

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$ 19 $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$ 2

2017

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900

Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 19, № 2. 2017

DOI 10.15507/2079-6900.19.201702

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

SCIENCE JOURNAL

VOL. 19, No. 2. 2017

DOI 10.15507/2079-6900.19.201702

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика, 01.02.00 Механика, 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управления.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH), а статьи опубликованные в нем приравняются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (заключение президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских учёных – РИНЦ.

Подписка на журнал осуществляется в любом почтовом отделении связи на всей территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68).

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68)

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), тел.: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, web: <http://journal.svmo.ru>

Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Science Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-37887 of October 23 2009

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics, 01.02.00 Mechanics, 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations – RISC.

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, Web: <http://journal.svmo.ru>

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

Тишкин Владимир Федорович — главный редактор, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, зам. директора по научной работе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

Кузьмичев Николай Дмитриевич — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Шаманаев Павел Анатольевич — ответственный секретарь, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Андреев Александр Сергеевич — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Алимов Шавкат Арифджанович — профессор, доктор физико-математических наук, академик Академии Наук Республики Узбекистан, Малазийский институт стратегических исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

Ахтямов Азамат Мухтарович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Аюпов Шавкат Абдуллаевич — профессор, академик Академии Наук Республики Узбекистан, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Бойков Илья Владимирович — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

Вельмисов Петр Александрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшей математики» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Горбунов Владимир Константинович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

Гринес Вячеслав Зигмундович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной информатики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Н. Новгород, Россия)

Дерюгин Юрий Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, начальник научно-исследовательского отдела Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

Жабко Алексей Петрович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления Санкт-Петербургского государственного университета (Санкт-Петербург, Россия)

Жегалов Валентин Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений Казанского федерального университета (Казань, Россия)

Кальменов Тынысбек Шарипович — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, генеральный директор Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики, Казахский национальный университет имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

Камачкин Александр Михайлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, факультет прикладной математики и процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета (Санкт-Петербург, Россия)

Кузнецов Евгений Борисович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений Московского авиационного института (Москва, Россия)

Кризский Владимир Николаевич — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Логинов Борис Владимирович — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

Мартынов Сергей Иванович — доктор физико-математических наук, профессор, директор политехнического института, Югорский государственный университет (Ханты-Мансийск, Россия)

Матус Петр Павлович — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета (Люблин, Польша)

Починка Ольга Витальевна — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая Школа Экономики» (Нижний Новгород, Россия)

Радченко Владимир Павлович — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика», Самарский государственный технический университет (Самара, Россия)

Рязанцева Ирина Прокофьевна — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет (Н. Новгород, Россия)

Салахитдинов Махмуд Салахитдинович — доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии Наук Республики Узбекистан, Институт математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

Спивак Семен Израилевич — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Терехин Михаил Тихонович — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина» (Рязань, Россия)

Anca Veronica Ion — профессор, Институт Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

Морозкин Николай Данилович — доктор физико-математических наук, профессор, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

Сенин Петр Васильевич — доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

Сухарев Лев Александрович — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

Ярушкина Надежда Глебовна — доктор технических наук, профессор, первый проректор - проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

EDITORIAL BOARD

Tishkin Vladimir Fedorovich — Editor in chief, corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), full professor, deputy director of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

Kuzmichev Nikolay Dmitrievich — Deputy editor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Shamanaev Pavel Anatolievich — Executive secretary, PhD (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied mathematics, Differential equations and Theoretical mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Andreev Aleksandr Sergeevich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Alimov Shavkat Arifdjanovich — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

Akhtyamov Azamat Muhtarovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

Ayupov Shavkat Abdulaevich — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Director of Institute of Mathematics at the National University of Uzbekistan after MirzoUlugbek (Tashkent, Uzbekistan)

Boykov Ilya Vladimirovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department of «Higher and Applied Mathematics», Penza State University (Penza, Russia)

Velmisov Petr Aleksandrovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department «Higher Mathematics», Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Gorbunov Vladimir Konstantinovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Economics and mathematical methods and information technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

Grines Vyacheslav Zigmundovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Fundamental Informatics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Derugin Yuriy Nikolaevich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the research Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

Zhabko Aleksey Petrovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Zhegalov Valentin Ivanovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of DifferentialEquation, Kazan Federal Unversity (Kazan, Russia)

Kalmenov Tynysbek Sharipovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Director of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

Kamachkin Aleksandr Mikhaylovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, professor, Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

Kuznetsov Evgeny Borisovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

Krizskii Vladimir Nikolaevich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Deputy Director for Research and Innovation of the Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Loginov Boris Vladimirovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of the Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Martynov Sergey Ivanovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Director of Polytechnic Institute, Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

Matus Petr Pavlovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

Pochinka Olga Vitalievna — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

Radchenko Vladimir Pavlovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department «Applied mathematics and informatics», Samara State Technical University (Samara, Russia)

Ryazantseva Irina Prokofievna — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical n.a. R. E. Alekseev, University (Nizhny Novgorod, Russia)

Salahitdinov Mahmud Salahitdinovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan after MirzoUlugbek (Tashkent, of Uzbekistan)

Spivak Semen Izrailevich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of Department of Mathematical Modelling, Bashkir State University (Ufa, Russia)

Terekhin Mikhail Tikhonovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

Anca Veronica Ion — PhD in Mathematics, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics of the Romanian Academy, Buharest, Romania, Senior Researcher III

EDITORIAL COUNCIL

Morozkin Nikolay Danilovich — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

Senin Petr Vasilievich — Dr. Sci. (Engineering), full professor, Vice-rector for Science & Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Suharev Lev Alexandrovich — PhD (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied mathematics, Head of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

Yarushkina Nadezda Glebovna — Dr. Sci. (Engineering), full professor, First Vice-Rector – Vice-Rector for Science of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

Содержание

МАТЕМАТИКА

- Ю. В. Баханова, А. О. Казаков, А. Г. Коротков**
Спиральный хаос в моделях типа Лотки-Вольтерры 13
-

- Е. Я. Гуревич, Д. А. Павлова**
О простейших потоках Морса-Смейла с гетероклиническими пересечениями на сфере S^n 25
-

- М. Б. Ермолаев, П. М. Симонов**
Признаки устойчивости одного класса автономных дифференциальных “псевдолинейных” уравнений первого порядка с авторегулируемым запаздыванием 31
-

- Е. В. Жужома, В. С. Медведев**
Недиссипативное кинематическое динамо на линзах 53
-

- А. Д. Козлов**
Примеры странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях 62
-

- М. И. Купцов, М. Т. Терехин, В. В. Теняев**
К проблеме существования интегральных многообразий системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных 76
-

- М. И. Малкин, К. А. Сафонов**
Нидинг-конструкции моделей постоянного наклона для обобщенных перекладываний отрезка 85
-

- Е. В. Ноздринова**
Существование связного характеристического пространства у градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей 91
-

Д. В. Сироткин

Теоремы существования и достаточности, связанные с локальными преобразованиями графов для задачи о k -раскраске 98

Д. С. Талецкий

О производящих функциях и предельных теоремах, связанных с максимальными независимыми множествами в графах-решетках 105

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

А. О. Сыромясов, А. И. Попов, В. Ф. Першин

Исследование плоского движения одиночного шарика внутри шаровой мельницы 117

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

А. В. Багаев, Е. Н. Пелиновский

Собственные моды колебаний в ограниченном бассейне переменной глубины 126

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Юрий Николаевич Дерюгин – к семидесятилетию со дня рождения . 139

Contents

MATHEMATICS

Yu. V. Bakhanova, A. O. Kazakov, A. G. Korotkov Spiral chaos in the Lotka-Volterra like systems	13
E. Ya. Gurevich, D. A. Pavlova On the simplest Morse-Smale flows with heteroclinical intersections on the sphere S^n	25
M. B. Ermolaev, P. M. Simonov The tests of the stability of one class of autonomous differential “pseudo-linear” equations of the first order with autoregulated delay .	31
E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev Nondissipativ kinematic dynamics on lenses	53
A. D. Kozlov Examples of strange attractors in tree-dimentional nonoriented maps	62
M. I. Kuptsov, M. T. Terekhin, V. V. Tenyaev To the problem of existence of integral manifolds systems of differential equations not solved with respect to derivatives	76
M. I. Malkin, K. A. Safonov Niding designs of models of constant inclination for generalized shifts of a segment	85
E. V. Nozdrinova The existence of a connected characteristic space for gradient-like diffeomorphisms of surfaces	91
D. V. Sirotkin Theorems of existence and sufficiency connected with local transformations of graphs for the k -colourability problem	98
D. S. Taletskii Some quantitative results connected with maximal independent sets in grid graphs	105

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

A. O. Syromyasov, A. I. Popov, V. F. PershinInvestigation of plane motion of a single ball inside a ball mill 117

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

A. V. Bagaev, E. N. PelinovskyEigenmodes of water oscillations in the closed basin of variable depth 126

MATHEMATICAL LIFE

YURI NIKOLAEVICH DERYUGIN – ON HIS SEVENTIETH BIRTHDAY 139

МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.19.201701.013-024

УДК 519.7

Спиральный хаос в моделях типа Лотки-Вольтерры

© Ю. В. Баханова¹ А. О. Казаков² А. Г. Коротков³

Аннотация. В работе проведены исследования спирального хаоса в обобщенной системе Лотки-Вольтерры и системе Розенцвейга-Макартура, описывающей взаимодействие трех популяций. Показано, что в исследуемых системах спиральный хаос возникает по сценарию Шильникова. При изменении параметра в системе из устойчивого состояния равновесия рождается устойчивый предельный цикл и седло-фокусное состояние равновесия. Неустойчивое многообразие последнего при дальнейшем изменении параметра образует воронку, наматываясь на устойчивый цикл, и в некоторый момент касается одномерного устойчивого многообразия, образуя гомоклиническую траекторию к седлу-фокусу. Если при этом предельный цикл теряет устойчивость (например, в результате последовательности бифуркаций удвоения периода), а седловая величина седла-фокуса отрицательная, то на основе гомоклинической траектории возникает странный аттрактор.

Ключевые слова: спиральный хаос, система типа Лотки-Вольтерры, странный аттрактор.

1. Введение

Спиральный хаос, связанный с возникновением гомоклинической петли сепаратрисы состояния равновесия типа седло-фокус, является одним из основных примеров хаотической динамики в трехмерных системах. Теорема Л.П. Шильникова [1] утверждает, что в любой окрестности такой петли (при выполнении некоторого условия, т. н. условия Шильникова, на собственные значения седло-фокуса) существует нетривиальное гиперболическое подмножество, содержащее счетное множество седловых периодических траекторий. Таким образом, обнаружение гомоклинической петли седло-фокуса сразу говорит о сложности поведения траекторий в исследуемой системе.

Статьи Arneodo, Couillet и Tresser [2], [3], [4] были, по-видимому, первыми работами, в которых численно показано возникновение сложного поведения траекторий, связанного с существованием шильниковской петли. По всей видимости, именно эти работы привлекли внимание специалистов по динамическим системам к спиральному хаосу. После чего появилось большое количество работ, по исследованию конкретных систем из приложений самой разной природы, в которых авторы различными методами устанавливали наличие петли седло-фокуса и тем самым доказывали, что обнаруженные странные аттракторы относятся к спиральному типу. Таким образом спиральные аттракторы удалось обнаружить

¹ Баханова Юлия Викторовна, студент, кафедра ТУиДС, ИИТММ, НИУ ННГУ (603950, Н.Новгород, проспект Гагарина, 23); ORCID: 0000-0002-4067-1226, jul95-8@mail.ru

² Казаков Алексей Олегович, старший научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); старший преподаватель, кафедра ТУиДС, ИИТММ, НИУ ННГУ (603950, Н.Новгород, проспект Гагарина, 23); кандидат физико-математических наук, ORCID: 0000-0003-0002-6553, kazakovdz@yandex.ru

³ Коротков Александр Геннадьевич, аспирант, кафедра ТУиДС, ИИТММ, НИУ ННГУ (603950, Н.Новгород, проспект Гагарина, 23); ORCID: 0000-0002-9256-1643, koral81@bk.ru

в радио-электронных устройствах, таких как цепь Чуа [5], генератор Анищенко-Астахова [6], в электромеханических системах [7] и т. д.

В настоящей работе проведено исследование сценариев возникновения спирального хаоса в двух моделях типа Лотки-Вольтерры вида

$$\dot{N}_i = N_i F_i(N_1, N_2, N_3), \quad i = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

описывающих взаимодействие трех видов особей N_1, N_2 и N_3 .

Первая модель, относящаяся к классу обобщенных моделей Лотки-Вольтерры, имеет вид

$$\dot{N}_i = N_i \left(\gamma_i - \sum_{j=1}^3 \nu_{ij} N_j \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.2)$$

Такая модель была исследована в работах [8, 2, 9]. В частности, в работе [8] было показано, что хаос в системах вида (1.2) может возникать только в случае, если хотя бы один из коэффициентов ν_{ij} отрицательный. Авторы работы [2] полагали, что хаос, возникающий в системе (1.2), может иметь спиральную («шильниковскую») природу и связывали его с возникновением гомоклинической траектории к седло-фокусу с одномерным неустойчивым многообразием. В настоящей работе мы показываем, что в системе (1.2) при изменении одного из параметров реализуется сценарий Шильникова [10], в результате которого возникает странный аттрактор, содержащий состояние равновесия типа седло-фокус с двумерным неустойчивым многообразием.

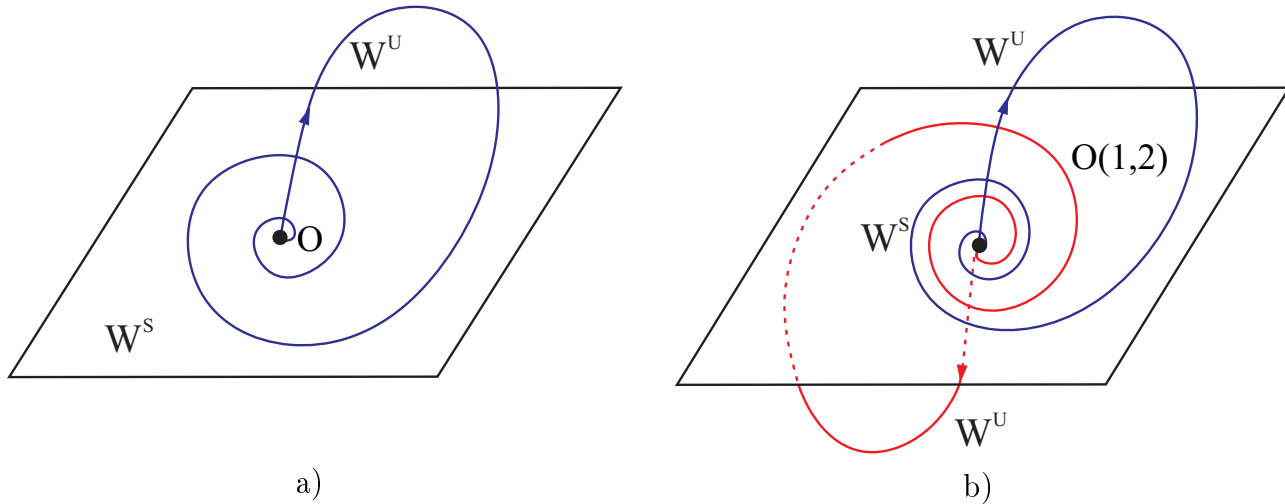
Вторая модель относится к классу систем Розенцвейга-Макартура [11]. С подробным исследованием таких систем можно ознакомиться в работах [12-14], в которых помимо анализа регулярных движений, также исследовалась возможность возникновения хаотической динамики. Что касается спирального хаоса, то он впервые был обнаружен в работе [13]. В настоящей работе мы проводим исследование хаотической динамики в системе Розенцвейга-Макартура, описывающей взаимодействие хищника и жертвы при условии, что часть популяции хищников заражена паразитами. Такая постановка задачи была исследована в работе [15], где было показано, что при изменении параметра в системе может наблюдаться цепочка бифуркаций: устойчивое состояние равновесия \rightarrow предельный цикл \rightarrow цикл удвоенного периода $\rightarrow \dots \rightarrow$ аттрактор типа Фейгенбаума. Мы показываем в настоящей работе, что развитие хаоса здесь на этом не заканчивается. При дальнейшем увеличении параметра возникают гомоклинические траектории к седло-фокусу, для которого выполнено условие Шильникова [1], что является критерием существования уже спирального хаоса.

В разделе 2 сформулирована теорема Шильникова о сложной структуре в окрестности петли седло-фокуса трехмерной системы, а также описан сценарий Шильникова [10], согласно которому в результате ряда бифуркаций из устойчивой точки может возникнуть странный аттрактор, содержащий петлю седло-фокуса с двумерным неустойчивым многообразием. В разделе 3 приведены результаты исследования спирального хаоса в обобщенной модели Лотки-Вольтерры, а в разделе 4 – аналогичные результаты для системы Розенцвейга-Макартура.

2. О спиральном хаосе

Рассмотрим динамическую систему, задаваемую трехмерным потоком и зависящую от параметра μ . Пусть при $\mu = \mu^*$ эта система имеет состояние равновесия O с собственными значениями $\lambda \pm i\omega$ и γ , где $\lambda < 0$, $\gamma > 0$ и $\omega \neq 0$. Такое состояние равновесия

называется седло-фокусом типа (2.1); оно имеет двумерное устойчивое W^S и одномерное неустойчивое W^U инвариантные многообразия. Многообразие W^U разбивается точкой O на 2 связные компоненты-траектории, называемые неустойчивыми сепаратрисами. Предположим, что при $\mu = \mu^*$ одна из этих сепаратрис возвращается в седло-фокус при $t \rightarrow +\infty$, то есть образует гомоклиническую петлю (см. рис. 2.1a).



Р и с у н о к 2.1

Гомоклинические траектории к седло-фокусу (2,1)

В 1965 г. Л.П. Шильников [1] доказал теорему о том, что если седловая величина седло-фокуса $\rho = \lambda + \gamma$ положительна, то в любой окрестности петли Γ существует нетривиальное гиперболическое подмножество, содержащее счетное множество седловых периодических траекторий, вследствие чего поведение системы вблизи Γ является весьма сложным.⁴

Замечание 1. При обращении времени седло-фокус типа (2.1) становится седло-фокусом типа (1.2). Таким образом, сложная динамика вблизи петли седло-фокуса (1,2) будет иметь место в случае $\rho < 0$.

Фактически, теорема Шильникова из работы [1] дает простой критерий наличия хаоса для широкого класса систем, обладающих петлей седло-фокуса. Впоследствии для такого хаоса закрепилось название «шильниковский», а также «спиральный»⁵ хаос. В 1967 г. Шильников обобщил этот результат на случай четырехмерной системы с петлей седло-фокуса, собственные значения которого равны $\lambda \pm i\omega_1$, $\gamma \pm i\omega_2$, где $\omega_i \neq 0$, $\lambda < 0$, $\gamma > 0$ [17], а в 1970 г. в работе [18] рассмотрел общий многомерный случай.

Заметим, однако, что при выполнении условий теоремы Шильникова возникновение сложной динамики, связанной с существованием счетного множества седловых периодических траекторий, не всегда ведет к возникновению странных аттракторов. Более того, сложная динамика может вообще не проявляться. Так, например, если система задана на некомпактном многообразии, траектории, запущенные в окрестности петли седло-фокуса,

⁴ В случае $\rho < 0$ динамика системы вблизи Γ тривиальна, а при разрушении петли седло-фокуса может родиться только одно (устойчивое) периодическое движение.

⁵ Заметим, что впервые термин «спиральный хаос» был введен в 1976 году О. Е. Ресслером [16]. Автор, по-видимому, не знал о работах Шильникова и называл спиральным хаос, возникающий в сконструированной им модели. В работе [4] было показано, что спиральный хаос, обнаруженный в работе [16], возникает вблизи петли седло-фокуса. После чего этот термин прижился и так стали называть хаос, имеющий «шильниковскую» природу.

могут убегать на бесконечность. Также, такие траектории могут убегать на простые (регулярные) аттракторы, возникновение которых никак не связано с наличием петли. Для того, чтобы из петли седло-фокуса возник странный аттрактор, дополнительно необходимо наличие поглощающей области, внутри которой не должно быть простых (регулярных) аттракторов.

Отсюда можно сделать вывод, что в случае петли седло-фокуса типа $(2, 1)$ странный аттрактор может возникнуть лишь в случае наложения дополнительных условий на поведение второй неустойчивой сепаратрисы. Однако, в системах, обладающих центральной симметрией $(x \rightarrow -x, y \rightarrow -y, z \rightarrow -z)$, возникновение одной петли седло-фокуса автоматически влечет за собой возникновение второй (см. рис. ??б). Отметим, что именно такие системы были исследованы в работах [19], [3], [5]. Далее странные аттракторы, возникающие на основе петли седло-фокуса $(2, 1)$, будем называть спиральными аттракторами.

Что касается петли седло-фокуса типа $(1, 2)$, то в работе [10] было показано, что странные аттракторы здесь могут возникать в однопараметрических семействах без каких-либо дополнительных симметрий. Сценарий возникновения таких аттракторов описан ниже.

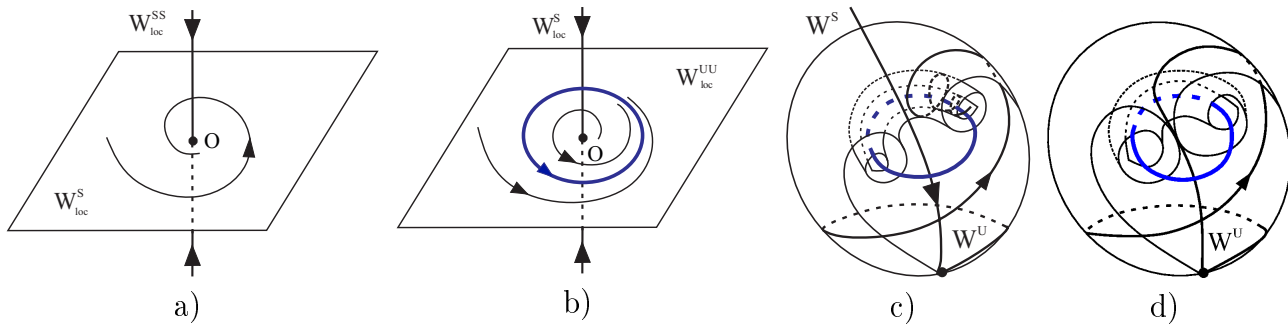
2.1. Сценарий Шильникова

Снова рассмотрим динамическую систему, задаваемую трехмерным потоком. Пусть при $\mu < \mu_1$ система обладает устойчивым состоянием равновесия O (см. рис. 2.2a), при $\mu = \mu_1$ состояние равновесия O претерпевает бифуркацию Андронова-Хопфа, в результате которой из O мягко рождается предельный цикл L , а само состояние равновесия становится седло-фокусом с двумерным неустойчивым многообразием. На рисунке 2.2b схематично изображен фазовый портрет вблизи точки O сразу после бифуркации Андронова-Хопфа ($\mu > \mu_1$). Далее предположим, что при $\mu = \mu_2 > \mu_1$ предельный цикл L претерпевает «дифференцируемую бифуркацию», в результате которой оба мультипликатора цикла L становятся комплексно сопряженными, после чего неустойчивое многообразие состояния равновесия O начинает наматываться на предельный цикл L , образуя «воронку» (см. рис. 2.2c). При дальнейшем увеличении параметра μ до $\mu = \mu_*$ одномерное устойчивое многообразие W^S седло-фокусного состояния равновесия может лечь на двумерное неустойчивое многообразие W^U (см. рис. ??d), в результате чего образуется гомоклиническая петля седло-фокуса (черная линия со стрелкой на рис. 2.2d). Согласно работе [1], если в этот момент седловая величина седло-фокуса отрицательна, то в системе возникает сложная структура (спиральный хаос), которая, однако, из-за наличия устойчивого предельного цикла L не проявляется. Далее, возможны 2 сценария, в результате которых внутри образовавшейся воронки не остается регулярного аттрактора:

- устойчивый цикл L претерпевает каскад бифуркаций удвоения периода;
- устойчивый цикл L претерпевает бифуркацию рождения тора, после чего аттрактором становится устойчивый двумерный тор T^2 , который, затем, разрушается согласно одному из сценариев Афраймовича-Шильникова [20].

В любом из случаев, образовавшийся согласно описанному сценарию аттрактор будем называть аттрактором Шильникова.

Замечание 2. Заметим, что в рамках предложенного сценария, предельный цикл L может начать бифурцировать до того, как образовалась петля седло-фокуса. Например, из этого цикла, в результате последовательности бифуркаций удвоения периода, может родиться аттрактор типа Фейгенбаума, и лишь после этого одна из устойчивых сепаратрис седло-фокуса O ложится на двумерное неустойчивое многообразие W^U , образуя петлю седло-фокуса, в результате чего аттрактор становится шильниковским.



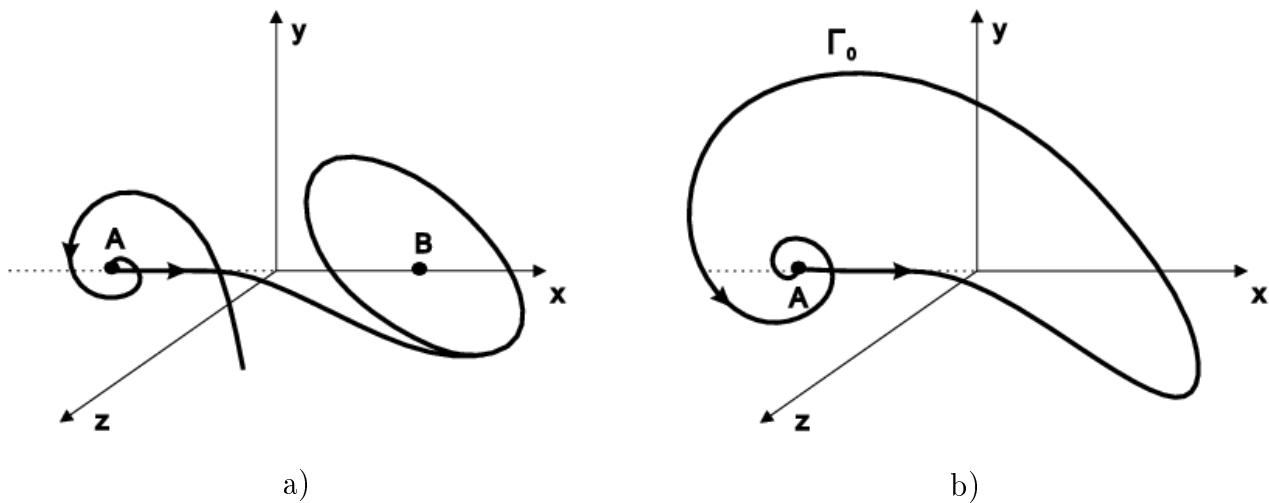
Р и с у н о к 2.2

Сценарий рождения аттрактора Шильникова

3. Аттрактор Шильникова в обобщенной модели Лотки-Вольтерры.

Рассмотрим обобщенную модель Лотки-Вольтерры вида⁶:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(\alpha_{11}(1-x) + \alpha_{12}(1-y) + \alpha_{13}(1-z)) \\ \dot{y} = y(\alpha_{21}(1-x) + \alpha_{22}(1-y) + \alpha_{23}(1-z)) \\ \dot{z} = z(\alpha_{31}(1-x) + \alpha_{32}(1-y) + \alpha_{33}(1-z)) \end{cases} \quad (3.3)$$



Р и с у н о к 3.1

Сценарий возникновения гомоклинической петли к седло-фокусному состоянию равновесия, описанный в работе [2]

В работе [2] предполагалось, что возникновение спирального хаоса в системе (3.3) происходит следующим образом. Пусть A – состояние равновесия типа седло-фокус (2,1), а B – устойчивое состояние равновесия (с координатами $(1, 1, 1)$). Предполагается, что

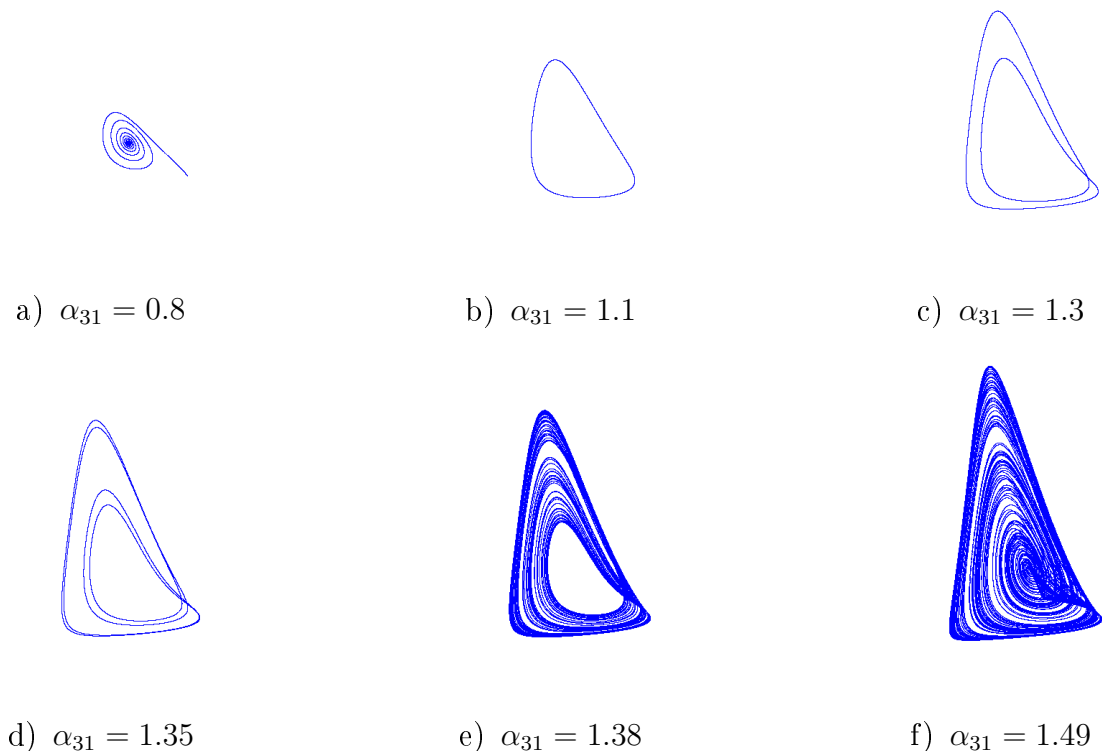
⁶ Эта система может быть получена из системы (1.2) заменой координат, в результате которой состояние равновесия, не лежащее в инвариантных плоскостях $x = 0$, $y = 0$ и $z = 0$, переходит в точку $(1, 1, 1)$, а также переобозначения переменных.

при изменении параметра состояние равновесия B претерпевает бифуркацию Андронова-Хопфа, в результате которой рождается устойчивый предельный цикл, а одна из неустойчивых сепаратрис седло-фокуса A стремится на этот цикл или возникающий из него хаотический аттрактор (см. рис. 3.1a). При дальнейшем изменении параметра предполагается, что размер аттрактора растет быстрее, чем расстояние между состояниями равновесия A и B , и в какой-то момент возникает гомоклиническая траектория к седло-фокусу A (см. рис. 3.1b).

Однако, мы установили, что спиральный хаос возникает здесь не за счет петли седло-фокуса $(2, 1)$, а по сценарию Шильникова на основе седло-фокуса B типа $(1, 2)$. Далее зафиксируем параметры следующим образом:

$$(\alpha_{ij}) = \begin{pmatrix} 0.486 & 0.5 & 0.1 \\ -0.5 & -0.1 & 0.1 \\ \alpha_{31} & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

и проведем однопараметрический анализ, увеличивая параметр α_{31} .



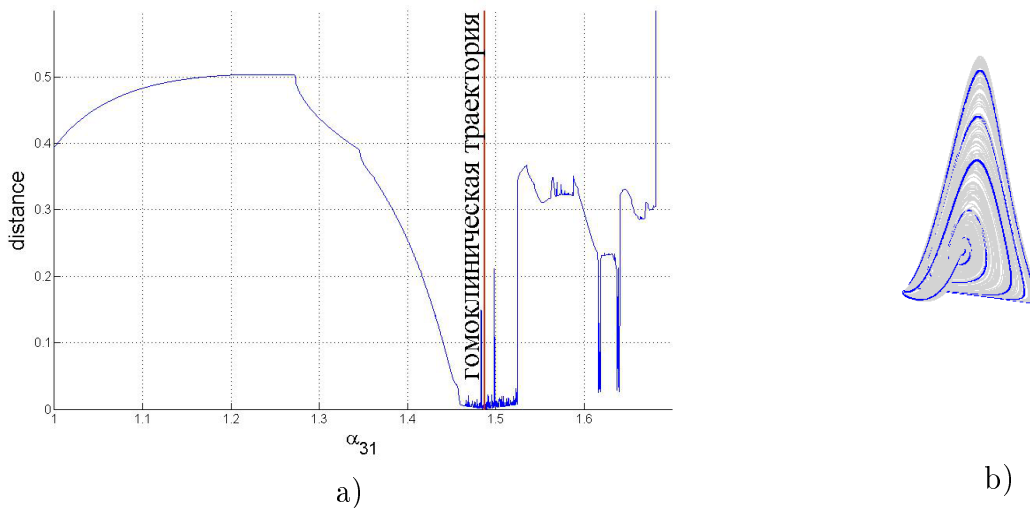
Р и с у н о к 3.2

Эволюция аттракторов в системе (3.3) при изменении параметра α_{31}

При $\alpha_{31} < 0.9343$ аттрактором в системе является устойчивое состояние равновесия B (см. рис. 3.2a). При $\alpha_{31} \approx 0.9343$ B претерпевает бифуркацию Андронова-Хопфа, в результате которой рождается устойчивый предельный цикл, а состояние равновесия становится седло-фокусом типа $(1, 2)$ (см. рис. 3.2b). При $\alpha_{31} \approx 1.1092$ мультипликаторы предельного цикла становятся комплексно-сопряженными, в результате чего двумерное неустойчивое многообразие начинает наматываться на цикл, образуя воронку, а начиная с $\alpha_{31} \approx 1.2719$ предельный цикл претерпевает последовательность бифуркаций удвоения

периода (см. рис. 3.2с и 3.2d после первых двух бифуркаций удвоения периода), в результате чего возникает странный аттрактор типа Фейгенбаума (см. рис. 3.2е). При дальнейшем увеличении параметра α_{31} образуется гомоклиническая траектория к седло-фокусу B , возникает аттрактор Шильникова (см. рис. 3.2f).

Для поиска гомоклинической траектории к седло-фокусу, удобно предварительно проанализировать график зависимости расстояния от точек на аттракторе до седло-фокусного состояния равновесия. Заметим, что траектории на аттракторе Фейгенбаума (см. рис. 3.2е) не посещают достаточно большую окрестность седло-фокуса B . Однако, при дальнейшем увеличении параметра α_{31} размер этой окрестности уменьшается, а при возникновении гомоклинической траектории расстояние от точек аттрактора до седло-фокусной точки стремится к нулю с ростом времени счета (см. рис. 3.3а). На рисунке 3.3b изображена гомоклиническая траектория к седло-фокусу B , построенная при $\alpha_{31} \approx 1.4874$, отвечающем минимуму на графике 3.3а. Заметим, что в момент возникновения гомоклинической траектории седловая величина седло-фокуса B является отрицательной, а значит, применима теорема Шильникова.



Р и с у н о к 3.3

- (а) Зависимость расстояния от аттрактора до седло-фокуса B при изменении параметра α_{31}
 (б) Гомоклиническая траектория к седло-фокусу B типа (1,2)

4. Аттрактор Шильникова в модели Розенцвейга-Макартура.

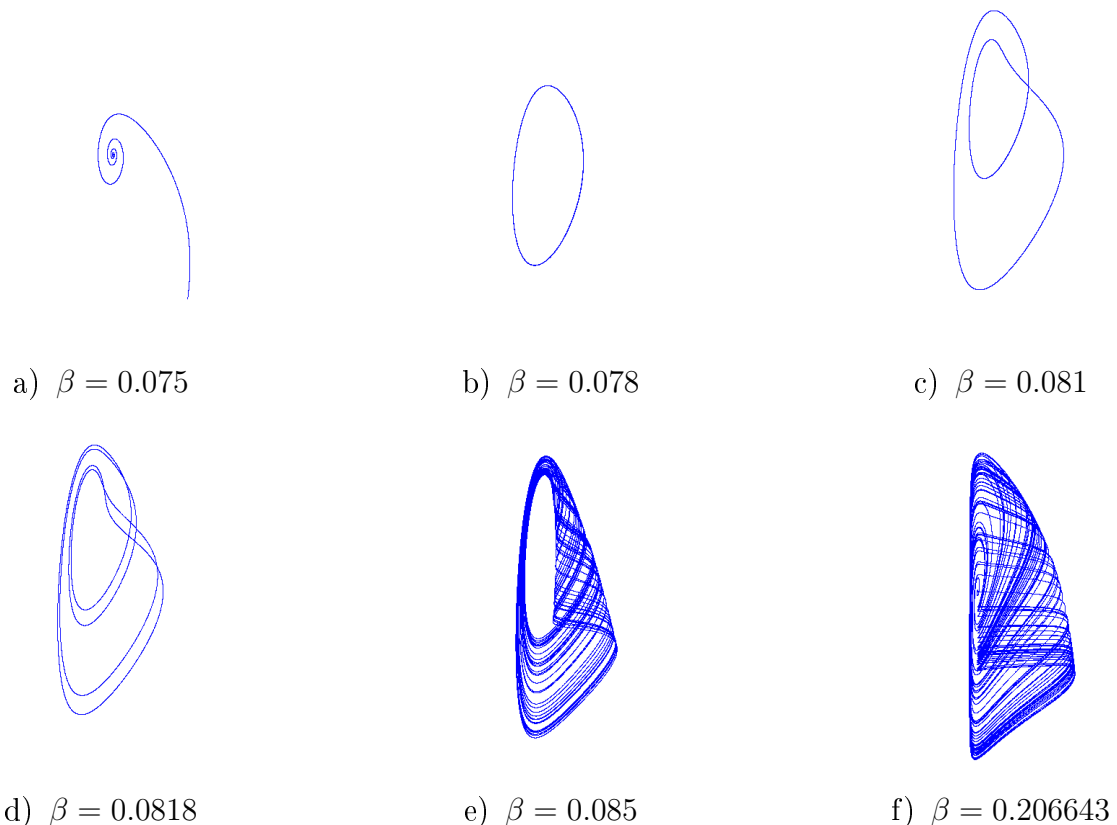
В заключение рассмотрим модель Розенцвейга-Макартура, исследованную в работе [15] и описывающую взаимодействие трех популяций: жертв, хищников и хищников, зараженных паразитами:

$$\begin{cases} \dot{U} = U(1 - U) - \frac{\alpha U(V + bW)}{1 + b_1 U} \\ \dot{V} = \frac{mUV}{1 + b_1 U} - \frac{\beta VW}{1 + b_2 V} - d_1 V \\ \dot{W} = \frac{nbUW}{1 + b_1 U} + \frac{\beta VW}{1 + b_2 V} - d_2 W \end{cases} \quad (4.5)$$

Подробно с выводом модели и ее анализом можно ознакомиться в работе [15]. Здесь мы проведем однопараметрический численный анализ системы (4.5), варьируя параметр β , зафиксировав остальные параметры следующим образом:

$$\alpha = 5, b = 0.001, b_1 = 3.09077, m = 5, n = 0.05, b_2 = 2, d_1 = 0.4, d_2 = 0.01.$$

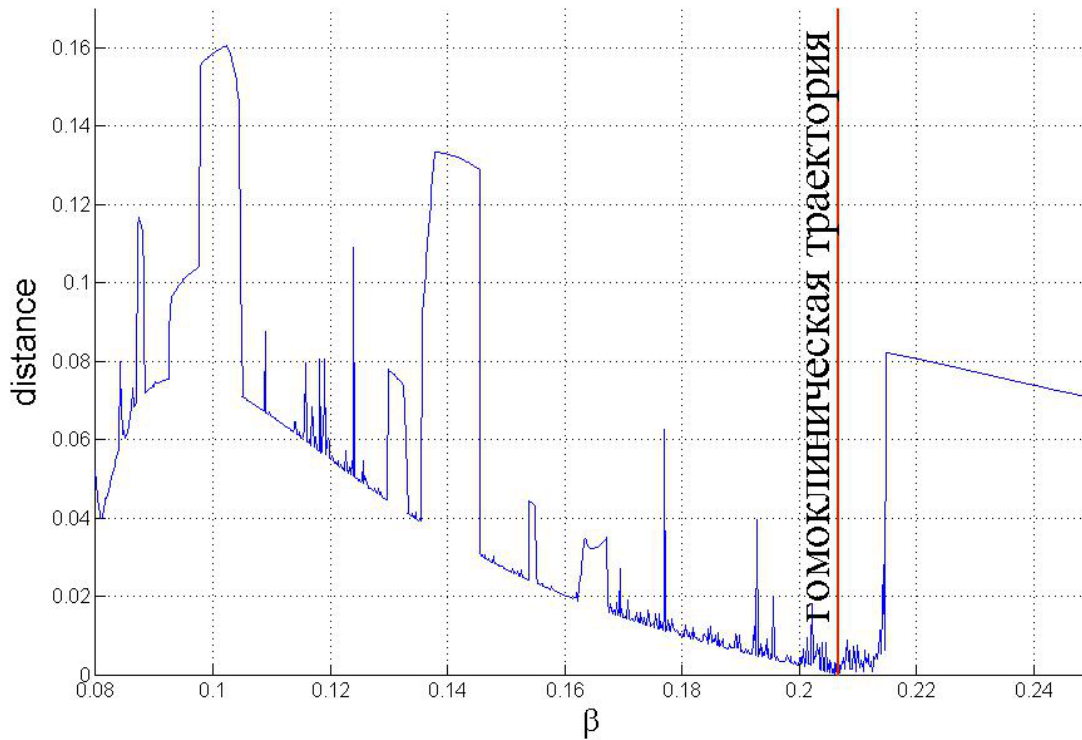
При $0.0615 \approx \beta_1 < \beta < \beta_2 \approx 0.0771$ аттрактором в системе является устойчивое состояние равновесия (см. рис. 4.1a). При $\beta \approx 0.0771$ это состояние равновесия претерпевает бифуркацию Андронова-Хопфа, в результате которой рождается устойчивый предельный цикл, а само состояние равновесия становится седло-фокусом (1,2) (см. рис. 4.1b). При $\beta \approx 0.0785$ мультипликаторы предельного цикла становятся комплексно-сопряженными, в результате чего двумерное неустойчивое многообразие седло-фокуса, наматываясь на цикл, образует воронку. Начиная с $\beta \approx 0.0801$ цикл претерпевает каскад бифуркаций удвоения (см. рис. 4.1c и 4.1d), в результате чего возникает странный аттрактор типа Фейгенбаума (см. рис. 4.1e). При дальнейшем увеличении параметра β образуется гомоклиническая траектория к седло-фокусу (1,2), возникает аттрактор Шильникова (см. рис. 4.1f).



Р и с у н о к 4.1

Эволюция аттракторов в системе (4.5) при изменении параметра β

На рисунке 4.2 изображен график зависимости расстояния от аттрактора до седло-фокуса. При $\beta \approx 0.2067$ минимум на графике практически достигает нуля, возникает гомоклиническая траектория. При этом седловая величина седло-фокуса отрицательная.



Р и с у н о к 4.1

Зависимость расстояния от аттрактора до седло-фокуса типа (1,2) при изменении параметра β

Благодарности. Авторы благодарят С.В. Гонченко, Г.В. Осипова, Е.А. Гринеса за ценные замечания. Работа над разделом 2 выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-11-01041. Работа над разделом 3 выполнена при поддержке гранта РФФИ 14-12-00811. Работа над разделом 4 выполнена при поддержке ЦФИ НИУ ВШЭ (проект 90 в 2017 году). Также А.О. Казаков частично поддержан фондом Династия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. П. Шильников, “Об одном случае существования счетного множества периодических движений”, *ДАН СССР*, **160(3)** (1965), 558-561.
2. A. Arneodo, P. Coulet, C. Tresser, “Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations”, *Physics Letters A.*, **79(4)** (1980), 259-263.
3. A. Arneodo, P. Coulet, C. Tresser, “Possible new strange attractors with spiral structure”, *Commun. Math. Phys.*, **79** (1981), 573-579.
4. A. Arneodo, P. Coulet, C. Tresser, “Oscillators with chaotic behavior: an illustration of a theorem by Shil’nikov”, *Journal of Statistical Physics*, **27(1)** (1982), 171-182.
5. L. O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, “The double scroll family”, *Circuits and Systems, IEEE Transactions on.*, **33(11)** (1986), 1072-1118.

6. В. С. Анищенко, “Сложные колебания в простых системах.”, *Circuits and Systems, IEEE Transactions on.*, 1990.
7. М. Т. М. Koper, P. Gaspard, J. H. Sluyters, “Mixed-mode oscillations and incomplete homoclinic scenarios to a saddle focus in the indium / thiocyanate electrochemical oscillator”, *The Journal of chemical physics*, **97(11)** (1992), 8250-8260.
8. R. M. May, W. J. Leonard, “Nonlinear aspects of competition between three species”, *SIAM journal on applied mathematics*, **29 (2)** (1975), 243–253.
9. J. A. Vano, J. C. Wildenberg, M. B. Anderson, J. K. Noel, J. C. Sprott, “Chaos in low-dimensional Lotka-Volterra models of competition”, *Nonlinearity*, **19** (2006), 2391–2404.
10. Л. П. Шильников, “Теория бифуркаций и турбулентность”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб./Е. А. Леонтович (отв. ред.) и др. Горький: ГГУ.*, 1986, 150-163.
11. M. L. Rosenzweig, R. H. Macarthur, “Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions”, *American Naturalist*, **97(895)** (1963), 209-223.
12. B. Deng, “Food chain chaos due to junction-fold point”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **11(3)** (2001), 514-525.
13. B. Deng, G. Hines, “Food chain chaos due to Shilnikov’s orbit”, *Chaos*, **12(3)** (2002), 533-538.
14. B. Deng, “Food chain chaos with canard explosion”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **14(4)** (2004), 1083-1092.
15. Krishna pada Das, “A study of chaotic dynamics and its possible control in a predator-prey model with disease in the predator”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **21(4)** (2002), 605-624.
16. O. E. Rössler, “An equation for continuous chaos”, *Physics Letters A.*, **57(5)** (1976), 397-398.
17. Л. П. Шильников, “О существовании счетного множества периодических движений в четырехмерном пространстве в расширенной окрестности седло-фокуса”, *ДАН СССР*, **172(2)** (1967), 298-301.
18. Л. П. Шильников, “К вопросу о структуре расширенной окрестности грубого состояния равновесия типа седло-фокус”, *Математический сборник*, **81(1)** (1970), 92-103.
19. P. Couillet, C. Tresser, A. Arneodo, “Transition to stochasticity for a class of forced oscillators”, *Physics letters A.*, **72(4-5)** (1979), 268-270.
20. В. С. Афраимович, Л. П. Шильников, “Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений. Горький.*, 1983, 3-26.

Поступила 17.03.2017

MSC2010 34C23, 34D45, 65P20

Spiral chaos in Lotka-Volterra like models

© Yu. V. Bakhanova⁷ A. O. Kazakov⁸ A. G. Korotkov⁹

Abstract. In this work investigations are made of spiral chaos in generalized Lotka-Volterra systems and Rosenzweig-MacArthur systems that describe the interaction of three species. It is shown that in systems under study the spiral chaos appears in agreement with Shilnikov's scenario. When changing a parameter in the system a stable limiting cycle and a saddle-focus equilibrium are born from stable equilibrium. Then the unstable invariant manifold of saddle-focus winds on the stable limit cycle and forms a whirlpool. For some parameter's value the unstable invariant manifold touches one-dimensional stable invariant manifold and forms homoclinic trajectory to saddle-focus. If in this case the limiting cycle loses stability (for example, as result of sequence of period-doubling bifurcations) and saddle value of the saddle-focus is negative then strange attractor appears on base of homoclinic trajectory.

Key Words: spiral chaos, Lotka-Volterra-like systems, strange attractor.

REFERENCES

1. L. P. Shilnikov, "A case of the existence of a countable number of periodic motions(Point mapping proof of existence theorem showing neighborhood of trajectory which departs from and returns to saddle-point focus contains denumerable set of periodic motions)", *Soviet Mathematics.*, **6** (1965), 163-166.
2. A. Arneodo, P. Coulet, C. Tresser, "Occurrence of strange attractors in three-dimensional Volterra equations", *Physics Letters A.*, **79(4)** (1980), 259-263.
3. A. Arneodo, P. Coulet, C. Tresser, "Possible new strange attractors with spiral structure", *Commun. Math. Phys.*, **79** (1981), 573-579.
4. A. Arneodo, P. Coulet, C. Tresser, "Oscillators with chaotic behavior: an illustration of a theorem by Shilnikov", *Journal of Statistical Physics*, **27(1)** (1982), 171-182.
5. L. O. Chua, M. Komuro, T. Matsumoto, "The double scroll family", *Circuits and Systems, IEEE Transactions on.*, **33(11)** (1986), 1072-1118.
6. V. S. Anishchenko, "Complex oscillations in simple systems.", 1990.
7. M. T. M. Koper, P. Gaspard, J. H. Sluyters, "Mixed-mode oscillations and incomplete homoclinic scenarios to a saddle focus in the indium / thiocyanate electrochemical oscillator", *The Journal of chemical physics*, **97(11)** (1992), 8250-8260.
8. R. M. May, W. J. Leonard., "Nonlinear aspects of competition between three species", *SIAM journal on applied mathematics*, **29(2)** (1975), 243-253.

