$  непрерывно, а огибающая точек на ЛМР-графике касается вертикальной оси  $d\varphi$  только в начале координат. Таким образом, если построенный ЛМР-график обладает данным свойством, то сильно сжимающее подпространство  $E^{ss}$  непрерывно зависит от точки, а исследуемый аттрактор с большой вероятностью является псевдогиперболическим. С другой стороны, если огибающая набора точек на построенной ЛМР-диаграмме пересекает ось  $d\varphi$  в нескольких точках или же между этой огибающей и осью  $d\varphi$  нет видимого промежутка, исследуемый аттрактор определенно является квазиаттрактором.

**З а м е ч а н и е 2.2** ЛМР-метод позволяет проверить только непрерывность подпространства  $E^{ss}$ , и с целью более строгого доказательства аналогичное свойство должно быть установлено для подпространства растяжения объемов  $E^{cu}$ . Однако эта задача является более сложной, и в рамках данной работы мы ее не решаем.

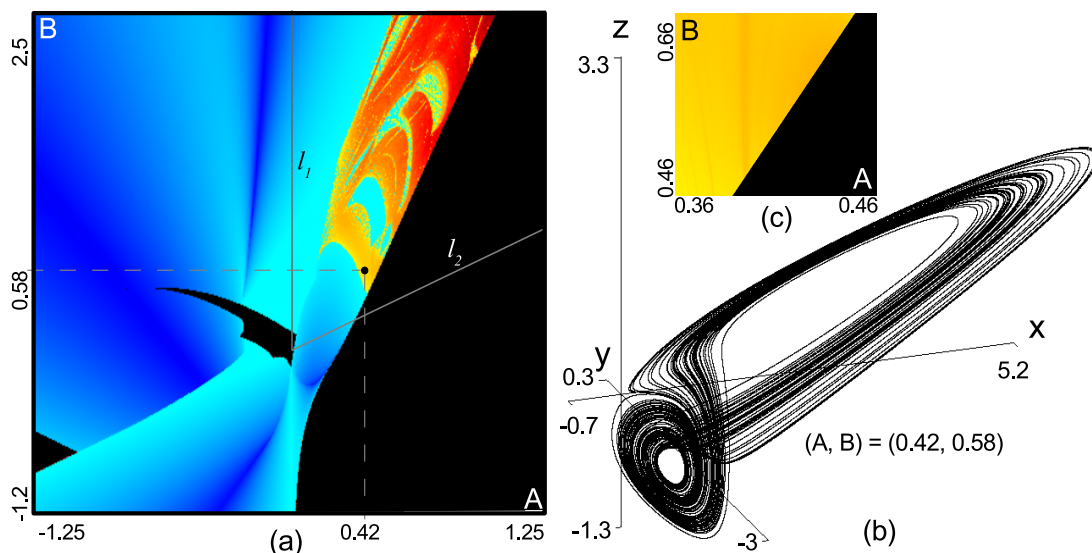
В следующем разделе продемонстрируем работу указанного метода на примере несимметричного аттрактора Лоренца для системы вида (2.1).

### 3. Несимметричный аттрактор Лоренца

Выбрав соответствующим образом функции  $g_1, g_2$  и  $g_3$ , получим следующую систему вида (2.1)

$$\begin{cases} \dot{x} = y + (0.2xy + 0.3xz + 0.5y^2 + 1.2yz + 0.7z^2) \\ \dot{y} = z + (-0.1x^2 - 0.6xy - 0.7xz + 0.3y^2 + 0.6yz + 0.4z^2) \\ \dot{z} = Ax + By + Cz + (0.1x^2 + 0.5xy + 0.6xz - 0.3y^2 - 0.7yz - 0.4z^2) \end{cases} \quad (3.5)$$

На Рис. 3.1а для приведенной системы уравнений изображена диаграмма максимального показателя Ляпунова на плоскости параметров  $(A, B)$  при  $C = -1.4$ .



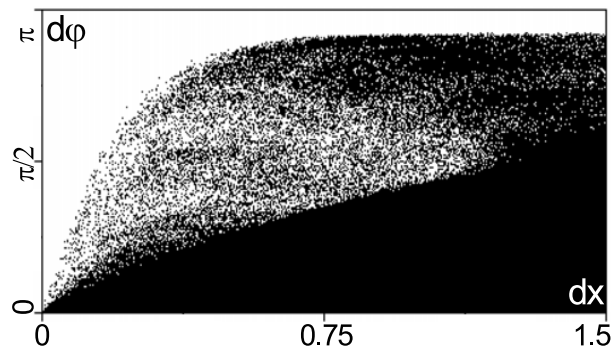
Р и с у н о к 3.1

Несимметричный аттрактор Лоренца и диаграмма показателей Ляпунова (красная область соответствует положительному старшему показателю Ляпунова)

Для удобства на диаграмму наложены бифуркационные кривые  $l_1$  и  $l_2$ , ограничивающие область существования несимметричного аттрактора Лоренца. Таким образом, область, отвечающая положительному максимальному показателю Ляпунова, накладывается на область возможного возникновения несимметричного аттрактора Лоренца. На Рис. 3.1b приведен фазовый портрет аттрактора при значениях параметров  $A = 0.42, B = 0.58$ .

Изображенный аттрактор действительно похож на аттрактор Лоренца. Кроме того, собственные значения состояния равновесия  $O(0, 0, 0)$  в этом случае принимают значения  $\lambda_1 = 0.57, \lambda_2 = -0.32, \lambda_3 = -1.64$ , а седловая величина равна  $\lambda_1 + \lambda_2 = 0.25 > 0$ , что также соответствует необходимым условиям возникновения аттрактора Лоренца. Более того, расчет зависимости минимального расстояния от траектории на аттракторе до седловой точки  $O(0, 0, 0)$  показывает, что обнаруженный аттрактор действительно является гомоклиническим.

Для проверки псевдогиперболичности обнаруженного аттрактора мы воспользовались LMP-методом. Результат работы этого метода для аттрактора, изображенного на Рис. 3.1b, приведен на Рис. 3.2. Из рисунка видно, что огибающая точек LMP-диаграммы касается оси  $d\varphi$  только в начале координат, а значит, рассматриваемый аттрактор вероятно является псевдогиперболическим. Более того, по увеличенному фрагменту диаграммы старшего показателя Ляпунова, изображенному на Рис. 3.1c, можно сделать вывод, что в окрестности исследуемого аттрактора не возникает окон устойчивости, что свидетельствует о псевдогиперболичности аттрактором при малых возмущениях.



Р и с у н о к 3.2

Результат работы метода LMP-метода для несимметричного аттрактора Лоренца

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке гранта РФФ 17-11-01041. Численные эксперименты по проверке псевдогиперболичности, представленные в разделе 3, выполнены в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2018 г.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aframovich V. S., Shilnikov L. P., *Strange attractors and quasiattractors.*, Nonlinear Dynamics and Turbulence, Boston, Pitmen, 1983.
2. Тураев Д. В., Шильников Л. П., “Пример дикого странного аттрактора”, *Матем. сб.*, **189**:2 (1998), 137-160.

3. Тураев Д. В., Шильников Л. П., “Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа”, *Докл. РАН*, **418**:1 (2008), 23–27.
4. S. V Gonchenko , I. I Ovsyannikov , C Simo, D Turaev., “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **15**:11 (2005), 3493–3508.
5. А. С. Гонченко, С. В. Гонченко , Л. П. Шильников., “К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений”, *Нелинейная Динам.*, **8**:1 (2012), 3–28.
6. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, D. Turaev., “Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps”, *Int. J. Bif. and Chaos*, **24**:8 (2014), 25 с.
7. S.V. Gonchenko, A.O.Kazakov, D.Turaev, “Wild spiral attractors in a four-dimensional Lorenz model”, *to appear*.
8. A. L. Shilnikov, Shilnikov L. P. Shilnikov, “On the nonsymmetrical Lorenz model”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **1**:4 (1991), 773–776.
9. A. Gonchenko, S. Gonchenko, “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps”, *Physica D*, **337** (2016), 43–57.
10. V. Z. Grines , Y. V. Zhuzhoma, O. V.Pochinka, “Rough diffeomorphisms with basic sets of codimension one”, *Journal of Mathematical Sciences*, **225** (2017), 195–219.
11. С. П. Кузнецов, *Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике*, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2013, 488 с.
12. E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow”, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**:2 (1963), 130–141.
13. В.С. Афраимович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, “О возникновении и структуре аттрактора Лоренца”, *ДАН СССР*, **234**:2 (1977), 336–339.
14. W.Tucker, “The Lorenz attractor exists”, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences-Series I-Mathematics*, **328**:12 (1999), 1197–1202.
15. S. Gonchenko, I.Ovsyannikov, C.Simo, D.Turaev, “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors”, *Int. J. of Bifurcation and chaos*, **15**:11 (2005), 3493–3508.
16. S.V. Gonchenko, A.S.Gonchenko, Kazakov A.O.Kazakov, “Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **8**:5 (2013), 521–538.
17. L. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, “The double scroll family”, *IEEE transactions on circuits and systems*, **33**:11 (1986), 1072–1118.
18. Л. П. Шильников, *Теория бифуркаций и турбулентность*, Методы качественной теории дифференциальных уравнений : межвуз. сб., ГГУ Горький, 1986.
19. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В.Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, М.-Ижевск, 2003.

20. D. Turaev, L. P. Shilnikov, “On bifurcations of the homoclinic «figure eight» for a saddle with a negative saddle value”, *Sov. Math. Dokl.*, **34** (1987), 397–401.

Посмунна 2.04.2018

MSC2010 34C23, 34D45, 65P20

## The asymmetric Lorenz attractor as an example of a new pseudohyperbolic attractor of three-dimensional systems

© A. O. Kazakov<sup>1</sup> A. D. Kozlov<sup>2</sup>

**Abstract.** In the paper a new method of constructing of three-dimensional flow systems with different chaotic attractors is presented. Using this method, an example of three-dimensional system possessing an asymmetric Lorenz attractor is obtained. Unlike the classical Lorenz attractor, the observed attractor does not have symmetry. However, the discovered asymmetric attractor, as well as classical one, belongs to a class of «true» chaotic, or, more precise, pseudohyperbolic attractors; the theory of such attractors was developed by D. Turaev and L.P. Shilnikov. Any trajectory of a pseudohyperbolic attractor has a positive Lyapunov exponent and this property holds for attractors of close systems. In this case, in contrast to hyperbolic attractors, pseudohyperbolic ones admit homoclinic tangencies, but bifurcations of such tangencies do not lead to generation of stable periodic orbits. In order to find the non-symmetric Lorenz attractor we applied the method of «saddle chart». Using diagrams of maximal Lyapunov exponent, we show that there are no stability windows in the neighborhood of the observed attractor. In addition, we verify the pseudohyperbolicity for the non-symmetric Lorenz attractor using the LMP-method developed quite recently by Gonchenko, Kazakov and Turaev.

**Key Words:** strange attractor, pseudohyperbolicity, homoclinic orbit, Lorenz attractor, Lyapunov exponents

## REFERENCES

1. V.S. Aframovich, L.P. Shilnikov, *Strange attractors and quasiattractors.*, Nonlinear Dynamics and Turbulence, Boston, Pitmen, 1983.
2. D.V. Turaev, L.P. Shilnikov, “An example of a wild strange attractor”, *Sb. Math.*, **189:2** (1998), 291–314.
3. D.V. Turaev, L.P. Shilnikov, “Pseudo-hyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-like attractors”, *Doklady Mathematics*, **77:1** (2008), 17–21.
4. S. V. Gonchenko, I. I. Ovsyannikov, C. Simo, D. Turaev, “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **15:11** (2005), 3493–3508.

<sup>1</sup> **Alexey O. Kazakov**, Senior Researcher, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaja St., Nizhny Novgorod 603155, Russia); Assistant Professor, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Prospekt Gagarina 603950 Nizhny Novgorod, Russia); PhD, ORCID: 0000-0003-0002-6553, kazakovdz@yandex.ru

<sup>2</sup> **Alexander D. Kozlov**, Junior Researcher, Laboratory of Topological methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya St., Nizhny Novgorod 603155, Russia); PhD Student, (23 Prospekt Gagarina 603950 Nizhny Novgorod, Russia); ORCID: 0000-0003-1830-4769, kozzzloff@list.ru

5. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, L.P. Shilnikov, “Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps”, *Rus.J. Nonlin. Dyn.*, **8**:1 (2012), 3–28.
6. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov and, Turaev D. Turaev, “Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps”, *Int. J. Bif. Chaos*, **24**(8) (2014), 25 p. c.
7. S.V. Gonchenko, A.O. Kazakov, D. Turaev, “Wild spiral attractors in a four-dimensional Lorenz model”, *to appear*.
8. A. L. Shilnikov, L. P. Shilnikov, “On the nonsymmetrical Lorenz model”, *Int. J. Bifurcation Chaos*, **1**:4 (1991), 773–776.
9. A. Gonchenko, S. Gonchenko, “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps”, *Physica D*, **337** (2016), 43–57.
10. V. Z. Grines, Ye. V. Zhuzhoma, O. V. Pochinka, “Rough Diffeomorphisms with Basic Sets of Codimension One”, *Journal of Mathematical Sciences*, **225** (2017), 195–219.
11. S.P. Kuznetsov, *Dynamical Chaos and hyperbolic attractors: from mathematics to physics*, Institute of Computer Studying, M.-Izhevsk, 2013, 488 c.
12. E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow”, *Journal of the atmospheric sciences*, **20**:2 (1963), 130–141.
13. V.S. Afraimovich, V.V. Bykov, L.P. Shilnikov, “The origin and structure of the Lorenz attractor”, *Sov. Phys. Dokl.*, **234**:2 (1977), 253–255.
14. W. Tucker, “The Lorenz attractor exists”, *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences-Series I-Mathematics*, **328**:12 (1999), 1197–1202.
15. S. Gonchenko, I. Ovsyannikov, C. Simo, D. Turaev, “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors”, *Int. J. of Bifurcation and chaos*, **15**:11 (2005), 3493–3508.
16. S.V. Gonchenko, A.S. Gonchenko, A.O. Kazakov, “Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **8**:5 (2013), 521–538.
17. L. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, “The double scroll family”, *IEEE transactions on circuits and systems*, **33**:11 (1986), 1072–1118.
18. L.P. Shilnikov, *[The theory of bifurcations and turbulence]*, [Methods of qualitative theory of differential equations], GGU Gorkiy, 1986.
19. L.P. Shilnikov, A.L. Shilnikov, D.V. Turaev, L.O. Chua, *Methods Of qualitative theory in nonlinear dynamics*, World Sci, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong, 2001.
20. D. Turaev, Shilnikov L. P. Shilnikov, “On bifurcations of the homoclinic «figure eight» for a saddle with a negative saddle value”, *Sov. Math. Dokl.*, **34** (1987), 397–401.

