

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Middle Volga  
Mathematical Society Journal

$\frac{\text{Том}}{\text{Vol.}}$  19  $\frac{\text{№}}{\text{No.}}$  1

2017



СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

---

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900

## Журнал Средневолжского математического общества

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Том 19, № 1. 2017

DOI 10.15507/2079-6900.19.201701

Издается с декабря 1998 года

Периодичность издания: 4 номера в год

MIDDLE VOLGA MATHEMATICAL SOCIETY

---

NATIONAL RESEARCH MORDOVIA STATE UNIVERSITY

DOI 10.15507/2079-6900

ISSN 2079-6900

# **Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva**

**Middle Volga Mathematical Society Journal**

SCIENCE JOURNAL

VOL. 19, No. 1. 2017

DOI 10.15507/2079-6900.19.201701

Published since December 1998

Publication Frequency: 4 issues per year

# Журнал Средневолжского математического общества

Научный журнал

Свидетельство о регистрации средства массовой информации:

ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 г.

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Основные рубрики журнала:

- «Математика»,
- «Прикладная математика и механика»,
- «Математическое моделирование и информатика».

Рубрики соответствуют следующим группам специальностей научных работников: 01.01.00 Математика, 01.02.00 Механика, 05.13.00 Информатика, вычислительная техника и управления.

Журнал входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH), а статьи опубликованные в нем приравняются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (заключение президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских учёных – РИНЦ.

Подписка на журнал осуществляется в любом почтовом отделении связи на всей территории Российской Федерации. Подписной индекс издания в Объединенном каталоге «Пресса России» — 94016.

УЧРЕДИТЕЛИ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68).

ИЗДАТЕЛЬ: федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68)

РЕДАКЦИЯ: межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество» (430005, г. Саранск, ул. Большевистская, д. 68), тел.: 8(8342)270-256, e-mail: [journal@svmo.ru](mailto:journal@svmo.ru), web: <http://journal.svmo.ru>

# Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva

Middle Volga Mathematical Society Journal

Science Journal

Certificate of registration: PI № FS 77-37887 of October 23 2009

Scientific peer-reviewed journal “Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva” publishes original scientific articles and reviews on the physico-mathematical and engineering sciences, review articles, reflecting the most significant events in the mathematical life in Russia and abroad.

The main scientific areas of journal are:

- “Mathematics”,
- “Applied Mathematics and Mechanics”,
- “Mathematical modeling and computer science”.

These areas correspond to the following groups of scientific specialties: 01.01.00 Mathematics, 01.02.00 Mechanics, 05.13.00 Informatics, Computer Science and Controls.

The journal is included in the international reference database Zentralblatt MATH (zbMATH). Published articles are equated to articles in the journals included in the VAK List (the conclusion of VAK presidium dated May 29, 2015 No. 15/348).

The journal is included in the bibliographic database Russian Index of Scientific Citations – RISC.

One can subscribe to the journal in every post office on the entire territory of the Russian Federation. Subscription index of the journal in the United catalogue «Press of Russia» is 94016.

FOUNDERS: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

PUBLISHER: Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education «National Research OgarevMordovia State University» (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia)

EDITORIAL OFFICE: Interregional Public Organization "Middle Volga Mathematical Society" (68 Bolshevistskaya Str., 430005 Saransk, Republic of Mordovia, Russia), Phone: 8(8342)270-256, e-mail: journal@svmo.ru, Web: <http://journal.svmo.ru>

## РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Тишкин Владимир Федорович** — главный редактор, член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук, профессор, зам. директора по научной работе ИПМ им. М.В. Келдыша РАН (Москва, Россия)

**Кузьмичев Николай Дмитриевич** — заместитель главного редактора, профессор, доктор физико-математических наук, профессор кафедры конструкторско-технологической информатики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Шаманаев Павел Анатольевич** — ответственный секретарь, кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Андреев Александр Сергеевич** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Алимов Шавкат Арифджанович** — профессор, доктор физико-математических наук, академик Академии Наук Республики Узбекистан, Малазийский институт стратегических исследований (Куала-Лумпур, Малайзия)

**Ахтямов Азамат Мухтарович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой механики сплошных сред факультета математики и информационных технологий ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Аюпов Шавкат Абдуллаевич** — профессор, академик Академии Наук Республики Узбекистан, доктор физико-математических наук, директор Института математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Бойков Илья Владимирович** — профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой «Высшая и прикладная математика» ФГБОУ ВО «Пензенский государственный университет» (Пенза, Россия)