⁷ **Yulia V. Bakhanova**, student, IITMM, UNN (23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue) BLDG 2, 2nd floor, 603950 Nizhni Novgorod, Russia); ORCID: 0000-0002-4067-1226, jul95-8@mail.ru

⁸ **Alexey O. Kazakov**, senior researcher, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhni Novgorod 603155, Russia); Lecturer, IITMM, UNN (23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue) BLDG 2, 2nd floor, 603950 Nizhni Novgorod, Russia); PhD, ORCID: 0000-0003-0002-6553, kazakovdz@yandex.ru

⁹ **Alexander G. Korotkov**, postgraduate, IITMM, UNN (23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue) BLDG 2, 2nd floor, 603950 Nizhni Novgorod, Russia); ORCID: 0000-0003-0002-6553, koral81@bk.ru

9. J. A. Vano, J. C. Wildenberg, M. B. Anderson, J. K. Noel, J. C. Sprott, “Chaos in low-dimensional Lotka-Volterra models of competition”, *Nonlinearity*, **19** (2006), 2391–2404.
10. L. P. Shilnikov, “The theory of bifurcations and turbulence”, *Selecta Math. Sovietica*, **10** (1991), 43–53.
11. M. L. Rosenzweig, R. H. Macarthur, “Graphical representation and stability conditions of predator-prey interactions”, *American Naturalist*, **97(895)** (1963), 209–223.
12. B. Deng, “Food chain chaos due to junction-fold point”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **11(3)** (2001), 514–525.
13. B. Deng, G. Hines, “Food chain chaos due to Shilnikov’s orbit”, *Chaos*, **12(3)** (2002), 533–538.
14. B. Deng, “Food chain chaos with canard explosion”, *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*, **14(4)** (2004), 1083–1092.
15. Krishna pada Das, “A study of chaotic dynamics and its possible control in a predator-prey model with disease in the predator”, *Journal of Dynamical and Control Systems*, **21(4)** (2002), 605–624.
16. O. E. Rössler, “An equation for continuous chaos”, *Physics Letters A.*, **57(5)** (1976), 397–398.
17. L. P. Shilnikov, “The existence of a denumerable set of periodic motions in four-dimensional space in an extended neighborhood of a saddle-focus”, *Soviet Math. Dokl.*, **8(1)** (1967), 54–58.
18. L. P. Shilnikov, “A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type”, *Mathematics of the USSR-Sbornik*, **10(1)** (1970), 91.
19. P. Coullet, C. Tresser, A. Arneodo, “Transition to stochasticity for a class of forced oscillators”, *Physics letters A.*, **72(4-5)** (1979), 268–270.
20. V. S. Afraimovich, L. P. Shilnikov, “On invariant two-dimensional tori, their disintegration and stochasticity”, *Methods of the qualitative theory of differential equations, Gos. Univ. Gorkij, Gor’kov.*, 1983.

Submitted 17.03.2017

УДК 517.9

О простейших потоках Морса-Смейла с гетероклиническими пересечениями на сфере S^n

© Е. Я. Гуревич¹, Д. А. Павлова²

Аннотация. В работе делается первый шаг в изучении структуры разбиения фазового пространства размерности $n \geq 4$ на траектории потоков Морса-Смейла (структурно-устойчивых потоков, неблуждающее множество которых состоит из конечного числа состояний равновесия и замкнутых траекторий), допускающих гетероклинические пересечения. Более точно, рассмотрен класс потоков Морса-Смейла на сфере S^n , неблуждающее множество которых состоит из двух узловых и двух седловых состояний равновесия. Доказано, что для любого потока из рассматриваемого класса пересечение инвариантных многообразий двух различных седловых состояний равновесия непусто и состоит из конечного числа компонент связности. Гетероклинические пересечения являются математической моделью сепараторов магнитного поля, изучение структуры которых, как и вопрос существования, является одной из принципиальных проблем магнитной гидродинамики.

Ключевые слова: потоки Морса-Смейла, гетероклинические пересечения.

1. Введение

Динамические системы, называемые сейчас системами Морса-Смейла, были введены С. Смейлом в 1960 г. в качестве претендента на класс всех структурно устойчивых систем в размерности, большей двух. Условия, выделяющие этот класс, были сформулированы по аналогии с необходимыми и достаточными условиями грубости потоков на плоскости, найденными А. А. Андроновым и Л. С. Понтрягиным в 1937 году. Основным атрибутом систем Морса-Смейла является гиперболичность неблуждающего множества и конечность числа его компонент связности. Вскоре сам С. Смейл понял, что многомерные структурно-устойчивые системы устроены значительно сложнее и могут обладать счетным множеством гиперболических периодических траекторий. Однако, изучение систем Морса-Смейла является актуальной задачей, имеющей как самостоятельный интерес (для описания детерминированных процессов в естествознании), так и с точки зрения теории бифуркаций для понимания переходных процессов.

Гладкий поток $f^t : M^n \rightarrow M^n$, заданный на замкнутом гладком многообразии M^n размерности n , называется *поток Морса-Смейла*, если выполняются следующие условия:

- неблуждающее множество Ω_{f^t} потока f^t состоит из конечного числа состояний равновесия и замкнутых траекторий, все они гиперболические;
- инвариантные многообразия различных седловых состояний равновесия или замкнутых траекторий пересекаются трансверсально.

¹ Гуревич Елена Яковлевна, доцент кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, egurevich@hse.ru

² Павлова Дарья Александровна, студент НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8634-4143>, dapavlova_1@mail.ru

Напомним, что гладкие подмногообразия L, N многообразия M^n пересекаются *транверально*, если либо $L \cap N = \emptyset$, либо в каждой точке пересечения $x \in L \cap N$ касательные пространства к L, N порождают касательное пространство к M^n .

Классическими работами по изучению потоков Морса-Смейла, открывшими эту тематику, стали работы А. А. Андропова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович и А. Г. Майера 1937 - 1955 годов, результатом которых являются необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности потоков на двумерной сфере S^2 с конечным числом особых траекторий (в частности, отсюда следует и классификация грубых потоков на двумерной сфере, см. [1]). Отправной точкой этой работы послужили идеи А. Пуанкаре и И. Бендиксона о возможности выделения особых траекторий, то есть таких траекторий, взаимное расположение которых однозначно задает качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории, а также идея грубости, принадлежащая А. А. Андронову и Л. С. Понтрягину.

Топологическая классификация потоков Морса-Смейла на поверхностях, отличных от двумерной сферы, получена в работах М. Пейкшото, а так же А. А. Ошемкова и В. В. Шарко. Несмотря на внешнюю схожесть двумерных потоков Морса-Смейла и потоков Морса-Смейла, заданных на многообразиях размерности большей двух, топологическая классификация последних оказалась все же сложнее, чем в двумерном случае, благодаря, в частности, существованию гетероклинических траекторий. В связи с этим, наиболее содержательные результаты были получены пока только для трехмерных потоков в случае конечного множества гетероклинических траекторий в работах Ж. Флейтаса [2] и Я. Л. Уманского [3], а в большей размерности — С. Ю. Пилюгиным [4] для класса потоков, заданных на сфере, и не обладающих замкнутыми и гетероклиническими траекториями.

В настоящей работе делается первый шаг в изучении структуры разбиения фазового пространства на траектории потоков Морса-Смейла, заданных на сфере размерности 4 и выше, и допускающих гетероклинические пересечения. Пусть $G_{i,j}(S^n)$ — класс потоков Морса-Смейла, заданных на сфере S^n , такой, что для любого потока $f^t \in G_{i,j}(S^n)$ его неблуждающее множество Ω_{f^t} состоит в точности из четырех состояний равновесия: источника α , стока ω и двух седел σ_i, σ_j , имеющих неустойчивые многообразия размерности i, j соответственно, $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$. Из формулы Лефшеца следует, что разность $j - i$ является нечетным числом. Для состояния равновесия $p \in \Omega_{f^t}$ обозначим через W_p^s, W_p^u его устойчивое и неустойчивое многообразие соответственно. Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.1. Пусть $f^t \in G_{i,j}(S^n)$, $j > i$. Тогда:

1. $W_{\sigma_i}^u \cap W_{\sigma_j}^s = \emptyset$.
2. $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$ непусто и состоит из конечного числа компонент связности.

Аналогичный результат для диффеоморфизмов Морса-Смейла на замкнутых трехмерных многообразиях получен в работе [5]. Вопрос существования гетероклинических кривых у систем Морса-Смейла на трехмерных многообразиях в предположениях различной общности решался также в работах [6, 7, 8], а для диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности $n > 3$, таких, что множество седловых точек состоит из точек индекса 1 и $(n-1)$ — в работе [9].

2. Гетероклинические пересечения потоков из класса $G_{i,j}(S^n)$

Следующее предложение является непосредственным следствием теоремы 2.3 работы [10].

Предложение 2.1. Пусть $f^t : M^n \rightarrow M^n$ — поток Морса-Смейла. Тогда:

- 1) $M^n = \bigcup_{p \in \Omega_{ft}} W_p^u$;
- 2) для любой точки $p \in \Omega_{ft}$ многообразие W_p^u является гладким подмногообразием многообразия M^n ;
- 3) для любой точки $p \in \Omega_{ft}$, и компоненты связности l_p^u множества $W_p^u \setminus p$ верно равенство $cl\, l_p^u \setminus (l_p^u \cup p) = \bigcup_{q \in \Omega_{ft} : W_q^s \cap l_p^u \neq \emptyset} W_q^u$ ³.

Замечание 2.1. Утверждения предложения 2.1. остаются справедливыми после формальной замены символов u, s на символы s, u соответственно.

Доказательство теоремы 1.1.

Докажем п.1). Если $W_{\sigma_i}^u \cap W_{\sigma_j}^s \neq \emptyset$, то касательные пространства к $W_{\sigma_i}^u, W_{\sigma_j}^s$ в каждой точке пересечения порождают касательное пространство к S^n , следовательно $\dim W_{\sigma_i}^u + \dim W_{\sigma_j}^s \geq n$. Это невозможно, так как $\dim W_{\sigma_i}^u = i$, а $\dim W_{\sigma_j}^s = n - j$, и $j > i$.

Докажем п. 2). Из п.1 и предложения 2.1. следует, что замыкание $cl\, W_{\sigma_j}^s$ является сферой $S_{\alpha}^{n-j} = \alpha \cup W_{\sigma_j}^s$. Из гиперболичности состояния равновесия σ_j следует, что существует гладко вложенная сфера $S^{j-1} \subset W_{\sigma_j}^u$, ограничивающая шар $B^j \subset W_{\sigma_j}^u$ такой, что $\sigma_j \subset \text{int}\, B^j$, являющаяся глобальной секущей для потока $f^t|_{W_{\sigma_j}^u \setminus \sigma_j}$. Тогда коэффициент зацепления сфер $S_{\alpha}^{n-j}, S^{j-1}$ равен ± 1 .

В силу предложения 2.1. $S^n = \bigcup_{p \in \Omega_{ft}} W_p^s$. Если $W_{\sigma_j}^u \cap W_{\sigma_i}^s = \emptyset$, то $S^{j-1} \subset W_{\omega}^s$. Так как $W_{\omega}^s \cap (W_{\sigma_i}^s \cup \alpha) = \emptyset$, то существует окрестность u_{ω} точки ω в W_{ω}^s такая, что $u_{\omega} \cap S_{\alpha}^{n-j} = \emptyset$. С другой стороны, существует $T > 0$ такое, что $f^t(S^{j-1}) \subset \text{int}\, u_{\omega}$ для всех $t > T$. Так как группа $\pi_{j-1}(\mathbb{R}^n)$ тривиальна, то $f^t(S^{i-2})$ ограничивает шар $D^j \subset u_{\omega}$ (возможно, с самопересечениями). Тогда коэффициент зацепления сфер $f^t(S_{\alpha}^{n-j})$ и $f^t(S^{j-1})$ равен нулю, но тогда и коэффициент зацепления сфер $S_{\alpha}^{n-j}, S^{j-1}$ равен нулю. Полученное противоречие доказывает, что $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u \neq \emptyset$.

Покажем, что пересечение $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$ состоит из конечного числа компонент связности. Положим $\Sigma = W_{\sigma_i}^s \cap S^{j-1}$. Тогда множество $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$ гомеоморфно прямому произведению $\Sigma \times \mathbb{R}$, и достаточно доказать конечность компонент связности множества Σ . Предположим противное. Выберем по одной точке из каждой компоненты связности множества Σ и обозначим полученное множество через X . В силу компактности сферы S^{j-1} существует последовательность $\{x_i\} \subset X$, сходящаяся к некоторой точке $x^* \subset S^{j-1}$. Тогда $x^* \in cl\, W_{\sigma_i}^s$. В силу предложения 2.1. $cl\, W_{\sigma_i}^s = W_{\sigma_i}^s \cup W_{\sigma_j}^s \cup \alpha$, поэтому $x^* \in W_{\sigma_i}^s$ и любая окрестность точки x^* имеет непустое пересечение с бесконечным множеством компонент связности множества $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$.

³ Здесь $cl\, l_p^u$ обозначает замыкание множества l_p^u .

С другой стороны, из определения трансверсального пересечения непосредственно следует, что для точки $x^* \in W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$ существует окрестность $u(x^*) \subset S^n$ и гомеоморфизм $h : u(x^*) \rightarrow \mathbb{R}^n$ такой, что $h(W_{\sigma_j}^u) \subset \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_{j+1} = x_{i+2} = \dots = x_n = 0\}$, $h(W_{\sigma_i}^s) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_2 = \dots = x_i = 0\}$. Таким образом, множество $u(x^*) \cap (W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u)$ связно. Полученное противоречие доказывает конечность числа компонент пересечения $W_{\sigma_i}^s \cap W_{\sigma_j}^u$.

Благодарности. Авторы благодарят В.З. Гринеса за постановку задачи и полезные обсуждения. Исследование выполнено в рамках Программы Фундаментальных исследований в НИУ ВШЭ в 2017 году (проект 90) при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 15-01-03687-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер, *Качественная теория динамических систем второго порядка*, Наука, М., 1966, 568 с.
2. G. Fleitas, "Classification of gradient-like flows in dimension two and three", *Bol. Soc. Mat. Brasil*, **6** (1975), 155 - 183
3. Я. Л. Уманский, "Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса-Смейла с конечным числом особых траекторий", *Мат. сб.*, **181:2** (1990), 212 - 239
4. С.Ю. Пилюгин, "Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса-Смейла без периодических траекторий на сферах", *Дифференциальные уравнения*, **14:2** (1978), 245-254
5. В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, "О диффеоморфизмах Морса-Смейла с четырьмя периодическими точками на замкнутых ориентируемых многообразиях", *Матем. заметки*, **74:3** (2003), 369-386.
6. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev and E. Pecou, "Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves", *Topology and its applications*, **117** (2002), 335-344.
7. V. Grines, E. V. Zhuzhoma, O. Pochinka, T. V. Medvedev, "On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **294** (2015), 1-5.
8. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, "On the number of heteroclinic curves of diffeomorphisms with surface dynamics", *Regular and Chaotic Dynamics*, **22:2** (2017), 122-135.
9. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, "Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection", *Journal of Mathematical Sciences*, **208:1** (2015), 81-91.
10. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73:6** (1967), 747 - 817.

Поступила 21.03.2017

MSC2010 37D15

On the simplest Morse-Smale flows with heteroclinical intersections on the sphere S^n

© E. Gurevich⁴, D. Pavlova⁵

Abstract. This paper is the first step in studying structure of decomposition of phase space with dimension $n \geq 4$ on the trajectories of Morse-Smale flows (structurally stable flows with non-wandering set consisting of finite number of equilibria and closed trajectories) allowing heteroclinic intersections. More precisely, special class of Morse-Smale flows on the sphere S^n is studied. The non-wandering set of the flow of interest consists of two nodal and two saddle equilibrium states. It is proved that for every flow from the class under consideration the intersection of invariant manifolds of two different saddle equilibrium states is nonempty and consists of a finite number of connectivity components. Heteroclinic intersections are mathematical models for magnetic field separators. Study of their structure, as well as the question of their existence, is one of the principal problems of magnetic hydrodynamics.

Key Words: Morse-Smale flows, heteroclinic intersections.

REFERENCES

1. A. Andronov, E. Leontovich, I. Gordon, A. Mayer, *Kachestvennaya teoriya dynamicheskikh sistem vtorogo poriyadka [Qualitative theory of dynamical systems of the second order]*, Nauka, M., 1966 (In Russ.), 568 c.
2. G. Fleitas, “Classification of gradient-like flows in dimension two and three”, *Bol. Soc. Mat. Brasil*, **6** (1975), 155 - 183 (In English)
3. Y. Umanskii, “Neobhodimiye i dostatochniye usloviya topologicheskoi equivalentnosti trekhmernykh dynamicheskikh sistem Morsa-Smeila s konechnym chislom osobyykh trayektorii [Necessary and sufficient conditions of topological equivalence of three-dimensional Morse-Smale dynamical systems with finite number of singular trajectories]”, *Sbornik Mathematics*, **181**:2 (1990), 212 - 239 (In Russ.)
4. S. Pilyugin, “Fazivye diagrammy opredelyayushieu systemy Morsa-Smeila bez periodicheskikh traektorii na sferach [Phase diagrammes defined Morse-Smale dynamical systems without periodical trajectories on spheres]”, *Differencialnye uravneniya*, **14**:2 (1978), 245-254 (In Russ.)
5. V. Grines, E. Zhuzhoma, V. Medvedev, “On Morse–Smale Diffeomorphisms with Four Periodic Points on Closed Orientable Manifolds”, *Mathematical Notes*, **74**:3 (2003), 352–366 (In English).
6. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev and E. Pecou, “Three-manifolds admitting Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and its applications*, **117** (2002), 335-344 (In English).

⁴ **Elena Gurevich**, Associate Professor, Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (25 Bolshaya Pechyorskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1815-3120>, egurevich@hse.ru

⁵ **Daria Pavlova**, student, National Research University Higher School of Economics (25 Bolshaya Pechyorskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8634-4143>, dapavlova_1@mail.ru

7. V. Grines, E. V. Zhuzhoma, O. Pochinka, T. V. Medvedev, “On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **294** (2015), 1-5 (In English).
8. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, “On the number of heteroclinic curves of diffeomorphisms with surface dynamics”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **22**:2 (2017), 122-135 (In English).
9. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection”, *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:1 (2015), 81-91 (In English).
10. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747 - 817 (In English).

Submitted 21.03.2017

УДК 517.929

Признаки устойчивости одного класса автономных дифференциальных “псевдолинейных” уравнений первого порядка с авторегулируемым запаздыванием

© М. Б. Ермолаев¹, П. М. Симонов²

Аннотация. Статья посвящена получению эффективных признаков экспоненциальной устойчивости некоторых классов автономных дифференциальных уравнений первого порядка с авторегулируемым запаздыванием. Дан обзор работ из г. Перми и из г. Иванова по этой теме. Приведен критерий С.А. Гусаренко о непрерывности оператора с авторегулируемым запаздыванием. Приведено условие В.П. Максимова о полной непрерывности оператора с авторегулируемым запаздыванием. Сформулированы достаточные условия существования и продолжимости решений. Сформулированы теоремы об устойчивости по первому приближению. Эти теоремы основаны на теоремах из книги и статей Н.В. Азбелева и П.М. Симонова. Теоремы об устойчивости по первому приближению по внешнему виду хотя и напоминают известные теоремы Ляпунова о первом приближении, однако в действительности существенно отличаются от последних. Теоремы Ляпунова для обыкновенных дифференциальных или функционально-дифференциальных уравнений дают методику исследования устойчивости: с помощью линеаризации нелинейной части уравнения вопрос об устойчивости нелинейного уравнения сводится к вопросу об устойчивости линейного уравнения, для которого уже доказаны эффективные признаки устойчивости. В нашем случае не удастся линеаризовать нелинейные части уравнений, а потому вышеупомянутая методика здесь не применима. В статье, заменяя процесс линеаризации уравнения “псевдолинеаризацией”, а также используя результаты статьи В.В. Малыгиной, мы получили некоторые аналоги теорем о первом приближении для скалярных, автономных уравнений с авторегулируемым запаздыванием. Основные выводы, полученные на основании этой идеи, можно оформить следующей фразой: автономные дифференциальные уравнения с авторегулируемым запаздыванием обладают свойствами устойчивости, подобными свойствам соответствующих им уравнений с сосредоточенным запаздыванием.

Ключевые слова: автономные дифференциальные уравнения с авторегулируемым запаздыванием, устойчивость, нелинейный оператор внутренней суперпозиции, теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению, оператор сжатия, неподвижная точка оператора, допустимость пар пространств.

1. Введение

Моделирование некоторых практических задач приводит к уравнениям с запаздыванием, зависящим явно или неявно от неизвестной функции. В настоящей работе рассматривается один достаточно общий класс таких уравнений — уравнения, содержащие в качестве

¹ **Ермолаев Михаил Борисович**, и.о. заведующего кафедрой экономики и финансов, профессор кафедры экономики и финансов, ФГБОУ ВО “Ивановский государственный химико-технологический университет” (153000, Россия, Ивановская область, г. Иваново, пр. Шереметевский, д. 7.), доктор экономических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-9502-3621>, ermol-mb@mail.ru

² **Симонов Пётр Михайлович**, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, ФГБОУ ВО “Пермский государственный национальный исследовательский университет” (614990, Россия, Пермский край, г. Пермь, ул. Букирева, д. 15.), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6357-662X>, simpm@mail.ru

компоненты выражение $x[h(t, x(t))]$, где $x(t)$ — неизвестная функция. Последнее уравнение, следуя работам [1], [2], в дальнейшем будем называть уравнением с авторегулируемым запаздыванием.

В 1963 году Р. Драйвер опубликовал работу [3], в которой он исследовал вопросы существования и единственности решения уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x[h(t, x(t))]), \quad t \geq a, \\ x(\xi) &= \varphi(\xi), \quad \text{если } \xi < a. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Позднее появились работы, посвященные устойчивости некоторых классов таких уравнений [4], [5], [6], [7], [8], а также работы, уточняющие результаты Р. Драйвера [9], [10]. Однако, общим для всех этих исследований является наличие требования так называемой “непрерывной стыковки”: $x(a) = \varphi(a)$, что существенно сужает практическое применение полученных результатов.

С другой стороны, отказ от этого требования приводит к ряду парадоксальных явлений. В частности, в этом случае отсутствует непрерывная зависимость решений от импульсных воздействий (при сколько угодно малом воздействии картина расположения интегральных кривых может принципиально измениться, вплоть до исчезновения решений (см., например, [11], [12], [13], [14][с. 278]).

Причина таких явлений состоит в том, что оператор $F : C[0, b] \rightarrow L^p[0, b]$, определяемый правой частью уравнения (1.1), вообще говоря, не является непрерывным.

Это обстоятельство затрудняет применение традиционных схем исследования разрешимости уравнения (1.1), использующих классические принципы неподвижной точки.

Преодолению этих трудностей были посвящены работы М.Е. Драхлаина [15], [16]; М.Е. Драхлаина и Т.К. Плышевской [17]; А.И. Булгакова и В.П. Максимова [18]; В.П. Максимова [19], [20]; Е.С. Жуковского [21], [22]; С.А. Гусаренко [23], [24], [25]; С.А. Гусаренко, Е.С. Жуковского и В.П. Максимова [26].

Были получены достаточные условия [15], [19], а, позднее и критерий [26] непрерывности оператора $H_\varphi : C[0, b] \rightarrow L^p[0, b]$, $1 \leq p < \infty$:

$$(H_\varphi x)(t) = \begin{cases} x[h(t, x(t))], & \text{при } h(t, x(t)) \geq 0, \\ \varphi[h(t, x(t))], & \text{при } h(t, x(t)) < 0, \end{cases}$$

а также эффективные признаки разрешимости задач Коши и некоторых краевых задач для уравнений с авторегулируемым запаздыванием. Вопросы устойчивости в этих работах не рассматривались. Первые исследования были в работах [11], [12], [27], [28]. Посвященные этому обзоры имеются в статьях [29], [30], [31], [32], [33]. Заметим, что наше исследование отличается своим подходом от статей зарубежных авторов, см., например, [34], [35], [36].

В предлагаемой работе рассматривается общий случай уравнений с авторегулируемым запаздыванием, а именно, уравнения вида:

$$\mathcal{L}x = \Phi\{x, H_\varphi x\}, \quad (1.2)$$

где $\mathcal{L} : D_{loc} \rightarrow L_{loc}$ — линейный вольтерров оператор, $\Phi : C_{loc} \times L_{loc}^m \rightarrow L_{loc}$ — непрерывный вольтерров оператор, а H_φ — операторы, определяющие специфику исследуемых классов функционально-дифференциальных уравнений.

Хотя основное внимание в работе уделяется исследованию устойчивости уравнений (1.2), мы не могли не затронуть проблемы разрешимости этих уравнений, согласно требованиям прикладных задач. Актуальность этой проблемы не столь ярко выражена в случае уравнений $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$, в которых оператор $\mathcal{F} : D^r[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$ вполне непрерывен для

любого $b > a$ и для некоторых $1 < r \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$. Априорная оценка, следующая из устойчивости заданного решения, влечет существование решения на всей полуоси в силу теоремы о локальной разрешимости и продолжимости решения. Однако, как сказано выше, уравнения с авторегулируемым запаздыванием представляют собой особый класс и для них вопросы устойчивости и разрешимости нужно тесно увязывать друг с другом.

При исследовании устойчивости уравнений (1.2) мы использовали два подхода — классический, при котором устойчивость понимается как непрерывная зависимость решения задачи Коши от начального значения α и начальной функции φ [37], [38], и более специфичный подход, при котором устойчивость — это корректная разрешимость задачи Коши в некотором пространстве \mathbb{V} относительно α и аддитивного возмущения ψ правой части уравнения.

Изучению устойчивости и разрешимости уравнения (1.2) предшествует исследование оператора H_φ . Эти свойства, а также общие теоремы об устойчивости и разрешимости нелинейных уравнений $\mathcal{L}x = \mathcal{F}x$, позволили нам получить ряд утверждений о существовании и устойчивости решений уравнений (1.2).

Пункты 4 и 5 статьи посвящены получению эффективных признаков некоторых классов автономных уравнений с авторегулируемым запаздыванием. При этом используется идея сведения вопроса устойчивости исследуемых нелинейных уравнений к вопросу устойчивости класса линейных уравнений, который был подробно изучен в работах [39], [40], [41], [42]. Результаты, полученные на основании этой идеи, вольно трактуя, можно оформить следующей фразой: автономные уравнения с авторегулируемыми запаздываниями, вообще говоря, обладают подобными свойствами устойчивости, чем соответствующие им уравнения с сосредоточенным запаздыванием.

Будем пользоваться следующими обозначениями: \mathbb{R}^n — пространство вещественных вектор-столбцов $\alpha = \text{col} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \}$ с некоторой нормой $|\cdot|$; $S[a, b]$, — пространство функций $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ измеримых по Лебегу $-\infty < a < b \leq \infty$; $L^p[a, b]$, — пространство Лебега, $1 \leq p < \infty$, $-\infty < a < b \leq \infty$: банахово пространство (классов эквивалентности) суммируемых с p -ой степенью (интегрируемых по Лебегу с p -ой степенью) функций $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|z\|_{L^p[a, b]} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_a^b |z(t)|^p dt \right)^{1/p}$; L_{loc} — линейное пространство (классов эквивалентности) локально суммируемых функций $z : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$; L^p — пространство Лебега, $1 \leq p < \infty$: банахово пространство (классов эквивалентности) функций $z : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, суммируемых в степени p и с нормой $\|z\|_{L^p} \stackrel{\text{def}}{=} \left(\int_a^\infty |z(t)|^p dt \right)^{1/p}$; $L^\infty[a, b]$, — пространство Лебега, $-\infty < a < b \leq \infty$: банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|z\|_{L^\infty[a, b]} \stackrel{\text{def}}{=} \text{vraisup}_{t \in [a, b]} |z(t)|$; L^∞ — пространство Лебега: банахово пространство (классов эквивалентности) измеримых и ограниченных в существенном функций $z : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|z\|_{L^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \text{vraisup}_{t \geq a} |z(t)|$; L_0^∞ — подпространство всех таких функций $z \in L^\infty$, для каждой из которых существует $\text{vrai} \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$, с нормой $\|z\|_{L_0^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \|z\|_{L^\infty}$; L_γ^∞ — банахово пространство всех таких функций $z : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\gamma \in \mathbb{R}$, для каждой из которых справедливо представление $z = y_\gamma$, где $y_\gamma(t) \stackrel{\text{def}}{=} y(t) \exp(-\gamma t)$ и $y \in L^\infty$, с нормой $\|z\|_{L_\gamma^\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \|y\|_{L^\infty}$; $C[a, b]$ — банахово пространство непрерывных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ с нормой $\|x\|_{C[a, b]} \stackrel{\text{def}}{=} \max_{t \in [a, b]} |x(t)|$, $-\infty < a < b < \infty$; C_{loc} — линейное пространство непрерывных функций $x : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$; \mathbb{C} — банахово пространство ограниченных функций

$x \in C_{loc}$ с нормой $\|x\|_C \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{t \geq a} |x(t)|$; \mathbb{C}_0 — подпространство всех таких функций $x \in \mathbb{C}$, для каждой из которых $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$, с нормой $\|x\|_{\mathbb{C}_0} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_C$; \mathbb{C}_γ , $\gamma \in \mathbb{R}$, — банахово пространство всех таких функций $x \in C_{loc}$, для каждой из которых справедливо представление $x = y_\gamma$, где $y \in \mathbb{C}$, с нормой $\|x\|_{\mathbb{C}_\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \|y\|_C$; $D^p[a, b]$, — банахово пространство таких абсолютно непрерывных функций $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$, $-\infty < a < b < \infty$, для которых конечна норма $\|x\|_{D[a, b]} \stackrel{\text{def}}{=} \|\dot{x}\|_{L^p[a, b]} + |x(a)|$; D_{loc} — линейное пространство всех абсолютно непрерывных на каждом конечном отрезке функций $x : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$; \mathbb{D} — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что $x \in \mathbb{C}$, $\dot{x} \in L^\infty$, с нормой $\|x\|_{\mathbb{D}} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_C + \|\dot{x}\|_{L^\infty}$; \mathbb{D}_0 — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что $x \in \mathbb{C}_0$, $\dot{x} \in L_0^\infty$, с нормой $\|x\|_{\mathbb{D}_0} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_{\mathbb{C}_0} + \|\dot{x}\|_{L_0^\infty}$; \mathbb{D}_γ — банахово пространство абсолютно непрерывных функций $x : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ таких, что $x \in \mathbb{C}_\gamma$, $\dot{x} \in L_\gamma^\infty$, с нормой $\|x\|_{\mathbb{D}_\gamma} \stackrel{\text{def}}{=} \|x\|_{\mathbb{C}_\gamma} + \|\dot{x}\|_{L_\gamma^\infty}$; $\text{Lip}(q, [a, b])$ — множество функций $y : [c, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c \leq a$, удовлетворяющих на $[a, b]$ условию Липшица с константой $q > 0$.

2. Дифференциальные уравнения с авторегулируемым запаздыванием. Вопросы существования решений

Некоторые модели инфекционных заболеваний [43], [6], задача взаимодействия двух тел в электродинамике [3], [44], [45], [46], а также другие задачи [47], [4], [48] приводят к задачам Коши вида:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x(t), x[h(t, x(t))]), \quad t \geq 0, \\ x(\xi) &= \varphi(\xi), \quad \text{если } \xi < 0, \quad x(0) = \alpha. \end{aligned} \quad (2.1)$$

Как показывают примеры, подобные уравнения обладают рядом необычных свойств. В частности, никакая степень гладкости функций f , h , φ не обеспечивает единственности и даже существования локального решения задачи Коши для этого уравнения [11], [12], [13], [14][с. 278], [58][р. 230].

Для подробного изучения задачи Коши (2.1) и ему подобных уравнений введем в рассмотрение оператор \mathcal{H}_φ , определяемый равенством:

$$(\mathcal{H}_\varphi x)(t) = \begin{cases} x[(\Theta x)(t)], & \text{при } (\Theta x)(t) \geq a, \\ \varphi[(\Theta x)(t)], & \text{при } (\Theta x)(t) < a. \end{cases} \quad (2.2)$$

Здесь при всех $b > a$ оператор $\Theta : C[a, b] \rightarrow S[a, b]$ непрерывен по мере и $(\Theta x)(t) \leq t$ при почти всех $t \geq a$, и всех $x \in C[a, b]$; функция $\varphi = \text{col}\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\} : (\nu, a] \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна, $\nu = \min_{1 \leq i \leq n} \text{vrai inf}_{t \geq a} (\Theta x)_i(t)$; записи $x[\Theta x]$ и $\varphi[\Theta x]$ означают, соответственно, $\text{col}\{x_i[(\Theta x)_i(t)]\}$, $i = 1, \dots, n$, и $\text{col}\{\varphi_i[(\Theta x)_i(t)]\}$, $i = 1, \dots, n$. Тогда уравнение (1.1) можно записать в виде:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), (\mathcal{H}_\varphi x)(t)),$$

где оператор \mathcal{H}_φ определяется равенством (2.2) при $(\Theta x)(t) = h(t, x(t))$.

Очевидно, что если выполняется условие:

$$\int_\nu^a |\varphi(s)|^p ds < \infty \quad \text{при } 1 \leq p < \infty, \quad \text{vraisup}_{s \in (\nu, a)} |\varphi(s)| < \infty \quad \text{при } p = \infty,$$

то оператор \mathcal{H}_φ действует из пространства $C[a, b]$ в пространство $L^p[a, b]$. Однако, вообще говоря, оператор $\mathcal{H}_\varphi : C[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$ не является непрерывным. Этим и объясняются те необычные свойства уравнения (1.1), о которых говорилось выше. Исследуем условия непрерывности оператора $\mathcal{H}_\varphi : C[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$.

Л е м м а 2.1. ([25]) Оператор $\mathcal{H}_\varphi : C[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, непрерывен в точке $x \in C[a, b]$ тогда, когда для любой последовательности $\{x^{(k)}\} \subset C[a, b]$ такой, что $\lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} = x$ выполняются неравенства:

$$\begin{aligned} (x_i(a) - \varphi_i(a)) \lim_{k \rightarrow \infty} \text{mes}\{t \in [a, b] : (\Theta x)_i(t) = a\} \cup \\ \cup \{t \in [a, b] : (\Theta x^{(k)})_i(t) < a\} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.3)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Подчеркнем, что условие (2.3) непрерывности оператора $\mathcal{H}_\varphi : C[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$ необходимо и достаточно лишь в случае $1 \leq p < \infty$. Если же $p = \infty$, то условия непрерывности оператора \mathcal{H}_φ существенно хуже. Следующий ниже простой пример иллюстрирует ситуацию, когда последовательность элементов, сходящихся в $C[a, b]$, отображается оператором \mathcal{H}_φ в последовательность, которая сходится в $L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, но уже не сходится в $L^\infty[a, b]$. Пусть $(\Theta x)(t) = t - |x(t)|$, $t \in [0, 2]$; $\varphi(\xi) \equiv 0$ при $\xi < 0$; $x^{(k)}(t) \equiv 1 - 1/k$, $k = 1, 2, \dots$, $x^{(0)}(t) \equiv 1$. Тогда согласно (2.2) имеем:

$$(\mathcal{H}_\varphi x^{(k)})(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1 - 1/k], \\ 1 - 1/k, & t \in [1 - 1/k, 2]; \end{cases} \quad (\mathcal{H}_\varphi x^{(0)})(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, 1), \\ 1, & t \in [1, 2]; \end{cases}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{H}_\varphi x^{(k)} - \mathcal{H}_\varphi x^{(0)}\|_{L^p[0, 2]} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + 1/k)(1/(k^p)) = 0;$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathcal{H}_\varphi x^{(k)} - \mathcal{H}_\varphi x^{(0)}\|_{L^\infty[0, 2]} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 - 1/k) = 1.$$

Ранее оператор \mathcal{H}_φ исследовался в случае, когда $\Theta : C[a, b] \rightarrow S[a, b]$ является оператором Немыцкого, порожденным функцией $h(t, x)$, удовлетворяющей условиям Каратеодори, то есть $h(\cdot, x)$ измерима при всех $x \in \mathbb{R}^n$ и $h(t, \cdot)$ непрерывна при почти всех $t \geq a$.

Достаточные условия, существенно близкие к условиям (2.3) непрерывности такого оператора впервые получил М.Е. Драшлин [15]. Критерий непрерывности оператора $\mathcal{H}_\varphi : C[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$ в скалярном случае доказал С.А. Гусаренко [49]. В работе С.А. Гусаренко [25] рассмотрен общий случай оператора Θ .

В дальнейшем будем считать, что $(\Theta x)(t) = h(t, x(t))$, где функция $h(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

При исследовании уравнений с авторегулируемым запаздыванием, не удовлетворяющих условию непрерывной стыковки: $x(a) = \varphi(a)$, мы будем использовать следующее утверждение сформулированное без доказательства в работе [19].

Л е м м а 2.2. ([19]) Пусть $\Omega_b \subset D^r[a, b]$, $1 < r \leq \infty$, такое открытое множество, что для всех $x \in \Omega_b$ выполнено условие:

$$\text{mes}\{t \in [a, b] : h_i(t, x(t)) = a\} = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Тогда сужение оператора $\mathcal{H}_\varphi : D^r[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, определенного равенством (2.2), на множество Ω_b непрерывно в каждой точке $x \in \Omega_b$, и образ всякого ограниченного (в метрике $D^r[a, b]$) множества из Ω_b относительно компактен в $L^p[a, b]$.

Это утверждение следует из леммы 2.1, а также из известного факта полной непрерывности оператора вложения пространства $D^r[a, b]$ в пространство $C[a, b]$ при $1 \leq r \leq \infty$.

Перейдем к рассмотрению уравнения

$$\mathcal{L}x = \Phi\{x, \mathcal{H}_\varphi x\} \quad (2.4)$$

в следующих предположениях: линейная задача Коши $\mathcal{L}x = f$, $x(a) = \alpha$ однозначно разрешима при любых $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $f \in L_{loc}$, и ее решение представимо в виде формулы Коши:

$$x(t) = \int_a^t C(t, s)f(s)ds + X(t)\alpha;$$

оператор $\Phi : C_{loc} \times L_{loc} \rightarrow L_{loc}$ вольтерров, причем при всех $b > a$ соответствующий ему оператор $\Phi_b : C[a, b] \times L^p[a, b] \rightarrow L^r[a, b]$, $1 \leq p < \infty$, $1 < r \leq \infty$, непрерывен; оператор $\mathcal{H}_\varphi : C_{loc} \rightarrow L_{loc}$ определяется равенством (2.2) при $(\Theta x)(t) = h(t, x(t))$.

При изучении уравнения (2.4) можно руководствоваться своеобразным “геометрическим” принципом, подсказанным леммой 2.2, а именно:

Пусть функции $h_i(t, x)$ непрерывны, и пусть выбрано открытое множество Ω таких функций x , для которых выполнено одно из условий: 1) графики функций x не имеют общих точек с гиперповерхностями, определяемыми равенствами $h_i(t, x) = a$, $i = 1, \dots, n$; 2) графики функций x пересекают эти гиперповерхности под ненулевым углом. Тогда оператор $\mathcal{F}_b : D^r[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$, определяемый равенством $\mathcal{F}_b x = \Phi_b\{x, \mathcal{H}_\varphi x\}$ является вполне непрерывным на множестве:

$$\Omega_b = \{x_b \in D^r[a, b] : x_b(t) = x(t), t \in [a, b], x \in \Omega\}$$

при всех $b > a$. Если при этом априорно можно утверждать, что множество решений уравнения (2.4) содержится в множестве Ω , то для данного уравнения справедливы теоремы [50][с. 145], [14][с. 277], [20], [51][§ 2.4] и [58][7.3] о локальной разрешимости и продолжаемости решения.

В общем случае, когда функция $h(t, x)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, данный принцип в приведенной форме не применим. Однако, использование аналогичных “геометрических” представлений для уяснения задачи возможно и в этом случае. В качестве иллюстрации приведем следующую теорему о разрешимости задачи Коши:

$$\mathcal{L}x = \Phi\{x, \mathcal{H}_\varphi x\}, \quad x(a) = \alpha. \quad (2.5)$$

Предположим, что для решений уравнения $\mathcal{L}x = \Phi\{x, \mathcal{H}_\varphi x\}$ выполняется априорное неравенство

$$|\dot{x}(t)| \leq m(t, |x(a)|), \quad (2.6)$$

где

$$m : [a, \infty) \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), \quad m(\cdot, s) \in L^p, \quad 1 < p \leq \infty.$$

Это означает, что данное уравнение не может иметь решений, не удовлетворяющих неравенству (2.6).

Предположим также, что для всякого $i = 1, \dots, n$ выбрано не более чем конечное число измеримых функций $\rho_i^j : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m_i$, таких, что почти для всех $t \geq a$ и всех $x \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющих равенству $h_i(t, x) = a$ найдется $j = 1, \dots, m_i$, для которого $x_i = \rho_i^j(t)$.

Т е о р е м а 2.1. ([28]) Пусть найдется такое $\varepsilon > 0$, что для всех $j = 1, \dots, m_i$; $i = 1, \dots, n$ выполняется хотя бы одно из условий:

$$a) |\rho_i^j(t) - \alpha| \geq \int_a^t (m(s, |\alpha|) + \varepsilon) ds \text{ почти при всех } t \geq a,$$

б) существуют числа $a_i^{j_k} : a = a_i^{j_0} < \dots < a_i^{j_k} < \infty$; $k = 0, 1, \dots$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m_i$ такие, что при всех $t_1, t_2 \in [a_i^{j_k}, a_i^{j_{k+1}}]$, $t_2 \geq t_1$, $k = 0, 1, \dots$, имеет место неравенство

$$|\rho_i^j(t_2) - \rho_i^j(t_1)| \geq \int_{t_1}^{t_2} (m(s, |\alpha|) + \varepsilon) ds.$$

Тогда задача (2.5) имеет хотя бы одно решение.

Для скалярного случая уравнения (1.1) аналогичная теорема была доказана Е.С. Жуковским [21], [52], но другими средствами.

З а м е ч а н и е 2.2. Ограничения, накладываемые на h , без использования априорной информации о решениях, носят чрезвычайный характер. В частности, неравенство $h(t, x) \leq t$, обеспечивающее запаздывание аргумента u , следовательно, вольтерровость оператора $\mathcal{F} = \Phi\{\mathcal{I}, \mathcal{H}_\varphi\}$ (\mathcal{I} — тождественный оператор) сужает класс рассматриваемых уравнений, если требовать его выполнение при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Наличие же хорошей априорной оценки решения позволяет накладывать ограничения на h лишь в достаточно малой окрестности предполагаемого решения.

Кроме того, что продемонстрированного подхода к проблеме разрешимости уравнения (2.4), возможны и другие подходы. Например, в работе [11] для некоторого класса уравнений $\dot{x} = \mathcal{F}_b x$ с оператором $\mathcal{F}_b : D^r[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$, не обладающим свойством вольтерровости, достаточное условие разрешимости задачи Коши было получено на основе метода монотонных операторов.

Другой достаточно общий способ исследования разрешимости уравнения (1.1) предложил С.А. Гусаренко в работах [23], [24], [26]. В основе этого подхода также лежат теоремы о локальной разрешимости и продолжаемости решений уравнения $\dot{x} = \mathcal{F}_b x$ с вольтерровым вполне непрерывным оператором \mathcal{F}_b . Однако, если в первом случае такой оператор \mathcal{F}_b определяется для рассматриваемой задачи единственным образом на некотором множестве Ω_b функций, заданных на отрезке $[a, b]$, то теперь этот оператор определяется каждый раз заново в зависимости от точки $\tau \in [a, b]$ и значения в этой точке локального решения $x(t)$, заданного на $[a, \tau]$. Применим такой подход к изучению уравнения (2.4).

Пусть $x(t)$ — локальное решение задачи (2.5), заданное на $[a, \tau]$, $t \geq a$. В случае $\tau = a$ в качестве $x(t)$ полагаем значение $x(a)$ в этой точке.

Определим операторы $\mathcal{H}_\tau^{i_1 \dots i_n} : D^r[\tau, \tau + \delta] \rightarrow L^p[\tau, \tau + \delta]$, $1 < r \leq \infty$, $1 \leq p < \infty$, где $i_k = 0$ или 1 при всех $k = 1, \dots, n$, так, что k -ая компонента элемента $\mathcal{H}_\tau^{i_1 \dots i_n} y$ определяется равенством:

$$(\mathcal{H}_\tau^{i_1 \dots i_n} y)_k(t) = \begin{cases} x_k(a) & \text{при } h_k(t, y(t)) < a, \\ x_k[h_k(t, y(t))] & \text{при } a \leq h_k(t, y(t)) \leq \tau, \\ y_k[h_k(t, y(t))] & \text{при } h_k(t, y(t)) > \tau; \end{cases}$$

если $i_k = 1$, и равенством:

$$(\mathcal{H}_\tau^{i_1 \dots i_n} y)_k(t) = \begin{cases} \varphi[h_k(t, y(t))] & \text{при } h_k(t, y(t)) < a, \\ \varphi(a) & \text{при } h_k(t, y(t)) \geq a; \end{cases}$$

если $i_k = 0$.

В силу леммы 2.1 операторы $\mathcal{H}_\tau^{i_1 \dots i_n}$ являются вполне непрерывными, операторы $\mathcal{F}_\tau^{i_1 \dots i_n} : D^r[\tau, \tau + \delta] \rightarrow L^r[\tau, \tau + \delta]$, определенные равенствами: $(\mathcal{F}_\tau^{i_1 \dots i_n} x)(t) = (\Phi_\tau\{x, \mathcal{H}_\tau^{i_1 \dots i_n} x\})(t)$, $t \in [\tau, \tau + \delta]$, вольтерровы и вполне непрерывны. Следовательно, по теореме о локальной разрешимости существуют заданные на некотором отрезке $[\tau, \tau + \delta^0]$, $\delta^0 \leq \delta$, локальные решения $x^{(i_1 \dots i_n)}$, соответственно, уравнений

$$(\mathcal{L}_\tau x)(t) = (\mathcal{F}_\tau^{i_1 \dots i_n} x)(t), t \in [\tau, \tau + \delta].$$

Т е о р е м а 2.2. ([28]) Если найдется такой набор чисел i_1, \dots, i_n , где $i_k = 0$ или 1 при $k = 1, \dots, n$, что для некоторого $\delta^0 > 0$ система

$$\begin{cases} \mathcal{L}_\tau x = \mathcal{F}_\tau^{i_1 \dots i_n} x, \\ h_k(t, x(t)) < a, & \text{если } i_k = 0, \\ h_k(t, x(t)) \geq a, & \text{если } i_k = 1; \end{cases}$$

разрешима в пространстве $D^r[\tau, \tau + \delta^0]$, то решение x задачи (2.5), заданное на $[a, \tau]$, является продолжаемым.

3. Устойчивость уравнений с авторегулируемым запаздыванием

Изучение асимптотических свойств уравнения (1.1) вызвано многочисленными прикладными задачами. Например, К.Л. Кук [5] исследовал проблему устойчивости уравнения

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= -ax(t - r(x(t))), \\ x(\xi) &= \varphi(\xi), \text{ если } \xi < 0, \quad x(0) = \alpha, \end{aligned}$$

описывающего модель инфекционных заболеваний с постоянным иммунитетом, где $x(t)$ — количество источников инфекции, a — коэффициент, определяющий размерность контактов, и $h(t, x(t)) = t - r(x(t))$ — инкубационный период.

Разнообразные признаки устойчивости тривиального решения, полученные для подобных уравнений [4], [7], [8], исходят из априорного предположения, что соответствующая задача Коши с начальным условием $x(0) = \alpha$ однозначно разрешима при всех достаточно малых $|\alpha|$. При $\alpha = \varphi(a)$ (а именно такой случай рассматривают авторы упомянутых работ) в силу леммы 2.1 для данной задачи Коши имеют место теоремы о локальной разрешимости и продолжаемости решения. Однако, без условия непрерывной стыковки: $x(0) = \varphi(a)$ признаки упомянутых работ не гарантируют существования решения на $[0, \infty)$ и, таким образом, носят априорный характер.

Вывод: вопросы разрешимости и устойчивости уравнений с авторегулируемым запаздыванием следует изучать в тесной связи друг с другом.

Будем рассматривать уравнение

$$\mathcal{L}x = \Phi\{x, \mathcal{H}_0 x\} \tag{3.1}$$

в следующих предположениях: $\mathcal{L} : D_{loc} \rightarrow L_{loc}$ — линейный вольтерров оператор; оператор $\mathcal{H}_0 \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{H}_\varphi : C_{loc} \rightarrow L_{loc}$ определяется равенством (2.2) при $\varphi(\xi) \equiv 0$, $(\Theta x)(t) = h(t, x(t))$; оператор Немыцкого $\mathcal{N}_h : \mathbb{C} \rightarrow L^\infty$, порожденный функцией $h(t, x)$, непрерывен; существуют такие $\delta^0 > 0$, $\Delta > 0$, что $0 \leq t - h_i(t, x) \leq \Delta$ при почти всех $t \geq a$ и при всех $x \in [-\delta^0, \delta^0]$, $i = 1, \dots, n$; оператор $\Phi : C_{loc} \times L_{loc} \rightarrow L_{loc}$ вольтерров и $\Phi\{0, 0\} = 0$.

Прежде чем исследовать (локально) (B, V) — устойчивость уравнения (3.1) (см., например, [53], [50][§5.3], [14][§2.3], [55][§5.2], [29], [30], [31], [58][2.4], [32], [33], [56][гл. III, §4], [57][с. 370]) необходимо выяснить условия действия и непрерывности оператора $\mathcal{H}_0 : \mathbb{C} \rightarrow B$. Одно из затруднений здесь состоит в выборе пространства B . Ведь в наиболее естественном случае $B = L^\infty$ оператор $\mathcal{H}_0 : \mathbb{C} \rightarrow B$ непрерывен только при очень жестких условиях (см. замечание 2.1); если же $B = L^p$, $1 \leq p < \infty$, то действие оператора \mathcal{H}_0 из пространства \mathbb{C} в пространство B нарушается для самых простых $h(t, x)$.

Л е м м а 3.1. ([28]) Пусть для всех элементов x множества $\Omega \subset \{x \in \mathbb{C} : \|x\|_{\mathbb{C}} \leq \delta^0\}$ выполнено условие:

$$\text{mes}\{t \in [a, a + \Delta] : h(t, x(t)) = a\} = 0.$$

Тогда на этом множестве оператор \mathcal{H}_0 непрерывно действует из пространства \mathbb{C} в пространство \mathbb{B}_γ^p функций $z : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, представимых в виде

$$z(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [a, a + \Delta], & \int_a^{a+\Delta} |u(s)|^p ds < \infty, \quad 1 \leq p < \infty; \\ \nu(t), & t \in (a + \Delta, \infty), & \text{vrai sup}_{t > a+\Delta} |\nu(t)|e^{\gamma t} < \infty, \quad \gamma > 0; \end{cases}$$

с нормой $\|z\|_{\mathbb{B}_\gamma^p} = \|u\|_{L^p[a, a+\Delta]} + \|\nu\|_{L^\infty_\gamma(a+\Delta, \infty)}$.