*Submitted 2.04.2018*



УДК 519.17

# О сложности построения 3-раскраски планарных графов с короткими гранями

© Д. В. Сироткин<sup>1</sup>

**Аннотация.** Задача о вершинной 3-раскраске для заданного графа состоит в том, чтобы проверить, можно ли множество его вершин разбить на три подмножества попарно несмежных вершин. Известно, что эта задача является NP-полной в классе планарных графов и что она становится полиномиально разрешимой для плоских триангуляций — планарных графов, у которых все грани (включая и внешнюю) являются треугольниками. Известно также, что она является NP-полной в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 4, но становится разрешимой за линейное время в классе графов с максимальной степенью вершин не более чем 3. Поэтому интересен вопрос о поиске порога на значения длин граней и максимальной степени вершин планарных графов, при переходе через который для задачи о вершинной 3-раскраске полиномиальная разрешимость меняется на NP-полноту. В данной работе дается ответ на этот вопрос и доказывается NP-полнота задачи о вершинной 3-раскраске в классе планарных графов, гранями которых являются только треугольники и четырехугольники, с максимальной степенью вершин не более чем 5.

**Ключевые слова:** вычислительная сложность, задача о вершинной 3-раскраске, планарный граф

## 1. Введение

В данной работе рассматриваются только *обыкновенные* графы (всюду далее называемые просто графами), т.е. неориентированные графы без петель и кратных ребер. *Вершинной раскраской* графа  $G$  называется произвольное отображение  $c : V(G) \rightarrow \mathbb{N}$  такое, что  $c(v_1) \neq c(v_2)$  для любых смежных вершин  $v_1, v_2 \in V(G)$ . Вершинная раскраска  $c$  графа  $G$  называется  $k$ -раскраской, если  $c : V(G) \rightarrow \overline{1, k}$ . Если граф  $G$  имеет  $k$ -раскраску, то он называется  $k$ -раскрашиваемым. *Задача о вершинной  $k$ -раскраске* (кратко, задача  $k$ -BP) для заданного графа состоит в том, чтобы определить, является ли он  $k$ -раскрашиваемым или нет.

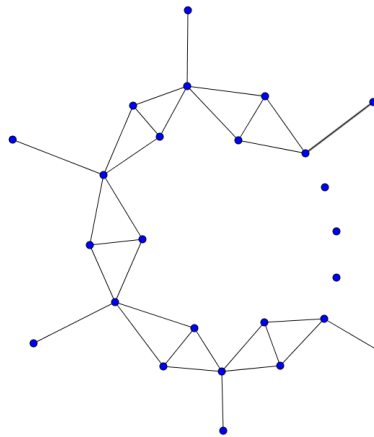
Задача 3-BP является NP-полной в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 4 [1]. По известной теореме Брукса [2] она разрешима за полиномиальное время для графов со степенями всех вершин не более чем 3. Задача 3-BP разрешима за линейное время в классе плоских триангуляций, т.е. планарных графов, у которых все грани (включая и внешнюю) являются треугольниками [3]. Было бы интересным найти порог на значения длин граней планарных графов, при котором сложность задачи 3-BP меняется с полиномиальной разрешимости на NP-полноту и при этом иметь графы с небольшой максимальной степенью вершин. Ответ на этот вопрос дается в настоящей работе. В данной работе доказывается, что задача 3-BP является NP-полной в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5, чьи грани являются только треугольниками и четырехугольниками.

<sup>1</sup> Сироткин Дмитрий Валерьевич, лаборант, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики ФГАОУ ВО "ННГУ им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), без ученой степени, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2682-9867>, [dmitriy.v.sirotkin@gmail.com](mailto:dmitriy.v.sirotkin@gmail.com)

## 2. Некоторые обозначения

Через  $N(x)$  обозначается окрестность вершины  $x$ . Для подмножества  $V' \subseteq V(G)$  через  $G \setminus V'$  обозначается результат удаления всех элементов подмножества  $V'$  из графа  $G$ .

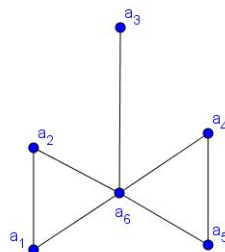
Через *diamond* обозначается результат удаления произвольного ребра из полного графа с 4 вершинами. Через  $H_1^d$ , где  $d \geq 3$ , обозначается граф, полученный замыканием в цикл  $d$  копий графа *diamond* и добавлением в места склейки  $d$  листов (см. рисунок 2.1).



Р и с у н о к 2.1

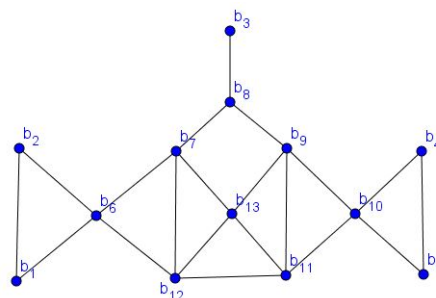
Граф  $H_1^d$

Графы, обозначаемые через  $H_2$  и  $H_3$ , изображены на рисунках 2.2 и 2.3.



Р и с у н о к 2.2

Граф  $H_2$



Р и с у н о к 2.3

Граф  $H_3$

Через  $\mathcal{P}$  обозначается множество планарных графов.

### 3. Операции шунтирования и замены

Для доказательства основного результата работы нам понадобятся два локальных преобразования графов, которые мы назовем операциями шунтирования и замены.

Занумеруем листья графа  $H_1^d$  в порядке их обхода по часовой стрелке. Операция  $H_1^d$  — *шунтирования* применяется к вершине  $x$  планарного графа  $G$ , окрестность которой образована циклически упорядоченными вершинами  $y_1, \dots, y_d$ , где  $d \geq 3$ . Она состоит в удалении  $x$  из  $G$ , добавлении графа  $H_1^d$  и отождествлении  $i$ -ого листа графа  $H_1^d$  с вершиной  $y_i$  для любого  $i \in \overline{1, d}$ . Результат  $G'_x$  применения данной операции, очевидно, будет планарным графом. Более того, граф  $G'_x$  является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф  $G$ . В этом нетрудно убедиться, заметив, что вершины степени 2 имеют одинаковые цвета в любой 3-раскраске графа *diamond*.

Операция  $(H_2, H_3)$ -замены состоит в удалении некоторой порожденной копии графа  $H_2$  из планарного графа  $G$ , последующем добавлении графа  $H_3$  и всех ребер вида  $b_i v$ , где  $i \in \overline{1, 5}$  и  $v \in N(a_i) \setminus \bigcup_{j=1}^6 \{a_j\}$ . Пусть граф  $G'$  — результат  $(H_2, H_3)$ -замены в графе  $G$ . Тогда граф  $G'$  является планарным.

**Л е м м а 3.1** *Граф  $G'$  является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф  $G$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Предположим, что  $c$  — некоторая 3-раскраска графа  $G$ . Тогда  $\{c(a_1), c(a_2)\} = \{c(a_4), c(a_5)\}$  и  $c(a_6) \notin \{c(a_1), c(a_2)\}$ . Продолжим имеющуюся 3-раскраску графа  $G \setminus \bigcup_{j=1}^6 \{a_j\}$  следующим образом:  $c(b_i) = c(a_i)$  для любого  $i \in \overline{1, 6}$  и

$$c(b_8) = c(b_{10}) = c(b_{13}) = c(b_6), c(b_7) = c(b_{11}) = c(b_1), c(b_9) = c(b_{12}) = c(b_2).$$

Очевидно, что  $c$  — 3-раскраска графа  $G$ .

Предположим, что  $c'$  — некоторая 3-раскраска графа  $G'$ . Тогда

$$\{c'(b_1), c'(b_2)\} = \{c'(b_4), c'(b_5)\}, c'(b_6) = c'(b_8) = c'(b_{10}) = c'(b_{13}), c'(b_6) \notin \{c'(b_1), c'(b_2)\}.$$

Продолжим имеющуюся 3-раскраску графа  $G' \setminus \bigcup_{j=1}^{12} \{b_j\}$  следующим образом:  $c'(a_i) = c'(b_i)$  для любого  $i \in \overline{1, 6}$ . Очевидно, что  $c'$  — 3-раскраска графа  $G'$ .

### 4. Основной результат работы и его доказательство

Основным результатом данного раздела работы является следующая теорема.

**Т е о р е м а 4.1** *Задача 3-ВР в классе планарных графов со степенями всех вершин не более чем 5 и с гранями, ограниченными не более чем 4 ребрами каждая, является NP-полной.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Выполним полиномиальное сведение задачи 3-ВР в классе  $\mathcal{P}$  к той же задаче в рассматриваемом подклассе класса  $\mathcal{P}$ . Отсюда и будет следовать справедливость данной теоремы. Описание сведения составляет содержание всей оставшейся части доказательства.

Задача 3-ВР в классе  $\mathcal{P}$  полиномиально сводится к той же задаче в классе  $\mathcal{P}$  без вершин степени 1 и 2 и шарниров (см., например, работу [4]), т.е. вершин, при удалении которых увеличивается количество компонент связности. Каждая внешняя грань такого графа образована циклом. Рассмотрим произвольный планарный граф  $G$  без вершин степени 1 и 2 и шарниров. Выполним операцию  $H_1^d$ -шунтирования для каждой вершины графа  $G$ , а затем последовательно будем выполнять операцию  $(H_2, H_3)$ -замены для каждого вхождения подграфа  $H_2$  в текущий граф. Полученный граф  $G'$  будет планарным, причем по лемме 3.1 он является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф  $G$ .

В графе  $G'$  каждая грань длины не менее чем 5 имеет один из следующих двух типов. Грань первого типа — результат «окружения» вершин графа  $G$  в результате  $H_1^d$ -шунтирования и  $(H_2, H_3)$ -замен. Грань второго типа — образ грани графа  $G$  при переходе от  $G$  к  $G'$ .

При  $(H_2, H_3)$ -заменах ребра  $a_1a_6$  и  $a_6a_5$  переходят в пять ребер  $b_1b_6, b_6b_{12}, b_{12}b_{11}, b_{11}b_{10}, b_{10}b_5$ . В каждой грани этого графа ребро  $a_2a_6$  переходит в ребра  $b_2b_6, b_6b_7, b_7b_8$ , а ребро  $a_6a_4$  переходит в ребра  $b_8b_9, b_9b_{10}, b_{10}b_4$ . Таким образом, длина грани первого типа делится на 5, длина грани второго типа делится на 7.

Для каждого цикла  $C$ , образующего грань первого типа в графе  $G'$ , зададим функцию  $g_1 : V(C) \rightarrow \overline{0, 2}$ . Ее значение определяется положением вершины в экземпляре подграфа  $H_3$ , которому она принадлежит, а именно:

$$g_1(b_1) = 2, g_1(b_6) = 0, g_1(b_{12}) = 1, g_1(b_{11}) = 1, g_1(b_{10}) = 1, g_1(b_5) = 2.$$

Для каждого цикла  $C''$ , образующего грань второго типа в графе  $G'$ , аналогично зададим функцию  $g_2 : V(C'') \rightarrow \overline{0, 2}$ , а именно:

$$g_2(b_3) = 1, g_2(b_8) = 1, g_2(b_9) = 1, g_2(b_{10}) = 0, g_2(b_4) = 2, g_2(b_7) = 1, g_2(b_6) = 1, g_2(b_2) = 1.$$

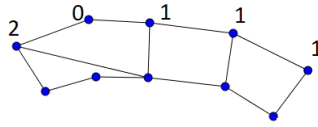
Нетрудно видеть, что никакие две грани первого типа не пересекаются по вершинам. Может пересекаться грань второго типа с гранью первого типа или второго типа. Однако, для любой вершины  $x$  выполнено неравенство  $g_i(x) + g_j(x) \leq 5 - \deg(x)$ , где индексы  $i$  и  $j$  определяются типом граней, которым принадлежит  $x$ . Мы будем проводить ребра, лежащие внутри граней первого или второго типа или во внешней грани, причем для каждой вершины  $x$  количество таких ребер не превышает значения суммы таких функций ( $g_1$  и  $g_1$  или  $g_1$  и  $g_2$ ) на  $x$ . Тем самым, максимальная степень вершин в результирующем графе не превосходит 5.

С каждой гранью первого или второго типов графа  $G'$  выполним следующее преобразование. К графу добавляется цикл  $C_n$ , где  $n \geq 5$  — количество ребер в соответствующей грани графа  $G'$ , причем данный цикл помещается внутрь данной грани, если она является внутренней, или грань помещается внутрь цикла, если грань является внешней. Всюду далее мы будем рассматривать только случай внутренней грани. Производится нумерация вершин грани и цикла по часовой стрелке.

В случае грани первого типа все вершины грани со значением функции  $g_1$ , равным единице или двойке, соединяются с вершиной цикла с тем же номером. Вершина со значением функции, равным двойке, дополнительно соединяется с вершиной с номером на два больше. Вершина с нулевым значением функции не соединяется с циклом.

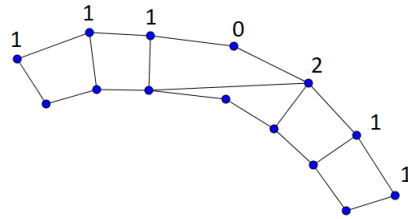
В случае грани второго типа все вершины грани со значением функции  $g_2$ , равным единице или двойке, соединяются с вершиной цикла с тем же номером аналогично первому случаю. Вершина со значением функции, равном двойке, дополнительно соединяется с вершиной с номером на два меньше. Вершина с нулевым значением функции не соединяется с циклом.

На рисунках 4.1 и 4.2 представлены фрагменты граней и циклов с значениями функций  $g_1$  и  $g_2$  и добавленными ребрами.



Р и с у н о к 4.1

Фрагмент результата при преобразовании грани первого типа

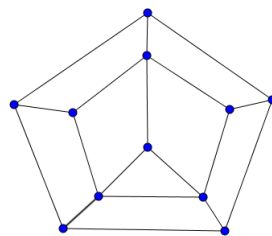


Р и с у н о к 4.2

Фрагмент результата при преобразовании грани второго типа

Обозначим через  $G''$  результат преобразования графа  $G'$ , описанного выше. Очевидно, что граф  $G''$  является планарным. Также очевидно, что  $G'$  является 3-раскрашиваемым, если таковым является граф  $G''$ . Удалим произвольную вершину степени 2 из цикла  $C_n$ . Соседняя с ней вершина в цикле в получившемся графе имеет степень 2. Ее также можно удалить. Поэтому элиминируется весь цикл  $C_n$ . Тем самым, граф  $G''$  является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является и граф  $G'$ . Грань графа  $G''$ , ограниченную циклом  $C_n$ , назовем *самой внутренней*. Ее длина не меньше пяти, она смежна только с гранями длины 4 и все вершины, принадлежащие ей, имеют степень не более чем 4.

Разбиение самой внутренней грани длины 5 представлено на рисунке 4.3. Проверку того, что любая 3-раскраска вершин грани продолжается на весь 11-вершинный граф разбиения, легко осуществить непосредственно. Для этого достаточно заметить, что в любой 3-раскраске вершин этой грани две вершины имеют первый цвет, две вершины имеют второй цвет, а одна вершина — третий цвет. После этого рассмотреть положение вершины третьего цвета — смежна ли она с вершиной степени 4 в графе разбиения или нет.



