

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ
СРЕДНЕВОЛЖСКОГО
МАТЕМАТИЧЕСКОГО
ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Tom}}{\text{Vol.}}$ 19 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 3

2017

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 19, № 3. 2017

DOI 10.15507/2079-6900.19.201703

Издаётся с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900

**Zhurnal Srednevolzhskogo
Matematicheskogo Obshchestva**

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENTIFIC JOURNAL

VOL. 19, NO. 3. 2017

DOI 10.15507/2079-6900.19.201703

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-71362 от 17 октября 2017 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика, 01.02.00 Механика, 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управления.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH), а статьи, опубликованные в нем, приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (заключение президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских учёных – РИНЦ.

Подписка на журнал осуществляется в любом почтовом отделении связи на всей территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединённом каталоге «Пресс-са России» – 94016.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68).

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68)

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva
Middle Volga Mathematical Society Journal
Scientific Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-71362 of October 17 2017

Scientific peer-reviewed journal "Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva" publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- "Mathematics",
- "Applied Mathematics and Mechanics",
- "Mathematical modeling and computer science".

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics, 01.02.00 Mechanics, 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations – RISC.

One can subscript to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevikskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevikskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevikskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevikskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, Web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, доцент, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, руководитель научных исследований Малазийского института стратегических исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

Ахтямов Азамат Мухтарович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Петр Александрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Нижний Новгород, Россия)

Дерюгин Юрий Николаевич — старший научный сотрудник, доктор физико-математических наук, начальник научно-исследовательского отдела Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой теории управления Санкт-Петербургского государственного университета (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Казанского федерального университета (Казань, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — академик НАН РК, профессор, доктор физико-математических наук, генеральный директор Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики Казахского национального университета имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой высшей математики Санкт-Петербургского государственного университета (Санкт-Петербург, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры дифференциальных уравнений Московского авиационного института (Москва, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — профессор, доктор физико-математических наук, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Логинов Борис Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — профессор, доктор физико-математических наук, директор политехнического института Югорского государственного университета (Ханты-Мансийск, Россия)

Матус Петр Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета (Люблин, Польша)

Починка Ольга Витальевна — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая Школа Экономики» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика» Самарского государственного технического университета (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры прикладной математики Нижегородского государственного технического университета (Нижний Новгород, Россия)

Салахитдинов Махмуд Салахитдинович — академик Академии Наук Республики Узбекистан, профессор, доктор физико-математических наук, Институт математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Спивак Семен Израилевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой математического моделирования ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Терехин Михаил Тихонович — профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина» (Рязань, Россия)

Anca Veronica Ion — профессор Института Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Морозкин Николай Данилович — профессор, доктор физико-математических наук, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Сенин Петр Васильевич — профессор, доктор технических наук, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — профессор, доктор технических наук, первый проректор — проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Tishkin Vladimir Fedorovich — Editor in chief, corresponding member of RAS, full professor, Dr.Sci. (Phys.-Math.), deputy director of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Kuzmichev Nikolay Dmitrievich — Deputy editor, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Shamaev Pavel Anatolievich — Executive secretary, Associate Professor, PhD (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied mathematics, Differential equations and Theoretical mechanics of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Andreev Aleksandr Sergeevich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Information Security and Control Theory of the Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Alimov Shavkat Arifdjanovich — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

Akhtyamov Azamat Muhtarovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information technologies of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

Ayupov Shavkat Abdulaevich — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Director of Institute of Mathematics at the National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Boykov Ilya Vladimirovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of «Higher and Applied Mathematics» of the Penza State University (Penza, Russia)

Velmisov Petr Aleksandrovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department «Higher Mathematics» of the Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Gorbunov Vladimir Konstantinovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Economics and mathematical methods and information technologies of the Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Grines Vyacheslav Zigmundovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Fundamental Mathematics of the National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Derugin Yuriy Nikolaevich — senior researcher, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the research Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics of the Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Zhabko Aleksey Petrovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Control Theory of the Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Zhegalov Valentin Ivanovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation of the Kazan Federal University (Kazan, Russia)

Kalmenov Tynysbek Sharipovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Director of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Kamachkin Aleksandr Mikhaylovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of High Mathematics of the Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Kuznetsov Evgeny Borisovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Differential Equation of the Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Krizskii Vladimir Nikolaevich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Deputy Director for Research and Innovation of the Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Loginov Boris Vladimirovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of the Higher Mathematics of the Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk,

Russia)

Martynov Sergey Ivanovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Director of Polytechnic Institute of the Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

Matus Petr Pavlovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Pochinka Olga Vitalievna — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department of Fundamental Mathematics of the National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Radchenko Vladimir Pavlovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of the Department «Applied mathematics and informatics» of the Samara State Technical University (Samara, Russia)

Ryazantseva Irina Prokofievna — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical named for R. E. Alekseev of the University (Nizhny Novgorod, Russia)

Salahitdinov Mahmud Salahitdinovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics of the National University of Uzbekistan named for Mirzo Ulugbek (Tashkent, of Uzbekistan)

Spivak Semen Izrailevich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Head of Department of Mathematical Modelling of the Bashkir State University (Ufa, Russia)

Terekhin Mikhail Tikhonovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics of the Ryazan State University named for S. Yesenin (Ryazan, Russia)

Anca Veronica Ion — PhD in Mathematics, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics of the Romanian Academy, Buharest, Romania, Senior Researcher III

EDITORIAL COUNCIL

Morozkin Nikolay Danilovich — full professor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Senin Petr Vasilievich — full professor, Dr. Sci. (Engineering), Vice-rector for Science & Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Suharev Lev Alexandrovich — PhD (Phys.-Math.), Head of the Department of Algebra and Geometry of the National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Yarushkina Nadezda Glebovna — full professor, Dr. Sci. (Engineering), First Vice-Rector – Vice-Rector for Science of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

А. М. Ахтямов, Р. Ю. Галимов, А. В. Муфтахов	
Идентификация краевых условий на одном из концов отрезка	11
<hr/>	
С. И. Веселов	
О целых точках полиэдров двух типов	24
<hr/>	
В. Е. Круглов, Г. Н. Таланова	
О поверхностях, склеенных из $2n$ -угольников	31
<hr/>	
Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов, А. Р. Манапова	
Точность разностных схем для нелинейных эллиптических уравнений с неограниченной нелинейностью	41
<hr/>	
С. Н. Нагорных, Д. С. Саблюков	
Регуляризация обобщенных функций в алгебре сверточных операторов	53
<hr/>	
Г. А. Смолкин	
Об одной априорной оценке для эллиптического оператора второго порядка, вырождающегося вдоль оси координат, перпендикулярной к границе полуплоскости	64

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

К. В. Бухенский, А. Б. Дюбуа, А. Н. Конюхов, С. И. Кучерявый, С. Н. Машнина, А. С. Сафошкин	
Особенности решения интегро-дифференциальных уравнений Максвелла и возбуждения поверхности поляритона на планарной структуре	73
<hr/>	
Д. В. Иванов, А. В. Иванов, И. Л. Сандлер, Н. В. Чертыховцева	
Идентификация модели разогрева экструдера для полимеров	82

Contents

MATHEMATICS

A. M. Akhtyamov	
Identification of boundary conditions at one of the ends of a segment	11
 S. I. Veselov	
On integer points in two polyhedra	24
 V. E. Kruglov, G. N. Talanova	
On surfaces glued of $2n$ -gons	31
 F. V. Lubyshev, M. E. Fairuzov, A. R. Manapova	
Accuracy of difference schemes for nonlinear elliptic equations with non-restricted nonlinearity	41
 S. N. Nagornykh, D. S. Sablukov	
Regularization of generalized functions in convolution operator algebra.	53
 G. A. Smolkin	
About an a priori estimate for the second order elliptic operator degenerate along coordinate axis orthogonal to semi-plane boundary .	64

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

K. V. Bukhensky, A. B. Dubois, A. N. Konukhov, S. I. Kucheryavyy, S. N. Mashnina, A. S. Safoshkin	
Peculiarities of solving the integridifferential Maxwell equations and excitation of the surface polariton on the planar structure	73
 D. V. Ivanov, A. V. Ivanov, I. L. Sandler, N. V. Chertykovtseva	
Identification of the heating model plastic injection molding machines	82

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.19.201703.11-23

УДК 517.9

Идентификация краевых условий на одном из концов отрезка© А. М. Ахтямов¹, Р. Ю. Галимов² А. В. Муфтахов³

Аннотация. Рассматривается краевая задача на отрезке для дифференциального уравнения четвертого порядка. Краевые условия на одном из концов отрезка известны, а на другом неизвестны. Известны собственные значения краевой задачи. Требуется по собственным значениям спектральной задачи восстановить неизвестные краевые условия на одном из концов отрезка. В работе доказано четыре теоремы. Первые две теоремы являются алгебраическими. В них показано, что матрица может быть восстановлена с точностью до линейных преобразований строк по своим минорам максимального порядка. При этом для миноров должны выполняться условия согласования, которые называются соотношениями Плюккера. В двух других теоремах на основе первых двух теорем доказывается двойственность восстановления краевых условий. Третья теорема посвящена идентификации краевых условий по всему спектру собственных значений, а четвертая — идентификации краевых условий по конечному числу собственных значений. Показано, что для идентификации краевых условий достаточно использования четырех собственных значений. Приведены примеры решения задачи идентификации краевых условий.

Ключевые слова: краевые условия, обратная задача, собственные значения, дифференциальное уравнение четвертого порядка, соотношения Плюккера.

1. Введение

Рассмотрим следующую двухточечную краевую задачу с обыкновенным дифференциальным уравнением

$$y^{(4)}(x) = \lambda y(x) = s^4 y(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1.1)$$

порядка 4 и краевыми условиями

$$U_j(y) = \sum_{k=1}^4 a_{jk} y^{(k-1)}(0) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (1.2)$$

¹ Ахтямов Азамат Мухтарович, профессор кафедры математического моделирования, факультет математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет (450074, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), главный научный сотрудник, лаборатория механики твердого тела, Институт механики Уфимского НЦ РАН (450054, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, Проспект Октября, 71), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2080-6648>, akhtyamovam@mail.ru

² Галимов Рустам Юмадилович, аспирант кафедры математического моделирования, факультет математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет (450074, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0772-184X>, GalimovRY@mail.ru

³ Муфтахов Артур Вильевич, лектор кафедры математики Инженерного академического колледжа им. Сами Шамуна (77245, Израиль, г. Ашдод, ул. Жаботински, д. 84), Ph.D., ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6557-7201>, muftahov@yahoo.com

$$U_3(y) = y(1) = 0, \quad U_4(y) = y'(1) = 1. \quad (1.3)$$

Матрицу из коэффициентов краевых условий (1.2) обозначим через A :

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Через A_{ij} будем обозначать миноры матрицы A , составленные из ее i -го и j -го столбцов:

$$A_{ij} = \begin{vmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{vmatrix}.$$

Везде далее будем предполагать, что ранг матрицы A равен двум:

$$\text{rank } A = 2.$$

Настоящая статья посвящена восстановлению краевых условий (1.2) по собственным значениям задачи (1.1)–(1.3). Близкие обратные задачи рассматривались в [1-17]. Так, в работах [1, 2] обсуждались задачи идентификации пружинно-массовых систем с конечным числом степеней свободы по собственным частотам их колебаний. В теории обратных спектральных задач [3-5] восстанавливались как коэффициенты дифференциального уравнения, так и краевых условий. В качестве данных для восстановления краевых условий использовались, как правило, не один только спектр или его часть (как в предлагаемой вниманию статье), а несколько спектров или же другие дополнительные спектральные данные (например, спектральная функция, функция Вейля или так называемые весовые числа). К тому же, основной целью этих работ является восстановление коэффициентов в уравнении, а не в краевых условиях. В [1], [2], [6-11] восстанавливалась часть коэффициентов краевых условий или условий сопряжения. Первые систематические исследования по идентификации краевых условий начал в 90-х годах 20 века З.Б. Оганисян [12-14]. З. Б. Оганесяном исследовались несколько задач идентификации условий закрепления распределенных механических систем: задача идентификации краевых условий на обоих концах стержня [13], задача идентификации краевых условий круговой пластины [12], задача идентификации краевых условий прямоугольной пластины [14]. Однако, им восстанавливались лишь коэффициенты канонических условий закрепления. Случай, когда неизвестен вид канонических условий (т.е., когда неизвестны все коэффициенты краевых условий), им рассмотрен не был.

В [15-17] изучалась идентификация краевых условий, в которых неизвестны все их коэффициенты. Подобные задачи впервые начали изучаться авторами данной статьи и сводятся к идентификации (с точностью до линейных преобразований строк) матрицы из коэффициентов краевых условий по ее минорам. В [15-17] восстанавливалась не сама общая матрица краевых условий, а матрица, про которую заранее известно, что некоторые ее элементы равны нулю (например, элементы $a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{24}$ для матрицы (1.4)). К тому же, все эти работы имели преимущественно прикладной характер. Основной целью этих работ было восстановление видов закреплений стержней, пластин и трубопроводов по их звучанию или же создание таких закреплений, которые бы обеспечивали нужный (безопасный) спектр частот колебаний.

Цели настоящей статьи носят более фундаментальный характер. Первая цель — доказательство теорем восстановления общих краевых условий (необязательно имеющих механический смысл). Вторая цель — демонстрация связи задач алгебры и анализа, а именно задач восстановления краевых условий по собственным значениям и задач идентификации матриц по ее минорам.

2. Двойственность восстановления краевых условий по всем собственным значениям задачи

Далее будет показана двойственность восстановления краевых условий (1.2) по всем собственным значениям задачи (1.1)–(1.3). Доказательство опирается на теорему Адамара о целых функциях, из которой следует, в частности, что если две целые функции порядка меньше единицы имеют одинаковые нули, то они отличаются лишь ненулевым множителем. Отсюда будет вытекать, что существуют только два набора миноров, которые отличаются лишь ненулевым множителем, не зависящим от индексов. Для каждого из этих двух наборов миноров с точностью до линейных преобразований строк существует только одна матрица, имеющая такой набор миноров. Последнее доказывается с помощью теоремы 2.1, приводимой ниже.

Т е о р е м а 2.1. [18] Пусть ранг у матриц A , \tilde{A} размера (2×4) , максимальный, то есть $\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A} = 2$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) матрицу \tilde{A} можно получить из матрицы A с помощью невырожденного линейного преобразования строк;

2) миноры максимального порядка матриц A , \tilde{A} совпадают с точностью до ненулевого множителя, не зависящего от индексов.

Интересно, что не любой набор чисел A_{ij} , $1 \leq i < j \leq 4$, является набором миноров второго порядка некоторой матрицы A размера (2×4) и ранга 2. Для этого необходимо выполнение так называемого соотношения Плюккера.

Т е о р е м а 2.2. [18] (соотношение Плюккера) Для того, чтобы набор чисел A_{ij} , $1 \leq i < j \leq 4$, не все из которых равны нулю, являлся набором миноров второго порядка некоторой матрицы A размера (2×4) и ранга 2, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее соотношение, называемое соотношением Плюккера:

$$A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = 0. \quad (2.1)$$

Рассмотрим наряду с краевыми условиями (1.2) также и краевые условия

$$\tilde{U}_j(y) = \sum_{k=1}^4 \tilde{a}_{jk} y^{(k-1)}(0) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.2)$$

Соответствующую матрицу коэффициентов краевых условий (2.2) обозначим через \tilde{A} :

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Через \tilde{A}_{ij} будем обозначать миноры матрицы \tilde{A} , составленные из ее i -го и j -го столбцов:

$$\tilde{A}_{ij} = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{1i} & \tilde{a}_{1j} \\ \tilde{a}_{2i} & \tilde{a}_{2j} \end{vmatrix}.$$

Рассмотрим также и краевые условия

$$\tilde{U}_j(y) = \sum_{k=1}^4 \tilde{b}_{jk} y^{(k-1)}(0) = 0, \quad j = 1, 2. \quad (2.4)$$

Соответствующую матрицу коэффициентов краевых условий (2.4) обозначим через \tilde{B} :

$$\tilde{B} = \begin{vmatrix} \tilde{b}_{11} & \tilde{b}_{12} & \tilde{b}_{13} & \tilde{b}_{14} \\ \tilde{b}_{21} & \tilde{b}_{22} & \tilde{b}_{23} & \tilde{b}_{24} \end{vmatrix}. \quad (2.5)$$

Через \tilde{B}_{ij} будем обозначать миноры матрицы \tilde{B} , составленные из ее i -го и j -го столбцов:

$$\tilde{B}_{ij} = \begin{vmatrix} \tilde{b}_{1i} & \tilde{b}_{1j} \\ \tilde{b}_{2i} & \tilde{b}_{2j} \end{vmatrix}.$$

Определение 2.1. Краевые условия (2.2) и (2.4), а также их матрицы (2.3) и (2.5) будем называть смежными друг другу, если существует такое число $k \neq 0$, что

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{12} &= k\tilde{B}_{12}, & \tilde{A}_{13} &= k\tilde{B}_{13}, & \tilde{A}_{24} &= k\tilde{B}_{24}, & \tilde{A}_{34} &= k\tilde{B}_{34}, \\ \tilde{A}_{14} &= k\tilde{B}_{23}, & \tilde{A}_{23} &= k\tilde{B}_{14}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Теорема 2.3. (о двойственности решения). Пусть собственные значения краевых задач (1.1)–(1.3) и (1.1), (2.2), (1.3) совпадают: $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k$, а также выполнено условие $\text{rank } A = \text{rank } \tilde{A} = 2$. Тогда либо краевые условия (1.2) совпадают с краевыми условиями (2.2), т.е. матрицы A и \tilde{A} совпадают с точностью до линейных преобразований строк, либо краевые условия (1.2) совпадают со смежными краевыми условиями (2.4), т.е. матрицы A и \tilde{B} совпадают с точностью до линейных преобразований строк при условии, что для \tilde{B} и \tilde{A} выполняются условия (2.6).

Доказательство.

Спектральная задача (1.1)–(1.3) имеет следующий характеристический определитель $\Delta(\lambda)$:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_4(y_1) & U_4(y_2) & U_4(y_3) & U_4(y_4) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ y_1(1) & y_2(1) & y_3(1) & y_4(1) \\ y'_1(1) & y'_2(1) & y'_3(1) & y'_4(1) \end{vmatrix}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2}(\text{ch}(sx) + \cos(sx)), & y_2 &= \frac{1}{2s}(\text{sh}(sx) + \sin(sx)), \\ y_3 &= \frac{1}{2s^2}(\text{ch}(sx) - \cos(sx)), & y_4 &= \frac{1}{2s^3}(\text{sh}(sx) - \sin(sx)) \end{aligned}$$

есть линейно независимые решения уравнения (1.1), удовлетворяющие условию

$$y_j^{(r-1)}(0, \lambda) = \begin{cases} 0 \text{ при } j \neq r, \\ 1 \text{ при } j = r, \end{cases} \quad j, r = 1, 2, 3, 4.$$

Обозначим через A_1 и Z матрицы следующего вида:

$$A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

$$Z = \begin{vmatrix} y_1(0) & y'_1(0) & y''_1(0) & y'''_1(0) & y_1(1) & y'_1(1) & y''_1(1) & y'''_1(1) \\ y_2(0) & y'_2(0) & y''_2(0) & y'''_2(0) & y_2(1) & y'_2(1) & y''_2(1) & y'''_2(1) \\ y_3(0) & y'_3(0) & y''_3(0) & y'''_3(0) & y_3(1) & y'_3(1) & y''_3(1) & y'''_3(1) \\ y_4(0) & y'_4(0) & y''_4(0) & y'''_4(0) & y_4(1) & y'_4(1) & y''_4(1) & y'''_4(1) \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & y_1(1) & y'_1(1) & y''_1(1) & y'''_1(1) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_2(1) & y'_2(1) & y''_2(1) & y'''_2(1) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & y_3(1) & y'_3(1) & y''_3(1) & y'''_3(1) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y_4(1) & y'_4(1) & y''_4(1) & y'''_4(1) \end{vmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} y_1(1) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(s) + \cos(s)), & y'_1(1) &= \frac{1}{2} s (\operatorname{sh}(s) - \sin(s)), \\ y''_1(1) &= \frac{1}{2} s^2 (\operatorname{ch}(s) - \cos(s)), & y'''_1(1) &= \frac{1}{2} s^3 (\operatorname{sh}(s) + \sin(s)), \\ y_2(1) &= \frac{1}{2s} (\operatorname{sh}(s) + \sin(s)), & y'_2(1) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(s) + \cos(s)), \\ y''_2(1) &= \frac{1}{2} s (\operatorname{sh}(s) - \sin(s)), & y'''_2(1) &= \frac{1}{2} s^2 (\operatorname{sh}(s) - \cos(s)), \\ y_3(1) &= \frac{1}{2s^2} (\operatorname{sh}(s) - \cos(s)), & y'_3(1) &= \frac{1}{2s} (\operatorname{sh}(s) + \sin(s)), \\ y''_3(1) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(s) + \cos(s)), & y'''_3(1) &= \frac{1}{2} s (\operatorname{sh}(s) - \sin(s)), \\ y_4(1) &= \frac{1}{2s^3} (\operatorname{sh}(s) - \sin(s)), & y'_4(1) &= \frac{1}{2s^2} (\operatorname{ch}(s) - \cos(s)), \\ y''_4(1) &= \frac{1}{2s} (\operatorname{sh}(s) + \sin(s)), & y'''_4(1) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch}(s) + \cos(s)). \end{aligned}$$

С помощью матриц A_1 и Z определитель (2.7) можно представить следующим образом

$$\Delta(\lambda) \equiv \det(A_1 \cdot Z^T).$$

Разложив последний определитель с помощью формулы Бине-Коши [19], получим

$$\Delta(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < i_3 < i_4 \leq 4} M_{i_1, i_2, i_3, i_4} Z_{i_1, i_2, i_3, i_4}(\lambda) = 0. \quad (2.8)$$

Здесь через M_{i_1, i_2, i_3, i_4} обозначены миноры, составленные из i_1 -го, i_2 -го, i_3 -го, i_4 -го столбцов матрицы A_1 соответственно, а через Z_{i_1, i_2, i_3, i_4} обозначены миноры, составленные из i_1 -го, i_2 -го, i_3 -го, i_4 -го столбцов матрицы Z , или что то же самое, строк транспонированной матрицы Z^T .

С помощью миноров A_{ij} определитель (2.8) запишется в следующей форме:

$$\Delta(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} A_{i_1, i_2} S_{i_1, i_2}(\lambda), \quad (2.9)$$

где функции $S_{i_1, i_2}(\lambda)$ от λ (от s) при $\lambda \neq 0$ имеют следующий вид

$$\begin{aligned} S_{12}(\lambda) &= \frac{1}{2s^4} (1 - \operatorname{ch}(s) \cos(s)), \\ S_{13}(\lambda) &= \frac{1}{2s^3} (\operatorname{sh}(s) \cos(s) - \operatorname{ch}(s) \sin(s)), \\ S_{14}(\lambda) &= \frac{1}{2s^2} \operatorname{sh}(s) \sin(s), \\ S_{23}(\lambda) &= \frac{1}{2s^2} \operatorname{sh}(s) \sin(s), \\ S_{24}(\lambda) &= \frac{1}{2s} (-\operatorname{sh}(s) \cos(s) - \operatorname{ch}(s) \sin(s)), \\ S_{34}(\lambda) &= \frac{1}{2s} (1 + \operatorname{ch}(s) \cos(s)). \end{aligned}$$

Собственные значения задачи (1.1)–(1.3) являются корнями характеристического уравнения, которое имеет вид (2.9), причем алгебраическая кратность собственного значения совпадает с кратностью корня функции $\Delta(\lambda)$ [3].

Аналогично, собственные значения задачи (1.1), (2.2), (1.3) являются корнями

$$\tilde{\Delta}(\lambda) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} \tilde{A}_{i_1, i_2} S_{i_1, i_2}(\lambda). \quad (2.10)$$

Для определителя $\Delta(\lambda)$ имеют место следующие две возможности [3]:

- 1) $\Delta(\lambda) \equiv 0$, тогда каждое число λ есть собственное значение;
- 2) $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$, тогда существует не более счетного числа собственных значений, не имеющих предельных точек.

Первый случай для задачи (1.1)–(1.3) невозможен. Это следует из представления характеристического определителя (2.9). Из (2.9) следует также, что задача (1.1)–(1.3) не может иметь конечное число собственных значений.

Из вида функций $S_{i_1, i_2}(\lambda)$ в разложении (2.9) следует, что $\Delta(\lambda)$ является целой функцией порядка 1/4. Поэтому из теоремы Адамара о представлении целой функции с помощью своих корней следует, что

$$\Delta(\lambda) \equiv C \tilde{\Delta}(\lambda),$$

где C — некоторая ненулевая константа. Отсюда, а также из (2.9) и (2.10) получаем

$$\sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq 4} (A_{i_1, i_2} - C \tilde{A}_{i_1, i_2}) S_{i_1, i_2}(\lambda) \equiv 0. \quad (2.11)$$

Нетрудно заметить, что пять функций $S_{12}(\lambda)$, $S_{13}(\lambda)$, $S_{14}(\lambda) = S_{23}(\lambda)$, $S_{24}(\lambda)$ и $S_{34}(\lambda)$ из разложения (2.9) являются линейно независимыми. Отсюда и из (2.11) следует, что

$$\begin{aligned} A_{12} &= C \tilde{A}_{12}, & A_{13} &= C \tilde{A}_{13}, & A_{14} + A_{23} &= C (\tilde{A}_{14} + \tilde{A}_{23}), \\ A_{24} &= C \tilde{A}_{24}, & A_{34} &= C \tilde{A}_{34}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Для нахождения миноров A_{14} и A_{23} воспользуемся тем, что произвольные числа не могут быть минорами матрицы. Для того, чтобы числа A_{12} , A_{13} , A_{14} , A_{23} , A_{24} , A_{34} были минорами матрицы необходимо и достаточно, чтобы выполнялись так называемые соотношения Плюккера (см. теорему 2.2):

$$A_{12} A_{34} - A_{13} A_{24} + A_{14} A_{23} = 0, \quad (2.13)$$

$$\tilde{A}_{12} \tilde{A}_{34} - \tilde{A}_{13} \tilde{A}_{24} + \tilde{A}_{14} \tilde{A}_{23} = 0. \quad (2.14)$$

Из (2.12), (2.13) и (2.14) получаем два набора равенств

$$\begin{aligned} A_{12} &= C \tilde{A}_{12}, & A_{13} &= C \tilde{A}_{13}, & A_{24} &= C \tilde{A}_{24}, & A_{34} &= C \tilde{A}_{34}, \\ A_{14} &= C \tilde{A}_{14}, & A_{23} &= C \tilde{A}_{23}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} A_{12} &= C \tilde{A}_{12}, & A_{13} &= C \tilde{A}_{13}, & A_{24} &= C \tilde{A}_{24}, & A_{34} &= C \tilde{A}_{34}, \\ A_{14} &= C \tilde{A}_{23}, & A_{23} &= C \tilde{A}_{14}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Откуда либо краевые условия (1.2) совпадают с краевыми условиями (2.2), т.е. матрицы A и \tilde{A} совпадают с точностью до линейных преобразований строк, либо краевые условия (1.2) совпадают со смежными краевыми условиями (2.4), т.е. матрицы A и \tilde{B} совпадают с точностью до линейных преобразований строк при условии, что для \tilde{B} и \tilde{A} выполняются условия (2.6).

Выпишем матрицы \tilde{A} и смежную ей \tilde{B} по минорам A в явном виде.

1) Если $A_{12} \neq 0$, то мы можем получить матрицу \tilde{A} в виде

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \tilde{a}_{13} & \tilde{a}_{14} \\ 0 & 1 & \tilde{a}_{23} & \tilde{a}_{24} \end{array} \right\|.$$

Тогда $\tilde{A}_{12} = 1$ и согласно формуле (2.15) получим $C = \frac{1}{A_{12}}$. Отсюда $\tilde{a}_{13} = -\tilde{A}_{23} = -\frac{A_{23}}{A_{12}}$, $\tilde{a}_{14} = -\tilde{A}_{24} = -\frac{A_{24}}{A_{12}}$, $\tilde{a}_{23} = \tilde{A}_{13} = \frac{A_{13}}{A_{12}}$, $\tilde{a}_{24} = \tilde{A}_{14} = \frac{A_{14}}{A_{12}}$.

То есть

$$\left\| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & -\frac{A_{23}}{A_{12}} & -\frac{A_{24}}{A_{12}} \\ 0 & 1 & \frac{A_{13}}{A_{12}} & \frac{A_{14}}{A_{12}} \end{array} \right\|.$$

Но так как мы ищем матрицу \tilde{A} с точностью до невырожденного линейного преобразования строк, то, умножив обе строки этой матрицы на ненулевой множитель A_{12} , имеем

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{12} & 0 & -A_{23} & -A_{24} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{array} \right\|.$$

А поменяв местами A_{14} и A_{23} , найдем смежную матрицу

$$\tilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{12} & 0 & -A_{14} & -A_{24} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{23} \end{array} \right\|.$$

Непосредственными вычислениями получим, что

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{12} &= A_{12} A_{12}, & \tilde{A}_{13} &= A_{12} A_{13}, & \tilde{A}_{24} &= A_{12} A_{24}, & \tilde{A}_{34} &= A_{12} A_{34}, \\ \tilde{A}_{14} &= A_{12} A_{14}, & \tilde{A}_{23} &= A_{12} A_{23}, \end{aligned}$$

а также

$$\begin{aligned} \tilde{B}_{12} &= A_{12} A_{12}, & \tilde{B}_{13} &= A_{12} A_{13}, & \tilde{B}_{24} &= A_{12} A_{24}, & \tilde{B}_{34} &= A_{12} A_{34}, \\ \tilde{B}_{14} &= A_{12} A_{23}, & \tilde{B}_{23} &= A_{12} A_{14}. \end{aligned}$$

Это соответствует формулам (2.15),(2.16), если вместо первого множителя A_{12} подставить $\frac{1}{C}$.

Остальные случаи записываются аналогично.

2) Если $A_{13} \neq 0$, то

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{13} & A_{23} & 0 & -A_{34} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{array} \right\|, \quad \tilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{13} & A_{14} & 0 & -A_{34} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{23} \end{array} \right\|.$$

3) Если $A_{24} \neq 0$, то

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} \end{array} \right\|, \quad \tilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{23} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{12} & 0 & A_{14} & A_{24} \end{array} \right\|.$$

4) Если $A_{34} \neq 0$, то

$$\tilde{A} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 & A_{34} \end{array} \right\|, \quad \tilde{B} = \left\| \begin{array}{cccc} A_{23} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{13} & -A_{14} & 0 & A_{34} \end{array} \right\|.$$

5) Если $A_{14} \neq 0$, то

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{vmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{vmatrix} A_{13} & A_{14} & 0 & -A_{34} \\ -A_{12} & 0 & A_{14} & A_{24} \end{vmatrix}.$$

6) Если $A_{23} \neq 0$, то

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} A_{13} & A_{23} & 0 & -A_{34} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} \end{vmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{vmatrix} A_{23} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{23} \end{vmatrix}.$$

3. Двойственность восстановления краевых условий по четырем собственным значениям задачи

Теорема 3.1. Пусть $\text{rank } A = 2$, четыре собственных значения λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) задачи (1.1)–(1.3) удовлетворяют условию $\text{rank } F = 4$, где

$$F = \|S_{12}(\lambda_j), S_{13}(\lambda_j), S_{24}(\lambda_j), S_{34}(\lambda_j), S_{14}(\lambda_j)\|_{j=1,2,3,4},$$

тогда задача идентификации краевых условий по этим четырем собственным значениям имеет два решения. Причем миноры матрицы A находятся по следующим формулам

$$\begin{aligned} A_{12} &= F_{2345}, \\ A_{13} &= -F_{1345}, \\ A_{24} &= F_{1245}, \\ A_{34} &= -F_{1235}, \\ A_{14} &= \frac{1}{2}(F_{1234} \mp \sqrt{F_{1234}F_{1234} - 4F_{2345}F_{1235} + 4F_{1345}F_{1245}}), \\ A_{23} &= \frac{1}{2}(F_{1234} \pm \sqrt{F_{1234}F_{1234} - 4F_{2345}F_{1235} + 4F_{1345}F_{1245}}), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где F_{ijkl} – миноры матрицы F , составленные из ее i -го, j -го, k -го и l -го столбцов; а соответствующие матрицы A находятся с помощью этих миноров по следующим формулам:

- 1) если $A_{12} \neq 0$, то $A = \begin{vmatrix} A_{12} & 0 & -A_{23} & -A_{24} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{vmatrix};$
- 2) если $A_{13} \neq 0$, то $A = \begin{vmatrix} A_{13} & A_{23} & 0 & -A_{34} \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{vmatrix};$
- 3) если $A_{24} \neq 0$, то $A = \begin{vmatrix} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} \end{vmatrix};$
- 4) если $A_{34} \neq 0$, то $A = \begin{vmatrix} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 & A_{34} \end{vmatrix};$
- 5) если $A_{14} \neq 0$, то $A = \begin{vmatrix} A_{14} & A_{24} & A_{34} & 0 \\ 0 & A_{12} & A_{13} & A_{14} \end{vmatrix};$
- 6) если $A_{23} \neq 0$, то $A = \begin{vmatrix} A_{13} & A_{23} & 0 & -A_{34} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} & A_{24} \end{vmatrix}.$

Доказательство.