О п р е д е л е н и е 3.1. Будем говорить, что функция $h = \text{col}\{h_1, \dots, h_n\} : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (\mathcal{P}_Δ) , если существуют такие постоянные Δ , δ_1 , k_1 , $k_2 > 0$, что выполняются неравенства:

$$|h_i(t^1, x) - h_i(t^2, x)| \geq k \cdot |t^1 - t^2|, \quad i = 1, \dots, n,$$

при почти всех $t^1, t^2 \in [a, a + \Delta]$ и при всех $|x| \leq \delta_1$;

$$|h(t, x^1) - h(t, x^2)| \leq k_2 \cdot |x^1 - x^2|$$

при почти всех $t \geq a$ и при всех $|x^i| \leq \delta_1$, $i = 1, 2$.

Л е м м а 3.2. ([28]) Пусть функция $h(t, x)$ непрерывна по обоим аргументам и удовлетворяет условию (\mathcal{P}_Δ) . Тогда существуют такие постоянные $\delta > 0$, $q > 0$, $l > 0$, $\gamma > 0$, что для любых $x^i \in \mathbb{C}_\gamma$, $i = 1, 2$, удовлетворяющих условиям:

$$\|x^i\|_{\mathbb{C}_\gamma} < \delta, \quad x^i \in \text{Lip}(q, [a, a + \Delta]),$$

выполняется неравенство:

$$\|\mathcal{H}_0 x^1 - \mathcal{H}_0 x^2\|_{\mathbb{B}_\gamma^1} \leq l \cdot \|x^1 - x^2\|_{\mathbb{C}_\gamma},$$

где \mathbb{B}_γ^1 — банахово пространство функций $z : [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$, представимых в виде:

$$z(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [a, a + \Delta], \\ \nu(t), & t > a + \Delta; \end{cases}$$

$$u \in B_1 = L^1[a, a + \Delta], \quad \nu \in B_2 = L_\gamma^\infty(a + \Delta, \infty).$$

Т е о р е м а 3.1. ([28]) Пусть линейное уравнение $\mathcal{L}x = f$ $(\mathbb{B}_\gamma^1, \mathbb{D}_\gamma)$ — устойчиво, где \mathbb{B}_γ^1 — банахово пространство, определенное в лемме 3.2. Пусть также оператор $\Phi : \mathbb{C}_\gamma \times \mathbb{B}_\gamma^1 \rightarrow \mathbb{B}_\gamma^1$ обладает свойством: $\Phi\{0, 0\} = 0$ и для любого $k > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\|\Phi\{u^1, \nu^1\} - \Phi\{u^2, \nu^2\}\|_{\mathbb{B}_\gamma^1} \leq k(\|u^1 - u^2\|_{\mathbb{C}_\gamma} + \|\nu^1 - \nu^2\|_{\mathbb{B}_\gamma^1})$$

при $\|u^i\|_{\mathbb{C}_\gamma} \leq \delta$, $\|\nu^i\|_{\mathbb{B}_\gamma^1} \leq \delta$, $i = 1, 2$; пусть, наконец, функция $h : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ непрерывна по всем аргументам и удовлетворяет условию (\mathcal{P}_Δ) . Тогда уравнение (3.1) локально $(\mathbb{B}_\gamma^1, \mathbb{D}_\gamma)$ — устойчиво в окрестности тривиального решения.

З а м е ч а н и е 3.1. Так как пространство $L_\gamma^\infty[a, a + \Delta]$ непрерывно вложено в пространство $L^1[a, a + \Delta]$ ($\|x\|_{L^1[a, a + \Delta]} \leq \exp(-\gamma a) [1 - \exp(-\gamma \Delta)] / \gamma \|x\|_{L_\gamma^\infty[a, a + \Delta]}$), то и пространство L_γ^∞ непрерывно вложено в пространство \mathbb{B}_γ^1 . Следовательно, $(\mathbb{B}_\gamma^1, \mathbb{D}_\gamma)$ — устойчивость уравнения $\mathcal{L}x = f$ влечет $(L_\gamma^\infty, \mathbb{D}_\gamma)$ — устойчивость этого уравнения.

Естественным образом возникает вопрос о связи (\mathbb{B}, \mathbb{V}) — устойчивости с классическими понятиями устойчивости по Ляпунову, а также асимптотической и экспоненциальной устойчивостью. Однако, для уравнения с авторегулируемым запаздыванием введение, например, понятия устойчивости по Ляпунову, как непрерывной зависимости решения задачи Коши

$$\mathcal{L}x = \Phi\{x, \mathcal{H}_\varphi x\}, \quad x(a) = \alpha \quad (3.2)$$

от α и φ , сопряжено с определенными трудностями. Дело в том, что известные утверждения о существовании и единственности решения уравнений с авторегулируемым запаздыванием существенно используют некоторые ограничения на φ (условие Липшица — у Р. Драйвера [3], условие Осгуда — у Л.А. Животовского [9]). Малые возмущения в равномерной метрике начальной функции φ могут привести к утрате единственности решения задачи (3.2). В этой ситуации представляются возможными два выхода:

- 1) рассматривать возмущения φ в более сильной, чем равномерная, метрике.
- 2) исключить из определения устойчивости по Ляпунову (асимптотической, экспоненциальной) требование единственности решения задачи (3.2) при малых возмущениях φ .

Второй путь нам кажется более естественным.

Итак, пусть, по-прежнему, $0 \leq t - h_i(t, x) \leq \Delta$, $i = 1, \dots, n$, при почти всех $t \geq a$ и при всех $|x| \leq \delta^0$, где δ^0, Δ — некоторые положительные постоянные.

О п р е д е л е н и е 3.2. Тривиальное решение уравнения (3.1) назовем устойчивым по Ляпунову, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что задача (3.2) имеет хотя бы одно решение, как только $|\alpha| < \delta$, $\sup_{t \in (-\Delta, 0)} |\varphi(t)| < \delta$, и для каждого

такого решения x выполняется неравенство: $\sup_{t \geq 0} |x(t)| < \varepsilon$. Если при этом $\lim_{t \rightarrow \infty} |x(t)| = 0$

для всех x , то тривиальное решение назовем асимптотически устойчивым. Если, кроме того, существуют такие $\gamma > 0$, $\mathcal{N}_{\alpha, \varphi} > 0$, что $|x(t)| \leq \mathcal{N}_{\alpha, \varphi} \cdot \exp(-\gamma t)$ для всех x , то тривиальное решение будем называть экспоненциально устойчивым.

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3.2. ([28]) Пусть уравнение $\mathcal{L}x = f$ (L^∞, \mathbb{D})-устойчиво, $((L_0^\infty, \mathbb{D}_0)$ -устойчиво, $(L_\gamma^\infty, \mathbb{D}_\gamma)$ -устойчиво, $\gamma > 0$); оператор $\Phi : \mathbb{V} \times \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{B}$, где $\mathbb{V} = \mathbb{C}$, $\mathbb{B} = L^\infty$ ($\mathbb{V} = \mathbb{C}_0$, $\mathbb{B} = L_0^\infty$; $\mathbb{V} = \mathbb{C}_\gamma$, $\mathbb{B} = L_\gamma^\infty$) обладает свойством: $\Phi\{0, 0\} = 0$ и для любого $k > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что справедливо неравенство:

$$\|\Phi\{u, \nu\}\|_{\mathbb{B}} \leq k(\|u\|_{\mathbb{V}} + \|\nu\|_{\mathbb{B}})$$

при всех $u \in \mathbb{V}$, $\nu \in \mathbb{B}$, $\|u\|_{\mathbb{V}} \leq \delta$, $\|\nu\|_{\mathbb{B}} \leq \delta$.

Пусть также функция $h : [a, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условию (\mathcal{P}_Δ) . Тогда тривиальное решение уравнения (3.1) устойчиво по Ляпунову (асимптотически, экспоненциально).

З а м е ч а н и е 3.2. Теоремы 3.1 и 3.2 являются дальнейшим развитием теорем 5.2.2, 5.2.4 и 5.2.5 из книги [55], см. также статьи [53], [54].

4. Признаки устойчивости одного класса “псевдолинейных” уравнений с авторегулируемым запаздыванием

Общая теория устойчивости, изложенная в пункте третьем, хотя и охватывает значительный класс уравнений с авторегулируемым запаздыванием, применительно к конкретному типу уравнений, иногда оказывается не достаточно эффективной. Пытаясь восполнить этот пробел, настоящий пункт четвертый мы посвящаем получению эффективных признаков той или иной устойчивости некоторых классов исследуемых уравнений, используя специальные приемы. При этом формулируемые признаки мы, по возможности, будем сравнивать с результатами работ, в которых подобные уравнения уже изучались.

Рассмотрим скалярное уравнение:

$$\dot{x}(t) + ax(t) = - \sum_{k=1}^m b_k (H_\varphi^k x)(t), \quad t \geq 0, \quad (4.1^\varphi)$$

в котором операторы $H_\varphi^k : C_{loc} \rightarrow L_{loc}$ определяются равенствами:

$$(H_\varphi^k x)(t) = \begin{cases} x[h_k(t, x(t))], & \text{при } h_k(t, x(t)) \geq 0, \\ \varphi[h_k(t, x(t))], & \text{при } h_k(t, x(t)) < 0, \end{cases} \quad (4.2)$$

где функции $h_k : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям Каратеодори, и существуют константы $\omega > 0$ и $\delta_0 > 0$ такие, что $0 \leq t - h_k(t, x) \leq \omega$ при $|x| \leq \delta_0$ и при почти всех $t \geq 0$; функция $\varphi : [-\omega, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывна; $b_k \geq 0$.

Через (4.1^0) будем обозначать уравнение (4.1^φ) при $\varphi \equiv 0$; $b = \sum_{k=1}^m b_k$.

Л е м м а 4.1. ([28]) Для задачи

$$\dot{x}(t) + ax(t) = - \sum_{k=1}^m b_k (H_\varphi^k x)(t) + \psi(t), \quad t \in [0, \infty), \quad x(0) = \alpha$$

при $\psi \in L^\infty$ справедлива следующая априорная оценка решений на отрезке $[0, \omega]$:

$$|x(t)| \leq (|\alpha| + b\omega \sup_{s \in [-\omega, 0)} |\varphi(s)| + \omega \text{vrai sup}_{s \in [0, \omega]} |\psi(s)|) \exp(|a| + b)t.$$

Прежде чем формулировать основное утверждение, введем в рассмотрение класс $\mathcal{G}_{a,b}^\omega$ всех линейных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) + ax(t) &= - \sum_{k=1}^m b_k x(g_k(t)), \quad t \geq \omega, \\ x(\xi) &= 0, \quad \text{если } \xi < \omega, \end{aligned} \quad (4.3)$$

в которых запаздывания $t - g_k(t)$ измеримы и удовлетворяют неравенствам $0 \leq t - g_k(t) \leq \omega$, $k = 1, \dots, m$. В работе [41] В.В. Малыгиной показано, что задача устойчивости любого уравнения (4.3) из класса $\mathcal{G}_{a,b}^\omega$ сводится к такой же задаче для некоторого так называемого “test-уравнения”. В той же работе построена область \mathcal{D} устойчивости для test-уравнения в терминах параметров a, b, ω и получены эффективные признаки той или иной устойчивости уравнений (4.3).

Т е о р е м а 4.1. ([28]) Пусть функции $h_k(t, x)$ удовлетворяют условию (\mathcal{P}_ω) (см. определение 3.1). Если точка $\mathcal{M}(a\omega, b\omega) \in \overline{\mathcal{D}}$, то тривиальное решение уравнения (4.1^0) устойчиво по Ляпунову. Если $\mathcal{M}(a\omega, b\omega) \in \mathcal{D}$, то тривиальное решение этого уравнения экспоненциально устойчиво, где устойчивость по Ляпунову и экспоненциальная устойчивость понимаются в смысле определения 3.2.

З а м е ч а н и е 4.1. Уравнение

$$\dot{x}(t) = -bx(t - r(t, x(t))), \quad t \geq 0, \quad (4.4)$$

описывающее модель инфекционных заболеваний [43], [5], [7], является частным случаем уравнения (4.1^φ) . В предположении непрерывной стыковки: $x(0) = \varphi(0)$ К.Л. Кук, Дж.А. Йорк получили достаточное условие асимптотической устойчивости тривиального решения уравнения (4.4): $b\omega < 3/2$, где ω — такая постоянная, что $0 \leq r(t, x) \leq \omega$ при всех $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$.

Наша теорема дает то же условие экспоненциальной устойчивости тривиального решения уравнения (4.1^0) . При этом мы ослабляем ограничения на функцию $r(t, x)$ и заменяем требование непрерывной стыковки условием (\mathcal{P}_ω) .

Исследуем, наконец, вопрос о (\mathbb{B}, \mathbb{V}) –устойчивости тривиального решения уравнения (4.1^0) . Рассмотрим задачу

$$\dot{x}(t) + ax(t) = - \sum_{k=1}^m b_k (H_0^k x)(t) + \psi(t), \quad x(0) = \alpha,$$

где операторы $H_0^k : C \rightarrow L_{loc}$ определяются равенствами (4.2) при $\varphi \equiv 0$.

Т е о р е м а 4.2. ([28]) Пусть функции $h_k(t, x)$ удовлетворяют условию (\mathcal{P}_ω) . Если точка $\mathcal{M}(a\omega, b\omega) \in \mathcal{D}$, то существует постоянная $\gamma_0 > 0$ такая, что тривиальное решение уравнения (4.1^0) $(L_\gamma^\infty, \mathbb{C}_\gamma)$ –устойчиво для всех $\gamma \in [0, \gamma_0)$.

5. Теоремы о первом приближении для скалярных автономных уравнений с авторегулируемым запаздыванием

Теоремы из пункта три об устойчивости по внешнему виду хотя и напоминают известные теоремы Ляпунова о первом приближении [56], [57], [38], однако, в действительности существенно отличаются от последних. Теоремы Ляпунова для обыкновенных дифференциальных [56], [57] или функционально-дифференциальных [38] уравнений дают методике исследования устойчивости: с помощью линеаризации нелинейной части уравнения вопрос об устойчивости нелинейного уравнения сводится к вопросу об устойчивости линейного уравнения, для которого уже доказаны эффективные признаки устойчивости. В нашем случае не удастся линеаризовать нелинейные части уравнений, а потому вышеупомянутая методика здесь не применима. В этом параграфе заменяя процесс линеаризации уравнения его, так сказать, “псевдолинеаризацией”, а также используя результаты пункта четвертого, мы получили некоторые аналоги теорем о первом приближении для скалярных, автономных уравнений с авторегулируемым запаздыванием.

Рассмотрим, наконец, аналогичные уравнения с авторегулируемым запаздыванием:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x(t), x[h_1(t, x(t))], \dots, x[h_m(t, x(t))]), t \geq 0, \\ x(\xi) &= 0, \quad \xi < 0,\end{aligned}\tag{5.1}$$

предполагая, что функции $h_k : [0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют условиям Каратеодори и неравенствам $0 \leq t - h_k(t, x) \leq \omega$ при всех $|x| \leq \delta_0$ и при почти всех $t \geq 0$, где $\delta_0 > 0$ — некоторое число; функция $f(u^0, u^1, \dots, u^m)$ в некоторой окрестности точки $(0, \dots, 0)$ имеет непрерывные частные производные по всем аргументам и $f(0, 0, \dots, 0) = 0$.

Введем обозначения

$$a = -\frac{\partial f(0, \dots, 0)}{\partial u^0}, \quad b_k = -\frac{\partial f(0, \dots, 0)}{\partial u^k}, \quad k = 1, \dots, m.$$

Тогда уравнение (5.1) можно переписать в виде:

$$\dot{x}(t) + ax(t) + \sum_{k=1}^m b_k (H_0^k x)(t) = f^*(x(t), (H_0^1 x)(t), \dots, (H_0^m x)(t)),$$

где функция $f^*(u^0, u^1, \dots, u^m)$ обладает свойством:

$$f^*(0, 0, \dots, 0) = \frac{\partial f^*(0, 0, \dots, 0)}{\partial u^k} = 0, \quad k = 0, \dots, m.$$

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 5.1. ([28]) Пусть точка $M(a\omega, b\omega) \in \mathcal{D}$, а функции $h_k(t, x)$, $k = 1, \dots, m$, удовлетворяет условию (P_ω) , Тогда тривиальное решение уравнения (5.1) экспоненциально устойчиво и локально $(L_\gamma^\infty, \mathbb{C}_\gamma)$ -устойчиво при $0 \leq \gamma < \gamma_0$, где $\gamma_0 > 0$ — некоторое число.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Э. Эльсгольц, С.Б. Норкин, *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1971, 296 с.
2. А.Д. Мышкис, “О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом”, *Успехи мат. наук*, **32**:2 (1977), 173–202.

М.Б. Ермолаев, П.М. Симонов. Признаки устойчивости одного класса...

3. R. D. Driver, “Existence theory for a delay-differential system”, *Contribut. to Different. Equat.*, **1**:1 (1963), 317–336.
4. K. L. Cooke, “Functional differential equations close to differential equations”, *Bul. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 285–288.
5. K. L. Cooke, “Asymptotic theory for the delay-differential equation $u'(t) = -au(t - r(u(t)))$ ”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **19** (1967), 160–179.
6. B. Stefan, “Asymptotic of a functional differential equation with bounded lag”, *SIAM J. Appl. Math.*, **17** (1969), 272–279.
7. J. A. Yorke, “Asymptotic stability for one-dimensional differential-delay equations”, *J. Different. Equat.*, **7**:1 (1970), 189–202.
8. T. Yoneyama, “On the 3/2 stability theorem for one-dimensional delay-differential equations”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **125**:1 (1987), 161–173.
9. Л. А. Животовский, “О существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от решения и его производной”, *Дифференц. уравнения*, **5**:5 (1969), 880–889.
10. В. П. Рудаков, “К вопросу о существовании решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от решения”, *Дифференц. уравнения*, **8**:11 (1971), 2013–2018.
11. М. Б. Ермолаев, “О разрешимости задачи Коши для некоторого класса уравнений с отклонением, зависящим от неизвестной функции”, *Изв. вузов. Математика*, 1993, № 5 (372), 46–49.
12. М. Б. Ермолаев, “Об устойчивости уравнений с запаздыванием, зависящим от неизвестной функции”, *Изв. вузов. Математика*, 1994, № 6 (385), 60–63.
13. N. V. Azbelev, *Recent trends in the theory of nonlinear functional differential equations*, Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts. Editor V. Lakshmikantham (Tampa, Florida, August 19-26, 1992), Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1996, 1807–1814.
14. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Институт компьютерных исследований, М.; Ижевск, 2002, 384 с.
15. М. Е. Драхлин, “О некоторых топологических свойствах одного интегрального оператора”, *Дифференц. уравнения*, **8**:4 (1972), 721–724.
16. М. Е. Драхлин, “О нелинейном операторе внутренней суперпозиции в пространстве измеримых функций”, *Краевые задачи*, Пермь, 1982, 157–161.
17. М. Е. Драхлин, Т. К. Плышевская, “Существование, единственность и сходимость последовательных приближений для дифференциальных уравнений с запаздыванием”, *Дифференц. уравнения*, **9**:9 (1973), 1583–1592.

18. А. И. Булгаков, В. П. Максимов, “Функциональные и функционально-дифференциальные включения с вольтерровыми операторами”, *Дифференц. уравнения*, **17**:8 (1981), 1362–1374.
19. В. П. Максимов, “Разрешимость некоторых краевых задач для дифференциальных уравнений с отклонением аргумента, зависящим от решения”, *Краевые задачи*, Пермь, 1982, 6–9.
20. В. П. Максимов, “Разрешимость уравнений с локально-вольтерровыми операторами”, *Краевые задачи*, Пермь, 1984, 12–15.
21. Е. С. Жуковский, “К вопросу об уравнений с запаздыванием, зависящим от неизвестной функции”, *Краевые задачи*, Пермь, 1982, 9–12.
22. Е. С. Жуковский, “О дифференциальных неравенствах и оценках решений одного функционально-дифференциального уравнения”, *Краевые задачи*, Пермь, 1983, 22–24.
23. С. А. Гусаренко, “О функционально-дифференциальных уравнений с нелинейным оператором суперпозиции”, *Краевые задачи*, Пермь, 1984, 68–72.
24. С. А. Гусаренко, “О продолжаемости решений функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от искомой функции”, *Дифференц. уравнения*, **21**:12 (1985), 2171–2173.
25. С. А. Гусаренко, “О нелинейном операторе внутренней суперпозиции”, *Вестник ПГТУ. Математика и прикладная математика*, Пермь, 1994, 51–54.
26. С. А. Гусаренко, Е. С. Жуковский, В. П. Максимов, “К теории функционально-дифференциальных уравнений с локально вольтерровыми операторами”, *Докл. АН СССР*, **287**:2 (1986), 268–272.
27. Н. В. Азбелев, М. Б. Ермолаев, В. В. Малыгина, “Устойчивость одного класса существенно нелинейных уравнений с запаздывающим аргументом”, *Успехи мат. наук*, **49**:4 (298) (1994), 94.
28. М. Б. Ермолаев, *Устойчивость решений некоторых классов существенно нелинейных функционально-дифференциальных уравнений*, дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, Пермь, 1995, 104 с.
29. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, “Функционально-дифференциальные уравнения и теория устойчивости уравнений с последействием”, *Вестник ПГТУ. Функционально-дифференциальные уравнения (специальный выпуск)*, Пермь, 2002, 52–69.
30. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, “Современная теория устойчивости уравнений с последействием: обзор идей и результатов”, *Нелинейный анализ и нелинейные дифференциальные уравнения*, ред. В. А. Треногин, А. Ф. Филишов, ФИЗМАТЛИТ, М., 2003, 289–304.
31. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, “Современная теория функционально-дифференциальных уравнений и некоторые прикладные задачи”, *Оптимизация, управление, интеллект*, **2**:10 (2005), 289–304.

32. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, П. М. Симонов, “Функционально-дифференциальные уравнения и их приложения”, *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*, 2009, № 1, 3–23.
33. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, “Theory of functional differential equations and applications”, *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **69**:2 (2011), 203–235.
34. F. Hartung, J. Turi, *Linearized stability in functional differential equations with state-dependent delays*, Proceedings of the International Dynamical Systems and Differential Equation (May 18 - 21, 2000, Atlanta, USA), Added volume Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2000, 416–425.
35. A. Domoshnitsky, M. Drakhlin, E. Litsyn, “On equations with delay depending on solution”, *Nonlinear Analysis*, **49** (2002), 689–701.
36. I. Györi, F. Hartung, “Exponential stability of a state-dependent delay system”, *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **18**:4 (2007), 773–791.
37. А. Д. Мышкис, *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, 2-е изд., Наука, М., 1972, 352 с.
38. Дж. Хейл, *Теория функционально-дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1984, 421 с.
39. В. В. Малыгина, “Об экспоненциальной оценке функции Коши”, *Дифференц. уравнения*, **28**:6 (1992), 1082–1084.
40. В. В. Малыгина, “Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом”, *Дифференц. уравнения*, **28**:10 (1992), 1716–1723.
41. В. В. Малыгина, “Об устойчивости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с последействием”, *Изв. вузов. Математика*, 1993 (372), № 5, 72–85.
42. T. Amemiya, “On the delay-independent stability of a delayed differential equation of 1-st order”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **142**:1 (1989), 13–25.
43. K. L. Cooke, *Functional differential systems: some models and perturbation problems*, Int. Symp. Diff. Equat. Dynamic. Systems, New York: Acad. Press, 1965, 165–183.
44. Р. Д. Драйвер, *Топологии для уравнений нейтрального типа и классическая электродинамика*, Дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом (Киев, 23–26 сентября 1975 г.), : Наукова думка, Киев, 1977, 113–127.
45. S. P. Travis, “A one-dimensional two-body problem of classical electrodynamics”, *SIAM J. Appl. Math.*, **28** (1975), 611–632.
46. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, “Об одном классе уравнений, возникающих в проблеме тяготения электрических заряженных тел с учетом запаздывания сил взаимодействия”, *Гравитация и объединение фундаментальных полей*, Наукова думка, Киев, 1982.

47. R. D. Driver, *A functional-differential system of neutral type arising in a two body problem of classical electrodynamics*, Internat. Sympos. Nonlinear Diffent. Equat. and Nonlinear Mechanics (Colorado Springer, 1961), New York, London: Acad. Press, 1963, 474–484.
48. Ю. С. Колесов, Д. И. Швитра, “Математическое моделирование процесса горения в камере жидкостного ракетного двигателя”, *Литовский матем. сб.*, **15**:4 (1975).
49. С. А. Гусаренко, *Функционально-дифференциальные уравнения с вольтерровыми операторами*, дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, Пермь, 1987, 130 с.
50. Н. В. Азбелев, В. П. Максимов, Л. Ф. Рахматуллина, *Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1991, 280 с.
51. В. П. Максимов, *Вопросы общей теории функционально-дифференциальных уравнений. Избранные труды*, Изд-во ПГУ, ПСИ, ПССГК, Пермь, 1967, 306 с.
52. Е. С. Жуковский, *Операторные неравенства и функционально-дифференциальные уравнения*, дисс. . . . канд. физ.-матем. наук, Пермь, 1983, 133 с.
53. Н. В. Азбелев, М. Б. Ермолаев, П. М. Симонов, “К вопросу об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений по первому приближению”, *Изв. вузов. Математика*, 1995, № 10 (401), 3–9.
54. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, “Устойчивость уравнений с запаздывающим аргументом. II”, *Изв. вузов. Математика*, 2000, № 4 (455), 3–13.
55. Н. В. Азбелев, П. М. Симонов, *Устойчивость решений уравнений с обыкновенными производными*, Изд-во Перм. ун-та, Пермь, 2001, 230 с.
56. Е. А. Барбашин, *Введение в теорию устойчивости*, Наука, М., 1967, 224 с.
57. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости: Учеб. пособие*, 2-е изд., Изд-во Моск. ун-та, М., 1998, 480 с.
58. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications*, Contemporary Mathematics and Its Applications, eds. Ravi P. Agarwal and Donal O'Regan, Hindawi Publishing Corporation, New York, Cairo, 2007, IX + 314 p.

Поступила 8.04.2017

MSC2010 34K20, 34K25

The tests of the stability of one class of autonomous differential “pseudo-linear” equations of the first order with autoregulated delay

© M. B. Ermolaev³ P. M. Simonov⁴

Abstract. In the article effective tests of exponential stability are obtained for some classes of autonomous differential equations of first order with autoregulated delay. An overview of works on this topic from the cities of Perm and Ivanovo is made. The criteria of S.A. Gusarenko (on the continuity of the operator with autoregulated delay) and of V.P. Maksimov (on the complete continuity of the operator with autoregulated delay) are given. Sufficient conditions for the existence and continuability of solutions are formulated. Theorems on stability of the system due to its first approximation are given, too. These propositions are based on theorems from the book and from the articles N.V. Azbelev and P.M. Simonov. Theorems on stability in the first approximation, although resembling the well-known Lyapunov's theorems, in reality differ significantly from the latter. Lyapunov's theorems for ordinary differential or functional differential equations give a technique for investigating stability. By means of linearization, the question of the nonlinear equation's stability reduces to the question of linear equation's stability. For this problem effective stability criteria are already proved. In our case it is not possible to linearize the nonlinear parts of the equations, and therefore the above technique is not applicable here. In the article, replacing the process of linearization with “pseudo-linearization”, and also using the results of V.V. Malygina, we obtained some analogues of theorems on the first approximation for scalar, autonomous equations with autoregulated delay. The main conclusions obtained on the basis of this idea can be formalized as follows: autonomous differential equations with autoregulated delay have stability properties similar to the properties of corresponding equations with concentrated delay.

Key Words: autonomous differential equations with autoregulated delay, stability, nonlinear operator of inner superposition, Lyapunov's theorem about stability in the first approximation, contraction operator, fixed point of the operator, admissibility of pairs of spaces.

REFERENCES

1. L.E. El'sgolts, S.B. Norkin, *Vvedeniye v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom [Introduction to the theory differential equations with a deviating argument]*, Nauka Publ., Moscow, 1971 (In Russ.), 296 p.
2. A. D. Myshkis, “[On some problems in the theory of differential equations with a deviating argument]”, *Uspekhi matematicheskikh nauk*, **32**:2 (1977), 173–202 (In Russ.).
3. R. D. Driver, “Existence theory for a delay-differential system”, *Contribut. to Different. Equat.*, **1**:1 (1963), 317–336.
4. K. L. Cooke, “Functional differential equations close to differential equations”, *Bul. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 285–288.

³ **Mikhail B. Ermolaev**, Acting Head of the Department of Economics and Finance, Professor of the Department of Economics and Finance, Ivanovo State University of Chemical Technology (7 Sheremetevsky Avenue, Ivanovo 153000, Ivanovo region, Russia), DSc of Economics, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0217-3821>, ermol-mb@mail.ru

⁴ **Pyotr M. Simonov**, Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University (15 Bukirev Str., Perm 614990, Perm region, Russia), DSc (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6357-662X>, simpm@mail.ru

5. K.L. Cooke, “Asymptotic theory for the delay-differential equation $u'(t) = -au(t - r(u(t)))$ ”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **19** (1967), 160–179.
6. B. Stefan, “Asymptotic of a functional differential equation with bounded lag”, *SIAM J. Appl. Math.*, **17** (1969), 272–279.
7. J.A. Yorke, “Asymptotic stability for one-dimensional differential-delay equations”, *J. Different. Equat.*, **7**:1 (1970), 189–202.
8. T. Yoneyama, “On the $3/2$ stability theorem for one-dimensional delay-differential equations”, *J. Math. Anal. and Appl.*, **125**:1 (1987), 161–173.
9. L.A. Zhivotovsky, “[On the existence and uniqueness of solutions differential equations with a delay that depends on the solution u its derivative]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **5**:5 (1969), 880–889 (In Russ.).
10. V.P. Rudakov, “[To the question of the existence of solutions differential equations with delay depending on the solution]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **8**:11 (1971), 2013–2018 (In Russ.).
11. M.B. Ermolaev, “[On the solvability of the Cauchy problem for a certain class equations with a deviation that depends on the unknown function]”, *Izvestiya vuzov. Matematika*, **5** (372) (1993), 46–49 (In Russ.).
12. M.B. Ermolaev, “[On the stability of equations with delay depending on from an unknown function]”, *Izvestiya vuzov. Matematika*, **6** (385) (1994), 60–63 (In Russ.).
13. N.V. Azbelev, *Recent trends in the theory of nonlinear functional differential equations*, Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts. Editor V. Lakshmikantham (Tampa, Florida, August 19-26, 1992), Berlin, New York: Walter de Gruyter, 1996, 1807–1814.
14. N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, L.F. Rahkmatullina, *Elementy sovremennoy teorii funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy. Metody i prilozheniya* [Elements of the modern theory of functional differential equations. Methods and applications], Institute of Computer Research, Moscow and Izhevsk, 2002 (In Russ.), 384 p.
15. M.E. Drakhlin, “[On some topological properties of one integral operator]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **8**:4 (1972), 721–724 (In Russ.).
16. M.E. Drakhlin, “[On a nonlinear operator of inner superposition in the space of measurable functions]”, *Krayevyye zadachi* [Boundary value problems], Perm, 1982, 157–161 (In Russ.).
17. M.E. Drakhlin, T.K. Plyshevskay, “[Existence, uniqueness and the convergence of successive approximations for differential equations with delay]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **9**:9 (1973), 1583–1592 (In Russ.).
18. A.I. Bulgakov, V.P. Maksimov, “[Functional and functional differential inclusions with Volterra operators]”, *Differentsial'nyye uravneniya*, **17**:8 (1981), 1362–1374 (In Russ.).
19. V.P. Maksimov, “[The solvability of certain boundary value problems for differential equations with deviation of the argument, depending on the solutions]”, *Krayevyye zadachi* [Boundary value problems], Perm, 1982, 6–9 (In Russ.).

20. V.P. Maksimov, “[The solvability of the equations with locally Volterra operators]”, *Krayevyye zadachi [Boundary value problems]*, Perm, 1984, 12–15 (In Russ.).
21. E.S. Zhukovsky, “[On the problem of equations with delay depending on the unknown function]”, *Krayevyye zadachi [Boundary value problems]*, Perm, 1982, 9–12 (In Russ.).
22. E.S. Zhukovsky, “[On differential inequalities and estimates solutions of a functional differential equation]”, *Krayevyye zadachi [Boundary value problems]*, Perm, 1983, 22–24 (In Russ.).
23. S.A. Gusarenko, “[On functional differential equations with a nonlinear superposition operator]”, *Krayevyye zadachi [Boundary value problems]*, Perm, 1984, 68–72 (In Russ.).
24. S.A. Gusarenko, “[On the continuability of solutions of functional differential equations with a delay that depends on the desired function]”, *Differentsial’nyye uravneniya*, **21**:12 (1985), 2171–2173 (In Russ.).
25. S.A. Gusarenko, “[On a nonlinear inner operator superpositions]”, *Vestnik PGU. Matematika i prikladnaya matematika [Bulletin of PSTU. Mathematics and Applied Mathematics]*, Perm, 1994, 51–54 (In Russ.).
26. S.A. Gusarenko, E.S. Zhukovsky, V.P. Maksimov, “[Towards a theory functional differential equations with locally Volterra operators]”, *Doklady AN SSSR*, **287**:2 (1986), 268–272 (In Russ.).
27. N.V. Azbelev, M.B. Ermolaev, V.V. Malygina, “[Stability of a class of essentially nonlinear equations with retarded argument]”, *Uspekhi matematicheskikh nauk*, **49**:4 (298) (1994), 94 (In Russ.).
28. M.B. Ermolaev, *Ustoychivost’ resheniy nekotorykh klassov sushchestvenno nelineynykh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy [Stability of solutions of certain classes of essentially nonlinear functional differential equations]*, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci.diss.], Perm, 1995 (In Russ.), 104 p.
29. N.V. Azbelev, P.M. Simonov, “[Functional differential equations and the stability theory of equations with aftereffect]”, *Vestnik PGU. Funktsional’no-differentsial’nyye uravneniya (spetsial’nyy vypusk) [Bulletin of PSTU. Functional differential equations (special edition)]*, Perm, 2002, 52–69 (In Russ.).
30. N.V. Azbelev, P.M. Simonov, “[The modern theory of the stability of equations with aftereffect: a review of ideas and results]”, *Nelineynyy analiz i nelineynyye differentsial’nyye uravneniya [Nonlinear analysis and nonlinear differential equations]*, eds. V.A. Trenogin, A.F. Filippov, FIZMATLIT, Moscow, 2003, 289–304 (In Russ.).
31. N.V. Azbelev, P.M. Simonov, “[The modern theory of functional differential equations and some applied problems]”, *Optimizatsiya, upravleniye, intellekt [Optimization, control, intellect]*, **2**:10 (2005), 289–304 (In Russ.).
32. N.V. Azbelev, V.P. Maksimov, P.M. Simonov, “[Functional differential equations and their applications]”, *Vestnik Udmurtskogo universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp’yuternyye nauki [Bulletin of the Udmurt University. Mathematics. Mechanics. Computer science]*, **1** (2009), 3–23 (In Russ.).

33. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, P. M. Simonov, "Theory of functional differential equations and applications", *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **69**:2 (2011), 203–235.
34. F. Hartung, J. Turi, *Linearized stability in functional differential equations with state-dependent delays*, Proceedings of the International Dynamical Systems and Differential Equation (May 18 - 21, 2000, Atlanta, USA), Added volume Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2000, 416–425.
35. A. Domoshnitsky, M. Drakhlin, E. Litsyn, "On equations with delay depending on solution", *Nonlinear Analysis*, **49** (2002), 689–701.
36. I. Györi, F. Hartung, "Exponential stability of a state-dependent delay system", *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, **18**:4 (2007), 773–791.
37. A. D. Myshkis, *Lineynyye differentsial'nyye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear differential equations with retarded argument], 2nd edition, Nauka Publ., Moscow (In Russ.), 352 p.
38. J. Hale, *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Theory of functional differential equations], World, Moscow, 1984 (In Russ.), 421 p.
39. V. V. Malygina, "[On an exponential estimate of the Cauchy function]", *Differentsial'nyye uravneniya*, **28**:6 (1992), 1082–1084 (In Russ.).
40. V. V. Malygina, "[Some tests of the stability of the equations with retarded argument]", *Differentsial'nyye uravneniya*, **28**:10 (1992), 1716–1723 (In Russ.).
41. V. V. Malygina, "[On the stability of solutions of certain linear differential equations with aftereffect]", *Izvestiya vuzov. Matematika*, **5** (1993 (372)), 72–85 (In Russ.).
42. T. Amemiya, "On the delay-independent stability of a delayed differential equation of 1-st order", *J. Math. Anal. and Appl.*, **142**:1 (1989), 13–25.
43. K. L. Cooke, *Functional differential systems: some models and perturbation problems*, Int. Symp. Diff. Equat. Dynamic. Systems, New York: Acad. Press, 1965, 165–183.
44. R. D. Driver, *[Topologies for equations of neutral type and classical electrodynamics]*, *Differentsial'nyye uravneniya s otklonyayushchimsya argumentom* [Differential equations with deviating argument] (Kiev, September 23-26, 1975), Scientific thought, Kiev, 1977, 113–127 (In Russ.).
45. S. P. Travis, "A one-dimensional two-body problem of classical electrodynamics", *SIAM J. Appl. Math.*, **28** (1975), 611–632.
46. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, "[On a class of equations arising in the problem of gravitation of electrically charged bodies with allowance for the retardation of the interaction forces]", *Gravitatsiya i ob'yedineniye fundamental'nykh poley* [Gravitation and the union of fundamental fields], Scientific thought, Kiev, 1982 (In Russ.).
47. R. D. Driver, *A functional-differential system of neutral type arising in a two body problem of classical electrodynamics*, Internat. Sympos. Nonlinear Diffent. Equat. and Nonlinear Mechanics (Colorado Springer, 1961), New York, London: Acad. Press, 1963, 474–484.

48. Yu. S. Kolesov, D. I. Shvitra, “[Mathematical modeling combustion process in the chamber of a liquid rocket engine]”, *Litovskiy matem. sbornik [Lithuanian Math. Collection]*, **15**:4 (1975) (In Russ.).
49. S. A. Gusarenko, *Funktsional’no-differentsial’nyye uravneniya s vol’terrovymi operatorami [Functional differential equations with Volterra operators]*, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci.diss.], Perm, 1987 (In Russ.), 130 c.
50. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Vvedeniye v teoriyu funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy [Introduction to the theory functional differential equations]*, Nauka Publ., Moscow, 1991 (In Russ.), 280 p.
51. V. P. Maksimov, *Voprosy obshchey teorii funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy. Izbrannyye trudy [Questions of the general theory of functional differential equations. Selected Works]*, Perm St. Univ. Publ., Perm Soc. Inst. Publ., Prikamsky Modern Soc. and Hum. College Publ., Perm, 1967 (In Russ.), 306 p.
52. E. S. Zhukovsky, *Operatornyye neravenstva i funktsional’no-differentsial’nyye uravneniya [Operator inequalities and Functional differential equations]*, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci.diss.], Perm, 1983 (In Russ.), 133 p.
53. N. V. Azbelev, M. B. Ermolaev, P. M. Simonov, “[On the question of the stability of functional differential equations in the first approximation]”, *Izvestiya vuzov. Matematika*, **10 (401)** (1995), 3–9 (In Russ.).
54. N. V. Azbelev, P. M. Simonov, “[Stability of equations with retarded argument. II]”, *Izvestiya vuzov. Matematika*, **4 (455)** (2000), 3–13 (In Russ.).
55. N. V. Azbelev, P. M. Simonov, *Ustoychivost’ resheniy uravneniy s obyknovennymi proizvodnymi [Stability of solutions of equations with ordinary derivatives]*, Perm St. Univ. Publ., Perm, 2001 (In Russ.), 230 p.
56. E. A. Barbashin, *Vvedeniye v teoriyu ustoychivosti [Introduction to the theory of stability]*, Nauka Publ., Moscow, 1967 (In Russ.), 224 p.
57. B. P. Demidovich, *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]*, Moscow St. Univ. Publ., Moscow, 1998 (In Russ.), 480 p.
58. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, L. F. Rakhmatullina, *Introduction to the theory of functional differential equations: methods and applications*, Contemporary Mathematics and Its Applications, eds. Ravi P. Agarwal and Donal O’Regan, Hindawi Publishing Corporation, New York, Cairo, 2007, IX + 314 p.

Submitted 8.04.2017

УДК 517.938

Недиссипативное кинематическое динамо на линзах

© Е. В. Жужома¹ В. С. Медведев²

Аннотация. В статье строится гладкий (бесконечно дифференцируемый) диффеоморфизм произвольной трехмерной линзы (замкнутого трехмерного многообразия, которое конечно-листно покрывается трехмерной сферой), который имеет положительную энтропию и сохраняет объем в некоторой окрестности своего неблуждающего множества (отметим, что в список трехмерных линз мы включаем трехмерную сферу). При этом в пространстве диффеоморфизмов, консервативных в некоторых окрестностях своих неблуждающих множеств, имеется окрестность, в которой диффеоморфизмы имеют положительную топологическую энтропию (то есть построенный диффеоморфизм является относительно устойчивым в данном классе диффеоморфизмов). В силу своих свойств, построенный диффеоморфизм может служить моделью недиссипативного кинематического быстрого динамо (остается открытым вопрос о том, является ли построенный диффеоморфизм моделью среднего или диссипативного быстрого динамо).

Ключевые слова: диффеоморфизм полнотория, соленид, недиссипативное динамо.

Теория кинематического динамо изучает происхождение и эволюцию магнитных полей в электропроводящих средах (плазме), поскольку такие поля играют большую роль в динамике астрофизических процессов. Одним из аспектов быстрого кинематического динамо является изучение движений плазмы, которые вызывают экспоненциальный рост магнитного поля при малой магнитной диффузии [1]. Рассматриваются, как правило, непрерывная и дискретная модели кинематического динамо. Согласно [1], гл. 5, п.1.1, в случае непрерывной модели система уравнений кинематического динамо состоит из уравнения индукции $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \text{rot}(\vec{v} \times \vec{B}) + \nu \Delta \vec{B}$ и бездивергентности $\text{div} \vec{B} = 0$ магнитного поля \vec{B} , заданного на некотором римановом многообразии M , где ν – магнитная вязкость (величина обратная так называемому магнитному числу Рейнольдса), \vec{v} – поле скоростей электропроводящей среды, заполняющей M . Для дискретной модели быстрого кинематического динамо в упрощенной форме вопрос сводится к существованию консервативного диффеоморфизма $f: M \rightarrow M$ риманова многообразия M такого, что энергия магнитного поля \vec{B} , заданного на M , растет экспоненциально под действием итераций диффеоморфизма f ,

$$\liminf_{\nu \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \int \int \int_M |f_*^n(\vec{B}_0)|^2 dv > 0.$$

При этом предполагается, что магнитная вязкость, входящая в соответствующее уравнение диффузии, достаточно близка к нулю, и мы также должны учитывать процесс рассеивания магнитного поля, которое формально представляется как решение уравнения диффузии. Если сразу положить $\nu = 0$, то говорят о недиссипативном динамо.

¹ Жужома Евгений Викторович, профессор кафедры фундаментальной математики, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, zhuzhomazhul. Большая Печерская, д. 25), доктор физико-математических наук, ORCID:<http://orcid.org/0000-0001-8682-7591>, zhuzhoma@mail.ru

² Медведев Владислав Сергеевич, научный сотрудник лаборатории ТАПРАДЕСС, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), кандидат физико-математических наук, ORCID:<http://orcid.org/0000-0001-6369-0000>, vmedvedev@hse.ru

В 70-ых годах 20-ого века Я.Б. Зельдович и А.Д. Сахаров предложили конструкцию так называемого веревочного динамо, которая в идейном плане легла в основу современных конструкций трехмерных моделей быстрого динамо [1]. Согласно обсуждению этой конструкции в книге [1], гл. V, с точки зрения теории быстрого кинематического недиссипативного динамо конструкция Зельдовича-Сахарова имеет определенный недостаток, состоящий в том, что предложенное отображение не является консервативным в окрестности неблуждающего множества, поскольку нетривиальное неблуждающее множество, в силу построения, является аттрактором. В настоящей статье мы предлагаем модификацию конструкции Сахарова-Зельдовича, лишенную этого недостатка в окрестности неблуждающего множества.

В статье строится дискретная модель быстрого кинематического недиссипативного динамо на произвольной трехмерной линзе $L_{p,q}$ (см. определение ниже). Отметим, что в список линз мы включаем трехмерную сферу. Отметим, что одновременно с моделью быстрого недиссипативного кинематического динамо в статье строится пример диффеоморфизма с соленоидальным базисным множеством седлового типа.

Одним из общепринятых и наглядных определений соленоида является его представление в виде пересечения последовательности вложенных друг в друга полноториев, когда ось последующего полнотория монотонно прокручивается несколько раз вдоль оси предыдущего полнотория [2]. Известно, что с топологической точки зрения соленоид представляет собой неразложимый континуум, который не вкладывается ни в какую двумерную поверхность [3], [4]. Видимо, в теории динамических систем соленоид впервые появился в книге citeNemitskyStepanov-book1947 (гл.4, п.8) для построения потока с минимальным локально-несвязным множеством, состоящим из почти периодических (следовательно, нетривиально рекуррентных) траекторий. В гиперболическую теорию динамических систем соленоиды ввел Смейл [6], который построил диффеоморфизм полнотория в себя с одномерным растягивающимся аттрактором, являющимся соленоидом (основные понятия и факты теории динамических систем см. в [7], [8], [9], [10], [11]). Схематично пример Смейла можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, лежащей внутри полнотория, и сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем полученный (промежуточный) полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось промежуточного полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория и при этом сохранялась дисковая структура. Отметим также, что аналогичные отображения возникают при изучении бифуркаций седло-узловых циклов [9], [12]. В силу [13] (см. также [14], [15]), диффеоморфизм Смейла полнотория в себя может быть продолжен до диффеоморфизма, удовлетворяющего аксиоме А Смейла, некоторого замкнутого 3-многообразия с двумя базисными множествами, являющимися соленоидами, и при этом, одно базисное множество является аттрактором, а второе – репеллером, причем 3-многообразие необходимо представляет собой связную сумму, одним из слагаемых которой является линза. Сформулируем теперь основной результат настоящей статьи.

Т е о р е м а 1.2. *Существует диффеоморфизм $f_0 : L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}$, консервативный в некоторой окрестности своего соленоидального инвариантного множества, который является быстрым недиссипативным кинематическим динамо.*

Центральное место занимает построение хаотического специального диффеоморфизма полнотория. Сперва рассмотрим на декартовой плоскости \mathbb{R}^2 круг $D^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, и отображение $w : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, известное как подкова Смейла [16], [6]. Напомним, что отображение w есть композиция сжатия вдоль оси Ox , растяжения вдоль оси Oy , сгибания (непринципиально, в какую сторону) полученного эллипса и сдвига

вдоль оси Ox так, чтобы пересечение $D^2 \cap w(D^2)$ представляло собой объединение двух непересекающихся полос, симметричных относительно оси Oy . Поскольку отображение w изотопно тождественному, то w можно продолжить до отображения всей плоскости \mathbb{R}^2 так, чтобы это продолжение было тождественным вне некоторой окрестности круга D^2 (см. также [8], [16]). За счет сжатия и растяжения можно добиться того, чтобы якобиан $J(w)$ отображения w на D^2 равнялся $\frac{1}{2}$. Далее мы будем предполагать эти условия выполненными.

Обозначим через $sh_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ сдвиг $(x; y) \rightarrow (x + \frac{1}{2}; y)$ вдоль оси Ox , и через $S_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ – центральную симметрию относительно начала координат $(0; 0)$, $S_0(x; y) = (-x; -y)$. Понятно, что за счет сжатия-растяжения и сгиба можно добиться выполнения следующих условий:

1. пересечение $D^2 \cap sh_0 \circ w(D^2)$ состоит из двух непересекающихся полос;
2. $w(D^2) \cap (S_0 \circ w(D^2)) = \emptyset$.

Первое условие означает, что отображение $sh_0 \circ w = w_0$ образует подкову Смейла. Второе условие означает, что подкова $w(D^2)$ не пересекается со своим образом относительно центральной симметрии S_0 . Отметим, что $S_0 \circ w(D^2)$ также образует конфигурацию подковы.

Обозначим через $R_t : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ вращение

$$\begin{cases} \bar{x} &= x \cos \pi t - y \sin \pi t \\ \bar{y} &= x \sin \pi t + y \cos \pi t \end{cases}$$

плоскости \mathbb{R}^2 на угол πt против часовой стрелки. Положим

$$w_t = R_{2t} \circ w_0 \circ R_{-t} : D^2 \rightarrow \mathbb{R}^2.$$

Это отображение можно интерпретировать как образование подковы в направлении, перпендикулярном прямой $y = \tan \pi t \cdot x$, с последующим поворотом R_t на угол πt против часовой стрелки.

Пусть $S^1 = [0; 1]/(0 \sim 1)$ – окружность, наделенная естественной параметризацией $[0; 1] \rightarrow [0; 1]/(0 \sim 1) = S^1$. Отображение $E_2 : S^1 \rightarrow S^1$ вида $t \rightarrow 2t \bmod 1$ является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два [??]. Рассмотрим в пространстве \mathbb{R}^3 вложенный полноторий $S^1 \times D^2 \subset \mathbb{R}^3$, и отображение $F : S^1 \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ вида

$$(t; (x; y)) \mapsto (E_2(t); w_t(x; y)), \quad t \in S^1, \quad (x; y) \in D^2.$$

Положим $D_t = \{t\} \times D^2 \subset S^1 \times D^2$, $\mathbb{R}_t^2 = \{t\} \times \mathbb{R}^2$. В силу определения отображения F ,

$$F(D_t) \subset \mathbb{R}_{E_2(t)}^2 = \mathbb{R}_{2t \bmod 1}^2.$$

Л е м м а 1.1. *Отображение $F : S^1 \times D^2 \rightarrow F(S^1 \times D^2)$ является консервативным диффеоморфизмом на свой образ.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $F(t_1; z_1) \cap F(t_2; z_2) \neq \emptyset$. Тогда $F(D_{t_1}) \cap F(D_{t_2}) \neq \emptyset$. Из определения F вытекает равенство $E_2(t_2) = E_2(t_1)$, то есть, $2t_1 \bmod 1 = 2t_2$. Так как отображение w_t является диффеоморфизмом на свой образ, то $t_1 \neq t_2$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $t_2 = t_1 + \frac{1}{2}$. Имеем, $F(D_{t_1}) = R_{2t_1} \circ w_0 \circ R_{-t_1}(D_{t_1})$,

$$F(D_{t_2}) = F(D_{t_1 + \frac{1}{2}}) = R_{2t_1+1} \circ w_0 \circ R_{-t_1 - \frac{1}{2}}(D_{t_1}) = R_1 \circ R_{2t_1} \circ w_0 \circ R_{-t_1 - \frac{1}{2}}(D_{t_1}).$$

Поскольку R_1 есть поворот на угол π , то подковы $F(D_{t_1})$ и $S_0 \circ F(D_{t_1})$ должны пересекаться, что противоречит условию 2.