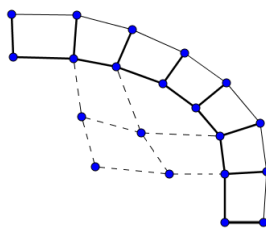
Р и с у н о к 4.3

Разбиение самой внутренней грани длины 5

Покажем, как разбить самую внутреннюю грань с  $n > 5$  ребрами на две грани длины  $n - 1$  и 5 (если  $n = 6$ , то граней длины 5 ровно две штуки) и несколько граней длины 4. Каждая вершина новых граней имеет степень не более чем 4. Объявление грани длины

$n - 1$  самой внутренней и выполнение данного разбиения  $n - 5$  раз сводит задачу к уже рассмотренному случаю.

Создадим внутри каждой самой внутренней грани цикл  $C_n$ . Произведем нумерацию вершин грани и цикла по часовой стрелке. Соединим вершины грани с вершинами цикла  $C_n$  с тем же номером. Проведенные на этом шаге ребра выделены жирным на рисунке 4.4. Проведение данных ребер сохраняет 3-раскрашиваемость, т.к. для ее сохранения достаточно присвоить каждой вершине цикла цвет с номером на 1 большим (по модулю 3), чем цвет вершины грани, с которой она соединена. Также проведем в произвольном месте данной грани ребра, выделенные пунктиром на рисунке 4.4. Очевидно, что их добавление не меняет 3-раскрашиваемости графа. Они разбивают грань на грани длины 4 и грани длины 5 и  $n - 1$ .



Р и с у н о к 4.4

Разбиение самой внутренней грани длины более чем 5

После выполнения всех преобразований, описанных выше, мы получим граф  $G'''$ . Он является планарным, все его грани имеют длину 3 и 4, а максимальная степень вершин не превосходит 5. Граф  $G'''$  является 3-раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф  $G$ . Количество вершин  $G'''$  ограничено сверху полиномом третьей степени от числа вершин графа  $G$ . Тем самым, имеет место сведение задачи 3-ВР в классе  $\mathcal{P}$  к той же задаче в классе планарных графов, степени всех вершин которых не более чем 5 и все грани имеют длину 3 и 4. Значит, имеет место утверждение данной теоремы.

### Благодарности

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01336).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Dailey, “Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete”, *Discrete Mathematics*, **30**:3 (1980), 289–293.
2. R. Brooks, “On colouring the nodes of a network”, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences*, **37**:2 (1941), 194–197.
3. O. Aichholzer, F. Aurenhammer, T. Hackl, C. Huemer, A. Pilz, B. Vogtenhuber, “3-Colorability of pseudo-triangulations”, *International Journal of Computational Geometry and Applications*, **25**:4 (2015), 283–298.

4. D. Malyshev, “The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs”, *Graphs and Combinatorics*, **33**:4 (2017), 1009–1022.

Получена 5.04.2018

MSC2010 05C15

## On the complexity for constructing a 3-colouring for planar graphs with short facets

© D. S. Sirotkin<sup>1</sup>

**Abstract.** The vertex 3-colourability problem is to determine for a given graph whether one can divide its vertex set into three subsets of pairwise non-adjacent vertices. This problem is NP-complete in the class of planar graphs, but it becomes polynomial-time solvable for planar triangulations, i.e. planar graphs, all facets of which (including external) are triangles. Additionally, the problem is NP-complete for planar graphs whose vertices have degrees at most 4, but it becomes linear-time solvable for graphs whose vertices have maximal degree at most 3. So it is an interesting question to find a threshold for lengths of facets and maximum vertex degree, for which the complexity of the vertex 3-colourability changes from polynomial-time solvability to NP-completeness. In this paper we answer this question and prove NP-completeness of the vertex 3-colourability problem in the class of planar graphs of the maximum vertex degree at most 5, whose facets are triangles and quadrangles only.

**Key Words:** computational complexity, vertex 3-colourability problem, planar graph

## REFERENCES

1. D. Dailey, “Uniqueness of colorability and colorability of planar 4-regular graphs are NP-complete”, *Discrete Mathematics*, **30**:3 (1980), 289–293.
2. R. Brooks, “On colouring the nodes of a network”, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society, Mathematical and physical sciences*, **37**:2 (1941), 194–197.
3. O. Aichholzer, F. Aurenhammer, T. Hackl, C. Huemer, A. Pilz, B. Vogtenhuber, “3-Colorability of pseudo-triangulations”, *International Journal of Computational Geometry and Applications*, **25**:4 (2015), 283–298.
4. D. Malyshev, “The complexity of the vertex 3-colorability problem for some hereditary classes defined by 5-vertex forbidden induced subgraphs”, *Graphs and Combinatorics*, **33**:4 (2017), 1009–1022.

Submitted 5.04.2018

---

<sup>1</sup> **Dmitry V. Sirotkin**, laboratory assistant, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), without academic degree, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2682-9867>, [dmitriy.v.sirotkin@gmail.com](mailto:dmitriy.v.sirotkin@gmail.com)

УДК 517.95

# Об одной оценке в пространстве Соболева, порождаемой вырождающимся эллиптическим оператором второго порядка, определённой в полуплоскости

© Г. А. Смолкин<sup>1</sup>

**Аннотация.** Рассматривается эллиптический оператор, который определен в полуплоскости и вырождается вдоль нормали к границе этой полуплоскости. Уточнены результаты, полученные автором ранее. Построено разбиение единицы двойственной переменной, позволяющее "заморозить" производные по ортогональному направлению к множеству вырождения и осуществить гладкое продолжение функции на всю плоскость. Показано, что это продолжение и "стандартное" продолжение, подробно изученное Л.Н. Слободецким, достаточно для получения необходимой априорной оценки. При этом неравенства доказываются при помощи преобразования Фурье по части переменных и неравенства Шварца. Установлено, что Соболевская норма производных второго порядка функции будет конечной, если ее сужение на границу полуплоскости и ее образ, порождающим действием на эту функцию изучаемым оператором принадлежат пространствам Соболева с показателями 3, 2 соответственно. Полученные результаты можно распространить на более широкий класс операторов, могут быть применены при изучении краевых задач для вырождающихся эллиптических и квазиэллиптических операторов, заданных в полупространствах.

**Ключевые слова:** вырождающийся эллиптический оператор, преобразование Фурье, пространства Соболева, априорные оценки.

## 1. Введение

В статье использованы элементы теории псевдодифференциальных операторов, различные классы которых подробно описаны в книгах [1], [2]. Как и в [3] используются следующие обозначения

$x = (x_1, x_2)$ ,  $y = (y_1, y_2)$ ,  $\xi = (\xi_1, \xi_2)$  — точки плоскости  $R^2$ ;  $x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2$ ,

$\lambda(t) = (1 + |t|^2)^{1/2}$ ,  $\partial_k^j = \frac{\partial^j}{\partial x_k^j}$ ,  $i^2 = -1$ ,  $D_k^j = i^{-j} \frac{\partial^j}{\partial x_k^j}$ ,  $k = 1, 2$ ;  $j = 1, 2, \dots$ ;

$\tilde{w}(\xi) = \int e^{-ix\xi} w(x) dx$ ,  $\tilde{w}(\xi_1, x_2) = \int e^{-ix_1\xi_1} w(x) dx_1$ ,  $\tilde{w}(x_1, \xi_2) = \int e^{-ix_2\xi_2} w(x) dx_2$  —

преобразования Фурье функции  $w(x)$  по переменным  $x$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  соответственно. При этом

$$w(x) = (2\pi)^{-2} \int e^{ix\xi} \tilde{w}(\xi) d\xi, \text{ если } \int |\tilde{w}(\xi)| d\xi < \infty;$$

<sup>1</sup> Смолкин Георгий Александрович, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5964-9814>, [smolkinga@yandex.ru](mailto:smolkinga@yandex.ru)



Скалярное произведение  $(w(x), W(x))$ , функции  $A(x, D)w$ ,  $A(x, D_1)w$ ,  $A(x, D_2)w$  и нормы  $\|w(x)\|$ ,  $\|w(x)\|_{x_2>0}$  определяются равенствами

$$(w(x), W(x)) = \int w(x) \overline{W}(x) dx = \int \int w(x_1, x_2) \overline{W}(x_1, x_2) dx_1 dx_2,$$

$$A(x, D)w = (2\pi)^{-2} \int e^{ix\xi} A(x, \xi) \tilde{w}(\xi) d\xi,$$

$$A(x, D_1)w = (2\pi)^{-1} \int e^{ix_1\xi_1} A(x, \xi_1) \tilde{w}(\xi_1, x_2) d\xi,$$

$$A(x, D_2)w = (2\pi)^{-1} \int e^{ix_2\xi_2} A(x, \xi_2) \tilde{w}(x_1, \xi_2) d\xi,$$

$$\|w(x)\|^2 = (w(x), w(x)), \quad \|w(x)\|_{x_2>0}^2 = \int_{x_2>0} |w(x)|^2 dx.$$

соответственно.

Постоянные, возникающие в неравенствах в качестве коэффициентов, будем обозначать буквой  $C$ , быть может с индексами. Всюду ниже  $u(x) \in C_0^\infty(K)$ ,  $K$  — компакт из  $R^2$ . Определим

$$P(x, D) = D_1^2 + x_1^2 D_2^2, \quad f(x) = P(x, D)u,$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x_2 \geq 0 \\ f(x_1, -x_2), & \text{если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x_2 \geq 0 \\ u(x_1, -x_2), & \text{если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$h(t) \in C_0^\infty(R), \quad 0 \leq h(t) \leq 1; \quad h(t) = 1, \quad \text{если } |t| \leq 1; \quad h(t) = 0, \quad \text{если } |t| \geq 2.$$

Введем разбиение единицы двойственной переменной  $\xi_1$ . Пусть

$$g_k(t) = h(t - k) / \sum_{j=0}^{\infty} h(t - j),$$

$$\Psi_k(\xi_1) = g_k(\ln((1 + |\xi_1|^2)^{1/2})), \quad k = 0, 1, \dots$$

Очевидно, что в каждой точке  $\xi_1 \in R$  пересекается конечное число носителей функций  $\Psi_k(\xi_1)$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \Psi_k(\xi_1) = 1,$$

$$e^{-2}(1 + |\xi_1|^2)^{1/2} \leq e^k \leq e^2(1 + |\xi_1|^2)^{1/2}, \quad (1.1)$$

если  $\xi \in \text{supp } \Psi_k(\xi)$ .

## 2. Априорные оценки

Пусть

$$v_1 = v_1(x) \equiv \begin{cases} u(x), & \text{если } x_2 \geq 0 \\ 2 \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \Psi_k(D_1) u(x_1, 0) - u(x_1, -x_2), & \text{если } x_2 < 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

**Л е м м а 2.1** Для любой постоянной  $\varepsilon > 0$  существует константа, не зависящая от  $u$  и такая, что справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(D_2)) D_2^2 v_1(x)\| &\leq \\ &\leq C(\varepsilon) (\|(\lambda^2(D_1) + \lambda(D_2)) f(x)\|_{x_2 > 0} + \|\lambda^3(D_1) u(x_1, 0)\| + \|u(x)\|_{x_2 > 0}) \end{aligned} \quad (2.2)$$

при этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C(\varepsilon) = \infty.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из работ [3], [4] следует

$$\begin{aligned} \|h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \lambda^2(\xi_2) \tilde{v}_1(x_1, \xi_2)\|^2 &\leq C(\varepsilon^{-1} J_0 + \varepsilon^{-3} J_1 + \varepsilon^{-4} J_2 + \\ &+ \|v_1(x)\|^2 + \varepsilon \|\lambda^{3/2}(D_2) D_1 v_1(x)\|^2 + \varepsilon^2 \|\lambda^2(D_2) v_1(x)\|^2), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} J_0 &= \int \lambda^{3/2}(\xi_2) |\tilde{F}_1(0, \xi_2)|^2 d\xi_2, \\ J_1 &= \int \lambda^{1/2}(\xi_2) |D_1 \tilde{F}_1(0, \xi_2)|^2 d\xi_2, \\ J_2 &= \int \int h^2(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)/2) |D_1^2 \tilde{F}_1(x_1, \xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2, \\ \tilde{F}_1(x_1, \xi_2) &= (D_1^2 + x_1^2 \xi_2^2) \tilde{v}_1(x_1, \xi_2). \end{aligned}$$

Оценим интегралы  $J_0, J_1, J_2$ . Из равенства

$$D_1^j F_1(0, x_2) = D_1^j F(0, x_2) + D_1^j F_0(0, x_2), \quad j = 0, 1,$$

где

$$D_1^j F_0(0, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 \geq 0 \\ 2 \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) D_1^{j+2} \Psi_k(D_1) U(0) - 2 D_1^j F(0, x_2), & \text{если } x_2 < 0 \end{cases}$$

следует

$$J_j \leq C \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) (|D_1^j \tilde{F}(0, \xi_2)|^2 + |D_1^j \tilde{F}_0(0, \xi_2)|^2) d\xi_2. \quad (2.4)$$

Нетрудно доказать (см. [3]) неравенство:

$$\int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) |D_1^j \tilde{F}(0, \xi_2)|^2 d\xi_2 \leq C \| (D_1^2 + \lambda(D_2)) f(x) \|_{x_2 > 0}^2. \quad (2.5)$$

Далее, согласно работе [5], имеем

$$\begin{aligned} & \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) |D_1^j \tilde{F}_0(0, \xi_2)|^2 d\xi_2 \leq \\ & \leq C \left( \int_{x_2 < 0} \int_{y_2 < 0} |D_1^j F_0(0, x_2) - D_1^j F_0(0, y_2)|^2 / |x_2 - y_2|^{1-j+3/2} dx_2 dy_2 + \right. \\ & \left. + \int_{x_2 < 0} |D_1^j F_0(0, x_2)|^2 / |x_2|^{-j+3/2} dx_2 \right) \leq C(I_1 + I_2 + I_3), \end{aligned} \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int |\lambda^{3/4-j/2}(D_2) \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) D_1^{j+2} \Psi_k U(0)|^2 dx_2, \\ I_2 &= \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) |D_1^j \tilde{F}(0, \xi_2)|^2 d\xi_2, \\ I_3 &= \int |D_1^j F(0, x_2) - \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) D_1^{j+2} \Psi_k(D_1) U(0)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2. \end{aligned}$$