Четыре собственных значения λ_j ($j = 1, 2, 3, 4$) задачи L являются корнями функции (2.11). Следовательно, они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda_j) &= A_{12}S_{12}(\lambda_j) + A_{13}S_{13}(\lambda_j) + A_{24}S_{24}(\lambda_j) + \\ &+ A_{34}S_{34}(\lambda_j) + (A_{14} + A_{23})S_{14}(\lambda_j) = 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет единственное с точностью до ненулевого множителя решение:

$$\begin{aligned} A_{12} &= F_{2345}t, \quad A_{13} = -F_{1345}t, \quad A_{24} = F_{1245}t, \\ A_{34} &= -F_{1235}t, \quad (A_{14} + A_{23}) = F_{1234}t. \end{aligned}$$

Пусть $A_{23} = c$, тогда

$$\begin{aligned} A_{12} &= F_{2345} t, \quad A_{13} = -F_{1345} t, \quad A_{24} = F_{1245} t, \\ A_{34} &= -F_{1235} t \quad A_{14} = F_{1234} t - c. \quad A_{23} = c \end{aligned} \quad (3.2)$$

Из соотношений Плюккера имеем

$$0 = A_{12}A_{34} - A_{13}A_{24} + A_{14}A_{23} = -F_{2345}F_{1235}t^2 + F_{1345}F_{1245}t^2 + F_{1234}t \cdot c - c^2.$$

Решая квадратное уравнение относительно неизвестной c , имеем

$$c = \frac{1}{2}(F_5 \pm \sqrt{F_{1234}F_{1234} - 4F_{2345}F_{1235} + 4F_{1345}F_{1245}})t.$$

Подставив полученное c , а также $t = 1$ в (3.2), получим (3.1). Отсюда и из представлений для матриц \tilde{A} и \tilde{B} (см. выше) следует утверждение теоремы.

Пример 3.1. Рассмотрим спектральную задачу (1.1)–(1.3). Пусть четыре ее собственных значения равны $\lambda_1 = 1,997223$, $\lambda_2 = 5,147641$, $\lambda_3 = 8,211375$, $\lambda_4 = 11,29144$. Имеем

$$F = \begin{vmatrix} 0,08019321 & -0,3082798 & -0,4807437 & -0,2759807 & 0,4127170 \\ -0,02511372 & 0,4188344 & 4,0533856 & 18,63372 & -1,471618 \\ 0,07095227 & -2,139469 & -65,81141 & -321,5744 & 12,79132 \\ -0,3592985 & 17,36832 & 1179,806 & 5841,537 & -150,3001 \end{vmatrix}.$$

Т.к. $\text{rank } F = 4$, то мы можем применить теорему 4 и найти матрицу A . Вычислим согласно теореме 4 миноры матрицы F :

$$\begin{aligned} F_{2345} &= -416,6869, \quad F_{1345} = -83,33738, \quad F_{1245} = -138,8956, \\ F_{1235} &= -27,77913, \quad F_{1234} = 3,3179 \cdot 10^{-10}. \end{aligned}$$

Т.к. $F_{2345} \neq 0$, то с точностью до линейных преобразований имеем

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0,0000010 & -0,3333333 \\ 0 & 1 & -0,2000000 & 0,0000010 \end{vmatrix}.$$

Второе решение совпадает с первым. Если считать, что $0,0000010 \approx 0$ и $0,3333333 \approx \frac{1}{3}$, то искомые краевые условия (1.2), (1.3) имеют вид:

$$y'''(0) - 3y(0) = 0, \quad y''(0) - 5y'(0) = 0.$$

Физический смысл этих условий — упругое закрепление с вертикальной и вращательной пружинами (см. второе упругое закрепление [20], с. 153).

Заметим, что в [17] восстанавливалась матрица краевых условий вида

$$A_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 \end{vmatrix},$$

т.е. заранее предполагалось, что заранее известно равенство нулю определителей A_{14} и A_{23} . Было показано, что в этом случае матрица A_0 восстанавливается однозначно по трем собственным значениям $\lambda_1 = 1,997223$, $\lambda_2 = 5,147641$, $\lambda_3 = 8,211375$.

П р и м е р 3.2. Пусть четыре собственных значения спектральной задачи (1.1)–(1.3). равны $\lambda_1 = 2,119313$, $\lambda_2 = 4,918095$, $\lambda_3 = 7,988934$, $\lambda_4 = 11,09140$. Имеем

$$F = \begin{vmatrix} 0,07935780 & -0,3016374 & -0,3454111 & -0,6009212 & 0,3897136 \\ -0,01108129 & 0,3400282 & 5,385060 & 7,483029 & -1,383472 \\ 0,02446689 & -1,6268584 & -79,00599 & -98,66302 & 11,44314 \\ -0,1036594 & 13,11523 & 1330,458 & 1569,751 & -132,7102 \end{vmatrix}.$$

Т.к. $\text{rank } F = 4$, то мы можем применить теорему 4 и найти матрицу A . Вычислим согласно теореме 4 миноры матрицы F :

$$\begin{aligned} F_{2345} &= 25,00860, & F_{1345} &= -50,01719, & F_{1245} &= -25,00860, \\ F_{1235} &= 25,00860, & F_{1234} &= 50,01719. \end{aligned}$$

Т.к. $F_{2345} \neq 0$, то с точностью до линейных преобразований имеем

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

Второе решение не совпадает с первым. В данном примере задача отыскания краевых условий (1.2), (1.3) имеет два решения:

$$y(0) + y''(0) + y'''(0) = 0, \quad y'(0) + 2y''(0) + 3y'''(0) = 0$$

или

$$y(0) + y''(0) - 3y'''(0) = 0, \quad y'(0) + 2y''(0) - y'''(0) = 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Г. М. Л. Гладвелл, *Обратные задачи теории колебаний*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, М.; Ижевск, 2008, 608 с.
- М. Т. Chu, G. H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*, University Press, Oxford, 2005, 000 с.
- М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969, 526 с.
- В. А. Марченко, *Операторы Штурма-Лиувилля и их приложения*, Наукова думка, Киев, 1977, 332 с.
- Б. М. Левитан, *Обратные задачи Штурма-Лиувилля*, Наука, М., 1984, 240 с.
- А. О. Ватульян, *Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела*, Физматлит, М., 2007, 224 с.
- А. О. Ватульян, А. В. Осипов, “Об одном подходе при определении параметров дефекта в балке.”, *Дефектоскопия*, 2014, № 11, 37-47.
- E. I. Shifrin, R. Ruotolo, “Natural frequencies of a beam with an arbitrary number of cracks.”, *Journal of Sound and Vibration*, 222:3 (1999), 409–423.

9. E.I. Shifrin, “Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **70–71** (2016), 613–624.
10. М. А. Ильгамов, А. Г. Хакимов, “Диагностика повреждений консольной балки с надрезом”, *Дефектоскопия.*, **6** (2009), 83–89.
11. М. А. Ильгамов, А. Г. Хакимов, “Диагностика закрепления и повреждений балки на упругих опорах”, *Контроль. Дефектоскопия.*, **9** (2010), 57–63.
12. В. Ц. Гнуни, З. Б. Оганисян, “Определение граничных условий круглой кольцевой пластинки по заданным частотам собственных колебаний”, *Известия НАН РА, серия «Механика».*, **44:5** (1991), 9–16.
13. З. Б. Оганисян, “Об одной задаче восстановления граничных условий на концах стержня при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний”, *«Вопросы оптимального управления, устойчивости и прочности механических систем» (научные труды конференции)*, Ереван, 1997, 159–162.
14. З. Б. Оганисян, “Об одной задаче восстановления граничных условий на краях пластинки при заданном спектре частот собственных поперечных колебаний”, *Ученные записки ЕГУ.*, 1991, № 1, 45–50.
15. A. M. Akhtyamov, A. V. Mouftakhov, “Identification of boundary conditions using natural frequencies”, *Inverse Problems in Science and Engineering.*, **12:4** (2004), 393–408.
16. А. М. Ахтямов, А. В. Муфтахов, “Корректность по Тихонову задачи идентификации закреплений механических систем”, *Сибирский журнал индустриальной математики.*, **25:4(52)** (2012), 24–37.
17. А. А. Аитбаева, А. М. Ахтямов, “Об однозначности определения вида краевых условий на одном из концов стержня по трем собственным частотам его колебаний”, *Прикладная математика и механика.*, **80:3** (2016), 388–394.
18. A. V. Mouftakhov, “On the Reconstruction of the Matrix from its Minors”, *arXiv:math/0603657*, 2006.
19. П. Ланкастер, *Теория матриц*, Наука, М., 1982, 272 с.
20. Вибрации в технике: Справочник. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина, Машиностроение, М., 1978, 352 с.

Поступила 5.10.2017

MSC2010 34B09, 34A55

Identification of boundary conditions at one of the ends of a segment

© A. M. Akhtyamov⁴, R. Y. Galimov⁵, A. V. Mouftakhov⁶

Abstract. We consider a boundary value problem on an interval for a fourth-order differential equation. The boundary conditions at one end of the segment are known, but at the other end of the segment they are unknown. The eigenvalues of the boundary value problem are known as well. The problem is to reconstruct the unknown boundary conditions at one of the ends of the segment. Four theorems are proved in the paper. The first two theorems are algebraic. They show that the matrix can be reconstructed accurate within linear transformations of rows with respect to its minors of maximal order. In this case, the matching conditions (so called Plucker relations) must be satisfied for the minors. In two other theorems, on the basis of the first two theorems, we prove the duality of the reconstruction of boundary conditions. The third theorem is devoted to the identification of boundary conditions by the entire spectrum of eigenvalues, and the fourth is to identify boundary conditions with respect to a finite number of eigenvalues. It is shown that it is sufficient to use four eigenvalues to identify the boundary conditions. Examples of the identification problem's solution are given.

Key Words: boundary conditions, inverse problem, eigenvalues, differential equation of the fourth order, Plucker relations

REFERENCES

1. G. M. L. Gradwell, *Obratnye zadachi teorii kolebanij [Inverse Problems in Vibration]*, NIC Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika, Institut komp'yuternyh issledovanij, M.; Ishevsk, 2008 (In Russ.), 608 p.
2. M. T. Chu, G. H. Golub, *Inverse Eigenvalue Problems: Theory, Algorithms, and Applications*, University Press, Oxford, 2005.
3. M. A. Naymark, *Linejnye differencial'nye operatory [Linear differential operators]*, Nauka, M., 1969 (In Russ.), 526 p.
4. V. A. Marchenko, *Operatory Shturma-Liuvillya i ikh prilozheniya [The operators of the Sturm-Liouville problem and their applications]*, Naukova dumka, Kiev, 1977 (In Russ.), 332 p.
5. B. M. Levitan, *Obratnye zadachi Shturma-Liuvillya [The inverse Sturm-Liouville problem]*, Nauka, M., 1984 (In Russ.), 240 p.

⁴ **Azamat M. Akhtyamov**, Professor, Department of Math Modeling, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Baskir State University (32 Zaki Validi Str., Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia), Chief Researcher, Laboratory of Solid Mechanics, Institute of Mechanics, Ufa Scientific Center of RAS (71 Prospect Oktyabrya, Ufa 450054, Republic of Bashkortostan, Russia), D.Sc. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2080-6648>, akhtyamovam@mail.ru

⁵ **Rustam Y. Galimov**, Graduate student, Department of Math Modeling, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Baskir State University (32 Zaki Validi Str., Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0772-184X>, GalimovRY@mail.ru

⁶ **Artur V. Mouftakhov** Lector, Department of Mathematics, Sami Shamoon Engineering College, (84 Jabotinsky Str., Ashdod 77245, Israel), Ph.D., ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6557-7201>, muftahov@yahoo.com

6. A. O. Vatul'yan, *Obratnye zadachi v mekhanike deformiruemogo tverdogo tela [Inverse problems in solid mechanics]*, Fizmatlit, M., 2007 (In Russ.), 224 p.
7. A. O. Vatul'yan, A. V. Osipov, “[About one approach to determine the parameters of the defect in the beam]”, *Defektoskopiya*, **11** (2014), 37-47 (In Russ.).
8. E. I. Shifrin, “Identification of a finite number of small cracks in a rod using natural frequencies”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, **70–71** (2016), 613–624.
9. M. A. Il'gamov, A. G. Hakimov, “[Diagnosis of injuries of the cantilever beam with notch]”, *Defektoskopiya.*, **6** (2009), 83-89 (In Russ.).
10. M. A. Il'gamov, A. G. Hakimov, “[Diagnosis of fastening and damage beams on elastic supports]”, *Kontrol'. Defektoskopiya.*, **9** (2010), 57–63 (In Russ.).
11. V. C. Gnuni, Z. B. Organisyan, “[The definition of boundary conditions of circular ring plates on the set frequencies of own fluctuations]”, *Izvestiya NAN RA, seriya "Mekhanika".*, **44**:5 (1991), 9-16 (In Russ.).
12. Z. B. Organisyan, “[On one problem of reconstruction of boundary conditions on the ends of the rod at a predetermined range of frequencies of own fluctuations of cross]”, *Voprosy optimal'nogo upravleniya, ustojchivosti i prochnosti mekhanicheskikh sistem (nauchnye trudy konferencii) [Questions of optimal control, stability and strength of mechanical systems (scientific conference proceedings)]* (Erevan), 1997, 159-162 (In Russ.).
13. Z. B. Organisyan, “[On one problem of reconstruction of boundary conditions on the edges of the plate at a given spectrum of frequencies of own fluctuations of cross]”, *Uchenye zapiski EGU.*, **1** (1991), 45-50 (In Russ.).
14. A. M. Akhtyamov, A. V. Mouftakhov, “Identification of boundary conditions using natural frequencies”, *Inverse Problems in Science and Engineering.*, **12**:4 (2004), 393–408.
15. A. M. Ahtyamov, A. V. Muftahov, “[The correctness according to Tikhonov identification problem of fixing mechanical systems]”, *Sibirskij zhurnal industrial'noj matematiki.*, **25**:4(52) (2012), 24-37 (In Russ.).
16. A. A. Aitbaeva, A. M. Ahtyamov, “[On uniqueness of determination of the type of boundary conditions at one end of the rod at the three natural frequencies of oscillation]”, *Prikladnaya matematika i mekhanika.*, **80**:3 (2016), 388-394 (In Russ.).
17. A. V. Mouftakhov, “On the Reconstruction of the Matrix from its Minors”, *arXiv:math/0603657*, 2006.
18. P. Lancaster, *Teoriya matric [Theory of matrices]*, nauka, M., 1982 (In Russ.), 272 p.
19. *Vibracii v tekhnike: Spravochnik. T. 1. Kolebaniya linejnyh sistem / Pod red. V. V. Bolotina [Vibration in engineering: Handbook. V. 1. Vibrations of linear systems / ed. by V. V. Bolotin]*, Mashinostroenie, M., 1978, 352 p.

Submitted 5.10.2017

УДК 519.854.3

О целых точках полиэдров двух типов

© С. И. Веселов¹

Аннотация. В статье изучаются выпуклые оболочки целых точек полиэдров двух типов: выпуклых конусов, состоящих из решений однородных систем линейных неравенств с унимодулярными матрицами коэффициентов, и полиэдров, заданных системами неравенств с бимодулярными матрицами коэффициентов при неизвестных. Для полиэдров первого типа установлено, что их базис Гильберта состоит из оставных векторов конуса и имеет унимодулярную триангуляцию. Доказано также, что целочисленное расстояние от фасет выпуклой оболочки ненулевых целых точек этого конуса до его вершины равно 1. Отсюда выводится равенство единице ранга Хватала для полиэдров, полученных из конуса удалением его вершины. В классе полиэдров второго типа найдено ограничение на матрицу коэффициентов при неизвестных, при выполнении которого ранг Хватала равен единице.

Ключевые слова: базис Гильберта, унимодулярная триангуляция, выпуклая оболочка целых точек, фасеты целочисленного полиэдра, ранг Хватала.

1. Введение

Терминология этой статьи соответствует принятой в монографиях [1],[2].

Символ, обозначающий матрицу, будет обозначать также множество ее столбцов. A^T - транспонированная матрица.

Матрица $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ называется *унимодулярной*, если выполняется одно из условий:

1. $\text{rank } A = n$ и модуль любого базисного минора равен 1

2. $\text{rank } A = m$ и наибольший общий делитель базисных миноров равен 1.

Векторным произведением n - мерных векторов-столбцов a_1, a_2, \dots, a_{n-1} называется вектор $(\alpha_1, -\alpha_2, \dots, (-1)^{k-1}\alpha_k, \dots, (-1)^{n-1}\alpha_n)^T$, где α_i - определитель матрицы, полученной из $(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$ удалением i - й строки.

$\text{conv}(M) = \{tm_1 + (1-t)m_2 \mid m_1, m_2 \in M, 0 \leq t \leq 1\}$ - выпуклая оболочка множества $M \subset \mathbb{R}^n$.

Гиперплоскость $a^T x = a_0$ называется *опорной* к выпуклому множеству M , если все его точки расположены по одну сторону от гиперплоскости и $M \cap \{x \mid a^T x = 1\} \neq \emptyset$. Последнее множество называется *гранью* M . Грань наибольшей размерности называется *фасетой*.

Выпуклым конусом называется множество векторов, замкнутое относительно сложения векторов и умножения вектора на рациональное число. С каждым набором векторов $u_1, \dots, u_m \in \mathbf{R}^n$ связана пара *двойственных* друг другу *полиэдральных* выпуклых конусов $(u_1, \dots, u_m)^* = \{x \in \mathbf{R}^n \mid u_i^T x \geq 0 \ i = 1, \dots, m\}$ и $\text{cone}(u_1, \dots, u_m) = \{t_1 u_1 + \dots + t_m u_m \mid t_i \geq 0, t_i \in \mathbf{R} (i = 1, \dots, m)\}$. Векторы u_1, \dots, u_m называются *порождающими* для второго конуса. *Остовом* называется минимальное множество порождающих векторов. Конус называется *симплексиальным*, если число векторов в остеце равно размерности пространства.

¹ Веселов Сергей Иванович, доцент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, ФГБОУ ВО "ННГУ им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2737-5876>, sergey.veselov@itmm.unn.ru

Конус $cone U$, порожденный столбцами унимодулярной матрицы U , назовем *унимодулярным*.

Для выпуклого полиэдрального конуса $K \subset \mathbb{R}^n$ *полиэдром Клейна* называется $K_Z = conv(K \cap \mathbb{Z}^n \setminus 0)$ (см., например, [3],[4]). *Парусом* называется граница K_Z . *Приведенным парусом* называется объединение граней, не являющихся гранями для K .

Целочисленным расстоянием от точки y с целыми координатами до гиперплоскости, заданной уравнением $a^T x = a_0$ с несократимыми целыми коэффициентами и содержащей целую точку, называется величина $|a^T y - a_0|$. Целочисленное расстояние от точки до фасеты по определению равно расстоянию до гиперплоскости, содержащей фасету.

Базисом Гильберта конуса K называется минимальное порождающее множество аддитивной полугруппы $K \cap \mathbb{Z}^n$.

В [3] доказано, что базис Гильберта симплексиального конуса в \mathbb{R}^3 состоит из всех целых точек, принадлежащих его приведенному парусу тогда и только тогда, когда целочисленное расстояние от вершины конуса до каждой фасеты приведенного паруса равно 1.

В [4] доказано, что если базис Гильберта симплексиального конуса в \mathbb{R}^4 состоит из всех целых точек, принадлежащих его приведенному парусу, то равно 1 целочисленное расстояние от вершины конуса до каждой фасеты приведенного паруса, а обратное, вообще говоря, неверно. Там же показано, что в \mathbb{R}^5 предложение верно не для каждого конуса.

В [5] показано что Гильбертов базис конуса, порожденного векторами

$$a_1 = (1, 0, 0, 0)^T, a_2 = (0, 1, 0, 0)^T, a_3 = (0, 0, 1, 0)^T, a_4 = (1, 3, 4, 7)^T,$$

состоит из векторов

$$a_1, a_2, a_3, a_4, (1, 1, 1, 1)^T, (1, 1, 2, 2)^T, (1, 3, 3, 5)^T, (1, 3, 4, 6)^T$$

и не имеет унимодулярной триангуляции.

В настоящей статье для конуса K двойственного к унимодулярному доказано, что его базис Гильберта имеет унимодулярную триангуляцию, является оством и целочисленное расстояние от вершины конуса до любой фасеты приведенного паруса полиэдра K_Z равно 1.

Пусть P - полиэдр, $P_Z = conv(P \cap \mathbb{Z}^n)$, $c \in \mathbb{Z}^n$ и гиперплоскость $c^T x = c'$, не содержащая точек из P_Z , является опорной к полиэдру P . Неравенство $c^T x \leq \lfloor c' \rfloor$ называется *правильным отсечением* или *отсечением Гомори-Хватала*.

Округлением полиэдра P называется его подмножество P' , состоящее из точек, удовлетворяющих каждомуциальному правильному отсечению для P . Полагаем по определению $P^{(1)} = P'$, $P^{(k)} = (P^{(k-1)})'$ ($k \geq 2$).

Минимальное k , при котором $P^{(k)} = P_Z$ называется *рангом Хватала* полиэдра P . Максимум среди рангов Хватала полиэдров $\{x : Ax \geq b\}$, при всевозможных b называется рангом Хватала матрицы A .

Ранг Хватала является важной характеристикой неявно заданных целых полиэдров, т.е. выпуклых оболочек точек с целыми координатами, содержащихся внутри других полиэдров, заданных известными системами линейных неравенств. Изучению ранга Хватала посвящены, например, статьи [6],[7],[8],[9], [10]. Цель исследований в этом направлении - вычисление или получение верхних и нижних оценок ранга Хватала для полиэдров специального вида.

В настоящей статье описан подкласс класса бимодулярных матриц, для которых ранг Хватала равен 1.

2. Свойства конуса двойственного к унимодулярному

Пусть $U \in \mathbb{Z}^{n \times m}$ - унимодулярная матрица, каждый столбец которой принадлежит оству конуса $\text{cone } U$. Отметим, что U^* не обязательно унимодулярен. Например, при $n \geq 4$ не является унимодулярным конус

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in R^n \mid x_i \geq 0, -x_i + x_n \geq 0, i = 1, 2, \dots, n-1\},$$

поскольку остав этого конуса состоит из всех векторов множества $\{0, 1\}^n$, у которых первая координата равна 1 и определитель матрицы из векторов

$$(1, 0, 0, \dots, 0)^T, (1, 0, 1, 1, \dots, 1, 1)^T, (1, 1, 0, 1, \dots, 1, 1)^T, \dots, (1, 1, 1, 1, \dots, 1, 0)^T$$

равен $(-1)^n(n-2)$.

Хорошо известно, что остав конуса U^* можно выбрать среди векторных произведений столбцов матрицы U . Обозначим остав символом V . Нетрудно видеть, что $U^T v \in \{0, 1\}^m$ для всякого $v \in V$.

Теорема 2.1. *V имеет унимодулярную триангуляцию и является базисом Гильберта конуса U^* .*

Доказательство. Пусть $v \in V$ и F_1, F_2, \dots, F_s - полный список фасет, не содержащих v . Нетрудно видеть, что справедливо равенство

$$U^* = \bigcup_i \text{cone}(F_i, v).$$

Рассмотрим произвольный вектор $h \in U_Z^*$. Найдется i такое, что $h \in \text{cone}(F_i, v)$. Предположим, что фасета F_i содержится в гиперплоскости $u^T x = 0$, где u столбец матрицы U . Так как $u^T v = 1$, то Z^n покрывается семейством гиперплоскостей $F_i, F_i \pm v, F_i \pm 2v, \dots$. Таким образом, $h = kv + h'$, где k некоторое положительное целое число и $h' \in F_i$. Далее можно воспользоваться индукцией по размерности.

Доказательство заканчено.

Пусть $P(U) = \text{conv}\{x \in \mathbb{Z}^n \mid U^T x \geq 0, U^T x \neq 0\}$ и гиперплоскость $\pi^T x = \pi_0$ содержит фасету f полиэдра M . Так как линейная форма $\pi^T x$ ограничена снизу на $P(U)$, то, согласно теореме Минковского-Фаркаша, $\pi^T x \geq 0$, следовательно, $\pi_0 \geq 0$. Если $\pi_0 = 0$, то f является также фасетой U^* , поэтому определяется одним из неравенств системы $Ux \geq 0$. Если $\pi_0 > 0$, то можно поделить неравенство на π_0 , поэтому считаем, что f принадлежит гиперплоскости $\pi^T x \geq 1$.

Теорема 2.2. *Если $\pi^T x = 1$ опорная плоскость некоторой фасеты для $P(U)$, то существует $U' \subseteq U$ такое, что $\pi = \sum_{u \in U'} u$.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Случай 1. $\text{rank } U = m$. Хорошо известно, что существует унимодулярная матрица $T \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ такая, что $UT = (E_m | O)$, где $O \in \mathbb{Z}^{m \times (n-m)}$ матрица из нулей, а у матрицы $E_m \in \mathbb{Z}^{m \times m}$ равны нулю все элементы, кроме единиц на главной диагонали. Если $m = n$, то $UT = E_m$, т.е. $T = U^{-1}$. Формула $x = Ty$ устанавливает изоморфизм между $P(U)$ и $P(E_m)$. Обозначим символом $\mathbf{1}_m$ строку из m единиц. Очевидно, что $\mathbf{1}_m(E_m | O)y = 1$ опорная плоскость единственной фасеты для $P(E)$, следовательно, $\mathbf{1}_m(E | O)T^{-1}x = \mathbf{1}_m Ux = 1$ опорная плоскость единственной фасеты для $P(U)$, т.е. $U' = U$.

Случай 2. $\text{rank } U = n < m$. Пусть u произвольный столбец в U , $V \subseteq \text{vert}(P(U))$ подмножество из n линейно независимых вершин, принадлежащих $\pi^T x = 1$. Очевидно, что существует непустое подмножество $V_u \subset V$ вершин, принадлежащих плоскости $u^T x = 1$. Из этого следует, что $\min\{\pi^T x \mid u^T x \geq 1, U^T x \geq 0\} = 1$. Согласно теореме двойственности линейного программирования, имеем $\max\{t_u \mid \pi = \sum_{w \in U} t_w w, t_w \geq 0 (w \in U)\} = 1$.

Таким образом, $\pi = u + \sum_{w \in W} t_w w$, $t_w > 0 (w \in W)$, где $W \subseteq U$.

Пусть U_1 множество всех столбцов матрицы U , которые удовлетворяют системе $V_u^T y = 0$, и пусть $U_2 = U \setminus U_1$. Очевидно, что $W \subseteq U_1$.

Положим $\pi' = \pi - u$ и рассмотрим полиэдр

$$F = \text{conv}\{x \mid u^T x = 0, U_1^T x \geq 0, U_1^T x \neq 0\}_Z.$$

Покажем, что неравенство $\pi'^T x \geq 1$ верно для F .

Обозначим символом e_l вектор, у которого l – я координата равна 1, а остальные координаты равны 0. В силу унимодулярности матрицы U справедливо равенство

$$\min\{\pi'^T x \mid u^T x = 0, U^T x \geq 0, U^T x \neq 0\} = \min\{\pi'^T x \mid u^T x = 0, U^T x \geq e_l\}$$

Предположим, что существует $x' \in F \cap \mathbb{Z}^n$ такой, что $\pi'^T x' < 1$. Тогда в задаче линейного программирования

$$\min\{\pi'^T x \mid u^T x = 0, U^T x \geq e_l\}$$

оптимальная базисная подматрица содержит хотя бы один столбец u' из матрицы U_2 , причем в разложение вектора π' по базисным столбцам столбец u' входит с положительным коэффициентом. Теперь из равенства $V_u^T \pi' = 0$ выводим $V_u^T u' = 0$, т.е. $u' \in U_1$ – противоречие.

Поскольку $\text{rank } U_1 \leq n - \text{rank } V_u$, то размерность линейного подпространства, содержащего F , также не превышает $n - \text{rank } V_u$ и мы получили проблему аналогичную исходной, т.е. требуется доказать сформулированное в условии теоремы свойство для плоскости $\pi'^T x = 1$, которая является опорной для фасеты в пространстве меньшей размерности.

Теперь можно воспользоваться индукцией по размерности, так как при $n = 1$ утверждение очевидно.

Доказательство закончено.

Подмножество столбцов U' матрицы U назовем *нуль-системой*, если системе ограничений $U^T x \geq 0$, $(\sum_{u \in U'} u)^T x = 0$ удовлетворяет только нулевой вектор. Нуль-система называется *неприводимой*, если ее любое собственное подмножество не является нуль-системой. Семейство всех неприводимых нуль-систем для U обозначим \mathbf{U}

Следствие 2.1. $P(U)$ задается системой неравенств

$$Ux \geq 0$$

$$\left(\sum_{u \in U'} u \right)^T x \geq 1, \quad (U' \in \mathbf{U})$$

3. Ранг Хватала бимодулярных матриц

Матрица $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ называется бимодулярной, если модули ее базисных миноров не превышают 2. Полиэдр $P = P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq b\}$ называется бимодулярным.

Обозначим символом $vert(P)$ множество вершин полиэдра P , а символом $P(v)$ - полиэдр, ограниченный лишь теми фасетами полиэдра P , которые содержат вершину $v \in vert(P)$.

Пусть $rank A = n$ и $\bar{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid b - \mathbf{1}_m \leq Ax \leq b\}$. Следующий результат получен в работе [11].

Т е о р е м а 3.1. [11]

1. Если $dim P = n$, то $P \cap \mathbb{Z}^n \neq \emptyset$.
2. $vert(conv(P \cap \mathbb{Z}^n)) = \bigcup_{v \in vert(P)} vert(conv(P(v) \cap \mathbb{Z}^n))$.
3. $vert(conv(P(v) \cap \mathbb{Z}^n)) \subseteq vert(conv(\bar{P}(v) \cap \mathbb{Z}^n))$.

Таким образом, *бимодулярный* полиэдр P распадается на *угловые бимодулярные* полиэдры $P(v)$, ($v \in vert(P)$), так, что любая вершина и любая фасета полиэдра P является вершиной и фасетой по крайней мере в одном из угловых полиэдров. Кроме того, в теореме установлено, что вершины полиэдров $conv(P(v) \cap \mathbb{Z}^n)$ расположены на лучах, выходящих из точки v .

Очевидно, что ранг Хватала полиэдра P равен максимальному из рангов Хватала угловых полиэдров и равен нулю в случае унимодулярной матрицы коэффициентов системы неравенств, поскольку в этом случае $P(v) = conv(P(v) \cap \mathbb{Z}^n)$.

Рассмотрим бимодулярный угловой полиэдр $P(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \geq Av \in \mathbb{Z}^m\}$, у которого базисные миноры матрицы A равны ± 2 и $v \notin \mathbb{Z}^n$. Пусть B любая базисная подматрица в A , так что матрица $U = AB^{-1}$ унимодулярна.

Рассмотрим полиэдры $P(U) = conv\{y \in \mathbb{Z}^n \mid Uy \geq 0, Uy \neq 0\}$ и $F = conv\{y \in \mathbb{Z}^n \mid Uy \geq 0, 2B^{-1}y \equiv 1 \text{ mod } 2\}$. Очевидно, что $vert F \subseteq vert P(U)$ и в случае равенства этих множеств F и $P(U)$ изоморфны, следовательно, изоморфны $P(U)$ и $conv(P(A, b) \cap \mathbb{Z}^n)$. Таким образом из теоремы 2.2. вытекает следующее предложение.

П р е д л о ж е н и е 3.1. Пусть $U \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ унимодулярная матрица, $B \in \mathbb{Z}^{n \times n}$, $det B = 2$, $A = UB$. Если $2B^{-1}v \equiv 1 \text{ mod } 2$ для всякого $v \in vert(P(U))$, то

- 1) ранг Хватала полиэдра $P(A, b)$ равен 1,
- 2) $conv(P(A, b) \cap \mathbb{Z}^n)$ описывается системой неравенств

$$Ax \geq b,$$

$$\frac{1}{2}\alpha A \geq \lceil \frac{1}{2}\alpha b \rceil, \forall \alpha \in \{t \in \{0, 1\}^m \mid tA \equiv 0 \text{ mod } 2\}$$

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №17-11-01336).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Схрейвер, *Теория линейного и целочисленного программирования*, т.2, Мир, М., 1991, 342 с.
2. В.А. Емеличев, М.М. Ковалев, М.К Кравцов, *Многогранники, графы, оптимизация*, Наука, М., 1981, 344 с.