Отметим, что поскольку якобиан $J(w)$ отображениям w на D^2 равен $\frac{1}{2}$, то якобиан отображения F равен $J(F) = J(w) \cdot DE_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Поэтому F является консервативным диффеоморфизмом на свой образ.

Доказательство закончено.

По построению окружность S_0^1 является осью полнотория $S^1 \times B^2$, а тела B и полноторий $S^1 \times B^2$ являются ее трубчатыми окрестностями. Из того, что диффеоморфизм квадрата в подкове Смейла продолжается до некоторого диффеоморфизма достаточно большого круга, вытекает, что F продолжается до некоторого диффеоморфизма (обозначим его снова через F) полнотория $S^1 \times B^2$, который сохраняет дисковую структуру, т.е. $F(D_t) \cap B \subset D_{E_2(t)}$.

Пусть $L_{p,q}$ – произвольная линза. Напомним, что для взаимно простых целых чисел p, q ($p \geq 3, 1 \leq q < p$) линзой $L_{p,q}$ называется трехмерное многообразие, которое получается факторизацией стандартной сферы $S^3 = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid |z|^2 + |w|^2 = 1\}$ по действию, задаваемому формулой

$$(z, w) \rightarrow (z \exp \frac{2\pi i}{p}, w \exp \frac{2\pi i q}{p}).$$

Линза $L_{p,q}$ может быть также получена в результате склеивания двух полноториев вдоль их границ (двумерных торов) с помощью линейного автоморфизма тора вида

$$\begin{cases} \bar{x} = rx + py \\ \bar{y} = sx + qy \end{cases},$$

где целые числа r, s удовлетворяют соотношению $ps - qr = \pm 1$.

В работе [13] было показано, что на каждой линзе $L_{p,q}$ можно построить диффеоморфизм с двумя соленоидальными базисными множествами, один из которых является аттрактором, а второй – репеллером. Построение начиналось на полнотории (так называемый базовый полноторий) с определения диффеоморфизма, сохраняющего дисковую структуру таким, что образ оси полнотория делал p' оборотов вдоль оси полнотория и q'' оборотов вокруг оси полнотория (точные формулы, связывающие p', q' с p, q можно также найти в [14], [15] (см. также [18])). Если на дисках, перпендикулярных оси полнотория задать сжатие, то полученный диффеоморфизм будет иметь соленоидальное базисное множество, являющееся аттрактором. Далее, нужно взять второй полноторий и определить на нем симметричный диффеоморфизм соленоидальным базисным множеством, являющимся репеллером. Теперь два экземпляра полноториев склеиваются вдоль границ (двумерный тор) для получения требуемого диффеоморфизма $L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}$ линзы. Понятным образом можно модифицировать F так, чтобы образ оси полнотория $S^1 \times B^2$ делал p' оборотов вдоль оси полнотория и q'' оборотов вокруг оси этого полнотория $S^1 \times B^2$. Далее, повторяя технику работ [13, 14, 15], можно получить продолжение отображения $F : B \rightarrow F(B) \subset S^1 \times B^2$ до диффеоморфизма $f : L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}$. Ясно, что f консервативный в некоторой окрестности тела B .

Полноторий $S^1 \times D^2$, вложенный в $L_{p,q}$, будем называть *базовым*, и обозначим через \mathcal{B} . Положим

$$\Omega = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f(\mathcal{B}).$$

Множество Ω инвариантно относительно f [8] и не пусто, поскольку содержит в $D_0 = \{0\} \times D^2 \subset \mathcal{B}$ инвариантное нетривиальное (нульмерное) множество Ω_0 подковы Смейла [8], [16], [6]. Обозначим через $\text{Diff}^1(L_{p,q})$ пространство диффеоморфизмов линзы $L_{p,q}$, наделенное C^1 топологией.

Л е м м а 1.2. *Множество Ω гиперболическое, и ограничение $f|_{\Omega}$ диффеоморфизма f на Ω имеет положительную (топологическую) энтропию. Более того, в пространстве $\text{Diff}^1(L_{p,q})$ имеется окрестность $U(f)$ диффеоморфизма f такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ имеет гиперболическое инвариантное множество $\Omega_g \subset \mathcal{B}$, причем диффеоморфизмы $f|_{\Omega}$, $g|_{\Omega_g}$ сопряжены и ограничение $g|_{\Omega_g}$ имеет положительную энтропию.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. По построению якобиан отображения $f|_{\mathcal{B}} : S^1 \times D^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ равен $J(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Поэтому f имеет гиперболическую структуру на \mathcal{B} . Отсюда следует, что множество Ω гиперболическое. Известно, что ограничение $f|_{\Omega_0} : \Omega_0 \rightarrow \Omega_0$ имеет положительную энтропию [8]. Отсюда и [19] вытекает, что ограничение $f|_{\Omega}$ также имеет положительную энтропию. Поскольку гиперболические множества обладают устойчивостью относительно малых C^1 возмущений, то существует окрестность $U(f)$ с требуемыми свойствами, так как энтропия является инвариантом сопряженности.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 1.3. *Существует диффеоморфизм $f_0 : L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}$, совпадающий с $f : L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}$ на полнотории $\mathcal{B} \subset L_{p,q}$ (следовательно, f_0 имеет соленоидальное инвариантное множество $\Omega \subset \mathcal{B}$), которое является быстрым недиссипативным кинематическим динамо.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем блуждающую точку $z_0 \in L_{p,q} \setminus \mathcal{B}$ диффеоморфизма f такую, что $f(z_0) \in L_{p,q} \setminus \mathcal{B}$ и существует путь $p \in L_{p,q} \setminus NW(f)$, соединяющий точки z_0 , $f(z_0)$. Стандартной операцией можно получить диффеоморфизм $f_0 : L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}$, совпадающий с $f : L_{p,q} \rightarrow L_{p,q}$ вне сколь угодно малой окрестности пути p , и такой, что $f_0(z_0) = z_0$. Теперь мы можем рассматривать f_0 как диффеоморфизм пространства \mathbb{R}^3 , тождественный вне некоторой открытой области. Ясно, что f_0 имеет соленоидальное инвариантное множество Ω и ненулевую топологическую энтропию. В силу теоремы 2 [20] (мы применяем эту теорему для $d = 3$ и $q = 2$), f_0 является быстрым недиссипативным кинематическим динамо относительно некоторого бездивергентного магнитного поля.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

В заключение схематично приведем конкретное магнитное поле, относительно которого f является быстрым недиссипативным кинематическим динамо. Рассмотрим на $S^1 \times D^2$ магнитное поле \vec{B} , образованное единичными векторами, которые являются касательными векторами к кривым $S^1 \times \{z\}$, $z \in D^2$. Кривые $S^1 \times \{z\}$ считаются ориентированными в направлении возрастания параметра. Ясно, что \vec{B} можно продолжить на $L_{p,q}$ до единичного (и, следовательно, бездивергентного) векторного поля. Мы предполагаем, что \vec{B} имеет нулевую диффузию (то есть, рассеивание магнитной энергии не происходит). Так как эти кривые $S^1 \times \{z\}$ под действием f растягиваются не менее, чем в два раза, то под действием f поле \vec{B} переходит в поле $f_*(\vec{B})$ со следующим свойством: существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что векторы поля $f_*(\vec{B})$ имеют длину не менее, чем в λ раз большую нежели длина векторов поля \vec{B} . Аналогичное свойство имеет место для длин векторов поля $f_*^{n+1}(\vec{B})$ относительно поля $f_*^n(\vec{B})$. Таким образом, диффеоморфизм $f : S^3 \rightarrow S^3$

является быстрым недиссипативным кинематическим динамо относительно магнитного поля \vec{B} .

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФ (проект 17-11-01-041), также при частичной поддержке РФФИ (проект 15-01-03687а). Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.И. Арнольд, Б.А. Хесин, *Топологические методы в гидродинамике*, МЦНМО, М., 2007.
2. J.M. Aarts, R.J. Fokkink, “The classification of solenoids”, *Proc. of Amer. Math. Soc.*, **111** (1991), 1161–1163.
3. R.H. Bing, “A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc”, *Canadian Journ. Math.*, **12** (1960), 209–230.
4. R.H. Bing, “Embedding circle-line continua in the plane”, *Canadian Journ. Math.*, **14** (1962), 113–128.
5. В.В. Немыцкий, В.В. Степанов, *Качественная теория дифференциальных уравнений*, ОГИЗ, М.-Л., 1947.
6. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 741–817.
7. Д.В. Аносов, “Исходные понятия. Элементарная теория”, *Современные проблемы математики, Фундаментальные направления (Итоги науки и техники)*, **1** (1985), 156–204.
8. Д.В. Аносов, В.В. Солодов, “Гиперболические множества”, *Современные проблемы математики, Фундаментальные направления (Итоги науки и техники)*, **66** (1991), 12–99.
9. Ю.С. Ильяшенко, Ли Вейгу, *Нелокальные Бифуркации*, МЦНМО-ЧеРо, М., 1999.
10. S. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma, *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. Translations of Math. Monographs. 196*, Amer. Math. Soc., N.Y., 1996.
11. C. Robinson, *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math.*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
12. Д. Тураев, Л.П. Шильников, “О катастрофах голубого неба”, *Докл. РАН*, **342**:5 (1995), 596–599.
13. H. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.
14. B. Jiang, Y. Ni, Ch. Wang, “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 4371–4382.

15. Jiming Ma, Bin Yu, “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds”, *Topology and Appl.*, **154** (2007), 3021–3031.
16. S. Smale, “Diffeomorphisms with many periodic points”, *Differential and Combinatorial Topology*, 1965, 63–80.
17. M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175–199.
18. Е.В. Жужома, Н.В. Исаенкова, “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 47–68.
19. R. Bowen, “Topological entropy and Axiom A.”, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc.*, **14** (1970), 23–42.
20. I. Klapper, L.-S. Young, “Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy”, *Comm. Math. Phys.*, **173** (1995), 623–646.

Поступила 25.03.2017

MSC2010 37C70

Nondissipativ kinematic dynamics on lenses

© E. V. Zhuzhoma³, V. S. Medvedev⁴

Abstract. In the paper we construct smooth (infinitely differentiable) diffeomorphism of three dimensional lens (that is a closed three-manifold that is sheet-finitely covered by three-dimensional sphere). We include a three-dimensional sphere in the list of lens. This mapping has a positive entropy and preserves the volume in some neighborhood of its non-wandering set. We examine the space of diffeomorphisms that are conservative in some neighborhood of their non-wandering sets. In this space there is a neighbourhood consisting of mappings with positive topological entropy (i.e., the diffeomorphism constructed is relatively stable in the class of diffeomorphisms). Due to its properties, the diffeomorphism constructed can act like a model of non-dissipative kinematic fast dynamo. The question is open either the diffeomorphism constructed is the model of a middle or dissipative fast dynamo.

Key Words: diffeomorphism of a solid torus, solenoid, nondissipative dynamo.

REFERENCES

1. V.I. Arnold, B.A. Hesin, *Tologicheskie metody v gidrodinamike [Topological Methods in Hydrodynamics]*, MCNMO publ, M., 2007 (In Russ).
2. J.M. Aarts, R.J. Fokkink, “The classification of solenoids”, *Proc. of Amer. Math. Soc.*, **111** (1991), 1161–1163.
3. R.H. Bing, “A simple closed curve is the only homogeneous bounded plane continuum that contains an arc”, *Canadian Journ. Math.*, **12** (1960), 209–230.
4. R.H. Bing, “Embedding circle-line continua in the plane”, *Canadian Journ. Math.*, **14** (1962), 113–128.
5. V.V. Nemitsky, V.V. Stepanov, *Kachestvennaya teoriya differentsialnyh uravneniy [Qualitative theory of differential equations]*, OGIZ, M.-L., 1947 (In Russ).
6. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 741–817.
7. D.V. Anosov, “Ishodnye ponyatiya. Elementarnaya teoriya [Initial concepts. Elementary theory]”, *Sovremennye problemy matematiki, Fundamentalnye napravleniya (Itogi nauki i tekhniki)*, **1** (1985), 156–204 (In Russ).
8. D.V. Anosov, V.V. Solodov, “Giperbolicheskie mnozhestva [Hyperbolic sets]”, *Sovremennye problemy matematiki, Fundamentalnye napravleniya (Itogi nauki i tekhniki)*, **66** (1991), 12–99 (In Russ).
9. Uy.S. Ilyashenko, Li Weigu, *Nelocalnye bifurkatsii [Nonlocal bifurcations]*, MCNMO-CheRo, M., 1999 (In Russ).

³ **Evgeny V. Zhuzhoma**, Professor of the Department of Fundamental Mathematics, Research Institute of Higher School of Economics (603155, Russia, Nizhny Novgorod, zhuzhomazhul. Bolshaya Pecherskaya, 25), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID:<http://orcid.org/0000-0001-8682-7591>, zhuzhoma@mail.ru

⁴ **Vladislav S. Medvedev**, researcher TAPRADESS laboratory, NIU Higher School of Economics (603155, Russia, Nizhny Novgorod, Ul. Bolshaya Pecherskaya, 25), PhD (Physics and Mathematics), ORCID:<http://orcid.org/0000-0001-6369-0000>, vmedvedev@hse.ru

10. S. Aranson, G. Belitsky, E. Zhuzhoma, *Introduction to Qualitative Theory of Dynamical Systems on Closed Surfaces. Translations of Math. Monographs. 196*, Amer. Math. Soc., N.Y., 1996.
11. C. Robinson, *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. Studies in Adv. Math.*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
12. D. Turaev, L.P. Shilnikov, “[About the blue sky catastrophe]”, *Doklady RAN*, **342**:5 (1995), 596–599 (In Russ).
13. H. Bothe, “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.
14. B. Jiang, Y. Ni, Ch. Wang, “3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **356** (2004), 4371–4382.
15. Jiming Ma, Bin Yu, “The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds”, *Topology and Appl.*, **154** (2007), 3021–3031.
16. S. Smale, “Diffeomorphisms with many periodic points”, *Differential and Combinatorial Topology*, 1965, 63–80.
17. M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175–199.
18. E.V. Zhuzhoma, N.V. Isaenkova, “[On zero-dimensional solenoidal basis sets]”, *Matem. sbornik*, **202**:3 (2011), 47–68 (In Russ).
19. R. Bowen, “Topological entropy and Axiom A.”, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math. Amer. Math. Soc.*, **14** (1970), 23–42.
20. I. Klapper, L.-S. Young, “Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy”, *Comm. Math. Phys.*, **173** (1995), 623–646.

Submitted 25.03.2017

УДК 517.9

Примеры странных аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях

© А. Д. Козлов¹

Аннотация. Рассматривается проблема существования у трехмерных неориентируемых диффеоморфизмов дискретных странных гомоклинических аттракторов, т.е. тех, которые содержат ровно одну неподвижную точку. В настоящей статье эта задача решается на примере трехмерных неориентируемых обобщенных отображений Эно, т.е. полиномиальных отображений с постоянным и отрицательным якобианом. Показывается, что у таких отображений могут существовать неориентируемые дискретные гомоклинические аттракторы различных типов. При этом основное внимание в данной работе уделяется описанию качественных и численных методов нахождения таких аттракторов (метод карт седел, метод диаграмм показателей Ляпунова), а также описанию их геометрических структур. Также приводятся примеры различных неориентируемых странных аттракторов, найденных в конкретных трехмерных отображениях с использованием вышеуказанных методов.

Ключевые слова: хаос, странный гомоклинический аттрактор, спиральный аттрактор, трехмерное отображение Эно, карта седел, диаграмма показателей Ляпунова.

1. Введение

В работе [1] были построены феноменологические сценарии возникновения дискретных аттракторов лоренцевского, восьмерочного и спирального типов у трехмерных ориентируемых диффеоморфизмов. В работе [2] для нахождения таких аттракторов были предложены достаточно эффективные поисковые методы. В частности, так называемый *метод карт седел* позволяет находить дискретные гомоклинические аттракторы различных типов, основываясь на определении областей параметров, отвечающих существованию неподвижных точек с заданным набором мультипликаторов. С помощью такого метода в [2] были решены важные вопросы существования гомоклинических аттракторов, содержащих неподвижную точку $O(0, 0, 0)$, в случае трехмерных обобщенных отображений Эно вида

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y, z), \quad (1.1)$$

где

$$g(0, 0) = g_y(0, 0) = g_z(0, 0) = 0,$$

при условии, что якобиан B отображения положителен, т.е. когда отображение (1.1) является ориентируемым.

В настоящей статье мы рассматриваем аналогичную задачу в случае, когда отображение (1.1) неориентируемо, т.е. когда якобиан отображения $B < 0$. Заметим, что аттракторы, возникающие в неориентируемом случае, сильно отличаются от тех, которые

¹ Козлов Александр Дмитриевич, младший научный сотрудник, лаборатория суперкомпьютерных технологий, кафедра ТУиДС, ИИТММ, ФГАОУ ВО "ННГУ им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, 23); младший научный сотрудник, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1830-4769>, kozzzloff@list.ru

наблюдаются в случае $B > 0$, как с точки зрения их качественного описания, так и геометрической структуры. Также следует отметить, что в ориентируемом случае некоторые из гомоклинических аттракторов (например, дискретные аттракторы Лоренца, аттракторы Шильникова или «восьмерочные» аттракторы) могут существовать у систем из приложений (см. [3], [4], [5]), которые описываются четырехмерными потоками. Здесь такие дискретные аттракторы наблюдаются в отображениях Пуанкаре соответствующих трехмерных секущих. Очевидно, что неориентируемые аттракторы трехмерных отображений не могут встречаться в отображениях Пуанкаре четырехмерных потоков. Однако, они могут быть у четырехмерных ориентируемых отображений и, соответственно, у отображения Пуанкаре потоков, размерность которых не меньше 5. Поэтому, с нашей точки зрения, такие неориентируемые аттракторы представляют несомненный интерес для теории многомерного хаоса.

По аналогии с работой [1] в нашей работе [6] были описаны феноменологические сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях и установлено существование некоторых таких аттракторов у трехмерных отображений вида (1.1) с $B < 0$. Настоящая работа продолжает эти исследования, здесь мы делаем акцент на описании методов нахождения странных аттракторов.

Первый такой метод – метод карт седел – описывается в параграфах 2 и 3. Суть его, применительно к отображению (1.1), состоит в том, что для данного фиксированного значения якобиана $B < 0$ на плоскости параметров (A, C) мы рассматриваем области, соответствующие различным наборам мультипликаторов неподвижной точки $O(0, 0, 0)$. Здесь наиболее важными являются два момента:

1. Рассматривается расположение мультипликаторов относительно единичной окружности. Также определяется, являются ли мультипликаторы вещественными или комплексными, тем самым мы определяем тип неподвижной точки $O(0, 0, 0)$ (седло, седло-фокус и т.п.).
2. Следующий момент связан с тем, что из всего многообразия возможных режимов и аттракторов, возникающих в трехмерных отображениях, наибольший интерес вызывают псевдогиперболические аттракторы [7]. При этом одним из необходимых условий псевдогиперболичности является то, что значение седловой величины (произведение устойчивого и неустойчивого мультипликаторов, ближайших к мнимой оси) по модулю должно быть больше 1.

Исходя из представленных выше условий, накладываемых на мультипликаторы, аналитически мы находим кривые относительно параметров A , B , C отображения (1.1), которые являются границами областей соответствующих различным наборам мультипликаторов неподвижной точки $O(0, 0, 0)$. Данные области изображаются в виде рисунка, тем самым давая наглядное представление о возможных режимах и бифуркационных сценариях отображения. Описанный метод очень схож с методом, предложенным в [8], где подобная карта, только в табличном виде, была получена для трехмерного потока.

Как уже было сказано, предпочтение при рассмотрении отдается псевдогиперболическим аттракторам. Псевдогиперболичность подразумевает, что рассматриваемое отображение допускает инвариантное расслоение фазового пространства на трансверсальные друг к другу сильно-сжимающее E^{ss} и центрально-неустойчивые подпространства E^{cu} такие, что любое сжатие в нашем случае E^{ss} экспоненциально сильнее, чем в E^{cu} , а также дифференциал отображения растягивает фазовый объем в E^{cu} . Данные свойства, а также то, что в нашем случае $\dim E^{ss} = 1$, накладывают следующие ограничения на

значения показателей Ляпунова:

$$\Lambda_1 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 > 0, \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 < 0. \quad (1.2)$$

Данные неравенства проверяются численно для каждого рассматриваемого аттрактора. Отсюда вытекает следующий метод, который мы используем для исследования систем, – диаграммы показателей Ляпунова. В них на плоскости параметров (A, C) (при фиксированном значении параметра B) темно-серым цветом указываются области, удовлетворяющие условиям (1.2). При этом также должно выполняться условие того, что данный конкретный аттрактор содержит неподвижную точку $O(0, 0, 0)$ (в нашем случае расстояние от точки до аттрактора должно быть меньше, чем 10^{-4}).

Используя диаграммы показателей Ляпунова, а также аналитически найденные условия для карт седел, можно заранее определить, какому режиму соответствует каждая конкретная точка в области параметров отображения.

В результате исследований, проведенных с использованием вышеописанных методов, удалось обнаружить следующие виды аттракторов в неориентируемых трехмерных отображениях Эно:

- «Тонкий» неориентируемый аттрактор Лоренца.
- Неориентируемый «восьмерочный» аттрактор.
- Двойной неориентируемый «восьмерочный» аттрактор.
- Неориентируемый спиральный аттрактор.
- Неориентируемый аттрактор Шильникова.

Необходимые условия, при которых возможно появление данных аттракторов в трехмерных отображениях Эно, будут описаны ниже.

2. Необходимые условия существования гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно

Как уже было сказано, мы рассматриваем трехмерные отображения Эно, вида (1.1), имеющие постоянный якобиан $B < 0$. Точка $O(0, 0, 0)$ является неподвижной данного отображения. Тогда характеристическое уравнение в точке O примет следующий вид

$$\chi(\lambda) \equiv \lambda^3 - A\lambda^2 - C\lambda - B = 0. \quad (2.1)$$

Нетрудно заметить, что данное характеристическое уравнение имеет корень $\lambda = +1$ при

$$L^+ : A + B + C = 1, \quad (2.2)$$

корень $\lambda = -1$ при

$$L^- : A + B - C = -1, \quad (2.3)$$

и корни $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \varphi < \pi$, при

$$L_\varphi : 1 + B(A - B) + C = 0. \quad (2.4)$$

2.1. Условия существования неориентируемого аттрактора Лоренца

Если в отображении (1.1) при условии, что $-1 < B < 0$, существует дискретный аттрактор Лоренца, то его неподвижная точка имеет мультипликаторы, удовлетворяющие следующим условиям:

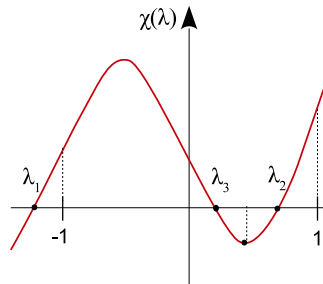
$$\begin{aligned}\lambda_1 &< -1, 0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1, \\ \lambda_1 \lambda_2 &< -1.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Здесь подразумевается, что $\lambda_2 > \lambda_3$, но при этом данное условие не является существенным.

Л е м м а 2.1. Пусть отображение (1.1) при $B < 0$ имеет неподвижную точку с мультипликаторами, удовлетворяющими условиям (2.5). Тогда,

$$\begin{aligned}C - B - A - 1 &> 0, \\ C - 1 + B + A &< 0, \\ \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3}\right)^3 - A\left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3}\right)^2 - C\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3} - B &< 0, \\ A + \sqrt{A^2 + 3C} &> 0.\end{aligned}\tag{2.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. На Рис.2.1 показано расположение корней характеристического уравнения (2.1), удовлетворяющих условиям леммы. Сразу можно заметить, что $\chi(-1) > 0$ и $\chi(1) > 0$. Собственно два этих неравенства и составляют первые два условия леммы.



Р и с у н о к 2.1

Расположение корней характеристического уравнения в случае неориентируемого «тонкого» аттрактора Лоренца

Последние два условия вытекают из того, что значение функции характеристического уравнения в точке, равной значению старшего корня его производной (точка перегиба), должно быть отрицательным. Иными словами, если рассмотреть производную от функции характеристического уравнения

$$\chi'(\lambda) = 3\lambda^2 - 2A\lambda - C = 0,\tag{2.7}$$

то старший корень будет равен

$$\lambda_+ = \frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3}.$$

Кривую $\chi(\lambda_+) = 0$ в дальнейшем будем обозначать S^+ , а кривую, соответствующую $\chi(\lambda_-) = 0$, через S^- . Для нашей задачи получаем, что $\lambda_+ > 0$ и $\chi(\lambda_+) < 0$. Последние два неравенства как раз составляют два последних условия леммы.

2.2. Условия существования неориентируемого «восьмерочного» аттрактора.

В случае существования в отображении (1.1) неориентируемого «восьмерочного» аттрактора, мультипликаторы неподвижной точки $O(0, 0, 0)$ будут удовлетворять следующим условиям:

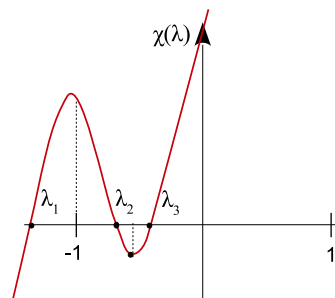
$$\begin{aligned}\lambda_1 &< -1, -1 < \lambda_2, \lambda_3 < 0, \\ \lambda_1 \lambda_2 &< -1.\end{aligned}\tag{2.8}$$

Здесь подразумевается, что $|\lambda_2| > |\lambda_3|$, но опять же данное условие не является существенным.

Л е м м а 2.2. Пусть отображение (1.1) при $B < 0$ имеет неподвижную точку с мультипликаторами, удовлетворяющими условиям (2.8). Тогда,

$$\begin{aligned}C - B - A - 1 &> 0, \\ \left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3}\right)^3 - A\left(\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3}\right)^2 - C\frac{A + \sqrt{A^2 + 3C}}{3} - B &< 0, \\ A + \sqrt{A^2 + 3C} &< 0.\end{aligned}\tag{2.9}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство данной леммы практически аналогично доказательству предыдущей леммы. Необходимо всего лишь из геометрических ограничений Рис.2.2 получить соответствующие условия.

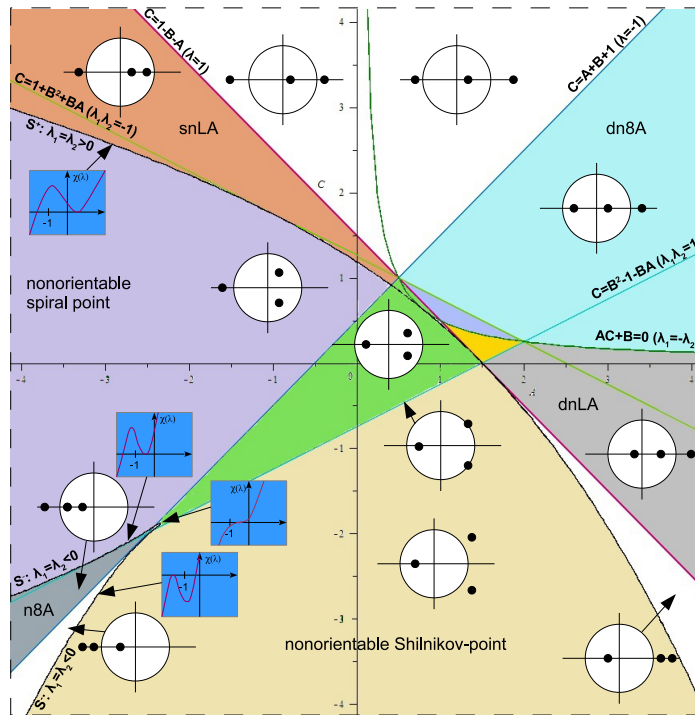


Р и с у н о к 2.2

Расположение корней характеристического уравнения в случае неориентируемого «восьмерочного» аттрактора

3. Общий вид карты седел

На плоскости параметров (A, C) были определены области возможного существования неориентируемого «восьмерочного» аттрактора (n8A) и неориентируемого аттрактора Лоренца (snLA), исходя из условий, накладываемых на мультипликаторы характеристического уравнения (2.1) для отображения (1.1) в неподвижной точке $O(0, 0, 0)$. Однако, на данной плоскости имеются также области и кривые, отвечающие условиям существования других не менее интересных аттракторов, некоторые из которых будут рассмотрены подробнее.



Р и с у н о к 3.1

Карта седел отображения (1.1) при $B = -0.5$

На Рис.3.1 представлена карта седел при фиксированном параметре якобиана $B = -0.5$. На ней можно видеть уже рассмотренные ранее области **snLA** и **n8A** и ограничивающие их кривые равных корней S^+ и S^- , а также кривые L^+ , L^- и L^φ , образующие «треугольник устойчивости», внутри которого значения мультипликаторов не выходят за пределы единичной окружности, таким образом, данная область соответствует асимптотически устойчивой неподвижной точке. Однако, более интересными для рассмотрения представляются области:

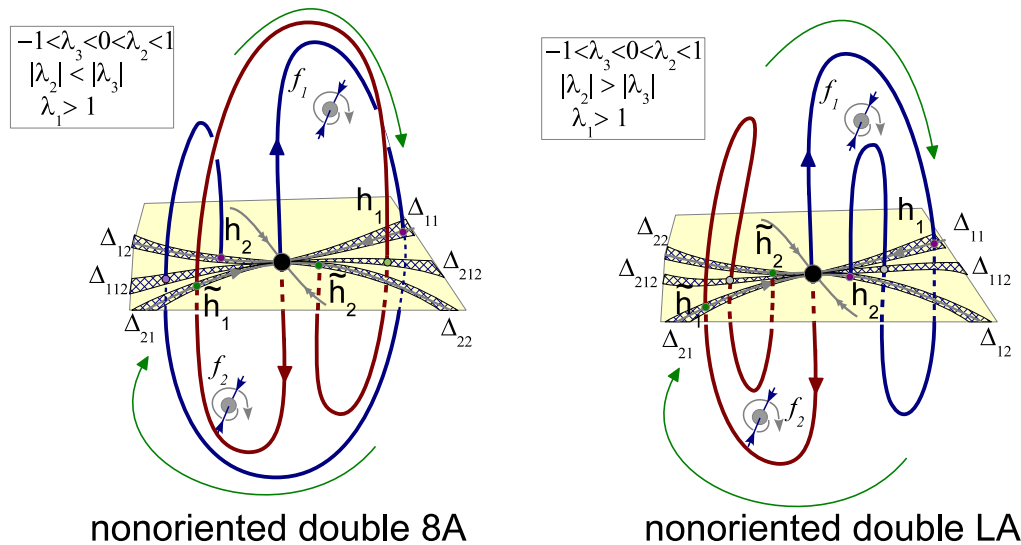
$$\mathbf{dn8A} : \lambda_1 > 1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, |\lambda_2| < |\lambda_3| < 1, |\lambda_1 \lambda_3| < 1, \quad (3.1)$$

$$\mathbf{dnLA} : \lambda_1 > 1, \lambda_2 > 0, \lambda_3 < 0, |\lambda_3| < |\lambda_2| < 1, |\lambda_1 \lambda_2| < 1. \quad (3.2)$$

dnLA представляет собой область существования двойного неориентируемого аттрактора Лоренца, а область **dn8A** – двойного неориентируемого «восьмерочного» аттрактора. Поведение гомоклинических траекторий данных двух типов аттракторов представлено на Рис.3.2.

Также особый интерес представляют спиральные квазиаттракторы, которым соответствуют области:

- $S^+ > 0, L^- > 0$ – область существования неориентируемого спирального аттрактора.
- $S^+ > 0, S^- < 0, L^\varphi < 0$ – область существования неориентируемого аттрактора Шильникова.



Р и с у н о к 3.2

Поведение гомоклиник у двойных неориентируемых аттракторов

Данным аттракторам соответствуют следующие значения мультипликаторов:

$$\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, |\rho| < 1, \varphi \neq \pi, 2\pi, \pi/2, 2\pi/3, \quad (3.3)$$

$$|\lambda_1| < 1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\varphi}, |\rho| > 1, \varphi \neq \pi, 2\pi, \pi/2, 2\pi/3. \quad (3.4)$$

Внешний вид и сценарий происхождения последнего несколько отличается от ориентируемого случая, но об этом немного позднее.

Также на карте седел присутствуют невыделенные нами области, соответствующие различным аттракторам, имеющим двумерное неустойчивое многообразие, рассмотрение которых мы оставили за рамками данной статьи.

4. Примеры гомоклинических аттракторов в трехмерных неориентируемых отображениях Эно

В этом параграфе мы рассмотрим конкретные примеры гомоклинических странных аттракторов, найденных в (1.1), с помощью методов карт седел и диаграмм показателей Ляпунова. Заметим, что диаграммы показателей Ляпунова позволяют определить области существования хаотических режимов, а карты седел помогают ответить на вопрос о том, какому типу аттрактора соответствует данная область. После этого мы можем построить такой аттрактор численно.

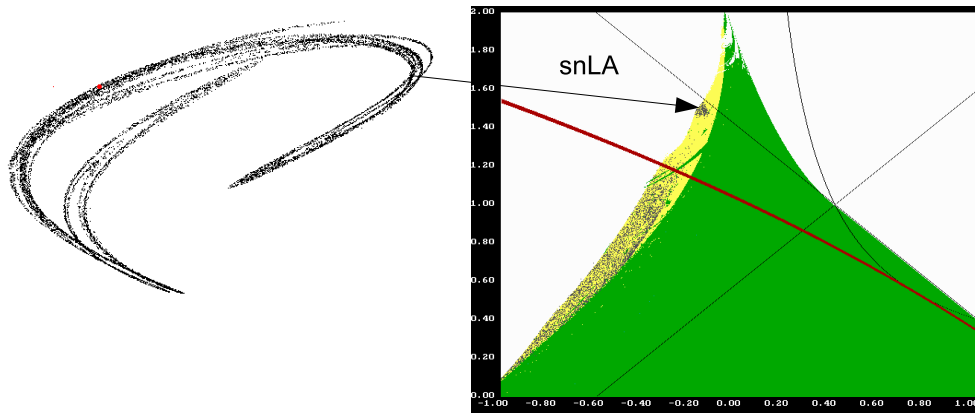
4.1. Неориентируемый дискретный аттрактор Лоренца

Рассматривается отображение Эно вида

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 0.54y^3 + 0.54z^3 + 1.5yz \quad (4.1)$$

при $B = -0.4$. Фрагмент диаграммы показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) , а также наложенной на него картой седел показан на Рис.4.1 справа. Видно, что

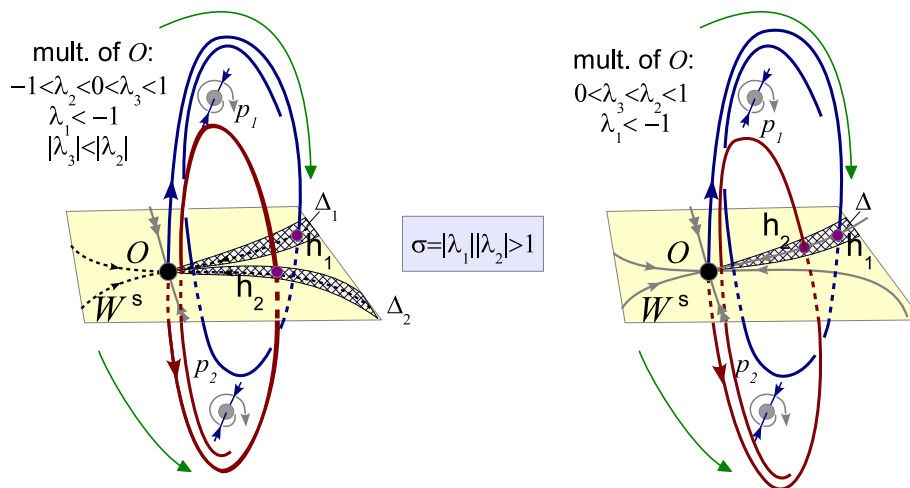
область «темно-серого» цвета, соответствующая странному гомоклиническому аттрактору, для которого выполнены необходимые условия псевдогиперболичности, попала в область **snLA**. При следующих значениях параметров $A = -0.16, C = 1.51$ из этой области мы можем наблюдать такой аттрактор.



Р и с у н о к 4.1

Пример неориентируемого дискретного аттрактора Лоренца. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.4$. Слева – проекция аттрактора на плоскость (x, y) .

На Рис.4.1 слева показан пример неориентируемого аттрактора Лоренца. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для данного отображения равны $\lambda_1 = -1.42, \lambda_2 = 0.97, \lambda_3 = 0.29$, что соответствует условиям (2.5) существования неориентируемого аттрактора Лоренца.



Р и с у н о к 4.2

Поведение гомоклинических траекторий ориентируемого и неориентируемого аттракторов Лоренца

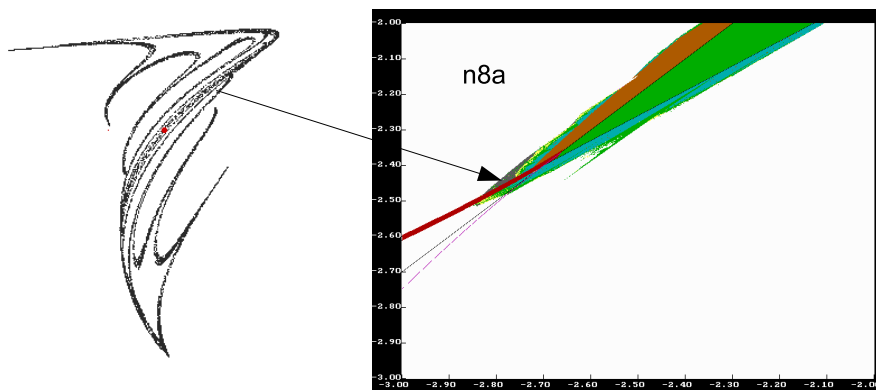
Исходя из внешнего вида аттрактора мы назвали его в [6] неориентируемый «тонкий» аттрактор Лоренца. И, действительно, если обратить внимание на поведение гомоклинических траекторий, показанных на Рис.4.2, можно заметить, что при пересечении устойчивого подпространства они образуют только один гомоклинический «клин». В то время как ориентируемый аттрактор Лоренца образует два таких «клина».

4.2. Неориентируемый дискретный «восьмерочный» аттрактор

Рассматривается отображение Эно вида

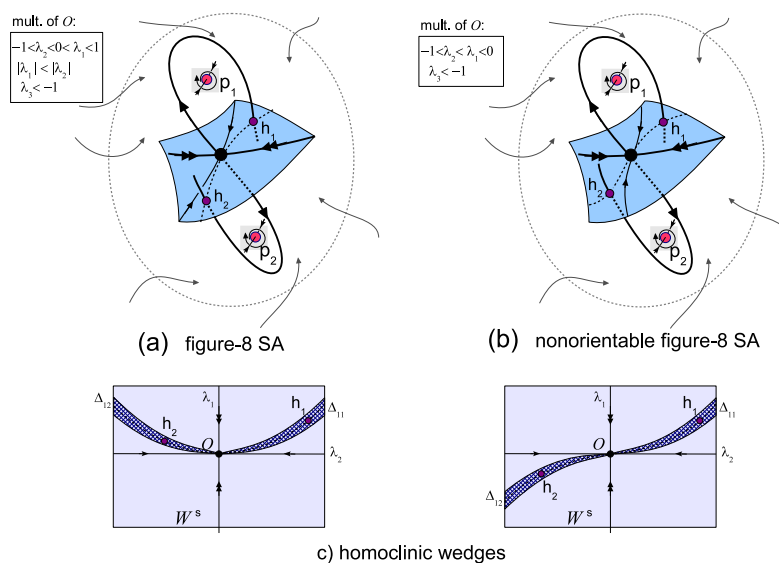
$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy + 1.3y^2 + 0.22z^2 + 12.5yz + 2.7z^3 \quad (4.2)$$

при $B = -0.55$. Фрагмент диаграммы показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) , а также наложенной на него картой седла показан на Рис.4.3 справа. Видно, что область «темно-серого» цвета, соответствующая странному гомоклиническому аттрактору, попала в область **n8A**. При следующих значениях параметров $A = -2.667, C = -2.155$ из этой области мы можем наблюдать такой аттрактор.



Р и с у н о к 4.3

Пример неориентируемого «восьмерочного» аттрактора. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.55$. Слева – проекция аттрактора на плоскость (x, y) .



Р и с у н о к 4.4

Поведение гомоклинических траекторий «восьмерочного» аттрактора в ориентируемом и неориентируемом случаях

На Рис.4.3 слева показан пример неориентируемого «восьмерочного» аттрактора. Значения мультипликаторов в точке $O(0,0,0)$ для данного отображения равны $\lambda_1 = -1.327, \lambda_2 = -0.939, \lambda_3 = 0.401$, что соответствует условиям (2.8) существования данного аттрактора.

Отметим, что формы «восьмерочного» аттрактора в ориентируемом и неориентируемом случае очень похожи. Действительно, если рассмотреть поведение гомоклинических траекторий Рис.4.4, то можно заметить, что принципиальной разницы между ними нет. И в том, и в другом случае гомоклиники седла $O(0,0,0)$ пересекают устойчивое многообразие, образуя два гомоклинических «клина», расположенные по разные стороны от сепаратрисы, соответствующей направлению наибольшего сжатия.

4.3. Двойной неориентируемый восьмерочный аттрактор

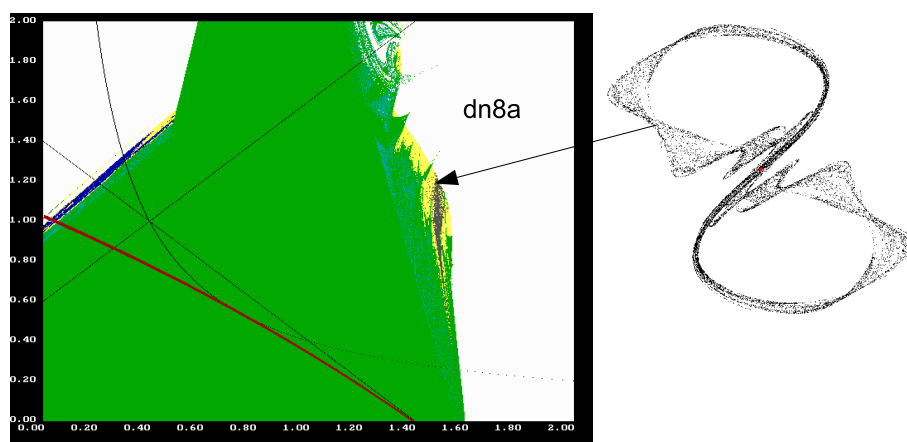
Данный аттрактор присутствует в следующем отображении Эно

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 2y^3 + 1.25z^3 \quad (4.3)$$

при значениях параметров $A = 1.45, C = 1.21, B = -0.4$.

На Рис.4.5 показан пример двойного неориентируемого восьмерочного аттрактора. Значения мультипликаторов в точке $O(0,0,0)$ для данного отображения равны $\lambda_1 = 1.96, \lambda_2 = 0.26, \lambda_3 = -0.7$, что соответствует условиям (3.1).

Как и в случае с ориентируемым отображением Эно, данный аттрактор называется двойным в силу того, что его гомоклиники при пересечении с устойчивым подпространством образуют дополнительные «клинья», как можно видеть на Рис.3.2.



Р и с у н о к 4.5

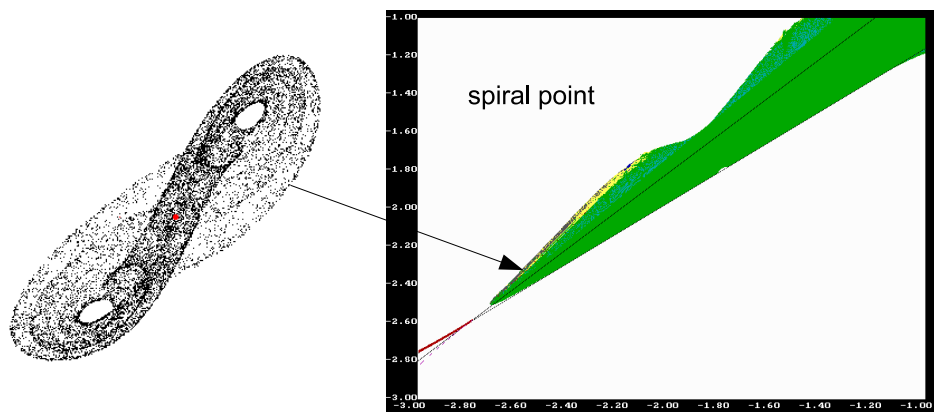
Пример двойного неориентируемого восьмерочного аттрактора. Слева изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.4$. Справа – проекция аттрактора на плоскость (x, y) .

4.4. Спиральные аттракторы

Особый случай составляют спиральные аттракторы, содержащие неподвижную точку типа седло фокус и являющиеся, по сути, квазиаттракторами. Первый из рассматриваемых нами таких аттракторов, – неориентируемый спиральный аттрактор. Он присутствует в следующем отображении Эно:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 1.5z^3 + 0.5y^3 + 1.5zy \quad (4.4)$$

при значениях параметров $A = -2.64, C = 2.37, B = -0.8$



Р и с у н о к 4.6

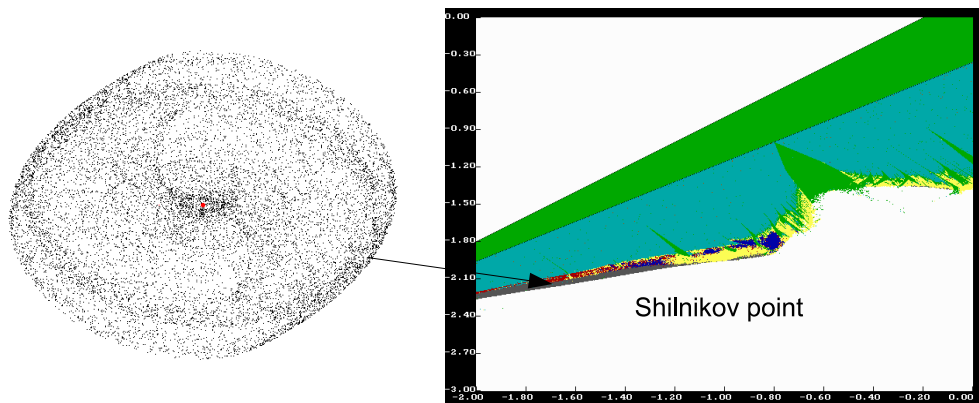
Пример неориентируемого спирального аттрактора. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.8$. Слева – проекция аттрактора на плоскость (x, y) .

На Рис.4.6 показан пример неориентируемого спирального аттрактора. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для приведенного отображения равны $\lambda_1 = -1.26, \lambda_{2,3} = 0.69 \pm 0.4i$, что соответствует условиям (3.3).

Второй из рассматриваемых спиральных аттракторов – неориентируемый аттрактор Шильникова, который был найден в следующем отображении Эно:

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Az + Cy - 1.5z^3 + 2.5y^3 \quad (4.5)$$

при значениях параметров $A = -1.66, C = -2.15, B = -0.8$.



Р и с у н о к 4.7

Пример неориентируемого аттрактора Шильникова. Справа изображена диаграмма показателей Ляпунова на плоскости параметров (A, C) при $B = -0.8$. Слева - проекция аттрактора на плоскость (x, y) .

На Рис.4.7 показан пример неориентируемого аттрактора Шильникова. Значения мультипликаторов в точке $O(0, 0, 0)$ для приведенного отображения равны $\lambda_1 = -0.51, \lambda_{2,3} = -0.57 \pm 1.11i$, что соответствует условиям (3.4).

5. Заключение

В данной статье была рассмотрена проблема существования дискретных странных гомоклинических аттракторов в однопараметрических семействах трехмерных неориентируемых отображений Эно. Было показано, что в таких системах могут существовать дискретные неориентируемые аттракторы лоренцовского, восьмерочного и спирального типов. Также был рассмотрен инструмент «карта седел», позволяющий однозначно определить тип аттрактора в каждой конкретной области параметров отображения, а также инструмент «диаграмма показателей Ляпунова», основным предназначением которого является определение типа динамики системы (1.1) при конкретных параметрах отображения и заданной нелинейности. Сочетание данных двух инструментов позволило обнаружить пять странных неориентируемых аттракторов в конкретных примерах обобщенных отображений Эно, это:

- «Тонкий» неориентируемый аттрактор Лоренца.
- Неориентируемый «восьмерочный» аттрактор.
- Двойной неориентируемый «восьмерочный» аттрактор.
- Неориентируемый спиральный аттрактор.
- Неориентируемый аттрактор Шильникова.

Однако присутствие данных странных аттракторов в динамических системах из приложений еще только предстоит выяснить.

Благодарности. Автор благодарит Гонченко С.В. за полезные весьма полезные замечания. Разделы 2 и 3 выполнены финансовой поддержке гранта РФФИ No. 14-41-00044, а раздел 4 (включая результаты численных экспериментов) выполнен финансовой поддержке гранта РФФИ No. 17-11-01041.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. С. Гонченко, С. В. Гонченко, Л. П. Шильников, «К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений», *Нелинейная Динамика*, **8**:1 (2012), 3–28.
2. A. Gonchenko, S. Gonchenko, “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps”, *to appear in Physica D (or arXiv:1510.02252v2 [math.DS] for this version)*.
3. A. V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin’s top”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **19**:6 (2014), 718–733.
4. A. V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “Spiral chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **21** (2016), 939–954.
5. A. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, A. O. Kazakov, “Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **18**:5 (2013), 521–538.