Оценим интегралы  $I_1$ ,  $I_3$ . Из соотношений

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) \left| \int e^{-ix_2 \xi_2} \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \xi_1^{j+2} \widetilde{\Psi_k U}(\xi_1, 0) d\xi_1 dx_2 \right|^2 d\xi_2 = \\ &= C \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) \left| \int e^{-ix_2 \xi_2} \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) dx_2 \right|^2 d\xi_2 \left| \int \xi_1^{j+2} \widetilde{\Psi_k U}(\xi_1, 0) d\xi_1 \right|^2, \\ &\int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) \left| \int e^{-ix_2 \xi_2} \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) dx_2 \right|^2 d\xi_2 = \\ &= \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) \left| \int e^{-ix_2 \xi_2} \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) dx_2 \int e^{iy_2 \xi_2} \sum_{k=0}^{\infty} h(y_2 e^{2k}) dy_2 \right| d\xi_2 \leq \\ &\leq 2 \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) \left| \int e^{-ix_2 \xi_2} \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) dx_2 \int e^{iy_2 \xi_2} \sum_{l=k}^{\infty} h(y_2 e^{2l}) dy_2 \right| d\xi_2 \leq \\ &\leq C \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) \left| \int e^{-ix_2 \xi_2} \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) dx_2 \right| d\xi_2 \sum_{l=k}^{\infty} e^{-2l} \leq \\ &\leq C \int \left| \int e^{-ix_2 \xi_2} \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2) \lambda^{3/2-j}(\xi_2 e^{2k}) dx_2 \right| d\xi_2 \sum_{l=k}^{\infty} e^{-2l} \leq \\ &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} e^{3k-2kj} \sum_{l=k}^{\infty} e^{-2l} \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} e^{(l-k)j+5(k-l)/2} \|D_1^3 \Psi_k U(x_1, 0)\| \|D_1^3 \Psi_l U(x_1, 0)\| \leq \\ &\leq C \|\lambda^3(D_1) U(x_1, 0)\|^2 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Очевидно

$$I_3 \leq I_{31} + I_{32},$$

где

$$\begin{aligned} I_{31} &= \int |W(x_2)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2, \\ W(x_2) &= \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) (D_1^j \Psi_k F(0, x_2) - \Psi_k D_1^{j+2} U(0)), \\ I_{32} &= \int \left| \sum_{k=0}^{\infty} (1 - h(x_2 e^{2k})) D_1^j \Psi_k F(0, x_2) \right|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2 \leq \\ &\leq C \|\lambda^2(D_1) F(x)\|^2. \end{aligned}$$

Учитывая равенство  $W(0) = 0$ , получаем

$$\begin{aligned} \int |W(x_2)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2 &\leq C \int |W(x_2) D_2 W(x_2)| / |x_2|^{1/2-j} dx_2 \leq \\ &\leq C \left( \int |W(x_2)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2 \right)^{1/2} \left( \int |D_2 W(x_2)|^2 |x_2|^{1/2+j} dx_2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int |W(x_2)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2 &\leq C \int |x_2|^{1/2+j} |D_2 W(x_2)|^2 dx_2 \leq \\ &\leq C \left( \int |x_2|^{1/2+j} |D_2 \int \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \xi_1^j \widetilde{\Psi_k F}(\xi_1, x_2) d\xi_1|^2 dx_2 + \right. \\ &\left. + \int |x_2|^{1/2+j} |D_2 \int \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \xi_1^{j+2} \widetilde{\Psi_k U}(\xi_1, 0) d\xi_1|^2 dx_2 \right) \leq C(Z_1 + Z_2 + Z_3). \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} Z_1 &= \int |x_2|^{1/2+j} \left| \int \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \xi_1^j D_2 \widetilde{\Psi_k F}(\xi_1, x_2) d\xi_1 \right|^2 dx_2 \leq \\ &\leq C \|\lambda(D_2) F(x)\|^2, \\ Z_2 &= \int |x_2|^{1/2+j} \left| \int \sum_{k=0}^{\infty} \xi_1^j \widetilde{\Psi_k F}(\xi_1, x_2) d\xi_1 D_2 h(x_2 e^{2k}) \right|^2 dx_2 \leq \\ &\leq C \|\lambda^2(D_1) F(x)\|^2, \\ Z_3 &= \int |x_2|^{1/2+j} |D_2 \int \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \xi_1^{j+2} \widetilde{\Psi_k U}(\xi_1, 0) d\xi_1|^2 dx_2 \leq \\ &\leq C \|\lambda^3(D_1) u(x_1, 0)\|^2. \end{aligned}$$

Очевидно

$$J_2 \leq C \left( \int \int |h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)/2) D_1^2 \widetilde{F}_1(x_1, \xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2 + \|D_1^2 f(x)\|_{x_2 > 0}^2 \right), \quad (2.8)$$

где

$$F_1(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 \geq 0 \\ 2P(x, D) \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \Psi_k(D_1) u(x_1, 0), & \text{если } x_2 < 0, \end{cases}$$

Нетрудно доказать неравенство

$$\int \int |h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)/2) D_1^2 \tilde{F}_1(x_1, \xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2 \leq C \|\lambda^3(D_1) u(x_1, 0)\|^2.$$

Отсюда и из (2.3) - (2.8) следует доказательство леммы.

**Т е о р е м а 2.1** *Существует постоянная  $C$ , не зависящая от  $u(x) \in C_0^\infty(K)$  и такая, что*

$$\begin{aligned} \|D_2^2 u(x)\|_{x_2 > 0} &\leq C(\|(D_1^2 + \lambda(D_2))P(x, D)u(x)\|_{x_2 > 0} + \\ &+ \|\lambda^3(D_1)u(x_1, 0)\| + \|u(x)\|_{x_2 > 0} + \|D_2 u(x)\|_{x_2 > 0}). \end{aligned}$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Заметим, что

$$\begin{aligned} \|D_1^4 v_1(x)\|^2 &\leq (D_1^4 v_1(x), D_1^4 v_1(x)) + (x_1 D_1^3 D_2 v_1(x), x_1 D_1^3 D_2 v_1(x)) \leq \\ &\leq (D_1^2(D_1^2 + x_1^2 D_2^2) v_1(x), D_1^4 v_1(x)) + C \|D_1^2 D_2 v_1(x)\|^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Справедливо также (см. [3]) неравенство

$$\|\lambda^2(D_2)u(x)\|_{x_2 > 0} \leq C(\|\lambda(D_2)P(x, D)u(x)\|_{x_2 > 0} + \|u(x)\|_{x_2 > 0} + \|D_2 D_1^2 u(x)\|_{x_2 > 0}). \quad (2.10)$$

Для оценки  $\|D_2 D_1^2 u(x)\|_{x_2 > 0}$  положим

$$v_0(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x_2 \geq 0 \\ -u(x_1, -x_2), & \text{если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$v(x) = \begin{cases} D_2 u(x), & \text{если } x_2 \geq 0 \\ -D_2 u(x_1, -x_2), & \text{если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$z_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 \geq 0 \\ 2 \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \Psi_k(D_1) u(x_1, 0), & \text{если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$F_1(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x_2 \geq 0 \\ -f(x_1, -x_2), & \text{если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$z(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 \geq 0 \\ 2D_2 \sum_{k=0}^{\infty} h(x_2 e^{2k}) \Psi_k(D_1) u(x_1, 0), & \text{если } x_2 < 0. \end{cases}$$

Ясно, что

$$\begin{aligned} \|D_2 D_1^2 u(x)\|_{x_2 > 0} &\leq C \|D_1^2 v(x)\| \leq \\ &\leq C(\|h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(D_2)) D_1^2 v(x)\| + \|(1 - h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(D_2))) D_1^2 v(x)\|), \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из равенства  $v_2(x) = D_2 v_1(x) - z(x)$  следует

$$\begin{aligned} \|h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(D_2)) D_1^2 v(x)\| &\leq \varepsilon \|D_1^4 v_1(x)\| + C_1 \varepsilon \|D_2^2 v_1(x)\| + \\ &+ \varepsilon^{-1} \|h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(D_2)) D_2^2 v_1(x)\| + C_2 \|\lambda^3(D_1) u(x_1, 0)\|. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Очевидно

$$\begin{aligned} \|(1 - h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(D_2))) D_1^2 v(x)\| &\leq \\ &\leq \|(1 - h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(D_2))) D_1^2 D_2 \lambda^{-1}(D_2) v(x)\| + \|D_1^2 \lambda^{-1}(D_2) v(x)\|. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поскольку

$$1 - h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \leq C \varepsilon (1 - h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2))) x_1 \lambda^{1/2}(\xi_2),$$

то

$$\begin{aligned} \|(1 - h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(D_2))) D_1^2 D_2 \lambda^{-1}(D_2) v(x)\|^2 &\leq \\ &\leq C \varepsilon^2 ((\lambda^{-1/2}(\xi_2) D_1^3 \xi_2 \tilde{v}_1(x_1, \xi_2), \lambda^{-1/2}(\xi_2) D_1^3 \xi_2 \tilde{v}_1(x_1, \xi_2)) + \\ &+ (x_1 \lambda^{-1/2}(\xi_2) D_1^2 \xi_2 \tilde{v}(x_1, \xi_2), x_1 \lambda^{-1/2}(\xi_2) D_1^2 \xi_2 \tilde{v}(x_1, \xi_2))). \end{aligned}$$

Отсюда, из (2.9)-(2.13) и равенств

$$\begin{aligned} \tilde{v}_1(x_1, \xi_2) &= \tilde{v}_0(x_1, \xi_2) + \tilde{z}_0(x_1, \xi_2), \\ F_1(x) &= D_1^2 v_0(x) + x_1^2 D_2 v(x) \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \|\lambda^2(D_2) u(x)\|_{x_2 > 0} &\leq C(\|(D_1^2 + \lambda(D_2)) P(x, D) u(x)\|_{x_2 > 0} + \|u(x)\|_{x_2 > 0} + \\ &+ \varepsilon^{-1} \|h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(D_2)) D_2^2 v_1(x)\| + \|\lambda^3(D_1) u(x_1, 0)\|). \end{aligned}$$

Таким образом, выбирая  $\varepsilon$  достаточно малым и используя вышеприведённую лемму, получаем доказательство теоремы.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю.В. Егоров, *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, Москва, 1984, 360 с.
2. М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы*, Мир, Москва, 1985, 472 с.
3. Г.А. Смолкин, “Об одной априорной оценке для эллиптического оператора второго порядка, вырождающегося вдоль оси координат, перпендикулярной к границе полуплоскости”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **19:3** (2017), 64-72.

Г. А. Смолкин. Об одной оценке в пространстве Соболева, порождаемой...

4. Г. А. Смолкин, “Априорные оценки, связанные с дифференциальными операторами типа Кунцова-Хермандера”, *Дифференциальные уравнения*, **40**:2 (2004), 242-250.
5. Л. Н. Слободетский, “Обобщенные пространства С. Л. Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных”, *Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та*, **197** (1958), 54-112.

Поступила 12.03.2018

MSC2010 35G93

## On an estimate in the Sobolev space generated by the second order degenerate elliptic operator defined in the half-plane

© G. A. Smolkin <sup>1</sup>

**Abstract.** The article considers an elliptic operator that is defined in the half-plane and degenerates along the normal to the boundary of the half-plane. The results obtained by the author earlier are made more precise. A partition of unity of a dual variable is constructed that allows to «freeze» the derivatives along the orthogonal direction to the degeneracy set and to carry out a smooth continuation of the function to the whole plane. It is shown that this and the «standard» continuations examined in detail by L.N. Slobodetsky, is sufficient for obtaining the necessary a priori estimate. Moreover, the inequalities are proved by the Fourier transform with respect to the part of variables and by the use of Schwartz inequality. It is established that the Sobolev norm of the function's second order derivatives will be finite if its restriction to the boundary of the half-plane and function's image both belong to the Sobolev spaces with indicators 3, 2, respectively. The results obtained can be spread to a wider class of operators; also they may be used in the research of boundary value problems for the degenerate elliptic and quasi-elliptic operators defined in half-spaces.

**Key Words:** degenerate elliptic operator, Fourier transform, Sobolev space, a priori estimates.

## REFERENCES

1. Yu. V. Egorov, *Lineynye differentsial'nye uravneniya glavnogo tipa [Linear differential equations of principal type]*, Moscow, Nauka Publ., 1984 (In Russ.), 360 p.
2. M. Teylor, *Psevdodifferentsial'nye operatory [Pseudodifferential operators]*, Moscow, Mir Publ., 1985 (In Russ.), 472 p.
3. G. A. Smolkin, “[About an a priori estimate for the second order elliptic operator degenerate along coordinate axis orthogonal to semi-plane boundary]”, *Zhurnal SVMO*, **19**:3 (2017), 64-72 (In Russ.).
4. G. A. Smolkin, “[A priori estimates associated with differential operators of type Kuptsov-Hermander]”, *Differ. Uravn. [Differential equations]*, **40**:2 (2004), 242-250 (In Russ.).

<sup>1</sup> **Georgy A. Smolkin**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5964-9814>, [smolkinga@yandex.ru](mailto:smolkinga@yandex.ru)

5. L. N. Slobodetskiy, “[Generalized spaces of SL Sobolev and their applications to boundary-value problems for differential equations in partial derivatives]”, *Uch. zap. Leningr. ped. in-ta*, **197** (1958), 54-112. (In Russ.).

*Submitted 12.03.2018*



## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.20.201802.215-224

УДК 62-50

**Двухкритериальные задачи оптимальной виброзащиты упругих конструкций**© Д. В. Баландин<sup>1</sup>, Е. Н. Ежов<sup>2</sup>, И. А. Федотов<sup>3</sup>

**Аннотация.** В многокритериальной постановке рассматривается новый класс задач оптимальной виброзащиты упругих объектов, критериями в которых являются максимальные деформации упругого объекта защиты и максимальная деформация виброизолирующего устройства. Задача состоит в поиске линейной обратной связи, характеризующей виброизолятор и минимизирующей по Парето указанные критерии. Для решения данного класса задач применяется подход, основанный на результатах современной теории управления с применением свертки Гермейера и техники линейных матричных неравенств. Выписывается система линейных матричных неравенств, из решения которой могут быть получены элементы искомой матрицы обратной связи. Подробно рассмотрена двухкритериальная задача оптимальной виброзащиты многоэтажного высотного здания от сейсмических воздействий. На плоскости критериев построено множество Парето, а также проведено сравнение «идеального» Парето оптимального изолятора, т. е. управляющего устройства, обратная связь которого предполагает наличие текущей информации обо всех переменных состояния рассматриваемой механической системы, с оптимальными изоляторами активных и пассивного типов, имеющих более простую структуру управляющего устройства. Показано, что «активные» виброизоляторы не намного лучше пассивных, но все они заметно уступают «идеальному» виброизолятору.

**Ключевые слова:** оптимальная виброзащита, многокритериальные задачи, линейные матричные неравенства, свертка Гермейера.