3. Ж., О. Муссафир, “Паруса и базисы Гильберта”, *Фундаментальный анализ и его приложения*, **34**:2 (2000), 43–49.
4. О.Н. Герман, “Паруса и базисы Гильберта”, *Труды МИАН*, **239** (2002), 98–105.
5. C. Bouvier and G. Gonzalez-Sprinberg, “Système générateurs minimal, diviseurs essentiels et G-desingularizations de variétés toriques”, *Tohoku Math. J.*, **47**:1 (1995), 125–149.
6. J. Edmonds, “Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices”, *J. Res. Natl. Bur. Standards Sect. A*, **69**:1 (1965), 125–130.
7. V. Chvatal, “Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems”, *Discrete Mathematics*, **4**:4 (1973), 305–337.
8. W. Cook W., C.R. Coullard, G. Turan, “On the complexity of cutting-plane proofs”, *Discrete Applied Mathematics*, **18**:1 (1987), 25–38.
9. M. Rhodes, “On the Chvatal rank of the Pigeonhole Principle”, *Theoretical Computer Science*, **410**:27-29 (2009), 2774–2778.
10. F. Eisenbrand, A.S. Schulz, “Bounds on the chvatal rank of polytopes in the 0/1-cube”, *Combinatorica*, **23**:2 (2003), 245–261.
11. S.I. Veselov, A.J. Chirkov, “Integer program with bimodular matrix”, *Discrete Optimization*, **6**:2 (2009), 220–222.

Поступила 18.10.2017

MSC2010 90C10

On integer points in two polyhedra

© S. I. Veselov ²

Abstract. In the article we study the convex hulls of integer points in polyhedra of two types. The first type is convex cone consisting of solutions of homogeneous systems of linear inequalities with unimodular matrices of coefficients. The second type includes polyhedra defined by systems of inequalities with bimodular matrices of coefficients at unknowns. For the polyhedra of the first type it is established that the Hilbert basis consists of the spanning vectors of the cone and has a unimodular triangulation. It is also proved that the integer distance from the convex hull facet of the nonzero integer points of the cone to the cone vertex is 1. This means that for polyhedra obtained from the cone by removing its vertex the Chvatal rank is equal to 1. In the class of polyhedra of the second type such restriction on the coefficient matrix was found that its implementation makes Chvatal rank equal to one.

Key Words: Hilbert basis, unimodular triangulation, the convex hull of integer points, facets of integer polyhedron, Chvatal rank.

² Sergey I. Veselov, Associate Professor, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-2737-5876>, sergey.veselov@itmm.unn.ru

REFERENCES

1. A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, V.2., Mir Publ., Moscow., 1991 (In Russ.), 342 c.
2. V.A Emelichev, M.M. Kovalev, M.K. Kravtsov, *Polyhedra, Graphs, and Optimization*, Nauka Publ., Moscow., 1981 (In Russ.), 344 c.
3. J. Moussafir, “Sails and Hilbert Bases”, *Funktional. Anal. i Prilozhen.*, **34**:2 (2000), 43–49 (In Russ.).
4. O. N. German, “Sails and Hilbert Bases”, *Tr. Mat. Inst. Steklova*, **239** (2002), 98–105 (In Russ.).
5. C. Bouvier and G. Gonzalez-Sprinberg, “Systeme generateurs minimal, diviseurs essentiels et G-desingularizations de varietes toriques”, *Tohoku Math. J.*, **46** (1994), 125–149.
6. J. Edmonds, “Maximum matching and a polyhedron with 0, 1-vertices”, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect.*, **69**:1 (1965), 125–130.
7. V. Chvatal, “Edmonds polytopes and a hierarchy of combinatorial problems”, *Discrete Mathematics*, **306** (2006), 886–904.
8. W. Cook W., C.R. Coullard, G. Turan, “On the complexity of cutting-plane proofs”, *Discrete Applied Mathematics*, **18** (1987), 25–38.
9. M. Rhodes, “On the Chvatal rank of the Pigeonhole Principle”, *Theoretical Computer Science*, **410**:2 (2009), 2774–2778.
10. F. Eisenbrand, A.S. Schulz, “Bounds on the chvatal rank of polytopes in the 0/1-cube”, *Combinatorica*, **23**:2 (2003), 245–261.
11. S.I. Veselov, A.J. Chirkov, “Integer program with bimodular matrix”, *Discrete Optimization*, **6**:2 (2009), 220–222.

Submitted 18.10.2017

УДК 517.938.5:512.721

О поверхностях, склеенных из $2n$ -угольников

© В. Е. Круглов¹, Г. Н. Таланова²

Аннотация. В работе рассматриваются $2n$ -угольники и поверхности, которые получаются при отождествлении сторон этих многоугольников попарно, то есть при склейке $2n$ -угольника. Как известно, склейкой некоторого $2n$ -угольника можно получить поверхность любого рода и ориентируемости, однако узнать род этой поверхности по многоугольнику и характеру склейки очень непросто, ведь для этого надо подсчитать количество вершин, образовавшихся после отождествления, а уже при малых n это практически невыполнимая задача, если делать это напрямую. Имеются различные подходы к этой задаче. Хорошо известен канонический вариант склейки $4q$ -угольника ($2q$ -угольника), дающий ориентируемую (неориентируемую) поверхность рода q . Известны также числа Харера-Цагира – числа склейек $2n$ -угольника в ориентируемую поверхность рода q . В работе мы предлагаем новый способ вычисления эйлеровой характеристики полученной поверхности (а, следовательно, рода) вне зависимости от её ориентируемости с помощью трёхцветного графа и сведений о топологической классификации замкнутых поверхностей.

Ключевые слова: $2n$ -угольник, эйлерова характеристика, ориентируемость, склейка.

1. Введение и формулировка результатов

В работе мы рассматриваем многоугольники с чётным числом сторон и “склеенные” из них поверхности. В статье Г. Шабата и А. Сгибнева [1] подробно рассказывается, как можно получить замкнутые поверхности заданием минимального отношения эквивалентности, отождествляющего попарно стороны $2n$ -угольников. В ней приведены результаты классической работы Дж. Харера и Д. Цагира [2] о числе склейек $2n$ -угольника в ориентируемую поверхность рода q (числа Харера-Цагира).

Хорошо известен канонический вариант склейки $4q$ -угольника ($2q$ -угольника), дающий ориентируемую (неориентируемую) поверхность рода q , смотри Рис. 1.1 (а) (Рис. 1.1 (б)). Здесь и на всех рисунках ниже буквы и стрелки около сторон многоугольника означают следующее: у многоугольника склеиваются граничные стороны, обозначенные одинаковой буквой, при этом стрелки на сторонах указывают направление отождествления сторон. Коротко описать такую склейку можно так называемым “словом”, состоящим из всех букв, встречающихся при обходе границы многоугольника по часовой стрелке, при этом к букве добавляется -1 в верхнем индексе, если стрелка на соответствующей стороне направлена в сторону, противоположную обходу. Так склейка на Рисунке 1.1 (а) (1.1 (б)) записывается словом $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\dots a_qb_qa_q^{-1}b_q^{-1}$ ($a_1a_2a_3\dots a_qa_q$).

¹ Круглов Владислав Евгеньевич, стажёр-исследователь лаборатории Топологических Методов в Динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), студент института ИТММ, ННГУ им. Н. И. Лобачевского (603950, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

² Таланова Галина Николаевна, студент факультета информатики, математики и компьютерных наук НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печёрская, д. 25/12), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4743-4055>, Glntalanova@gmail.com

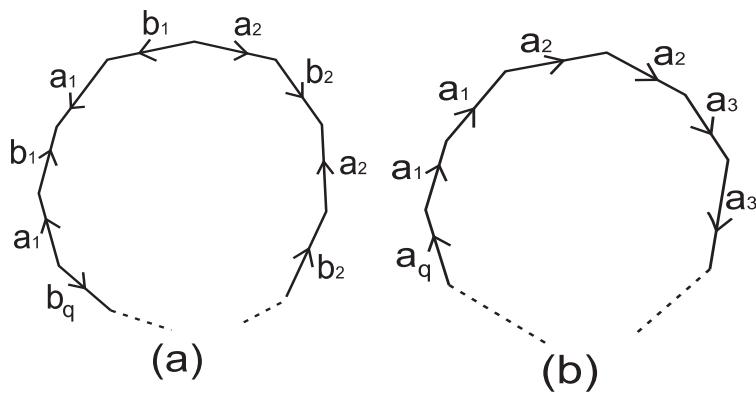


Рисунок 1.1

Канонические склейки $2n$ -угольников

Однако, это не единственный вариант склейки, и для разных склеек одного и того же многоугольника род поверхности может получиться различный. К примеру, из квадрата может получиться тор (см. Рис. 1.2), проективная плоскость (см. Рис. 1.3), сфера (см. Рис. 1.4), бутылка Клейна (см. Рис. 1.5).

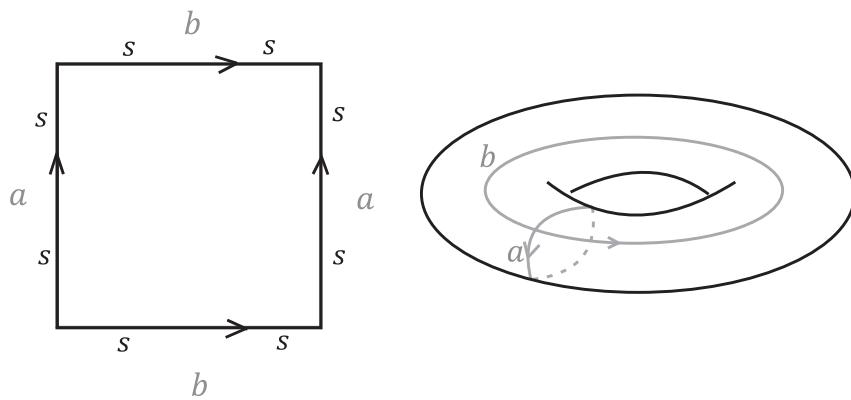


Рисунок 1.2

Тор и его развёртка

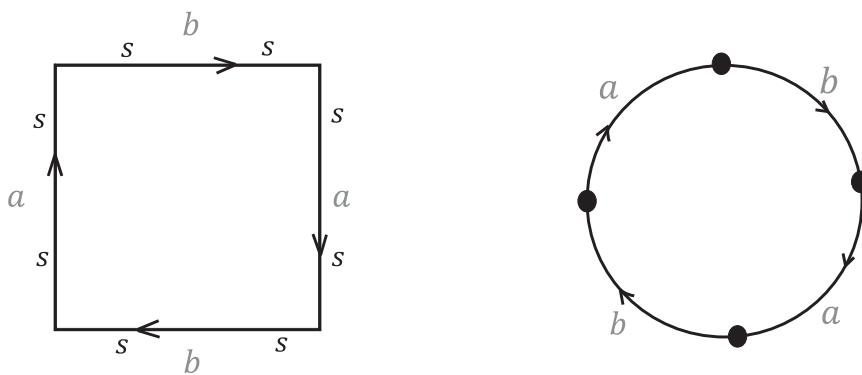


Рисунок 1.3

Проективная плоскость и её развёртка

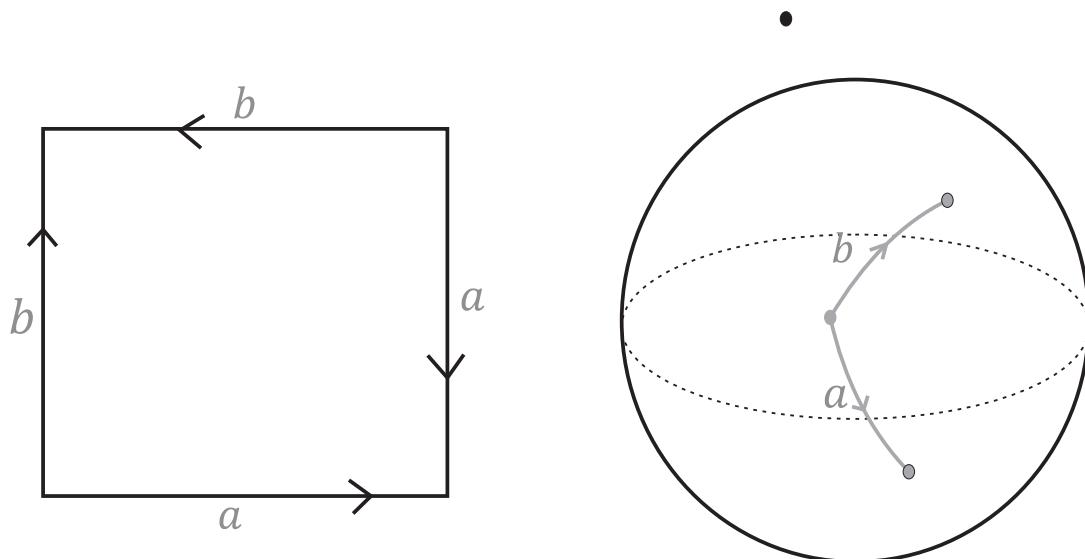


Рисунок 1.4
Сфера и её развёртка

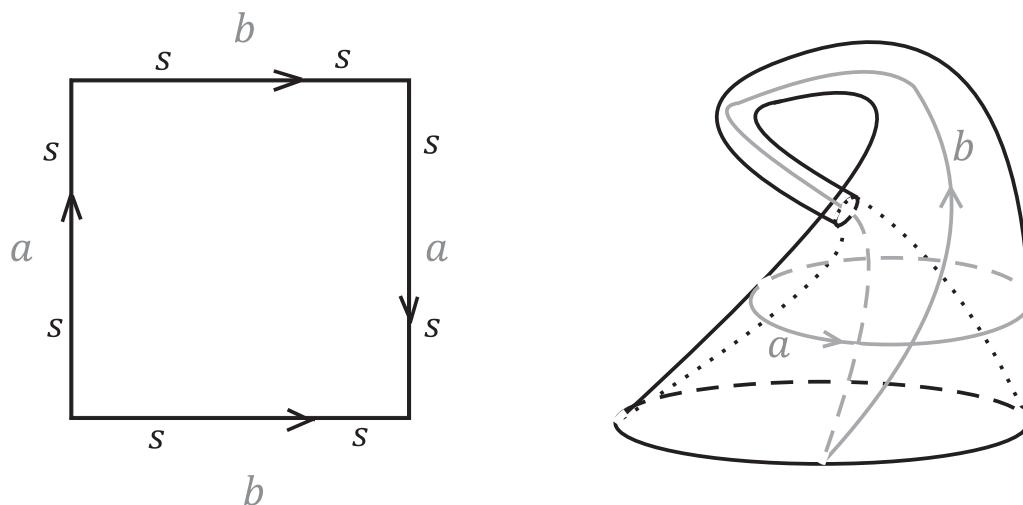


Рисунок 1.5
Бутылка Клейна и её развёртка

Нетрудно понять, что наличие в слове хотя бы двух одинаковых букв aa , $a^{-1}a^{-1}$, не обязательно стоящих подряд, приводит к существованию пленки Мёбиуса на такой поверхности и, следовательно, к неориентируемости такой поверхности. Таким образом, ориентируемость поверхности по склейке определяется довольно быстро. По формуле Эйлерера род поверхности q связан с числом вершин B , ребер P и граней Γ следующей формулой

$$B - P + \Gamma = 2 - 2q$$

для ориентируемой поверхности и

$$B - P + \Gamma = 2 - q$$

для неориентируемой, в этих формулах число $2 - 2q$ и $2 - q$, соответственно, — эйлерова характеристика поверхности. В нашем случае формулы принимают вид $B - n + 1 = 2 - 2q$,

$B - n + 1 = 2 - q$ соответственно и, следовательно, задача определения рода поверхности сводится к подсчету вершин, получающихся в результате склейки. Однако сделать это не так просто, особенно для большого числа сторон. Например, уже для восьмиугольника существует 105 различных склеек его сторон и нужно хорошее пространственное воображение, чтобы при каждом склеивании сторон следить, какие вершины склеятся. В настоящей работе мы покажем, как вычислить число склеенных вершин с помощью цветных графов.

Более детально.

Обозначим через M наш $2n$ -угольник и через S поверхность, получающуюся после склейки его сторон. Соединим его центр со всеми вершинами, а соединяющие отрезки назовём t -кривыми. Затем соединим центр же с серединами всех сторон, а соединяющие отрезки назовём u -кривыми. Каждую половину стороны, отделённую вершиной многоугольника и серединой стороны, назовём s -кривой.

Заметим, что мы только что триангулировали многоугольник и, соответственно, поверхность, или разделили на *треугольные области*. Стороны треугольных областей будем называть цветными кривыми, каждая одного из трёх цветов – s , u или t (см. Рис. 1.6).

Теперь мы можем построить *трёхцветный граф* Γ . Поставим в соответствие треугольным областям вершины графа, а цветным кривым – цветные рёбра, причём ребро, соответствующее цветной кривой, имеет такой же цвет что и сторона и соединяет вершины, соответствующие треугольным областям, границам которых одновременно принадлежит цветная кривая (см. Рис. 1.6).

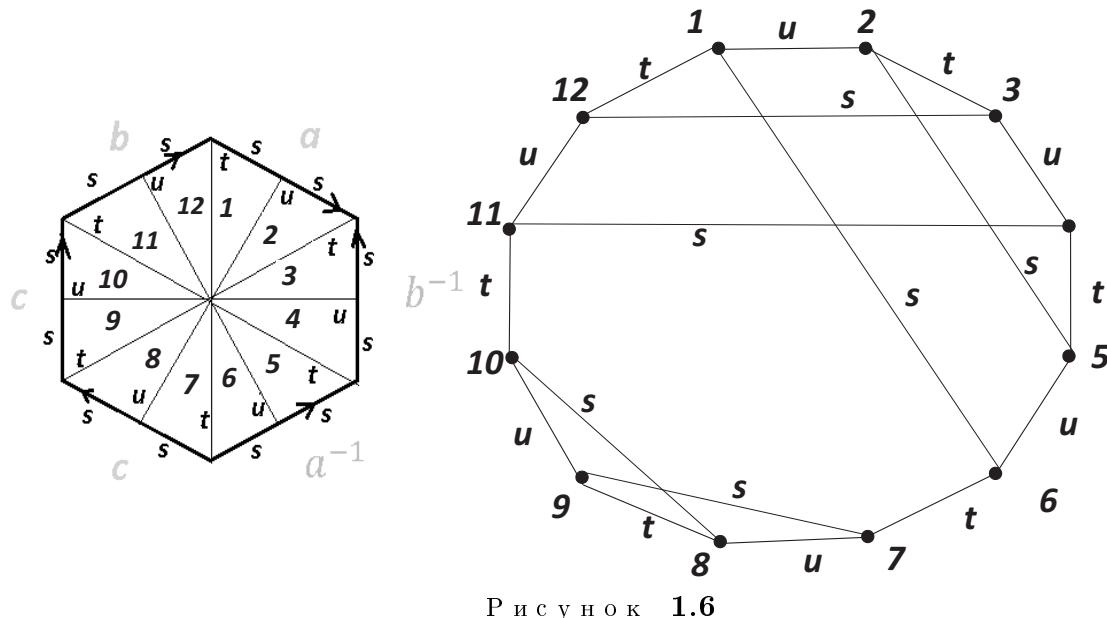


Рисунок 1.6

Триангуляция цветными кривыми и её трёхцветный граф

Назовём st -циклом, tu -циклом, su -циклом цикл на графе, состоящий только из рёбер цветов s и t , t и u , s и u соответственно (см. Рис. 1.7, 1.8, 1.9).

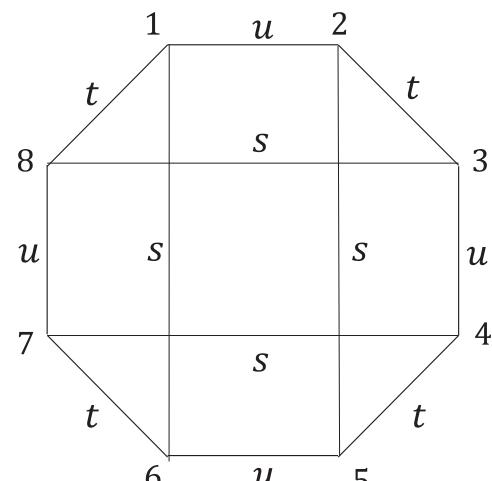
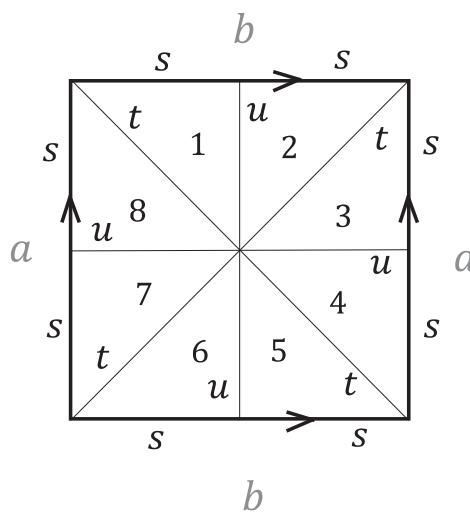


Рисунок 1.7

Развёртка тора и его трёхцветный граф

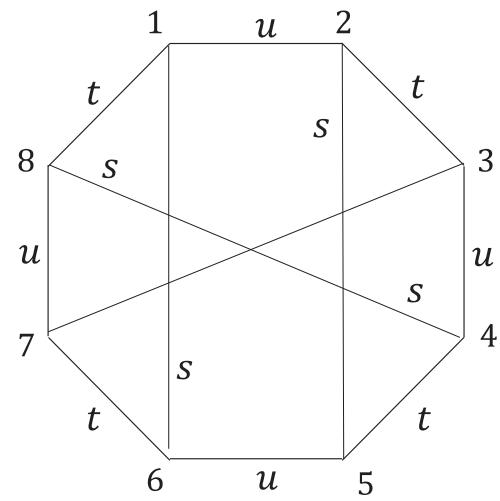
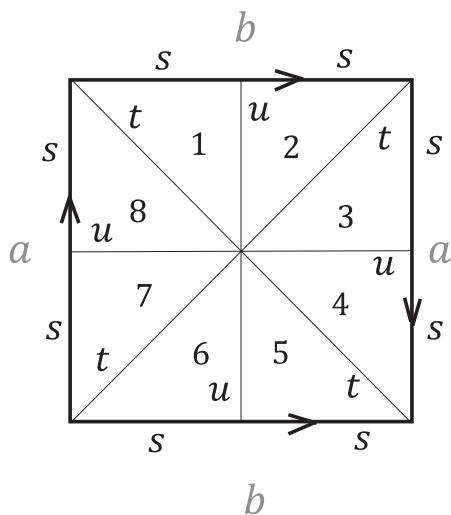


Рисунок 1.8

Развёртка бутылки Клейна и её трёхцветный граф

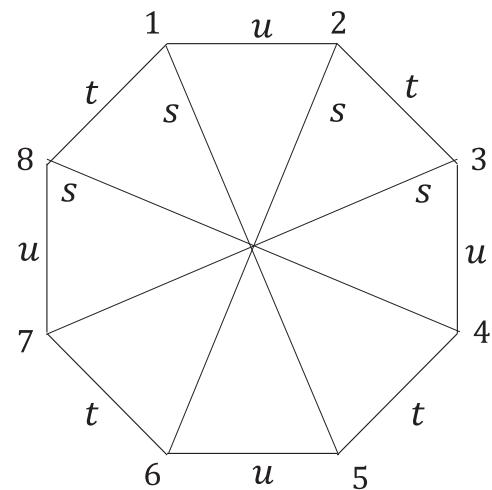
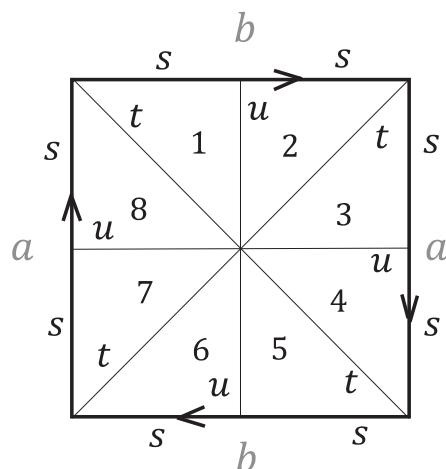


Рисунок 1.9

Развёртка проективной плоскости и её трёхцветный граф

Т е о р е м а 1.1.

1. Эйлерова характеристика $\chi(S)$ поверхности S вычисляется по формуле

$$\chi(S) = \nu - n + 1, \quad (1.1)$$

где ν – количество st -циклов графа Γ .

2. Поверхность S ориентируема тогда и только тогда, когда в соответствующем ей графе Υ не содержится циклов нечетной длины.

2. Доказательство Теоремы 1.1.

1. Построение потока Морса на многоугольнике. Зададим градиентно-подобный поток или, что то же самое, поток Морса $f^t: S \times \mathbb{R} \rightarrow S$ таким образом, что в центре лежит сток ω , в каждой вершине – источник α , в центре каждой стороны – седловая точка σ с неустойчивой сепаратрисой, лежащей на радиусе описанной окружности, и устойчивыми сепаратрисами, лежащими на сторонах M (Рис. 2.1); при таком расположении особых траекторий неустойчивые сепаратрисы седловых точек совпадут с u -кривыми, устойчивые – с s -кривыми, а с t -кривыми совпадут обычные траектории, идущие из источника в сток. Сделаем мы это следующим образом (основанным на способе, описанном в [4]).

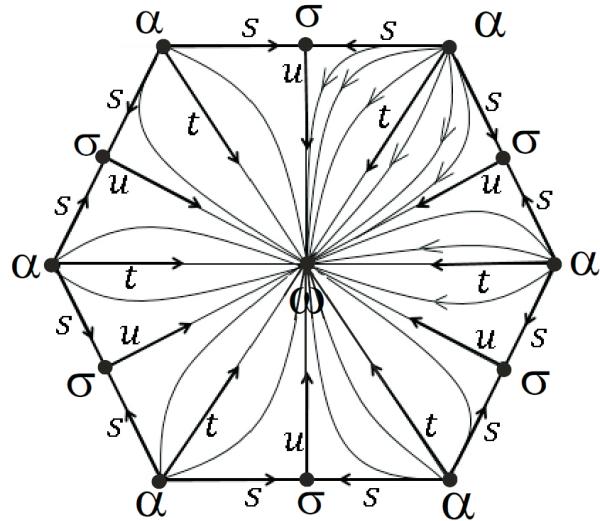


Рисунок 2.1

Поток f^t

Рассмотрим векторное поле v_0 на плоскости, определяемое формулой $v_0 = (\sin \pi x, \sin \pi y)$. Это поле является полем Морса. Его особые точки – это все точки целочисленной решётки (x, y) , из них точки с двумя чётными координатами – источники, с двумя нечётными – стоки, а с координатами разной чётности – седловые точки потока, определяемого полем v_0 . Сепаратрисы параллельны осям координат, в качестве t -кривых возьмём диагонали квадратов со сторонами, лежащими на сепаратрисах. Получили разбиение на “стандартные” треугольники.

Определим гомеоморфизм $p: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ формулой $p(x, y) = (\bar{x}, \bar{y}) = (x + 1, y + 1)$ и подействуем им на поле v_0 , чтобы сток оказался в начале координат. Получили поле $\tilde{v}_0 = p(v_0)$.

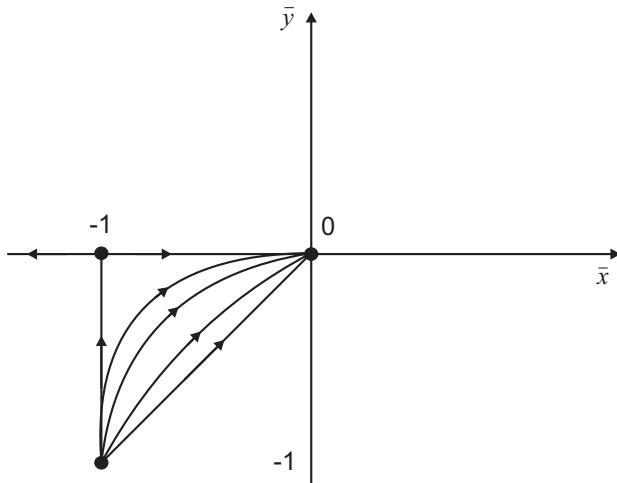


Рисунок 2.2

Векторное поле \tilde{v}_0

Единственный сток в нашем многоугольнике M является вершиной $4n$ треугольников. Положим T – стандартный треугольник в пространстве (\bar{x}, \bar{y}) с вершинами $(0, 0)$, $(-1, 0)$, $(-1, -1)$. Расположим наш многоугольник M так, чтобы его центр лежал в начале координат, а одна из u -кривых лежала на оси Ox . Обозначим каждую треугольную область многоугольника M через δ_i , $i = \overline{1, 4n}$ таким образом, чтобы δ_1 лежала в первом квадранте и её u -кривая лежала на оси Ox . Определим гомеоморфизм $\psi_i: T \rightarrow \delta_i$ формулой

$$\psi_i(\bar{x}, \bar{y}) = \psi_i(r \cos \theta, r \sin \theta) = \psi_i(r_i(r, \theta) \cos \theta_i(r, \theta), r_i(r, \theta) \sin \theta_i(r, \theta)),$$

где

$$r_i(r, \theta) = \frac{r}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\theta - \pi}{\frac{\pi}{4}} + r \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2n} \cdot \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \frac{\frac{5}{4}\pi - \theta}{\frac{\pi}{4}},$$

$$\theta_i(\theta) = \left(i - 2 \left(\frac{i}{2} (\text{mod} 1) \right) \right) \cdot \frac{\pi}{2n} + (-1)^{i-1} \frac{\theta - \pi}{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\pi}{2n}.$$

Нетрудно увидеть, что гомеоморфизмы ψ_i меняют величину угла при начале координат до величины угла между u -кривой и t -кривой, разворачивают треугольник на i -е место и меняют величины сторон, чтобы получился именно $2n$ -угольник, соответственно меняя и значения поля \tilde{v}_0 . Таким образом, мы задали в треугольной области δ_i векторное поле $v_i = \psi_i(\tilde{v}_0) = \psi_i(p(v_0))$. Положим, что общее поле V , определяющее поток f^t на M , равно v_i на всех его треугольных областях.

Таким образом, мы получили поток Морса f^t на замкнутой поверхности. В силу теоремы Пуанкаре-Хопфа [5], в этом случае эйлерова характеристика поверхности может быть вычислена по формуле

$$\chi(S) = \mu_0 - \mu_1 + \mu_2,$$

где μ_0 – число стоков, μ_1 – число седловых точек, μ_2 – число источников.

2. Определение числа стоков, источников и сёдел по графу. Множества st , tu и su -циклов графа Υ взаимно однозначно соответствуют множеству источников, множеству стоков, множеству седловых точек соответственно, причем число st -циклов ν

чётное. Всё это видно, если спроектировать граф Υ на поверхность S , ведь тогда каждый из этих циклов станет окружностью, которая пересекает траектории, причём каждое ребро пересекает единственный раз траекторию своего цвета. Кривые цветов s и t могут лежать лишь в бассейне источника и чередуются, поэтому цикл имеет чётную длину. Кривые цветов u и t могут лежать лишь в бассейне стока. А кривые s и u могут пересекать лишь седловые сепаратрисы. Более подробные рассуждениясмотрите [4], где, в частности, построена топологическая классификация потоков Морса с помощью трёхцветных графов как топологических инвариантов и приведена и доказана общая формула эйлеровой характеристики несущего многообразия по трёхцветному графу потока (данная классификация осуществлялась методами, разработанными ранее в [6], [7], [8]).

Из соответствия циклов неподвижным точкам следует, что формула 1.1 является формулой суммы индексов особых точек потока f^t , что влечёт истинность доказываемого утверждения. А число вершин, получающихся в результате склейки, теперь просто равно числу st -циклов на графе.

3. Определение ориентируемости поверхности по графу. Обозначим через Δ множество треугольных областей поверхности S , через \mathcal{B} – множество вершин графа Υ , а через $\pi: \Delta \rightarrow \mathcal{B}$ функцию, осуществляющую соответствие треугольных областей и вершин графа.

Пусть поверхность S ориентируема. Ориентируем границу каждой треугольной области, выбрав один из порядков обхода её вершин; если при обходе в положительном направлении область остаётся слева, то присвоим ей метку $+1$, если справа – то -1 . Назовём функцию $\theta: \Delta \rightarrow \{-1, 1\}$ согласованной ориентацией, если любые две соседние многоугольные области имеют различные метки. То есть $\theta(\delta_1)\theta(\delta_2) = -1$ для различных $\delta_1, \delta_2 \in \Delta$ таких, что $cl(\delta_1) \cap cl(\delta_2) \neq \emptyset$. Мы полагаем S ориентируемым, поэтому согласованная ориентация существует.