6. А. С. Гонченко, А. Д. Козлов, “О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях”, *Журнал СВМО*, **18**:4 (2016), 17–29.
7. Д. В. Тураев, Л. П. Шильников, “Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа”, *Докл. РАН.*, **418**:1 (2008), 23–27.
8. Л. П. Шильников, А. Л. Шильников, Д. В. Тураев, Л. Чуа, *Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 2*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, М. – Ижевск, 2009.

Поступила 1.04.2017

MSC2010 34C23, 34D45

Examples of strange attractors in three-dimensional nonoriented maps

© A. D. Kozlov ²

Abstract. We consider the problem of existence of discrete strange homoclinic attractors (i.e. attractors which possess exactly one fixed point) for three-dimensional non-oriented diffeomorphisms. In this article we solve this problem using three-dimensional non-oriented generalized Hénon maps, i.e. polynomial maps with constant and negative Jacobian. We show that such maps can possess non-oriented discrete homoclinic attractors of different types. Herewith the main attention in this work is paid to the description of qualitative and numerical methods which are used to find such attractors (the saddle chart, colored Lyapunov diagram) as well as to the description of attractors' geometric structures. Examples of various non-oriented strange attractors that were found in specific three-dimensional maps by means of above listed methods are also given.

Key Words: chaos, strange homoclinic attractors, spiral attractor, three-dimensional Hénon map, saddle chart, colored Lyapunov diagram.

REFERENCES

1. A. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, L. P. Shilnikov, “Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps”, *Nelineinaya Dinamika [Russian Journal of Nonlinear Dynamics]*, **8**:1 (2012), 3–28.
2. A. Gonchenko, S. Gonchenko, “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps”, *to appear in Physica D (or arXiv:1510.02252v2 [math.DS] for this version.*
3. A. V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **19**:6 (2014), 718–733.

² **Alexander D. Kozlov**, junior researcher, Supercomputer technology laboratory, ITMM, N.I. Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod – National Research University (23 Prospekt Gagarina (Gagarin Avenue) BLDG 2, 2nd floor, 603950 Nizhni Novgorod, Russia); junior researcher, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhni Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-1830-4769>, kozozloff@list.ru

4. A. V. Borisov, A. O. Kazakov, I. R. Sataev, “Spiral chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **21** (2016), 939–954.
5. A. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, A. O. Kazakov, “Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **18**:5 (2013), 521–538.
6. A. S. Gonchenko, A. D. Kozlov, “On scenaria of chaos appearance in three-dimension nonorientable maps”, *J. SVMO*, **18**:4 (2016), 17–29.
7. D. V. Turaev, L. P. Shilnikov, “Pseudo-hyperbolicity and the problem on periodic perturbations of Lorenz-like attractors.”, *Doklady Mathematics*, **418**:1 (2008), 23–27.
8. D. V. Turaev, L. P. Shilnikov, Leon O. Chua, *Methods of qualitative theory in nonlinear dunamics. Part 2*, «Regular and Chaotic Dynamics», Insitute of computer research, Moscow – Izhevsk, 2009.

Submitted 1.04.2017

УДК 517.925.42, 517.925.53, 517.928.7

К проблеме существования интегральных многообразий системы дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных

© М. И. Купцов ¹, М. Т. Терехин ², В. В. Теняев ³

Аннотация. Рассматривается задача нахождения локального ненулевого интегрального многообразия нелинейной $(n + m)$ -мерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных. Предполагается, что у изучаемой системы имеется n -мерное тривиальное интегральное многообразие при всех значениях параметра, а соответствующая линейная подсистема имеет m -параметрическое семейство периодических решений. Это означает, в частности, что линейная система не обладает свойством экспоненциальной дихотомии. Допускается, что матрица линейного приближения системы при нулевом значении параметра является функцией от независимой переменной. Проблема существования интегрального многообразия сводится к проблеме разрешимости операторных уравнений в пространстве ограниченных Липшиц-непрерывных периодических вектор-функций. Для доказательства наличия интегрального многообразия исходная система подвергается линейаризации, к которой применяется метод преобразующей матрицы. Метод преобразующей матрицы удается распространить в том числе и на случай отсутствия линейных по параметру членов операторных уравнений. Получены достаточные условия существования в окрестности состояния равновесия системы n -мерного ненулевого периодического интегрального многообразия.

Ключевые слова: метод преобразующей матрицы, интегральное многообразие, система обыкновенных дифференциальных уравнений, операторное уравнение, уменьшение размерности фазового пространства.

1. Введение

Пусть система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$f(\nu, y, \dot{y}, t) = 0 \quad (1.1)$$

для любых ν, t имеет состояние равновесия $y = 0$ и в области Λ ее решения существуют и единственны. Здесь и далее f, y, ν – $(n + m)$ -векторы, $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, $f(\nu, y, \dot{y}, t + T) \equiv f(\nu, y, \dot{y}, t)$, $\Lambda = \Lambda_1 \times \Lambda_2$, $\Lambda_1 = \{y : \|y\| \leq \Delta_1\} \subset R^{n+m}$, $\Lambda_2 = \{\nu : \|\nu\| \leq \Delta_2\} \subset R^{n+m}$, Δ_1, Δ_2 – константы, R^p – стандартное евклидово пространство размерности p и $\|\cdot\|$ – евклидова норма в R^p .

¹ **Купцов Михаил Иванович**, начальник кафедры математики и информационных технологий управления, ФКОУ ВО "Академия ФСИН России" (390000, Россия, Рязанская область, г. Рязань, ул. Сенная, д. 1.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6814-6423>, kuptsov_mikhail@mail.ru.

² **Терехин Михаил Тихонович**, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, Рязанский государственный университет им. С. А. Есенина (390000, Россия, Рязанская область, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5657-0155>, m.terehin@rsu.edu.ru.

³ **Теняев Виктор Викторович**, заместитель начальника кафедры математики и информационных технологий управления, Академия ФСИН России, ФКОУ ВО "Академия ФСИН России" (390000, Россия, Рязанская область, г. Рязань, ул. Сенная, д. 1.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3359-7152>, tenyaevvv@yandex.ru.

Предположим, что замена переменных

$$y = \Gamma(\varepsilon, x, \phi, t), \quad \nu = \xi(\varepsilon) \quad (1.2)$$

систему (1.1) приводит к виду

$$\begin{cases} \dot{x} = X(\varepsilon, x, \phi, t) \cdot x, \\ \dot{\phi} = \Phi(\varepsilon, x, \phi, t), \end{cases} \quad (1.3)$$

где Γ, ξ, ε — $(n+m)$ -векторы, X — $(n \times n)$ -матрица, x — n -вектор, ϕ, Φ — m -векторы, $\Gamma(\varepsilon, x, \phi, t) \neq 0$ при $x \neq 0$, $\Gamma(\varepsilon, 0, \phi, t) \equiv 0$. Кроме того, будем полагать, что система

$$\begin{cases} \dot{x} = X(0, 0, \phi, t) \cdot x, \\ \dot{\phi} = \Phi(0, 0, \phi, t), \end{cases} \quad (1.4)$$

имеет m -параметрическое семейство ненулевых kT -периодических решений $x = x(\phi_0, t)$, $\phi = \phi(\phi_0, t)$.

Будем говорить, что у системы (1.1) существует n -мерное нетривиальное периодическое интегральное многообразие $\chi(\phi_0, t)$, если для всех ϕ_0 найдется такое значение $\nu_0 = \xi(\varepsilon_0)$ параметра ν , при котором

$$f(\xi(\varepsilon_0), \Gamma(\varepsilon_0, \chi(\phi_0, t), \dot{\Gamma}(\varepsilon_0, \chi(\phi_0, t), \phi^x(\phi_0, t), t), \phi^x(\phi_0, t), t), t) \equiv 0,$$

причем $\chi(\phi_0, t)$ не обращается в ноль ни при каких значениях ϕ_0 и t , является ω -периодическим по компонентам m -вектора ϕ_0 , kT -периодическим по t , где k — натуральное число, $\phi = \phi^x(\phi_0, t)$ определяет интегральную кривую на многообразии. Задача существования нетривиального периодического интегрального многообразия системы (1.1) вблизи ее состояния равновесия и решается в данной работе.

Общий подход к решению поставленной задачи, разработанный Н.Н. Боголюбовым, Ю.А. Митропольским и А.М. Самойленко [1] — [4], состоит в построении функции Грина и успешно применяется для многих систем вида (1.3) (см., например, [5], [6]). Однако в данном случае этот подход реализовать не удастся, поскольку система (1.3) при всех значениях параметра ε имеет нулевое интегральное многообразие $x = 0$, а система (1.4) — m -параметрическое семейство периодических решений. Указанные условия удастся обойти лишь с помощью нахождения решения вспомогательного векторного (бифуркационного) уравнения и перехода в его окрестность [7], [8].

Изложенные в данной работе результаты получены на основе модификации предложенного в [9] метода преобразующей матрицы, применение которого позволили получить новые достаточные условия существования локального интегрального многообразия для систем более общего вида, чем рассматриваемые в работах [10] — [13].

2. Основные обозначения и определения

Пусть $F(\phi, t) \in \Omega_1$, $\varepsilon(\phi) \in \Omega_2$ — ω -периодические по компонентам вектора ϕ ограниченные соответственно числами δ_{10} и δ_{20} вектор-функции, удовлетворяющие условию Липшица:

$$\|F(\phi_1, t_1) - F(\phi_2, t_2)\| \leq \delta_{11} \|\phi_1 - \phi_2\| + \delta_{12} |t_1 - t_2|, \quad (2.1)$$

$$\|\varepsilon(\phi_1) - \varepsilon(\phi_2)\| \leq \delta_{21} \|\phi_1 - \phi_2\|, \quad (2.2)$$

имеющие соответственно размерность n и l , $0 < l \leq n + m$, $F(\phi, t)$ kT -периодическая

$$\text{по } t, \|F(\phi, t)\| = \left[\sum_{i=1}^n \sup_{\substack{\phi_i \in [0, \omega] \\ t \in [0, kT]}} |F_i(\phi, t)| \right]^{1/2}, \quad \|\varepsilon(\phi)\| = \left[\sum_{i=1}^l \sup_{\phi_i \in [0, \omega]} |\varepsilon_i(\phi)| \right]^{1/2}. \text{ Отметим, что если для множеств } \Omega_i \text{ ввести указанную норму, то они становятся выпуклыми компактными [9, с.15].}$$

тим, что если для множеств Ω_i ввести указанную норму, то они становятся выпуклыми компактными [9, с.15].

Для решения дифференциального уравнения

$$\dot{\phi} = \Phi(\varepsilon(\phi_0), F(\phi_0, t), \phi, t), \quad (2.3)$$

удовлетворяющего начальным данным $\phi(0) = \phi_0$, примем обозначение ϕ_t^F . Пусть, кроме того, $Y_\varepsilon^F(\phi_0, t)$ — матрицант уравнения

$$\dot{x} = X(\varepsilon(\phi_0), F(\phi_0, t), \phi_t^F, t) \cdot x. \quad (2.4)$$

Здесь и далее $F(\phi_0, t) \in \Omega_1$, $n + m - l$ значений компонентов вектора ε приняты равными 0, а вместо оставшихся l значений в уравнения системы (1.3) подставлены элементы функции $\varepsilon(\phi_0) \in \Omega_2$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Неособенную функциональную $n \times n$ — матрицу $Q_\varepsilon^F(\phi_0)$ с постоянным определителем, непрерывную по всем своим переменным и ω -периодическую по компонентам вектора ϕ_0 , будем называть преобразующей матрицей системы (1.3), если у матрицы

$$(Y_\varepsilon^F(\phi_0, kT) - I_n) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0) \quad (2.5)$$

существует, по крайней мере, один столбец $q_\varepsilon^F(\phi_0) \neq 0$. Здесь I_n — единичная $n \times n$ — матрица.

Обозначим $X = \{x : \|x\| \leq \delta_1\} \subset R^n$, $E = \{\varepsilon : \|\varepsilon\| \leq \delta_2\} \subset R^{n+m}$.

3. Теорема о существовании интегрального многообразия

Здесь и далее мы предполагаем, что правые части системы (1.3) являются ω -периодическими по компонентам вектора ϕ и T -периодическими по независимой переменной $t \in R$, непрерывны и обеспечивают существование и единственность решений системы (1.3) в области $R^{m+1} \times X \times E$ при достаточно малых δ_1 и δ_2 . Иначе говоря, мы полагаем, что замена переменных (1.2) сохраняет свойства существования и единственности решений системы (1.1).

Введем в рассмотрение систему уравнений

$$\begin{cases} q_\varepsilon^F(\phi_0) = 0, \\ \int_0^{kT} \Phi(\varepsilon(\phi_0), F(\phi_0, t), \phi_t^F, t) dt = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Т е о р е м а 3.1. Пусть преобразующую матрицу системы (1.3) удастся построить так, что существуют такое число l ($0 < l \leq n + m$) и такой столбец $q_\varepsilon^F(\phi_0)$, при которых для нахождения решения системы (3.1) достаточно найти решение некоторой, вообще говоря, отличной от (3.1) системы l уравнений

$$S_\varepsilon^F(\phi_0) = 0, \quad (3.2)$$

имеющей для каждой функции $F(\phi_0, t) \in \Omega_1$ единственное решение $\varepsilon^F(\phi_0) \in \Omega_2$.

Кроме того, пусть при $t \in [0; kT]$ выполнено:

$$\|Y_\varepsilon^F(\phi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0)\| \leq r_0, \quad (3.3)$$

$$\|Y_\varepsilon^F(\phi_0^*, t^*) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0^*) - Y_\varepsilon^F(\phi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0)\| \leq r_1 \|\phi_0^* - \phi_0\| + r_2 |t^* - t|. \quad (3.4)$$

Тогда для любого вектора $\phi_0 \in R^m$ можно указать такое значение параметра ν , что система (1.1) будет иметь ненулевое интегральное многообразие в окрестности состояния равновесия $y = 0$.

4. Доказательство теоремы о существовании интегрального многообразия

1. Поскольку $\varepsilon = \varepsilon^F(\phi_0)$ является решением системы (3.2), то, значит, при $\varepsilon = \varepsilon^F(\phi_0)$ в тождество обращается и выражение (3.1). Следовательно, дифференциальное уравнение (2.4) для каждой функции $F(\phi_0, t) \in \Omega_1$ имеет kT -периодическое решение

$$x^F(\phi_0, t) = Y_\varepsilon^F(\phi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0) \cdot C, \quad (4.1)$$

где все элементы постоянного n -вектора C равны нулю, кроме элемента, соответствующего номеру столбца $q_\varepsilon^F(\phi_0)$, который равен c — произвольной константе. Неособенность преобразующей матрицы обеспечивает нетривиальность $x^F(\phi_0, t)$.

2. Согласно условиям (3.3) и (3.4), $x^F(\phi_0, t)$ удовлетворяет условию Липшица с постоянной $r_1 \cdot c$ по переменной ϕ_0 и $r_2 \cdot c$ по t , ограничено числом $r_0 \cdot c$. Значит, за счет уменьшения c всегда можно добиться выполнения $x^F(\phi_0, t) \in \Omega_1$.

3. Таким образом, мы построили оператор, определяемый равенствами (3.2) и (4.1), к которому, в силу единственности значения $\varepsilon^F(\phi_0)$ для каждой функции $F(\phi_0, t) \in \Omega_1$, можно применить теорему [14, с.26] (или теорему 1.3 [9, с.20]). Следовательно, у этого оператора существует неподвижная точка $\Psi(\phi_0, t) = Y_\varepsilon^\Psi(\phi_0, t) \cdot Q_\varepsilon^\Psi(\phi_0) \cdot C$.

4. Ясно, что при $\varepsilon = \varepsilon^\Psi(\phi_0)$ функции $\Psi(\phi_0, t)$, ϕ_t^Ψ определяют семейство ненулевых kT -периодических решений системы (1.3). Действительно, для того, чтобы убедиться в этом, достаточно принять во внимание обращение в тождество уравнения (3.1) и продифференцировать $\Psi(\phi_0, t)$, учитывая, что функция ϕ_t^Ψ удовлетворяет уравнению (2.3).

5. Для завершения доказательства теоремы остается вернуться к системе (1.1) с помощью замены (1.2). Итак, $\Psi(\phi_0, t)$ — искомое n -мерное нетривиальное периодическое интегральное многообразие системы (1.1), что и требовалось доказать.

5. Один пример системы, удовлетворяющей условиям теоремы о существовании интегрального многообразия

В качестве иллюстрации использования теоремы 3.1. рассмотрим систему специального вида, к которой не может быть применен ни один из достаточных признаков существования интегральных многообразий из работ [1] — [14].

Пример 5.1. Пусть в систему трех дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - [\cos t + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^4 \cdot (1 + \sin^2 t) - \varepsilon_3^4 - y_1^2 \cdot y_3^2] \cdot y_1 = 0, \\ (y_2^2 + y_3^2)u(\varepsilon, y, \dot{y}, t) - 4y_1^2 y_2^2 y_3^2 = 0, \\ y_2 \cdot \dot{y}_3 - y_3 \cdot \dot{y}_2 - [\cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + y_2] \cdot (y_2^2 + y_3^2) = 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

входит только одна векторная величина $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)^T$ и $u(\varepsilon, y, \dot{y}, t) = y_3 \dot{y}_2 + y_2 \dot{y}_3 + (\cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + y_2)(y_3^2 - y_2^2) - 2(\sin t + \alpha_1(\varepsilon))y_2 y_3$,

$$\alpha_i(\varepsilon) = a_{i1} \cdot \varepsilon_1 + a_{i2} \cdot \varepsilon_2 + a_{i3} \cdot \varepsilon_3 + \bar{\alpha}_i(\varepsilon), \bar{\alpha}_i(\varepsilon) = o(\|\varepsilon\|), a_{12} \cdot a_{23} \neq a_{13} \cdot a_{22}.$$

Будем также полагать, что для выражений $\bar{\alpha}_i(\varepsilon)$ выполнены условия Липшица с такими постоянными γ_i , для которых $\gamma_i \rightarrow 0$ при $\delta_{20} \rightarrow 0$ (см. п. 2.). После замены переменных $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 \cdot \cos \phi$, $y_3 = x_2 \cdot \sin \phi$, уравнения (5.1) преобразуются к виду (1.3):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\cos t + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^4 \cdot (1 + \sin^2 t) - \varepsilon_3^4 - x_1^2 \cdot x_2^2 \cdot \sin^2 \phi] \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = [\sin t + \alpha_1(\varepsilon) + x_1^2 \cdot \sin 2\phi] \cdot x_2, \\ \dot{\phi} = \cos 2t + \alpha_2(\varepsilon) + x_2 \cdot \cos \phi. \end{cases}$$

Тогда система (1.4) здесь состоит из трех уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos t \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = \sin t \cdot x_2, \\ \dot{\phi} = \cos 2t \end{cases}$$

и имеет однопараметрическое ($m = 1$) семейство 2π -периодических решений $x_1 = e^{\sin t}$, $x_2 = e^{1 - \cos t}$, $\phi = \phi_0 + 0,5 \cdot \sin 2t$.

Вместо уравнений (2.3) и (2.4) будут соответственно рассматриваться

$$\dot{\phi} = \cos 2t + \alpha_2(\varepsilon(\phi_0)) + F_2(\phi_0, t) \cdot \cos \phi, \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = [\cos t + X_1(\phi_0, t)] \cdot x_1, \\ \dot{x}_2 = [\sin t + X_2(\phi_0, t)] \cdot x_2, \end{cases} \quad (5.3)$$

где

$$X_1(\phi_0, t) = \varepsilon_1^2(\phi_0) - \varepsilon_2^4(\phi_0) \cdot (1 + \sin^2 t) - \varepsilon_3^4(\phi_0) - F_1^2(\phi_0, t) \cdot F_2^2(\phi_0, t) \cdot \sin^2(\phi_t^F),$$

$$X_2(\phi_0, t) = \alpha_1(\varepsilon(\phi_0)) + F_1^2(\phi_0, t) \cdot \sin(2\phi_t^F),$$

причем

$$F(\phi_0, t) = (F_1(\phi_0, t), F_2(\phi_0, t))^T,$$

$\varepsilon(\phi_0) = (\varepsilon_1(\phi_0), \varepsilon_2(\phi_0), \varepsilon_3(\phi_0))^T$ — 2π -периодические по ϕ_0 , а $F(\phi_0, t)$ и по t .

Кроме того, в силу свойств правых частей системы (5.1), решение ϕ_t^F уравнения (5.2) ограничено, удовлетворяет условию Липшица по всем своим переменным при $t \in [0, 2\pi]$ и 2π -периодическое по начальным данным ϕ_0 . Тогда матрицант уравнения (5.3) представляет собой диагональную матрицу

$$Y_\varepsilon^F(\phi_0, t) = \text{diag} \left(\exp \left[\sin t + \int_0^t X_1(\phi_0, \tau) d\tau \right], \exp \left[1 - \cos t + \int_0^t X_2(\phi_0, \tau) d\tau \right] \right)$$

и обладает точно такими же свойствами (см., например, [9, с.29]).

Выбирая теперь преобразующую матрицу $Q_\varepsilon^F(\phi_0) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, для выражения (2.5) получаем

$$(Y_\varepsilon^F(\phi_0, 2\pi) - I_2) \cdot Q_\varepsilon^F(\phi_0) = \begin{pmatrix} \exp \left[\int_0^{2\pi} X_1(\phi_0, \tau) d\tau \right] - 1 & 0 \\ \exp \left[\int_0^{2\pi} X_2(\phi_0, \tau) d\tau \right] - 1 & \exp \left[\int_0^{2\pi} X_2(\phi_0, \tau) d\tau \right] - 1 \end{pmatrix}.$$

Положив тогда в условиях теоремы о существовании интегрального многообразия $l = 3$ и

$$q_\varepsilon^F(\phi_0) = \left(\exp \left[\int_0^{2\pi} X_1(\phi_0, \tau) d\tau \right] - 1, \exp \left[\int_0^{2\pi} X_2(\phi_0, \tau) d\tau \right] - 1 \right),$$

для системы (3.1) получим представление

$$\begin{cases} \exp \left[\int_0^{2\pi} X_1(\phi_0, \tau) d\tau \right] = 1, \\ \exp \left[\int_0^{2\pi} X_2(\phi_0, \tau) d\tau \right] = 1, \\ \alpha_2(\varepsilon(\phi_0)) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_2(\phi_0, \tau) \cdot \cos \phi_\tau^F d\tau = 0. \end{cases}$$

Значит, в качестве системы (3.2) достаточно рассмотреть систему трех уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon_1(\phi_0) \cdot \sqrt{2\pi} = \sqrt{\varepsilon_2^4(\phi_0) \cdot 3\pi + \varepsilon_3^4(\phi_0) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_1^2(\phi_0, \tau) \cdot F_2^2(\phi_0, \tau) \cdot \sin^2(\phi_\tau^F) d\tau}, \\ \alpha_1(\varepsilon(\phi_0)) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_1^2(\phi_0, \tau) \cdot \sin(2\phi_\tau^F) d\tau = 0, \\ \alpha_2(\varepsilon(\phi_0)) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_2(\phi_0, \tau) \cdot \cos \phi_\tau^F d\tau = 0. \end{cases} \quad (5.4)$$

В силу условия $a_{12} \cdot a_{23} \neq a_{13} \cdot a_{22}$ матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$ будет неособенной и систему (5.4) можно записать в виде:

$$\varepsilon(\phi_0) = A^{-1} \cdot y^{F,\varepsilon}(\phi_0), \quad (5.5)$$

где

$$y^{F,\varepsilon}(\phi_0) = (y_1^{F,\varepsilon}(\phi_0), y_2^{F,\varepsilon}(\phi_0), y_3^{F,\varepsilon}(\phi_0))^T,$$

$$y_1^{F,\varepsilon}(\phi_0) = 1/\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{\varepsilon_2^4(\phi_0) \cdot 3\pi + \varepsilon_3^4(\phi_0) \cdot 2\pi + \int_0^{2\pi} F_1^2(\phi_0, \tau) \cdot F_2^2(\phi_0, \tau) \cdot \sin^2(\phi_\tau^F) d\tau},$$

$$y_2^{F,\varepsilon}(\phi_0) = -\bar{\alpha}_1(\varepsilon(\phi_0)) - 1/2\pi \cdot \int_0^{2\pi} F_1^2(\phi_0, \tau) \cdot \sin(2\phi_\tau^F) d\tau,$$

$$y_3^{F,\varepsilon}(\phi_0) = -\bar{\alpha}_2(\varepsilon(\phi_0)) - 1/2\pi \cdot \int_0^{2\pi} F_2(\phi_0, \tau) \cdot \cos \phi_\tau^F d\tau.$$

Путем уменьшения чисел δ_{ij} (см. п. 2.) легко убедиться, что оператор, задающий уравнение (5.5), является сжимающим и для каждой функции $F(\phi_0, t) \in \Omega_1$ переводит пространство Ω_2 в Ω_2 . Этим фактом окончательно устанавливается выполнение всех условий теоремы 3.1. и, значит, существование локального ненулевого интегрального многообразия системы (5.1).

В заключение отметим, что $\alpha_i(\varepsilon)$ можно выбрать таким образом, чтобы система алгебраических уравнений вида

$$\begin{cases} \varepsilon_1^2 - 1, 5 \cdot \varepsilon_2^4 - \varepsilon_3^4 = 0, \\ \alpha_1(\varepsilon) = 0, \\ \alpha_2(\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

не имела нетривиальных решений, а матрица A оставалась неособенной. Действительно, это выполняется, например, при $\alpha_1(\varepsilon) = \varepsilon_2 - \varepsilon_3$, $\alpha_2(\varepsilon) = \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ и, следовательно, ни один из достаточных признаков существования интегральных многообразий не только из работ [1] – [8], но и из [9] – [13] не может быть приложен к системе (5.1).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Н. Боголюбов, *О некоторых статистических методах в математической физике*, АН УССР, Львов, 1945, 139 с.
2. Ю. А. Митропольский, О. Б. Лыкова, *Интегральные многообразия в нелинейной механике*, Наука, М., 1973, 512 с.
3. А. М. Самойленко, *Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы*, Наука, М., 1987, 301 с.
4. А. М. Самойленко, Ю. В. Теплінський, К. В. Пасюк, “Про існування нескінченновимірних інваріантних торів нелінійних злічених систем диференціально-різницевих рівнянь”, *Нелінійні коливання*, **13**:2 (2010), 253–271.
5. С. З. Курбаншоев, М. А. Нусайриев, “Построение оптимальных интегральных многообразий для нелинейных дифференциальных уравнений”, *Доклады Академии наук Республики Таджикистан*, **57**:11-12 (2014), 807–812.
6. Е. В. Щетинина, “Интегральные многообразия быстро-медленных систем и затягивание потери устойчивости”, *Вестник Самарского государственного университета*, **6** (2010), 93–105.
7. Ю. Н. Бибилов, *Многочастотные нелинейные колебания и их бифуркации*, Изд-во ЛГУ, Л., 1991, 142 с.
8. Д. Ю. Волков, “Бифуркация инвариантных торов из состояния равновесия при наличии нулевых характеристических чисел”, *Вестник Ленинградского университета*, **1**:2 (1988), 102–103.
9. М. И. Купцов, *Существование интегральных многообразий и периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений*, дисс. ... канд. физ.-матем. наук, УдГУ. Ижевск, 1997, 133 с.
10. М. И. Купцов, “Локальное интегральное многообразие систем дифференциальных уравнений, зависящих от параметра”, *Дифференциальные уравнения*, **35**:11 (1999), 1579–1580.

11. М. И. Купцов, “Об условиях существования интегрального многообразия системы обыкновенных дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных”, *Труды средневолжского математического общества*, **2**:1 (1999), 95–96.
12. М. И. Купцов, “Существование интегрального многообразия системы дифференциальных уравнений”, *Дифференциальные уравнения*, **34**:6 (1998), 855–855.
13. M. I. Kuptsov, “Local integral manifold of a system of differential equations”, *Differential equations*, **34**:7 (1998), 1005–1007.
14. М. Т. Терехин, *Периодические решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений*, РГПИ, Рязань, 1992, 88 с.

Поступила 2.04.2017

MSC2010 34A34, 34C25, 34C45

To the problem of existence of integral manifolds systems of differential equations not solved with respect to derivatives

© М. И. Купцов ⁴, М. Т. Терехин ⁵, В. В. Теняев ⁶

Abstract. The issue of the article is finding a local non-zero integral manifold of a nonlinear $(n + m)$ -dimensional system of ordinary differential equations that is not solved with respect to derivatives. It is assumed that the examined system has n -dimensional trivial integral manifold for all parameter values and that corresponding linear subsystem has the m -parametric family of periodic solutions. In particular it means that the linear system does not have the property of exponential dichotomy. It is allowed for the linear approximation matrix to be a function of independent variable when the parameter value is zero. The problem of existence of integral manifolds is reduced to the issue of operator equations' solution in the space of bounded Lipschitz-continuous periodic vector functions. Linearization is used to prove the existence of integral manifolds of the original system; the method of transforming matrix is used here. This method may be extended on the case of absence of a linearity in the parameter of the operator equations members. The sufficient conditions of existence of n -dimensional nonzero periodic integral manifold in the neighborhood of the equilibrium state of the system were obtained.

Key Words: the method of transforming matrix, integral manifold, ordinary differential equations' system, operator equation, dimensional reduction of phase space.

REFERENCES

⁴ **Michail I. Kuptsov**, Head of the Department of Mathematics and Information Technology, The Academy of Law Management of the Federal Penal Service of Russia, (1 Sennaya Str., Ryazan 390000, Ryazan Region, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6814-6423>, kuptsov_michail@mail.ru.

⁵ **Michail T. Terekhin** Professor of the Department of mathematics and methods of teaching of mathematical disciplines, Ryazan State University S.A. Esenin (46 Svobody Str., Ryazan 390000, Ryazan Region, Russia), Doctor of Physical and Mathematical Sciences, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5657-0155>, m.terehin@rsu.edu.ru.

⁶ **Victor V. Tenyaev**, Deputy Head of the Department of Mathematics and Information Technology, The Academy of Law Management of the Federal Penal Service of Russia (1 Sennaya Str., Ryazan 390000, Ryazan Region, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3359-7152>, tenyaevvv@yandex.ru.

1. N. N. Bogolyubov, *O nekotorykh statisticheskikh metodakh v matematicheskoi fizike [About some statistical methods in mathematical physics]*, Akad. Nauk Ukr. Sov. Sots. Resp., Lvov, 1945 (In Russ.), 139 p.
2. Yu.A. Mitropol'skii, O.B. Lykova, *Integral'nye mnogoobraziya v nelineinoi mekhanike [Integral manifolds in nonlinear mechanics]*, Nauka, Moscow, 1973 (In Russ.), 512 p.
3. A.M. Samoilenko, *Elementy matematicheskoi teorii mnogochastotnykh kolebaniy. Invariantnye tori [The elements of mathematical theory of multi frequency vibrations. Invariant tori]*, Nauka, Moscow, 1987 (In Russ.), 301 p.
4. A.M. Samoylenko, Yu.V. Teplins'kyy, K.V. Pasiuk, "[On the existence of infinite-dimensional invariant tori of nonlinear countable systems of difference-differential equations]", *Nelineyni kolyvannya*, **13:2** (2010), 253–271 (In Ukrainian).
5. S.Z. Kurbanshoyev, M.A. Nusairiev, "[The construction of optimal integral manifold for the nonlinear differential equations]", *Doklady Akademii Nauk Respubliki Tadzhikistan*, **57:11-12** (2014), 807–812 (In Russ.).
6. E.V. Shchetinina, "[Integral manifolds for slow-fast systems and the stability loss delay]", *Vestnik Samarskogo Gosudarstvennogo Universiteta*, **6** (2010), 93–105 (In Russ.).
7. Yu.N. Bibikov, *Mnogochastotnye nelineinye kolebaniya i ikh bifurkatsii [Multi frequent nonlinear vibrations and their bifurcation]*, Len. Gos. Univ., Leningrad, 1991 (In Russ.), 142 p.
8. D.Yu. Volkov, "[Bifurcation of invariant torus from condition of equilibrium having zero eigenvalue]", *Vestnik Leningradskogo universiteta*, **1:2** (1988), 102–103 (In Russ.).
9. M.I. Kuptsov, *Sushchestvovanie integral'nykh mnogoobraziy i periodicheskikh resheniy sistemy obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy [The existence of integral manifolds and periodic solution of system of ordinary differential equations]*, Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.], Izhevsk, 1997 (In Russ.), 133 p.
10. M.I. Kuptsov, "[Local integral manifold of differential equations' system which depend on the parameter]", *Differ. Uravn.*, **35:11** (1999), 1579–1580 (In Russ.).
11. M.I. Kuptsov, "[About the conditions of existence of integral manifolds of ordinary differential equations not solved relating their derivatives]", *Trudy Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **2:1** (1999), 95–96 (In Russ.).
12. M.I. Kuptsov, "[The existence of integral manifolds of differential equations' system]", *Differ. Uravn.*, **34:6** (1998), 855–855 (In Russ.).
13. M. I. Kuptsov, "[Local integral manifold of a system of differential equations]", *Differential equations*, **34:7** (1998), 1005–1007.
14. M.T. Terekhin, *Periodicheskie resheniya sistem obyknovennykh differentsial'nykh uravnenii [Periodic solutions of systems of ordinary differential equations]*, Ryaz. Gos. Ped. Inst., Ryazan, 1992 (In Russ.), 88 p.

Submitted 2.04.2017

УДК 512.917

Нидинг-конструкции моделей постоянного наклона для обобщенных перекладываний отрезка

© М. И. Малкин¹, К. А. Сафонов²

Аннотация. Для одномерных разрывных кусочно-монотонных отображений с нулевой топологической энтропией применяется техника нидинг-инвариантов и нидинг-рядов. Нидинг-техника была введена Дж. Милнором и В. Терстоном для непрерывных кусочно-монотонных одномерных отображений и применялась ранее для отображений с положительной топологической энтропией. В данной работе показано, что в предельном переходе к нулевой энтропии с помощью нидинг-рядов удается конструктивно задать инвариантную меру для обобщенных перекладываний, а также для класса разрывных отображений без периодических точек. Тем самым, в терминах нидинг-рядов получена конструкция полусопряженности (а в транзитивном случае — сопряженности) с модельным отображением единичного (по модулю) наклона. Указанная конструкция задается формулами, позволяющими с требуемой точностью вычислять параметры модельного отображения.

Ключевые слова: Нидинг-ряды, обобщенные перекладывания, топологическая энтропия.

1. Введение

Данная работа обобщает наши результаты из нашей работы [1], где были рассмотрены нидинг-конструкции инвариантных мер для класса лоренцевских отображений с нулевой энтропией. Настоящая работа посвящена построению кусочно-линейных моделей постоянного (по модулю) наклона для обобщенных перекладываний отрезка, а также для ещё более общего класса — класса разрывных кусочно-монотонных одномерных отображений без периодических точек. Дж. Милнором и В. Терстоном в [2] рассматривалась подобная задача для непрерывных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией, а М.И. Малкиным в [3] — для разрывных отображений лоренцевского типа, удовлетворяющих некоторым условиям типа растяжения. Для рассмотренных в данных работах классах отображений было доказано, что изучаемое отображение f с положительной энтропией ($h_{top}(f) > 0$) полусопряжено кусочно-линейному модельному отображению с наклоном $e^{h_{top}(f)}$ и указаны достаточные условия, когда на самом деле имеет место сопряженность. Отметим, что применение нидинг-техники Милнора и Терстона для построения указанной полусопряженности основано на том, что нидинг-ряды в случае положительной энтропии имеют единичный радиус сходимости, а их наименьший корень лежит строго внутри единичного круга, и это позволяет существенно применить при построении модели свойства аналитических и мероморфных функций.

¹ **Малкин Михаил Иосифович**, доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), кандидат физико-математических наук, ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-1233-0264>, malkin@mm.unn.ru

² **Сафонов Клим Андреевич**, студент, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), ORCID:<http://orcid.org/0000-0001-8623-4294>, safonov.klim@yandex.ru

В данной работе мы рассматриваем кусочно-непрерывные, кусочно-монотонные отображения отрезка без периодических точек. Такие отображения обычно возникают как отображения Пуанкаре для потоков на поверхностях. Подобные отображения можно называть „обобщенными перекладываниями отрезка“: в отличие от (классических) перекладываний отрезка (interval exchange transformations) не предполагается, что на интервалах монотонности наклон изначально равен единице. Эти отображения автоматически имеют нулевую топологическую энтропию, но, в отличие от перекладываний с одной точкой разрыва (полусопряженных с иррациональным поворотом окружности), они могут иметь не единственную инвариантную меру (т.е. не всегда являются строго эргодическими). Такие классы отображений изучались в работе [4]. Авторами с помощью аппарата счетных марковских цепей (бесконечных „башен Хофбауэра“) были получены некоторые условия сопряженности с кусочно-линейной моделью, а также получены оценки количества эргодических мер для таких отображений.

Наша работа обобщает идеи Милнора и Терстона на случай отображений с нулевой топологической энтропией. С помощью нидинг-техники описывается построение мер, полусопрягающих исходное отображение с кусочно-линейным единичного наклона, но, в отличие от [4], в терминах нидинг-рядов нами получен конструктивный вывод формул, обеспечивающих полусопряженность с модельными отображениями.

2. Основные понятия и результаты

Отображение $f : I \rightarrow I$ единичного отрезка в себя будем называть *кусочно-монотонным*, если отрезок I можно разбить на конечное число интервалов $A = \{(c_i, c_{i+1}), i = \overline{0, n}\}$ таких, что f действует непрерывно и строго монотонно на каждом интервале разбиения (c_i, c_{i+1}) .

Среди всех разбиений, удовлетворяющих условию выше, можно выбрать единственное — наименьшее по количеству элементов. В этом случае точки $c_i (i = \overline{1, n-1})$ являются точками разрыва отображения f , а точки c_0 и c_n соответствуют границе отрезка ∂I . Также будем полагать, что отображение f не имеет периодических точек, в том числе периодических точек разрыва, что означает выполнения неравенств

$$f^k(c_i+) \neq c_i, f^k(c_i-) \neq c_i \text{ для } \forall n \in \mathbb{N}.$$

Из этого условия, в частности, следует, что топологическая энтропия $h_{top}(f)$ отображения f равна 0. Отметим ещё одно свойство таких отображений. Для этого напомним понятие гомтервала. Интервал $J \in I$ будем называть *гомтервалом*, если ограничение любой итерации $f^k|_J$ на этот интервал является гомеоморфизмом. В случае отсутствия периодических точек любой гомтервал является блуждающим интервалом, то есть все итерации $J, f(J), f^2(J), \dots$ попарно не пересекаются (см. [5]).

По аналогии с [2], где были определены нидинг-ряды, соответствующие критическим точкам, для каждой точки разрыва $c_i (i = \overline{1, n-1})$ и для произвольного подынтервала $J = (a, b)$ введем формальный степенной ряд

$$L_i(J, t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k^i t^k, \text{ где } l_k^i = \text{card}(J \cap \{f^{-k}(c_i)\}).$$

Также полезно будет рассмотреть еще один ряд, порожденный коэффициентами $l_k = \sum_{i=1}^{n-1} l_k^i$,

$$L(J, t) = \sum_{k=0}^{\infty} l_k t^k.$$

Согласно [6], топологическую энтропию для разрывного кусочно-монотонного отображения f можно определить эквивалентным образом как

$$h_{top}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln l_n}{n}. \quad (2.1)$$

Из формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда имеем

$$r(L(I, t)) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\text{card} D_n}}. \quad (2.2)$$

Таким образом, из равенств (2.1) и (2.2) получаем $r(L(I, t)) = 1$. Поскольку $0 \leq l_k^i(J) \leq l_k(I)$, степенные ряды $L_i(J, t)$ определяют аналитические функции в единичном круге. Отметим, что если ряд $L_i(J, t)$ имеет бесконечное число ненулевых коэффициентов, то его радиус сходимости в точности равен единице, а аналитическая функция $L_i(J, t)$ имеет полюс в точке $t = 1$. В противном случае $L_i(J, t)$ представляет собой полином. Оказывается, функции $L_i(J, t)$ на самом деле являются рациональными: это следует из следующей теоремы, принадлежащей Фату.

Т е о р е м а 2.1. (Фату, [7]) *Степенной ряд $\sum a_i t^i$ с целыми коэффициентами может представлять алгебраическую функцию, отличную от рациональной, лишь в случае, когда его радиус сходимости меньше единицы. Если радиус сходимости равен единице, то функция рациональна, а ее полюсы расположены в корнях целой степени из единицы.*

З а м е ч а н и е 2.1. *В случае обобщенных перекладываний отрезка, то есть взаимно-однозначных, кусочно-монотонных отображений, функции $L_i(I, t)$ имеют вид*

$$L_i(I, t) = 1 + t + t^2 + t^3 + \dots = \frac{1}{1 - t}$$

и имеют в точке $t = 1$ полюс первого порядка. Для любого другого (собственного) интервала $J \in I$ коэффициенты $l_n^i(J)$ принимают значение 0 или 1, поэтому функция $L_i(J, t)$ имеет полюс первого порядка в точке $t = 1$ тогда и только тогда, когда J содержит бесконечно много прообразов точки c_i (таким образом, данная функция не имеет особенностей в этой точке, когда у c_i лишь конечное число прообразов в J).

Введем в рассмотрение функцию, задаваемую выражением $\Lambda_i(J, t) = \frac{L_i(J, t)}{L_i(I, t)}$. В числителе и знаменателе здесь стоят рациональные функции, причём из неравенства $0 \leq l_n^i(J) \leq l_n^i(I)$ следует, что $L_i(I, t)$ имеет полюс более высокого порядка, чем $L_i(J, t)$. Таким образом, $\Lambda_i(J, t)$ представляет собой вещественную аналитическую функцию на интервале $0 < t < 1$ и имеет устранимую особенность в точке $t = 1$. Следовательно, корректно может быть определена функция

$$\Lambda_i(J) = \lim_{t \rightarrow 1} \Lambda_i(J, t) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{L_i(J, t)}{L_i(I, t)}. \quad (2.3)$$

Наша задача — показать, что построенное отображение $\Lambda_i(J)$ задает борелевскую вероятностную меру на I . При этом мы будем рассматривать только те точки c_i , которые имеют бесконечно много прообразов. Неотрицательность функции $\Lambda_i(J)$ следует из неотрицательности коэффициентов l_n^i , а ее аддитивность приводит к следующему предложению.

Предложение 2.1. Пусть a, b, c — точки из I такие, что $a < b < c$. Тогда $\Lambda_i((a, c)) = \Lambda_i((a, b)) + \Lambda_i((b, c))$.

Доказательство. Для всех коэффициентов (возможно, за исключением одного в том случае, когда b является прообразом точки разрыва c_i), имеем соотношение

$$l_n^i(a, c) = l_n^i(a, b) + l_n^i(b, c),$$

Используя данное соотношение, при предельном переходе

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{L_i((a, b), t)}{L_i(I, t)} + \frac{L_i((b, c), t)}{L_i(I, t)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{L_i((a, c), t)}{L_i(I, t)}$$

получим требуемое утверждение.

Доказательство закончено.

Следующее утверждение показывает свойство инвариантности меры $\Lambda(J)$ при некотором дополнительном условии на J .

Предложение 2.2. Если интервал J целиком содержится в одном из интервалов монотонности отображения f , то $\Lambda(f(J)) = \Lambda(J)$.

Доказательство. В этом случае отображение $f|_J$ является гомеоморфизмом на образ, поэтому $l_n(f(J)) = l_{n+1}(J)$ и $L(f(J), t) = tL(J, t)$. Переходя к пределу

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{L_i(f(J), t)}{L_i(I, t)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{L_i(J, t)}{L_i(I, t)}$$

получаем требуемое равенство.

Доказательство закончено.

Если точка c_i имеет бесконечное число прообразов, то определенная нами мера $\Lambda_i(J)$ будет непрерывной в силу отсутствия периодических точек. В частности, каждая точка разрыва обобщенных перекладываний отрезка имеет бесконечное число прообразов. Более того, для обобщенных перекладываний каждая мера $\Lambda_i(J)$ будет инвариантной.

Покажем, что каждая непрерывная мера $\Lambda_i(J)$ полусопрягает f с некоторым линейным кусочно-монотонным отображением постоянного наклона. Далее символом Λ мы будем обозначать любую из функций Λ_i . Рассмотрим функцию $\phi(x) = \Lambda[0, x)$, которая является монотонным отображением отрезка I на себя. Определим кусочно-линейное отображение F следующим образом

$$F(x) = \phi(f(c_i+)) - \phi(c_i) + \varepsilon x, \text{ для } x \in (\phi(c_i), \phi(c_{i+1})),$$

ε принимает значения 1 или -1 в зависимости от того, является ли f возрастающей или убывающей на (c_i, c_{i+1}) . Проверим справедливость равенства $\phi \circ f = F \circ \phi$, при этом необходимо исключить точки y , для которых $\phi(y) = \phi(c_i)$ и точка c_i является блуждающей. Действительно, в случае монотонного возрастания на интервале (c_i, c_{i+1}) имеем

$$\begin{aligned} \phi(f(x)) &= \Lambda[0, f(x)) = \Lambda[0, f(c_i+)) + \Lambda[f(c_i+), f(x)) = \\ &= \Lambda[0, f(c_i+)) + \Lambda[c_i, x) = \Lambda[0, f(c_i+)) - \Lambda[0, c_i) + \Lambda[0, x) = F(\phi(x)). \end{aligned}$$

В случае монотонного убывания тождество проверяется аналогично.

Аналогичные рассуждения можно провести для меры $\Lambda(J)$, включающей прообразы всех точек разрыва. Изучим полусопряжение, построенное с помощью этой меры, в случае обобщенных перекладываний отрезка. Пусть мера некоторого подынтервала $K \in I$

равна $\Lambda(K) = 0$. Тогда, в силу замечания после теоремы 2.1., K представляет собой объединение конечного числа гомтервалов и конечного числа прообразов точек разрыва. Каждый гомтервал является блуждающим интервалом, покажем, что и прообраз точки разрыва, находящийся между двумя гомтервалами, является блуждающей точкой. Пусть (a, b) и (b, c) — гомтервалы и $f^k(b) = c_i$. Предположим, что $d = f^l(c_i)$ лежит в (a, b) и покажем, что между в интервале (d, b) найдется еще один прообраз точки разрыва, что будет противоречить определению гомтервала (a, b) . Если в интервале (d, b) нет точек разрыва, то объединение $T = \bigcup_{i=0}^{\infty} f^{(k+l)i}[d, b]$ представляет собой замкнутый связный интервал, при этом непрерывное отображение $f^{k+l}|_T$ переводит T в себя. Следовательно, в T найдется периодическая орбита, что приводит к противоречию. Поэтому точка b является блуждающей, а значит и весь интервал K — блуждающий. Очевидно, любой блуждающий интервал имеет меру 0. Итак, мы получили, что $\Lambda(K)$ имеет нулевую меру тогда и только тогда, когда K — блуждающий интервал. Таким образом, доказан следующий результат.

Т е о р е м а 2.2. *Если f — обобщенное перекладывание n отрезков, то отображение $\phi(x) = \Lambda[0, x)$, где функция (мера) $\Lambda = \Lambda_i$ определена по формуле (2.3), $i = 1, \dots, n-1$, устанавливает полусопряженность с кусочно-линейным перекладыванием единичного наклона. При этом $\phi(x)$ склеивает не более, чем по две точки в неблуждающем множестве $\Omega(f)$, являющихся граничными точками соответствующих блуждающих интервалов.*

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 15-01-03687-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. И. Малкин, К. А. Сафонов, “Применение нидинг-рядов для полусопряженности отображений Лоренца с нулевой энтропией”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:4 (2016), 34–40.
2. J. Milnor, W. Thurston, “On iterated maps of the interval”, *preprint*, 1977.
3. М. И. Малкин, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: Межвуз. сб. науч. тр. Под ред. Е. А. Леонтович - Андроновой*, Изд. ГГУ, Горький, 1987.
4. J. Buzzi, P. Hubert, “Piecewise monotone maps without periodic points: rigidity, measures and complexity”, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **24** (2004), 383–405.
5. W. de Melo, S. Van Strien, *One dimensional dynamics*, Springer, Berlin, 1993.
6. L. S. Young, “On the prevalence of horseshoes”, *Trans. AMS*, **263** (1981), 75–88.
7. P. Fatou, “Series trigonometriques et series de Taylor”, *Acta math.*, **30** (1906), 335–400.

Поступила 4.03.2017

MSC2010 37E05

Niding designs of models of constant inclination for generalized shifts of a segment

© M. Malkin³, K. Safonov⁴

Abstract. For one-dimensional discontinuous maps with zero topological entropy we apply the technique of kneading invariants and kneading series. The kneading technique was introduced first by J. Milnor and W. Thurston for continuous piecewise monotonic one-dimensional maps and was applied to maps with positive topological entropy. In the present paper we show that by approaching the zero entropy one using kneading series may define invariant measure for generalized interval exchange transformations and also for a class of discontinuous maps without periodic points. Thus, in terms of kneading series we construct a semiconjugacy (being actually a conjugacy in the transitive case) with a model map of unit (in absolute value) slope. The proposed construction is determined by formulas which allow to calculate the parameters of the model map with required accuracy.

Key Words: kneading series, generalized interval exchange transformations, topological entropy.

REFERENCES

1. M. I. Malkin, K. A. Safonov, “The application of niding-series for the semi-conjugation of Lorentz mappings with zero entropy”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:4 (2016), 34–40 (In Russ).
2. J. Milnor, W. Thurston, “On iterated maps of the interval”, *preprint*, 1977.
3. M. I. Malkin, *Metody kachestvennoy teorii differentsialnykh uravneniy [Methods of the qualitative theory of differential equations: Interuniversity. Sat. Sci. Tr. Ed. by E. A. Leontovich – Andronova]*, GGU publ., Gorky, 1987 (In Russ).
4. J. Buzzi, P. Hubert, “Piecewise monotone maps without periodic points: rigity, measures and complexity”, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.*, **24** (2004), 383–405.
5. W. de Melo, S. Van Strien, *One dimensional dynamics*, Springer, Berlin, 1993.
6. L. S. Young, “On the prevalence of horseshoes”, *Trans. AMS*, **263** (1981), 75–88.
7. P. Fatou, “Series trigonometriques et series de Taylor”, *Acta math.*, **30** (1906), 335–400.