**Вельмисов Петр Александрович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Высшей математики» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Горбунов Владимир Константинович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный университет» (Ульяновск, Россия)

**Гринес Вячеслав Зигмундович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры фундаментальной информатики Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (Н. Новгород, Россия)

**Дерюгин Юрий Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, начальник научно-исследовательского отдела Института теоретической и математической физики РФЯЦ ВНИИЭФ (Саров, Россия)

**Жабко Алексей Петрович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой теории управления Санкт-Петербургского государственного университета (Санкт-Петербург, Россия)

**Жегалов Валентин Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений Казанского федерального университета (Казань, Россия)

**Кальменов Тынысбек Шарипович** — доктор физико-математических наук, профессор, академик НАН РК, генеральный директор Института математики и математического моделирования Комитета Наук МОН РК, профессор кафедры фундаментальной математики, Казахский национальный университет имени Аль-Фараби (Алматы, Республика Казахстан)

**Камачкин Александр Михайлович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой высшей математики, факультет прикладной математики и процессов управления Санкт-Петербургского государственного университета (Санкт-Петербург, Россия)

**Кузнецов Евгений Борисович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры дифференциальных уравнений Московского авиационного института (Москва, Россия)

**Кризский Владимир Николаевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заместитель директора по научной работе и инновациям Стерлитамакского филиала ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Логинов Борис Владимирович** — доктор физико-математических наук, профессор кафедры «Высшая математика» ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)

**Мартынов Сергей Иванович** — доктор физико-математических наук, профессор, директор политехнического института, Югорский государственный университет (Ханты-Мансийск, Россия)

**Матус Петр Павлович** — доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института математики НАН Беларуси, заведующий кафедрой математического моделирования Люблинского католического университета (Люблин, Польша)

**Починка Ольга Витальевна** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета «Высшая Школа Экономики» (Нижний Новгород, Россия)

**Радченко Владимир Павлович** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой «Прикладная математика и информатика», Самарский государственный технический университет (Самара, Россия)

**Рязанцева Ирина Прокофьевна** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет (Н. Новгород, Россия)

**Салахитдинов Махмуд Салахитдинович** — доктор физико-математических наук, профессор, академик Академии Наук Республики Узбекистан, Институт математики при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека (Ташкент, Республика Узбекистан)

**Спивак Семен Израилевич** — доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой математического моделирования, ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Терехин Михаил Тихонович** — доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин ФГБОУ ВО «Рязанский государственный университет имени С.А. Есенина» (Рязань, Россия)

**Anca Veronica Ion** — профессор, Институт Математической статистики и прикладной математики Румынской Академии Наук (Бухарест, Румыния)

## РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**Морозкин Николай Данилович** — доктор физико-математических наук, профессор, ректор ФГБОУ ВО «Башкирский государственный университет» (Уфа, Россия)

**Сенин Петр Васильевич** — доктор технических наук, профессор, проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва» (Саранск, Россия)

**Сухарев Лев Александрович** — кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой алгебры и геометрии ФГБОУ ВО «Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарёва», президент Средне-Волжского математического общества (Саранск, Россия)

**Ярушкина Надежда Глебовна** — доктор технических наук, профессор, первый проректор - проректор по научной работе ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (Ульяновск, Россия)



## EDITORIAL BOARD

**Tishkin Vladimir Fedorovich** — Editor in chief, corresponding member of RAS, Dr.Sci. (Phys.-Math.), full professor, deputy director of Keldysh Institute of Applied Mathematics (Russian Academy of Sciences) (Moscow, Russia)

**Kuzmichev Nikolay Dmitrievich** — Deputy editor, Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Design and Technology Informatics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Shamanaev Pavel Anatolievich** — Executive secretary, PhD (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied mathematics, Differential equations and Theoretical mechanics, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Andreev Aleksandr Sergeevich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department of Information Security and Control Theory, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Alimov Shavkat Arifdjanovich** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Chief Research Scientist, Malaysia Institute of Microelectronic Systems (MIMOS) (Kuala Lumpur, Malaysia)

**Akhtyamov Azamat Muhtarovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department of Continuum Mechanics, Faculty of Mathematics and Information technologies, Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Ayupov Shavkat Abdulaevich** — The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Director of Institute of Mathematics at the National University of Uzbekistan after MirzoUlugbek (Tashkent, Uzbekistan)