Покажем, что в графе Υ все циклы имеют четную длину. Предположим противное: существует цикл $C = \{b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b_k)\}$ нечётной длины k , где $\delta_k = \delta_0$. Положим $\delta_i = \pi^{-1}(b_i)$, $i = \overline{0, k-1}$. Тогда из условия $\theta(\delta_1) \cdot \theta(\delta_2) = -1$ следует, что $\theta(\delta_i) \cdot \theta(\delta_{i+1}) = -1$. Отсюда $\theta(\delta_0) = -\theta(\delta_1) = -(-\theta(\delta_2)) = \dots = (-1)^{k-1}\theta(\delta_{k-1}) = (-1)^k\theta(\delta_k)$. Таким образом, $\theta(\delta_0) = -\theta(\delta_0)$: пришли к противоречию.

Обратно, пусть все циклы графа Υ имеют чётную длину. Введём согласованную ориентацию θ следующим образом. Пусть $\delta_0 \in \Delta$ – произвольная треугольная область. Положим $\theta(\delta_0) = +1$ и $b_0 = \pi(\delta_0)$. Для любой области $\delta \in \Delta$ положим $b = \pi(\delta)$. Поскольку граф связан, то в нём существует путь $b_0, (b_0, b_1), b_1, \dots, b_{i-1}, (b_{i-1}, b_i), b_i, \dots, b_{k-1}, (b_{k-1}, b)$ длины k . Положим $\theta(\delta) = (-1)^k$. Так как все циклы графа имеют четную длину, то длины всех путей, соединяющих вершины b_0 и b имеют одинаковую чётность. Следовательно, отображение θ корректно определено.

Благодарности. Построение потока на многоугольнике выполнено в рамках проекта № 17-11-01041 РНФ, формула эйлеровой характеристики поверхности найдена в рамках проекта ТЗ-90 ЦФИ ВШЭ. Авторы благодарят Починку О.В. за постановку задачи, внимательное прочтение рукописи и ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Г. Б. Шабат, А. И. Сгибнев, “Склейки многоугольников”, *Квант*, **3** (2011), 17–22.
- J. Harer, D. Zagier, “The Euler characteristic of the moduli space of curves”, *Inventiones mathematicae*, **85** (1986), 457–486.

3. C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980, 269 с.
4. А. А. Ошемков, В. В. Шарко, “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93–140.
5. Дж. Милнор, А. Уоллес, *Дифференциальная топология. Начальный курс.*, М: Мир, 1972, 223 с.
6. Е. А. Леонович, А. Г. Майер, “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР*, **14**:5 (1937), 251–257.
7. Е. А. Леонович, А. Г. Майер, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557–560.
8. M. Peixoto, *On the classification of flows on two manifolds*, Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ. of Bahia, Salvador, Brasil, 1971.

Поступила 2.09.2017

MSC2010 05C62, 14J80, 37D15

On surfaces glued of $2n$ -gons

© V. E. Kruglov³, G. N. Talanova⁴

Abstract. In this paper $2n$ -gons and surfaces obtained through identification of $2n$ -gon's sides in pairs (i.e. through sewing) are considered. As well-known, one can get surface of any genus and orientability through sewing but it's very uneasy to calculate by only the polygon and the way of sewing, because to do this one need to calculate the number of vertices appearing after identification; even for small n the problem is almost impossible if one want to do this directly. There are different ways to solve the task. The canonical variant of $4q$ -gon sewing ($2q$ -gon sewing) giving an orientable (unorientable) surface of genus q is well-known, as the Harer-Zagier' numbers, that are the numbers of variants of sewing a $2n$ -gon to an orientable surface of gunes q . In this paper we offer a new way of Euler characteristic's of obtained surface calculation (and, hence, its genus) undepending on its orientability by means of three-colour graph and information about closed surfaces topological classification.

Key Words: $2n$ -gon, Euler characteristic, orientability, sewing

REFERENCES

1. G. B. Shabat, A. I. Sgibnev, “Sewings of polygons”, *Kvant*, **3** (2011), 17–22 (In Russ.).
2. D. Zagier, J. Harer, “The Euler characteristic of the moduli space of curves”, *Inventiones mathematicae*, **85** (1986), 457–486 (In Eng.).
3. C. Kosniowski, *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge University Press, 1980 (In Eng.), 269 p.
4. A. A Oshemkov, V. V. Sharko, “About classification of Morse-Smale flows on 2-manifolds”, *Matematicheskiy sbornik*, **189**:8 (1998), 93–140 (In Russ.).
5. J. Milnor, A. Wallace, *Differential Topology Milnor Wallace: a First Steps*, M: Mir, 1972 (In Russ.), 223 p.
6. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, “About trajectories determining qualitative structure of sphere partition into trajectories”, *Dokl. Akad. AN SSSR*, **14**:5 (1937), 251–257 (In Russ.).
7. E. A. Leontovich, A. G. Mayer, “About scheme determining topological structure of partition into trajectories”, *Dokl. Akad. AN SSSR*, **103**:4 (1955), 557–560 (In Russ.).
8. M. Peixoto, *On the classification of flows on two manifolds*, Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil, 1971 (In Eng.).

Submitted 2.09.2017

³ **Vladislav E. Kruglov**, Trainee Researcher, Laboratory of Topological Methods in Dynamics, National Research University Higher School of Economics (Bolshaya Pecherskaya Ulitsa 25/12, 603155 Nizhniy Novgorod, Russia), student of Institute ITMM, Lobachevsky State University (Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue) 23, 603950 Nizhniy Novgorod, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4661-0288>, kruglovslava21@mail.ru

⁴ **Galina N. Talanova**, student of informatics, mathematics and computer sciences faculty, National Research University Higher School of Economics (Bolshaya Pecherskaya Ulitsa 25/12, 603155 Nizhniy Novgorod, Russia), ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-4743-4055>, Glntalanova@gmail.com

УДК 519.6:517.962

Точность разностных схем для нелинейных эллиптических уравнений с неограниченной нелинейностью

© Ф. В. Лубышев¹, М. Э. Файрузов², А. Р. Манапова³

Аннотация. Рассматривается первая краевая задача для нелинейных эллиптических уравнений со смешанными производными и неограниченной нелинейностью. Строится и исследуется разностная схема решения данного класса задач и реализующий ее итерационный процесс. Проведено строгое исследование сходимости итерационного процесса, с помощью которого доказаны существование и единственность решения нелинейной разностной схемы, аппроксимирующей исходную дифференциальную задачу. Установлены согласованные с гладкостью искомого решения оценки скорости сходимости разностных схем, аппроксимирующих нелинейное уравнение с неограниченной нелинейностью.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические уравнения, разностный метод решения, точность разностных аппроксимаций, итерационный процесс.

1. Введение

Одним из основных вопросов теории разностных схем для уравнений математической физики (УМФ) является вопрос о точности [1, 2]. Для случая, когда решение исходной дифференциальной задачи достаточно гладкое, в теории метода сеток проведено достаточно полное исследование сходимости разностных схем и получены оценки точности в соответствующих метриках [1-2]. При понижении требований к дифференциальным свойствам искомого решения анализ сходимости разностной схемы существенно усложняется [3-11].

В работах [3, 4] предложен новый подход получения таких оценок точности метода сеток для УМФ с обобщенными решениями, в которых порядок скорости сходимости согласован с гладкостью решения исходной дифференциальной задачи:

$$\|y(x) - u(x)\|_{W_2^s(\omega)} \leq M|h|^{m-s}\|u\|_{W_2^m(\Omega)}, \quad s < m,$$

где $u \in W_2^m(\Omega)$ – решение дифференциальной задачи, а $y = y(x)$, $x \in \bar{\omega}$ – решение аппроксимирующей задачи, $\|\cdot\|_{W_2^s(\omega)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^m(\Omega)}$ – нормы пространств Соболева дискретного и непрерывного аргументов соответственно.

¹ **Лубышев Федор Владимирович**, профессор кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет" (450076, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru.

² **Файрузов Махмут Эрнестович**, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет" (450076, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, fairuzovme@mail.ru.

³ **Манапова Айгуль Рашитовна**, доцент кафедры информационных технологий и компьютерной математики, ФГБОУ ВО "Башкирский государственный университет" (450076, Россия, Республика Башкортостан, г. Уфа, ул. Заки Валиди, д. 32), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8778-4917>, aygulrm@mail.ru.

В настоящее время для широкого класса линейных задач установлены согласованные оценки точности разностных схем. Но, как правило, большинство реальных задач нелинейны, причем природа нелинейностей различна. Для квазилинейных эллиптических уравнений с обобщенными решениями в случае наличия ограниченных нелинейностей согласованные оценки точности разностных схем можно найти, например, в [3, 4].

Теория разностных схем для нелинейных УМФ с неограниченной нелинейностью является одной из наиболее сложных и актуальных областей вычислительной математики [9-11]. Исследования сходимости разностных схем для данного класса задач показали, что даже на гладких решениях эти исследования представляют довольно сложную техническую проблему. Проблема сходимости и точности разностных схем менее изучена для нелинейных УМФ с обобщенными решениями и неограниченной нелинейностью. В работах [10, 11] впервые (для одномерного случая) исследована сходимость разностных схем к обобщенным решениям одномерных аналогов квазилинейных уравнений эллиптического типа с нелинейностью неограниченного роста и получены согласованные оценки скорости сходимости. Из публикаций за последние годы следует, прежде всего, выделить работы [12-16]. В первую очередь отметим монографию [12] и обзорную работу [13].

Настоящая работа посвящена построению и исследованию сходимости и точности разностных схем для нелинейных УМФ эллиптического типа со смешанными производными и неограниченной нелинейностью. Установлены априорные согласованные оценки скорости сходимости разностных схем в сеточной норме $W_{2,0}^2(\omega)$, аппроксимирующих нелинейную задачу с неограниченной нелинейностью. Доказательство сходимости разностных схем проводится в предположении, что само точное решение краевой задачи существует в классе $W_{2,0}^m(\Omega)$, $3 < m \leq 4$ и принадлежит некоторой ограниченной области D_u и только в этой области функции, входящие в уравнение, удовлетворяют требуемым свойствам. Таким образом, получена шкала априорных оценок скорости сходимости в сеточной $W_{2,0}^2(\omega)$ -норме для разностного решения. Условия, налагаемые на коэффициенты уравнения, выполнены в настоящей работе лишь в некоторой окрестности значений точного решения исходной задачи, что говорит как о наличии нелинейностей неограниченного роста, так и значительно расширяет класс допустимых функций, удовлетворяющих, например, условию равномерной эллиптичности на решениях уравнения.

Настоящая работа дополняет и развивает результаты, установленные в работах [10, 11], для одномерных аналогов квазилинейных уравнений эллиптического типа с неограниченной нелинейностью. В отличии от [10, 11] результаты настоящей работы установлены для нелинейных двумерных УМФ эллиптического типа со смешанными производными и неограниченной нелинейностью.

Результаты, полученные в настоящей работе, будут существенно использованы в дальнейшем при решении проблем, связанных с разработкой и исследованием разностных аппроксимаций задач оптимального управления для систем, описываемых нелинейными УМФ с обобщенными решениями (состояниями) и неограниченной нелинейностью. Исследованию этих проблем (сходимость аппроксимаций по состоянию, функционалу, управлению, регуляризация аппроксимаций [17, 18]) для данного класса задач оптимального управления будет посвящена отдельная работа.

2. Постановка дифференциальной задачи

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x_\alpha < l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник в \mathbb{R}^2 с границей $\Gamma = \partial\Omega$. Рассмотрим первую краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка: требуется найти функцию $u = u(x)$, $x \in \bar{\Omega}$, удовлетворяющую

условиям

$$Lu(x) = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta}(u) \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = f(u), \quad x \in \Omega, \quad (2.1)$$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \Gamma, \quad (2.2)$$

где $k_{\alpha\beta}(\eta) = k_{\beta\alpha}(\eta)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $f(\eta)$ – заданные функции η .

Априори предполагается, что задача (2.1)-(2.2) однозначно разрешима в классе $W_{2,0}^m(\Omega) = W_2^m(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, $3 < m \leq 4$. Обозначим через M_u

$$M_u = \{u : M_1 \leq u(x) \leq M_2, x \in \Omega\} \quad (2.3)$$

– область значений точного решения задачи (2.1)-(2.2) (которая, в силу предположения о гладкости решения исходной задачи является ограниченным множеством). Определим окрестность D_u (δ -окрестность) области значений точного решения M_u :

$$D_u = \{\bar{u} : \bar{M}_1 = M_1 - \delta \leq \bar{u}(x) \leq \bar{M}_2 + \delta = \bar{M}_2, \quad x \in K \subseteq \bar{\Omega}, \delta > 0\}, \quad (2.4)$$

здесь $\delta > 0$ – произвольная постоянная, которая может быть достаточно малой.

Будем предполагать, что для старших коэффициентов $k_{\alpha\beta}(\eta)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, уравнения (2.1) выполняются следующие условия на решении задачи (2.1)-(2.2):

$$\nu \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2 \leq \sum_{\alpha, \beta=1}^2 k_{\alpha\beta}(\eta) \xi_\alpha \xi_\beta \leq \mu \sum_{\alpha=1}^2 \xi_\alpha^2, \quad k_{\alpha\beta}(\eta) = k_{\beta\alpha}(\eta), \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (2.5)$$

для любых $\eta \in D_u$, $\forall \xi \in \mathbb{R}^2$, и любых вещественных параметров ξ_1 , ξ_2 , где ν и μ – положительные постоянные.

Пусть, кроме того, выполняются следующие условия гладкости на коэффициенты $k_{\alpha\beta}(\eta)$, $\alpha, \beta = 1, 2$, $f(\eta)$ уравнения (2.1) на решении задачи (2.1)-(2.2)

$$|k_{\alpha\beta}(\eta_1) - k_{\alpha\beta}(\eta_2)| \leq L|\eta_1 - \eta_2|, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in D_u, \alpha, \beta = 1, 2; \quad (2.6)$$

$$|f(\eta)| \leq f_0, \quad \forall \eta \in D_u; \quad (2.7)$$

$$|f(\eta_1) - f(\eta_2)| \leq L_f |\eta_1 - \eta_2|, \quad \forall \eta_1, \eta_2 \in D_u; \quad (2.8)$$

$$\frac{2\mu(\max l_\alpha)^2}{\nu^2} \left\{ L_f + \frac{\mu f_0[2(2 + \sqrt{2})L]}{\nu^2} \right\} = q_0^*, \quad (2.9)$$

$$q_1^* = \frac{q_0^*}{2} < 1. \quad (2.10)$$

Исходное уравнение (2.1) в более подробной записи принимает следующий вид

$$-\sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha\alpha}(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - 2k_{12}(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} = f(u), \quad x \in \Omega, \quad (2.11)$$

$$k_{12}(u) = k_{21}(u).$$

3. Постановка сеточной задачи (разностной схемы)

Для аппроксимации задачи (2.1)-(2.2) и исследования сходимости разностных аппроксимаций нам понадобятся сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$ и в $\bar{\Omega}$: $\bar{\omega}_\alpha = \{x_\alpha = x_\alpha^{(i_\alpha)} = i_\alpha h_\alpha \in [0, l_\alpha] : i_\alpha = \overline{0, N_\alpha}, N_\alpha h_\alpha = l_\alpha\}$, $\alpha = 1, 2$; $\omega_\alpha = \bar{\omega}_\alpha \cap (0, l_\alpha)$; $\omega_\alpha^+ = \bar{\omega}_\alpha \cap (0, l_\alpha]$, $\omega_\alpha^- = \bar{\omega}_\alpha \cap [0, l_\alpha)$, $\alpha = 1, 2$; $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$; $\omega^{(\pm 1)} = \omega_1^\pm \times \omega_2$, $\omega^{(\pm 2)} = \omega_1 \times \omega_2^\pm$; $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$; $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2$.

Пусть V – множество сеточных функций, заданных на сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, а $\overset{\circ}{V}$ – его подмножество, состоящее из сеточных функций, обращающихся в нуль на $\gamma = \bar{\omega} \setminus \omega$. Для сеточных функций из множества $\overset{\circ}{V}$ введем скалярные произведения, нормы и полуформы [1-3]:

$$(y, v)_{L_2(\omega)} = \sum_{\omega} h_1 h_2 y(x) v(x), \quad \|y\|_{L_2(\omega)}^2 = (y, y)_{L_2(\omega)} = \sum_{\omega} h_1 h_2 y^2(x),$$

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)}^2 = \|y_{\bar{x}}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2)}^2 + \|y_{\bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1 \times \omega_2^+)}^2 = |y|_{W_2^1(\omega)}^2 = \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega^{(+\alpha)}} h_1 h_2 y_{x_\alpha}^2 = \|\nabla y\|_{L_2(\omega)}^2,$$

$$\begin{aligned} \|y\|_{W_2^2(\omega)}^2 &= \|y_{\bar{x}_1 x_1}\|_{L_2(\omega)}^2 + \|y_{\bar{x}_2 x_2}\|_{L_2(\omega)}^2 + 2 \|y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}\|_{L_2(\omega_1^+ \times \omega_2^+)}^2 = \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\omega} h_1 h_2 y_{x_\alpha x_\alpha}^2 + 2 \sum_{\omega_1^+ \times \omega_2^+} h_1 h_2 y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}^2 = |y|_{W_2^2(\omega)}^2, \end{aligned}$$

$$\|y\|_{C(\bar{\omega})} = \|y\|_{L_\infty(\bar{\omega})} = \max_{\bar{\omega}} |y(x)|.$$

Здесь символами $|\cdot|_{W_2^1(\omega)}$ и $|\cdot|_{W_2^2(\omega)}$ обозначены полуформы в $W_2^1(\omega)$ и $W_2^2(\omega)$ соответственно.

Справедлива следующая лемма.

Л е м м а 3.1. Для любой сеточной функции $y(x)$, $x \in \bar{\omega}$, заданной на сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2 \subset \bar{\Omega}$ и обращающейся в нуль на границе $\gamma = \partial\omega$: $y(x) = 0$, $x \in \gamma$, справедливы следующие разностные аналоги теорем вложения:

$$\|y\|_{L_2(\omega)} \leq C_1 \|y\|_{W_2^1(\omega)}, \quad C_1^2 = \frac{(l_1 l_2)^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}; \quad (3.12)$$

$$\|y\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_2 \|y\|_{W_2^2(\omega)}, \quad C_2 = \frac{(\max l_\alpha)^2}{2(l_1 l_2)^{1/2}}; \quad (3.13)$$

$$\|y\|_{L_2(\omega)} \leq C_3 \|y\|_{W_2^2(\omega)}, \quad C_3 = C_2 (l_1 l_2)^{1/2} = \frac{(\max l_\alpha)^2}{2}; \quad (3.14)$$

$$\|y\|_{W_2^1(\omega)} \leq C_4 \|y\|_{W_2^2(\omega)}, \quad C_4 = \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{32} \right)^{1/2}. \quad (3.15)$$

Поставим в соответствие дифференциальной задаче (2.1)-(2.2) следующую разностную схему: требуется найти сеточную функцию $y(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, заданную на сетке $\bar{\omega}_h = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$, которая является решением следующей сеточной задачи

$$-\sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha\alpha}(y) y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2k_{12}(y) Q(y) = f(y), \quad x \in \omega_h, \quad (3.16)$$

$$y(x) = 0, \quad x \in \gamma_h, \quad (3.17)$$

где

$$\begin{aligned}
 Q(y)(x) &= \frac{y_{x_1 x_2}(x) + y_{\bar{x}_1 x_2}(x) + y_{x_1 \bar{x}_2}(x) + y_{\bar{x}_1 \bar{x}_2}(x)}{4} = \\
 &= \frac{y(x_1 + h_1, x_2 + h_2) - y(x_1 - h_1, x_2 + h_2) - y(x_1 + h_1, x_2 - h_2) + y(x_1 - h_1, x_2 - h_2)}{4h_1 h_2} = \\
 &= y_{x_1 x_2}^{\circ}(x_1, x_2). \quad (3.18)
 \end{aligned}$$

4. Итерационный процесс для нелинейной сеточной задачи

Задача (3.16)-(3.18) – это система нелинейных уравнений относительно сеточной функции $y = y(x)$, $x \in \bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$. В связи с этим возникает естественный вопрос о существовании и единственности решения нелинейной задачи. Как известно, одними из основных методов нахождения решения нелинейных уравнений являются итерационные методы. Они же позволяют в ряде случаев исследовать проблемы существования и единственности решения нелинейных уравнений. Поэтому возникает естественная необходимость в привлечении соответствующих итерационных методов к исследованию существования и единственности решения нелинейной разностной схемы (3.16)-(3.18), а также ее численной реализации. Следует заметить, что выбор того или иного метода итераций существенным образом влияет и на условия сходимости самой нелинейной разностной схемы к решению дифференциальной задачи (2.1)-(2.2). Кроме того, проблема строгого обоснования сходимости итерационных методов в случае наличия нелинейностей неограниченного роста имеет самостоятельный интерес и являются нетривиальной задачей [10, 11].

В дальнейшем через $A(\theta)v$ будем обозначать сеточный оператор (зависящий от параметра $\theta = \theta(x)$), задаваемый соотношением

$$A(\theta)v = - \sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha\alpha}(\theta)v_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x) - 2k_{12}(\theta)Q(v)(x), \quad x \in \omega_h, \quad (4.19)$$

на множестве сеточных функций $v(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$; $v(x) = 0$, $x \in \gamma_h$, где $\theta(x)$, $x \in \bar{\omega}$ – произвольная сеточная функция, заданная на сетке $\bar{\omega}$, играющая роль функционального параметра, а под $A(\theta)v$ понимается результат применения сеточного оператора $A(\theta)$ к элементу v .

Л е м м а 4.1. *Пусть $\theta(x)$, $x \in \bar{\omega}$ – произвольная сеточная функция, заданная на сетке $\bar{\omega}$, такая что $\theta(x) \in D_u$, $\forall x \in \bar{\omega}$. Тогда оператор $A(\theta)$, задаваемый соотношением (4.19) обладает следующими свойствами*

$$\frac{\nu^2}{2\mu} \|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq \|A(\theta)v\|_{L_2(\bar{\omega})}, \quad (4.20)$$

$$\|A(\theta)v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq (1 + C_3^2)^{1/2} 6\mu^2 \|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})}, \quad (4.21)$$

$$\|v\|_{W_{2,0}^2(\bar{\omega})} \leq C_0 \|A(\theta)v\|_{L_2(\bar{\omega})}, \quad (4.22)$$

при любых $v(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, $v(x) = 0$, $x \in \gamma$; $\theta(x) \in D_u$, $x \in \bar{\omega}$, где

$$C_0 = \frac{2\mu}{\nu^2}, \quad (4.23)$$

а константа C_3 определена в лемме 3.1..

Для нахождения приближенного решения нелинейных разностных уравнений (3.16)-(3.18) построим итерационный процесс, связанный с последовательными приближениями по нелинейностям, когда коэффициенты сеточного оператора $A(y)$ берутся из предыдущей итерации, так что новое приближение $y^{(s+1)}(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, находится из решения линейной задачи:

$$A(y^{(s)})y^{(s+1)} = -\sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha\alpha}(y^{(s)})y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{(s+1)} - 2k_{12}(y^{(s)})Q(y^{(s+1)}) = f(y^{(s)}), \quad x \in \omega, \quad (4.24)$$

$$y^{(s+1)}(x) = 0, \quad x \in \gamma_h. \quad (4.25)$$

Л е м м а 4.2. Пусть $y^{(s)} \in D_u$, $x \in \bar{\omega}$. Тогда сеточная функция $y^{(s+1)}(x)$, $x \in \bar{\omega}_h$, определяемая из итерационного процесса (4.24)-(4.25), ограничена в сеточной норме $\|\cdot\|_{W_{2,0}^2(\omega)}$:

$$\|y^{(s+1)}\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq C_5, \quad C_5 = C_0 f_0(l_1, l_2)^{1/2}. \quad (4.26)$$

В процессе доказательства теоремы о сходимости метода нам понадобится оценка погрешности первого приближения $z^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - u(x)$, $x \in \bar{\omega}$, в равномерной метрике. Для того, чтобы избежать в условиях теоремы о сходимости метода итераций ограничений на значение первой итерации $y^{(1)}$, $x \in \bar{\omega}$, отдельно изучим задачу для погрешности первого приближения $z^{(1)}$, $x \in \bar{\omega}$.

Обозначим через $\psi(x)$, $x \in \omega$ – невязку разностного уравнения (3.16) (погрешность аппроксимации разностного уравнения (3.16) на решении исходного уравнения (2.1)):

$$\psi(x) = f(u) - \left[-\sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha\alpha}(u)u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2k_{12}(u)Q(u) \right] = f(u) - A(u)u, \quad x \in \omega. \quad (4.27)$$

Рассмотрим уравнение (4.24) при $s = 0$ и сложим с невязкой $\psi(x)$, $x \in \omega$. Тогда после некоторых преобразований для погрешности $z^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - u(x)$, $x \in \bar{\omega}$, получим следующую задачу

$$A(u)z^{(1)} = -\sum_{\alpha=1}^2 [k_{\alpha\alpha}(u) - k_{\alpha\alpha}(y^{(0)})]y_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{(1)} - 2[k_{12}(u) - k_{12}(y^{(0)})]Q(y^{(1)}) + \\ + [f(y^{(0)}) - f(u)] + \psi(x), \quad x \in \omega, \quad (4.28)$$

$$z^{(1)} = 0, \quad x \in \gamma, \quad (4.29)$$

где

$$A(u)z^{(1)} = -\sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha\alpha}z_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}^{(1)} - 2k_{12}(u)Q(z^{(1)}), \quad x \in \omega, \quad (4.30)$$

а сеточная функция $\psi(x)$, $x \in \omega$, имеет вид (4.27).

Оценку погрешности первого приближения $z^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - u(x)$, $x \in \bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$, в метрике $W_{2,0}^2(\omega)$ и в равномерной метрике $C(\bar{\omega})$ устанавливает следующая

Л е м м а 4.3. Пусть $y^{(0)}(x)$, $x \in \bar{\omega}$ – начальное приближение итерационного процесса (4.24)-(4.25), а $u(\xi)$ – точное решение дифференциальной задачи (2.1)-(2.2). Тогда при $y^{(0)}(x) \in D_u$ имеют место оценки

$$\|y^{(1)}(x) - u(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} = \|z^{(1)}\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq C_0 C_8 \|z^{(0)}(x)\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 \|\psi(x)\|_{L_2(\omega)}, \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \|y^{(1)}(x) - u(x)\|_{C(\bar{\omega})} &= \|z^{(1)}\|_{C(\bar{\omega})} \leq C_0 C_2 C_8 \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi\|_{L_2(\omega)} = \\ &= \frac{q_0^*}{2} \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi(x)\|_{L_2(\omega)} \leq \left(1 + \frac{q_0^*}{2}\right) \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi\|_{L_2(\omega)} = \beta, \end{aligned} \quad (4.32)$$

здесь

$$\begin{aligned} C_0 C_2 C_8 &= \frac{q_0^*}{2} = \frac{\mu(\max l_\alpha)^2}{\nu^2} \left\{ L_f + \frac{\mu f_0 [2(2 + \sqrt{2})L]}{\nu^2} \right\}; \\ C_0 &= \frac{2\mu}{\nu^2}, \quad C_1^2 = \frac{(l_1 l_2)^2}{8(l_1^2 + l_2^2)}, \quad C_2 = \frac{(\max l_\alpha)^2}{2(l_1 l_2)^{1/2}}, \\ C_3 &= \frac{(\max l_\alpha)^2}{2}, \quad C_4 = \left(\frac{l_1^2 + l_2^2}{32}\right)^{1/2}, \quad C_5 = C_0 f_0 (l_1 l_2)^{1/2}, \\ C_6 &= [2(2 + \sqrt{2})L] C_5, \quad C_7 = L_f (l_1 l_2)^{1/2}, \quad C_8 = C_6 + C_7. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Следствиe 4.1. Пусть выполнены условия леммы 4.3.. Тогда для разности $\Delta y^{(1)}(x) = y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)$ имеет место оценка

$$\|\Delta y^{(1)}(x)\|_{C(\bar{\omega})} \leq \left(1 + \frac{q_0^*}{2}\right) \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi(x)\|_{L_2(\omega)} = \beta. \quad (4.34)$$

Лемма 4.4. Пусть $y^{(k)}(x) \in D_u$, $k = 0, 1, 2, \dots, s$ – приближения, построенные на основе итерационного процесса (4.24)-(4.25). Тогда имеет место оценка

$$\|\Delta y^{(s+1)}(x)\|_{C(\bar{\omega})} \leq \frac{q_0^*}{2} \|\Delta y^{(s)}(x)\|_{C(\bar{\omega})}, \quad (4.35)$$

откуда

$$\|\Delta y^{(s+1)}(x)\|_{C(\bar{\omega})} \leq \frac{q_0^*}{2} \|\Delta y^{(s)}(x)\|_{C(\bar{\omega})} \leq \dots \leq \left(\frac{q_0^*}{2}\right)^s \|\Delta y^{(1)}(x)\|_{C(\bar{\omega})}, s = 0, 1, 2, \dots \quad (4.36)$$

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия леммы 4.4.. Тогда справедлива оценка

$$\|\Delta y^{(s+1)}\|_{C(\bar{\omega})} = \max_{x \in \bar{\omega}} |y^{(s+1)}(x) - y^{(s)}(x)| \leq \beta \left(\frac{q_0^*}{2}\right)^s, \quad (4.37)$$

здесь $\Delta y^{(s+1)} = y^{(s+1)} - y^{(s)}$, а константы $\beta > 0$ и $q_0^* > 0$ определены в лемме 4.3..

5. Теоремы о сходимости и скорости сходимости метода итераций, о существовании и единственности решения нелинейной разностной схемы

Под δ -окрестностью точного решения $u = u(x)$ дифференциальной задачи (2.1)-(2.2) будем понимать множество $S_u = \{v : \|v - u\|_C \leq \delta\}$. Очевидно, что если $v \in S_u$, то $v \in D_u$, и для этого элемента справедливы все изложенные выше утверждения.

Справедлива следующая теорема о сходимости итерационного процесса (4.24)-(4.25) и о существовании решения нелинейной разностной краевой задачи (3.16)-(3.18).

Т е о р е м а 5.1. Пусть выполнены условия из п.1 - при постановке задачи (2.1)-(2.2) и выбор начального приближения $y^{(0)}(x)$ в итерационном процессе (4.24)-(4.25) для нелинейной сеточной краевой задачи (3.16)-(3.18) подчинен условию

$$y^{(0)} \in S_u^*, \quad \frac{\beta}{1 - q_1^*} < \delta, \quad q_1^* = \frac{q_0^*}{2} < 1, \quad (5.38)$$

где

$$S_u^* = \left\{ v : \|v - u\|_C \leq \frac{1 - q_1^*}{1 + q_1^*} \cdot \frac{\delta}{2} \right\}, \quad (5.39)$$

а величина β определяется соотношением

$$\beta = (1 + q_1^*) \|z^{(0)}\|_{C(\bar{\omega})} + C_0 C_2 \|\psi(x)\|_{L_2(\omega)}, \quad z^{(0)} = y^{(0)} - u. \quad (5.40)$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) все последовательные приближения $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots$, определяемые из итерационного процесса (4.24)-(4.25), содержатся в S_u : $y^{(s)} \in S_u$, $s = 1, 2, \dots$ (т.е. для любых $s = 0, 1, 2, \dots$ последовательность решений задачи (4.24)-(4.25) принадлежит S_u , т.е. не выходит из S_u).

2) метод итераций (4.24)-(4.25) сходится, т.е. существует

$$\lim_{s \rightarrow \infty} y^{(s)} = y, \quad \text{причем } y \in S_u, \quad (5.41)$$

и предел $y \in S_u$ последовательности $\{y^{(s)}\}_{s=1}^{\infty}$ является решением нелинейной разностной краевой задачи (3.16)-(3.18), т.е. решение y разностной краевой задачи (3.16)-(3.18) лежит в окрестности S_u – точного решения $u = u(x)$ дифференциальной задачи (2.1)-(2.2).

3) скорость сходимости итерационного процесса характеризуется оценкой

$$\|y^{(s)}(x) - y(x)\|_{C(\bar{\omega})} \leq \frac{\beta}{1 - q_1^*} (q_1^*)^s. \quad (5.42)$$

Т е о р е м а 5.2. Пусть выполнены условия п.1 при постановке краевой задачи (2.1)-(2.2). Нелинейная разностная краевая задача (3.16)-(3.18) имеет в S_u – δ -окрестности точного решения u краевой задачи (2.1)-(2.2) – единственное решение.

6. Оценки погрешности и скорости сходимости разностной схемы на решениях из класса $W_2^m(\Omega)$, $3 < m \leq 4$

Перейдем к изучению погрешности аппроксимации разностной схемы (3.16)-(3.18) на сетке $\bar{\omega} = \bar{\omega}_1 \times \bar{\omega}_2$.