Submitted 4.03.2017

³ **Mihail I. Malkin**, Associate Professor of the Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, FGAOU VO "National research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (603950, Russia, GSP-20, Nizhny Novgorod, 23 Gagarin Av., building 6), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-1233-0264>, malkin@mm.unn.ru

⁴ **Klim A. Safonov**, student, Institute of Information Technologies, Mathematics and Mechanics, FGAOU VO "National research Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky (603950, Russia, GSP-20, Nizhny Novgorod, 23 Gagarin Av., building 6), ORCID:<http://orcid.org/0000-0001-8623-4294>, safonov.klim@yandex.ru

УДК 519.17

Существование связного характеристического пространства у градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей

© Е. В. Ноздринова¹

Аннотация. В настоящей работе рассматривается класс G сохраняющих ориентацию градиентно-подобных диффеоморфизмов f , заданных на гладких ориентируемых замкнутых поверхностях M^2 . Устанавливается, что для любого такого диффеоморфизма существует дуальная пара аттрактор-репеллер A_f, R_f , которые имеют топологическую размерность не больше 1, а пространство орбит в их дополнении V_f (характеристическое пространство) гомеоморфно двумерному тору. Непосредственным следствием этого результата является, например, одинаковый период всех седловых сепаратрис диффеоморфизма $f \in G$. На возможности такого представления динамики системы в виде “источник-сток” основан целый ряд классификационных результатов для структурно устойчивых динамических систем с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа орбит — систем Морса-Смейла. Например, для систем в размерности три всегда существует связное характеристическое пространство, ассоциированное с выбором одномерной дуальной пары аттрактор-репеллер. В размерности два это не верно даже в градиентно-подобном случае, однако в настоящей работе показано, что существует одномерная дуальная пара, характеристическое пространство орбит которой является связным.

Ключевые слова: градиентно-подобный диффеоморфизм, аттрактор, репеллер.

1. Введение и формулировка результатов

Классический подход к изучению динамических систем состоит в представлении динамики системы в виде “источник-сток”, то есть в выделении дуальной пары аттрактор-репеллер, которые являются ω – α предельными множествами для всех остальных траекторий системы. На возможности такого представления основана “Фундаментальная теорема динамических систем” Ч. Конли [1], устанавливающая существование функции Ляпунова для произвольной динамической системы. С этой идеей связано понятие фильтрации, на которую опирается доказательство необходимых и достаточных условий Ω -устойчивости системы. Кроме того, выбор различных дуальных пар аттрактор-репеллер является источником нахождения различных топологических инвариантов динамической системы. Существует много примеров, когда разумный выбор дуальной пары приводит к полной топологической классификации динамических систем некоторого класса. На этом пути, в частности, получен целый ряд классификационных результатов для структурно устойчивых динамических систем с неблуждающим множеством, состоящим из конечного числа орбит — систем Морса-Смейла, см., например, [2], [3], [4], [5], [6].

В монографии [7] дополнение к дуальной паре аттрактор-репеллер для диффеоморфизма Морса-Смейла названо *характеристическим пространством* (см. раздел 2.2 монографии [7]). Там же показано, например, что для систем в размерности три всегда существует связное характеристическое пространство, ассоциированное с выбором одномерной

¹ Ноздринова Елена Вячеславовна, лаборант, лаборатория топологических методов в динамике, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5209-377X>, maati@mail.ru

дуальной пары аттрактор-репеллер (см. Теорема 2.6 монографии [7]). В размерности два это не верно даже в градиентно-подобном случае (см. Рисунок 1.), однако, в настоящей работе будет показано, что существует одномерная дуальная пара, характеристическое пространство орбит которой является связным.

Напомним необходимые для формулировки результатов понятия.

1.1. Топологические понятия

Напомним, что топологическое пространство X называется *двумерным многообразием*, если его точка имеет открытую окрестность, гомеоморфную открытому двумерному диску $\text{int } \mathbb{D}^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$.

Заметим, что $\text{int } \mathbb{D}^2$ гомеоморфно \mathbb{R}^2 , так что с равным успехом можно потребовать, чтобы каждая точка имела окрестность гомеоморфную \mathbb{R}^2 .

Двумерным многообразием с краем называется топологическое пространство X , каждая точка которого имеет открытую окрестность, гомеоморфную либо \mathbb{R}^2 , либо его подмножеству $\mathbb{R}_+^2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1, x_2 \geq 0\}$. Множество всех точек X , имеющих окрестности, гомеоморфные \mathbb{R}_+^2 , но не имеющих окрестностей, гомеоморфных \mathbb{R}^2 , называется *краем многообразия* X .

Компактное многообразие без края называется *замкнутым многообразием*.

Из определения двумерного многообразия X следует, что у X есть открытое покрытие $\mathcal{U} = \{U_j, j \in J\}$ такое, что при каждом $j \in J$ существует отображение $\psi_j : U_j \rightarrow \mathbb{R}^2$, гомеоморфно отображающее U_j на открытое подмножество пространства \mathbb{R}^2 . При этом мы называем (U_j, ψ_j) *картой или локальной системой координат* с областью определения U_j , координаты x_1, x_2 называются *локальными координатами* в точке x_0 , множество $\Phi = \{(U_j, \psi_j), j \in J\}$ всех карт представляет собой *атлас*.

Пусть $f : X \rightarrow Y$ — произвольное отображение двумерных многообразий X . Если $p \in U$ и $f(U) \subset V$ для карты (U, ψ) многообразия X и карты (V, φ) многообразия Y , то определено отображение $f_p = \varphi f \psi^{-1} : \psi(U) \rightarrow \varphi(V)$, которое называется *локальным представлением f в точке p* . Гладкость отображения f в точке p определяется гладкостью его локального представления в этой точке. Именно, локальное представление f_p отображения f в точке p можно представить как упорядоченный набор двух функций от двух переменных

$$f_p(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)).$$

Отображение f называется *гладким или дифференцируемым класса C^r* , $r \geq 1$ в точке p , если каждая функция f_k , $k = 1, 2$ имеет все непрерывные частные производные на $\psi(U)$ до порядка r включительно. В этом случае пишут $f \in C^r$. Если функции f_1, f_2 имеют непрерывные частные производные любого порядка на $\psi(U)$, то f называется *бесконечно гладким отображением* в точке p ($f \in C^\infty$).

Для гладкого в точке p отображения f матрица

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

первых производных отображения f_p , вычисленных в точке $\psi(p)$ называется *матрицей Якоби* отображения f в точке p и обозначается $(\frac{\partial f}{\partial x})|_p$.

Гладкое многообразие X называется *ориентируемым*, если оно обладает атласом, в котором переходы от одних координат к другим имеют положительные якобианы. В противном случае многообразие называется *неориентируемым*.

Говорят, что подмножество A топологического пространства X имеет *нулевую топологическую размерность*, если для любой точки $x \in A$ и любой ее открытой окрестности U_x существует открытая окрестность V_x такая, что $x \in V_x \subset U_x$ и $Fr V_x \cap A = \emptyset$. Тогда, по индукции, множество $A \subset X$ имеет *топологическую размерность* $n \geq 1$, если для любой точки $x \in A$ и любой ее открытой окрестности U_x существует открытая окрестность V_x такая, что $x \in V_x \subset U_x$ и множество $Fr V_x \cap A$ имеет топологическую размерность $n - 1$.

1.2. Динамические понятия

Пусть M^2 — гладкое замкнутое ориентируемое многообразие и $f : M^2 \rightarrow M^2$ — сохраняющий ориентацию диффеоморфизм.

Для диффеоморфизма f точка $x \in X$ называется *блуждающей*, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $f(U_x) \cap U_x = \emptyset$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*. Непосредственно из определения следует, что каждая точка окрестности U_x является блуждающей и, следовательно, множество блуждающих точек открыто, а множество неблуждающих точек — замкнуто.

Множество всех неблуждающих точек диффеоморфизма f называется *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_f .

Простейшими примерами гиперболических множеств являются прежде всего гиперболические неподвижные точки диффеоморфизма, которые можно классифицировать следующим образом. Пусть $f : X \rightarrow X$ — диффеоморфизм и $f(p) = p$. Точка p является *гиперболической* тогда и только тогда, когда среди собственных чисел матрицы Якоби $(\frac{\partial f}{\partial x})|_p$ нет чисел, по модулю равных 1. Если при этом все собственные числа матрицы Якоби по модулю меньше 1, то p называется *притягивающей, стоковой точкой или стоком*; если все собственные числа по модулю больше 1, то p называется *отталкивающей, источниковой точкой или источником*. Притягивающая или отталкивающая точка называется *узловой*. Гиперболическая неподвижная точка не являющаяся *узловой*, называется *седловой точкой или седлом*.

Если точка p — периодическая точка f с периодом $per(p)$, то, применяя предыдущую конструкцию к диффеоморфизму $f^{per(p)}$, получаем классификацию гиперболических периодических точек, аналогичную классификации неподвижных гиперболических точек.

Гиперболическая структура периодической точки p приводит к существованию у нее *устойчивого* W_p^s и *неустойчивого* W_p^u многообразий, которые определяются следующим образом: $W_p^s = \{x \in M : d(f^{kper(p)}(x), p) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty\}$, $W_p^u = \{x \in M : d(f^{-kper(p)}(x), p) \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow +\infty\}$.

Для гиперболической неподвижной или периодической точки p устойчивое или неустойчивое многообразие называется *инвариантным многообразием* этой точки, компонента связности множества $W_p^u \setminus p$ ($W_p^s \setminus p$) называется *неустойчивой* (*устойчивой*) *сепаратрисой*.

Замкнутое f -инвариантное множество $A \subset M^2$ называется *аттрактором* дискретной динамической системы f , если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$ и $A = \bigcap_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется *захватывающей* или *изолирующей*. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1} . Аттрактор и репеллер называются *дуальными*, если дополнением до захватывающей окрестности аттрактора является захватывающая окрестность репеллера.

1.3. Формулировка результатов

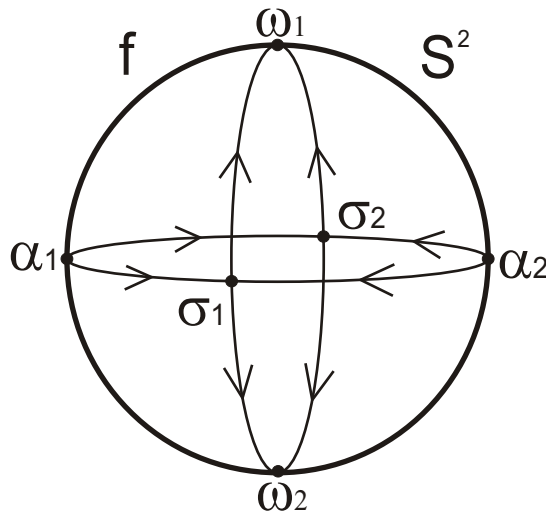
Диффеоморфизм $f : M^2 \rightarrow M^2$ называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество Ω_f состоит из конечного числа гиперболических периодических точек и инвариантные многообразия различных седловых точек не пересекаются. Обозначим через G класс таких диффеоморфизмов.

Пусть $f \in G$ и A_f, R_f — дуальная пара аттрактор-репеллер. Положим $V_f = M^2 \setminus (A_f \cup R_f)$ и обозначим через \hat{V}_f пространство орбит действия диффеоморфизма f на множестве V_f . Множество V_f называется *характеристическим пространством* и множество \hat{V}_f называется *характеристическим пространством орбит*.

Т е о р е м а 1.1. Для любого диффеоморфизма $f \in G$ существует дуальная пара аттрактор-репеллер A_f, R_f такие, что их топологическая размерность не больше 1 и характеристическое пространство орбит \hat{V}_f гомеоморфно двумерному тору.

С л е д с т в и е 1.1. Все седловые сепаратрисы диффеоморфизма $f \in G$ имеют одинаковый период.

З а м е ч а н и е 1.1. Из связности характеристического пространства орбит \hat{V}_f не следует в общем случае связность дуальных аттрактора и репеллера (см. пример на Рисунке 1.). Однако, если связным является само характеристическое пространство V_f , то A_f и R_f также связны, что следует, например, из Теоремы 2.6 монографии [7].



Р и с у н о к 1.1

На данном рисунке изображен фазовый портрет градиентно-подобного диффеоморфизма, заданного на двумерной сфере. В предположении, что σ_1, σ_2 и α_1, α_2 — периодические орбиты периода 2, получаем, что единственным связным характеристическим пространством орбит является пространство \hat{V}_f , соответствующее дуальной паре аттрактор-репеллер $A_f - R_f$ такой, что $A_f = \omega_1 \cup \omega_2 \cup W_{\sigma_1}^u \cup W_{\sigma_2}^u$, $R_f = \alpha_1 \cup \alpha_2$. При этом само характеристическое пространство V_f связным не является, также, как и репеллер R_f .

2. Доказательства основных результатов

Доказательство Теоремы 1.1.

Пусть $f \in G$. Если неблуждающее множество Ω_f не содержит седловых точек, то оно состоит в точности из одного источника и одного стока, а характеристическое пространство орбит является двумерным тором (см., например, Теорему 2.5 в монографии [7]). Таким образом, в этом случае теорема верна.

Везде далее мы предполагаем, что неблуждающее множество f содержит хотя бы одну седловую точку. Кроме того, не уменьшая общности, в рамках решаемой задачи, можно считать, что все неблуждающие точки диффеоморфизма f являются неподвижными (в противном случае можно перейти к подходящей степени диффеоморфизма f).

Перенумеруем седловые точки диффеоморфизма $f: \sigma_1, \dots, \sigma_{k_f}$. Обозначим через A_0 множество всех стоковых точек, через R_{k_f+1} множество всех источников. Заметим, что $A_0 \neq \emptyset, R_{k_f+1} \neq \emptyset$. Для $i = 1, \dots, k_f$ положим $W_i^s = W_{\sigma_i}^s, W_i^u = W_{\sigma_i}^u$. Если A_0 состоит из одной точки, то положим $R_0 = R_{k_f+1} \cup \bigcup_{j=1}^{k_f} W_j^s$ и $V_0 = M^2 \setminus (A_0 \cup R_0)$. В силу Теоремы 2.6 из работы [7], $A_0 - R_0$ — дуальная пара аттрактор-репеллер и они оба являются связными, характеристическое пространство орбит является двумерным тором, следовательно, теорема верна.

Если A_0 состоит более, чем из одной точки, то для $i = 1, \dots, k_f - 1$ положим

$$A_i = A_0 \cup \bigcup_{j=1}^i W_j^u, \quad R_i = R_{k_f+1} \cup \bigcup_{j=i+1}^{k_f} W_j^s, \quad V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i).$$

Согласно Теореме 1 работы [8], $A_i - R_i$ является дуальной парой аттрактор-репеллер и каждая компонента связности характеристического пространства орбит гомеоморфна двумерному тору.

Рассмотрим случай, когда множество A_0 состоит более, чем из одной точки. Обозначим через n число точек в множестве A_0 и перенумеруем эти точки: $\omega_1, \dots, \omega_n$. Положим $R_0 = R_{k_f+1} \cup \bigcup_{j=1}^{k_f} W_j^s$ и $V_0 = M^2 \setminus (A_0 \cup R_0)$. Тогда характеристическое пространство орбит \hat{V}_0 состоит из n двумерных торов T_1, \dots, T_n , являющихся пространствами орбит бассейнов соответствующих стоков. Поскольку несущая поверхность M^2 является связной, а характеристическое пространство V_0 содержит все неустойчивые сепаратрисы всех седловых точек, то найдется последовательность седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ таких, что неустойчивые сепаратрисы седловой точки σ_j принадлежат бассейнам стоков ω_j, ω_{j+1} . Тогда мы получим соответствующую последовательность характеристических пространств орбит: $\hat{V}_0, \dots, \hat{V}_{n-1}$. Согласно Теореме 1 работы [8], пространство орбит \hat{V}_j состоит из $n - j$ компонент связности, каждая из которых является двумерным тором. Таким образом, пространство \hat{V}_{n-1} связно, что и требовалось доказать.

Доказательство Следствия 1.1.

Пусть $A_f - R_f$ — дуальная пара аттрактор-репеллер, соответствующая связному характеристическому пространству \hat{V}_f . Тогда для любой седловой точки σ диффеоморфизма f либо устойчивые, либо неустойчивые сепаратрисы этой точки принадлежат характеристическому пространству V_f . Более того, их проекцией в характеристическом пространстве орбит являются одна или две гомотопически нетривиальных окружности, в зависимости от типа ориентации седловой точки σ . Кроме того, период седловой точки σ однозначно определяется гомотопическим классом этих окружностей. Поскольку диффеоморфизм f

является градиентно-подобным, то сепаратрисы седловых точек попарно не пересекаются и, следовательно, в пространстве \hat{V}_f им соответствуют непересекающиеся окружности. Согласно [9], все такие окружности лежат в одном гомотопическом классе, откуда следует равенство периодов всех седловых сепаратрис.

Благодарности. Автор благодарит О.В. Починку за внимательное прочтение рукописи. Работа выполнена в рамках проекта 90 в 2017 году ЦФИ НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. C. Conley, “Isolated Invariant Sets and Morse Index”, *CBMS Regional Conference Series in Math. vol. 38*, 1978, 89.
2. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, 2004, 369-391.
3. Ch. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka., “Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds”, *World Scientific. Singapore.*, 2006, 121-147.
4. В.З. Гринес, “Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях”, *Математические заметки*, **54(3)** (1993), 3-17.
5. В.З. Гринес., Е.Я. Гуревич., В.С. Медведев, “О классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис”, *Труды МИАН*, **270 (1)** (2010), 20-35.
6. V. Z. Grines., E. Y. Gurevich., O. V. Pochinka., “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection”, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, 81-91.
7. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds.*, Springer International Publishing Switzerland., 2016, 364 p.
8. Т. М. Митрякова, О.В. Починка, А.Е. Шищенко., “О структуре пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством”, *СВМО*, **1** (2011), 63-70.
9. D. Rolfsen, “Knots and links.”, *University of British Columbia, Math. Lecture*, **7** (1990).

Поступила 10.03.2017

MSC2010 05C15

The existence connected characteristic space at the gradient-like diffeomorphisms of surfaces

© E. V. Nozdrinova²

² Elena V. Nozdrinova, laboratory assistant, Laboratory of topological methods in dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5209-377X>, maati@mail.ru

Abstract. In this paper we consider the class G of orientation-preserving gradient-like diffeomorphisms f defined on a smooth oriented closed surfaces M^2 . Author establishes that for every such diffeomorphism there is a dual pair attractor-repeller A_f, R_f that have topological dimension not greater than 1 and the orbit space in their supplement V_f is homeomorphic to the two-dimensional torus. The immediate consequence of this result is the same period of saddle separatrices of all diffeomorphisms $f \in G$. A lot of classification results for structurally stable dynamical systems with a non-wandering set consisting of a finite number of orbits (Morse-Smale systems) is based on the possibility of such representation for the system dynamics in the “source-sink” form. For example, for systems in dimension three there always exists a connected characteristic space associated with the choice of a one-dimensional dual attractor-repeller pair. In dimension two this is not true even in the gradient-like case. However, in this paper it is shown that there exists a one-dimensional dual pair with connected characteristic orbit space.

Key Words: gradient-like diffeomorphism, attractor, repeller.

REFERENCES

1. C. Conley, “Isolated Invariant Sets and Morse Index”, *CBMS Regional Conference Series in Math. vol. 38*, 1978, 89.
2. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, E. Pecou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, 2004, 369-391.
3. Ch. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka., “Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds”, *World Scientific. Singapore.*, 2006, 121-147.
4. V.Z. Grines, “Topological classification of diffeomorphisms of Morse-Smale with a finite set of heteroclinic trajectories on surfaces”, *Mathematical Notes*, **54(3)** (1993), 3-17.
5. V.Z. Grines., E.Y. Gurevich., V.S. Medvedev, “Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with one-dimensional set of unstable separatrices”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics.*, **270 (1)** (2010), 20-35.
6. V.Z. Grines., E.Y. Gurevich., O.V. Pochinka., “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection”, *Journal of Mathematical Sciences*, 2015, 81-91.
7. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds.*, Springer International Publishing Switzerland., 2016, 364 p.
8. T. M. Mitryakova, O.V. Pochinka, A.E. Shishenkova, “Energy function for diffeomorphisms on surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set”, *SVMO*, **1** (2011), 63-70
9. D. Rolfsen, “Knots and links.”, *University of British Columbia, Math. Lecture*, **7** (1990).

Submitted 10.03.2017

УДК 519.17

Теоремы существования и достаточности, связанные с локальными преобразованиями графов для задачи о k -раскраске

© Д. В. Сироткин¹

Аннотация. В данной работе вводится некоторый класс замен подграфов в графах, причем замены из этого класса сохраняют k -раскрашиваемость. Каждое такое локальное преобразование графов определяется некоторым шаблоном – набором разбиений множества на его подмножества. Показывается, что заменяющий подграф существует для любого шаблона, а также приводится оценка на количество его вершин в зависимости от размера шаблона. Данный результат является основным в работе, для его получения были использованы методы теории графов и комбинаторного анализа. Рассматриваемый в работе класс преобразований может быть полезен при построении полиномиальных сведений для задачи о k -раскраске. В частности, вместе с основным результатом работы, он может быть использован при редукции данных для решения задачи о k -раскраске.

Ключевые слова: задача о k -раскраске, локальное преобразование, задача реализации, функция Шеннона.

1. Введение

В настоящей работе рассматриваются только *обыкновенные графы*, т.е. непомеченные неориентированные графы без петель и кратных ребер. Для подмножества $V' \subseteq V(G)$ через $G[V']$ обозначается подграф графа G , порожденный V' , а через $G \setminus V'$ результат удаления всех элементов V' из графа G . Для натуральных чисел a и b через $\overline{a, b}$ обозначается множество $\{a, a+1, \dots, b\}$. Полный граф с n вершинами обозначается через K_n .

Классические понятия независимого множества, наибольшего независимого множества, числа независимости $\alpha(G)$ графа G представлены, например, в [1]. Там же определяется задача о независимом множестве.

В [2] рассматривался достаточно общий класс локальных преобразований графов, названных *схемами замен*, при которых число независимости в точности сохраняется, но отмечается, что принципиальных изменений не произойдет, если допустить изменение числа независимости на некоторую константу. В данной работе рассматривается некоторый подкласс класса схем замен, который будет определен далее.

Пусть G — некоторый граф, а H — некоторый его порожденный подграф. Подмножество $A \subseteq V(H)$ назовем *H -отделяющим*, если ни одна из вершин графа $H \setminus A$ не смежна ни с одной из вершин графа $G \setminus V(H)$. Пусть граф G содержит порожденный подграф G_1 с G_1 -отделяющим множеством A , G_2 — граф, для которого $A \subseteq V(G_2)$.

¹ **Сироткин Дмитрий Валерьевич**, лаборант, лаборатория теории и практики систем поддержки принятия решений, ФГАОУ ВО "НИУ ВШЭ" (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12); лаборант, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики ФГАОУ ВО "ННГУ им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23); ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2682-9867>, dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

О п р е д е л е н и е 1.1. Замена G_1 на G_2 в графе G состоит в образовании графа с множеством вершин $(V(G) \setminus V(G_1)) \cup V(G_2)$ и множеством ребер $(E(G) \setminus E(G_1)) \cup E(G_2)$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Будем говорить, что графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, если существует такая константа c , что для любого $X \subseteq A$ выполняется равенство $\alpha(G_1 \setminus X) = \alpha(G_2 \setminus X) + c$.

Нетрудно видеть, что графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно A тогда и только тогда, когда $\mathfrak{M}_\alpha(G_1, A) = \mathfrak{M}_\alpha(G_2, A)$, где $\mathfrak{M}_\alpha(H, A)$ — семейство всех таких множеств $X \subseteq A$, что для всякого $Y \subset X$ выполняется неравенство $\alpha(H \setminus X) < \alpha(H \setminus Y)$. Нетрудно проверить справедливость следующего утверждения.

Л е м м а 1.1. Пусть графы G_1 и G_2 являются α -подобными относительно $A \subseteq V(G_1) \cap V(G_2)$, причем A является G_1 -отделяющим в графе G . Тогда если граф G_α^* — результат замены G_1 на G_2 в графе G , то $\alpha(G_\alpha^*) = \alpha(G) + \alpha(G_2) - \alpha(G_1)$.

Интерес к схемам замен обусловлен потенциальной возможностью их применения для редукции графов, что может быть полезным при решении задачи о независимом множестве в некоторых классах графов [3]–[8]. Применительно к нашим заменам также интересны следующие задачи реализации и оптимизации. *Задача реализации* для заданного множества $\mathcal{M} \subseteq 2^A$ состоит в том, чтобы выяснить, существуют ли граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_\alpha(G, A) = \mathcal{M}$. *Задача оптимизации* для заданных G и $A \subseteq V(G)$ состоит в поиске такого графа H с минимальным количеством вершин, что $A \subseteq V(H)$ и $\mathfrak{M}_\alpha(G, A) = \mathfrak{M}_\alpha(H, A)$.

Задача реализации имеет положительное решение далеко не для любого \mathcal{M} . Это так, например, для $\mathcal{M} = \{\{a, b\}, \{a\}\}$. Действительно, соотношения $\alpha(G \setminus \{b\}) = \alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G) - 1$, $\alpha(G \setminus \{b\}) = \alpha(G \setminus \{a, b\}) - 1$, $\alpha(G \setminus \{a\}) = \alpha(G \setminus \{a, b\})$ одновременно не совместны. Для задачи о независимом множестве задача реализации кажется достаточно сложной, а задача оптимизации представляется еще более трудной. В настоящей работе рассматриваются локальные преобразования, а также задачи реализации и оптимизации применительно к задаче о раскраске. Классические понятия k -раскраски, k -раскрашиваемого графа и задачи о k -раскраске представлены в [1].

Можно говорить о k -раскраске подмножества $A \subseteq V(G)$, имея в виду частичную k -раскраску подграфа $G[A]$, а также о ее продолжении на k -раскраску всего графа G . Можно также говорить о том, что любая k -раскраска подмножества A или графа G задается некоторым разбиением A или $V(G)$ на не более чем k независимых множеств.

О п р е д е л е н и е 1.3. Будем говорить, что графы H_1 и H_2 являются (χ, k) -подобными относительно $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$, если для любых k -раскрасок c_1 и c_2 , соответственно, графов H_1 и H_2 существуют k -раскраски c'' и c' , соответственно, графов H_2 и H_1 такие, что для любой вершины $v \in A$ справедливы равенства $c_1(v) = c''(v)$ и $c_2(v) = c'(v)$.

Для заданных графа G и подмножества $A \subseteq V(G)$ определим множество $\mathfrak{M}_{(\chi, k)}(G, A)$ следующим образом. Оно состоит из всевозможных разбиений A на не более чем k непустых частей, каждое из которых не продолжается до k -раскраски G . Отметим, что если некоторое разбиение A не задает k -раскраску данного подмножества, то оно заведомо не продолжается до k -раскраски G . Нетрудно видеть, что графы H_1 и H_2 являются (χ, k) -подобными относительно $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$ тогда и только тогда, когда имеет место равенство $\mathfrak{M}_{(\chi, k)}(H_1, A) = \mathfrak{M}_{(\chi, k)}(H_2, A)$.

Пусть H_1 и H_2 — графы, $A \subseteq V(H_1) \cap V(H_2)$, H_1 и H_2 являются (χ, k) -подобными относительно A . Предположим, что граф H содержит порожденный подграф H_1 с H_1 -отделяющим множеством A . Нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Л е м м а 1.2. *Если граф $H_{(\chi,k)}^*$ — результат замены H_1 на H_2 в графе H , то граф H является k -раскрашиваемым тогда и только тогда, когда таковым является граф $H_{(\chi,k)}^*$.*

Лемма 1.2 обуславливает интерес к задачам реализации и оптимизации для задачи о k -раскраске. В данной работе задача реализации решается полностью. Именно, будет показано, что для любых n и $k \geq 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n -элементного множества A на не более чем k непустых частей существует граф G и подмножество $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$.

Задачу оптимизации поставим следующим образом. Для заданных натуральных чисел $m, n, k \geq 3$ определим функцию шенноновского типа $f_\chi(m, n, k)$. Пусть $\Gamma_{m,n,k}$ — совокупность, состоящая из всевозможных m различных разбиений множества $1, n$ на не более чем k непустых частей. Положим $f_\chi(m, n, k) = \max_{\varrho \in \Gamma_{m,n,k}} g_\chi(\varrho)$, где $g_\chi(\varrho) =$

$\min_{\{H: \overline{1,n} \subseteq V(H), \mathfrak{M}_{(\chi,k)}(H, \overline{1,n}) = \varrho\}} |V(H)|$. В данной работе будет показано, что $f_\chi(m, n, k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.

2. Результаты работы

Пусть a — натуральное число, а b — целое неотрицательное число. Обозначим через $E_{a,b}$ граф, который получается из полного графа на вершинах v, v_1, \dots, v_{a+b} и пустого графа на вершинах u, u_1, \dots, u_b добавлением всевозможных ребер вида uv_i и $u_j v_{a+j}$, где $1 \leq i \leq a$ и $1 \leq j \leq b$. Вершину v назовем *верхней*, а вершины u, u_1, \dots, u_b назовем *нижними*.

Л е м м а 2.1. *Для любых $k \geq 3$ и $1 \leq a \leq k-1$ справедливы следующие утверждения:*

а) в любой k -раскраске графа $E_{a,k-1-a}$, в которой все нижние вершины имеют один и тот же цвет, верхняя вершина имеет такой же цвет, что и нижние;

б) любая k -раскраска верхней и всех нижних вершин графа $E_{a,k-1-a}$, в которой множество нижних вершин не одноцветно, может быть продолжена до некоторой k -раскраски всего графа.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первый пункт очевиден, поскольку все вершины v_1, \dots, v_{k-1} должны иметь разные цвета, каждый из которых отличен от цвета нижних вершин. Поскольку цвет вершины v отличен от цветов каждой из вершин v_1, \dots, v_{k-1} , то он совпадает с цветом нижних вершин.

Для доказательства второго пункта применим индукцию по параметру k . Утверждение очевидно, когда $k = 3$. Предположим, что оно справедливо для некоторого k . Докажем его справедливость для $k+1$.

Рассмотрим отдельно случай графа $E_{k-1,1}$. Пусть c — его частичная $(k+1)$ -раскраска, в которой $c(u) = 1, c(u_1) = 2$ и $c(v) = x$. Если $x = 1$, то можно назначить $c(v_1) = 2$ и

$c(v_i) = i + 1$ для любого $i \in \overline{2, k}$. Если $x = 2$, то можно назначить $c(v_k) = 1$ и $c(v_i) = i + 2$ для любого $i \in \overline{1, k-1}$. Если же $x \notin \{1, 2\}$, то можно считать, что $x = k + 1$, и можно назначить $c(v_1) = 2, c(v_k) = 1$ и $c(v_i) = i + 1$ для любого $i \in \overline{2, k-1}$.

Далее мы будем считать, что в графе $E_{a, k-a}$ выполнены неравенства $2 \leq k-a \leq k-1$. Поскольку некоторая $(k+1)$ -раскраска c' вершин u, u_1, \dots, u_{k-a} не является одноцветной и т. к. $2 \leq k-a \leq k-1$, то существует такая вершина u_i и такой цвет $col \in \overline{1, k+1}$, что c' не является одноцветной на $\{u, u_1, \dots, u_{k-a}\} \setminus \{u_i\}$ и $col \notin \{c'(u), c'(u_1), \dots, c'(u_{k-a})\}$. Не уменьшая общности можно считать, что $i = k-a$. Удалив из графа $E_{a, k-a}$ вершины v_k и u_{k-a} , мы получим порожденный подграф $E_{a, k-1-a}$. К нему можно применить предположение индукции. Если $\{c'(v), c'(u), c'(u_1), \dots, c'(u_{k-a})\} \neq \overline{1, k+1}$, то можно предполагать, что $col \neq c'(v)$. Но тогда соответствующая k -раскраска подграфа $E_{a, k-1-a}$ продолжается до $(k+1)$ -раскраски всего графа $E_{a, k-a}$ окрашиванием вершины v_k в цвет col независимо от цвета $c'(u_{k-a})$. Остается рассмотреть случай, когда $a = 1, c'(u) = 1, c'(u_1) = 2, \dots, c'(u_{k-1}) = k, c'(v) = k+1$. Но тогда для каждого $i \in \overline{1, k}$ вершине v_i можно назначить цвет $(i+1) \bmod n$.

Доказательство закончено.

Для любых заданных натуральных чисел $k \geq 3$ и l рекурсивно определим граф $H_{k,l}$, а также его верхнюю и l нижних вершин:

i) Если $1 \leq l \leq k-1$, то граф $H_{k,l}$ изоморфен графу $E_{k-l, l-1}$, верхняя вершина графа $H_{k,l}$ совпадает с верхней вершиной графа $E_{k-l, l-1}$, множества нижних вершин графов $H_{k,l}$ и $E_{k-l, l-1}$ совпадают.

ii) Пусть $l \geq k$. Тогда граф $H_{k,l}$ получается из графа $H_{k, \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor}$ отождествлением каждой из его $\lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor$ первых нижних вершин с верхней вершиной графа $E_{1, k-2}$ и отождествлением возможной оставшейся нижней вершины с верхней вершиной графа $E_{k-l+(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor, l-1-(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor}$. Верхние вершины графов $H_{k,l}$ и $H_{k, \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor}$ совпадают, множество нижних вершин графа $H_{k,l}$ совпадает с объединением совокупности нижних вершин всех $\lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor$ экземпляров графа $E_{1, k-2}$ и множества нижних вершин возможного экземпляра графа $E_{k-l+(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor, l-1-(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor}$.

Исходя из справедливости Леммы 2.1 и правил построения графа $H_{k,l}$, индукцией по параметру l нетрудно доказать справедливость следующего утверждения.

Л е м м а 2.2. Для любых натуральных $k \geq 3$ и l справедливы следующие утверждения:

а) в любой k -раскраске графа $H_{k,l}$, в которой все нижние вершины имеют один и тот же цвет, верхняя вершина имеет такой же цвет, что и нижние;

б) любая k -раскраска верхней и всех нижних вершин графа $H_{k,l}$, в которой множество нижних вершин не одноцветно, может быть продолжена до некоторой k -раскраски всего графа.

Пусть $\rho = \{\rho_1, \dots, \rho_m\}$, где для любого i элемент ρ_i является разбиением одного и того же n -элементного множества A на не более чем k непустых частей $A_{i,1}, \dots, A_{i,j_i}$. Построим некоторый граф, в котором множество A будет независимым. Для любых $i \in \overline{1, m}$ и $j \in \overline{1, j_i}$ построим граф $H_{k, |A_{i,j}|}$ с множеством нижних вершин $A_{i,j}$. Если $j_i \geq$

2, то к полученному графу добавим граф K_{k+1-j_i} , все вершины которого соединим с верхними вершинами соответствующих его подграфов $H_{k,|A_{i,1}|}, \dots, H_{k,|A_{i,j_i}|}$. Полученный таким образом граф обозначим через $G(\varrho)$.

Л е м м а 2.3. *Некоторая k -раскраска множества A графа $G(\varrho)$ продолжается до k -раскраски всего этого графа тогда и только тогда, когда она не задается ни одним из разбиений ρ_1, \dots, ρ_m . Количество вершин в графе $G(\varrho)$ есть $O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если k -раскраска с множества A задается разбиением ρ_i , то по первой части Леммы 2.2 при любом ее продолжении на весь граф $G(\varrho)$ верхние вершины соответствующих подграфов $H_{k,|A_{i,1}|}, \dots, H_{k,|A_{i,j_i}|}$ будут окрашены в попарно различные цвета. Но тогда соседние им вершины подграфа K_{k+1-j_i} нельзя окрасить в $k - j_i$ цветов. Поэтому s не продолжается до k -раскраски всего графа $G(\varrho)$.

Пусть c' — некоторая k -раскраска множества A , которая не задается ни одним из разбиений ρ_1, \dots, ρ_m . Тогда по второй части Леммы 2.2 для любого i эта раскраска может быть продолжена до k -раскраски каждого из соответствующих подграфов $H_{k,|A_{i,1}|}, \dots, H_{k,|A_{i,j_i}|}$, в которой j_i их верхних вершин окрашены в не более чем $j_i - 1$ различных цветов. Тем самым, вершины соответствующего подграфа K_{k+1-j_i} могут быть раскрашены в $k + 1 - j_i$ цветов. Поэтому c' продолжается до k -раскраски всего графа $G(\varrho)$.

Оценим количество вершин в графе $G(\varrho)$. Очевидно, что $|V(E_{1,k-2})| = 2k - 1$ и что $|V(E_{k-l+(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor, l-1-(k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor})| = k + l - (k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor$. Поэтому, по правилам построения графа $H_{k,l}$, справедливо неравенство $|V(H_{k,l})| \leq |V(H_{k, \lceil \frac{l}{k-1} \rceil})| + (2k-1) \cdot \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor + k + l - \lfloor \frac{l}{k-1} \rfloor \leq |V(H_{k, \lceil \frac{l}{k-1} \rceil})| + k + 3l$. Поэтому справедливо соотношение $|V(H_{k,l})| = O(k \cdot \log_k l + l)$. Поэтому для любого i общее количество вершин в графах $H_{k,|A_{i,1}|}, \dots, H_{k,|A_{i,j_i}|}, K_{k+1-j_i}$ не превосходит $O(j_i \cdot k \cdot \log_k n + n) = O(k^2 \cdot \log_k n + n)$. Тем самым, количество вершин в графе $G(\varrho)$ есть $O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Из Леммы 2.3 следует справедливость следующего утверждения, которое является основным в данной работе.

Т е о р е м а 2.1. *Для любых n и $k \geq 3$ и произвольного семейства ϱ попарно различных разбиений n -элементного множества A на не более чем k непустых частей существует граф G и подмножество вершин $A \subseteq V(G)$ такие, что $\mathfrak{M}_{(\chi,k)}(G, A) = \varrho$. Справедливо соотношение $f_\chi(m, n, k) = O(m \cdot (k^2 \cdot \log_k n + n))$.*

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01336).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. Гэри, Д. Джонсон, *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, Мир, 1982, 416 с.
2. В.Е. Алексеев, В.В. Лозин, “О локальных преобразованиях графов, сохраняющих число независимости”, *Дискретный анализ и исследование операций*, **5:1** (1998), 3–19.
3. V.E. Alekseev, V.V. Lozin, “Local transformations of graphs preserving independence number”, *Discrete Applied Mathematics*, **135** (2004), 16–29.
4. V.E. Alekseev, D.S. Malyshev, “Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **3:1** (2008), 1–5.
5. B. Lévêque, D. de Werra, “Graph transformations preserving the stability number”, *Discrete Applied Mathematics*, **160:18** (2012), 2752–2759.
6. V.V. Lozin, “Conic reduction of graphs for the stable set problem”, *Discrete Mathematics*, **222:1–3** (2000), 199–211.
7. V.V. Lozin, “Stability preserving transformations of graphs”, *Annals of Operations Research*, **188** (2011), 331–341.
8. D.S. Malyshev, “Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **7:2** (2013), 221–228.

Поступила 15.04.2017

MSC2010 05C15

Theorems of existence and sufficiency connected with local transformations of graphs for the k -colourability problem

© D. V. Sirotkin²

Abstract. In the paper we consider some class of subgraphs' replacements in graphs. These while replacements in this class preserve k -colorability. Every local transformation from this class is defined by a pattern that is a collection of partitions of a set into subsets. The paper shows that a replacing subgraph exists for every pattern. An estimation is given for the number of its vertices depending on size of the pattern. This is the main result of the paper, to obtain it we used methods of graph theory and combinatorial analysis. Said class of replacements might be useful for creating polynomial reductions for the k -colorability problem. In particular, together with main result of the paper one can use it for input reduction for solving the k -colorability problem.

Key Words: k -colourability problem, local transformation, realization problem, Shannon function.

REFERENCES

1. M. Garey, D. Johnson, *Vychislitel'nye mashiny i trudnoreshaemye zadachi [Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness]*, Mir Publ., Moscow, 1982, 416 p.
2. V. E. Alekseev, V. V. Lozin, "[On local transformations of graphs that preserve the independence number]", *Diskretnyi Analiz i Issledovanie Operatsii*, **5:1** (1998), 3–19 (In Russ).
3. V. E. Alekseev, V. V. Lozin, "Local transformations of graphs preserving independence number", *Discrete Applied Mathematics*, **135** (2004), 16–29.
4. V. E. Alekseev, D. S. Malyshev, "Planar graph classes with the independent set problem solvable in polynomial time", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **3:1** (2008), 1–5.
5. B. Lévêque, D. de Werra, "Graph transformations preserving the stability number", *Discrete Applied Mathematics*, **160:18** (2012), 2752–2759.
6. V. V. Lozin, "Conic reduction of graphs for the stable set problem", *Discrete Mathematics*, **222:1–3** (2000), 199–211.
7. V. V. Lozin, "Stability preserving transformations of graphs", *Annals of Operations Research*, **188** (2011), 331–341.
8. D. S. Malyshev, "Classes of subcubic planar graphs for which the independent set problem is polynomially solvable", *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **7:2** (2013), 221–228.

Submitted 15.04.2017

² **Dmitry V. Sirotkin**, laboratory assistant, Laboratory of Theory and Practice of Decision Support Systems, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaja Pecherskaja Str., Nizhny Novgorod 603155, Russia); laboratory assistant, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-2682-9867>, dmitriy.v.sirotkin@gmail.com

УДК 519.17

О производящих функциях и предельных теоремах, связанных с максимальными независимыми множествами в графах-решетках

© Д. С. Талецкий¹

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются количественные характеристики максимальных независимых множеств в графах-решетках. В ней используются методы комбинаторного анализа, перечислительной комбинаторики, математического анализа и линейной алгебры. Получен явный вид производящих функций количества максимальных независимых множеств в цилиндрических и тороидальных решетках ширины 4, 5, 6. Доказано, что пределы корней mn -ой степени из количества (максимальных) независимых множеств в прямоугольных, цилиндрических и тороидальных $m \times n$ -решетках существуют и равны. Количественные аспекты максимальных независимых множеств в графах-решетках применительно к цилиндрическим и тороидальным решеткам ранее не рассматривались. Кроме того, существование пределов корней mn -ой степени из количества максимальных независимых множеств в $m \times n$ -решетках также не было доказано. Таким образом, настоящая работа является дальнейшим развитием перечислительной комбинаторики.

Ключевые слова: независимое множество, граф-решетка, производящая функция, предельная теорема.

1. Введение

Исследованию асимптотики количества (максимальных) независимых множеств в графах из параметрически заданных классов посвящено значительное количество работ ([1],[2],[3]). Так, А. Д. Коршунов и А. А. Сапоженко в работе [1] получили асимптотику количества двоичных кодов с расстоянием 2 (т.е. числа независимых множеств в n -мерном двоичном кубе). П. Киршинхофер, Х. Продингер и Р. Тишай доказали в работе [2] существование таких констант $\beta'_q, \alpha'_q, \alpha'_{q,1}, \alpha'_{q,2}$ ($\alpha'_{q,1} \neq \alpha'_{q,2}$), что для $T_{q,n}$ — полного q -арного дерева высоты n при $q \in \{2, 3, 4\}$ и при $n \rightarrow \infty$ выполняется асимптотика $i(T_{q,n}) \sim \alpha'_q \cdot (\beta'_q)^{q^n}$ и при любом $q \geq 5$ при $k \rightarrow \infty$ справедливы асимптотики $i(T_{q,2k}) \sim \alpha'_{q,1} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k}}$ и $i(T_{q,2k+1}) \sim \alpha'_{q,2} \cdot (\beta'_q)^{q^{2k+1}}$. Д. С. Талецкий и Д. С. Малышев в работе [3] доказали существование таких констант β_q, α_2 и таких попарно различных констант $\alpha_{q,1}, \alpha_{q,2}, \alpha_{q,3}$, что при $n \rightarrow \infty$ выполнена асимптотика $mi(T_{2,n}) \sim \alpha_2 \cdot (\beta_2)^{2^n}$, а для всех достаточно больших q при $k \rightarrow \infty$ справедливы асимптотики $mi(T_{q,3k}) \sim \alpha_{q,1} \cdot (\beta_q)^{q^{3k}}$, $mi(T_{q,3k+1}) \sim \alpha_{q,2} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+1}}$, $mi(T_{q,3k+2}) \sim \alpha_{q,3} \cdot (\beta_q)^{q^{3k+2}}$.

Декартовым произведением $G \times H$ двух графов G и H называется граф с множеством вершин $V(G) \times V(H)$, при этом вершины (u_1, v_1) и (u_2, v_2) соединены ребром тогда и только тогда, когда $u_1 = u_2$ и $(v_1, v_2) \in E(H)$, либо $v_1 = v_2$ и $(u_1, u_2) \in E(G)$. Прямоугольной (соответственно, цилиндрической и тороидальной) $m \times n$ -решеткой называется декартово произведение $P_m \times P_n$ (соответственно, $C_m \times P_n$ и $C_m \times C_n$), где P_k и C_k —

¹ Талецкий Дмитрий Сергеевич, лаборант, кафедра алгебры, геометрии и дискретной математики ФГАОУ ВО "ННГУ им. Н. И. Лобачевского" (603950, Россия, г. Нижний Новгород, пр. Гагарина, д. 23), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0966-3903>, dmitailmail@gmail.com

простой k -путь и простой k -цикл, соответственно. Прямоугольную (цилиндрическую и тороидальную) $m \times n$ -решетку будем обозначать через $Gr_{m,n}$ ($Cyl_{m,n}$ и $Tor_{m,n}$).

Н. Калкин и Г. Вилф в работе [4] доказали, что существует предел $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, равный $1.50403\dots$, который мы будем обозначать через η . Кроме того, ими были получены производящие функции количества н.м. в прямоугольных решетках ширины 3, 4, 5. Позднее С. Ох и С. Ли в работе [5] предложили более простое доказательство существования двойного предела $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$.

Автору известны только две работы ([6] и [7]), в которых рассматриваются количественные аспекты м.н.м. в графах-решетках, причем в данных работах рассматриваются только прямоугольные решетки. Р. Эйлер в работе [6] получил производящие функции количества м.н.м. в прямоугольных решетках ширины 3, 4, 5. В работе [7] были получены производящие функции количества м.н.м. в прямоугольных решетках-параллелепипедах с основаниями 2×2 , 2×3 и 3×3 . В работе [6] ставится вопрос о существовании двойного предела $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, ответ на который получен в данной работе.

В настоящей работе получен явный вид производящих функций количества м.н.м. в цилиндрических и тороидальных решетках ширины 4, 5, 6. Кроме того, в данной работе показывается существование и равенство пределов $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi(Cyl_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi(Tor_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$.

2. Максимальные независимые множества в цилиндрических и тороидальных решетках

2.1. Понятие оснащенной решетки

Пусть имеется подмножество $W \subseteq V(Cyl_{m,n})$ ($W \subseteq V(Tor_{m,n})$) и вершина $u \in V(Cyl_{m,n}) \setminus W$ ($u \in V(Tor_{m,n}) \setminus W$). Будем говорить, что вершина u смежна с W , если хотя бы один из ее соседей принадлежит W . Вершина u смежна с W по вертикали (по горизонтали), если хотя бы один из ее соседей по столбцу (по строке) принадлежит W . Вершина u смежна с W слева (справа), если ее левый (правый) сосед принадлежит W .

О п р е д е л е н и е 2.1. *Оснащенная цилиндрическая $m \times n$ -решетка — такое разбиение (I, I^V, L, R) , возможно с пустыми частями, множества $V(Cyl_{m,n})$, что одновременно выполняются следующие условия:*

1. Каждое из множеств I, L, R является независимым.
2. Множество I^V состоит в точности из всех вершин, смежных с I по вертикали.
3. Каждая вершина, не принадлежащая $I \cup I^V$ и смежная с I слева, принадлежит L . Левый сосед каждого элемента множества L , если он существует, принадлежит множеству I .
4. Каждая вершина, не принадлежащая $I \cup I^V \cup L$ и смежная с I справа, принадлежит R . Правый сосед каждого элемента множества R , если он существует, принадлежит множеству I .

Отметим, что в оснащенной цилиндрической решетке крайний левый столбец может содержать элементы множества L , а крайний правый столбец может содержать элементы множества R .

Оснащенную цилиндрическую $m \times 1$ -решетку назовем *оснащенным столбцом*. Более подробно, *оснащенный столбец* — разбиение множества $V(Cyl_{m,1})$ на части I, I^V, L, R (некоторые из которых могут быть пустыми) такое, что каждое из множеств I, L, R является независимым и множество I^V состоит в точности из всех вершин, смежных с I .

Оснащенную цилиндрическую решетку назовем L -*решеткой* (R -*решеткой*), если ее крайний левый (крайний правый) столбец не содержит элементов множества L (множества R). Назовем LR -*решеткой* такую решетку, которая одновременно является L -решеткой и R -решеткой.

Определение *оснащенной тороидальной $m \times n$ -решетки* повторяет определение оснащенной цилиндрической $m \times n$ -решетки с той лишь разницей, что разбивается множество $V(Tor_{m,n})$.

2.2. Перечисление максимальных независимых множеств в цилиндрических и тороидальных решетках

Л е м м а 2.1. *Для любых $m \geq 1$ и $n \geq 1$ количество всех LR -решеток размера $m \times n$ равно $ti(Cyl_{m,n})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть имеется LR -решетка (I_1, I_1^V, L, R) размера $m \times n$. Покажем, что н.м. I_1 графа $Cyl_{m,n}$ является максимальным. Рассмотрим произвольную вершину $w \in V(Cyl_{m,n})$, не входящую в I_1 . Тогда, эта вершина входит в одно из множеств I_1^V, L, R . Если $w \in L$, то w не принадлежит крайнему левому столбцу решетки, а если $w \in R$, то w не принадлежит крайнему правому столбцу решетки. Значит, w смежна с I_1 , откуда следует максимальность множества I_1 .