**Boykov Ilya Vladimirovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department of «Higher and Applied Mathematics», Penza State University (Penza, Russia)

**Velmisov Petr Aleksandrovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department «Higher Mathematics», Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Gorbunov Vladimir Konstantinovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Economics and mathematical methods and information technologies, Ulyanovsk State University (Ulyanovsk, Russia)

**Grines Vyacheslav Zigmundovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Fundamental Informatics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Derugin Yuriy Nikolaevich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the research Department of the Institute of Theoretical and Mathematical Physics, Russian Federal Nuclear Center (Sarov, Russia)

**Zhabko Aleksey Petrovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department of Control Theory, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Zhegalov Valentin Ivanovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of DifferentialEquation, Kazan Federal Unversity (Kazan, Russia)

**Kalmenov Tynysbek Sharipovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, The Academic of National Kazakhstan Academy of Sciences, Director of the Institute of Mathematics and Mathematical Modeling (Almaty, Kazakhstan)

**Kamachkin Aleksandr Mikhaylovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, professor, Head of the Department of High Mathematics, Saint Petersburg State University (Saint Petersburg, Russia)

**Kuznetsov Evgeny Borisovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Differential Equation, Moscow Aviation Institute (National Research University) (Moscow, Russia)

**Krizskii Vladimir Nikolaevich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Deputy Director for Research and Innovation of the Sterlitamak Branch of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Loginov Boris Vladimirovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of the Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

**Martynov Sergey Ivanovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Director of Polytechnic Institute, Yugra State University (Khanty-Mansiysk, Russia)

**Matus Petr Pavlovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Chief Research Scientist of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Belarus (Minsk, Belarus)

**Pochinka Olga Vitalievna** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics (Nizhny Novgorod, Russia)

**Radchenko Vladimir Pavlovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of the Department «Applied mathematics and informatics», Samara State Technical University (Samara, Russia)

**Ryazantseva Irina Prokofievna** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical n.a. R. E. Alekseev, University (Nizhny Novgorod, Russia)

**Salahitdinov Mahmud Salahitdinovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, The Academic of Uzbekistan Academy of Sciences, Professor of the Department of Differential Equations and Mathematical Physics, National University of Uzbekistan after MirzoUlugbek (Tashkent, of Uzbekistan)

**Spivak Semen Izrailevich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Head of Department of Mathematical Modelling, Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Terekhin Mikhail Tikhonovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, Professor of the Department of Mathematics and Methodology of Teaching Mathematics, Ryazan State University named for S.Yesenin (Ryazan, Russia)

**Anca Veronica Ion** — PhD in Mathematics, Institute of Mathematical Statistic and Applied Mathematics of the Romanian Academy, Buharest, Romania, Senior Researcher III

## EDITORIAL COUNCIL

**Morozkin Nikolay Danilovich** — Dr. Sci. (Phys.-Math.), full professor, rector of Bashkir State University (Ufa, Russia)

**Senin Petr Vasilievich** — Dr. Sci. (Engineering), full professor, Vice-rector for Science & Research of National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Suharev Lev Alexandrovich** — PhD (Phys.-Math.), Associate Professor of the Department of Applied mathematics, Head of the Department of Algebra and Geometry, National Research Mordovia State University (Saransk, Russia)

**Yarushkina Nadezda Glebovna** — Dr. Sci. (Engineering), full professor, First Vice-Rector – Vice-Rector for Science of Ulyanovsk State Technical University (Ulyanovsk, Russia)

# Содержание

---

## МАТЕМАТИКА

---

**Л. Б. Болотин, Е. Б. Кузнецов**

Применение метода Гаусса для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений . . . . . 13

---

**А. Ю. Долгоносова**

О слоениях с трансверсальной линейной связностью . . . . . 19

---

**А. Ю. Жиров**

Ориентируемость инвариантных слоений псевдоаносовских гомеоморфизмов и разветвлённые накрытия . . . . . 30

---

**Н. В. Исаенкова, Е. В. Жужома**

Сопряжение диффеоморфизмов Смейла-Виеториса посредством сопряжения эндоморфизмов . . . . . 38

---

**М. В. Козлов**

Стабилизация сингулярно возмущённых систем с полиномиальной правой частью . . . . . 51

---

**Е. Д. Куренков**

О существовании эндоморфизма двумерного тора со строго инвариантным сжимающимся репеллером . . . . . 60