Оценку погрешности метода сеток устанавливает следующая

Т е о р е м а 6.1. Пусть выполнены условия п.1 при постановке дифференциальной задачи. Пусть начальное приближение $y^{(0)}(x)$ в итерационном процессе (4.24)-(4.25) принадлежит S_u^* . Тогда при достаточно малом $h < h_0$ справедлива следующая оценка погрешности метода сеток $z(x) = y(x) - u(x)$ в сеточной норме $W_{2,0}^2(\omega)$:

$$\|z(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} = \|y(x) - u(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \frac{C_0}{1 - q_1^*} \|\psi\|_{L_2(\omega)}, \quad (6.43)$$

где

$$\begin{aligned}\psi(x) &= f(u) - \left[-\sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha\alpha}(u) u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha} - 2k_{12}(u)Q(u) + q(u)u \right] = f(u) - A(u)u = \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 k_{\alpha\alpha}(u) \left(u_{\bar{x}_\alpha x_\alpha}(x) - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_\alpha^2} \right) + 2k_{12}(u) \left(Q(u) - \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)\end{aligned}\tag{6.44}$$

– невязка разностного уравнения (3.16)-(3.18).

Рассмотрим теперь сеточную функцию $\psi(x)$, $x \in \omega = \omega_1 \times \omega_2$ – погрешность аппроксимации разностной схемы (3.16)-(3.18), определяемую по формуле (6.44).

Проводя оценку правой части (6.44), получим

$$\|\psi(x)\|_{L_2(\omega)} \leq M_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)}, \quad 3 < m \leq 4,\tag{6.45}$$

где постоянная M_* не зависит от h и $u(x)$.

Т е о р е м а 6.2. Пусть решение дифференциальной задачи (2.1)-(2.2) принадлежит классу $W_2^m(\Omega)$, где m – любое число из интервала $3 < m \leq 4$ и начальное приближение $y^{(0)}$ в итерационном процессе (3.16)-(3.18) принадлежит S_u^* . Тогда при достаточно малом $h < h_0$ и при выполнении условий п.1 при постановке задачи (2.1)-(2.2), решение разностной схемы (3.16)-(3.18) сходится к решению дифференциальной задачи (2.1)-(2.2) и при этом справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток в сеточной норме $W_{2,0}^2(\omega)$

$$\|z(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} = \|y(x) - u(x)\|_{W_{2,0}^2(\omega)} \leq \tilde{M}_* |h|^{m-2} \|u\|_{W_2^m(\Omega)}, \quad 3 < m \leq 4,\tag{6.46}$$

где постоянная \tilde{M}_* не зависит от h и $u(x)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Самарский, *Теория разностных схем*, Наука, М., 1989.
2. А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич, *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.
3. А. А. Самарский, Р. Д. Лазаров, В. Л. Макаров, *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987.
4. А. А. Самарский, “Исследование точности разностных схем для задач с обобщенными решениями”, *Актуальные проблемы математической физики и вычислительной математики*, 1984, с. 174-183.
5. П. П. Матус, “Двухслойные разностные схемы с переменными весами”, *Вестник АН Беларуси. Серия физ.-мат. наук*, 4 (1993), С. 15-21.
6. В. Н. Абрашин, “Разностные схемы для нелинейных гиперболических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, 11:2 (1975), С. 294-308.

7. В. Н. Абрашин, В. А. Асмалик, “Локально-одномерные разностные схемы для многомерных квазилинейных гиперболических уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **18**:7 (1982), С. 1107-1117.
8. П. П. Матус, “О безусловной сходимости некоторых разностных схем задач газовой динамики”, *Дифференциальные уравнения*, **21**:7 (1985), С. 1227-1238.
9. П. П. Матус, Л. В. Станишевская, “О безусловной сходимости разностных схем для нестационарных квазилинейных уравнений математической физики”, *Дифференциальные уравнения*, **27**:7 (1991), С. 1203-1219.
10. П. П. Матус, М. Н. Москальков, В. С. Щеглик, “Согласованные оценки точности метода сеток для нелинейного уравнения второго порядка с обобщенными решениями”, *Дифференциальные уравнения*, **31**:7 (1995), С. 1249-1256.
11. В. С. Щеглик, “Анализ разностной схемы, аппроксимирующей третью краевую задачу для нелинейного дифференциального уравнения второго порядка”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **37**:8 (1997), С. 951-957.
12. B. S. Jovanovic, E. Suli, *Analysis of Finite Difference Schemes*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol.46., Springer Science & Business Media, London, 2014, 408 с.
13. B. S. Jovanovic, “Finite difference scheme for partial differential equations with weak solutions and irregular coefficients”, *Comput. Methods Appl. Math.*, **4**:1 (2004), P. 48-65.
14. B. S. Jovanovic, P. P. Matus, V. S. Shchehlik, “The estimates of accuracy of difference schemes for the nonlinear heat equation with weak solutions”, *Mathematical Modelling and Analysis (MMA)*, **5**:1 (2000), P. 86-96.
15. П. П. Матус, “О корректности разностных схем для полулинейного уравнения с обобщенными решениями”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **50**:12 (2010), С. 2155-2175.
16. P. Matus, “On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions”, *Comput. Methods Appl. Math.*, **14**:3 (2014), P. 361-371.
17. Ф. В. Лубышев, *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных*, БашГУ, Уфа, 1999.
18. Ф. В. Лубышев, М. Э. Файрузов, “Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и состояниями, с управлениеми в коэффициентах при старших производных”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **56**:7 (2016), С. 1267-1293.
19. С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1962.
20. С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных*, Высшая школа, М., 1973.

Поступила 30.08.2017

MSC2010 65N06

Accuracy of difference schemes for nonlinear elliptic equations with non-restricted nonlinearity

© F. V. Lubyshev⁴, M. E. Fairuzov⁵, A. R. Manapova⁶

Abstract. We consider the first boundary-value problem for nonlinear elliptic equations with mixed derivatives and unrestricted nonlinearity. Difference scheme for solution of a given problem class and an iterative process implementing the scheme are constructed and studied. Rigorous study of the iterative process' convergence is conducted. Existence and uniqueness of solution of nonlinear difference scheme approximating the original differential problem are proved. Estimates of convergence rates for difference schemes approximating nonlinear equation with non-restricted nonlinearity are obtained. These estimates are consistent with the smoothness of the sought solution.

Key Words: nonlinear elliptic equations, difference method of solving, accuracy of difference approximations, iterative process

REFERENCES

1. A. A. Samarskij, *Teoriya raznostnyh skhem*, Nauka, M., 1989 (In Russ.).
2. A. A. Samarskij, P. N. Vabishchevich, *Vychislitel'naya teploperedacha*, Knizhnyj dom «LIBROKOM», M., 2009 (In Russ.).
3. A. A. Samarskij, R. D. Lazarov, V. L. Makarov, *Raznostnye skhemy dlya differencial'nyh uravnenij s obobshchennymi resheniyami*, Vysshaya shkola, M., 1987 (In Russ.).
4. A. A. Samarskij, “Issledovanie tochnosti raznostnyh skhem dlya zadach s obobshchennymi resheniyami”, *Aktual'nye problemy matematicheskoy fiziki i vychislitel'noj matematiki*, 1984, c. 174-183 (In Russ.).
5. P. P. Matus, “Dvuhslojnye raznostnye skhemy s peremennymi vesami”, *Vestnik AN Belarusi. Seriya fiz.-mat. nauk*, 4 (1993), C. 15-21 (In Russ.).
6. V. N. Abrashin, “Raznostnye skhemy dlya nelinejnyh giperbolicheskikh uravnenij”, *Differencial'nye uravneniya*, 11:2 (1975), C. 294-308 (In Russ.).
7. V. N. Abrashin, V. A. Asmolik, “Lokal'no-odnomernye raznostnye skhemy dlya mnogomernyh kvazilinejnyh giperbolicheskikh uravnenij”, *Differencial'nye uravneniya*, 18:7 (1982), C. 1107-1117 (In Russ.).
8. P. P. Matus, “O bezuslovnoj skhodimosti nekotoryh raznostnyh skhem zadach gazovoj dinamiki”, *Differencial'nye uravneniya*, 21:7 (1985), C. 1227-1238 (In Russ.).

⁴ **Fedor V. Lubyshev**, Professor, Department of information technology and computer mathematics, of the "Bashkir state University" (450076, Russia, Republic of Bashkortostan, Ufa, street Zaki Validi, 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3279-4293>, maxam721@mail.ru

⁵ **Mahmut E. Fairuzov**, associate Professor, Department of information technology and computer mathematics, of the "Bashkir state University" (450076, Russia, Republic of Bashkortostan, Ufa, street Zaki Validi, 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9118-660X>, fairuzovme@mail.ru

⁶ **Aigul R. Manapova**, associate Professor, Department of information technology and computer mathematics, of the "Bashkir state University" (450076, Russia, Republic of Bashkortostan, Ufa, street Zaki Validi, 32), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8778-4917>, aygulrm@mail.ru

9. P.P. Matus, L.V. Stanishevskaya, "O bezuslovnoj skhodimosti raznostnyh skhem dlya nestacionarnyh kvazilinejnnyh uravnenij matematicheskoy fiziki", *Differencial'nye uravneniya*, **27**:7 (1991), C. 1203-1219 (In Russ.).
10. P.P. Matus, M.N. Moskal'kov, V.S. Shcheglik, "Soglasovannye ocenki tochnosti metoda setok dlya nelinejnogo uravneniya vtorogo poryadka s obobshchennymi resheniyami", *Differencial'nye uravneniya*, **31**:7 (1995), C. 1249-1256 (In Russ.).
11. V.S. Shcheglik, "Analiz raznostnoj skhemy, approksimiruyushchej tret'yu kraevuju zadachu dlya nelinejnogo differencial'nogo uravneniya vtorogo poryadka", *Zhurnal vychisl. matem. i matem. fiziki*, **37**:8 (1997), C. 951-957 (In Russ.).
12. B.S. Jovanovic, E. Suli, *Analysis of Finite Difference Schemes*, Springer Series in Computational Mathematics, Vol.46., Springer Science & Business Media, London, 2014, 408 c.
13. B.S. Jovanovic, "Finite difference scheme for partial differential equations with weak solutions and irregular coefficients", *Comput. Methods Appl. Math.*, **4**:1 (2004), P. 48-65.
14. B.S. Jovanovic, P.P. Matus, V.S. Shcheglik, "The estimates of accuracy of difference schemes for the nonlinear heat equation with weak solutions", *Mathematical Modelling and Analysis (MMA)*, **5**:1 (2000), P. 86-96.
15. P.P. Matus, "O korrektnosti raznostnyh skhem dlya polulinejnogo uravneniya s obobshchennymi resheniyami", *ZHurnal vychisl. matem. i matem. fiziki*, **50**:12 (2010), C. 2155-2175 (In Russ.).
16. P. Matus, "On convergence of difference schemes for IBVP for quasilinear parabolic equations with generalized solutions", *Comput. Methods Appl. Math.*, **14**:3 (2014), P. 361-371.
17. F.V. Lubyshev, *Raznostnye approksimacii zadach optimal'nogo upravleniya sistemami, opisyvaemymi uravneniyami v chastnyh proizvodnyh*, BashGU, Ufa, 1999 (In Russ.).
18. F.V. Lubyshev, M.EH. Fajruzov, "Approksimacii zadach optimal'nogo upravleniya dlya polulinejnnyh ehllipticheskikh uravnenij s razryvnymi koehfficientami i sostoyaniyami, s upravleniyami v koehfficientah pri starshih proizvodnyh", *ZHurnal vychisl. matem. i matem. fiziki*, **56**:7 (2016), C. 1267-1293 (In Russ.).
19. S.L. Sobolev, *Nekotorye primeneniya funkciononal'nogo analiza v matematicheskoy fizike*, Izd-vo SO AN SSSR, Novosibirsk, 1962 (In Russ.).
20. S.G. Mihlin, *Linejnye uravneniya v chastnyh proizvodnyh*, Vysshaya shkola, M., 1973 (In Russ.).

Submitted 30.08.2017

УДК 517.9

Регуляризация обобщенных функций в алгебре сверточных операторов

© С. Н. Нагорных¹, Д. С. Саблуков²

Аннотация. Рассмотрена вспомогательная задача вычисления интеграла Коши с помощью n -кратного интеграла в операторах целочисленных порядков. Это n -кратное дифференцирование приводит к неоднородной и однородной системам обыкновенных дифференциальных уравнений n -порядка. Решение первой системы равно свертке решения второй системы с произвольной функцией, образующей неоднородность первой системы. Это является необходимым условием решения данной задачи. Свертка является достаточным условием введения алгебры операторов дробного порядка и эквивалентности этой алгебры алгебре операторов свертки. Кроме этого существенно наличие обыкновенного дифференциального уравнения, определяющего устойчивость времени. Подалгеброй дробного порядка менее 1 определены операторы свертки как параметрические обобщенные функции, их асимптотические значения и единичные операторы. Алгебрами определена тождественность обыкновенных уравнений при подстановке в них операторов n -кратных интегралов. Регуляризация по В.С. Владимирову с привлечением теоремы Хорстхемке-Саичева соответствует регуляризации Н.Н. Боголюбова по сверхтекучести. Устойчивость сверхтекучести по времени описывается уравнением Ньютона и его квантовым аналогом. Параметрические обобщенные функции и их симметрия устойчивы.

Ключевые слова: обобщенные функции, регуляризация, алгебра сверточных операторов, интеграл Коши.

1. Введение

Регуляризация обобщенных функций (ОФ) приводится в работах [1, 2], однако в них не учтена устойчивость ОФ, которую ввел Н. Н. Боголюбов в работе 1947 года по сверхтекучести [3]. Регуляризацию будем рассматривать в связи с теоремой Хорстхемке-Саичева (ТХС) [4] по Стратановичу, которая состоит в следующем: для существования и совместности решений стационарного уравнения Фоккера-Планка (УФП) по Стратановичу в окрестности точки $x = 0$ со стационарным решением уравнения Ферхюльста в точке бифуркации $x = 0, \lambda = 0$ (λ -параметр) необходимо и достаточно, чтобы они имели вид $\delta(x)$ или $\delta(x - b(t))$ в стационарном и нестационарном случаях. Точка бифуркации $x = 0, \lambda = 0$ понимается как пересечение устойчивого $x = \lambda$ и неустойчивого $x = 0$ решений Ферхюльста в параметрическом пространстве X . В этой точке расходится плотность вероятности – решение УФП, но сходится к $\delta(x)$ при параметре $\alpha = \frac{2\lambda}{\sigma^2} \rightarrow 0+$ по ТХС. Разбиение плотности вероятности на произведение ОФ и основной функции линейного функционала может быть распространена на свертки.

¹ Нагорных Сергей Николаевич, доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24), кандидат-физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5552-8521>, algoritm@sandy.ru

² Саблуков Денис Сергеевич, бакалавр, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, (603950, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Минина, 24), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7771-8924>, denis-sablukov@mail.ru

2. Обыкновенные дифференциальные уравнения в алгебрах операторов

Сначала обозначим и вычислим интеграл Коши от функции $\xi(t) \in C^\infty$

$$I^n \xi(t) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (1-s)^{n-1} \xi(s) ds \quad (2.1)$$

с помощью n-кратного интеграла от $\xi(t)$

$$I^n \xi(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \xi(t_n), \quad (2.2)$$

где I^n – символ оператора n-кратного интегрирования, n – положительное целое число, $n \geq 1$. Введем функцию $x(t)$ совпадающую с правой частью (2.2)

$$I^n \xi(t) = x(t). \quad (2.3)$$

Дифференцируя обе части равенства (2.3) n раз получаем $x(t)$ – решение обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ)

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} = \xi(t), \quad (2.4)$$

где

$$\xi(t) \equiv 0, \forall t < 0. \quad (2.5)$$

Тогда решение уравнения (2.4) имеет вид

$$x(t) = \int_0^t K_n(s) \xi(t-s) ds, \quad (2.6)$$

где ядро $K_n(t)$ – решение ОДУ

$$\frac{d^n K_n(t)}{dt^n} = 0 \quad (2.7)$$

с начальными условиями $K_n(0) = K'_n(0) = \dots = K_n^{(n-2)} = 0, K_n^{(n-1)} = 1$.

Решение (2.7) имеет вид

$$K_n(t) = \frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} \chi(t), \quad (2.8)$$

где $\chi(t)$ – функция Хевисайда. Решение (2.6) в символьическом виде

$$x(t) = K_n(t) * \xi(t), \quad (2.9)$$

где $K_n(t)*$ – символ оператора свертки. Таким образом (2.9) с ядром вида (2.8) необходимо для вычисления (2.1) с помощью (2.2).

Достаточно принять (2.9). Введем и обозначим оператор интегрирования дробного порядка α , как оператор I^α . Заменим целое n в ядре $K_n(t)$ (2.8) произвольным неотрицательным числом α , а факториал числа заменим гамма-функцией $\Gamma(\alpha)$

$$(n-1)! = \Gamma(n) = \Gamma(\alpha), \quad (2.10)$$

где $\Gamma(\alpha)$ продолжает $\Gamma(n)$ на произвольное значение α . Ядро $K_n(t)$ примет вид

$$K_n(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} \chi(t). \quad (2.11)$$

Интеграл свертки назовем интегральным оператором дробного порядка

$$I^\alpha \xi(t) = K_\alpha(t) * \xi(t). \quad (2.12)$$

Запишем (2.12) в явном виде

$$I^\alpha \xi(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \xi(s) ds, s > 0. \quad (2.13)$$

Рассмотрим

$$I^\alpha I^\beta = I^{\alpha+\beta}. \quad (2.14)$$

Покажем, что (2.14) эквивалентно

$$K_\alpha * K_\beta = K_{\alpha+\beta}. \quad (2.15)$$

Имеем [1]

$$K_\alpha * K_\beta = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t s^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1} \xi(s) ds. \quad (2.16)$$

Сделаем замену $\tau = s/t$ в (2.16). Получим

$$K_\alpha * K_\beta = \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta), \quad (2.17)$$

где

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^t \tau^{\alpha-1} (1-\tau)^{\beta-1} d\tau \quad (2.18)$$

– бета-функция.

Известно равенство [1]

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \quad (2.19)$$

Подставим (2.19) в (2.17) и убедимся, что (2.14) эквивалентно (2.15). Выражение (2.15) описывает алгебраические свойства операторов сверток – решений уравнений (2.4, 2.7).

Рассмотрим дробные порядки $\gamma < 1$. Соответствующие операторы обозначим I^γ . Пусть n – $[\alpha]$ – наибольшее целое число, меньшее α на γ – дробную часть α . Аналогичное (2.14) алгебраическое выражение будет

$$I^\alpha = I^\gamma I^n, \quad (2.20)$$

где

$$\alpha = \gamma + n. \quad (2.21)$$

Подставим (2.21) в (2.20), получим

$$I^\alpha = I^{\alpha-n} I^n = I^\alpha I^{-n} I^n. \quad (2.22)$$

Положим $I^{-n}I^n = 1$. Определим I^{-n} как оператор n -кратного дифференцирования, которое ранее явно введено в (2.4, 2.7) по определению ОДУ. Тогда (2.20) есть подалгебра алгебры (2.14).

Ядро $K_\gamma(t)$ является сингулярной параметрической ОФ $K_\gamma(t) \in D'$, так как по ТХС с помощью линейного функционала

$$K_\gamma(t) \rightarrow \delta(t), \gamma \rightarrow 0+ \quad (2.23)$$

в окрестности $t = 0$. Параметр $\gamma = \frac{2\lambda}{\sigma^2}$, σ^2 – интенсивность белого шума. Поскольку из (2.20) имеем

$$K_\gamma(t) * K_n(t) = K_\alpha(t), \quad (2.24)$$

то следует положить сверточный оператор $K_\gamma(t)* = K_0(t)* = 1$. Тогда получим

$$K_n(t) = K_\alpha(t), 0 \leq \gamma < 1. \quad (2.25)$$

Аналогично определим при $\gamma = 0$, $I^\gamma = I^0 = 1$ из (2.20). Имеем также асимптотическое условие алгебры (2.20) как подалгебры (2.14)

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} I^\alpha \xi(t) = \xi(t). \quad (2.26)$$

Обратно, в силу эквивалентности (2.14) и (2.15), можно перенести асимптотические свойства $K(t)$ с (2.20) на (2.15). Действительно, имеем

$$\Gamma(\alpha) \sim \alpha^{-1}, \alpha \rightarrow 0. \quad (2.27)$$

Определим параметр λ как критическую точку (точку бифуркации) $t = 0, \lambda = 0$ нелинейного ОДУ (2.28) из (2.16) при $\alpha = \beta$ и как асимптотическое условие $\alpha = \frac{2\lambda}{\sigma^2} \rightarrow 0$ при $K_\alpha(t) \rightarrow \delta(t)$, $\alpha \rightarrow 0+$ в окрестности $t = 0$ ОДУ

$$\dot{t} = \lambda t - t^2, \quad (2.28)$$

где \dot{t} – производная текущего времени по времени сдвига (сканировании) в свертке, $\lambda = s$ – положительный либо отрицательный параметр. $t = 0$ – неустойчивое решение (2.28), $t = \lambda$ – устойчивое решение (2.28). Решение $x(t)$ ищем с помощью кратного интеграла через операторы дробного порядка α алгебры (2.14) и устойчивого t , удовлетворяющего (2.5).

$$x(t) = I^\alpha \xi(t). \quad (2.29)$$

ОДУ (2.4) будет иметь вид через I^n алгебры (2.20)

$$I^{-n}x(t) = \xi(t). \quad (2.30)$$

Подставим (2.29) в (2.30). Получим

$$I^{-n}I^\alpha \xi(t) = \xi(t). \quad (2.31)$$

Согласно (2.21) имеем

$$I^\gamma \xi(t) = \xi(t). \quad (2.32)$$

По определению $I^\gamma = 1$ равенство (2.32) выполняется тождественно. В итоге достаточно (2.9) и алгебраических свойств решений ОДУ (2.4, 2.7) для выполнения тождества

(2.32) при подстановке в (2.4) в операторном виде выражения (2.29) с помощью равенств (2.1, 2.2). Тогда алгебра сверточных операторов (2.15) совпадает с D'_+ [1]. Алгебра D'_+ одномерных ОФ $K_\alpha(t)$ справедлива для сингулярных $\delta(t)$ и для сходимости основной функции к $\delta(t)$ [1]. Сформулируем теорему.

Т е о р е м а 2.1. Для вычисления интеграла Коши от $\xi(t) \in C^\infty$ с помощью оператора n -кратного интегрирования необходимо решение системы ОДУ n -порядка представить в виде свертки (2.9) и достаточно (2.9) представить интегральным оператором дробного порядка, ядро которого является параметрической ОФ из алгебры D'_+ с неустойчивым $t = 0$ и устойчивым $0 < t$ решением ОДУ (2.28).

3. Регуляризация обобщенных функций в алгебре сверточных операторов

С л е д с т в и е 3.1. Функция $x_\alpha(t) \in C^\infty(R^n)$ согласно [1] называется регуляризацией ОФ $K(s)$

$$x_\alpha(t) = K * \xi = \langle K(s), \xi(t-s) \rangle, \quad (3.1)$$

где $\xi(t-s) \in D(R^n)$ – основная функция. Внешние угловые скобки означают линейный функционал в (3.1). Поскольку $\xi_\alpha(t) \rightarrow \delta(t)$ при $\alpha \rightarrow 0+$ в D' , из непрерывности свертки $K * \xi_\alpha$ относительно ξ_α получаем $x_\alpha(t) \rightarrow K(t)$, $\alpha \rightarrow 0+$ в D' . Очевидно, регуляризация ОФ $K(t)$ в $D'(R^1)$ есть сходимость параметрической функции $x_\alpha(t) \in C^\infty(R^1)$ к ОФ $K(t)$.

Согласно ТХС можно получить, дифференцируя $\xi_\alpha(t-s)$ в окрестности точки сходимости локально интегрируемой функции $K(t)$ (открывая ряд Тейлора не аналитической $\xi_\alpha(t-s)$ в окрестности этой точки на линейном члене в силу сдвиговой симметрии $\xi_\alpha(t)$), равенство между функциями, осуществляющими регуляризацию ОФ

$$x_\alpha(t) = \delta(t) + \tilde{x}_\alpha(t). \quad (3.2)$$

Плотность вероятности в [3] найдена в приближении слабовзаимодействующего бозе-газа из уравнения Шредингера в непрерывном спектре импульсов p

$$x_\alpha(p) = \frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3} \sum_{p \neq 0} \overline{b_p^* b_p}, \quad (3.3)$$

где b_p^* , b_p – динамические операторы рождения и гибели p ; ν , \hbar – постоянные, знак $*$ – комплексное сопряжение. Черта над правой частью (3.3) есть усреднение. Кроме того (3.3) представлено в виде:

$$x_\alpha(p) = C\delta(p) + \frac{\nu}{(2\pi\hbar)^3} \tilde{x}_\alpha(p); \tilde{x}_\alpha(p) = \frac{\bar{n}_\alpha^p + |L_p|^2(\bar{n}_\alpha^{-p} + 1)}{1 - |L_p|^2}, \quad (3.4)$$

который совпадает с нормированным (3.2). Позже (3.4) опубликовано в работах [6] [8] как регуляризация функции $x_\alpha(p)$. Равновесное среднее чисел заполнения в [3]

$$\bar{n}_\alpha^p = \left\{ \exp \frac{E(p) - (pu)}{\Theta} - 1 \right\}^{-1} \quad (3.5)$$

формально при $p \rightarrow 0$ расходится, что соответствует неподвижному конденсату квазичастиц относительно движений бозе-газа с постоянной скоростью u . $\frac{\Theta}{C_{36}-u} = \alpha, C_{36}, C, \Theta$ – постоянные, L_p – функция от p , $E(p) = C_{36}p$.

Следствие 3.2. В [3] независимым аргументом выбран импульс p , что придает (2.28) смысл уравнения Ньютона (динамическая кинематика рождения-гибели $|p|$ при классических значениях λ)

$$|\dot{p}| = \lambda|p| - |p|^2, \quad (3.6)$$

где $|p|$ – модуль импульса отражает симметрию потенциала взаимодействия частиц бозе-газа. Причем $p = 0$ это неустойчивый покой конденсата квазичастиц, относительно бозе-газа, движущегося с постоянной скоростью u ; $\lambda < 0$ это преобладает устойчивая гибель квазичастиц в движущемся конденсате относительно бозе-газа с постоянной скоростью u .

Следствие 3.3. Неустойчивость $\delta(t)$ при $\alpha \rightarrow 0$ и устойчивость параметрических $O\Phi$ $\delta(t-S)$ по (2.28) влечет устойчивость не особенных преобразований симметрии $x_\alpha(t)$ сдвига, вращения, подобия [1].

Следствие 3.4. Из [3] известна неустойчивость слабовозбужденных колективных фононных состояний слабо неидеального Бозе-газа, выражаемая неравенством $\nu(p=0) < 0$, где $\nu(p=0) = \int \Phi(|q|)dq$ – амплитуда борновской вероятности парного соударения с потенциальной функцией $\Phi(|q|)$. Устойчивое состояние $\nu(p=0) > 0$ эквивалентно устойчивости газа при нулевой температуре [3]. Для p – независимого аргумента модели [3] получено уравнение (3.6), которое в квантовом приближении имеет устойчивое решение

$$|p| = \frac{mqE}{\hbar}, \quad (3.7)$$

где q – координата и неустойчивое решение

$$|p| = 0. \quad (3.8)$$

При $E = C_{36}|p|$ [3] имеем важнейший критерий квантовой теории – соотношение неопределенности

$$[qp_s] = \hbar, \quad (3.9)$$

где $p_s = mC_{36}$. При $E = \frac{\nu(0)|p|^2}{2m}$ имеем

$$\nu(0) = \frac{2\hbar}{q|p|} \quad (3.10)$$

и

$$\nu(0) > 0 \text{ при } q > 0, \nu(0) < 0 \text{ при } q < 0, \quad (3.11)$$

соответствующие устойчивости и неустойчивости по Боголюбову.

Из $\bar{n}_\alpha^p > 0$ (3.5) следует

$$\frac{E(p)}{|p|} = |u| = C_{36} > 0 \text{ при } |p| = 0. \quad (3.12)$$

Выражение (3.12) согласно (3.8) характеризует как неустойчивое движение газа со скоростью $|u| = C_{36}$ дополнительно к (3.11).

По теореме ТХС [4] имеем плотность вероятности

$$|p|^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} e^{\frac{-2|p|}{\sigma^2}}, p \in [0, \infty). \quad (3.13)$$

Приравнивая (3.13) и экспоненциальный множитель (3.5), имеем

$$\frac{\sigma^2}{2} = \frac{T}{|u|}. \quad (3.14)$$

Источником белого шума согласно (3.14) является температура конденсата и скорость движение газа относительно конденсата $|u|$.

При $\frac{2\lambda}{\sigma^2} \rightarrow 0$ имеем

$$p_{1,2} = -\frac{T}{2C_{36}} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{T}{C_{36}}\right)^2 + 4 \frac{T}{C_{36}}}, \quad (3.15)$$

при $\lambda = \sigma^2$

$$p = \frac{1}{1 - \frac{C_{36}}{T}}, \quad (3.16)$$

при $\lambda = \frac{3}{2}\sigma^2$

$$p_{1,2} = \frac{C_{36}}{2T} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{C_{36}}{T}\right)^2 + 4}. \quad (3.17)$$

Выражению (3.15) с отрицательной температурой конденсата отвечает инверсность заселения распада конденсата при $p = 0$.

Следствие 3.5. Кинетика фемтотоков стимулированной электронной эмиссии (СЭЭ) окисленного катода рассматривалась в работе [5] с помощью ОДУ для N – концентрации электронов проводимости, ν – концентрация заполненных электронных ловушек в запрещенной зоне окисла

$$\dot{N} = B\nu - A_1(\nu_1 - \nu)N - A_2N + f_1(t), \quad (3.18)$$

$$\dot{\nu} = -B\nu - A_1(\nu_1 - \nu)N - A_3N + f_2(t), \quad (3.19)$$

где

$$Y = Y_{CT} + Y_{C\Theta}(t), Y_{C\Theta}(t) = L(A_2N + A_3\nu), \quad (3.20)$$

$$A_3 = \frac{v_1}{a}D(E_1), \quad (3.21)$$

где $A_1, A_2, A_3, B, L, \nu_1$ – постоянные, $Y = Y_{CT}$ – стационарная электронная эмиссия, L – толщина окисла, v_1 – скорость электрона, a – ширина ямы, $D(E_1)$ – коэффициент прозрачности в зависимости от приложенного электрического поля E_1 . Преобразуем систему (3.18-3.19) с помощью (3.22, 3.23), получим уравнение (3.6) для ν

$$f_1 = 0, \dot{N} = 0, A_2 >> A_1(\nu_1 - \nu), \quad (3.22)$$

$$\lambda_0 = \nu_1 - A_2/A_1(A_3/B + 1), d\tilde{t} = \frac{A_1B}{A_2}dt, \quad (3.23)$$

где ν_1 – концентрация заполненных и пустых ловушек, $\frac{A_2}{A_1}$ – вероятность ухода электронов из зоны проводимости, $\frac{A_3}{B}$ – вероятность ухода электронов с ловушек, A_1B – совместная вероятность рождения-гибели ловушек. Если поток дивакансий из металла в окисел положитъ $f_2 = \sigma\xi_t\nu$, то имеем условие аддитивности белого шума к среднему λ_0

$$\nu_1 - \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{A_3}{B} + 1 \right) + \sigma\xi_t. \quad (3.24)$$

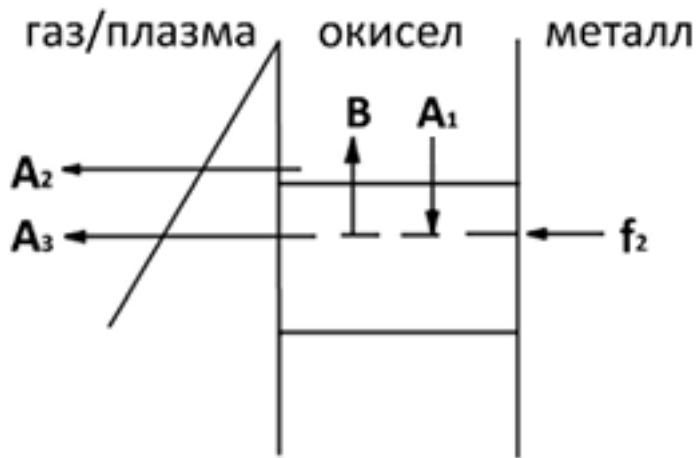


Рисунок 3.1

Энергетическая диаграмма переходов электронов A_1, A_2, A_3, B в зависимости от координаты с электронными ловушками в запрещенной зоне окисла. f_2 – поток вакансионных дефектов из металла.