**1. Введение**

Вопросы расчета и конструирования устройств, обеспечивающих эффективную защиту сложных конструкций, приборов, аппаратуры и самого человека от вредного воздействия вибраций и вместе с тем обладающих ограниченными размерами, продолжают оставаться в фокусе внимания ученых и инженеров [1]–[6]. Такие устройства в инженерной практике называются виброизоляторами. Известно [7], что задачу виброзащиты удобно рассматривать как задачу автоматического управления, регулятором в которой выступает виброизолятор. К числу основных показателей, характеризующих виброизоляторы,

<sup>1</sup> Баландин Дмитрий Владимирович, профессор кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д.23), доктор физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7727-5924>, [dbalandin@yandex.ru](mailto:dbalandin@yandex.ru)

<sup>2</sup> Ежов Егор Николаевич, аспирант кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, ФГАОУ "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д.23), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5434-7075>, [ezhovigor@gmail.com](mailto:ezhovigor@gmail.com)

<sup>3</sup> Федотов Игорь Анатольевич, директор малого инновационного предприятия ООО "РЕХЭЯ" (603022, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д.23, к. 8), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3912-8971>, [optimal.control@gmail.com](mailto:optimal.control@gmail.com)

относят величину, определяющую максимальный ход этого устройства, и максимальные деформации или напряжения, которые возникают в защищаемом объекте. Выбор подходящего виброизолирующего устройства представляет собой поиск определенного компромисса между этими двумя важнейшими показателями: чем меньше максимальный ход виброизолятора, тем больше максимальные деформации или максимальные напряжения, и наоборот. С учетом этого обстоятельства представляется целесообразным поставить двукритериальную задачу, в которой требуется синтезировать управление (выбрать виброизолятор), минимизирующий по Парето указанные показатели качества. Вполне возможна ситуация, когда в защите объекта участвуют одновременно несколько виброизолирующих устройств, тогда вместо двукритериальной задачи уместно рассмотреть многокритериальную. В данной статье излагается общий подход к решению многокритериальных задач виброзащиты многомассовых упругих объектов с позиций современной теории управления. В качестве примера подробно обсуждается двукритериальная задача сейсмозащиты высотного здания, в которой выбором виброизолятора требуется минимизировать в смысле Парето два показателя: максимум из максимальных межсекционных деформаций и максимальное смещение здания относительно фундамента. Рассматриваемая задача осложняется тем, что внешнее сейсмическое воздействие заранее неизвестно, поэтому синтез виброизолирующего устройства проводится в расчете на «наихудшее» (наиболее опасное) воздействие из некоторого класса воздействий.

## 2. Постановка задачи

Рассматривается механическая система, состоящая из материальных тел, связанных между собой и с телом, называемым далее основание, упругими и диссипативными элементами. Предполагается, что механическая система подвергается неконтролируемым воздействиям кинематического или динамического типа и управляющим воздействиям. Механическая система описывается линейными дифференциальными уравнениями:

$$M\ddot{q} + R\dot{q} + Kq = Pv + Qu, \quad q(0) = 0, \quad \dot{q}(0) = 0, \quad (2.1)$$

где вектор  $q \in R^n$  определяет обобщенные координаты материальных тел, образующих систему;  $M, R, K$  - квадратные симметричные матрицы, определяющие инерционные диссипативные и упругие свойства механической системы;  $v = v(t)$  - вектор-функция, задающая неконтролируемые внешние воздействия;  $u$  - вектор управляющих воздействий.

Для оценки качества переходных процессов в системе введем в рассмотрение следующие функционалы:

$$J_i(u) = \sup_{v \in L_2} \frac{\max_k \{ \sup_{t \geq 0} |z_i^k(t)| \}}{\|v\|_2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.2)$$

где  $z_i^k$  - компоненты управляемых векторных выходов системы, представляющие собой скалярные линейные комбинации обобщенных координат  $q$ , скоростей  $\dot{q}$ , и управляющих воздействий  $u$ ;  $\|v\|_2 - L_2$  - норма внешнего воздействия, т. е. квадратный корень из интеграла в пределах от 0 до  $\infty$  от квадрата модуля вектор-функции  $v(t)$ . Такая форма представления функционалов позволяет оценить максимальные деформации и максимальные усилия в различных элементах механической системы при отсутствии конкретных данных о внешних воздействиях. Целью управления  $u$ , формируемого в форме обратной связи по состоянию, т. е. в виде линейной комбинации обобщенных координат и скоростей, является уменьшение значений данных функционалов. Как правило, указать управляющее

воздействие, которое приводило бы к «одновременному» уменьшению всех функционалов, не представляется возможным, поэтому целесообразна постановка многокритериальной задачи, которая заключается в поиске управляющих воздействий, обеспечивающих такой компромисс между значениями функционалов, что каждый из них не может быть уменьшен без увеличения хотя бы одного из оставшихся. В задачах виброзащиты такая постановка вопроса представляется естественной, поскольку уменьшение деформации в отдельных частях системы приводит к увеличению усилий в других её частях и наоборот.

Описанная постановка оптимизационной задачи называется многокритериальной, а получаемые решения (коэффициенты обратной связи в законе управления) – оптимальными по Парето. Следует заметить, что получение решений многокритериальных задач и построение Парето-оптимальных решений до настоящего времени является одной из наиболее трудных математических задач в теории оптимизации и оптимального управления.

### 3. Метод решения многокритериальной задачи оптимального управления

Для решения поставленной задачи воспользуемся результатами статей [8]–[10], в которых введенные выше функционалы трактуются как обобщенные операторные  $H_2$ -нормы линейной системы. Вводя обозначение  $x = (q^T, \dot{q}^T)^T$ , перепишем систему (2.1) в виде управляемой линейной системы

$$\dot{x} = Ax + B_v v + B_u u, \quad x(0) = 0, \quad (3.1)$$

где матрицы  $A, B_v, B_u$  формируются из матриц  $M, R, K, P, Q$  следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ M^{-1}K & M^{-1}R \end{pmatrix}, \quad B_v = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}P \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} 0 \\ M^{-1}Q \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Будем представлять управление  $u$  в форме обратной связи по состоянию, т. е. в виде  $u = \Theta x$ , тогда система (3.1) может быть записана в следующем виде:

$$\dot{x} = A(\Theta)x + B_v v, \quad x(0) = 0, \quad (3.3)$$

где матрица замкнутой системы  $A(\Theta) = A + B_u \Theta$ . Управляемый выход  $z$  системы (3.3) представим в виде

$$z = Cx + Du = (C + D\Theta)x = C(\Theta)x \quad (3.4)$$

со скалярными  $m$  компонентами  $z^k = C^{(k)}x + D^{(k)}u = C^{(k)}(\Theta)x$ ,  $k = 1, \dots, m$ . Согласно [8], справедливо следующее соотношение

$$J(\Theta) = \sup_{v \in L_2} \frac{\max_k \{ \sup_{t \geq 0} |z^k(t)| \}}{\|v\|_2} = d_{\max}^{1/2} (C(\Theta) Y C^T(\Theta)), \quad (3.5)$$

где  $d_{\max}$  обозначает максимальный диагональный элемент матрицы, а симметрическая неотрицательно определенная матрица  $Y$  является решением матричного уравнения Ляпунова

$$A(\Theta)Y + Y A^T(\Theta) + B_v B_v^T = 0. \quad (3.6)$$

Таким образом, указан способ вычисления функционала  $J(\Theta)$ , а именно: для заданной матрицы обратной связи  $\Theta$  сначала требуется решить матричное уравнение Ляпунова

(3.6), а затем для найденной матрицы  $Y$  найти максимальный диагональный элемент матрицы  $C(\Theta)YC^T(\Theta)$ . Далее для нахождения матрицы обратной связи, при которой достигается минимум функционала (3.5), требуется минимизировать по всем элементам матрицы  $\Theta$  правую часть выражения (3.5). Такая процедура оказывается довольно трудно выполнимой, особенно в случаях, когда число элементов матрицы  $\Theta$  достаточно велико. В статьях [10], [11] предложен альтернативный и весьма эффективный способ решения этой задачи, основанный на использовании линейных матричных неравенств [12]. Согласно данным источникам, для нахождения искомой матрицы  $\Theta$ , минимизирующей функционал (3.5), достаточно минимизировать скалярную переменную  $\gamma^2$  при ограничениях, выражаемых линейными матричными неравенствами

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_u Z + Z^T B_u^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & YC^{(k)T} + Z^T D^{(k)T} \\ C^{(k)}Y + D^{(k)}Z & \gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0, \quad (3.7)$$

$$k = 1, \dots, m$$

относительно неизвестных матриц  $Y, Z$  и скалярной переменной  $\gamma^2$ . Заметим, что в этих выражениях неравенства понимаются как соответствующая знакоопределенность блочных матриц, находящихся слева от знаков неравенств. Данная оптимизационная задача эффективно решается численно с использованием пакета MATLAB. В результате были найдены матрицы  $Y_*, Z_*$  и искомая матрица обратной связи  $\Theta = Z_* Y_*^{-1}$ .

Рассмотрим теперь многокритериальную задачу оптимального управления с  $N$  критериями

$$z_1 = C_1(\Theta)x, \dots, z_N = C_N(\Theta)x. \quad (3.8)$$

Задача состоит в нахождении оптимальных по Парето решений, т. е. матриц обратной связи

$$\Theta_P = \arg \min_{\Theta} \{J_i(\Theta), i = 1, \dots, N\}, \quad (3.9)$$

минимизирующих векторный критерий с компонентами

$$J_i(\Theta) = \sup_{v \in L_2} \frac{\max_k \{\sup_{t \geq 0} |z_i^k(t)|\}}{\|v\|_2}, \quad i = 1, \dots, N, \quad k = 1, \dots, m_i. \quad (3.10)$$

Для решения этой задачи применим свертку Гермейера [13] и сформируем из функций  $J_i(\Theta)$  новую целевую скалярную функцию:

$$J_\alpha(\Theta) = \max_{0 \leq i \leq N} \{J_i(\Theta) / \alpha_i\}, \quad (3.11)$$

где  $\alpha_i$  - произвольные положительные числа. В отличие от линейной свертки, где в случае двух критериев линия уровня представляет собой прямую линию с наклоном, определяющимся отношением  $\alpha_1/\alpha_2$ , линией уровня свертки Гермейера является угол, границы которого определяются прямыми  $y = \alpha_1$ ,  $x = \alpha_2$ . Использование свертки Гермейера в общем случае при решении задачи оптимизации позволяет получить как эффективные решения в смысле Парето, так и слабо эффективные. Таким образом, использование свертки Гермейера в результате даст множество, которое заведомо содержит множество решений, оптимальных в смысле Парето. Поставим далее задачу минимизации функции  $J_\alpha(\Theta)$  по элементам матрицы  $\Theta$  для любого набора параметров  $\alpha_i$ . Если представить управляемый

выход системы в виде  $z = \bar{C}(\Theta)x$ , где  $\bar{C}(\Theta) = (\alpha_1^{-1}C_1^T(\Theta), \dots, \alpha_N^{-1}C_N^T(\Theta))^T$ , то задача минимизации  $J_\alpha(\Theta)$  сводится к минимизации максимального диагонального элемента матрицы  $\bar{C}(\Theta)Y\bar{C}^T(\Theta)$ :

$$\min_{\Theta} d_{\max}(\bar{C}(\Theta)Y\bar{C}^T(\Theta)), \quad A(\Theta)Y + YA^T(\Theta) + B_vB_v^T = 0. \quad (3.12)$$

В терминах линейных матричных неравенств задача принимает следующий вид [10]: минимизировать  $\gamma^2$  при ограничениях, выражаемых линейными матричными неравенствами

$$\begin{pmatrix} AY + YA^T + B_uZ + Z^TB_u^T & B_v \\ B_v^T & -I \end{pmatrix} < 0, \quad \begin{pmatrix} Y & YC_i^{(k)T} + Z^TD_i^{(k)T} \\ C_i^{(k)}Y + D_i^{(k)}Z & \alpha_i^2\gamma^2 \end{pmatrix} \geq 0, \\ k = 1, \dots, m_i \quad i = 1, \dots, N \quad (3.13)$$

относительно неизвестных матриц  $Y, Z$  и скалярной переменной  $\gamma^2$ . Согласно [10], решив оптимизационные задачи для положительных параметров  $\alpha_i$ , получим множество решений, заведомо содержащее решение исходной многокритериальной задачи, т. е. множество Парето.

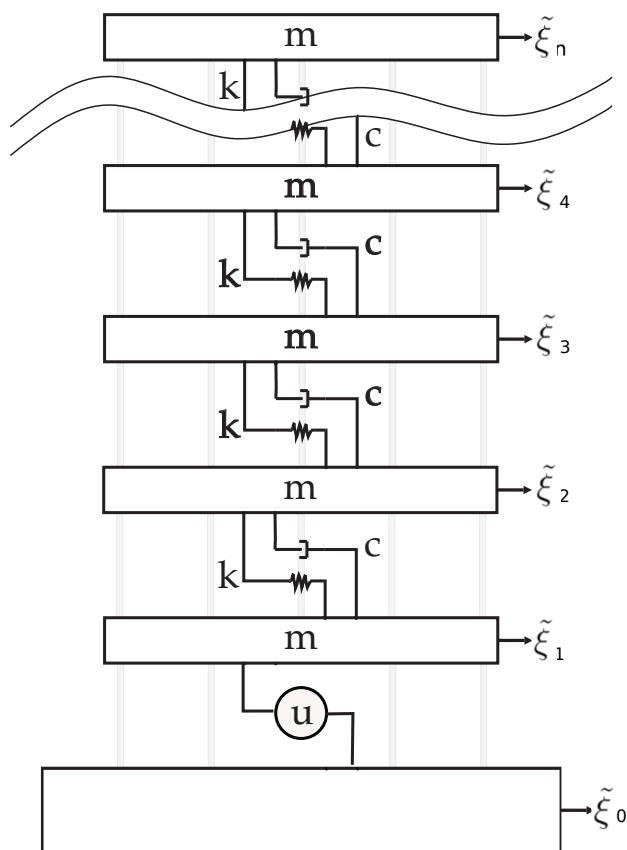
#### 4. Оптимальная сейсмоизоляция высотного здания

Рассмотрим задачу оптимальной сейсмоизоляции высотного здания. Механическая система, моделирующая колебания высотного здания при сейсмическом воздействии на фундамент, представляет собой цепочку материальных точек (этажи здания), связанных последовательно диссипативными и упругими элементами. При этом одна из двух крайних точек цепочки связана посредством виброизолятора с фундаментом (основанием), совершающим движение под действием землетрясения (Рис. 4.1). После приведения к безразмерному виду (см. например, [14]–[15]) математическая модель такой системы имеет следующий вид:

$$\ddot{\xi} + \beta K \dot{\xi} + K\xi = pv(t) + qu, \quad \xi(0) = 0, \quad \dot{\xi}(0) = 0, \quad (4.1)$$

где  $\xi = \text{col}(\xi_1, \dots, \xi_n)$  – координаты материальных точек относительно основания;  $v(t)$  – внешнее воздействие, с точностью до знака совпадающее с ускорением основания;  $u$  – управляющее воздействие, развиваемое виброизолятором;  $\beta$  – положительный параметр, характеризующий диссипативные свойства механической системы; положительно определенная симметрическая матрица  $K$  и векторы  $p$  и  $q$  задаются следующим образом:

$$K = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad p = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \dots \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$



Р и с у н о к 4.1

Схема  $n$ -этажного здания как многомассовой упругой системы

Приведем систему (4.1) к канонической форме управляемой системы (3.1), полагая  $x = \begin{pmatrix} \xi^T, \dot{\xi}^T \end{pmatrix}^T$ ,

$$A = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_n \\ -K & -\beta K \end{pmatrix}, \quad B_v = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ p \end{pmatrix}, \quad B_u = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ q \end{pmatrix}. \quad (4.3)$$

Функционалы, характеризующие качество виброизоляции многомассовой упругой системы, запишем в следующем виде:

$$J_1(u) = \sup_{v \in L_2} \frac{\sup_{t \geq 0} |x_1(t)|}{\|v\|_2}, \quad (4.4)$$

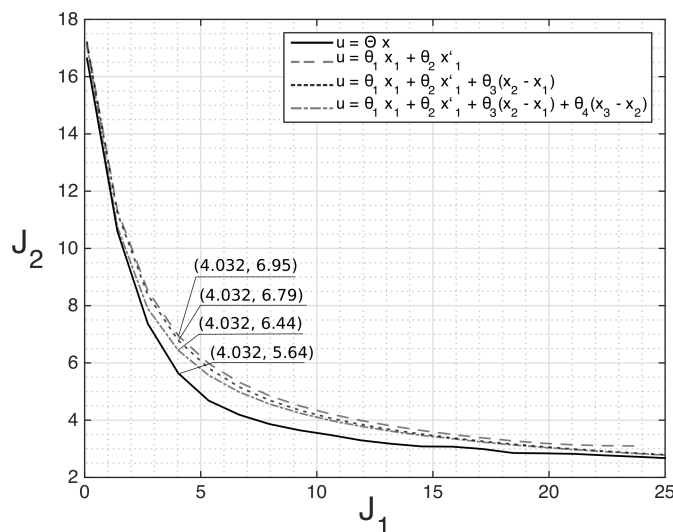
$$J_2(u) = \sup_{v \in L_2} \frac{\max\{\sup_{t \geq 0} |x_2(t) - x_1(t)|, \dots, \sup_{t \geq 0} |x_n(t) - x_{n-1}(t)|\}}{\|v\|_2}.$$

Первый функционал характеризует смещение первого этажа относительно основания, а второй определяет деформацию многомассовой системы. Задача управления будет состоять в нахождении параметров обратной связи  $\Theta$  управления (виброизолятора), минимизирующего по Парето функционалы (4.4). Заметим, что рассматриваемые функционалы обладают следующим свойством: выбор параметров обратной связи, приводящий к уменьшения одного из них, например, максимального смещения первого этажа относительно основания, влечет увеличение значения другого функционала, определяющего максимальную деформацию системы (высотного здания). Таким образом, естественный подход к задаче виброизоляции заключается в поиске компромисса между значениями

максимального смещения объекта относительно основания и максимальной деформации самого упругого объекта, что приводит к двукритерияльной задаче оптимального управления.