Пусть теперь имеется м.н.м. I_2 графа $Cyl_{m,n}$. Построим четверку (I_2, I_2^V, L, R) , которая является разбиением множества $V(Cyl_{m,n})$, возможно с пустыми частями. Рассмотрим произвольную вершину $w \in V(Cyl_{m,n})$, не входящую в I_2 . В силу максимальности I_2 , вершина w смежна с I_2 . Если w смежна с I_2 по вертикали, то $w \in I_2^V$. Если w не смежна с I_2 по вертикали, но смежна слева, то $w \in L$. Наконец, если w не смежна с I_2 по вертикали и слева, то $w \in R$. Таким образом, для (I_2, I_2^V, L, R) выполняются все требования пунктов 2–4 определения оснащенной цилиндрической решетки.

Ясно, что крайний левый (соответственно, крайний правый) столбец четверки (I_2, I_2^V, L, R) не содержит элементов множества L (соответственно, элементов множества R), по правилам ее построения. Если $n = 1$, то $L = R = \emptyset$. Пусть $n \geq 2$. Никакие два элемента множества L не могут быть смежны по горизонтали по правилу построения L из предыдущего абзаца. То же верно и для множества R . Никакие два элемента множества L не могут быть смежны по вертикали, иначе их левые соседи принадлежат I_2 и поэтому I_2 не будет независимым. То же верно и для множества R . Тем самым, L и R являются независимыми. Поэтому (I_2, I_2^V, L, R) — LR -решетка. Лемма доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

По аналогии с доказательством Леммы 2.1 нетрудно доказать справедливость следующего утверждения:

Л е м м а 2.2. *Для любых $m \geq 1$ и $n \geq 3$ количество всех оснащенных тороидальных $m \times n$ -решеток равно $ti(Tor_{m,n})$.*

Будем говорить, что оснащенная цилиндрическая решетка имеет вид (J', \dots, J'') , если самым левым ее столбцом является J' , а самым правым является J'' . Такое же обозначение будем использовать и для оснащенной тороидальной решетки, имея в виду, что ее столбцы J', \dots, J'' проходятся по часовой стрелке.

Пусть J_1, \dots, J_{α_m} — всевозможные оснащенные столбцы высоты m . Составим булеву матрицу \mathbf{T}_m размера $\alpha_m \times \alpha_m$, элемент t_{ij} которой равен 1, если и только если (J_i, J_j) — оснащенная цилиндрическая решетка. Кроме того, составим булеву матрицу \mathbf{S}_m размера $\alpha_m \times \alpha_m$, элемент s_{ij} которой равен 1, если и только если (J_i, J_j) — L -решетка. Составим булеву матрицу \mathbf{F}_m размера $\alpha_m \times \alpha_m$, элемент f_{ij} которой равен 1, если и только если (J_i, J_j) — R -решетка.

Через $\mathbf{1}$ мы будем обозначать вектор, состоящий из одних единиц, размер которого будет ясен из контекста. Через \mathbf{I} мы будем обозначать единичную матрицу, размер которой будет ясен из контекста.

Т е о р е м а 2.1. Для любых $m \geq 1, n \geq 3$ верно равенство $mi(Cyl_{m,n}) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{T}_m)^{n-3} \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top$, где $(\mathbf{T}_m)^0 = \mathbf{I}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Введем обозначение $\mathbf{L}_m^{(k)} = \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{T}_m)^k$ и обозначим за $l_{ab}^{(k)}$ элемент матрицы $\mathbf{L}_m^{(k)}$, стоящий в a -ой строке и b -ом столбце. Покажем по индукции, что для любого $k \geq 2$ количество L -решеток размера m на k вида (J_a, \dots, J_b) равно $l_{ab}^{(k-2)}$. При $k = 2$ утверждение очевидно, поскольку $l_{ab}^{(0)} = s_{ab}$. Пусть мы доказали, что существует ровно $l_{ab}^{(k-1)}$ L -решеток размера m на $k+1$ вида (J_a, \dots, J_b) . Поскольку $\mathbf{L}_m^{(k)} = \mathbf{L}_m^{(k-1)} \cdot \mathbf{T}_m$, то имеет место равенство $l_{ab}^{(k)} = \sum_{p=1}^{\alpha_m} l_{ap}^{(k-1)} \cdot t_{pb}$. Каждое слагаемое этой суммы равно количеству L -решеток размера m на $k+2$ вида (J_a, \dots, J_p, J_b) . Тогда вся сумма равна количеству L -решеток размера m на $k+2$ вида (J_a, \dots, J_b) . Значит, сумма всех элементов матрицы $\mathbf{L}_m^{(k-2)}$, равная $\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{T}_m)^{k-2} \cdot \mathbf{1}^\top$, совпадает с количеством всех L -решеток размера m на k .

Теперь рассмотрим матрицу $\mathbf{C}_m^{(k)} = \mathbf{L}_m^{(k)} \cdot \mathbf{F}_m$ и покажем, что ее элемент $c_{ab}^{(k)}$, стоящий в a -ой строке и b -ом столбце, равен количеству LR -решеток вида (J_a, \dots, J_b) размера m на $k+3$. Действительно, $c_{ab}^{(k)} = \sum_{p=1}^{\alpha_m} l_{ap}^{(k)} \cdot f_{pb}$. Каждое слагаемое этой суммы равно количеству LR -решеток размера m на $k+3$ вида (J_a, \dots, J_p, J_b) для некоторого оснащенного столбца J_p . Значит, сумма всех элементов матрицы $\mathbf{C}_m^{(n-3)}$, равная $\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{T}_m)^{n-3} \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top$, совпадает с количеством всех LR -решеток размера $m \geq 1$ на $n \geq 3$. Отсюда и из Леммы 2.1 следует справедливость теоремы. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Напомним, что произведением Адамара двух матриц $\mathbf{X} = (x_{ij})$ и $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ одинакового размера называется матрица $\mathbf{Z} = \mathbf{X} \circ \mathbf{Y} = (z_{ij})$ такая, что $z_{ij} = x_{ij} \cdot y_{ij}$.

Т е о р е м а 2.2. Для любых $m \geq 1, n \geq 2$ имеет место равенство $mi(Tor_{m,n}) = \mathbf{1} \cdot [(\mathbf{T}_m)^{n-1} \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действуя по аналогии с рассуждениями из доказательства Теоремы 2.1 нетрудно по индукции показать, что для любого $k \geq 2$ количество оснащенных цилиндрических $m \times k$ -решеток вида (J_a, \dots, J_b) равно элементу матрицы $(\mathbf{T}_m)^{k-1}$, который стоит на пересечении a -ой строки и b -ого столбца. Поэтому для любого $k \geq 2$ количество оснащенных тороидальных $m \times k$ -решеток вида (J_a, \dots, J_b) равно элементу

матрицы $(\mathbf{T}_m)^{k-1} \circ \mathbf{T}_m^\top$, который стоит на пересечении a -ой строки и b -ого столбца. Отсюда и Леммы 2.2 следует, что $mi(\text{Tor}_{m,n}) = \mathbf{1} \cdot [(\mathbf{T}_m)^{n-1} \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top$ для любых $m \geq 1, n \geq 2$. Теорема доказана.

Доказательство закончено.

Напомним, что *производящей функцией* числовой последовательности $\{a_n\}_{n \geq 0}$ называется функция $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n$.

Ясно, что $mi(\text{Cyl}_{1,1}) = mi(\text{Tor}_{1,1}) = 1$ и $mi(\text{Cyl}_{1,2}) = mi(\text{Cyl}_{2,1}) = mi(\text{Tor}_{1,2}) = mi(\text{Tor}_{2,1}) = 2$. Найдя явный вид матрицы \mathbf{T}_1 и применив Теорему 2.2, для любого $n \geq 3$ можно вычислить a_n , где $a_n = mi(\text{Cyl}_{n,1}) = mi(\text{Tor}_{1,n}) = mi(\text{Tor}_{n,1})$. Очевидно, что $mi(\text{Cyl}_{2,2}) = mi(\text{Tor}_{2,2}) = 2$. Найдя явный вид матриц $\mathbf{T}_2, \mathbf{S}_2, \mathbf{F}_2$ и применив Теорему 2.2, для любого $n \geq 2$ можно вычислить b_n , где $b_n = mi(\text{Cyl}_{n,2}) = mi(\text{Tor}_{2,n}) = mi(\text{Tor}_{n,2})$. В работе [6] описан механизм вычисления $mi(\text{Cyl}_{1,n})$ и $mi(\text{Cyl}_{2,n})$ для любого $n \geq 3$. Поэтому далее рассматриваются «сдвинутые» производящие функции количества м.н.м. в цилиндрических и тороидальных решетках.

Для фиксированного $m \geq 1$ через $cyl_m(x)$ и $tor_m(x)$ обозначим функции $\sum_{n=0}^{\infty} mi(\text{Cyl}_{m,n+3}) \cdot x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} mi(\text{Tor}_{m,n+2}) \cdot x^{n+1}$, соответственно.

С л е д с т в и е 2.1. *Справедливы равенства $cyl_m(x) = \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1} \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top$ и $tor_m(x) = \mathbf{1} \cdot [(\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1} \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top$.*

Доказательство. Имеет место равенство:

$$(\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{T}_m \cdot x + (\mathbf{T}_m)^2 \cdot x^2 + \dots$$

Домножим обе части равенства слева на произведение $\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m$, а справа на произведение $\mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top$. По Теореме 2.1 имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1} \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top &= \mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top + (\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot \mathbf{T}_m \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top) \cdot x + (\mathbf{1} \cdot \mathbf{S}_m \cdot (\mathbf{T}_m)^2 \cdot \mathbf{F}_m \cdot \mathbf{1}^\top) \cdot x^2 + \dots = \\ &= \sum_{n=3}^{\infty} mi(\text{Cyl}_{m,n}) \cdot x^{n-3} = \sum_{n=0}^{\infty} mi(\text{Cyl}_{m,n+3}) \cdot x^n = cyl_m(x). \end{aligned}$$

Заметим, что $\mathbf{I} \circ \mathbf{T}_m^\top$ — матрица из одних нулей ввиду определения произведения Адамара и независимости каждого из множеств I, R, L . Учитывая этот факт и Теорему 2.2, домножим обе части разложения для $(\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1}$ справа на матрицу \mathbf{T}_m^\top , после этого домножим их слева на $\mathbf{1}$, а справа на $\mathbf{1}^\top$

$$\begin{aligned} \mathbf{1} \cdot [(\mathbf{I} - \mathbf{T}_m \cdot x)^{-1} \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top &= \mathbf{1} \cdot [\mathbf{I} \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top + (\mathbf{1} \cdot [\mathbf{T}_m \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top) \cdot x + (\mathbf{1} \cdot [(\mathbf{T}_m)^2 \circ \mathbf{T}_m^\top] \cdot \mathbf{1}^\top) \cdot x^2 + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} mi(\text{Tor}_{m,n+2}) \cdot x^{n+1} = tor_m(x) \end{aligned}$$

Следствие доказано.

Доказательство закончено.

2.3. Производящие функции

Случай $m=4$

В Таблице 1 представлены все оснащенные столбцы высоты 4. Здесь и далее через I (I^V, L, R) обозначается вершина столбца, принадлежащая множеству I (I^V, L, R).

J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}	J_{12}
I	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R	I^V	I^V	L	R
I^V	I	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R	R	L
I	I^V	L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R
I^V	I	I^V	I^V	L	R	I^V	I^V	I	I	R	L

Таблица 1: Оснащенные столбцы высоты 4

В Таблице 2 представлены матрицы $\mathbf{T}_4, \mathbf{S}_4, \mathbf{F}_4$. В столбце с номером k указаны все такие номера l , что элемент t_{kl} (соответственно, s_{kl}, f_{kl}) равен 1.

	\mathbf{T}_4	\mathbf{S}_4	\mathbf{F}_4
1	2,5,10,11	2,5,10,11	2,5
2	1,4,8,12	1,4,8,12	1
3	2,6,7,10	\emptyset	2,7
4	7	7	7
5	1,4,8,9	\emptyset	1,9
6	9	9	9
7	2,3,6,10	\emptyset	2,3
8	3	3	3
9	1,4,5,8	\emptyset	1,5
10	5	5	5
11	2	\emptyset	2
12	1	\emptyset	1

Таблица 2: Матрицы $\mathbf{T}_4, \mathbf{S}_4, \mathbf{F}_4$

По Таблицам 1, 2 и Следствию 2.1 производящая функция для числа цилиндрических решеток ширины 4 равна

$$cyl_4(x) = \frac{-12x^2 - 22x - 16}{2x^3 + 3x^2 + x - 1} = 16 + 38x + 98x^2 + 244x^3 + 614x^4 + 1542x^5 + O(x^6).$$

По Таблицам 1, 2 и Следствию 2.1 производящая функция для числа тороидальных решеток ширины 4 равна

$$tor_4(x) = \frac{40x^8 + 32x^7 - 8x^6 - 6x^5 + 12x^4 - 12x^3 - 12x^2 - 6x}{-4x^9 - 4x^8 + x^7 + x^6 - 2x^5 + 2x^4 + 4x^3 + 2x^2 + x - 1} = 6x + 18x^2 + 42x^3 + 90x^4 + O(x^5).$$

Случай $m=5$

В Таблице 3 представлены все оснащенные столбцы высоты 5.

J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}	J_{12}	J_{13}	J_{14}	J_{15}
I	I	I^V	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	R	L	L	R	I^V	I^V
I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	R	L	L	R
I	I^V	I^V	I^V	I	L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	R	L
I^V	I	I	I^V	I^V	R	L	L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V
I^V	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	R	L	L	R	I^V	I^V	I	I

Таблица 3: Оснащенные столбцы высоты 5

В Таблице 4 представлены матрицы $\mathbf{T}_5, \mathbf{S}_5, \mathbf{F}_5$. В столбце с номером k указаны все такие номера l , что элемент t_{kl} (s_{kl}, f_{kl}) равен 1.

	\mathbf{T}_5	\mathbf{S}_5	\mathbf{F}_5
1	3,4,12,15	3,4,12,15	3,4
2	4,5,8,11	4,5,8,11	4,5
3	1,5,7,14	1,5,7,14	1,5
4	1,2,10,13	1,2,10,13	1,2
5	2,3,6,9	2,3,6,9	1,3
6	3,12	\emptyset	3
7	5,11	\emptyset	5
8	5,14	\emptyset	5
9	2,13	\emptyset	2
10	2,6	\emptyset	2
11	4,15	\emptyset	4
12	4,8	\emptyset	4
13	1,7	\emptyset	1
14	1,10	\emptyset	1
15	3,9	\emptyset	3

Таблица 4: Матрицы $\mathbf{T}_5, \mathbf{S}_5, \mathbf{F}_5$

По Таблицам 3, 4 и Следствию 2.1 производящая функция для числа цилиндрических решеток ширины 5 равна

$$cyl_5(x) = \frac{30}{1-3x} = 30 + 90x + 270x^2 + 810x^3 + 2430x^4 + 7290x^5 + O(x^6).$$

По Таблицам 3, 4 и Следствию 2.1 производящая функция для числа тороидальных решеток ширины 5 равна

$$tor_5(x) = \frac{-30x^5 + 60x^4 - 10x^2 - 10x}{3x^6 - 7x^5 - x^4 + x^3 + 3x^2 + 2x - 1} = 10x + 30x^2 + 90x^3 + 220x^4 + 760x^5 + O(x^6).$$

Случай $m=6$

В Таблицах 5 и 6 представлены все оснащенные столбцы высоты 6.

J_1	J_2	J_3	J_4	J_5	J_6	J_7	J_8	J_9	J_{10}	J_{11}	J_{12}	J_{13}	J_{14}	J_{15}	J_{16}	J_{17}
I	I^V	I	I^V	I^V	I	I	I	I	I^V	I^V	I^V	I^V	L	R	I^V	I^V
I^V	I	I^V	I	I^V	I^V	I^V	I^V	I^V	I	I	I	I	I^V	I^V	L	R
I	I^V	I^V	I^V	I	I	I	L	R	I^V	I^V	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V
I^V	I	I	I^V	I^V	I^V	I^V	I^V	I^V	I	I	L	R	I^V	I^V	I	I
I	I^V	I^V	I	I^V	L	R	I	I	I^V	I^V	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V
I^V	I	I^V	I^V	I	I^V	I^V	I^V	I^V	L	R	I	I	I^V	I^V	I	I

Таблица 5: Оснащенные столбцы высоты 6

J_{18}	J_{19}	J_{20}	J_{21}	J_{22}	J_{23}	J_{24}	J_{25}	J_{26}	J_{27}	J_{28}	J_{29}	J_{30}	J_{31}
I	I	I^V	I^V	L	R	R	L	L	R	I^V	I^V	L	R
I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R	R	L	L	R	R	L
L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R	R	L	L	R
R	L	L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R	R	L
L	R	R	L	L	R	I^V	I^V	I	I	I^V	I^V	L	R
I^V	I^V	L	R	R	L	L	R	I^V	I^V	I	I	R	L

Таблица 6: Оснащенные столбцы высоты 6, продолжение

В Таблицах 7, 8 представлены матрицы $\mathbf{T}_6, \mathbf{S}_6, \mathbf{F}_6$. В столбце с номером k указаны все такие номера l , что элемент t_{kl} (соответственно, s_{kl}, f_{kl}) равен 1.

	\mathbf{T}_6	\mathbf{S}_6	\mathbf{F}_6
1	2,11,13,17,21,25,29,30	2,11,13,17,21,25,29,30	2
2	1,7,9,15,23,27,31	1,7,9,15,23,27,31	1
3	4,5,12,14	4,5,12,14	4,5,12,14
4	3,5,6,16	3,5,6,16	3,5,6,16
5	3,4,8,10	3,4,8,10	3,4,8,10
6	2,4,11,13,17,25,26,29	\emptyset	2,4
7	4,26	4,26	4
8	2,5,11,13,17,21,22,25	\emptyset	2,5
9	5,22	5,22	5
10	1,5,7,9,15,19,27,28	\emptyset	1,5
11	5,28	5,28	5
12	1,3,7,9,15,23,24,27	\emptyset	1,3
13	3,24	3,24	3
14	2,3,11,13,17,18,21,29	\emptyset	2,3
15	3,18	3,18	3
16	1,4,7,9,15,19,20,23	\emptyset	1,4
17	4,20	4,20	4

Таблица 7: Матрицы $\mathbf{T}_6, \mathbf{S}_6, \mathbf{F}_6$

	\mathbf{T}_6	\mathbf{S}_6	\mathbf{F}_6
18	2,11,17,25	\emptyset	2
19	14	\emptyset	14
20	1,9,15,27	\emptyset	1
21	16	\emptyset	16
22	2,13,17,29	\emptyset	2
23	8	\emptyset	8
24	1,7,9,19	\emptyset	1
25	12	\emptyset	12
26	2,11,13,21	\emptyset	2
27	6	\emptyset	6
28	1,7,15,23	\emptyset	1
29	10	\emptyset	10
30	2	\emptyset	2
31	1	\emptyset	1

Таблица 8: Матрицы $\mathbf{T}_6, \mathbf{S}_6, \mathbf{F}_6$, продолжение

По Таблицам 5–8 и Следствию 2.1 производящая функция $cyl_6(x)$ для числа цилиндрических решеток ширины 6 равна дроби $\frac{A}{B}$, где $A = 40x^{21} + 110x^{20} + 124x^{19} + 126x^{18} + 120x^{17} + 61x^{16} + 468x^{15} - 325x^{14} - 1021x^{13} + 13x^{12} - 1017x^{11} + 593x^{10} - 669x^9 - 1629x^8 + 337x^7 + 1220x^6 - 659x^5 - 1327x^4 - 126x^3 + 292x^2 + 211x + 82$, $B = -2x^{22} - 5x^{21} - 5x^{20} - 5x^{19} - 4x^{18} - x^{17} - 23x^{16} + 26x^{15} + 49x^{14} - 15x^{13} + 50x^{12} - 41x^{11} + 40x^{10} + 81x^9 - 54x^8 - 54x^7 + 61x^6 + 52x^5 - 14x^4 - 17x^3 - 7x^2 - x + 1$.

По Таблицам 5–8 и Следствию 2.1 производящая функция $tor_6(x)$ для числа тороидальных решеток ширины 6 равна дроби $\frac{A}{B}$, где $A = -58x^{30} - 196x^{29} - 216x^{28} - 178x^{27} - 184x^{26} - 115x^{25} - 800x^{24} - 141x^{23} + 2310x^{22} - 223x^{21} + 332x^{20} + 417x^{19} - 444x^{18} + 6607x^{17} - 2524x^{16} - 2477x^{15} + 2366x^{14} + 1946x^{13} + 2832x^{12} - 2485x^{11} - 2674x^{10} + 3515x^9 + 2136x^8 - 2121x^7 - 946x^6 + 768x^5 + 348x^4 - 61x^3 - 66x^2 - 20x$, $B = 2x^{31} + 7x^{30} + 8x^{29} + 7x^{28} + 9x^{27} + 9x^{26} + 35x^{25} + 6x^{24} - 95x^{23} + 20x^{22} - 10x^{21} - 25x^{20} + 21x^{19} - 351x^{18} + 160x^{17} + 144x^{16} - 165x^{15} - 127x^{14} - 202x^{13} + 201x^{12} + 229x^{11} - 346x^{10} - 229x^9 + 263x^8 + 133x^7 - 128x^6 - 70x^5 + 15x^4 + 22x^3 + 10x^2 - 1$.

3. Предельные теоремы для количества (максимальных) независимых множеств в графах-решетках

Напомним, что в работе [4] было установлено, что $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \eta = 1.50403\dots$. Далее мы доказываем несколько более общий факт.

Т е о р е м а 3.1. *Имеет место равенство*

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} (i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} (i(Cyl_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} (i(Tor_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \eta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем, что $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (i(Gr_{m-2,n-2}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} (i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$. Действительно, справедливы соотношения:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} (i(Gr_{m-2,n-2}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} (i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{(m+2)(n+2)}} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} ((i(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}})^{\frac{1}{1+\frac{2}{m}+\frac{2}{n}+\frac{4}{mn}}} =$$

$$= (\eta)^1 = \eta.$$

Теперь воспользуемся тем, что при любых $m, n \geq 3$ выполнено неравенство $i(Gr_{m-2,n-2}) \leq i(Tor_{m,n}) \leq i(Cyl_{m,n}) \leq i(Gr_{m,n})$. Отсюда и из доказанного выше утверждения следует справедливость утверждения теоремы. Теорема доказана.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Известная лемма Фекете утверждает, что если последовательность a_n неотрицательных чисел является *субаддитивной*, то есть для любых m, n выполняется неравенство $a_{m+n} \leq a_m + a_n$, то последовательность $\frac{a_n}{n}$ сходится к величине $\inf \left\{ \frac{a_n}{n} \right\}$. Воспользуемся одним из обобщений этой леммы (см. [5]).

Л е м м а 3.1. Пусть двойная последовательность $\{a_{m,n}\}$, такая что $a_{m,n} \geq 1$, удовлетворяет двойным неравенствам $a_{m_1+m_2,n} \leq a_{m_1,n} \cdot a_{m_2,n} \leq a_{m_1+m_2+1,n}$ и $a_{m,n_1+n_2} \leq a_{m,n_1} \cdot a_{m,n_2} \leq a_{m,n_1+n_2+1}$ для произвольных m, m_1, m_2, n, n_1, n_2 . Тогда верно равенство

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} (a_{m,n})^{\frac{1}{mn}} = \inf_{m,n} (a_{m,n})^{\frac{1}{mn}} = \sup_{m,n} (a_{m,n})^{\frac{1}{(m+1)(n+1)}}$$

при условии, что супремум существует.

Независимое множество прямоугольной $m \times n$ -решетки назовем *внутренне максимальным*, если оно является максимальным во внутренней прямоугольной $(m-2) \times (n-2)$ -подрешетке. Обозначим за $mi'(Gr_{m,n})$ количество внутренне максимальных независимых множеств в прямоугольной решетке размера $m \times n$.

Л е м м а 3.2. Существует двойной предел $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi'(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \kappa$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Применим Лемму 3.1, положив $a_{m,n} = mi'(Gr_{m,n})$. Проверим выполнение первого неравенства. Понятно, что $(m_1 + m_2) \times n$ -решетка разбивается на $(m_1 \times n)$ -решетку и $(m_2 \times n)$ -решетку. Поэтому любое внутренне максимальное множество $(m_1 + m_2) \times n$ -решетки может быть разбито на два подмножества, каждое из которых также будет внутренне максимальным либо в $(m_1 \times n)$ -решетке, либо в $(m_2 \times n)$ -решетке. Следовательно, выполняется левая часть неравенства. Правое неравенство выполняется, поскольку объединение любого внутренне максимального множества $(m_1 \times n)$ -решетки и любого внутренне максимального множества $(m_2 \times n)$ -решетки может быть продолжено до некоторого внутренне максимального множества $(m_1 + m_2 + 1) \times n$ -решетки. Выполнение второго неравенства проверяется по аналогии.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

В работе [6] был поставлен вопрос о существовании пределов $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi(Cyl_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$, $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi(Tor_{m,n}))^{\frac{1}{mn}}$. В данной работе мы доказываем их существование и равенство.

Т е о р е м а 3.2. Имеет место равенство:

$$\lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi(Gr_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi(Cyl_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi(Tor_{m,n}))^{\frac{1}{mn}} = \kappa.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку для любых $m, n \geq 3$ имеет место неравенство

$$mi'(Gr_{m-2,n-2}) \leq mi(Tor_{m,n}) \leq mi(Cyl_{m,n}) \leq mi(Gr_{m,n}) \leq mi'(Gr_{m+2,n+2}),$$

то достаточно доказать, что $\lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi'(Gr_{m-2,n-2}))^{\frac{1}{mn}} = \lim_{m,n \rightarrow \infty} (mi'(Gr_{m+2,n+2}))^{\frac{1}{mn}} = \kappa$. Это легко проверить по аналогии с рассуждениями из доказательства Теоремы 3.1. Теорема доказана.

Д. С. Талецкий. О производящих функциях и предельных теоремах, связанных...

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Благодарности. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01336).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Д. Коршунов, А. А. Сапоженко, “О числе двоичных кодов с расстоянием 2”, *Проблемы кибернетики*, **40** (1983), 103–130.
2. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, “Fibonacci numbers of graphs: II”, *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.
3. Д. С. Талецкий, Д. С. Малышев, “О количестве максимальных независимых множеств в полных q -арных деревьях”, *Дискретная математика*, **28**:4 (2016), 139–149.
4. N. J. Kalkin, H. S. Wilf, “The number of independent sets in a grid graph”, *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, **11**:1 (1997), 54–60.
5. S. Oh, S. Lee, “Enumerating independent vertex sets in grid graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, **510** (2016), 192–204.
6. R. Euler, “The Fibonacci number of a grid graph and a new class of integer sequences”, *Journal of Integer Sequences*, **8**:07.2.6 (2005), 1–12.
7. R. Euler, P. Oleksik, Z. Skupien, “Counting maximal distance-independent sets in grid graphs”, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**:3 (2013), 531–557.

Поступила 18.04.2017

MSC2010 05C30

On generating functions and limit theorems connected with maximal independent sets in grid graphs

© D. S. Taletskii²

Abstract. In this paper we study some quantitative characteristics of maximal independent sets in grid graphs using methods of combinatorial analysis, enumerative combinatorics, mathematical analysis and linear algebra. We obtain the explicit generating functions for the number of maximal independent sets in cylindrical and toroidal lattices of width 4, 5, 6. We prove that the limits of mn -th root of the number of (maximal) independent sets in rectangular, cylindrical and toroidal $m \times n$ -lattices exist and that they are equal. Nobody studied the quantitative characteristics of maximal independent sets in grid graphs with respect to cylindrical and toroidal lattices before. Also nobody proved the existence of the limits of mn -th root of the number of maximal independent sets in grid graphs. Thus, our paper is a further development of enumerative combinatorics.

Key Words: independent set, grid graph, generating function, limit theorem.

REFERENCES

1. A. D. Korshunov, A. A. Sapozhenko, “[On the number of binary codes with distance two]”, *Problemy kibernetiki*, **40** (1983), 103–130 (In Russ).
2. P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R. Tichy, “Fibonacci numbers of graphs: II”, *The Fibonacci Quarterly*, **21**:3 (1983), 219–229.
3. D. S. Taletskii, D. S. Malyshev, “[On the number of maximal independent sets in complete q -ary trees]”, *Diskretnaya Matematika*, **28**:4 (2016), 139–149 (In Russ).
4. N. J. Kalkin, H. S. Wilf, “The number of independent sets in a grid graph”, *SIAM Journal of Discrete Mathematics*, **11**:1 (1997), 54–60.
5. S. Oh, S. Lee, “Enumerating independent vertex sets in grid graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, **510** (2016), 192–204.
6. R. Euler, “The Fibonacci number of a grid graph and a new class of integer sequences”, *Journal of Integer Sequences*, **8**:07.2.6 (2005), 1–12.
7. R. Euler, P. Oleksik, Z. Skupien, “Counting maximal distance-independent sets in grid graphs”, *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, **33**:3 (2013), 531–557.

Submitted 18.04.2017

² **Dmitry S. Taletskii**, laboratory assistant, Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, National Research Lobachevsky University of Nizhny Novgorod (23 Gagarina avenue, Nizhny Novgorod, 603950, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0966-3903>, dmitailmail@gmail.com

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.19.201701.117-125

УДК 517.925:51-74

Исследование плоского движения одиночного шарика внутри шаровой мельницы© А. О. Сыромясов¹, А. И. Попов², В. Ф. Першин³

Аннотация. Изучена простейшая модель процесса получения графитной смазки с наноразмерными пластинками путем механического расслоения графита. Шарик, помещенный внутрь шаровой мельницы, находится под действием силы тяжести и испытывает трение со стороны мельницы. Оба тела начинают движение из состояния покоя, причем режим разгона мельницы известен заранее. Теоретически шарик может двигаться в одном из двух режимов: с проскальзыванием относительно поверхности или без него. Показано, что при реальных технологических и конструктивных параметрах работы механизма уравнения движения шарика линейризуются, а он сам совершает колебания, близкие к гармоническим. Найдена частота этих колебаний, а также оценки для возникающих в системе сил трения и нормальной реакции. Получено условие перехода движения шарика в режим проскальзывания.

Ключевые слова: графеновые нанопластинки, графитовая смазка, шаровая мельница, несвободное движение тела, гармонические колебания, линейризация обыкновенных дифференциальных уравнений.

1. Введение

Одним из перспективных направлений в производстве наноструктурированных материалов является их создание на основе углерода. Данные материалы обладают высокой прочностью, упругостью, химической стойкостью, повышенной электро- и теплопроводностью, а при добавлении в композиты могут существенно изменять их свойства.

Одним из видов таких материалов являются графеновые нанопластинки (ГНП). Активное применение ГНП в промышленности сдерживается отсутствием промышленных методов их производства и высокой себестоимостью получаемых композитов.

Большинство из методов получения ГНП основано на проведении различных химических реакций и выращивании нанопластинок на подложке. Однако интерес представляет

¹ **Сыромясов Алексей Олегович**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО “МГУ им. Н. П. Огарёва” (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syal1@yandex.ru

² **Попов Андрей Иванович**, доцент кафедры “Техника и технологии производства нанопродуктов”, ФГБОУ ВО “Тамбовский государственный технический университет” (392000, Россия, Тамбовская область, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106), кандидат педагогических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0297-2076>, olimp_porov@mail.ru

³ **Першин Владимир Федорович**, профессор кафедры “Техническая механика и детали машин”, ФГБОУ ВО “Тамбовский государственный технический университет” (392000, Россия, Тамбовская область, г. Тамбов, ул. Советская, д. 106), доктор технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0213-9001>, pershin.home@mail.ru

механическое расслоение графита, содержащего в своей структуре графеновые слои. Получаемые при этом ГНП могут иметь практическое значение при совершенствовании графитной смазки, выпускаемой в настоящее время по ГОСТ 3333–80. Данная смазка широко используется для пуска и приработки трущихся поверхностей двигателей внутреннего сгорания, в различных гидроустановках, при эксплуатации канатов, для смазывания муфт больших размеров, работающих в тяжелых режимах, в рессорах, торсионных подвесках гусеничных машин, в открытых шестернях и др.

Установлено, что коллоидальный графит в присутствии масла в результате адсорбции образует на трущихся поверхностях пленку, проникает и удерживается даже в мельчайших неровностях и порах металла [1]. Это дало возможность предположить, что при переходе к графеновым структурам, и прежде всего к ГНП, отмеченный эффект существенно усилится. Получить ГНП возможно путем механоактивации в различного рода барабанных аппаратах [2], шаровых [3] и планетарных мельницах [4]. Расщепление графита проводилось в различных средах, например, в органических растворителях [5], в водном растворе додецилсульфоната натрия [6] или в присутствии добавок поверхностно-активных веществ [7]. Анализ результатов данных исследований свидетельствует, что при механоактивации возможно получить графитовую смазку с присутствием графеновых наноструктур, повышающих ее эксплуатационные характеристики.

При взаимодействии с мелющими шарами в обрабатываемом материале возникают как нормальные, так и касательные напряжения, причем последние для получения ГНП будут наиболее эффективны [8]. При проведении экспериментов по исследованию движения мелющих шаров в барабанной и планетарной мельницах [9] было обнаружено периодическое проскальзывание всей загрузки относительно обечайки барабана. При этом касательные напряжения в материале, находящемся между шарами и обечайкой, становятся максимальными, что способствует сдвигу слоев графита относительно друг друга и может привести к образованию ГНП.

Тем самым, получение ГНП посредством механоактивации является сложным процессом; его подробное изучение невозможно без математического моделирования происходящих в оборудовании явлений. Особый интерес представляет определение технологических (скорость вращения барабана) и конструктивных (размеры барабана и мелющих шаров) параметров, при которых наблюдается проскальзывание шаров по обечайке.

В настоящей работе моделируется движение одиночного мелющего шара внутри шаровой мельницы и исследуется возможность перехода этого движения в режим с проскальзыванием.

2. Математическая модель движения одиночного шарика

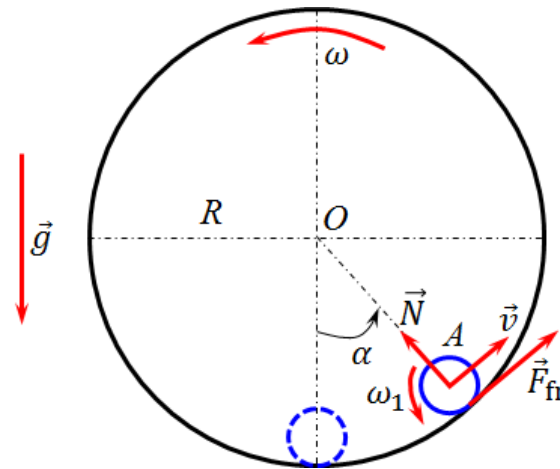
Барабан радиуса R , моделирующий мельницу, находится в вертикальной плоскости; ускорение \vec{g} силы тяжести направлено вниз. Шарик с массой m , радиусом $r < R$ и центром A соприкасается с внутренней поверхностью барабана. Положение шарика описывается величиной α – углом отклонения радиус-вектора точки A относительно центра мельницы O , отсчитанным от вертикали против часовой стрелки (рис. 2.1).

Мельница вращается с угловой скоростью ω , из-за чего шарик начинает прокатываться по поверхности с некоторой угловой скоростью ω_1 , а его центр масс A движется со скоростью \vec{v} . Очевидно,

$$v = (R - r) \frac{d\alpha}{dt}, \quad (2.1)$$

при этом \vec{v} перпендикулярна уже упомянутому вектору \vec{OA} .

Помимо силы тяжести, на шарик действуют сила нормальной реакции \vec{N} , ориентированная к центру мельницы, и сила трения \vec{F}_{fr} . При этом векторы \vec{F}_{fr} и \vec{v} сонаправлены, поскольку направление силы трения согласовано с вращением шарика.



Р и с у н о к 2.1

Геометрия задачи и силы, приложенные к мельющему шару

В проекциях на оси касательной и главной нормали к траектории движения дифференциальные уравнения движения шарика таковы:

$$m \frac{dv}{dt} = F_{\text{fr}} - mg \sin \alpha, \quad (2.2)$$

$$m \frac{v^2}{R - r} = N - mg \cos \alpha, \quad (2.3)$$

здесь и далее v вычисляется согласно (2.1), а t есть время.

Вращение шарика вокруг его оси симметрии описывается уравнением

$$I \frac{d\omega_1}{dt} = r F_{\text{fr}}, \quad (2.4)$$

поскольку только сила трения имеет ненулевой момент относительно точки A . Здесь $I = 2mr^2/5$ есть момент инерции шарика относительно оси, проходящей через его центр.

Система (2.1)–(2.4) содержит пять неизвестных функций времени: v , α , F_{fr} , N , ω_1 . Для ее замыкания следует учесть, что движение шарика может происходить в одном из двух альтернативных режимов:

- Движение без проскальзывания, при котором скорость точки соприкосновения шарика с барабаном равна скорости соответствующей точки мельницы, а сила трения меньше своего предельного значения:

$$v + \omega_1 r = \omega R, \quad (2.5)$$

$$F_{\text{fr}} < fN. \quad (2.6)$$

- Проскальзывание шарика по поверхности мельницы, при котором точка соприкосновения шарика с поверхностью опережает соответствующую точку самой поверхности, а сила трения принимает предельное значение:

$$v + \omega_1 r > \omega R, \quad (2.7)$$

$$F_{\text{fr}} = fN. \quad (2.8)$$

Безразмерная величина f есть коэффициент трения.

Режим вращения самой мельницы известен заранее. До момента $t = t_m$ она с постоянным угловым ускорением ϵ разгоняется из состояния покоя до максимальной угловой скорости $\omega_m = \epsilon t_m$, после чего вращается равномерно:

$$\omega = \begin{cases} \epsilon t, & 0 \leq t \leq t_m, \\ \omega_m, & t > t_m. \end{cases} \quad (2.9)$$

Одно из двух соотношений (2.5) или (2.8) замыкает систему уравнений движения. Выбор конкретного соотношения производится исходя из того, какое условие – (2.6) или (2.7) – выполняется в данный момент времени.

В начальный момент времени шарик покоится в нижней точке барабана:

$$\alpha(0) = 0, \quad v(0) = 0, \quad \omega_1(0) = 0, \quad N(0) = mg, \quad F_{\text{fr}}(0) = 0, \quad (2.10)$$

так что при $t = 0$ выполнено условие (2.6). Следовательно, шарик начнет двигаться, не скользя по обечайке.

Как было сказано выше, с точки зрения получения ГНП интерес представляет движение мелющего шара со скольжением. Поэтому важной задачей является определение условий, при которых возможен переход к данному режиму. Для этого следует предварительно изучить начинающееся при $t = 0$ движение шарика без проскальзывания.

3. Режим движения шарика без проскальзывания

Рассмотрим систему (2.1)–(2.4) с присоединенными к ней условиями (2.5)–(2.6).

Из (2.1) и (2.5) вытекает, что угловая скорость шарика может быть найдена как

$$\omega_1 = \frac{R}{r}\omega - \frac{R-r}{r} \cdot \frac{d\alpha}{dt}. \quad (3.1)$$

Отсюда и из (2.4) следует, что сила трения равна

$$F_{\text{fr}} = \frac{2}{5}m \left[R \frac{d\omega}{dt} - (R-r) \frac{d^2\alpha}{dt^2} \right]. \quad (3.2)$$

Подстановка (2.1) и (3.2) в (2.2) после очевидных упрощений приводит к следующему уравнению для $\alpha(t)$:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \Omega^2 \sin \alpha = K \frac{d\omega}{dt}, \quad (3.3)$$

где введены обозначения

$$\Omega^2 = \frac{5}{7} \cdot \frac{g}{R-r}, \quad K = \frac{2}{7} \cdot \frac{R}{R-r}. \quad (3.4)$$

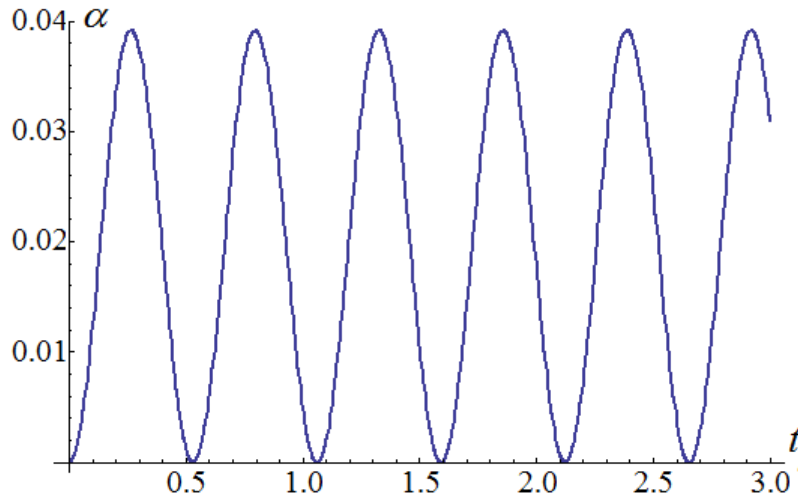
Начальные данные к этому уравнению легко найти из (2.1) и (2.10):

$$\alpha(0) = 0, \quad \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=0} = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.3) с условиями (3.5) и дополнительными соотношениями (2.9) и (3.4) является основным при описании динамики шарика в режиме без проскальзывания. Зная $\alpha(t)$, можно легко найти кинематические характеристики этого тела, а также нормальную и касательную реакции из равенств (2.1), (2.3), (3.1) и (3.2).

Вначале задача (3.3)–(3.5) была исследована численно при $t \in [0; t_m]$; при этом значения параметров соответствовали реальным характеристикам механизма. Мелющий шар был железным (плотность $\rho = 7860$ кг/м³), а его диаметр $2r$ мог составлять 5, 8 или 10 мм. Диаметр барабана считался равным $2R = 110$ мм. Максимальная угловая скорость мельницы ω_m бралась равной 50, 100, 150, 200 и 250 об/мин, а ее время разгона t_m до этой скорости – 3 или 5 секунд. Коэффициент трения f принимал одно из двух значений: 0.05 или 0.1.

При любых комбинациях указанных параметров величина $F_{\text{fr}} - fN$ при $t \leq t_m$ отрицательна, т.е. перехода к проскальзыванию не происходит. Колебания угла α весьма сходны с гармоническими, а их амплитуда не превышает сотых долей радиана (рис. 3.1).



Р и с у н о к 3.1

Изменение угла при $2r = 10$ мм, $t_m = 3$ с, $\omega_m = 250$ об/мин, $f = 0.1$

Поскольку угол α мал, то $\sin \alpha \approx \alpha$. Это позволяет более подробно исследовать уравнение (3.3), линеаризовав его:

$$\frac{d^2 \alpha}{dt^2} + \Omega^2 \alpha = K \frac{d\omega}{dt}. \quad (3.6)$$

В силу (2.9) решением задачи (3.6), (3.5) при $t \leq t_m$ является функция

$$\alpha(t) = \frac{K\epsilon}{\Omega^2} (1 - \cos \Omega t). \quad (3.7)$$

Значения периода колебаний угла α , равные $2\pi/\Omega$, хорошо согласуются с результатами численного решения исходного нелинейного уравнения (3.3).

Наибольшее значение $\alpha(t)$ является малой величиной. С учетом (3.4) это требование можно записать в одной из двух форм:

$$\frac{2K\epsilon}{\Omega^2} \ll 1 \Leftrightarrow \frac{R\epsilon}{g} \ll \frac{5}{4}. \quad (3.8)$$

При заданных параметрах механизма наибольшее угловое ускорение мельницы $\epsilon = \omega_m/t_m$ равно 8.73 рад/с², а отношение $R\epsilon/g$ составляет 0.049. Тем самым, условие малости колебаний (3.8) выполнено и линеаризация уравнения (3.3) обоснованна.

4. Переход к режиму движения с проскальзыванием

Переход к скольжению шарика по обечайке может произойти либо во время разгона мельницы, либо после установления стационарного режима ее вращения.

В первом случае выполнено равенство (3.7). Учитывая условия (3.8) и пренебрегая малыми более высокого порядка, нежели α , из (2.3) и (3.2) нетрудно получить, что

$$F_{\text{fr}} - fN = mg \left[\frac{2}{5} \cdot \frac{R\epsilon}{g} \left(1 - \frac{2}{7} \cos \Omega t \right) - f \right].$$

Для начала скольжения требуется, чтобы величина $F_{\text{fr}} - fN$ была неотрицательна. Принимая во внимание, что $\cos \Omega t \geq -1$, найдем отсюда условие возникновения проскальзывания при разгоне мельницы:

$$\frac{R\epsilon}{g} \geq \frac{35}{18} f. \quad (4.1)$$

Отметим, что при заданных технологических и конструктивных параметрах системы период колебаний угла α в несколько раз меньше, чем t_m . Поэтому при $t \leq t_m$ функция $\cos \Omega t$ “успевает” принять минимальное значение, а следовательно, нет необходимости в построении более жестких оценок комплекса $R\epsilon/g$, чем неравенство (4.1).

Для описанных ранее наборов параметров условие (4.1) не выполняется, поэтому перехода к желательному режиму движения не происходит. Этот вывод подтверждается и результатами численного решения исходного уравнения (3.3).

Изучим теперь возможность перехода к скольжению шарика после окончания разгона барабана. Угол отклонения шарика от вертикали будем теперь обозначать β ; для удобства отсчет времени вновь начнем с нуля. Учитывая, что скорость ω теперь постоянна и предполагая, что величина β также мала, по аналогии с (3.6) получим:

$$\frac{d^2 \beta}{dt^2} + \Omega^2 \beta = 0. \quad (4.2)$$

Начальные условия для этого уравнения вытекают из непрерывности угла отклонения и скорости его изменения:

$$\beta(0) = \alpha(t_m), \quad \left. \frac{d\beta}{dt} \right|_{t=0} = \left. \frac{d\alpha}{dt} \right|_{t=t_m}. \quad (4.3)$$

Общее решение (4.2) может быть представлено в виде

$$\beta(t) = \beta_0 \sin(\Omega t + \theta).$$

Для дальнейшего знать начальную фазу колебаний θ не требуется, а амплитуду легко найти из (4.3):

$$\beta_0 = \frac{K\epsilon}{\Omega^2} \sqrt{2 - 2 \cos \Omega t_m}.$$

Понятно, что данное выражение не может быть больше $2K\epsilon/\Omega^2$. Вместе с условием (3.8) это означает, что $\beta_0 \ll 1$, а следовательно, угол β действительно мал.

Нетрудно показать, что при $t > t_m$ из (2.1), (2.3) и (3.2) следует формула

$$F_{\text{fr}} - fN = m \left[\frac{2}{5} (R - r) \Omega^2 \beta - f(R - r) \left(\frac{d\beta}{dt} \right)^2 - fg \right].$$

С точностью до малых первого порядка это выражение преобразуется в

$$F_{\text{fr}} - fN = mg\left(\frac{2}{7}\beta - f\right).$$

Отсюда следует, что для перехода в режим проскальзывания должно, как минимум, выполняться неравенство $2\beta_0/7 \geq f$. Взяв максимально возможное значение β_0 и учитывая (3.4), получим окончательно:

$$\frac{R\epsilon}{g} \geq \frac{35}{8}f. \quad (4.4)$$

Последнее ограничение на значения параметров R и ϵ является более жестким, чем (4.1). Поэтому если переход к режиму проскальзывания и произойдет, то это случится на этапе разгона мельницы.

Интересно, что ни один из критериев (4.1) и (4.4) не включает радиуса шарика r .

5. Заключение

В настоящей работе построена и исследована математическая модель движения мелющего шара внутри шаровой мельницы. В начальный момент времени шарик и мельница покоятся, затем мельница начинает вращаться, а шарик – двигаться относительно ее поверхности без проскальзывания.

Основным параметром, определяемым в рамках данной модели, служит угол α отклонения шара от исходного вертикального положения. Его динамика описывается нелинейным дифференциальным уравнением (3.3). Для исследования данного уравнения была проведена серия численных экспериментов, в ходе которых выяснилось, что угол α мал. Данный факт позволил упростить уравнение и получить его аналитическое решение, свойства которого были исследованы более детально.

Были изучены два этапа движения мельницы: разгон и последующее вращение с постоянной угловой скоростью. Для каждого из этих этапов получено условие перехода движения шарика в режим скольжения по обечайке. Для периода разгона данное условие оказывается более мягким. Поскольку этот этап предшествует вращению с постоянной скоростью, переход к скольжению возможен только во время разгона мельницы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Berman, A. Erdemir, A. V. Sumant, “Graphene: a new emerging lubricant”, *Materials Today*, **17**:1 (2014), 31–42.
2. В. Ф. Першин, В. Г. Однолько, С. В. Першина, *Переработка сыпучих материалов в машинах барабанного типа*, Машиностроение, М., 2009, 220 с.
3. V. Leon, M. Quintana, M. A. Herrero [et al.], “Few-layer graphenes from ball-milling of graphite with melamine”, *Chem. Commun.*, **47** (2011), 10936–10938.
4. I.-Y. Jeon, Y.-R. Shin, G.-J. Sohn [et al.], “Edge-carboxylated graphene nanosheets via ball milling”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **109** (2012), 5588–5593.

5. C. Damm, T.-J. Nacken, W. Peukert, “Quantitative evaluation of delamination of graphite by wet media milling”, *Carbon*, **81** (2015), 284–294.
6. C. Knieke, A. Berger, M. Voigt [et al.], “Scalable production of graphene sheets by mechanical delamination”, *Carbon*, **48** (2010), 3196–3204.
7. R. Nandhini, P. A. Mini, B. Avinash [et al.], “Supercapacitor electrodes using nanoscale activated carbon from graphite by ball milling”, *Materials Letters*, **87** (2012), 165–168.
8. K. Suzuki, K. Sumiama, “Control of structure and formation of amorphous and nonequilibrium crystalline metals by mechanical milling (Overview)”, *Materials Transactions, JIM*, **36**:2 (1995), 188–197.
9. Д. А. Ю. Аль-Саади, В. Ф. Першин, Б. Н. Салимов, С. А. Монтаев, “Механоактивация графитовой смазки в высокоскоростной планетарной мельнице”, *Вестник Тамбовского государственного технического университета*, **22**:4 (2016), 633–641.