Переходы стационарного электронного спектра окисла изображены на рис. 3.1. При $A_2 = A_1$, $A_3 = B$, $\lambda_0 = 0$ обнаруживается более слабое неравенство $A_2 > A_1(\nu_1 - \nu)$. Неравенство $E_1 \gg E$ позволяет отказаться в (3.6) и (3.18, 3.19) от градиентных членов для потенциала при $E = \frac{A_2}{A_1} \left(\frac{A_3}{B} + 1 \right) / \epsilon S$, где S – площадь электрода, ϵ – диэлектрическая проницаемость окисла ($E \approx 10^3$ В/см).

В экспериментах на разрядниках [5] была установлена связь между $Y_{СЭЭ}$ и средним статистическим временем запаздывания пробоя $\bar{t}_{СВЗ}$ при приложении ступени напряжения.

$$Y_{СЭЭ} = \frac{2e}{\bar{t}_{СВЗ}}, \quad (3.25)$$

где e – заряд электрона. Приравняем (3.25) и (3.20) для $Y_{СЭЭ} = L A_3 \nu$, получим $\nu = \frac{2e}{\bar{t}_{СВЗ} L} A_3^{-1}$. Экспериментально установлена плотность вероятности $t_{СВЗ}$, имеющая вид [5]

$$A_3^{-1} = t_{СВЗ}^{\frac{2\lambda}{\sigma^2} - 1} e^{-\frac{2t_{СВЗ}}{\sigma^2}}. \quad (3.26)$$

Плотность вероятности (3.26) по ТХС соответствует (2.28) и экспериментально подтверждает уравнение. В квантовой интерпретации (3.26) имеет вид

$$A_3^{-1} = \left(\frac{\hbar}{E} \right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2} - 1} e^{-\frac{2\hbar}{E\sigma^2}}, \quad (3.27)$$

где E – энергия электронной ловушки. Таким образом, (3.27) описывает электронный спектр ловушек в запрещенной зоне окисла. Пример такого спектра имеется в работе по люминесценции полупроводников с неосновными носителями [7]. Уравнение (3.6) для ν , получено в модели фемтотоков СЭЭ с окисленного катода и подтверждено экспериментальными фактами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*, М. Наука, 1981, 512 с.
2. Ю. Н. Дрожжинов, Б. И. Завьялов, *Введение в теорию обобщенных функций*, Лекц. курсы НОЦ, 5, МИАН, М., 2006, 164 с.
3. Н. Н. Боголюбов, “К теории сверхтекучести”, *Известия АН СССР серия физическая*, **11**:1 (1947), 77-90.
4. С. Н. Нагорных, “Критические параметры плотности вероятности в индуцированных шумом переходах”, *Журн. СВМО.*, **16**:4 (2014), 50-52.
5. S. N. Nagornykh, “On exoelectron emission kinetics under strain excitation of metals”, *Proc. 4 Intern. Symp. Exoelectron Emission Dosimetry. Czech. Acad. Sci. @ Atom Energy Com., Liblice*, 1973, 178-193.
6. Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Статистическая физика. Часть 2. Теория конденсированного состояния*, М. Наука, 1978, 448 с.
7. А. П. Леванюк, В. В. Осипов, “Краевая люминесценция прямозонных полупроводников”, *Успехи физических наук*, **133**:3 (1981).
8. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними. Выпуск 1*, М. ФИЗМАТ ГИЗ, 1959, 472 с.

Поступила 15.09.2017

MSC2010 44F10

Regularization of generalized functions in convolution operator algebra.

© S. N. Nagornykh³, D. S. Sablukov⁴

Abstract. A problem of Cauchy integral calculation with the aid of n-fold multiple integral by integer-order operators is investigated. This n-fold multiple differentiation results in n-order uniform and non-uniform systems of ordinary differential equations. The solution of the first system is equal to the convolution of the second system's solution with arbitrary function forming heterogeneity of the first system. This is the necessary condition of existence of the given problem's solution. The convolution is a sufficient condition for establishing of the fraction order operator algebra that is equivalent to convolution operator algebra. Besides that, existence of the ordinary differential equation defining stability of time, is important, too. Subalgebra of fractional order less than 1 defines convolution operators as parametric generalized functions, their asymptotic values and unity operators. Both algebras determine identity of ordinary differential equations after substituting n-fold multiple operator integral in these equations. Vladimirov's regularization according to Horsthemke-Saichev theorem corresponds to Bogolubov's regularization for superfluidity. Time stability of superfluidity is described by the Newton equation. Parametric generalized functions and their symmetry are stable.

Key Words: generalized functions, regularization, convolution operator algebra, Cauchy integral.

REFERENCES

1. Vladimirov V. S., *Uravneniya matematicheskoy fiziki [Equations of mathematical hysics]*, Nauka Publ, Moscow, 1981 (In Russ.), 512 p.
2. Yu. N. Drozhzhinov, B. I. Zav'yalov, *Vvedenie v teoriyu obobshchennykh funktsiy [Introduction to the theory of generalized functions.]*, Lektsionnye kursy NOTs, 5, MIAN, Moscow, 2006 (In Russ.), 164 p.
3. Bogolubov N. N., “K teorii sverkhtekuchesti [On the Theory of Superfluidity]”, *Izvestiya AN SSSR seriya fizicheskaya*, **11**:1 (1947), 77-90 (In Russ.).
4. Nagornykh S. N., “Kriticheskie parametry plotnosti veroyatnosti v indutsirovannykh shumom perekhodakh [Critical Parameters of Probability Density in Noise-Induced Transitions]”, *Jour. SVMO*, **16**:4 (2014), 50-52 (In Russ.).
5. Nagornykh S. N., “On exoelectron emission kinetics under strain excitation of metals”, *Proc. 4 Intern. Symp. Exoelectron Emission Dosimetry. Czech. Acad. Sci. @ Atom Energy Com., Liblice*, 1973, 178-193.
6. Lifshic, E. M., Pitaevsky, L. P., *Statisticheskaya fizika. Chast 2. Teoriya kondensirovannogo sostoyaniya*, M. Nauka, 1978 (In Russ.), 448 p.

³ Sergey N. Nagornykh, Associate Professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev (24 Minina Str., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Ph. D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5552-8521>, algoritm@sandy.ru

⁴ Denis S. Sablukov, Bachelor, Nizhniy Novgorod State Technical University after R. E. Alekseev (24 Minina Str., Nizhny Novgorod 603950, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7771-8924>, denis-sablukov@mail.ru

7. A. P. Levanyuk, V. V. Osipov, “Kraevaya lyuminiscenciya pryamozonnykh poluprovodnikov[Edge luminescence of direct-gap semiconductors]”, *Uspekhi Fizicheskikh Nauk*, **133**:3 (1981) (In Russ.).
8. Gelfand, I M., Shilov, G. E., *Obobschennye funkci i deystviya nad nimi*, M. FIZMAT GIZ, 1959 (In Russ.), 472 p.

Submitted 15.09.2017

УДК 517.95

Об одной априорной оценке для эллиптического оператора второго порядка, вырождающегося вдоль оси координат, перпендикулярной к границе полуплоскости

© Г. А. Смолкин¹

Аннотация. Вопросы разрешимости, свойств решений дифференциальных уравнений с частными производными и соответствующих краевых задач часто сводятся к априорным оценкам в пространствах С.Л. Соболева и их обобщений, исследованием которых посвящены многочисленные работы ряда авторов. К ним относится и данная работа. В ней дается метод сведения оценок Соболевских норм, определенных в евклидовом полупространстве, к оценкам норм, определенных на всем евклидовом пространстве. В работе получено неравенство, левая часть которого является нормой производной второго порядка функции по нормали к границе полуплоскости, а правая – линейной комбинацией норм образа, порожденного действующим на эту функцию вырождающимся эллиптическим оператором, и следа функции на границе полуплоскости. В доказательстве неравенства использованы два продолжения функции из полуплоскости на всю плоскость. С помощью первого продолжения, подробно изученного Л.Н. Слободецким, имеющего производные до третьего порядка включительно, неравенство сводится к оценкам смешанных производных и производной четвертого порядка по касательному направлению к границе полуплоскости, которые получаются на основе второго продолжения – дважды дифференцируемой функции. Полученные результаты можно распространить на более широкий класс операторов, они могут быть применены при изучении краевых задач для вырождающихся эллиптических и квазиэллиптических операторов.

Ключевые слова: преобразование Фурье, пространства С.Л. Соболева, априорные оценки, вырождающийся эллиптический оператор, продолжение функции.

В статье приняты следующие общепринятые обозначения [1]-[4]:

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2) & - \text{точки плоскости } R^2; \quad x\xi = x_1\xi_1 + x_2\xi_2, \\ \lambda(t) = (1 + |t|^2)^{1/2}, \quad \partial_k^j = \frac{\partial^j}{\partial x_k^j}, \quad i^2 = -1, \quad D_k^j = i^{-j} \frac{\partial^j}{\partial x_k^j}, \quad k = 1, 2; \quad j = 1, 2, \dots; \\ \widetilde{w}(\xi) = \int e^{-ix\xi} w(x) dx, \quad \widetilde{w}(\xi_1, x_2) = \int e^{-ix_1\xi_1} w(x) dx_1, \\ \widetilde{w}(x_1, \xi_2) = \int e^{-ix_2\xi_2} w(x) dx_2 \end{aligned}$$

– преобразования Фурье функции $w(x)$ по переменным x , x_1 , x_2 соответственно. При этом

$$w(x) = (2\pi)^{-2} \int e^{ix\xi} \widetilde{w}(\xi) d\xi, \quad \text{если } \int |\widetilde{w}(\xi)| d\xi < \infty;$$

Скалярное произведение $(w(x), W(x))$, функции $A(x, D)w$, $A(x, D_1)w$,

¹ Смолкин Георгий Александрович, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/> <https://orcid.org/0000-0001-5964-9814>, smolkinga@yandex.ru

$A(x, D_2)w$, нормы $\|w(x)\|$, $\|w(x)\|_{x_2>0}$ определяются равенствами

$$\begin{aligned} (w(x), W(x)) &= \int w(x) \bar{W}(x) dx = \int \int w(x_1, x_2) \bar{W}(x_1, x_2) dx_1 dx_2, \\ A(x, D)w &= (2\pi)^{-2} \int e^{ix\xi} A(x, \xi) \tilde{w}(\xi) d\xi, \\ A(x, D_1)w &= (2\pi)^{-1} \int e^{ix_1\xi_1} A(x, \xi_1) \tilde{w}(\xi_1, x_2) d\xi_1, \\ A(x, D_2)w &= (2\pi)^{-1} \int e^{ix_2\xi_2} A(x, \xi_2) \tilde{w}(x_1, \xi_2) d\xi_2, \\ \|w(x)\|^2 &= (w(x), w(x)), \quad \|w(x)\|_{x_2>0}^2 = \int_{x_2>0} |w(x)|^2 dx \end{aligned}$$

соответственно.

Постоянные, возникающие в неравенствах в качестве коэффициентов, будем обозначать буквой C , быть может с индексами (в случае необходимости).

Часто будем использовать неравенства [1, 2]

$$\begin{aligned} \|w(x)\|^2 &\leq C_1(\tilde{w}(x_1, \xi_2), \tilde{w}(x_1, \xi_1)) \leq C_2(\tilde{w}(\xi_1, x_2), \tilde{w}(\xi_1, x_2)) \leq \\ &\quad C_3(\tilde{w}(\xi), \tilde{w}(\xi)) \leq C_4\|w(x)\|^2, \\ \|\lambda^s(D_2)z(t)\|^2 &\leq C_5\left(\int |z(t)|^2 dt + \int \int \frac{|z(t) - z(\tau)|^2}{|t - \tau|^{1+2s}} dt d\tau\right) \leq \\ &\quad C_6\|\lambda^s(D_2)z(t)\|^2, \end{aligned} \quad (1.1)$$

которые справедливы при некоторых положительных и независимых от $w(x) \in C_0^\infty(R^2)$, $z(t) \in C_0^\infty(R)$, константах C_j , $j = 1, \dots, 6$. $0 < s < 1$.

Нам потребуются равносильные оценки [3, 4]

$$\begin{aligned} \|\lambda^{1/2}(D_2)w(x)\|^2 &\leq C((D_1w(x), D_1w(x)) + \\ &\quad (x_1 D_2w(x), x_1 D_2w(x)) + \|w(x)\|^2), \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \|\lambda^{1/2}(\xi_2)\tilde{w}(x_1, \xi_2)\|^2 &\leq C((D_1\tilde{w}(x_1, \xi_2), D_1\tilde{w}(x_1, \xi_2)) + \\ &\quad (x_1 \xi_2 \tilde{w}(x_1, \xi_2), x_1 \xi_2 \tilde{w}(x_1, \xi_2)) + \|w(x)\|^2), \end{aligned} \quad (1.3)$$

которые справедливы для любой дифференцируемой функции $w(x)$ с компактным носителем.

Приступим к изложению результатов работы.

Всюду ниже $u(x) \in C_0^\infty(K)$, K – компакт из R^2 .

$$P(x, D) = D_1^2 + x_1^2 D_2^2, \quad f(x) = P(x, D)u,$$

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x_2 \geq 0 \\ f(x_1, -x_2), & \text{если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x_2 \geq 0 \\ u(x_1, -x_2), & \text{если } x_2 < 0, \end{cases}$$

$h(t) \in C_0^\infty(R)$, $0 \leq h(t) \leq 1$; $h(t) = 1$, если $|t| \leq 1$; $h(t) = 0$, если $|t| \geq 2$. Пусть

$$v_1 = v_1(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x_2 \geq 0 \\ 2h(x_2 \lambda^2(D_1))u(x_1, 0) - u(x_1, -x_2), & \text{если } x_2 < 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

Л е м м а 1.1. Для любых постоянных $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$ справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \|h(x_1 \varepsilon \mu(D_2)) D_2^2 v_1(x)\| \leq \\ C_1(\varepsilon) C_2(\gamma) (\|(\lambda^{2+\gamma}(D_1) + \lambda^\gamma(D_1) \lambda(D_2)) f(x)\|_{x_2>0} + \\ \|\lambda^{3+\gamma}(D_1) u(x_1, 0)\| + |D_1^2 P(x, D) h(x_2 \lambda^2(D_1)) u(x_1, 0)| + \|v_1(x)\|) + \\ C(\varepsilon \|\lambda^{3/2}(D_2) D_1 v_1(x)\| + \varepsilon^2 \|\lambda^2(D_2) v_1(x)\|), \end{aligned} \quad (1.5)$$

при этом

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_1(\varepsilon) = \infty, \quad \lim_{\gamma \rightarrow 0} C_2(\gamma) = \infty.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть

$$T = \|h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \lambda^2(\xi_2) \tilde{v}_1(x_1, \xi_2)\|^2. \quad (1.6)$$

Положив в неравенстве (1.3) $\tilde{w}(x_1, \xi_2) = h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \lambda^{3/2}(\xi_2) \tilde{v}_1(x_1, \xi_2)$, получим

$$\begin{aligned} T \leq C((D_1 h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \lambda^{3/2}(\xi_2) \tilde{v}_1(x_1, \xi_2), D_1 h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \lambda^{3/2}(\xi_2) \tilde{v}_1(x_1, \xi_2)) + \\ (x_1 \xi_2 h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \lambda^{3/2}(\xi_2) \tilde{v}_1(x_1, \xi_2), x_1 \xi_2 h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \lambda^{3/2}(\xi_2) \tilde{v}_1(x_1, \xi_2)) + \\ \|v_1(x)\|^2). \end{aligned}$$

Отсюда, интегрируя по частям, получаем

$$T \leq C(I + \|v_1(x)\|^2) + \varepsilon \|\lambda^{3/2}(D_2) D_1 v_1(x)\|^2 + \varepsilon^2 \|\lambda^2(D_2) v_1(x)\|^2, \text{ где} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} I = \int \int |h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \lambda(\xi_2) \tilde{F}_1(x_1, \xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2, \\ \tilde{F}_1(x_1, \xi_2) = (D_1^2 + x_1^2 \xi_2^2) \tilde{v}_1(x_1, \xi_2). \end{aligned} \quad (1.8)$$

Оценим интеграл I .

Согласно формуле Ньютона-Лейбница

$$\tilde{F}_1(x_1, \xi_2) = \tilde{F}_1(0, \xi_2) + x_1 \partial_1 \tilde{F}_1(0, \xi_2) + \int_0^{x_1} \int_0^{t_1} \partial_1^2 \tilde{F}_1(t_2, \xi_2) dt_2 dt_1.$$

Поэтому

$$I \leq C(J_0 + J_1 + J_2), \text{ где}$$

$$\begin{aligned} J_0 &= \int \int |h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \lambda(\xi_2) \tilde{F}_1(0, \xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2 \leq \frac{C}{\varepsilon} \int \lambda^{3/2}(\xi_2) |\tilde{F}_1(0, \xi_2)|^2 d\xi_2, \\ J_1 &= \int \int |h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) x_1 \lambda(\xi_2) \partial_1 \tilde{F}_1(0, \xi_2)|^2 dx_1 d\xi_2 \leq \\ &\quad \frac{C}{\varepsilon^3} \int \lambda^{1/2}(\xi_2) |D_1 \tilde{F}_1(0, \xi_2)|^2 d\xi_2, \\ J_2 &= \int \int |h(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) \lambda(\xi_2) \int_0^{x_1} \int_0^{t_1} \partial_1^2 \tilde{F}_1(\tau_1, \xi_2) d\tau_1 dt_1|^2 dx_1 d\xi_2. \end{aligned}$$

Из неравенства Коши-Буняковского получаем

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C \int \int h^2(x_1 \varepsilon \lambda^{1/2}(\xi_2)) |x_1|^3 dx_1 \lambda^2(\xi_2) \int |D_1^2 \tilde{F}_1(\tau_1, \xi_2)|^2 d\tau_1 d\xi_2 \leq \\ &C(\varepsilon) \leq \int \int |D_1^2 \tilde{F}_1(\tau_1, \xi_2)|^2 d\tau_1 d\xi_2 \leq \\ &C(\varepsilon) (\|D_1^2 P(x, D) h(x_2 \lambda^2(D_1)) u(x_1, 0)\|^2 + \|D_1^2 f(x)\|_{x_2 > 0}^2). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Из равенства

$$D_1^j F_1(0, x_2) = D_1^j F(0, x_2) + D_1^j F_0(0, x_2), \text{ где } j = 0, 1,$$

$$D_1^j F_0(0, x_2) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_2 \geq 0 \\ 2h(x_2 \lambda(D_1)) D_1^{j+2} U(0) - 2D_1^j F(0, x_2), & \text{если } x_2 < 0 \end{cases}$$

следует

$$J_j \leq C \varepsilon^{-1-2j} \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) (|D_1^j \tilde{F}(0, \xi_2)|^2 + |D_1^j \tilde{F}_0(0, \xi_2)|^2) d\xi_2. \quad (1.10)$$

Из (1.1) имеем

$$\begin{aligned} \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) |D_1^j \tilde{F}_0(0, \xi_2)|^2 d\xi_2 &\leq C \left(\int |D_1^j F_0(0, x_2)|^2 dx_2 + \right. \\ &\left. \int \int |D_1^j F_0(0, x_2) - D_1^j F_0(0, y_2)|^2 / |x_2 - y_2|^{1-j+3/2} dx_2 dy_2 \right) \leq \\ &C \left(\int_{x_2 < 0} \int_{y_2 < 0} |D_1^j F_0(0, x_2) - D_1^j F_0(0, y_2)|^2 / |x_2 - y_2|^{1-j+3/2} dx_2 dy_2 + \right. \\ &\left. \int_{x_2 < 0} |D_1^j F_0(0, x_2)|^2 / |x_2|^{-j+3/2} dx_2 \right) \leq C(I_1 + I_2 + I_3), \text{ где} \end{aligned} \quad (1.11)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int |\lambda^{3/4-j/2}(D_2) h(x_2 \lambda^2(D_1)) D_1^{j+2} U(0)|^2 dx_2, \\ I_2 &= \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) |D_1^j \tilde{F}(0, \xi_2)|^2 d\xi_2, \\ I_3 &= \int |D_1^j F(0, x_2) - h(x_2 \lambda^2(D_1)) D_1^{j+2} U(0)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2. \end{aligned} \quad (1.12)$$

Оценим интегралы I_1 , I_2 , I_3 .

Из соотношений

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) \left| \int e^{-ix_2 \xi_2} \int h(x_2 \lambda^2(\xi_1)) \xi_1^{j+2} \tilde{U}(\xi_1, 0) d\xi_1 dx_2 \right|^2 d\xi_2 = \\ &C \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) \left| \int \xi_1^{j+2} \tilde{U}(\xi_1, 0) \int e^{-ix_2 \xi_2} h(x_2 \lambda^2(\xi_1)) dx_2 d\xi_1 \right|^2 d\xi_2, \end{aligned}$$

используя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \\ &C(\gamma) \int \lambda^{2j+4+1+2\gamma}(\xi_1) |\tilde{U}(\xi_1, 0)|^2 \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) \left| \int e^{-ix_2 \xi_2} h(x_2 \lambda^2(\xi_1)) dx_2 \right|^2 d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned}$$

Отсюда, заменив переменную x_2 на $x_2\lambda^{-2}(\xi_1)$, ξ_2 на $\xi_2\lambda^2(\xi_1)$, получим

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C(\gamma) \int \lambda^{2j+4+1+2\gamma+(3/2-j)2-2}(\xi_1) |\tilde{U}(\xi_1, 0)|^2 d\xi_1 = \\ &C(\gamma) \int \lambda^{6+2\gamma}(\xi_1) |\tilde{U}(\xi_1, 0)|^2 d\xi_1 \leq C(\gamma) \|\lambda^{3+\gamma}(D_1)u(x_1, 0)\|^2. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Далее, имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\leq C \int \lambda^{3/2-j}(\xi_2) \left| \int \xi_1^j \tilde{F}(\xi) d\xi_1 \right|^2 d\xi_2 \leq \\ &C \int \int (|\xi_1| + \lambda^{1/2}(\xi_2))^{-2} d\xi_1 \int (|\xi_1| + \lambda^{1/2}(\xi_2))^2 \lambda^{3/2-j}(\xi_2) |\xi_1^j \tilde{F}(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \leq \\ &C \int \int (|\xi_1| + \lambda^{1/2}(\xi_2))^2 \lambda^{1-j}(\xi_2) |\xi_1^j \tilde{F}(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2 = \\ &C \left(\int \int_{|\xi_1| \leq \lambda^{1/2}(\xi)} (|\xi_1| + \lambda^{1/2}(\xi_2))^2 \lambda^{1-j}(\xi_2) |\xi_1^j \tilde{F}(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2 + \right. \\ &\left. \int \int_{|\xi_1| \geq \lambda^{1/2}(\xi)} (|\xi_1| + \lambda^{1/2}(\xi_2))^2 \lambda^{1-j}(\xi_2) |\xi_1^j \tilde{F}(\xi)|^2 d\xi_1 d\xi_2 \right) \leq \\ &C \| (D_1^2 + \lambda(D_2)) f(x) \|_{x_2>0}^2. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Очевидно,

$$I_3 \leq J_1 + J_2, \text{ где}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= \int |W(x_2)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2, \\ W(x_2) &= h(x_2\lambda^2(D_1)) D_1^j F(0, x_2) - h(x_2\lambda^2(D_1)) D_1^{j+2} U(0), \\ J_2 &= \int |(1 - h(x_2\lambda^2(D_1))) D_1^j F(0, x_2)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2. \end{aligned}$$

Учитывая дифференцируемость функции $W(x_2)$, равенство $W(0) = 0$, интегрируя по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int |W(x_2)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2 &\leq C \int |W(x_2) D_2 W(x_2)| / |x_2|^{1/2-j} dx_2 \leq \\ &C \left(\int |W(x_2)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2 \right)^{1/2} \left(\int |D_2 W(x_2)|^2 |x_2|^{1/2+j} dx_2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
 \int |W(x_2)|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2 &\leq C \int |x_2|^{1/2+j} |D_2 W(x_2)|^2 dx_2 \leq \\
 &C \left(\int |x_2|^{1/2+j} |D_2 \int h(x_2 \lambda^2(\xi_1)) \xi_1^j \tilde{F}(\xi_1, x_2) d\xi_1|^2 dx_2 + \right. \\
 &\quad \left. \int |x_2|^{1/2+j} |D_2 \int h(x_2 \lambda^2(\xi_1)) \xi_1^{j+2} \tilde{U}(\xi_1, 0) d\xi_1|^2 dx_2 \right) \leq \\
 &C \left(\int \left(\int \lambda^{3/2}(\xi_1) |\tilde{F}(\xi_1, x_2)| |d\xi_1|^2 dx_2 + \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \int \left(\int \lambda^{-1/2}(\xi_1) |D_2 \tilde{F}(\xi_1, x_2)| |d\xi_1|^2 dx_2 + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. \int \int \lambda^{2j+4+1+2\gamma}(\xi_1) |\tilde{U}(\xi_1, 0) D_2 h(x_2 \lambda^2(\xi_1))|^2 |x_2|^{1/2+j} dx_2 d\xi_1 \right) \leq \right. \\
 &C \left(\int \int \lambda^{4+2\gamma}(\xi_1) |\tilde{F}(\xi_1, x_2)|^2 d\xi_1 dx_2 + \int \int |\lambda^\gamma(\xi_1) D_2 \tilde{F}(\xi_1, x_2)|^2 d\xi_1 dx_2 + \right. \\
 &\quad \left. \left. \int \lambda^{2j+4+1+2\gamma+4-(3/2+j)^2}(\xi_1) |\tilde{U}(\xi_1, 0)|^2 d\xi_1 \right) \leq \right. \\
 &C(\gamma) (\|(\lambda^{2+\gamma}(D_1) + \lambda^\gamma(D_1)\lambda(D_2))f(x)\|_{x_2>0}^2 + \|\lambda^{3+\gamma}(D_1)u(x_1, 0)\|^2). \tag{1.15}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_2 &\leq C \int \left| \int (1 - h(x_2 \lambda^{2+\gamma}(\xi_1))) \xi_1^j \tilde{F}(\xi_1, x_2) d\xi_1 \right|^2 / |x_2|^{3/2-j} dx_2 \leq \\
 &C \int \left(\int \lambda^{3/2}(\xi_1) |\tilde{F}(\xi_1, x_2)| |d\xi_1|^2 dx_2 \right. \\
 &\quad \left. C \int \int \lambda^{4+2\gamma}(\xi_1) |\tilde{F}(\xi_1, x_2)|^2 d\xi_1 dx_2. \right)
 \end{aligned}$$

Отсюда и из (1.6 – 1.15) следует доказательство Леммы.

Доказательство заканчено.

Т е о р е м а 1.1. Для любой постоянной $\gamma > 0$ существует постоянная $C(\gamma)$, не зависящая от $u(x) \in C_0^\infty(K)$ и такая, что

$$\begin{aligned}
 \|D_2^2 u(x)\|_{x_2>0} &\leq C(\gamma) (\|(\lambda^{2\gamma}(D_1) + \lambda^\gamma(D_1)\lambda(D_2))P(x, D)u(x)\|_{x_2>0} + \\
 &\quad \|\lambda^{3+\gamma}(D_1)u(x_1, 0)\| + \|D_1^2 P(x, D)h(x_2 \lambda^2(D_1))u(x_1, 0)\|) \tag{1.16}
 \end{aligned}$$

Доказательство.

Положим

$$v = v(x) = \begin{cases} u(x), & \text{если } x_2 \geq 0 \\ \alpha_1 u(x_1, -x_2) + \alpha_2 u(x_1, -2x_2) + \alpha_3 u(x_1, -3x_2), & \text{если } x_2 < 0; \end{cases}$$

α_j удовлетворяют системе уравнений

$$(-1)^k \alpha_1 + (-2)^k \alpha_2 + (-3)^k \alpha_3 = 1, \quad k = 0, 1, 2.$$

Очевидно,

$$\|D_2^2 u(x)\|_{x_2>0} \leq C \|\lambda^2(D_2)v(x)\|.$$

Положив в неравенстве (1.2) $w(x) = \lambda^{3/2}(D_2)v(x)$ и интегрируя по частям, получаем

$$\|\lambda^2(D_2)v(x)\|^2 \leq C(\|D_2P(x, D)v(x)\|^2 + \|P(x, D)v(x)\|^2 + \|v(x)\|^2).$$

Отсюда, учитывая, что функция $v(x)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, получаем

$$\begin{aligned} \|\lambda^2(D_2)u(x)\|_{x_2>0} &\leq C(\|\lambda(D_2)P(x, D)u(x)\|_{x_2>0} + \|u(x)\|_{x_2>0} + \\ &\quad \|D_2D_1^2u(x)\|_{x_2>0}). \end{aligned} \quad (1.17)$$

Оценка $\|D_2D_1^2u(x)\|_{x_2>0}$.

Ясно, что

$$\begin{aligned} \|D_2D_1^2u(x)\|_{x_2>0} &\leq C\|D_2D_1^2v_1(x)\| \leq \\ C(\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_2D_1^2v_1(x)\| + \|(1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2)))D_2D_1^2v_1(x)\|). \end{aligned} \quad (1.18)$$

(ε – положительная константа). Оценим каждое слагаемое правой части последнего неравенства.

Оценка $\|(1-h(x_1\varepsilon\mu(D_2)))D_1^2D_2v_1(x)\|$.

Поскольку

$$1 - h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2)) \leq C\varepsilon(1 - h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2)))x_1\lambda^{1/2}(\xi_2), \text{ то}$$

$$\begin{aligned} \|(1-h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2)))D_1^2\xi_2\tilde{v}_1(x_1, \xi_2)\|^2 &\leq \\ C\varepsilon^2((x_1\lambda^{1/2}(\xi_2)D_1^2\xi_2\tilde{v}_1(x_1, \xi_2), x_1\lambda^{1/2}(\xi_2)D_1^2\xi_2\tilde{v}_1(x_1, \xi_2)) + \\ (\lambda^{1/2}(\xi_2)D_1^3\tilde{v}_1(x_1, \xi_2), \lambda^{1/2}(\xi_2)D_1^3\tilde{v}_1(x_1, \xi_2))) &\leq \\ C\varepsilon^2(\|D_1^2P(x, D)v_1\|^2 + \|(1+D_2^2)v_1\|^2 + \|D_1^2D_2v_1\|^2) &\leq \\ C\varepsilon^2(\|D_1^2P(x, D)u\|_{x_2>0}^2 + \|(1+D_2^2)u\|_{x_2>0}^2 + \|D_1^2u\|_{x_2>0}^2 + \\ |D_1^2P(x, D)h(x_2\lambda^2(D_1))u(x_1, 0)|). \end{aligned}$$

Отсюда и из неравенств (1.17), (1.18) следует

$$\begin{aligned} \|\lambda^2(D_2)u(x)\|_{x_2>0} &\leq C(\|(D_1^2 + \lambda(D_2))P(x, D)u(x)\|_{x_2>0} + \\ |D_1^2P(x, D)h(x_2\lambda^2(D_1))u(x_1, 0)| + \|u(x)\|_{x_2>0} + \\ \|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_2D_1^2v_1(x)\|). \end{aligned} \quad (1.19)$$

Интегрируя по частям и применяя неравенство Коши-Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(D_2))D_2D_1^2v_1(x)\|^2 &\leq \\ C(\varepsilon^{1/2}\|D_1^4v_1(x)\|^2 + \varepsilon^{1/2}\|D_2^2v_1(x)\|^2 + \varepsilon^{-1/2}\|h(x_1\varepsilon\lambda^{1/2}(\xi_2))D_2^2v_1(x)\|^2). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Оценка $\|D_1^4v_1(x)\|$.

Из неравенства

$$\|D_1^4v_1(x)\|^2 \leq (D_1^4v_1(x), D_1^4v_1(x)) + (D_1^3x_1D_1^3D_2v_1(x), x_1D_1^3D_2v_1(x))$$

следует

$$\|D_1^4v_1(x)\|^2 \leq C(\|D_1^2P(x, D)v_1(x)\|^2 + \|D_2^2v_1(x)\|^2).$$

Поэтому, выбирая ε достаточно малым, используя вышеприведенную лемму и оценки (1.19), (1.20), получаем доказательство теоремы.

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ю. В. Егоров, *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, М.: Наука, 1984, 360 с.
2. Л. Н. Слободецкий, “Обобщенные пространства С.Л.Соболева и их приложения к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных”, *Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та*, **197** (1958), 54-112.
3. Г. А. Смолкин, “Априорные оценки, связанные с дифференциальными операторами типа Купцова-Хермандера”, *Дифференциальные уравнения*, **40**:2 (2004), 242-250.
4. М. Тейлор, *Псевдодифференциальные операторы*, М.: Мир, 1985, 472 с.

Поступила 25.10.2017

MSC2010 35J93

About an a priori estimate for the second order elliptic operator degenerate along coordinate axis orthogonal to semi-plane boundary

© G. A. Smolkin ²

Abstract. In the paper the methodology is demonstrated to derive an inequality of special type. The left-hand side of this inequality is a norm of the second-order derivative of a function along the normal to a half-plane boundary. The right-hand side of the inequality is a linear combination of two terms. The first is a norm of a function image generated by degenerate elliptic operator, and the second is a trace of function on the half-plane boundary. Paper deals with norms in Sobolev spaces and in Slobodetsky spaces. In the inequality proof two function continuations from half-plane to the entire plane are used. Using the first continuation which has derivatives up to the third order the inequality is reduced to estimation of mixed derivatives and derivatives with respect to boundary's tangents. These derivatives are obtained using the second continuation that is twice differentiable.