Приведем результаты решения двукритерияльной задачи для  $n = 10, \beta = 0.1$ . Рассмотрим случай «идеального виброизолятора», когда измерению доступно полное состояние управляемой системы, т. е. в формировании обратной связи участвуют как координаты, так и скорости всех материальных точек механической системы. На Рис. 4.2 кривая 1 (сплошная линия) представляет множество оптимальных по Парето значений функционалов  $\{J_1, J_2\}$  для указанного случая. Очевидно, что на практике полное состояние механической системы вряд ли доступно измерению, тем не менее найденное решение позволяет получить оценку снизу для оптимальных значений функционалов.

Далее рассмотрим случай, когда обратная связь формируется на основе только текущего значения переменной  $x_1$  и скорости ее изменения  $\dot{x}_1$  (переменная  $x_{11}$ ). Фактически данный случай соответствует пассивному виброизолятору с упругим и демпфирующим элементами. На Рис. 4.2 кривая 2 (штриховая линия), расположенная выше «предельной» кривой 1, соответствует Парето-оптимальным значениям функционалов  $\{J_1, J_2\}$  в классе пассивных виброизоляторов. Кривые 3 (пунктирная линия) и 4 (штрих-пунктирная линия) отвечают случаям, когда к пассивному виброизолятору добавлена «активная» составляющая, т. е. дополнительно измеряется не только смещение второго этажа относительно первого (кривая 3) но и смещение третьего этажа относительно второго (кривая 4). Анализ кривых показывает, что «активные» виброизоляторы (кривые 3 и 4) не намного превосходят пассивные (кривая 2), но все эти три изолятора заметно уступают «идеальному виброизолятору» (кривая 1).



Р и с у н о к 4.2

Множество Парето на плоскости критериев для разных типов виброизолятора

## 5. Заключение

В статье приводятся результаты изучения многокритерияльных задач оптимальной виброзащиты упругих объектов. В качестве критериев были выбраны обобщенные операторные  $H_2$ -нормы системы дифференциальных уравнений, описывающих динамику защищаемого от внешних воздействий объекта. Изложена общая схема решения многокритерияльной задачи оптимального управления, основанная на свертке Гермейера и технике

линейных матричных неравенств. В двукритериальной задаче оптимальной виброизоляции высотного здания от сейсмических воздействий на плоскости критериев было построено множество Парето, а также проведено сравнение «идеального» Парето-оптимального виброизолятора с оптимальными изоляторами активного и пассивного типов. Показано, что «активные» виброизоляторы не намного превосходят пассивные, но все эти изоляторы заметно уступают «идеальному» виброisolлятору.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №16-01-00606 и №18-41-520002).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. I. G. Buckle, R. L. Mayes, “Seismic isolation: history, application, and performance – a World View”, *Earthquake Spectra*, **6**:2 (1990), 161–201.
2. D. Karnopp, “Active and semi-active vibration isolation”, *J. Mech. Des.*, **117**:B (1995), 177–185.
3. D. V. Balandin, N. N. Bolotnik, W. D. Pilkey, “Review: optimal shock and vibration isolation”, *Shock and Vibration*, **5**:2 (1998), 73–87.
4. D.V. Balandin, N.N. Bolotnik, W.D. Pilkey, *Optimal protection from impact, shock, and vibration*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2001.
5. R.A. Ibrahim, “Recent advances in nonlinear passive vibration isolators”, *Journal of Sound and Vibration*, **314**:3–5 (2008), 371–452.
6. S. J. Patil, G. R. Reddy, “State of art review – base isolation systems for structures”, *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, **2**:7 (2012), 438–453.
7. М. З. Коловский, *Автоматическое управление виброзащитными системами*, Наука, М., 1976, 317 с.
8. D.A. Wilson, “Convolution and Hankel operator norms for linear systems”, *IEEE Trans. Autom. Control*, **34** (1989), 94–97.
9. M. A. Rotea, “The generalized  $H_2$  control problem”, *Automatica*, **29**:2 (1993), 373–385.
10. Д. В. Баландин, М. М. Коган, “Оптимальное по Парето обобщенное  $H_2$ -управление и задачи виброзащиты”, *Автоматика и телемеханика*, **8** (2017), 76–90.
11. D.V. Balandin, M.M. Kogan, “Pareto optimal generalized  $H_2$  control and optimal protection from vibration”, *IFAC-PapersOnLine*, **50**:1 (2017), 4442–4447.
12. Д. В. Баландин, М. М. Коган, *Синтез законов управления на основе линейных матричных неравенств*, Наука, М., 2007, 281 с.
13. Ю.Б. Гермейер, *Введение в теорию исследования операций*, Наука, М., 1971, 384 с.
14. H. Nishimura, A. Kojima, “Seismic isolation control for a buildinglike structure”, *IEEE Control Systems*, **19**:6 (1999), 38–44.



15. D. Balandin, M. Kogan, “LMI-based optimal attenuation of multi-storey building oscillations under seismic excitations”, *Structural Control and Health Monitoring*, **12:2** (2005), 213–224.

Посмунна 26.04.2018

MSC2010 34C20

## Two-criteria problems for optimal protection of elastic structures from vibration

© D. V. Balandin<sup>1</sup>, E. N. Ezhov<sup>2</sup>, I. A. Fedotov<sup>3</sup>

**Abstract.** In a multi-objective formulation with criteria such as the maximal deformation of the elastic object to be protected and maximal deformations of the protection devices, a new class of optimal vibration protection problems is considered. The mathematical problem is to find a linear feedback control minimizing the above criteria in Pareto sense. A general approach to solving these problems based on results of modern control theory using linear matrix inequalities technique is presented. A system of linear matrix inequalities for obtaining the desired gain matrix is derived. An example of a solution of two-criteria problem for a multistorey building under seismic disturbances is given. Pareto set on the plane of the criteria is constructed. The «ideal» Pareto optimal isolator and optimal isolators of active and passive types are compared as well. It is shown that the «active» vibration isolators are not much better than the passive one, but all these isolators are noticeably inferior to the «ideal» vibration isolator.

**Key Words:** optimal vibration protection, multi-criteria problem, linear matrix inequalities, Germeyer convolution.

## REFERENCES

1. I. G. Buckle, R. L. Mayes, “Seismic isolation: history, application, and performance – a world view”, *Earthquake Spectra*, **6:2** (1990), 161–201.
2. D. Karnopp, “Active and semi-active vibration isolation”, *J. Mech. Des.*, **117:B** (1995), 177–185.
3. D. V. Balandin, N. N. Bolotnik, W. D. Pilkey, “Review: optimal shock and vibration isolation”, *Shock and Vibration*, **5:2** (1998), 73–87.
4. D.V. Balandin, N.N.Bolotnik, W.D. Pilkey, *Optimal Protection from impact, shock, and vibration*, Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2001, 72 p.
5. R.A. Ibrahim, “Recent advances in nonlinear passive vibration isolators”, *Journal of Sound and Vibration*, **314:3-5** (2008), 371–452.

<sup>1</sup> **Dmitry V. Balandin**, Professor, Department of Differential Equations and Mathematical and Numerical Analysis, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin St., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7727-5924>, dbalandin@yandex.ru

<sup>2</sup> **Egor N. Ezhov**, Ph.D Student, Department of Differential Equations and Mathematical and Numerical Analysis, National Research Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod (23 Gagarin St., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5434-7075>, ezhovegor@gmail.com

<sup>3</sup> **Igor A. Fedotov**, CEO Ltd «REHEYA» university spin-off (8 bld., 23 Gagarin St., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), Ph.D (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-3912-8971>, optimal.control@gmail.com

6. S. J. Patil, G. R. Reddy, “State of art review – base isolation systems for structures”, *International Journal of Emerging Technology and Advanced Engineering*, **2:7** (2012), 438–453.
7. M. Z. Kolovskiy, “*Automatic control of vibroprotection systems*”, Nauka, Moscow, 1976 (In Russ.), 317 p.
8. D. A. Wilson, “Convolution and Hankel operator norms for linear systems”, *IEEE Trans. Autom. Control*, **34** (1989), 94–97.
9. M. A. Rotea, “The generalized  $H_2$  control problem”, *Automatica*, **29:2** (1993), 373–385.
10. D. V. Balandin, M. M. Kogan, “Pareto optimal generalized  $H_2$  Control and vibroprotection problems”, *Automation and Remote Control*, **78:8** (2017), 1417–1429.
11. D. V. Balandin, M. M. Kogan, “Pareto optimal generalized  $H_2$  control and optimal protection from vibration”, *IFAC-PapersOnLine*, **50:1** (2017), 4442–4447.
12. D. V. Balandin, M. M. Kogan, “*Synthesis of control laws based on linear matrix inequalities*”, Fizmatlit Publ., Moscow, 2007 (In Russ.), 281 p.
13. Y. B. Germeyer, “*Introduction to theory of operations research*”, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russ.), 384 p.
14. H. Nishimura, A. Kojima, “Seismic isolation control for a buildinglike structure”, *IEEE Control Systems*, **19:6** (1999), 38–44.
15. D. Balandin, Kogan M. Kogan, “LMI-Based optimal attenuation of multi-storey building oscillations under seismic excitations”, *Structural Control and Health Monitoring*, **12:2** (2005), 213–224.

*Submitted 26.04.2018*

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.20.201802.225-234

УДК 517.9

**Устойчивость и локальные бифуркации в модели Солоу с запаздыванием**© Д. А. Куликов<sup>1</sup>

**Аннотация.** Рассматривается математическая модель макроэкономики, предложенная в свое время лауреатом нобелевской премии Р. Солоу. Классический ее вариант имеет единственный глобальный аттрактор – положительное состояние равновесия. В работе предложена модификация данной модели, учитывающая эффект запаздывания. Это приводит к необходимости изучения динамики дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом. Для соответствующего уравнения в работе изучен вопрос об устойчивости и локальных бифуркациях. В частности, показана возможность докритических бифуркаций циклов. Для соответствующих периодических решений получены асимптотические формулы. При анализе локальных бифуркаций использованы такие методы теории динамических систем как метод инвариантных (интегральных) многообразий, аппарат теории нормальных форм Пуанкаре-Дюлака, а также асимптотические методы анализа.

**Ключевые слова:** модель Солоу, уравнения с запаздывающим аргументом, устойчивость, бифуркации, циклы, асимптотические формулы.

**1. Введение**

В основополагающих по данной тематике работах [1–2] была предложена одна из известных математических моделей макроэкономики. В настоящее время она известна как модель Солоу. Согласно модели, динамика фондовооруженности труда определяется уравнением вида (см. также [3–4])

$$p' = -\alpha p + \beta p^k, \quad p = p(\tau) > 0, \quad (1.1)$$

где  $\alpha, \beta \in R, p(\tau)$  – стоимость фондов в момент времени  $\tau$ . После замен

$$\tau = \gamma_0 t, \quad p = \gamma_1 x, \quad \gamma_0 \alpha = 1, \quad \beta \gamma_0 \gamma_1^{k-1} = 1, \quad \gamma_0, \gamma_1, \beta > 0 \quad (\gamma_0 = \frac{1}{\alpha}, \gamma_1 = (\frac{\alpha}{\beta})^{1/(k-1)})$$

уравнение (1.1) приобретает уже следующий вид

$$\dot{x} = -x + x^k. \quad (1.2)$$

Первые слагаемые в правых частях уравнений (1.1), (1.2) отвечают за амортизацию фондов, а вторые – пропорциональны инвестициям. Далее будем рассматривать уравнение (1.1) для нормированной стоимости фондов  $x(t) > 0$ , т. е. уравнение (1.2).

<sup>1</sup> Куликов Дмитрий Анатольевич, доцент кафедры дифференциальных уравнений, ФГБОУ ВО "Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова" (150003, Россия, г. Ярославль, ул. Советская, д. 14), кандидат физико-математических наук, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6307-0941>, kulikov\_d\_a@mail.ru

Дифференциальное уравнение (ДУ) (1.2) имеет единственное положительное состояние равновесия  $x(t) = 1$ , если  $k \neq 1$ . При  $k \in (0, 1)$  данное состояние равновесия глобально асимптотически устойчиво, т. е. все решения ДУ (1.2) с положительными начальными условиями стремятся к данному положению равновесия. Подчеркнем, что в приложениях к макроэкономике принято рассматривать вариант, когда  $k \in (0, 1)$ . Такого варианта выбора этого параметра и будем придерживаться в данной работе. Добавим, что при всех  $k : k \in (0, 1)$  или даже  $k \in (1, \infty)$ , ДУ (1.2) не может иметь периодических решений, т. е. данная математическая модель, особенно при  $k \in (0, 1)$ , не вполне адекватно описывает реальные экономические процессы, для которых, конечно, свойственна периоды подъемов и спадов. Характерность колебательной динамики для рыночной экономики отмечалась еще в работах экономистов XIX в. Д. Рикардо, А. Смита, К. Маркса и многих других. Следовательно, ДУ (1.2) нуждается в модификациях. Наиболее естественный способ основан на учете фактора запаздывания, характерного для экономических процессов (см., например, [5–8]) в условиях рыночной экономики.