Поступила 25.04.2017

MSC2010 34A25, 70J35

Investigation of plane motion of a single ball inside a ball mill

© A. O. Syromyasov⁴, A. I. Popov⁵, V. F. Pershin⁶

Abstract. Simple model of producing graphite lubricant with nanosized plates via mechanical lamination of graphite is studied. A ball placed inside a ball mill is under the action of gravity force and of friction force. Both the ball and the mill begin moving from the state of rest; the mill's acceleration is supposed to be known. In theory the ball may move either with slipping along the mill's surface or without such slipping. It is shown that when the mechanism's parameters have authentic values the equations of ball's motion may be linearized. In this case the ball oscillates near-harmonically. The frequency of these oscillations is found; estimations for friction and normal reaction forces are found, too. The condition of the ball movement transition to slipping mode is obtained.

Key Words: graphenenanoplates, graphite lubricant, ball mill, forced motion of a body, harmonic oscillations, linearization of ordinary differential equations.

REFERENCES

1. D. Berman, A. Erdemir, A. V. Sumant, “Graphene: a new emerging lubricant”, *Materials Today*, **17**:1 (2014), 31–42.

⁴ **Aleksei O. Syromyasov**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6520-0204>, syall@yandex.ru

⁵ **Andrey I. Popov**, Associate Professor, Department “Technics and Technology of nanoproductions producing”, Tambov State Technical University (106 Sovetskaya Str., Tambov 392000, Russia), Ph.D. (Pedagogics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0297-2076>, olimp_popov@mail.ru

⁶ **Vladimir F. Pershin**, Professor, Department “Technical Mechanics and Machine Details”, Tambov State Technical University (106 Sovetskaya Str., Tambov 392000, Russia), D.Sc. (Technics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0213-9001>, pershin.home@mail.ru

2. V. F. Pershin, V. G. Odnolko, S. V. Pershina, *Pererabotka sypuchih materialov v mashinah barabannogo tipa [Treatment of bulk solids in drum-type machines]*, Mashinostroenie Publ., Moscow, 2009 (In Russ.), 220 p.
3. V. Leon, M. Quintana, M. A. Herrero [et al.], “Few-layer graphenes from ball-milling of graphite with melamine”, *Chem. Commun.*, **47** (2011), 10936–10938.
4. I.-Y. Jeon, Y.-R. Shin, G.-J. Sohn [et al.], “Edge-carboxylated graphene nanosheets via ball milling”, *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, **109** (2012), 5588–5593.
5. C. Damm, T.-J. Nacken, W. Peukert, “Quantitative evaluation of delamination of graphite by wet media milling”, *Carbon*, **81** (2015), 284–294.
6. C. Knieke, A. Berger, M. Voigt [et al.], “Scalable production of graphene sheets by mechanical delamination”, *Carbon*, **48** (2010), 3196–3204.
7. R. Nandhini, P. A. Mini, B. Avinash [et al.], “Supercapacitor electrodes using nanoscale activated carbon from graphite by ball milling”, *Materials Letters*, **87** (2012), 165–168.
8. K. Suzuki, K. Sumiuama, “Control of structure and formation of amorphous and nonequilibrium crystalline metals by mechanical milling (Overview)”, *Materials Transactions, JIM*, **36**:2 (1995), 188–197.
9. D. A. Yu. Al-Saadi, V. F. Pershin, B. N. Salimov, S. A. Montaev, “Mehanoaktivacija grafitovoj smazki v vysokoskorostnoj planetarnoj mel’nice [Mechanoactivation of graphite lubricant in a high-speed planetary-type mill]”, *Vestnik Tambovskogo gosudarstvennogo tekhnicheskogo universiteta*, **22**:4 (2016), 633–641.

Submitted 25.04.2017

УДК 517.9

Собственные моды колебаний в ограниченном бассейне переменной глубины

© А. В. Багаев¹, Е. Н. Пелиновский²

Аннотация. Обсуждается математическая задача нахождения собственных мод для волнового уравнения с переменными коэффициентами, описывающего малые колебания несжимаемой идеальной однослойной или двухслойной жидкости в замкнутом бассейне с неровным дном. Найдены собственные моды колебаний при определенной функциональной зависимости ширины и глубины бассейна. Показано, что такие собственные моды выражаются через многочлены Чебышева второго рода. Приведены некоторые свойства собственных мод. В частности, исследованы собственные моды для бассейнов следующих конфигураций: 1) постоянной ширины, 2) постоянной глубины, 3) «согласованного» канала переменных ширины и глубины. В первом случае найден их параметрический вид, а в двух других случаях явный вид. В заключении обсуждается физическая интерпретация и обоснование реализуемости полученных решений.

Ключевые слова: волновое уравнение с переменными коэффициентами, уравнение Клейн–Гордона, задача Штурма–Лиувилля, многочлены Чебышева второго рода, колебания идеальной жидкости в замкнутом бассейне.

1. Введение

Метод разделения переменных для уравнений с частными производными приводит к задаче Штурма–Лиувилля. В простейших случаях необходимо найти нетривиальные решения обыкновенного дифференциального уравнения

$$L(y) + \lambda \rho(x)y = 0, \quad a < x < b, \quad \rho(x) > 0 \quad (1.1)$$

с граничными условиями типа Неймана или Дирихле, где

$$L(y) \equiv \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{dy}{dx} \right) - q(x)y, \quad k(x), q(x) \geq 0, \quad (1.2)$$

¹ **Багаев Андрей Владимирович**, доцент кафедры «Прикладная математика», ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Н. Новгород, ул. Минина, д. 24), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, a.v.bagaev@gmail.com

² **Пелиновский Ефим Наумович**, профессор кафедры «Прикладная математика», ФГБОУ ВО «Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева» (603950, Россия, г. Н. Новгород, ул. Минина, д. 24), профессор кафедры информационных систем и технологий, ФГАОУ ВО «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603155, Россия, Нижний Новгород, ул. Б. Печёрская, д. 25/12), главный научный сотрудник, ФГБНУ «Федеральный исследовательский центр Институт прикладной физики РАН» (603950, г. Н. Новгород, ул. Ульянова, д. 46), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5092-0302>, pelinovsky@gmail.com

λ – собственное число. Лишь только для некоторых физических задач удается найти решения уравнения (1.1), причем, как правило, в виде специальных функций.

Трансформационная техника ([1],[2],[3]) позволяет перейти от гиперболического волнового уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = \rho(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами и тем самым найти решение задачи Штурма–Лиувилля в элементарных функциях. Для этого перехода коэффициенты уравнения (1.3) должна связывать некоторая функциональная зависимость, что, конечно, сужает общность исходной задачи. Тем не менее, такие случаи интересны для физиков, поскольку позволяют доказать существование бегущих волн в сильно неоднородных средах.

Изложенный подход мы применим к нахождению собственных мод колебаний несжимаемой идеальной жидкости в ограниченном канале прямоугольного сечения. В [4] нами найдена конфигурация бассейна, при которой исходное волновое уравнение колебаний жидкости (с переменными коэффициентами) заменой сводится к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами. Некоторые такие частные конфигурации были получены в [5]. В настоящей работе нами будет исследован случай, когда коэффициенты волнового уравнения, по крайней мере один из них, на концах интервала обращаются в нуль. Показано, что собственные моды такого уравнения могут быть выражены через многочлены Чебышева второго рода, а потому обладают рядом замечательных свойств. В частности, будут исследованы собственные моды для бассейна 1) постоянной ширины, 2) постоянной глубины, 3) «согласованного» канала переменных ширины и глубины.

2. Преобразование волнового уравнения к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

Волновые движения малой амплитуды несжимаемой идеальной жидкости в канале прямоугольного сечения описываются волновым уравнением [6]

$$B(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(B(x) c^2(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.1)$$

где $\eta(x, t)$ — смещение раздела слоев разной плотности в случае внутренних волн и водной поверхности в случае поверхностных волн, $c(x)$ — скорость распространения волн, $B(x)$ — ширина канала прямоугольной формы. Для поверхностных волн квадрат скорости распространения волн определяется равенством $c^2(x) = gh(x)$, где g — значение ускорения свободного падения, $h(x)$ — глубина бассейна, а для внутренних волн —

$$c^2(x) = g' \frac{h_1 h_2(x)}{h_1 + h_2(x)}, \quad (2.2)$$

где h_1 и $h_2(x)$ — глубины верхнего и нижнего слоев, $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ — редуцированное значение ускорения свободного падения, $\rho_1 < \rho_2$ — плотности верхнего и нижнего слоев.

Будем искать решение уравнения (2.1) в виде

$$\eta(t, x) = A(x) \Phi(t, \tau), \quad (2.3)$$

где $A(x)$ — амплитуда и $\tau(x)$ — фаза — время распространения волны. Тогда уравнение (2.1) можно привести к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + p \Phi = 0, \quad (2.4)$$

где p — произвольная константа. При этом должны выполняться три условия [5]. Первое определяет фазу

$$\tau(x) = \int \frac{dx}{c(x)}, \quad (2.5)$$

Второе задает амплитуду

$$A(x) = \frac{\text{const}}{\sqrt{c(x)B(x)}}. \quad (2.6)$$

Третье связывает скорость распространения (следовательно, глубину) и ширину канала

$$\frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{c(x)}{B(x)}} \frac{d}{dx} (c(x)B(x)) \right] = 2p \sqrt{\frac{B(x)}{c(x)}}. \quad (2.7)$$

3. Определение собственных мод уравнения (2.1)

В работе авторов [4] для уравнения (2.7) получен общий вид решения и найдены условия, при которых решения являются ограниченными и определенными всюду. Найдено также ограниченное, но сингулярное решение ($c(x)$ или $B(x)$ обращаются в нуль). Оно получается только при $p < 0$. Такое решение соответствует конфигурации канала типа «озеро». Его можно записать в следующем виде

$$\begin{cases} c(x) = \sqrt{q} \frac{\sqrt{1 - \psi^2(x)}}{|\psi'(x)|}, \\ B(x) = \frac{\gamma}{\sqrt{q}} |\psi'(x)| \sqrt{1 - \psi^2(x)}, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\psi(x)$ — непрерывная на $[0, L]$ и дифференцируемая на $(0, L)$ функция, L — длина канала, $q = -p > 0$, $\gamma > 0$ — произвольная константа.

Поскольку решения $c(x)$ и $B(x)$ не изменяются при замене $\psi(x)$ на $-\psi(x)$, то можно полагать, что $\psi'(x) \geq 0$, то есть $\psi(x)$ — возрастающая на $[0, L]$ функция.

Будем также считать, что

$$\psi(0) = -1, \quad \psi(L) = 1. \quad (3.2)$$

Таким образом, $c(x)$ и $B(x)$ если и имеют особые точки, то только на концах отрезка $[0, L]$.

Для получения фазы и амплитуды применим формулы (2.5)–(2.6):

$$\tau(x) = \int_0^x \frac{dx}{c(x)} = \int_0^x \frac{\psi'(x) dx}{\sqrt{q} \sqrt{1 - \psi^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{q}} (\arcsin \psi(x) + \frac{\pi}{2}), \quad (3.3)$$

$$A(x) = \frac{a_0}{\sqrt{c(x)B(x)}} = \frac{a_0}{\sqrt{\gamma}} \frac{1}{\sqrt{1 - \psi^2(x)}}, \quad (3.4)$$

где a_0 — произвольная константа.

Значения τ ограничены, что соответствует конечному времени распространения, при этом

$$\tau(0) = 0, \quad \tau(L) = \frac{\pi}{\sqrt{q}}. \quad (3.5)$$

Решения уравнения Клейна–Гордона (2.4) будем искать в виде

$$\Phi(t, \tau) = \cos(\omega t - \varphi) \sin K\tau. \quad (3.6)$$

Заметим, что амплитуда $A(x)$ на концах интервала $[0, L]$ неограниченно возрастает и потому для ограниченности решения $\eta(x, t)$ необходимо потребовать

$$\Phi(t, \tau(0)) = 0, \quad \Phi(t, \tau(L)) = 0. \quad (3.7)$$

Из условий (3.7) с учетом (3.5) находим значение для K :

$$K_n = n\sqrt{q}. \quad (3.8)$$

Для того, чтобы функция $\Phi(t, \tau)$ являлась решением уравнения (2.4), необходимо выполнение соотношения

$$\omega_n^2 = K_n^2 + p. \quad (3.9)$$

Отсюда находим собственное значение, определяющее частоту колебаний собственных мод «озера»:

$$\omega_n = \sqrt{q}\sqrt{n^2 - 1}. \quad (3.10)$$

Как видим, спектр частот такого «озера» не является эквидистантным. Таким образом,

$$\Phi_n(t, \tau) = \cos(\omega_n t - \varphi) \sin(n\sqrt{q}\tau). \quad (3.11)$$

В силу (3.3) имеем

$$\sin(n\sqrt{q}\tau(x)) = \sin\left(n\left(\arcsin \psi(x) + \frac{\pi}{2}\right)\right) = (-1)^{n+1} \sin(n \arccos \psi(x)), \quad (3.12)$$

следовательно,

$$\eta(t, x) = A(x)\Phi(t, \tau) = \frac{(-1)^{n+1}a_0}{\sqrt{\gamma}} \cos(\omega_n t - \varphi) \frac{\sin(n \arccos \psi(x))}{\sqrt{1 - \psi^2(x)}}. \quad (3.13)$$

Положив

$$A_n = \frac{(-1)^{n+1}a_0}{\sqrt{\gamma}}, \quad u_n(x) = \frac{\sin(n \arccos \psi(x))}{\sqrt{1 - \psi^2(x)}}$$

будем окончательно иметь выражение для n -ой собственной моды колебаний

$$\eta_n(t, x) = A_n \cos(\omega_n t - \varphi) u_n(x). \quad (3.14)$$

Общий вид решения уравнения (2.1) имеет вид

$$\eta(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(\omega_n t - \varphi) u_n(x). \quad (3.15)$$

Обозначив $s = \psi(x)$, функцию $u_n(x)$ можно переписать в виде

$$u_n(s) = \frac{\sin(n \arccos s)}{\sqrt{1 - s^2}}, \quad s \in [-1, 1]. \quad (3.16)$$

Формула (3.16) определяет в точности многочлен Чебышева второго рода $U_{n-1}(s)$ на отрезке $[-1, 1]$ (см., например, [7],[8]). Благодаря этому функции $u_n(x)$ обладают рядом замечательных свойств.

4. Свойства функций $u_n(x)$

Обозначим через $L_2([0, L], w)$ пространство функций с интегрируемым квадратом на $[0, L]$ относительно весовой функции $w(x) = \psi'(x)\sqrt{1 - \psi^2(x)}$. Скалярное произведение в $L_2([0, L], w)$ будем обозначать через $\langle \cdot, \cdot \rangle$, а норму — через $\| \cdot \|$.

В силу ортогональности многочленов Чебышева второго рода $\{U_n(s)\}$ на отрезке $[-1, 1]$ с весовой функцией $\sqrt{1 - s^2}$ имеем:

Свойство 1⁰ Функции $\{u_n(x)\}$ ортогональны в $L_2([0, L], w)$ и $\|u_n(x)\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Следующее свойство вытекает из рекуррентного соотношения для многочленов Чебышева второго рода $U_{n+1}(s) = 2sU_n(s) - U_{n-1}(s)$, где $U_0(s) = 1$, $U_1(s) = 2s$.

Свойство 2⁰ Имеет место рекуррентное соотношение

$$u_{n+1}(x) = 2\psi(x)u_n(x) - u_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

где $u_0(x) = 0$, $u_1(x) = 1$.

В частности, мы получаем:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= 1, & u_2(x) &= 2\psi(x), & u_3(x) &= 4\psi^2(x) - 1, \\ u_4(x) &= 8\psi^3(x) - 4\psi(x), & u_5(x) &= 16\psi^4(x) - 12\psi^2(x) + 1. \end{aligned}$$

Из общей формулы для многочленов Чебышева второго рода

$$U_n(s) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_{n+1}^{2k+1} (s^2 - 1)^k s^{n-2k},$$

где C_n^k — число сочетаний из n по k , получаем

Свойство 3⁰ Имеет место формула

$$u_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} C_n^{2k+1} (\psi^2(x) - 1)^k \psi^{n-1-2k}(x),$$

где $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ — целая часть числа $\frac{n-1}{2}$.

Используя непрерывность $s = \psi(x)$ и правило Лопиталя, можно доказать

Свойство 4⁰ Для $n > 1$ имеем $u_n(0) = (-1)^{n+1}n$, $u_n(L) = n$.

Из монотонности $\psi(x)$ на $(0, L)$ вытекает

Свойство 5⁰ Существует ровно $n - 1$ нулей $x_1, x_2, \dots, x_{n-1} \in (0, L)$ функции $u_n(x)$, причем $\psi(x_k) = \cos \frac{\pi k}{n}$, где $k = 1, 2, \dots, n - 1$.

Свойство 6⁰ Если $\psi(L - x) = -\psi(x)$, то $x_k + x_{n-k} = L$, где $k = 1, 2, \dots, n - 1$, то есть нули функции $u_n(x)$ расположены симметрично относительно середины отрезка $[0, L]$.

Действительно, в силу условия $\psi(L - x) = -\psi(x)$ имеет место цепочка равенств:

$$\psi(L - x_{n-k}) = -\psi(x_{n-k}) = -\cos \frac{\pi(n-k)}{n} = -\cos \left(\pi - \frac{\pi k}{n} \right) = \cos \frac{\pi k}{n} = \psi(x_k).$$

Поскольку функция $\psi(x)$ монотонна, то $L - x_{n-k} = x_k$, следовательно, $x_k + x_{n-k} = L$, где $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Из свойств многочленов Чебышева второго рода (см., например, стр.106–108 в [7]) получаем

Свойство 7⁰ Имеют место оценки

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{1 - \psi^2(x)}}, \quad x \in (0, L); \quad (4.1)$$

$$|u_n(x)| \leq n, \quad x \in [0, L], \quad (4.2)$$

причем оценка (4.2) точная: равенство $|u_n(x)| = n$ достигается только на концах отрезка $[0, L]$.

Таким образом, функции $u_n(x)$ на концах отрезка $[0, L]$ по абсолютной величине возрастают со скоростью n , а во внутренних точках интервала $(0, L)$ ограничены. Высокие моды «прижаты» к краям бассейна.

Рассмотрим теперь конкретные конфигурации бассейна.

5. Канал постоянной ширины $B(x) = \text{const}$

Согласно (3.1) в случае $B(x) = B_0 = \text{const}$ функция $\psi(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\gamma}{\sqrt{q}} \psi'(x) \sqrt{1 - \psi^2(x)} = B_0, \quad (5.1)$$

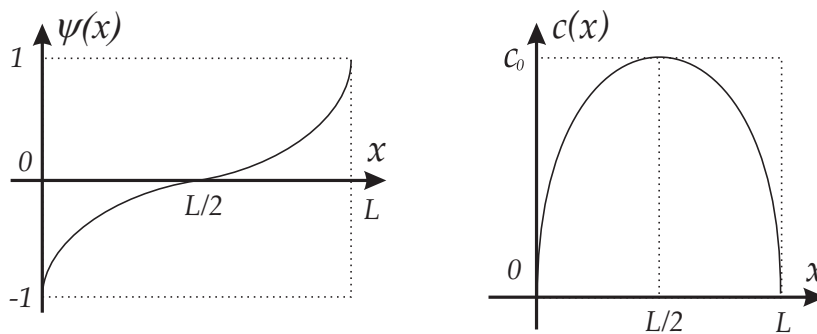
причем $c(x) = \frac{\gamma}{B_0} (1 - \psi^2(x))$. Если через c_0 обозначить максимум $c(x)$ на $[0, L]$, то $\gamma = c_0 B_0$. Интегрируя уравнение (5.1) с учетом условий (3.2), получим $\sqrt{q} = \frac{\pi c_0}{2L}$ и

$$\frac{1}{2} \left(\psi \sqrt{1 - \psi^2} + \arcsin \psi \right) = \frac{\pi}{2L} x - \frac{\pi}{4}. \quad (5.2)$$

Обозначив $s = \psi(x)$, будем иметь параметрическое задание функции $c(x)$:

$$\begin{cases} c(s) = c_0(1 - s^2), \\ x(s) = \frac{L}{\pi} \left(s\sqrt{1 - s^2} + \pi - \arccos s \right), \end{cases} \quad (5.3)$$

где $s \in [-1, 1]$. Отметим, что $c'(x) \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0 + 0$ и $x \rightarrow L - 0$. Функции $\psi(x)$ и $c(x)$ изображены на рис. 5.1.

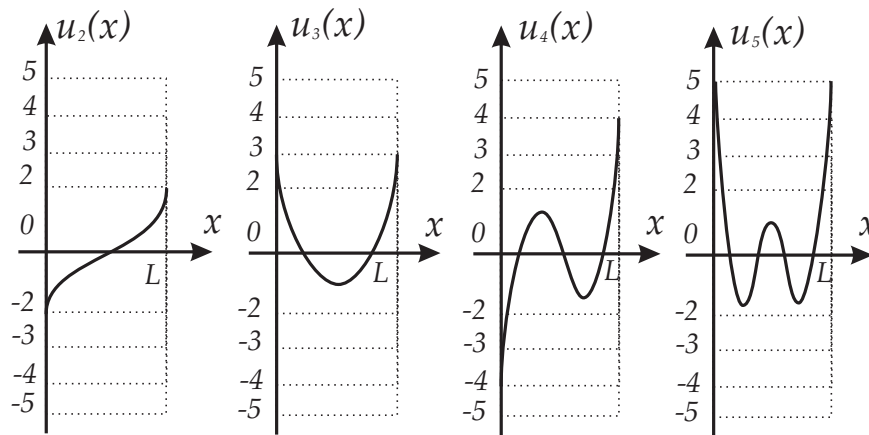


Р и с у н о к 5.1

Ортогональные функции $u_n(x)$ запишутся в этом случае также параметрически:

$$\begin{cases} u_n(s) = \frac{\sin(n \arccos s)}{\sqrt{1-s^2}}, \\ x(s) = \frac{L}{\pi} \left(s\sqrt{1-s^2} + \pi - \arccos s \right). \end{cases} \quad (5.4)$$

Отметим, что поскольку при $x \rightarrow 0+0$ и $x \rightarrow L-0$ имеем $\psi'(x) \rightarrow \infty$, то и $u'_n(x) \rightarrow \infty$, $\forall n > 1$. Последнее означает, что графики функций $u_n(x)$ касаются вертикальных прямых $x = 0$ и $x = L$ (см. рис. 5.2). Таким образом, для этих функций «берег» является особой (сингулярной) точкой, где волновое поле, хотя и ограничено, но ее производная стремится к бесконечности.



Р и с у н о к 5.2

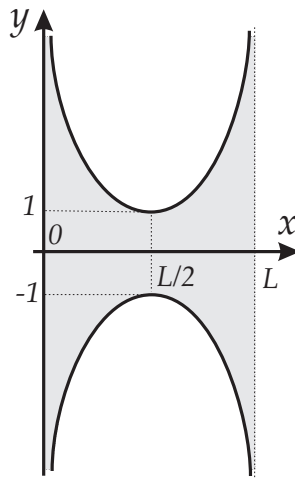
Поскольку $s \in [-1, 1]$, то положив $s = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$, будем иметь

$$\begin{cases} u_n(\cos \theta) = \frac{\sin(n\theta)}{\sin \theta}, \\ x(\cos \theta) = \frac{L}{\pi} (\sin \theta \cos \theta + \pi - \theta). \end{cases} \quad (5.5)$$

Отсюда нетрудно получить нули функции $u_n(x)$:

$$x_k = \frac{L}{2\pi} \sin \frac{2\pi k}{n} + \frac{L(n-k)}{n}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

В силу оценки (4.1) модуль $|u_n(x)|$ ограничивает функция $y(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\psi^2(x)}}$ и поэтому все функции $u_n(x)$ лежат в закрашенной части рис. 5.3.



Р и с у н о к 5.3

6. Канал постоянной глубины $c(x)=\text{const}$

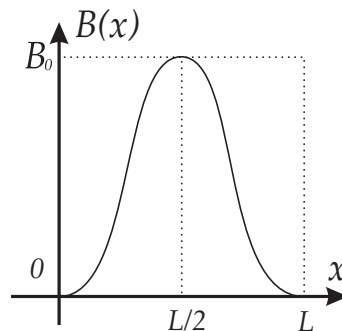
Если бассейн имеет постоянную глубину $c(x) = c_0 = \text{const}$, то согласно (3.1) функция $\psi(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$\sqrt{q}\sqrt{1-\psi^2(x)} = c_0\psi'(x), \quad (6.1)$$

причем $B(x) = \frac{\gamma}{c_0}(1-\psi^2(x))$. Обозначим через B_0 максимум $B(x)$ на $[0, L]$, тогда $\gamma = c_0 B_0$. Интегрируя (6.1) с учетом условий (3.2), получим $\sqrt{q} = \frac{\pi c_0}{L}$ и $\psi(x) = -\cos \frac{\pi x}{L}$. Откуда

$$B(x) = B_0 \sin^2 \frac{\pi x}{L}. \quad (6.2)$$

График функции $B(x)$ изображен на рис. 6.1.



Р и с у н о к 6.1

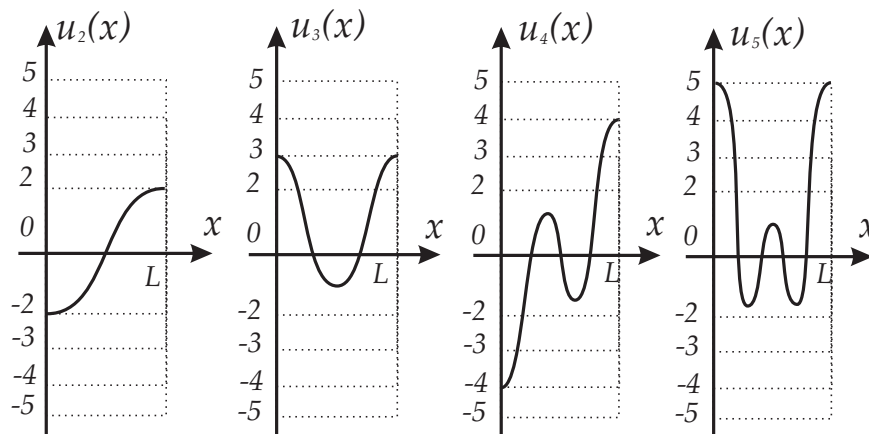
В этом случае функции $u_n(x)$ имеют вид

$$u_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{\sin \frac{\pi n x}{L}}{\sin \frac{\pi x}{L}}. \quad (6.3)$$

В частности (см. рис. 6.2),

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = -2 \cos \frac{\pi x}{L}, \quad u_3(x) = 4 \cos^2 \frac{\pi x}{L} - 1,$$

$$u_4(x) = -8 \cos^3 \frac{\pi x}{L} + 4 \cos \frac{\pi x}{L}, \quad u_5(x) = 16 \cos^4 \frac{\pi x}{L} - 12 \cos^2 \frac{\pi x}{L} + 1.$$



Р и с у н о к 6.2

Поскольку $\psi'(0) = \psi'(L) = 0$, то $u'_n(0) = u'_n(L) = 0$. Нули функции $u_n(x)$ распределены равномерно: $x_k = \frac{Lk}{n}$, $k = 1, \dots, n-1$. В силу оценки (4.1) внутри интервала $(0, L)$ модуль $|u_n(x)|$ ограничен функцией $y(x) = \sin^{-1} \frac{\pi x}{L}$ (см. рис. 5.3).

Отметим также, что в этом случае все моды описываются аналитическими функциями и на «берегах» они имеют нулевые производные.

7. «Согласованный» канал переменной ширины и глубины $c(x)/B(x) = \text{const}$

Согласно (3.1) условие $c(x)/B(x) = \lambda_0 = \text{const}$ влечет, что

$$\psi'(x) = \sqrt{\gamma \lambda_0} / \sqrt{q} \quad (7.1)$$

и $c(x) = \frac{q}{\sqrt{\gamma \lambda_0}} \sqrt{1 - \psi^2(x)}$, $B(x) = \frac{\gamma \sqrt{\gamma \lambda_0}}{q} \sqrt{1 - \psi^2(x)}$. Обозначим через c_0 и B_0 максимумы функций $c(x)$ и $B(x)$ на $[0, L]$. Тогда интегрируя (7.1) с учетом условий (3.2), получим $\psi(x) = \frac{2x-L}{L}$, $\sqrt{q} = \frac{2c_0}{L}$, $\gamma = c_0 B_0$, $\lambda_0 = c_0/B_0$. Отсюда

$$\begin{cases} c(x) = \frac{2c_0}{L} \sqrt{x(L-x)}, \\ B(x) = \frac{2B_0}{L} \sqrt{x(L-x)}. \end{cases} \quad (7.2)$$

Отметим, что производные $c'(x)$ и $B'(x)$ на концах отрезка $[0, L]$ бесконечны. Графики функций $c(x)$ и $B(x)$ похожи на график функции $c(x)$ на рис. 5.1.

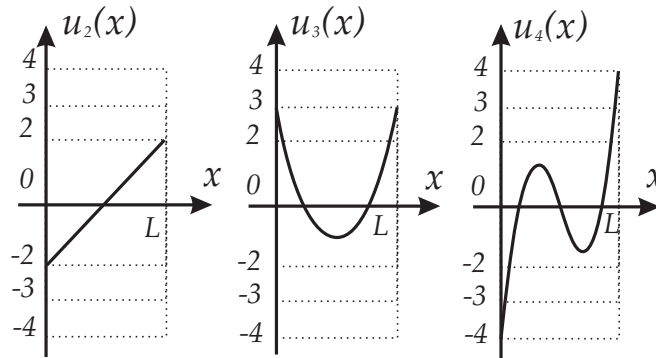
Функции $u_n(x)$ имеют вид

$$u_n(x) = \frac{L}{2} \frac{\sin \left(n \arccos \frac{2x-L}{L} \right)}{\sqrt{x(L-x)}}. \quad (7.3)$$

Поскольку $\psi(x) = \frac{2x-L}{L}$ — многочлен, то в силу свойства 3⁰ функция $u_n(x)$ — многочлен степени $n-1$. Так (см. рис. 7.1),

$$u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = \frac{4x}{L} - 2, \quad u_3(x) = \frac{16x^2 - 16Lx + 3L^2}{L^2},$$

$$u_4(x) = \frac{4(16x^3 - 24x^2L + 10xL^2 - L^3)}{L^3}.$$



Р и с у н о к 7.1

Согласно оценке (4.1) функции $u_n(x)$ по модулю ограничены внутри интервала $(0, L)$ функцией $y(x) = \frac{L}{2\sqrt{x(L-x)}}$ (см. рис. 5.3). Заметим, что $u_n(x)$ имеют конечные производные на концах отрезка $[0, L]$.

Итак, и в этом случае все собственные моды описываются аналитическими функциями и на «берегах» они имеют конечные ненулевые (кроме $n = 1$) производные.

8. Заключение

Выше мы показали существование ограниченных собственных мод колебаний жидкости в замкнутом бассейне переменной глубины («озера»), глубина которого стремится к нулю на «берегах» бассейна. В этой связи необходимо еще раз обсудить граничные условия в такого рода задачах. Это обсуждение уже приводилось в книге Сретенского [9], в которой утверждалось, что даже сингулярное решение, обращающееся в бесконечность на берегу, имеет физический смысл, поскольку волна на берегу обрушивается и диссипирует. В этом случае волна не может отразиться от берега и, следовательно, в рамках линейной теории накапливается неограниченно на берегу. Но из наблюдений известно, что при определенных условиях волна не обрушивается на берегу, а отражается от нее. Этот процесс может быть строго описан в рамках нелинейной теории мелкой воды, если глубина меняется линейно в окрестности береговой линии — уреза [10],[11]. Там же получен аналитический критерий обрушения волны, который соответствует так называемой градиентной катастрофе. Естественно предположить, что такой же режим возможен и в «озерах» другой конфигурации. Тогда физически разумным граничным условием «на берегу» будет условие ограниченности волновой функции. Именно это условие использовано в [12],[13], что позволило аналитически рассмотреть накат необрушенных волн на «безотражательный» пляж. В нашей задаче также получаются ограниченные собственные моды, что свидетельствует об их физической реализуемости. Сингулярность (там, где она появляется) проявляется только в величине производной от смещения, которая не несет физического смысла. И хотя задача Штурма–Лиувилля решается не со стандартными граничными условиями типа Неймана или Дирихле, она ставится корректно и ее решения описывают собственные моды ограниченного водного бассейна переменной конфигурации («озера»).

Благодарности. Представленные результаты получены в рамках выполнения гос. задания в сфере научной деятельности (Задание № 5.5176.2017/БЧ), а также при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных

школ РФ НШ-6637.2016.5 и грантов РФФИ 16-05-000167, 15-45-02061, 16-02-00167.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. G. Bluman, “On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1259–1273.
2. E. Varley, B. Seymour, “A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients”, *Stud. Appl. Math.*, **78** (1988), 183–225.
3. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, “Homogenization of the variable-speed wave equation”, *Wave Motion*, **47**:12 (2010), 496–507.
4. А. В. Багаев, Е. Н. Пелиновский, “Конфигурация канала переменного сечения, допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:3 (2016), 127–136.
5. Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, О. Е. Куркина, Е. А. Рувинская, А. Р. Гиниятуллин, А. А. Наумов, “Безотражательное распространение внутренних волн в канале переменного сечения и глубины”, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, **6**:3 (2013), 46–53.
6. В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков, *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*, СО РАН, Новосибирск, 2000, 419 с.
7. П. К. Суетин, *Классические ортогональные многочлены*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2005, 480 с.
8. J. C. Mason, D. C. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, 2003, 335 с.
9. Л. Н. Сретенский, *Теория волновых движений жидкости*, Наука, М., 1977, 816 с.
10. Е. Н. Пелиновский, *Гидродинамика волн цунами*, ИПФ РАН, Нижний Новгород, 1996, 176 с.
11. Е. Н. Пелиновский, И. И. Диденкулова, А. А. Куркин, А. А. Родин, О. И. Диденкулов, *Аналитическая теория наката морских волн на берег*, НГТУ, Нижний Новгород, 2015, 113 с.
12. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, T. Soomere, “Long surface wave dynamics along a convex bottom”, *J. Geophysical Research - Oceans*, **114**:C07006 (2009).
13. И. И. Диденкулова, Е. Н. Пелиновский, “Об отражении длинной волны от подводного склона”, *Океанология*, **51**:4 (2011), 606–611.

Поступила 28.03.2017

MSC2010 33D45, 34B24, 35C07, 35C10, 35L05

Eigenmodes of water oscillations in the closed basin of variable depth

© A. V. Bagaev³, E. N. Pelinovsky⁴

Abstract. Eigenvalue problem for variable coefficient wave equation describing small oscillations of an incompressible ideal single-layer or two-layer fluid in a closed basin with uneven bottom is discussed. Eigenmodes of oscillations are founded for the channel with functionally associated width and depth. It is shown that such eigenmodes are expressed through Chebyshev polynomials of the second kind. Some properties of the eigenmodes are found. In particular, eigenmodes are described for the following configurations of channel: 1) constant width, 2) constant depth, 3) “coherent” channel of variable width and depth. In the first case the parametric form and in two other cases the explicit form of eigenmodes are found. In conclusion, the physical interpretation and the feasibility of the obtained solutions are discussed.

Key Words: variable-coefficient wave equation, Klein–Gordon equation, Sturm–Liouville problem, Chebyshev polynomials of the second kind, water oscillations in the closed basin.

REFERENCES

1. G. Bluman, “On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1259–1273.
2. E. Varley, B. Seymour, “A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients”, *Stud. Appl. Math.*, **78** (1988), 183–225.
3. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, “Homogenization of the variable-speed wave equation”, *Wave Motion*, **47**:12 (2010), 496–507.
4. A. V. Bagaev, E. N. Pelinovsky, “[The configuration of the variable cross-section channel allowed reflectionless propagation of internal waves in the ocean]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:3 (2016), 127—136 (In Russ.).
5. T. G. Talipova, E. N. Pelinovsky, O. E. Kurkina, E. A. Rouvinskaya, A. R. Giniyatullin, A. A. Naumov, “[Nonreflective propagation of internal waves in a channel of variable cross-section and depth]”, *Fundamental'naya i prikladnaya gidrofizika*, **6**:3 (2013), 46–53 (In Russ.).
6. V. U. Lyapidevsky, V. M. Teshukov, *Matematicheskie modeli rasprostraneniya dlinnykh voln v neodnorodnoy zhidkosti [Mathematical model of propagation of long waves in an inhomogeneous fluid]*, SO RAN, Novosibirsk, 2000 (In Russ.), 419 p.

³ **Andrey V. Bagaev**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev (24 Minin Str., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), PhD (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5155-4175>, a.v.bagaev@gmail.com

⁴ **Efim N. Pelinovsky**, Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev (24 Minin Str., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), Professor, Department of Information Systems, Nizhny Novgorod Branch of High School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod, 603155, Russia), Chief Scientist, Institute of Applied Physics (46 Ul'yanov Str., Nizhny Novgorod, 603950, Russia), PhD (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5092-0302>, pelinovsky@gmail.com

7. P. K. Suetin, *Klassicheskie ortogonal'nye mnogochleny [Classical orthogonal polynomials]*, Fizmatlit, Moscow, 2005 (In Russ.), 480 p.
8. J. C. Mason, D. C. Handscomb, *Chebyshev polynomials*, Chapman and Hall/CRC, 2003, 335 p.
9. L.N. Sretinsky, *Teoriya volnovykh dvizheniy zhidkosti [The theory of wave motions of fluid]*, Nauka Publ., Moscow, 1977 (In Russ.), 816 p.
10. E. N. Pelinovsky, *Gidrodinamika voln tsunami [Tsunami Wave Hydrodynamics]*, Institute Applied Physics Press, Nizhny Novgorod, 1996 (In Russ.), 176 p.
11. E. N. Pelinovsky, I.I. Didenkulova, A.A. Kurkin, A.A. Rodin, O.I. Didenkulov, *Analiticheskaya teoriya nakata morskikh voln na bereg [Analytical theory of sea waves runup on the coast]*, Nizhny Novgorod State Technical University, Nizhny Novgorod, 2015 (In Russ.), 113 p.
12. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, T. Soomere, “Long surface wave dynamics along a convex bottom”, *J. Geophysical Research - Oceans*, **114**:C07006 (2009).
13. I. I. Didenkulovaa, E. N. Pelinovsky, “Reflection of a Long Wave from an Underwater Slope”, *Oceanology*, **51**:4 (2011), 568–573.

Submitted 28.03.2017

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Юрий Николаевич Дерюгин —
К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ

9 мая 2017 года исполнилось 70 лет со дня рождения Дерюгина Юрия Николаевича, доктора физико-математических наук, начальника отдела Института теоретической и математической физики Российского федерального ядерного центра – Всероссийского научного исследовательского института экспериментальной физики (г. Саров).

Юрий Николаевич родился в д. Подлесово Ярославской области. В 1970 году окончил математический факультет Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва.

Трудовая деятельность Юрия Николаевича связана с Институтом теоретической и математической физики РФЯЦ – ВНИИЭФ.

Первыми направлениями его научной деятельности были задачи газовой динамики с нелинейной теплопроводностью и турбулентным перемешиванием; задачи расчета аэродинамических характеристик боевых блоков, нагрева и уноса теплозащитного покрытия. По этим темам им получен ряд ценных научных результатов, написаны и внедрены в производственный счет ряд вычислительных программ, имевших большое практическое значение.

Следующим важным направлением научной деятельности было создание физико-математической модели, методик и вычислительных программ для описания неравновесных процессов в CO₂-газодинамических лазерах на смешении потоков. Созданные расчетные модели позволили выбрать схемы смесевых устройств, на которых были получены рекордные энергетические характеристики. С помощью расчетных моделей были проведены исследования параметров крупногабаритных установок с целью создания комплексов специальных вооружений. На основании материалов этих работ Ю.Н. Дерюгин защитил в 1988 году докторскую диссертацию. В 1990 году ему присвоено ученое звание старшего научного сотрудника.

Являясь специалистом высокой квалификации в области математического моделирования неравновесных процессов газовой динамики, Ю.Н. Дерюгин внес существенный вклад в разработку физико-математических моделей для описания характеристик сверхзвукового кислород-йодного лазера. Под его руководством были разработаны трехмерные методики и созданы вычислительные программы для расчета турбулентного перемешивания химически неравновесных потоков и расчета энергетических характеристик лазера; проведены уникальные трехмерные расчеты, связанные с созданием мощного кислород-йодного лазера непрерывного действия.

Под руководством Ю.Н. Дерюгина и при его непосредственном участии созданы методики и программы, ориентированные на расчет задач механики сплошной среды на адаптивных эйлеровых сетках с выделением особенностей решения, таких как ударные и детонационные волны, контактные разрывы, фронты пламени и т.д. Им разработаны расчетные модели горения ВВ и перехода горения в детонацию. Созданы методики расчета ударно-волновых процессов в замкнутых и полужамкнутых объемах и каналах переменного сечения; разработаны методики расчета течений вязкого газа и движения с учетом упруго-пластических свойств материалов; разработаны методики повышенного порядка точности; разработаны неявные методы интегрирования уравнений Эйлера и Навье-Стокса.

С 1995 под руководством Ю.Н. Дерюгина разрабатываются расчетные модели и созданы программы для описания процессов фильтрации в грунтовых средах и миграции химических и радиоактивных примесей. Созданные методики и программы нашли широкое применение для решения экологических задач для различных регионов страны.

В последние годы Ю.Н. Дерюгин уделяет значительное внимание разработке методик и созданию комплексов программ нового поколения, позволяющих проводить расчеты различных изделий в полномасштабной (замкнутой) постановке.

В настоящее время под руководством Ю.Н. Дерюгина создаются пакеты программ нового поколения ЛОГОС и НИМФА, ориентированные на проведение расчетов в параллельном режиме на многопроцессорных ЭВМ. Пакет программ ЛОГОС предназначен для решения задач гидро-, аэродинамики и тепломассопереноса, а также для расчета связанных и сопряженных задач тепломассопереноса и анализа напряженно-деформированного состояния конструкций. Пакет программ НИМФА ориентирован на решение задач гидроэкологии и сейсмологии. Созданные пакеты программ существенно расширили классы решаемых задач по основной тематике РФЯЦ-ВНИИЭФ. Пакеты программ используются в высокотехнологичных областях промышленности и нашли там важное практическое применение. Разработанные методы и программы численного решения трехмерных задач в параллельном режиме показали высокую эффективность на отечественных вычислительных системах.

Научные интересы Ю.Н. Дерюгина тесно пересекаются с тематикой Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, с которым у него давнее и плодотворное сотрудничество. Научный коллектив ИПМ им. М.В. Келдыша знает Юрия Николаевича как выдающегося ученого, и его работы в области математического моделирования и создания отечественного прикладного программного обеспечения внесли значительный вклад в развитие Российской науки.

С 1997 года Ю.Н. Дерюгин активно участвует в международной деятельности ВНИИЭФ, был руководителем трех проектов. В работах по контракту с Лос-Аламосской национальной лабораторией (США) он занимался созданием связанного кода расчета процессов фильтрации и деформации грунтовых пластов.

Ю.Н. Дерюгин более 25 лет ведет активную педагогическую работу на кафедре прикладной математики НИЯУ МИФИ. В настоящее время он читает курс теории функции комплексного переменного и руководит работой аспирантов. Им подготовлены три канди-

дата физико-математических наук.

Юрий Николаевич на протяжении многих лет сотрудничает с кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва, регулярно участвует в научных семинарах, руководит подготовкой кандидатских и магистерских диссертаций, выпускными квалификационными работами. Так, под его руководством защищено две диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук выпускниками Мордовского государственного университета.

Он является активным участником и членом программного комитета Международных научных конференций по дифференциальным уравнениям и школ-семинаров по математическому моделированию, регулярно проводимых Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва, Средне-Волжским математическим обществом и Институтом прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук.

Дерюгин Юрий Николаевич входит в редакционную коллегию научного журнала «Журнал Средневолжского математического общества», издаваемого ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» и Средне-Волжским математическим обществом.

За время работы во ВНИИЭФ им лично и в соавторстве выпущено более 400 научных отчетов, опубликовано более 70 статей в открытой печати, сделано более 100 докладов на научных конференциях.

За успешную научную и производственную работу Ю.Н. Дерюгин отмечался благодарностями и грамотами руководства подразделения и института, выдвигался на Доску почета подразделения, института и города, имеет благодарность министра. В 1989 году ему присвоено звание «лучший специалист ВНИИЭФ», в 2003 году награжден знаком «Ветеран атомной энергетики и промышленности», в 2006 году - медалью ордена «За заслуги перед Отечеством» 2 степени, Юбилейной медалью «65 лет атомной отрасли России».

Поздравляем юбиляра и желаем Юрию Николаевичу крепкого здоровья, долголетия и творческих успехов на благо российской науки!

Вельмисов П.А.¹, Жалнин Р.В.², Жуков В.Т.³, Козубская Т.К.³, Сенин П.В.²

Сизова Л.И.⁴, Сухарев Л.А.², Тишкин В.Ф.³, Четверушкин Б.Н.³

Чучаев И.И.², Шагалиев Р.М.⁴, Шаманаев П.А.², Щенников В.Н.²

¹ Ульяновский государственный технический университет (г. Ульяновск)

² Национальный исследовательский Мордовский государственный университет (г. Саранск)

³ ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (г. Москва)

⁴ РФЯЦ - ВНИИЭФ (г. Саров)

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском языке, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC 2010;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО - полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (только на русском);
- список литературы.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание

ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);

- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);

- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);

- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

Ключевые слова должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

Текст статьи. При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты - основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение — выводы и рекомендации.

Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

Внимание! Новые правила. *С этого номера в статью включается список литературы на английском языке. Список литературы имеет заголовок **References** и располагается после ключевых слов на английском языке.*

Описание схем библиографических ссылок для раздела References.

Статьи в журнале на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- Перевод заглавия статьи на английский язык;
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

- Автор(ы) (транслитерация);
- название книги (транслитерация);
- [Перевод названия книги в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;
- Количество страниц в издании (250 p.);
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmobib.sty.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте <http://translit.net/ru/bgn/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

*Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями **ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка**, располагается за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru. **ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка** можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.*

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.

Статьи в журналах на русском языке:

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, "[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

Статьи в журналах на английском языке:

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

Статьи в электронном журнале на русском языке:

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

Статьи в сборниках на русском языке:

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

Материалы конференций на русском языке:

A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand], *Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы программ" imeni E. V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem* [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E. V. Voskresensky with international participation] (Saransk, 12-15 July 2016), SVMO Publ., 105-107 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative], *Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam"* [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"] (Saransk, 12-15 July 2016), 231-233 (In Russ.).

Диссертации на русском языке:

P. A. Shamanaev, *Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya* [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются два файла: файл-преамбула и файл-шаблон. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>.

Текст статьи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <Фамилия-ИО>.tex (который включается командой `\input` в файл-преамбулу). Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Оформление заголовков статьи. Для оформления заголовков статьи на русском и английском языках следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Эти команды имеют следующие аргументы:

{УДК или MSC 2010} {название статьи} {автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова}

Оформление текста статьи. Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т. д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`,

`\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , \mathcal{D}_i в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\mathcal{D}}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Оформление рисунков. Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Оформление списков литературы. Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения `thebibliography` и `thebibliographyEn`, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

`\RBibitem{метка для ссылки на источник}`,

а англоязычная библиографическая ссылка – командой

`\Bibitem{метка для ссылки на источник}`.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmobib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок – 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References* с помощью команд из стилевого пакета *svmobib.sty*

Статьи в журналах на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib1}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the  
form of homogeneous vector polynomials]  
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
\yr 2003  
\vol 5  
\issue 1  
\pages 145–151  
\lang In Russ.
```

```
\Bibitem{shamanaevBib2}  
\by P. A. Shamanaev  
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with  
a the perturbation in the form of small linear term with delay]  
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva  
\yr 2016  
\vol 18  
\issue 3  
\pages 61–69  
\lang In Russ.
```

Статьи в журналах на английском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib3}  
\by M. J. Berger, J. Oliger  
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations  
\jour Journal of Computational Physics  
\yr 1984  
\vol 53  
\pages 484–512
```

Статьи в электронном журнале на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib4}  
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,  
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with  
nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]  
\jour Ogarev-online  
\vol 20  
\yr 2016  
\lang In Russ.  
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

Статьи в сборниках на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib5}
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]
\publaddr Ulyanovsk
\publ UlGTU Publ.
\yr 2014
\serial 10
\pages 4–13
\lang In Russ.

Книги (монографии и сборники) на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib6}
\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy
\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]
\publaddr Moscow
\publ Nauka Publ.
\yr 1966
\totalpages 576
\lang In Russ.

Материалы конференций на русском языке:

\Bibitem{shamanaevBib7}
\by A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev
\inbook [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand]
\proc Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы программ" imeni E. V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E. V. Voskresensky with international participation]
\procinfo Saransk, 12-15 July 2016
\publ SVMO Publ.
\pages 105–107
\lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib8}
\by P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov
\inbook [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative]
\proc Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam" [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"]
\procinfo Suzdal, 8-12 July 2016
\pages 231–233
\lang In Russ.

Диссертации на русском языке:

`\Bibitem{shamanaevBib9}`

`\by P. A. Shamanaev`

`\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]`

`\thesisinfo Diss. ...kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]`

`\publaddr Saransk`

`\yr 1997`

`\totalpages 145`

`\lang In Russ.`

Алфавитный указатель

Багаев А. В.	126	Ноздринова Е. В.	91
Баханова Ю. В.	8	Павлова Д. А.	25
Гуревич Е. Я.	25	Пелиновский Е. Н.	126
Ермолаев М. Б.	31	Першин В. Ф.	117
Жужома Е. В.	53	Попов А. И.	117
Казаков А. О.	8	Сафонов К. А.	85
Козлов А. Д.	62	Симонов П. М.	31
Коротков А. Г.	8	Сироткин Д. В.	98
Купцов М. И.	76	Сыромясов А. О.	117
Малкин М. И.	85	Талецкий Д. С.	105
Медведев В. С.	53	Теняев В. В.	76

Терехин М. Т. 76

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректурa: Язовцева О. С.

Перевод: Сыромясов А. О.

Дата выхода в свет 29.06.2017. Цена свободная.

Подписано в печать 01.06.2017. Формат 70x108 1/16. Объем 13,65 усл. печ.л. Тираж 100 экз. Заказ № 743. Типография Издательства Мордовского университета 430005, г. Саранск, ул. Советская, 24

Для заметок

Для заметок

Для заметок