Key Words: Fourier transform, Sobolev spaces, a priori estimates, degenerate elliptic operator, function continuation.

REFERENCES

1. Yu. V. Egorov, *Lineynye differentsial'nye uravneniya glavnogo tipa* [Linear differential equations of principal type], M.: Nauka Publ., 1984 (In Russ.), 360 c.
2. L. N. Slobodetskiy, “[Generalized spaces of SL Sobolev and their applications to boundary-value problems for differential equations in partial derivatives]”, *Uch. app. Leningr. ped. in-ta*, **197** (1958), 54-112. (In Russ.).
3. G. A. Smolkin, “[A priori estimates associated with differential operators of type Kuptsov-Hermander]”, *Differential equations*, **40**:2 (2004), 242-250 (In Russ.).
4. M. Teylor, *Psevdodifferentsial'nye operatory* [Pseudodifferential operators], M.: Mir Publ., 1985 (In Russ.), 472 c.

Submitted 25.10.2017

² **Georgy A. Smolkin**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5964-9814>, smolkinga@yandex.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.19.201703.73-81

УДК 621.315.592

Особенности решения интегро-дифференциальных уравнений Максвелла и возбуждения поверхностного поляритона на планарной структуре

© К. В. Бухенский¹, А. Б. Дюбуа², А. Н. Конюхов³, С. И. Кучерявый⁴,
С. Н. Машнина⁵, А. С. Сафошкин⁶

Аннотация. В работе рассмотрен процесс дифракции электромагнитной волны на границе раздела вакуум-металл-нелинейная плёнка – полупроводник с возбуждением поверхностной волны. В рамках теории развит модовый метод расчета процесса взаимодействия излучения со структурой, позволяющий рассчитывать для фиксированного потока энергии возмущения потоки энергий, возникающих в процессах дифракции.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, поверхностный поляритон, уравнения Максвелла

Процессы перераспределения энергии в результате дифракции электромагнитного излучения в диэлектрических средах представляют собой одну из важнейших задач интегральной оптики. По сравнению с процессами распространения электромагнитного излучения вдоль многослойных структур с параллельными (или коаксиальными) границами раздела, которые хорошо изучены и систематизированы к настоящему времени [1,2], дифракционные задачи изучены гораздо слабее. Основная проблема заключается в больших математических сложностях, связанных с решением уравнений Максвелла в средах, где границы раздела между средами суть не параллельные плоскости. Условия непрерывности в совокупности с уравнениями Максвелла для таких задач связаны с решением сложных интегро-дифференциальных уравнений [3], которые имеют аналитическое решение только для определенных геометрий [4]. Привлекательность планарной геометрии объясняется, во-первых, относительной простотой возникающих здесь теоретических моделей распространения электромагнитного излучения вдоль таких структур, во-вторых, фундаментальность получаемых здесь результатов позволяет обобщить их с теми или

¹ Бухенский Кирилл Валентинович, доцент, заведующий кафедрой высшей математики, ФГБОУ ВО "РГРТУ" (390005, Россия, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59.), кандидат физико-математических наук, bukhensky.k.v@rsreu.ru

² Дюбуа Александр Борисович, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО "РГРТУ" (390005, Россия, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59.), кандидат физико-математических наук, abd-69@mail.ru

³ Конюхов Алексей Николаевич, доцент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО "РГРТУ" (390005, Россия, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59.), кандидат педагогических наук

⁴ Кучерявый Сергей Иванович, доцент кафедры Общей и Специальной Физики, ИАТЭ НИЯУ МИФИ (249040, Калужская область, г. Обнинск, Студгородок, д. 1), кандидат физико-математических наук, kucheryavyy@iate.obninsk.ru

⁵ Машнина Светлана Николаевна, старший преподаватель кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО "РГРТУ" (390005, Россия, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59.)

⁶ Сафошкин Алексей Сергеевич, ассистент кафедры высшей математики, ФГБОУ ВО "РГРТУ" (390005, Россия, г. Рязань, ул. Гагарина, д. 59.), safoshkin.a.s@rsreu.ru

уточнениями на более сложные модели структур, и, в-третьих, планарная геометрия в достаточной степени близка к действительности. В работе [5] был развит модовый метод исследования задач дифракции электромагнитного излучения на диэлектрическом барьере, где границы раздела между средами описываются параллельными или перпендикулярными плоскостями. Основным достоинством этого метода является сведение интегральных дифракционных уравнений к системе алгебраических, которые дают информацию как о поверхностных, так и об объемных полях, возбуждаемых в структуре. В работе [6] этот метод был использован для расчета процессов отражения поверхностной волны от вертикального диэлектрического барьера. В данной работе этот метод использован для расчета процесса отражения гауссова пучка от вертикального диэлектрического барьера. Последний представляет собой четыре разделенные плоскостями $x = 0$, $z = 0$ и $z = d$ области с диэлектрическими проницаемостями: ϵ_1 – вакуум, $\epsilon_2(\omega)$ – металл, $\epsilon_3(x)$ – нелинейная тонкая полупроводниковая пленка, ϵ_4 – полупроводник, с возбуждением поверхностных и объемных электромагнитных полей (Рис. 1.2). Перечислим основные виды излучения при дифракции. Так как среда при $x < 0$ не обладает волноведущим эффектом для поляритона, то там будет присутствовать только объемное отраженное излучение. При $x > 0$ это, прежде всего, мода поверхностного поляритона [7], распространяющаяся вдоль оси x (при нормальном падении пучка поток поверхностной волны вдоль оси z будет отсутствовать), и объемное прошедшее излучение. Как отраженное, так и прошедшее объемные поля представляются по модам излучения. Поэтому исследование процесса дифракции подразумевает анализ нескольких моментов: исследование собственных мод при $x < 0$ и $x > 0$, разложение дифрагированного излучения по собственным модам и сшивание этих полей при $x = 0$ для нахождения соответствующих амплитуд.

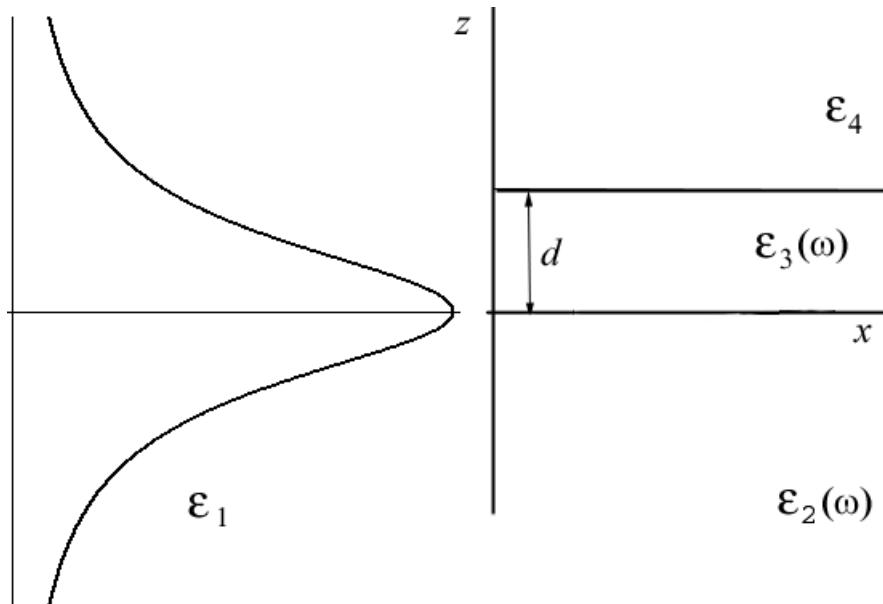


Рисунок 1.2

Процесс дифракции при нормальном падении электромагнитной волны на диэлектрический барьер

Запишем уравнения Максвелла:

$$\begin{aligned} rot \tilde{\mathbf{H}} &= \frac{\epsilon_i(\omega)}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{E}}}{\partial t}, \\ rot \tilde{\mathbf{E}} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \tilde{\mathbf{H}}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Ищем решения (1.1) в виде:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{E}}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}(x, y, z) e^{-i\omega t}, \\ \tilde{\mathbf{H}}(x, y, z, t) &= \mathbf{H}(x, y, z) e^{-i\omega t}.\end{aligned}\quad (1.2)$$

Подставляя (1.2) в (1.1) и сокращая на общий множитель $e^{-i\omega t}$ получим:

$$\begin{aligned}i\omega \mathbf{H}(x, y, z) &= \text{crot} \mathbf{E}(x, y, z), \\ i\omega \varepsilon_i(\omega) \mathbf{E}(x, y, z) &= -\text{crot} \mathbf{H}(x, y, z).\end{aligned}\quad (1.3)$$

В соответствии с выбранной геометрией (рис. 1.2) компоненты \mathbf{E} и \mathbf{H} не зависят от координаты y , т. е. $E(x, y, z) \equiv E(x, z)$ и $H(x, y, z) \equiv H(x, z)$.

Тогда, в соответствии с гармоническим характером вдоль оси x [8], получим:

$$\{\mathbf{H}(x, z), \mathbf{E}(x, z)\} = \{\mathbf{H}(z), \mathbf{E}(z)\} e^{ik_x x}. \quad (1.4)$$

Как будет показано ниже, наибольший интерес вызывает процесс дифракции ЭМВ с возбуждением поверхностной волны (поляритона). Данный процесс возможен лишь в случае Н-волны (так называемое ТМ-поляризованное излучение), для которой с учетом выбранной геометрии структуры отличны от нуля проекции E_x, E_z, H_y , и при $\varepsilon_2(\omega) < 0$.

Тогда из (1.1) с учетом (1.2) получаем

$$\text{rot} \mathbf{H} = \left(-\frac{\partial H_y}{\partial z}, 0, \frac{\partial H_y}{\partial x} \right), \quad (1.5)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = \left(0, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, 0 \right). \quad (1.6)$$

Так как E_z и E_x не зависят от y , а $E_y = H_x = H_z = 0$ по условию задачи.

С учетом (1.4) получаем

$$E_x(x, z) = E_x(z) e^{ik_x x}; E_z(x, z) = E_z(z) e^{ik_x x}; H_y(x, z) = H_y(z) e^{ik_x x}.$$

Приравнивая соответствующие компоненты (1.5)

$$-\frac{i\omega\varepsilon(\omega)}{c} E_x(z) e^{ik_x x} = \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z} = e^{ik_x x} \frac{dH_y(z)}{dz},$$

$$-\frac{i\omega\varepsilon(\omega)}{c} E_z(z) e^{ik_x x} = \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial x} = ik_x e^{ik_x x} H_y(z).$$

Откуда следует

$$E_x(x, z) = \frac{ic}{\omega\varepsilon(\omega)} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial z}; E_x(z) = \frac{ic}{\omega\varepsilon(\omega)} \frac{dH_y(z)}{dz}, \quad (1.7)$$

$$E_z(x, z) = \frac{ic}{\omega\varepsilon(\omega)} \frac{\partial H_y(x, z)}{\partial x}; E_z(z) = -\frac{c}{\omega\varepsilon(\omega)} k_x H_y(z). \quad (1.8)$$

Огибающие моды $H(z)$, $E(z)$, а также волновое число k_x определяются из волнового уравнения и граничных условий. Волновое уравнение вытекает из (1.1) и дает зависимость поля $H_y(z)$ для каждой из сред на рис. 1.2

$$\frac{d^2 H_y}{dz^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_i - k_x^2 \right] H_y = 0 \quad (1.9)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} H_y(z = -0) &= H_y(z = +0), & E_x(z = -0) &= E_x(z = +0), \\ H_y(z = d^-) &= H_y(z = d^+), & E_x(z = d^-) &= E_x(z = d^+), \end{aligned} \quad (1.10)$$

которые полностью определяют структуру каждой моды при $x < 0$ и $x > 0$.

Как нетрудно убедиться решение уравнения (5) при $x < 0$ имеет вид

$$H_{1y}(z) = B_1 \exp(i\beta z) + B_2 \exp(-i\beta z), \quad (1.11)$$

$$E_{1z}(z) = -\frac{ck_x^{(1)}}{\omega\varepsilon_1} [B_1 \exp(i\beta z) + B_2 \exp(-i\beta z)], \quad (1.12)$$

где β — поперечное волновое число, для которого

$$\beta^2 + (k_x^{(1)})^2 = k_0^2 \varepsilon_1, \quad (1.13)$$

$k_0 = \omega/c = 2\pi/\lambda$ — волновое число в вакууме, λ — длина волны падающего излучения.

Два волновых числа β и k_x определяются из одного уравнения. Примем β в качестве независимой переменной. Очевидно, что набор функций (4) будет полным, если мы переберем все возможные β . Видно, что в средах 1 и 3 будет по две гармоники (такое излучение будем называть вырожденным и для определенности обозначим их + и - гармониками) и, соответственно, две неопределенные константы для одного значения k_x . Поэтому определение связи между двумя свободными коэффициентами остается произвольным. Этот произвол устраняется наложением на собственные моды условий ортогональности и нормировки:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} E_{1z}^{\beta\pm} H_{1z}^{\beta\mp'} dz &= 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} E_{1z}^{\beta\pm} H_{1y}^{\beta\mp'} dz &= -\frac{c}{\omega} k_x^{(1,1)} \delta(\beta - \beta'), \end{aligned} \quad (1.14)$$

где $\delta(\beta - \beta')$ — дельта-функция.

Найдем коэффициенты B_1 и B_2 . Подставив в условие нормировки значения электрического и магнитного полей получим:

$$B_1 = B_2^* = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{2\pi}} (1 \pm i). \quad (1.15)$$

Таким образом, в среде 1 магнитное поле будет

$$H_{1y}^{\beta\pm}(z) = \frac{1}{2} B_{1\beta} [(1 \mp i) \exp(-i\beta z) + (1 \pm i) \exp(i\beta z)], \quad (1.16)$$

где $B_{1\beta} = (\varepsilon_1/2\pi)^{1/2}$ — нормировочная постоянная.

Учитывая вышеизложенное, запишем падающее и отраженное излучение в виде

$$\tilde{H}_{1y}^i(x, z) = \int_0^\infty [I_\beta^+ H_{1y}^{\beta+} + I_\beta^- H_{1y}^{\beta-}] \exp(ik_x^{(1)} x) d\beta, \quad (1.17)$$

$$\tilde{H}_{1y}^r(x, z) = \int_0^\infty [R_\beta^+ H_{1y}^{\beta+} + R_\beta^- H_{1y}^{\beta-}] \exp(-ik_x^{(1)} x) d\beta, \quad (1.18)$$

где I_β^\pm и R_β^\pm — амплитуды падающей и отраженной волн.

Падающее излучение можно определить из предпоследнего уравнения. Для этого представим магнитное поле как $\tilde{H}(x, z) = G(z) \exp(-ik_x x)$, где $G(z) = C_0 / (1 + z^2/W_0^2)$, а C_0 и

W_0 – параметры пучка. С учетом вышесказанного, умножим (1.17) сначала на $E_{1z}^{\beta+}(z)$, затем на $E_{1z}^{\beta-}(z)$ и поочереди проинтегрируем по z . Принимая во внимание условия ортогональности и нормировки (1.14), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(z) E_{1z}^{\beta\pm} dz = -\frac{c}{\omega} k_x^{(1)} I_{\beta}^{\pm}. \quad (1.19)$$

Интегрирование последнего выражения дает:

$$I_{\beta}^{+} = I_{\beta}^{-} \equiv I_{\beta} = C_0 W_0 \sqrt{\frac{\pi}{2\varepsilon_1}} \exp(-\beta W_0). \quad (1.20)$$

Запишем выражения для потоков мощности падающего и отраженного излучений. Они будут определяться векторами Пойтинга

$$P_x = \frac{c}{8\pi} \operatorname{Re} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} [\tilde{\mathbf{E}}_{1z} \tilde{\mathbf{H}}_{1y}^*]_x dz \right\}. \quad (1.21)$$

Учет условий нормировки приводит к тому, что потоки будут зависеть только от амплитуд:

$$P_x^i = \frac{c^2}{4\pi\omega} \int_0^{\infty} I_{\beta} I_{\beta}^* k_x^{(1)} d\beta = \frac{A}{8\pi} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} C_0^2 W_0 \frac{\pi}{2}, \quad (1.22)$$

$$P_x^R = \frac{c^2}{8\pi\omega} \int_0^{\infty} (R_{\beta}^+ R_{\beta}^{+*} + R_{\beta}^- R_{\beta}^{-*}) k_x^{(1)} d\beta. \quad (1.23)$$

При $x > 0$ решение уравнения (5) можно представить как

$$H_{2y}^{\beta}(z) = \begin{cases} D_1 \exp(-i\beta z) + D_2 \exp(i\beta z), & z > 0, \\ D_3 \exp(-\rho z), & z < 0, \end{cases} \quad (1.24)$$

$$E_{2z}^{\beta}(z) = -\frac{c}{\omega} k_x^{(2)} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_3} [D_1 \exp(-i\beta z) + D_2 \exp(i\beta z)], & z > 0, \\ \frac{1}{\varepsilon_2} D_3 \exp(-\rho z), & z < 0, \end{cases} \quad (1.25)$$

где β и ρ — поперечные волновые числа, связанные в каждой из сред уравнениями

$$\beta^2 + (k_x^{(2)})^2 = k_0^2 \varepsilon_3 - \rho^2 + (k_x^{(2)})^2 = k_0^2 \varepsilon_2. \quad (1.26)$$

Теперь мы имеем две комплексно-сопряженные гармоники в среде 3 и одну гармонику в среде 2. Всего получается, три гармоники и, соответственно три неопределенные константы, которые находятся из граничных условий. Эти граничные условия и соответствующие условия нормировки в конечном итоге приводят к трем уравнениям для трех неизвестных.

Решая полученную систему, получаем

$$\begin{aligned} D_3 &= D_{2\beta}, \\ D_1 &= D_2^* = \frac{1}{2} D_{2\beta} \left(1 + i \frac{\rho}{\beta} \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \right), \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $D_{2\beta} = \sqrt{\frac{(\varepsilon_2 \beta)^2 \varepsilon_3}{\pi[(\varepsilon_2 \beta)^2 + (\varepsilon_3 \rho)^2]}}$ – нормировочная постоянная.

Таким образом, для магнитного поля справедливо:

$$H_{2y}^{\beta}(z) = \frac{1}{2} D_{2\beta} \begin{cases} \left(1 - i \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \frac{\rho}{\beta} \right) \exp(-i\beta z) + \left(1 + i \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \frac{\rho}{\beta} \right) \exp(i\beta z), & z > 0, \\ 2 \exp(-\rho z), & z < 0. \end{cases} \quad (1.28)$$

Аналогичные соотношения получаются для границ сред с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_3(\omega, x)$ и ε_4 .

Возбуждение поверхностного поляритона. Представим собственные моды поверхностной волны как

$$H_{2y}^\tau(z) = \begin{cases} S_1 \exp(-k_1 z), & z > 0, \\ S_2 \exp(k_2 z), & z < 0, \end{cases} \quad (1.29)$$

$$E_{2z}^\tau(z) = -\frac{c}{\omega} k_s \begin{cases} \frac{S_1}{\varepsilon_3} \exp(-k_1 z), & z > 0, \\ \frac{S_2}{\varepsilon_2} \exp(k_2 z), & z < 0, \end{cases} \quad (1.30)$$

где k_1 и k_2 — поперечные волновые числа, а k_s — продольное, которые связаны друг с другом соотношениями:

$$\begin{aligned} k_1 &= \sqrt{k_s - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon_3}, \\ k_2 &= \sqrt{k_s + \frac{\omega^2}{c^2} |\varepsilon_2|}. \end{aligned} \quad (1.31)$$

Условие нормировки для поверхностной волны

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_{2z}^\tau H_{2C}^* dz = -\frac{A}{\omega} k_s \quad (1.32)$$

приводит нас к следующим значениям для неизвестных коэффициентов

$$S_1 = S_2 = S_{2\tau} = \left[\frac{1}{2k_2 \varepsilon_2} + \frac{1}{2k_1 \varepsilon_3} \right]^{-1/2}. \quad (1.33)$$

То есть, для магнитного и электрического полей получаем

$$H_{2y}^\tau(z) = S_{2\tau} \begin{cases} \exp(-k_1 z), & z > 0, \\ \exp(k_2 z), & z < 0, \end{cases} \quad (1.34)$$

$$E_{2z}^\tau(z) = -\frac{c}{\omega} S_{2\tau} \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon_3} \exp(-k_1 z), & z > 0, \\ \frac{1}{\varepsilon_2} \exp(k_2 z), & z < 0, \end{cases} \quad (1.35)$$

Учитывая вышесказанное, прошедшая волна представляется как

$$\tilde{H}_{2y}^t(x, z) = T H_{2y}^\tau \exp(ik_s x) + \int_0^\infty [T_\beta H_{2y}^\beta] d\beta \exp(ik_x^{(2)} x), \quad (1.36)$$

где T_β и T — соответственно амплитуды объемного излучения и поверхностной волны.

По аналогии с (1.16) и (1.17) запишем выражение для прошедшего потока

$$P_x^T = \frac{c^2}{8\pi\omega} \left[T T^* k_s + \int_0^\infty T_\beta T_\beta^* k_x^{(2)} d\beta \right]. \quad (1.37)$$

Приступим к следующему этапу — «сшиванию» уравнений (13), (14) и (32) при $x = 0$ (условие непрерывности).

Данные уравнения для магнитных и электрических полей:

$$\int_0^\infty [(I_\beta + R_\beta^+) H_{1y}^{\beta+} + (I_\beta - R_\beta^-) H_{1y}^{\beta-}] d\beta = T H_{2y}^\tau + \int_0^\infty T_\beta H_{2y}^\beta d\beta, \quad (1.38)$$

$$\int_0^\infty [(I_\beta - R_\beta^+) E_{1z}^{\beta+} + (I_\beta + R_\beta^-) E_{1z}^{\beta-}] d\beta = T E_{2z}^\tau + \int_0^\infty T_\beta E_{2z}^\beta d\beta. \quad (1.39)$$

Умножим (1.38) на $E_{1z}^{\beta^\pm}$ и проинтегрируем по z в пределах $(-\infty; \infty)$. Учитывая условия ортогональности, а также свойство δ -функции, получим

$$-\frac{c}{\omega} k_x^{(1)} (I_\beta + R_\beta^\pm) = T \int_{-\infty}^{\infty} E_{1z}^{\beta^\pm} H_{2y}^\tau dz + \int_0^{\infty} T_\beta \int_{-\infty}^{\infty} E_{1z}^{\beta^\pm} H_{2y}^\beta dz d\beta. \quad (1.40)$$

Теперь проделаем ту же операцию с (1.39), только умножать уже будем сначала на $H_{2y}^{\beta'}$, а во второй раз на H_{2y}^τ и, учитывая условия ортогональности, получим еще два уравнения

$$-\frac{c}{\omega} k_x^{(2)} T_\beta = \int_0^{\infty} \left[(I_\beta - R_\beta^+) \int_{-\infty}^{\infty} H_{2y}^{\beta'} E_{1z}^{\beta^+} dz + (I_\beta - R_\beta^-) \int_{-\infty}^{\infty} H_{2y}^{\beta'} E_{1z}^{\beta^-} \right] d\beta, \quad (1.41)$$

$$-\frac{c}{\omega} k_s T = \int_0^{\infty} \left[(I_\beta - R_\beta^+) \int_{-\infty}^{\infty} H_{2y}^\tau E_{1z}^{\beta^+} dz + (I_\beta - R_\beta^-) \int_{-\infty}^{\infty} H_{2y}^\tau E_{1z}^{\beta^-} \right] d\beta. \quad (1.42)$$

Вычисление интегралов в (1.41), (1.42) не вызывает трудностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_{2y}^{\beta'} E_{1z}^{\beta^\pm} dz = -k_x^{(1)} \frac{c}{\omega} \left\{ H_{2y}^{\beta'}, E_{1z}^{\beta^\pm} \right\} \delta(\beta - \beta'), \quad (1.43)$$

где $\left\{ H_{2y}^{\beta}, E_{1z}^{\beta^\pm} \right\} = B_{1\beta} D_{2\beta} \frac{\pi}{2\varepsilon_1} \left[1 \pm \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_2} \frac{\rho}{\beta} \right]$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} E_{1z}^{\beta^\pm} H_{2y}^\tau dz = -\frac{c}{\omega} k_x^{(1)} \left\{ E_{1z}^{\beta^\pm}, H_{2y}^\tau \right\}, \quad (1.44)$$

где $\left\{ E_{1z}^{\beta^\pm}, H_{2y}^\tau \right\} = B_{1\beta} S_{2\tau} \frac{1}{\varepsilon_1} \left(\frac{k_2 \pm \beta}{k_2^2 + \beta^2} + \frac{k_1 \mp \beta}{k_1^2 + \beta^2} \right)$.

Решение системы (36-38) есть

$$T_\beta = I_\beta T' - TT''R_\beta^\pm = I_\beta R'_\pm - TR''_\pm, \quad (1.45)$$

$$T = \frac{\int_0^{\infty} k_x^{(1)} I_\beta \left[(1 - R'_+) \left\{ E_{1z}^{\beta^+}, H_{2y}^\tau \right\} + (1 - R'_-) \left\{ E_{1z}^{\beta^-}, H_{2y}^\tau \right\} \right] d\beta}{k_s + \int_0^{\infty} k_x^{(1)} \left[\left\{ E_{1z}^{\beta^+}, H_{2y}^\tau \right\} R''_+ + \left\{ E_{1z}^{\beta^-}, H_{2y}^\tau \right\} R''_- \right] d\beta},$$

где введены обозначения:

$$T' = \frac{2k_x^{(1)} \left[\left\{ E_{1z}^{\beta^+}, H_{2y}^\beta \right\} + \left\{ E_{1z}^{\beta^-}, H_{2y}^\beta \right\} \right]}{k_x^{(2)} + k_x^{(1)} \left[\left\{ E_{1z}^{\beta^+}, H_{2y}^\beta \right\}^2 + \left\{ E_{1z}^{\beta^-}, H_{2y}^\beta \right\}^2 \right]}, \quad (1.46)$$

$$T'' = \frac{k_x^{(1)} \left[\left\{ E_{1z}^{\beta^+}, H_{2y}^\beta \right\} \left\{ E_{1z}^{\beta^+}, H_{2y}^\tau \right\} + \left\{ E_{1z}^{\beta^-}, H_{2y}^\beta \right\} \left\{ E_{1z}^{\beta^-}, H_{2y}^\tau \right\} \right]}{k_x^{(2)} + k_x^{(1)} \left[\left\{ E_{1z}^{\beta^+}, H_{2y}^\beta \right\}^2 + \left\{ E_{1z}^{\beta^-}, H_{2y}^\beta \right\}^2 \right]}. \quad (1.47)$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Д. Маркузе, *Оптические волноводы: пер. с англ. / под ред. В.В. Шевченко.*, Мир, М., 1974, 571 с.

2. Е. И. Нефедов, *Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах*, Наука, М., 1978, 272 с.
3. В. А. Киселев, “Резонансное преобразование и отражение поверхностных волн в тонкопленочном волноводе с синусоидально гофрированной поверхностью”, *Квантовая электроника*, **1(2)** (1974), 329.
4. В. В. Шевченко, *Плавные переходы в открытых волноводах*, Наука, М., 1978, 192 с.
5. В. М. Агранович, В. Е. Кравцов, Т. А. Лескова, “Дифракция поверхностных поляритонов на шаге импеданса в области резонанса с колебаниями в переходном слое”, *ЖЭТФ*, **81(5)** (1981), 1828.
6. A. I. Voronko, L. G. Klimova, G. N. Shkerdin, “Reflection of surface polaritons at a dielectric barrier”, *Solid State Comm.*, **6** (1987), 361.
7. В. М. Аграновича, Д. Миллса, *Поверхностные поляритоны*, Наука, М., 1986, 525 с.
8. А. Б. Дюбуа, М. А. Зилотова, С. И. Кучерявый, А. С. Сафошкин, “Кинетические процессы в умеренно легированном гетеропереходе”, *Вестник РГРТУ*, **3(45)** (2013), 88-92.

Поступила 2.08.2017

MSC2010 35Q61

Peculiarities of solving the integro-differential Maxwell equations and excitation of the surface polariton on the planar structure

© K. V. Bukhensky⁷, A. B. Dubois⁸, A. N. Konukhov⁹, S. I. Kucheryavyy¹⁰, S. N. Mashnina¹¹, A. S. Safoshkin¹²

Abstract. The paper deals with the diffraction of an electromagnetic wave at the vacuum-metal-nonlinear film-semiconductor interface with the excitation of a surface wave. Within the framework of the theory, the mode method for calculating the interaction of radiation with a structure is developed, which makes it possible to calculate the energy fluxes arising in diffraction processes for a fixed energy flux of the perturbation.

Key Words: integro-differential equations, surface polariton, Maxwell equations.

⁷ Kirill V. Bukhensky, Associate Professor, Head of the Department of Higher Mathematics, Ryazan State Radioengineering University (59 Gagarina Str., Ryazan, 390005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), bukhensky.k.v@rsreu.ru

⁸ Alexander B. Dubois, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ryazan State Radioengineering University (59 Gagarina Str., Ryazan, 390005, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), abd-69@mail.ru

⁹ Alexey N. Konukhov, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ryazan State Radioengineering University (59 Gagarina Str., Ryazan, 390005, Russia), Ph.D. (Pedagogic sciences)

¹⁰ Sergei Iv. Kucheryavyy, Associate Professor, Department of General and Special Physics, IATE MEPhI (1 Studgorodok, Obkinsk, 249040, Kaluga region, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), kucheryavyy@iate.obninsk.ru

¹¹ Svetlana N. Mashnina, Senior Lecturer, Department of Higher Mathematics, Ryazan State Radioengineering University (59 Gagarina Str., Ryazan, 390005, Russia)

¹² Alexey S. Safoshkin, assistant, Department of Higher Mathematics, Ryazan State Radioengineering University (59 Gagarina Str., Ryazan, 390005, Russia), safoshkin.a.s@rsreu.ru

REFERENCES

1. D. Markuze, *Opticheskie volnovody: per. c angl. / pod red. V.V. Shevchenko [Optical waveguides: translation from English. Ed. V.V. Shevchenko]*, "Mir" Publ., Moscow, 1974 (In Russ.), 571 p.
2. E. I. Nefedov, *Difrakciya elektromagnitnyh voln na dielectricheskikh strukturah [Diffraction of Electromagnetic Waves on Dielectric Structures]*, "Nauka" Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 272 p.
3. V. A. Kiselev, "Resonansnoe preobrazovanie i otrazhenie poverhnostnyh voln d tonkoplonochnom volnovode s sinusoidalno gofrirovannoj poverhnost'yu [Resonant transformation and reflection of surface waves in a thin-film waveguide with a sinusoidally corrugated surface]", *Quantum Electronics*, **1(2)** (1974), 329 (In Russ.).
4. V. V. Shevchenko, *Plavnye perehody b otkrytyh volnovodah [Smooth transitions in open waveguides.]*, "Nauka" Publ., Moscow, 1978 (In Russ.), 192 p.
5. V. M. Agranovich, V. E. Kravtsov, T. A. Leskova, "Diffraction of the surface polaritons by an impedance step in the region of resonance with oscillations in a transition layer", *JETP*, **81(11)** (1981), 1828.
6. A. I. Voronko, L. G. Klimova, G. N. Shkerdin, "Reflection of surface polaritons at a dielectric barrier", *Solid State Comm.*, **6** (1987), 361.
7. V. M. Agranovich, D. Mills, *Poverhnostnye polyaritonnye [Surface polaritons]*, "Nauka" Publ., Moscow, 1986 (In Russ.), 525 p.
8. A. B. Dubois, M. A. Zilotova, S. I. Kucheryavyy, A. S. Safoshkin, "Kineticheskie processy v umerenno legirovannyh geteroperekhodah [Kinetic processes in moderately doped heterojunction]", *Vestnik of RSREU*, **3(45)** (2013), 88-92 (In Russ.).

Submitted 2.08.2017

УДК 519.254

Идентификация модели разогрева экструдера для полимеров

© Д. В. Иванов¹, А. В. Иванов², И. Л. Сандлер³, Н. В. Чертыковцева⁴

Аннотация. В статье показано, что объект с иррациональной передаточной функцией может быть аппроксимирован уравнениями с разностями дробного порядка. Предложена математическая модель разогрева экструдера для полимеров в виде линейного уравнения с разностями дробного порядка. Данная модель сравнивалась с моделями выходной ошибки и ARX-моделями целого порядка, алгоритмы идентификации которых реализованы в расширении MatlabIdentificationtoolbox. Проведенные эксперименты показали, что модели на основе уравнений с разностями дробного порядка обладают более высокой точностью. Предложенные в статье модели и алгоритмы для идентификации разогрева экструзии полимеров могут послужить основой для создания новых высокоеффективных систем управления.