В данной работе показано, что учет запаздывания в математической модели Солоу приводит к содержательному изменению динамики решений и, в частности, позволяет выявить диапазон основных параметров задачи, при которых существуют периодические решения. В работе было рассмотрено ДУ с отклоняющимся аргументом (с запаздыванием)

$$\dot{x} = -y + x^k, \quad k \in (0, 1), \quad (1.3)$$

где  $x = x(t) > 0, y = y(t) = x(t - h), h > 0$ , т. е. запаздывание введено в слагаемое, характеризующее амортизацию основных фондов. Такой вариант введения запаздывания вполне естественен, т. к. скорость убывания стоимости основных фондов скорее зависит от их стоимости в предшествующий период.

Если дополнить ДУ (1.3) начальным условием

$$x(t) = \varphi(t), \quad (1.4)$$

где заданная функция  $\varphi(t) \in C[-h, 0]$ , то задача Коши (1.3), (1.4) порождает по крайней мере локальный полупоток – динамическую систему. Поэтому для анализа поведения решений уравнения (1.3) можно и целесообразно использовать методы качественной теории ДУ с бесконечномерным фазовым пространством.

Подчеркнем, что уравнение (1.3) имеет состояние равновесия  $x(t) = 1$ . В следующем разделе изучим вопрос о его устойчивости. Перепишем уравнение (1.3) в следующем виде:

$$\dot{u} = -v + ku + \frac{k(k-1)}{2}u^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}u^3 + o(u^3), \quad (1.5)$$

который получается из ДУ (1.3) после замены  $x = 1 + u, y = 1 + v, u = u(t), v = v(t) = u(t - h)$  и использования формулы Тейлора.

Далее в работе будет рассмотрено уравнение (1.5) и прежде всего окрестность нулевого состояния равновесия ( $u = 0, v = 0$ ).

Добавим, что запаздывание можно ввести и иным образом. Например, рассмотреть следующее уравнение

$$\dot{x} = -x + y^k, \quad k \in (0, 1), \quad (1.6)$$

где  $x = x(t), y(t) = x(t - h)$ . Как и уравнения (1.2) и (1.3), оно имеет состояние равновесия  $x(t) = 1$ . Можно показать, что состояние равновесия  $x(t) = 0$  уравнения (1.6) остается устойчивым вне зависимости от выбора величины отклонения  $h > 0$  (см. раздел 2), а поэтому такой учет запаздывания не влияет существенным образом на экономическую динамику а, следовательно, изучение такой математической модели с экономической прикладной точки зрения нецелесообразно.

## 2. Линеаризованное уравнение

Рассмотрим вопрос об устойчивости нулевого состояния равновесия ДУ (1.5). Для этого необходимо рассмотреть линеаризованный вариант ДУ (1.5):

$$\dot{u} = -v + ku. \quad (2.1)$$

Известно [9–10], что вопрос об устойчивости решений линейного ДУ (2.1) может быть сведен к анализу следующего характеристического уравнения:

$$\lambda = -\exp(-\lambda h) + k. \quad (2.2)$$

При  $h = 0$  оно имеет корень  $\lambda = k - 1 < 0$ . Найдем  $\min h = H$ , при котором у уравнения (2.2) появятся корни с  $\operatorname{Re} \lambda = 0$ . При этом случай  $\lambda = 0$  не реализуем ни при одном  $h$ . Следовательно, критический случай в задаче об устойчивости может реализоваться следующим образом: при соответствующем значении  $h$  спектру устойчивости (множеству) корней характеристического уравнения (2.2) принадлежит пара чисто мнимых корней  $\pm i\sigma$ , где  $\sigma > 0$ . Соответствующие пары  $(h, \sigma)$  определяются как решения системы

$$0 = k - \cos \sigma h, \quad \sigma = \sin \sigma h.$$

Пусть  $\sigma h = \omega$  ( $h \neq 0$ ). Тогда  $\omega_m = \arccos k + 2\pi m$ ,  $h_m = \frac{\omega_m}{\sin \omega_m}$  или  $\omega_p = -\arccos k + 2\pi p$ ,  $h_p = \frac{\omega_p}{\sin \omega_p}$ , где  $m, p \in \mathbb{Z}$  – множеству целых чисел. Элементарный анализ двух последних равенств показывает, что наименьшее  $H = h > 0$  определяется равенством

$$H = \frac{\arccos k}{\sqrt{1 - k^2}} = \frac{a}{\sqrt{1 - k^2}}, \quad a = \arccos k.$$

При этом соответствующее  $\sigma = \sqrt{1 - k^2} > 0$ . Естественно, что при  $h = H$  существует сопряженный корень  $-i\sigma$ .

Покажем, что при увеличении  $h$ , т. е. при  $h > H$  корни  $\pm i\sigma$  характеристического уравнения переходят в правую полуплоскость. Для этого положим  $h = H(1 + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  достаточно малый параметр. При таких  $h = h(\varepsilon)$  получим характеристическое уравнение

$$\lambda(\varepsilon) = k - \exp(-\lambda(\varepsilon)(1 + \varepsilon)H).$$

Откуда следует, что

$$\lambda'_0 = \left. \frac{d\lambda(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \frac{i\sigma H(k - i\sigma)}{(1 - Hk) + iH\sigma}$$

и, следовательно,  $\operatorname{Re} \lambda'_0 = \frac{H\sigma^2}{(1 - Hk)^2 + H^2\sigma^2} > 0$ , т. е. при увеличении  $h$  ( $h > H$ ) корни  $\pm i\sigma$  переходят в правую полуплоскость:  $\operatorname{Re} \lambda > 0$ . Подчеркнем, что при малых  $\varepsilon$  остальные корни характеристического уравнения лежат в полуплоскости  $\operatorname{Re} \lambda \leq -\gamma_0 < 0$ , где величина  $\gamma_0$  не зависит от  $\varepsilon$ . Данное утверждение вытекает из результатов, изложенных в работах [10–11].

При рассмотрении второй версии модели с запаздыванием, т. е. уравнения (1.6), анализ устойчивости состояния равновесия приводит к аналогичному характеристическому уравнению:

$$\lambda = -1 + k \exp(-\lambda h), \quad k \in (0, 1).$$

При  $h = 0$  оно имеет один корень  $\lambda = -1 = k < 0$ . Нетрудно проверить, что последний вариант характеристического уравнения не может иметь корней, принадлежащих мнимой оси. Действительно, пусть  $\lambda = 0$ . Тогда получили бы равенство  $0 = -1 + k$ . Наконец, предположение о наличии чисто мнимых корней приводит нас к системе

$$\begin{cases} \cos \sigma h = \frac{1}{k}, \\ k \sin \sigma h = -\sigma, \left(\frac{1}{k} > 1\right), \end{cases}$$

не имеющей решения, т. к.  $\frac{1}{k} > 1$  по условию.

### 3. Периодические решения нелинейного уравнения

В ДУ (1.5) положим

$$t = \frac{H\Theta}{h(\varepsilon)}, \quad h(\varepsilon) = H(1 + \gamma\varepsilon), \quad \gamma \in R, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0), 0 < \varepsilon_0 \ll 1,$$

Где  $\Theta$  – новое, нормированное время. В результате такой замены времени перепишем ДУ (1.5) в виде

$$u' = (1 + \gamma\varepsilon)[-v + ku + \frac{k(k-1)}{2}u^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}u^3 + o(u^3)], \quad (3.1)$$

где  $u = u(\Theta)$ ,  $v = u(\Theta - H)$ , а штрихом обозначена производная по переменной  $\Theta$ , т. е. новому нормированному времени.

Уравнение (3.1) имеет в окрестности нулевого состояния равновесия двумерное гладкое инвариантное многообразие  $M_2(\varepsilon)$  [12–13]. При этом все решения уравнения (3.1) с течением времени приближаются к нему со скоростью экспоненты, если их начальные условия малы в смысле нормы фазового пространства решений. Напомним, что в нашем случае это  $C[-H, 0]$  ( $C[-H, 0]$  пространство непрерывных на  $[-H, 0]$  функций  $g(\Theta)$  с нормой  $\|g\| = \max_{\Theta \in [-H, 0]} |g(\Theta)|$ ), а динамика решений ДУ (1.5) восстанавливается после анализа системы двух обыкновенных ДУ нормальной формы (НФ). В рассматриваемом здесь случае НФ может быть записана в комплексной форме и имеет следующую структуру [6, 7]

$$z' = (\alpha + i\beta)z + (d + ic)z|z|^2 + o(\varepsilon), \quad (3.2)$$

где  $\alpha, \beta, d, c \in R$ . Данные коэффициенты зависят от параметров уравнения (3.1), т. е.  $k$  и  $h$ . могут быть выписаны в явном виде, что будет сделано ниже после реализации алгоритма построения определяющего уравнения (НФ). Для такой цели в настоящее время принято использовать адаптацию алгоритма Крылова-Боголюбова для бесконечномерных динамических систем [6–8]. В НФ (3.2)  $z = z(s)$  – комплексная функция  $s = \varepsilon\Theta, \varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ . Если считать, что априори  $d \neq 0$ , т. е. отлична от нуля первая ляпуновская величина, то решение уравнения (3.1) с начальными условиями из малой окрестности нулевого решения можно и целесообразно искать в следующем виде:

$$u(\Theta, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2}u_1(\Theta, z) + \varepsilon u_2(\Theta, z) + \varepsilon^{3/2}u_3(\Theta, z) + O(\varepsilon^2), \quad (3.3)$$

где  $u_1(\Theta, z) = z(s) \exp(i\sigma t) + \bar{z}(s) \exp(-i\sigma t)$ ;  $z(s)$  одно из решений НФ (см. п. 2). Достаточно гладкие функции  $u_2(\Theta, z), u_3(\Theta, z)$  по переменной  $\Theta$  имеют период  $2\pi/\sigma$  и, кроме

того,

$$M_{\pm}(u_m) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi/\sigma} u_m(\Theta, z) \exp(\pm i\sigma\Theta) d\Theta = 0$$

при  $m = 2, 3$  и любых рассматриваемых  $z(s)$ . Отметим, что  $v(\Theta, \varepsilon) = u(\Theta - H, \varepsilon)$ , а через  $O(\varepsilon^2)$  обозначена функция  $\psi(z, \bar{z}, \varepsilon)$ , для которой справедлива оценка

$$|\psi(z, \bar{z}, \varepsilon)| \leq M\varepsilon^2[|z| + |\bar{z}|], M > 0.$$

Подставим сумму (3.3) в ДУ (3.1) и приравняем коэффициенты при степенях  $\varepsilon, \varepsilon^{3/2}$ . В результате получим два линейных неоднородных ДУ с запаздыванием. Определим  $u_2(\Theta, z)$  из следующего уравнения:

$$\frac{\partial u_2}{\partial \Theta} + v_2 - ku_2 = \Phi_2(\Theta, z), \quad (3.4)$$

где  $\Phi_2(\Theta, z) = \frac{k(k-1)}{2}u_1^2, v_2 = u_2(\Theta - H, z)$ .

При формировании уравнения для  $u_3(\Theta, z)$  следует учесть, что  $\frac{d}{d\Theta}\psi(\Theta, s) = \frac{\partial\psi}{\partial\Theta} + \frac{\partial\psi}{\partial s}\varepsilon$ . Поэтому получим

$$\frac{\partial u_3}{\partial \Theta} + v_3 - ku_3 = \Phi_3(\Theta, z), \quad (3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi_3(\Theta, z) = & k(k-1)u_1u_2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{6}u_1^3 + \gamma[-v_1 + ku_1] + z'H \exp(-i\sigma H) \exp(i\sigma\Theta) + \\ & + \bar{z}'H \exp(i\sigma H) \exp(-i\sigma\Theta) - z' \exp(i\sigma\Theta) - \bar{z}' \exp(-i\sigma\Theta), \quad z = z(s), \quad z' = \frac{dz}{ds}. \end{aligned}$$

**З а м е ч а н и е 3.1** *Линейное неоднородное дифференциальное уравнение*

$$\frac{du}{d\Theta} + u(t - H) - ku = \Phi(\Theta),$$

где  $\Phi(\Theta)$  – периодическая функция переменного  $\Theta$  с периодом  $2\pi/\sigma$  имеет периодическое решение с тем же периодом, если

$$M_{\pm}(\Phi(\Theta)) = \frac{\sigma}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi(\Theta) \exp(\pm i\sigma\Theta) d\Theta = 0.$$

Равенства  $M_{\pm}(\Phi) = 0$  выделяют одно такое решение.

Отметим, что в нашем случае

$$\Phi_2(\Theta, z) = \frac{k(k-1)}{2}[z^2 \exp(2i\Theta) + 2|z|^2 + \bar{z}^2 \exp(-2i\Theta)].$$

Поэтому уравнение (2.4) разрешимо в классе  $2\pi/\sigma$  периодических функций по переменной  $\Theta$ , и соответствующее решение может быть записано в следующей форме:

$$u_2(\Theta, z) = \eta_2 z^2 \exp(2i\sigma\Theta) + \eta_0 |z|^2 + \bar{\eta}_2 \bar{z}^2 \exp(-2i\sigma\Theta),$$

где после подстановки в ДУ (3.4) стандартным образом можно найти, что

$$\eta_0 = -k, \eta_2 = \eta_{21} + i\eta_{22}, \eta_{21} = \frac{k(2k+1)}{2(5+4k)}, \eta_{22} = \frac{k\sqrt{1-k^2}}{5+4k}.$$

Перейдем к анализу ДУ (3.5). Из условий его разрешимости в классе  $2\pi/\sigma$  периодических по переменной  $\Theta$  функций получим, что для коэффициентов НФ (3.2) выполнены равенства

$$\alpha = \gamma \frac{(1-k^2)^{3/2}a}{Q}, \beta = \frac{1-k^2}{Q} \gamma (\sqrt{1-k^2} - ak), d = \frac{k(1-k^2)^{3/2}}{(5+4k)Q} [(k+5)\sqrt{1-k^2} - 6ak],$$

$$c = -\frac{k(1-k^2)^2}{(5+4k)Q(1+k)} [k\sqrt{1-k^2} + a(6k+5)], Q = (\sqrt{1-k^2} - ak)^2 + a^2(1-k^2) > 0.$$

В нашем случае  $a > 0$ . Сразу отметим, что знак  $\alpha$  совпадает со знаком  $\gamma$ , а знак ляпуновской величины  $d$  определяется знаком множителя  $\varphi(k) = (k+5)\sqrt{1-k^2} - 6ak$ , т. к. остальные множители в формуле для  $d$  заведомо положительны. Нетрудно убедиться, что  $\varphi(k) > 0$  при всех  $k \in (0, 1)$ . Очевидно, что  $\varphi(k) = \varphi(a) = (5 + \cos a) \sin a - 6a \cos a$ , где  $a = \arccos k$  ( $a \in (0, \pi/2)$ ). Знак  $\varphi(a)$  совпадает со знаком функции

$$\psi(a) = \frac{\varphi(a)}{\cos a} = 5 \operatorname{tg} a + \sin a - 6a.$$

При этом  $\psi(0) = 0$ , а  $\psi'(a) = \frac{5}{\cos^2 a} + \cos a - 6 > 0$  при всех  $a \in (0, \pi/2)$ . Так

$$\psi'(a) \geq \frac{1}{\cos^2 a} (5 + \cos^4 a - 6 \cos^2 a) = \frac{1}{\cos^2 a} (5 \sin^2 a - \sin^2 a \cos^2 a) > 0$$

при  $a \in (0, \pi/2)$ .

Перейдем к анализу НФ (3.2). Справедливо следующее утверждение.

**Л е м м а 3.1** ДУ (2.2) имеет автомодельное решение  $z(s) = \rho \exp(i\omega s)$ , если  $\alpha d < 0$ . Данное решение устойчиво (орбитально асимптотически устойчиво), если  $d < 0$ , и неустойчиво при  $d > 0$ . При этом  $\rho = \sqrt{-\alpha/d}$ , а  $\omega = \beta - \alpha/d$ .

В нашем случае  $d > 0$ . Поэтому периодическое решение существует, если  $\gamma < 0$ , т. е. при докритических значениях  $h$  ( $h < H$ ). Анализ НФ и результаты работ [6–9; 14] позволяют сформулировать основную теорему о существовании периодического решения у уравнения (3.1) (и, конечно, ДУ (1.5)) при соответствующем выборе параметров в данном уравнении).

**Т е о р е м а 3.1** Пусть  $k \in (0, 1 - \delta)$ ,  $\delta > 0$ . Существует такое  $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(\delta) > 0$ , что при всех  $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$  уравнение (3.1) имеет неустойчивый предельный цикл при  $h = (1 - \varepsilon)H$ . Для соответствующих периодических решений справедлива асимптотическая формула

$$u(\Theta, \varepsilon) = \varepsilon^{1/2} \rho [\exp(i(\sigma + \varepsilon\omega)\Theta + i\varphi_0) + \exp(-i(\sigma + \varepsilon\omega)\Theta - i\varphi_0)] +$$

$$+ \varepsilon \rho^2 [\eta \exp(2i(\sigma + \varepsilon\omega)\Theta + 2i\varphi_0) - k + \bar{\eta} \exp(-2i(\sigma + \varepsilon\omega)\Theta - 2i\varphi_0)] + o(\varepsilon).$$

где  $\varphi_0 \in R$ , постоянные  $\rho, \eta$  были указаны ранее.

Уместно отметить, что существование неустойчивого цикла гарантируется при  $k \in (0, 1 - \delta)$ . При  $k \rightarrow 1 - 0$  амплитуда  $\rho = \rho(k) \rightarrow \infty$ . Следовательно, случай  $k \rightarrow 1 - 0$



требует дополнительного изучения, тем более при таких  $k$  для  $\sigma = \sigma(k)$  также имеет место предельное равенство  $\lim_{k \rightarrow 1-0} \sigma(k) = 0$ .

Наконец, уравнение (1.2) имеет следующие периодические решения

$$x(t, \varepsilon) = 1 + u((1 - \varepsilon)t, \varepsilon).$$

Отметим, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u((1 - \varepsilon)t, \varepsilon) = 0$ . Следовательно, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  функция  $x(t, \varepsilon)$  близка к 1. Добавим, что в нашем случае все эти решения неустойчивы в смысле определения А. М. Ляпунова в форме фазового пространства решений соответствующих уравнений с запаздыванием.

## 4. Заключение

В работе показано, что учет фактора запаздывания приводит к потере устойчивости состояния равновесия как в модели спрос-предложение, так и в основной модели Солоу. При значениях бифуркационного параметра  $h$ , близких к критическому значению  $h = H$ , для данного варианта модели Солоу характерно жесткое возбуждение колебаний или, в иной терминологии, докритические бифуркации. Рассмотренный вариант модели Солоу с таким способом учета фактора запаздывания отличается от модели спрос-предложение, где учет фактора запаздывания приводит к устойчивому циклу, т. е. к послекритическим бифуркациям. Можно добавить, что в работах [5,15] рассматривались иные модификации модели Солоу, в том числе с учетом фактора запаздывания. В этих работах рассматривалась модель Солоу в виде системы ДУ, в которой учитывался фактор взаимодействия с окружающей средой с учетом влияния изменения численности работающих. В этих и других работах М. Ferrara, L. Guerini и др. запаздывание вводилось в функцию численности работающих и добавлялось второе уравнение (обобщенное логистическое, учитывающее запаздывание). Такой учет запаздывания характерен для задач математической экологии (см. [9;14]) и приводит к возникновению колебаний в динамической системе.

В данной статье предложен другой вариант: основное уравнение Солоу оставлено без изменений, и в функцию, отвечающую за амортизацию основных фондов, введено запаздывание. Подчеркнем, что классический вариант модели Солоу также не позволяет моделировать циклы, хотя модель Солоу была предложена именно для рыночной экономики, в рамках которой на величину инвестиций влияют в основном рыночные факторы: цена на оборудование, на иные фонды и др.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 18-01-00672.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. M. Solow, "A contribution to the theory of economic growth", *The Quarterly Journal of Economics*, **70:1** (1956), 65–94.
2. T. W. Swan, "Economic growth and capital accumulation", *Economic Record*, **32:2** (1956), 334–361.
3. W. B. Zhang, *Synergetic economics: time and change in nonlinear economics*, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 246 p.

4. T. Puu, *Nonlinear economic dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 287 p.
5. M. Ferrara, L. Guerini, R. Mavilla, “Modified neoclassical growth models with delay: a critical survey and perspectives”, *Applied Mathematical Sciences*, **7**:86 (2013), 4249-4239.
6. А. Н. Куликов, А. Д. Куликов, “Эффект запаздывания и экономические циклы”, *Таврический вестник информатики и математики*, 2015, № 2 (27), 87-100.
7. А. Н. Куликов, А. Д. Куликов, “Математическая модель рынка и эффект запаздывания”, *Математика в Ярославском университете*, Сборник обзорных статей к 40-летию математического факультета, **1**, 2016, 132-151.
8. D. A. Kulikov, “About a mathematical model of market”, *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series*, **788**:1 (2017), 6.
9. J. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 365 p.
10. R. Bellman, L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, London, 1963, 480 p.
11. V. L. Kharitonov, “On the determination of maximum admissible delay in a stabilization problem”, *Differ. Uravn.*, **18**:4 (1982), 723–724.
12. А. Н. Куликов, “О гладких инвариантных многообразиях полугруппы нелинейных операторов в банаховом пространстве”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, 1976, 67–85.
13. J. Guckenheimer, P. J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 462 p.
14. Ю. С. Колесов, “Математические модели экологии”, *Исследования по устойчивости и теории колебаний*, 1979, 3-40.
15. B. Carlo, L. Guerrini, “Existence of limit cycles in the Solow model with delayed-logistic population growth”, *The Scientific World Journal*, **2014** (2014), 8.

Поступила 9.04.2018

MSC2010 34K18,91B55

# Stability and local bifurcations of the Solow model with delay

© D. A. Kulikov <sup>1</sup>

**Abstract.** A mathematical model of macroeconomics, proposed by the Nobel Prize winner Solow, is considered. Its classical version has a single global attractor – a positive equilibrium state. In this paper a modification of this model with the delay effect is proposed. This leads to the need to study the dynamics of a differential equation with a deviating argument. For the corresponding equation in the paper, the question of stability and local bifurcations is studied. In particular, the possibility of subcritical bifurcations of cycles is shown. Asymptotic formulas are obtained for the corresponding periodic solutions. In the analysis of local bifurcations, such methods of the theory of dynamical systems as the method of invariant (integral) manifolds, the apparatus of the theory of normal forms of Poincaré-Dulac, and asymptotic methods of analysis are used.

**Key Words:** model of Solow, delay differential equation, stability, bifurcation, cycle, asymptotic formula.

## REFERENCES

1. R. M. Solow, “A contribution to the theory of economic growth”, *The Quarterly Journal of Economics*, **70:1** (1956), 65–94.
2. T. W. Swan, “Economic growth and capital accumulation”, *Economic Record*, **32:2** (1956), 334–361.
3. W. B. Zhang, *Synergetic economics: time and change in nonlinear economics*, Springer-Verlag, Berlin, 1991, 246 p.
4. T. Puu, *Nonlinear economic dynamics*, Springer-Verlag, Berlin, 1997, 287 p.
5. M. Ferrara, L. Guerini, R. Mavilla, “Modified neoclassical growth models with delay: a critical survey and perspectives”, *Applied Mathematical Sciences*, **7:86** (2013), 4249–4239.
6. A. N. Kulikov, D. A. Kulikov, “[The effect of delay and the economic cycles]”, *Taurida Journal of Computer Science Theory and Mathematics*, **2(27)** (2015), 87–100 (In Russ).
7. A. N. Kulikov, D. A. Kulikov, “[The mathematical model of the market and the effect of delay]”, *Mathematica v Yaroslavskom univ. Sbornik obsor. statey k 40-let. matem. faculteta*, **1** (2016), 132–151 (In Russ).
8. D. A. Kulikov, “About a mathematical model of market”, *IOP Conf. Series: Journal of Physics: Conference Series*, **788:1** (2017), 6.
9. J. Hale, *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, Berlin, 1977, 365 p.
10. R. Bellman, L. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, London, 1963, 480 p.

<sup>1</sup> **Dmitriy A. Kulikov**, Associate Professor, Department of Mathematics, Differential Equations, Demidov Yaroslavl State University (14 Sovetskaya Str., Yaroslavl 150003, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-6307-0941>, kulikov\_d\_a@mail.ru

11. V. L. Kharitonov, “On the determination of maximum admissible delay in a stabilization problem”, *Differentsialnye Uravneniya*, **18**:4 (1982), 723–724.
12. A. N. Kulikov, “[On smooth invariant manifolds of semigroups of nonlinear operators in a Banach space]”, *Issled. po Ustoichiv. i teorii kolebaniy. YarGU*, 1976, 67–85 (In Russ).
13. J. P. Guckenheimer, J. Holmes, *Nonlinear Oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, Springer-Verlag, Berlin, 1983, 462 p.
14. Yu. S. Kolesov, “[Mathematical models in ecology]”, *Issledovaniya po ustoichivost i teorii kolebaniy*, 1979, 3-40 (In Russ).
15. B. Carlo, L. Guerrini, “Existence of limit cycles in the Solow model with delayed-logistic population growth”, *The Scientific World Journal*, **2014** (2014), 8.

*Submitted 9.04.2018*

# Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском языке, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC 2010;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО - полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (только на русском);
- список литературы.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание

ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);

- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

**Ключевые слова** должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты - основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение — выводы и рекомендации.

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

**Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Перевод заглавия статьи на английский язык;
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- название книги (транслитерация);
- [Перевод названия книги в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;
- Количество страниц в издании (250 p.);
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmbib.sty.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте <http://translit.net/ru/bgn/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

*Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка, располагается за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru. ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка можно скачать из раздела Полезные материалы меню Для автора на сайте журнала.*

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX.**

## **Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**

### **Статьи в журналах на русском языке:**

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, "[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

### **Статьи в журналах на английском языке:**

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

### **Статьи в электронном журнале на русском языке:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

### **Статьи в сборниках на русском языке:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

### **Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

### **Материалы конференций на русском языке:**

A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand], *Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы программ" imeni E. V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem* [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E. V. Voskresensky with international participation] (Saransk, 12-15 July 2016), SVMO Publ., 105-107 (In Russ.)

P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative], *Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nyim uravneniyam i dinamicheskim sistemam"* [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"] (Saransk, 12-15 July 2016), 231-233 (In Russ.).

### **Диссертации на русском языке:**

P. A. Shamanaev, *Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya* [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [ PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.



# Правила верстки рукописей в системе LaTeX

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются два файла: файл-преамбула и файл-шаблон. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>.

Текст статьи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <Фамилия-ИО>.tex (который включается командой `\input` в файл-преамбулу). Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Для оформления заголовков статьи на русском и английском языках следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Команда `\headerRus` имеет следующие аргументы: {УДК} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова} {Название статьи на английском языке} {Автор(ы) на английском языке}

Команда `\headerEn` имеет следующие аргументы: {MSC 2010} {Название статьи} {Автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова}

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defn**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т. д.

Для вставок букв  $\phi$  и  $\epsilon$  необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул  $\Gamma_i$ ,  $\mathcal{D}_i$  в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\mathcal{D}}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень\_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

`\RBibitem{метка для ссылки на источник}`,

а англоязычная библиографическая ссылка — командой

`\Bibitem{метка для ссылки на источник}`.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmobib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок — 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

## Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References* с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

### Статьи в журналах на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib1}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the
form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by P. A. Shamanaev
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with
a the perturbation in the form of small linear term with delay]
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2016
\vol 18
\issue 3
\pages 61–69
\lang In Russ.
```

### Статьи в журналах на английском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib3}
\by M. J. Berger, J. Olinger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

### Статьи в электронном журнале на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib4}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with
nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

**Статьи в сборниках на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib5}  
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
\publaddr Ulyanovsk  
\publ UIGTU Publ.  
\yr 2014  
\serial 10  
\pages 4–13  
\lang In Russ.

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib6}  
\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy  
\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]  
\publaddr Moscow  
\publ Nauka Publ.  
\yr 1966  
\totalpages 576  
\lang In Russ.

**Материалы конференций на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib7}  
\by A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev  
\inbook [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand]  
\proc Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы программ" imeni E. V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E. V. Voskresensky with international participation]  
\procinfo Saransk, 12-15 July 2016  
\publ SVMO Publ.  
\pages 105–107  
\lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib8}  
\by P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov  
\inbook [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative]  
\proc Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam" [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"]  
\procinfo Suzdal, 8-12 July 2016  
\pages 231–233  
\lang In Russ.

**Диссертации на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib9}  
\by P. A. Shamanaev  
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]  
\thesisinfo Diss. ...kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]  
\publaddr Saransk  
\yr 1997  
\totalpages 145  
\lang In Russ.

## Алфавитный указатель

|                |     |                 |     |
|----------------|-----|-----------------|-----|
| Алексеев С. Н. | 132 | Куликов Д. А.   | 225 |
| Ахтямов А. М.  | 148 | Купцова С. Е.   | 175 |
| Баландин Д. В. | 215 | Куренков Е. Д.  | 159 |
| Гринес В. З.   | 159 | Платонова Л. Е. | 132 |
| Ежов Е. Н.     | 215 | Сироткин Д. В.  | 199 |
| Зараник У. П.  | 175 | Смолкин Г. А.   | 206 |
| Казаков А. О.  | 187 | Степенко Н. А.  | 175 |
| Козлов А. Д.   | 187 | Утяшев И. М.    | 148 |

Федотов И. А. 215

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

*Компьютерная верстка:* Атряхин В. А.  
*Корректурa:* Пудовкина Л. А., Язовцева О. С.  
*Перевод:* Сыромясов А. О.

Дата выхода в свет 30.06.2018. Цена свободная.

Подписано в печать 01.06.2018. Формат 70x108  $\frac{1}{16}$ . Объем 11,2 усл. печ.л.

Тираж 100 экз. Заказ № 869.

Типография Издательства Мордовского университета  
430005, г. Саранск, ул. Советская, 24



---

**Для заметок**

## Для заметок