Ключевые слова: экструзия, параметрическая идентификация, разность дробного порядка, модель выходной ошибки, метод наименьших квадратов.

1. Введение

Процесс экструзии является одним из основных технологических процессов в производстве полимерной продукции. Полный цикл работы экструдера (аппарата, в котором проводится процесс экструзии) состоит из нескольких стадий:

- 1) разогрев экструдера до заданного технологическими условиями температурного режима;
- 2) пуск процесса экструзии – переход от состояния, когда продукция на выходе экструдера отсутствует, до состояния, когда исходная продукция экструдера соответствует заданным количественным и качественным характеристикам;
- 3) режим нормальной эксплуатации;
- 4) остановка процесса экструзии.

Первая из названных выше стадий – режим разогрева – характеризуется непродуктивными затратами рабочего времени и энергетических ресурсов. Поэтому, с точки зрения повышения эффективности работы технологического оборудования в производстве полимеров в целом и энергосбережения в частности, задача управления режимом разогрева экструдера может быть сформулирована следующим образом: необходимость разогреть

¹ Иванов Дмитрий Владимирович, доцент кафедры мехатроники, автоматизации и управления на транспорте, ФГБОУ ВО "СамГУПС" (443066, г. Самара, ул. Свободы, 2 В), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5021-5259>, dvi85@list.ru

² Иванов Александр Владимирович, аспирант кафедры мехатроники, автоматизации и управления на транспорте, ФГБОУ ВО "СамГУПС" (443066, г. Самара, ул. Свободы, 2 В), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7890-6177>, aivanov_2016@list.ru

³ Сандлер Илья Львович, старший преподаватель кафедры мехатроники, автоматизации и управления на транспорте, ФГБОУ ВО "СамГУПС" (443066, г. Самара, ул. Свободы, 2 В), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4967-3321>, sandleri@bk.ru

⁴ Чертыховцева Наталья Валерьевна, декан факультета СИТ, ФГБОУ ВО "СамГУПС" (443066, г. Самара, ул. Свободы, 2 В), кандидат технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0060-9778>, chertykovtseva@mail.ru

экструдер до нужного температурного режима по зонам за кратчайшее время без перегрева аппарата (или с минимальным перегревом).

В последнее время появились результаты научных исследований, посвященные решению сформулированной задачи. Как показали результаты исследований, приведенные в [1-4], управление разогревом экструдера должно осуществляться на основе математической модели, которая существенно улучшает качество самого процесса. Следовательно, для повышения эффективности режима разогрева экструдера нужна соответствующая математическая модель. Большинство известных на сегодняшний день научных работ, посвященных этому вопросу, направлены на разработку алгоритмов идентификации математических моделей первого порядка с запаздыванием (ППЗ) или второго порядка с запаздыванием (ВПЗ). Данные модели описывают объект с сосредоточенными параметрами, что является достаточно грубым допущением при моделировании процесса разогрева экструдера. В статье предложена модель разогрева экструзии полимеров в виде линейного уравнения с разностями дробного порядка.

2. Постановка задачи о локальной приводимости

Рассмотрим идеальный без потерь процесс нагрева полубесконечного тела. Ось направлена перпендикулярно нагреваемой поверхности, а начало совпадает с ней. Запишем уравнение теплопроводности для данного случая

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(l, t)}{\partial t} &= \gamma \frac{\partial^2 T(l, t)}{\partial l^2}, 0 < l < \infty, t > 0, \\ -\lambda \frac{\partial T(l, t)}{\partial l} &= \varphi(t), l = 0, t > 0, \\ T(l, t) &= 0, 0 \leq l < \infty, t = 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Используя преобразование Лапласа, приведем уравнение к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \bar{T}(l, s)}{\partial l^2} - \frac{s}{\gamma} \bar{T}(l, s) = 0, \quad (2.2)$$

$$\bar{T}(l, s) = L\{T(l, s)\}. \quad (2.3)$$

Решение этого уравнения будет иметь вид

$$\bar{T}(l, s) = K_1(s)e^{-l\sqrt{\frac{s}{\gamma}}} + K_2(s)e^{l\sqrt{\frac{s}{\gamma}}}.$$

Передаточная функция при нулевых граничных условиях передаточная функция может быть записана в виде

$$W(l, s) = \frac{\bar{T}(l, s)}{\bar{\varphi}(s)} = \frac{\sqrt{\gamma}}{\lambda \sqrt{s}} e^{-l\sqrt{\frac{s}{\gamma}}}. \quad (2.4)$$

Введем замену переменной $u = l\sqrt{\frac{s}{\alpha}}$. Используя аппроксимацию Паде порядка Р

$$e^{-u} \approx \frac{\sum_{k=0}^P \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!} (-u)^k}{\sum_{k=0}^P \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!} u^k}. \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (2.4), получим

$$W(l, s) \approx H_P(s) = \frac{\sqrt{\gamma}}{\lambda\sqrt{s}} \frac{\sum_{k=0}^P \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!} (-l\sqrt{\frac{s}{\gamma}})^k}{\sum_{k=0}^P \frac{(2P-k)!}{k!(P-k)!} (l\sqrt{\frac{s}{\gamma}})^k}. \quad (2.6)$$

Таким образом, передаточная функция уравнения теплопроводности, будет содержать слагаемые со степенями, кратными \sqrt{s} . Такая передаточная функция соответствует дифференциальному уравнению с производными с производными дробных порядков, т.к. $\sqrt{s} \rightarrow \frac{d^{0.5}}{dt^{0.5}}$.

Учитывая, что реальный процесс будет иметь потери, и, кроме того, неоднородность среды, в общем виде уравнения теплообмена могут записаны через уравнения дробных порядков [5]. При аппроксимации решений данных уравнений могут возникать степени, не кратные \sqrt{s} .

Учитывая, что информация об объекте управления поступает в дискретном виде с частотой дискретизации 1 с, целесообразно проводить идентификацию на основе дискретных моделей во временной области.

3. Параметрическая идентификация процесса разогрева экструдера

В общем виде модель процесса нагрева имела следующий вид

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_{i-d}, y_i = z_i + \xi_i, \quad (3.1)$$

где $\alpha_1 \dots < \alpha_r$, $\beta_1 \dots < \beta_{r_1}$, $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$,

$$\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j}, \Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_m}{j} x_{i-j},$$

$$\binom{\alpha_m}{j} = \frac{\Gamma(\alpha_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\alpha_m-j+1)}, \binom{\beta_m}{j} = \frac{\Gamma(\beta_m+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\beta_m-j+1)},$$

y_i – измеренное значение температуры;

x_i – входная переменная, представленная в виде функции Хевисайда;

ξ_i – помеха наблюдения.

Оценки параметров определялись из условия минимума критерия [6,7]

$$\min_{\theta \in \tilde{\Theta}} \sum_{i=1}^N \frac{(y_i - \phi_i^T \theta)^2}{1 + b^T H_\alpha b}, \quad (3.2)$$

$$\phi_i = \left(\left(\phi_y^{(i)} \right)^T \mid \left(\phi_x^{(i)} \right)^T \right)^T, \phi_y^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_1}{j} y_{i-j-1}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\alpha_r}{j} y_{i-j-1} \right)^T,$$

$$\phi_x^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_1}{j} x_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} x_{i-j} \right)^T,$$

$$\theta = (b^T \mid a^T)^T, b = (b^{(1)}, \dots, b^{(r)})^T, a = (a^{(0)}, \dots, a^{(r_1)})^T,$$

$$H_\alpha = \left(\begin{array}{c|c} h_\alpha^{(11)} & \dots \\ \vdots & \vdots \\ \hline h_\alpha^{(1r)} & \dots \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ \hline | \\ | \end{array} \begin{array}{c} h_\alpha^{(r1)} \\ \vdots \\ h_\alpha^{(rr)} \end{array} \right), \quad h_\alpha^{(mn)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \binom{\alpha_m}{j} \binom{\alpha_n}{j} \frac{N-j}{N}.$$

В общем случае вычисление оценок является задачей минимизации отношения двух квадратичных форм. В [8] предложен двухэтапный итерационный алгоритм, позволяющий находить минимум (3.2), решая только системы линейных алгебраических уравнений.

Шаг 0. $\hat{\lambda}'(0) = 0$.

Шаг 1. $\hat{\lambda}'(i) = \frac{(\lambda_{\min} + \hat{\lambda}'(i-1))}{2}$, λ_{\min} определяется из

$$\det \left(\Phi_y^T \Phi_y - \Phi_y^T \Phi_x (\Phi_x^T \Phi_x)^{-1} (\Phi_y^T \Phi_x)^T - \lambda H_\alpha(N) \right) = 0.$$

Шаг 2. Вычислить $\hat{b}(N, \hat{\lambda}'(i))$, $\hat{a}(N, \hat{\lambda}'(i))$, из системы уравнений

$$\left(\begin{array}{c} \hat{b}(N, \hat{\lambda}) \\ \hat{a}(N, \hat{\lambda}) \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \Phi_y^T \Phi_y - \hat{\lambda} H_\alpha(N) & \Phi_y^T \Phi_x \\ \hline \Phi_x^T \Phi_y & \Phi_x^T \Phi_x \end{array} \right)^{-1} \left(\begin{array}{c} \Phi_y^T Y \\ \Phi_x^T Y \end{array} \right). \quad (3.3)$$

$$\text{где } Y = (y_1, \dots, y_N)^T, \quad \Phi = \left(\begin{array}{c|c} \Phi_y & \Phi_x \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \left(\phi_y^{(0)} \right)^T & \left(\phi_x^{(0)} \right)^T \\ \vdots & \vdots \\ \left(\phi_y^{(N-1)} \right)^T & \left(\phi_x^{(N-1)} \right)^T \end{array} \right).$$

Шаг 3. Проверить условие $V_N(\hat{\lambda}'(i)) \leq 0$.

$$V_N(\lambda) = Y^T Y - \hat{\lambda}'(i) - \left(\Phi_y^T Y \hat{b}(N, \hat{\lambda}(i)) + \Phi_x^T Y \hat{a}(N, \hat{\lambda}(i)) \right),$$

тогда, если уравнение $V_N(\hat{\lambda}'(i)) = 0$ имеет корень $\hat{\lambda}'_1(N) \in [0, \lambda_{\min}(N)]$, то последовательность $\hat{\lambda}'(0), \hat{\lambda}'(1), \dots, \hat{\lambda}'(i)$ – конечна и $\lambda(0) \in [\hat{\lambda}'_1(N), \lambda_{\min}(N)]$, в противном случае последовательность бесконечна.

Этот алгоритм позволяет определить начальное приближение $\hat{\lambda}(0)$, необходимое для дальнейшего применения метода Ньютона или определить, что корень $\hat{\lambda}'_1(N)$ не существует.

Пусть существуют $\hat{\lambda}(0) \in [\hat{\lambda}'_1(N), \lambda_{\min}(N)]$, тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{\lambda}(i) = \hat{\lambda}'_1(N)$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{b}(N, \hat{\lambda}(i)) = \hat{b}(N)$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \hat{a}(i, \hat{\lambda}(i)) = \hat{a}(N)$, где $\hat{\lambda}(i)$, $\hat{b}(i, \hat{\lambda}(i))$ и $\hat{a}(i, \hat{\lambda}(i))$ определяются совместно со следующим алгоритмом.

Шаг 1. Вычислить $\hat{b}(N, \hat{\lambda}'(i))$, $\hat{a}(N, \hat{\lambda}'(i))$, из системы уравнений (3.3).

Шаг 2. Вычислить

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}(i+1) &= \left(1 + \left[\hat{b}(N, \hat{\lambda}(i)) \right]^T H_\alpha(N) \hat{b}(N, \hat{\lambda}(i)) \right)^{-1} \times \\ &\times \left(Y^T Y + \hat{\lambda}(i) \left(\left[\hat{b}(N, \hat{\lambda}(i)) \right]^T H_\alpha(N) \hat{b}(N, \hat{\lambda}(i)) \right) - \left(\frac{\Phi_y^T Y}{\Phi_x^T Y} \right) \left(\frac{\hat{b}(N, \hat{\lambda}'(i))}{\hat{a}(N, \hat{\lambda}'(i))} \right) \right). \end{aligned}$$

Шаг 3. Перейти к шагу 1.

Процесс вычисления заканчивается, если выполняется условие

$$\frac{\|V_N(\hat{\lambda}(i+1)) - V_N(\hat{\lambda}(i))\|}{\|V_N(\hat{\lambda}(i+1))\|} \leq \delta,$$

где δ – априорно заданная точность оценок.

Это утверждение непосредственно вытекает из метода Ньютона

$$\hat{\lambda}(i+1) = \hat{\lambda}(i) - \frac{V_N(\hat{\lambda}(i))}{\dot{V}_N(\hat{\lambda}(i))}.$$

4. Результаты экспериментальных исследований

Испытания проводились на экструдере ESE 1-35-27. Экструдер имеет 3 зоны нагрева. Мощность каждого нагревателя 0.5 кВт. Погрешность измерения температуры $\pm 1^\circ\text{C}$. Схема расположения зон нагрева представлена на рисунке 4.1.

Экспериментально были получены переходные характеристики для нагрева каждой из трех зон при включении соответствующего нагревателя.

Идентификация проводилась на основе алгоритма, описанного в предыдущем разделе (модель выходной ошибки дробного порядка), а также использовалось расширение Matlab, Identification toolbox, в котором реализована идентификация параметров моделей выходной ошибки (output error) и ARX (autoregressive with exogenous input) для моделей целого порядка. Для всех трех моделей время запаздывания определялось по графикам.

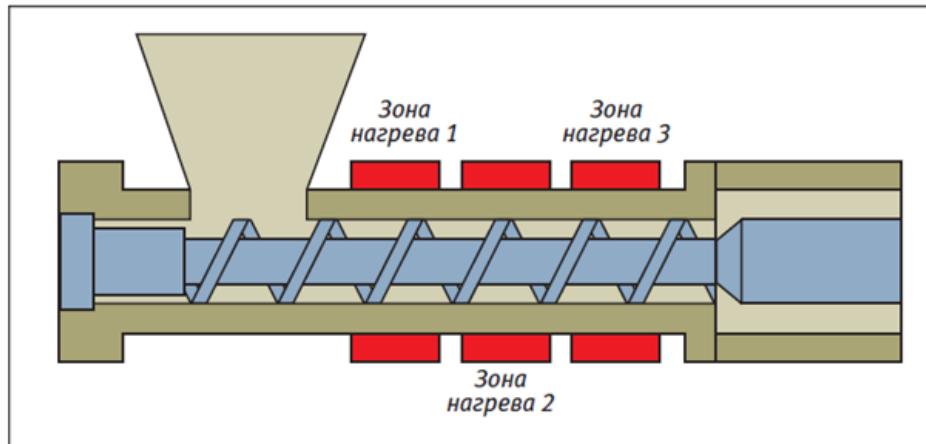


Рисунок 4.1

Схема расположения зон в экструдере

Модели для трех зон нагрева приведены в таблице 1. Стоит отметить, что при возрастании порядка целочисленных моделей, ковариационная матрица становилась плохо обусловленной и точность моделирования ухудшалась.

Графики абсолютных погрешностей для трех зон представлены ниже.

Таблица 1: Виды экспериментальных моделей

№	ARX целого порядка	ОЕ целого порядка	ОЕ дробного порядка
1	$z_i = 0.9989z_{i-1} + 0.1751x_{i-31}$	$z_i = 0.9989z_{i-1} + 0.1749x_{i-31}$	$z_i = 0.9903z_{i-1} + 0.1014\Delta^{-0.55}x_{i-31},$
2	$z_i = 0.9992z_{i-1} + 0.1531x_{i-38}$	$z_i = 0.9992z_{i-1} + 0.1492x_{i-38}$	$z_i = 0.9706z_{i-1} + 0.0602\Delta^{-0.55}x_{i-36},$
3	$z_i = 0.9989z_{i-1} + 0.5857x_{i-31}$	$z_i = 1.966z_{i-1} - 0.966z_{i-2} + 1.48x_{i-31} - 3.03x_{i-32} + 1.56x_{i-33}$	$z_i = 0.9798z_{i-1} + 0.1366\Delta^{-0.5}x_{i-40},$

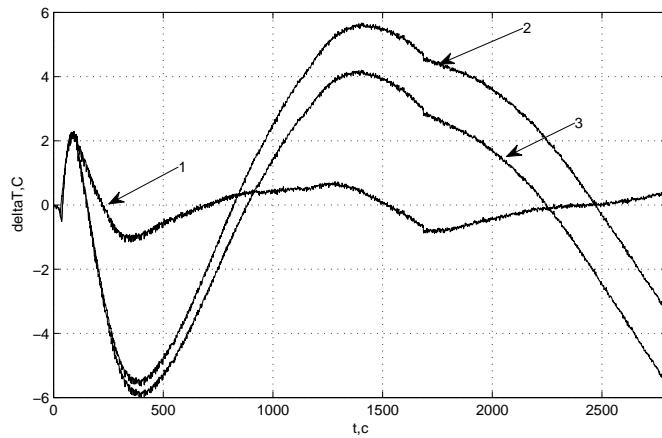


Рисунок 4.2

График абсолютной погрешности для первой зоны нагрева. 1. ОЕ модель дробного порядка, 2. ARX модель целого порядка, 3. ОЕ-модель целого порядка

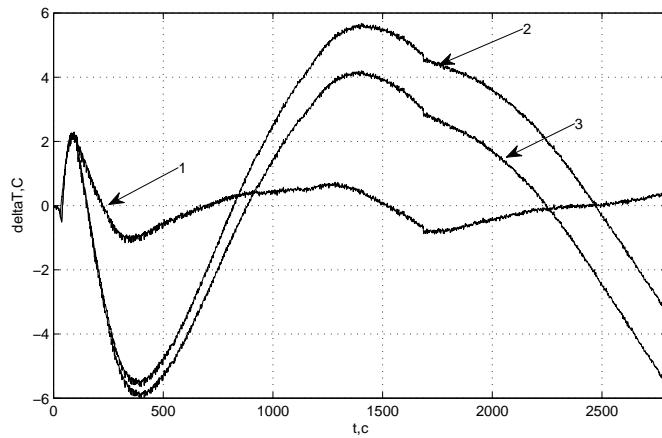


Рисунок 4.3

График абсолютной погрешности для второй зоны нагрева. 1. ОЕ модель дробного порядка, 2. ARX модель целого порядка, 3. ОЕ-модель целого порядка

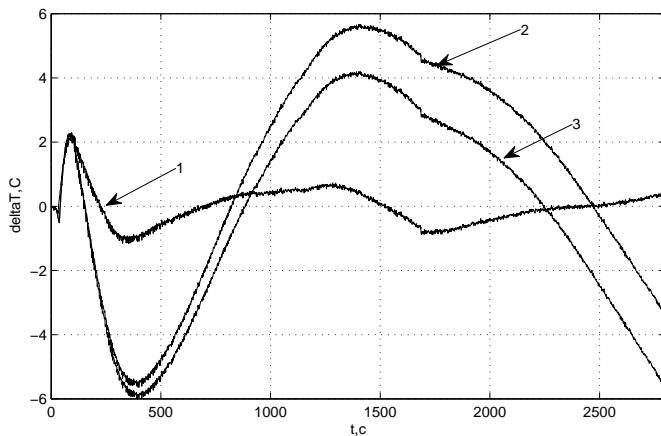


Рисунок 4.4

График абсолютной погрешности для третьей зоны нагрева. 1. ОЕ модель дробного порядка, 2. ARX модель целого порядка, 3. ОЕ-модель целого порядка

Из представленных графиков видно, что модели на основе уравнений с разностями дробного порядка точнее известных дискретных ARX и ОЕ моделей. Для всех трех зон погрешность моделей не превышала 2° С.

5. Заключение

Проведенные эксперименты показали, что модели на основе уравнений с разностями дробного порядка обладают более высокой точностью. Предложенные в статье модели и алгоритмы для идентификации разогрева экструзии полимеров могут послужить основой для создания новых высокоэффективных систем управления. Дальнейшим направлением работы является построение единой модели, учитывающей взаимное влияние зон разогрева, на основе алгоритмов, позволяющих осуществлять структурно параметрическую идентификацию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Diduch, R. Dubay, W. G. Li, “Temperature control of injection molding. Part 1: Modeling and identification”, *Polymer Engineering and Science*, **44**:12 (2004), 2308–2317, <http://dx.doi.org/10.1002/pen.20258>.
2. C. Diduch, R. Dubay, W. G. Li, “Temperature control of injection molding. Part 2: Controller design, simulation, and implementation”, *Polymer Engineering and Science*, **44**:12 (2004), 2318-2326, <http://dx.doi.org/10.1002/pen.20259>.
3. E. Dassau, B. Grosman, D. R. Lewin, “Modeling and temperature control of rapid thermal processing”, *Computers and Chemical Engineering*, **30**, 2006, 686-697, <https://dx.doi.org/10.1016/j.compchemeng.2005.11.007>.
4. S.-O. Lindert, G. Reindl, K. Schlacher, “Identification and Control of an Injection Moulding Machine”, *IFAC Proceedings Volumes*, **47**, 2014, 5878 - 5883, <https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.01488>.

5. D. Sierociuk, A. Dzielinski, G. Sarwas, I. Podlubny, T. Skovranek, "Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, **371** (2013), 20120146, <https://dx.doi.org/10.1098/rsta.2012.0146>.
6. D. V. Ivanov, "Identification Discrete Fractional Order Linear Dynamic Systems with output-error", Proc. Int. Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013), 2013, 1-4, <http://dx.doi.org/10.1109/SIBCON.2013.6693623>.
7. D. V. Ivanov, "Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables", Proc. East-West Design & Test Symposium, 2013 (EWDTs'2013), 2013, 1-4, <http://dx.doi.org/10.1109/EWDTs.2013.6673122>.
8. D. V. Ivanov, "Numerical algorithms of parameter estimation of linear dynamic systems fractional order with noise in the output signal", *Applied Discrete Mathematics and Heuristic Algorithms*, **1**:1 (2015), 23-31.

Поступила 10.07.2017

MSC2010 93E12

Identification of the heating model plastic injection molding machines

© D. V. Ivanov ⁵, A. V. Ivanov ⁶, I. L. Sandler ⁷, N. V. Chertykovtseva ⁸

Abstract. The paper shows that an object with an irrational transfer function can be approximated by equations with fractional-order differences. A mathematical model of the plastic engine molding heating model in the form of a linear equation with fractional-order differences is proposed. This model was compared with models of output error and ARX (autoregressive with exogenous input) models of integer order. Identification algorithms of these models are implemented in the Identification toolbox Matlab extension. The experiments carried out showed that models based on equations with fractional-order differences have higher accuracy. The models and algorithms proposed in the paper for identifying the heating of engine molding machine can serve as a basis for the creation of new highly efficient control systems.

Key Words: Injection molding, parametric identification, difference of fractional order, model of output error, least squares method

⁵ **Dmitriy V. Ivanov**, Associate Professor, Department of Mechatronics, Automatization and Control On Transport, Samara State University of Transport (2B Bezymianniy lane., Samara 443066, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5021-5259>, dvi85@list.ru

⁶ **Alexandr V. Ivanov**, Ph.D. student, Department of Mechatronics, Automatization and Control On Transport, Samara State University of Transport, (2B Bezymianniy lane., Samara 443066, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7890-6177>, aivanov_2016@list.ru

⁷ **Ilya L. Sandler**, Senior Lecturer, Department of Mechatronics, Automatization and Control On Transport, Samara State University of Transport (2B Bezymianniy lane., Samara 443066, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4967-3321>, virus@bk.ru

⁸ **Natalia V. Chertykovtseva**, Dean of faculty, Samara State University of Transport (2B Bezymianniy lane., Samara 443066, Russia), Ph.D. (Candidate of Engineering Sciences), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0060-9778>, chertykovtseva@mail.ru

REFERENCES

1. C. Diduch, R. Dubay, W.G. Li, "Temperature control of injection molding. Part 1: Modeling and identification", *Polymer Engineering and Science*, **44**:12 (2004), 2308–2317, <http://dx.doi.org/10.1002/pen.20258>.
2. C. Diduch, R. Dubay, W.G. Li, "Temperature control of injection molding. Part 2: Controller design, simulation, and implementation", *Polymer Engineering and Science*, **44**:12 (2004), 2318-2326, <http://dx.doi.org/10.1002/pen.20259>.
3. E. Dassau, B. Grosman, D.R. Lewin, "Modeling and temperature control of rapid thermal processing", *Computers and Chemical Engineering*, **30**, 2006, 686-697, <https://dx.doi.org/10.1016/j.compchemeng.2005.11.007>.
4. S.-O. Lindert, G. Reindl, K. Schlacher, "Identification and Control of an Injection Moulding Machine", *IFAC Proceedings Volumes*, **47**, 2014, 5878 - 5883, <https://doi.org/10.3182/20140824-6-ZA-1003.01488>.
5. D. Sierociuk, A. Dzielinski, G. Sarwas, I. Podlubny, T. Skovranek, "Modelling heat transfer in heterogeneous media using fractional calculus", *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A*, **371** (2013), 20120146, <https://dx.doi.org/10.1098/rsta.2012.0146>.
6. D.V. Ivanov, "Identification Discrete Fractional Order Linear Dynamic Systems with output-error", Proc. Int. Siberian Conference on Control and Communications (SIBCON'2013), 2013, 1-4, <http://dx.doi.org/10.1109/SIBCON.2013.6693623>.
7. D.V. Ivanov, "Identification discrete fractional order linear dynamic systems with errors-in-variables", Proc. East-West Design & Test Symposium, 2013 (EWDTs'2013), 2013, 1-4, <http://dx.doi.org/10.1109/EWDTs.2013.6673122>.
8. D.V. Ivanov, "Numerical algorithms of parameter estimation of linear dynamic systems fractional order with noise in the output signal", *Applied Discrete Mathematics and Heuristic Algorithms*, **1**:1 (2015), 23-31.

Submitted 10.07.2017

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском языке, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC 2010;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО – полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (только на русском);
- список литературы.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание

ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– не включать несущественные детали;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);
- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);
- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

Текст статьи. При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты - основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение — выводы и рекомендации.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

Внимание! Новые правила. С этого номера в статью включается список литературы на английском языке. Список литературы имеет заголовок **References** и располагается после ключевых слов на английском языке.

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Перевод заглавия статьи на английский язык;
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- название книги (транслитерация);
- [Перевод названия книги в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;
- Количество страниц в издании (250 р.);
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете *svmobib.sty*.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте <http://translit.net/ru/bgn/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка, расположаться за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru. ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка можно скачать из раздела Полезные материалы меню Для автора на сайте журнала.

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References.*

Статьи в журналах на русском языке:

P. A. Shamanaev, “[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]”, Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, “[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a perturbation in the form of small linear term with delay]”, Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке:

M. J. Berger, J. Oliger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations Journal of Computational Physics, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, “[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]”, Ogarev-online, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funktionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, “[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Материалы конференций на русском языке:

A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand], Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i kompleksy programm" imeni E.V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E.V. Voskresensky with international participation] (Saransk, 12-15 July 2016), SVMO Publ., 105-107 (In Russ.)

P.A. Shamanaev, A.A. Kyashkin, B.V. Loginov, [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative], Tezisy dokladov “Mezhdunarodnoy konferentsii po differential’nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam” [Proceeding of the “International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems”] (Saransk, 12-15 July 2016), 231-233 (In Russ.).

Диссертации на русском языке:

P. A. Shamanaev, Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost’ dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ.), 145 p.

Правила верстки рукописей в системе LaTex

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются два файла: файл-преамбула и файл-шаблон. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>.

Текст статьи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <Фамилия-ИО>.tex (который включается командой \input в файл-преамбулу). Например, \input{shamanaev.tex}

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Для оформления заголовков статьи на русском и английском языках следует использовать команды \headerRus и \headerEn, соответственно.

Эти команды имеют следующие аргументы:

{УДК или MSC 2010} {название статьи} {автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}} {Аннотация} {Ключевые слова}

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды \sect с одним параметром: \sect{Заголовок}

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами \subsection, \subsubsection и \paragraph.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения Th, Lemm, Prop, Cor, Defin, NB и Example. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами \proof и \proofend (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды \R, \Rn, \C, \Z, \N и т. д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды \phi, \epsilon соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами \px{i} и \pxtog{u}{i}.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды \textrm, \textit. Например, для вставок формул Γ_i , Δ_i в текст статьи необходимо набрать ко-

манды `\textrm{Г}_i`, `\textit{Д}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень _ сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

`\RBibitem{метка для ссылки на источник},`

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

`\Bibitem{метка для ссылки на источник}.`

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmobib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcrite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

**Примеры оформления библиографических ссылок для раздела
References с помощью команд из стилевого пакета *svmobib.sty***

Статьи в журналах на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib1}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by P. A. Shamanaev
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2016
\vol 18
\issue 3
\pages 61–69
\lang In Russ.
```

Статьи в журналах на английском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib3}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

Статьи в электронном журнале на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib4}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funktionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

Статьи в сборниках на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib5}
 \by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
 \paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
 \inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
 \publaddr Ulyanovsk
 \publ UlGTU Publ.
 \yr 2014
 \serial 10
 \pages 4–13
 \lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib6}
 \by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy
 \book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]
 \publaddr Moscow
 \publ Nauka Publ.
 \yr 1966
 \totalpages 576
 \lang In Russ.

Материалы конференций на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib7}
 \by A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev
 \inbook [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand]
 \proc Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovaniye, chislennye metody i kompleksy programm" imeni E.V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E.V. Voskresensky with international participation]
 \procinfo Saransk, 12-15 July 2016
 \publ SVMO Publ.
 \pages 105–107
 \lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib8}
 \by P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov
 \inbook [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative]
 \proc Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentials'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam" [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"]
 \procinfo Suzdal, 8-12 July 2016
 \pages 231–233
 \lang In Russ.

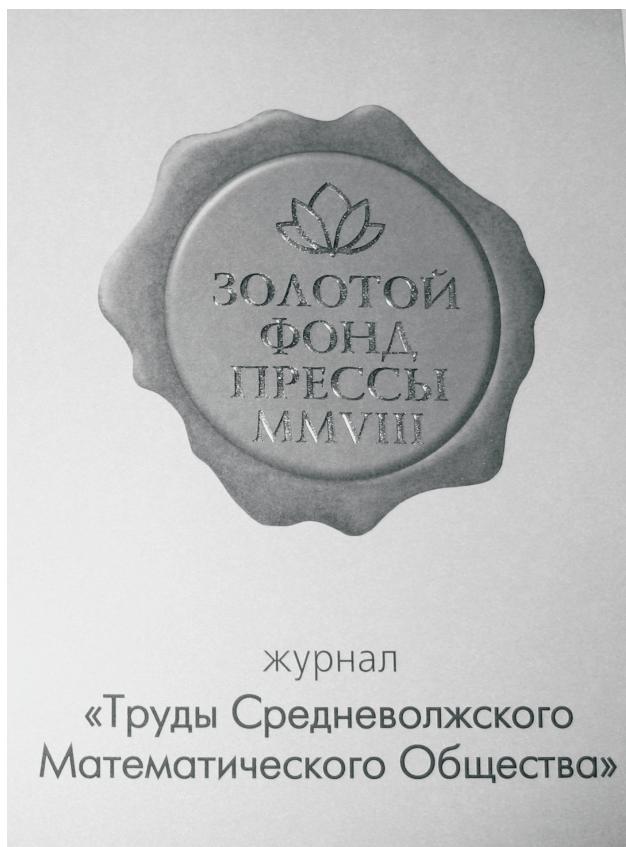
Диссертации на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib9}
\by P. A. Shamanaev
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]
\thesisinfo Diss. . . . kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]
\publaddr Saransk
\yr 1997
\totalpages 145
\lang In Russ.

Алфавитный указатель

Ахтямов А. М.	11	Манапова А. Р.	41
Бухенский К. В.	73	Машнина С. Н.	73
Веселов С. И.	24	Муфтахов А. В.	11
Галимов Р. Ю.	11	Нагорных С. Н.	53
Дюбуа А. Б.	73	Саблуков Д. С.	53
Иванов А. В.	82	Сандлер И. Л.	82
Иванов Д. В.	82	Сафошкин А. С.	73
Конюхов А. Н.	73	Смолкин Г. А.	64
Круглов В. Е.	31	Таланова Г. Н.	31
Кучерявый С. И.	73	Файрузов М. Э.	41
Лубышев Ф. В.	41	Чертыковцева Н. В.	82

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректура: Язовцева О. С.

Перевод: Сыромясов А. О.

Дата выхода в свет 29.12.2017. Цена свободная.

Подписано в печать 01.12.2017. Формат 70x108 1/16. Объем 9,1 усл. печ.л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1785.

Типография Издательства Мордовского университета
430005, г. Саранск, ул. Советская, 24

Для заметок

Для заметок