---

**С. С. Мамонов, А. О. Харламова**

Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством . . . . . 67

---

**И. П. Рязанцева**

Непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона для  $m$ -аккретивных уравнений . . . . . 77

---

---

**А. Н. Сахаров, А. А. Шиловская**

Потоки Морса-Смейла и модели топологии магнитных полей в  
плазме . . . . . 88

---

**П. А. Шаманаев, О. С. Язовцева**

Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотиче-  
ской эквивалентности нелинейных систем обыкновенных диффе-  
ренциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части  
переменных . . . . . 102

---

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

---

**А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов**

Динамическая устойчивость упругой пластины при струйном об-  
текании . . . . . 116

---

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

---

**В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов**

Вычисление собственных частот каната движущегося в продоль-  
ном направлении . . . . . 130

---

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

---

Памяти Алексеенко Сергея Николаевича . . . . . 140

---

# Contents

## MATHEMATICS

**L. B. Bolotin, E. B. Kuznetsov**

Gauss method application to solution of ill-conditioned systems of linear algebraic equations . . . . . 13

**A. Yu. Dolgonosova**

On foliations with transverse linear connection . . . . . 19

**A. Yu. Zhiron**

Orientability of invariant foliations of pseudo-Anosovian homeomorphisms and branched coverings . . . . . 30

**N. V. Isaenkova, E. V. Zhuzhoma**

Conjugacy of Smale-Vietoris diffeomorphisms using a conjugacy of endomorphisms . . . . . 38

**M. V. Kozlov**

Stabilization of singularly perturbed systems with a polynomial right-hand side . . . . . 51

**E. D. Kurenkov**

On existence of an endomorphism of 2-torus with strictly invariant repeller . . . . . 60

**S. S. Mamonov, A. O. Kharlamova**

Determination of the conditions for the existence of limit cycles of the first kind of systems with a cylindrical phase space . . . . . 67

**I. P. Ryazantseva**

Continuous regularization analog of Newton method for m-accretive equations . . . . . 77

**A. N. Sakharov, A. A. Shilovskaya**

Morse-Smale flows and the model of the topology of magnetic fields in plasma . . . . . 88

**P. A. Shamanaev, O. S. Yazovtseva**

The sufficient conditions of local asymptotic equivalence of nonlinear systems of ordinary differential equations and its application for investigation of stability respect to part of variables . . . . . 102

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

---

**A. V. Ankilov, P. A. Velmisov**Dynamic stability of elastic plate at jet flow . . . . . 116

---

MATHEMATICAL MODELING AND INFORMATICS

---

**V. N. Anisimov, V. L. Litvinov**Calculation of eigen frequencies of a rope moving in longitudinal  
direction . . . . . 130

---

MATHEMATICAL LIFE

---

IN MEMORY OF ALEKSEENKO SERGEY NIKOLAEVICH . . . . . 140

---

## МАТЕМАТИКА

DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.13-18

УДК 519.612

# Применение метода Гаусса для решения плохо обусловленных систем линейных алгебраических уравнений

© Л. Б. Болотин<sup>1</sup> Е. Б. Кузнецов<sup>2</sup>

**Аннотация.** Работа посвящена поиску численного решения систем линейных алгебраических уравнений, содержащих параметр (в качестве которого может выступать время) и имеющих плохую обусловленность при определенных значениях параметра. Решение такой системы, например, по правилу Крамера или с помощью метода Гаусса невозможно в окрестности сингулярности матрицы системы уравнений. Предложен алгоритм, который позволяет успешно проходить как окрестности сингулярности, так и сами особые точки, в которых матрица системы вырождается. Данный алгоритм предполагает применение метода продолжения решения по наилучшему параметру совместно с методом Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.

**Ключевые слова:** система линейных алгебраических уравнений, особые точки, метод продолжения решения по параметру, наилучший параметр продолжения, численные методы, обыкновенные дифференциальные уравнения.

## 1. Введение

В работах [1, 2], посвященных решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с плохой обусловленностью, рассматривалось решение систем, матрицы которых становятся сингулярными при некоторых значениях параметра задачи. В окрестности таких точек задачи становятся плохо обусловленными, т.е. малым изменениям элементов матрицы отвечают большие изменения элементов решения. Несмотря на то, что плохо обусловленные системы имеют единственное решение, на практике это решение численно получить сложно, так как даже незначительные вычислительные ошибки округления, неминуемо накапливаемые при расчете, приводят к большим погрешностям.

В этих работах исследовались предельные особые точки, в которых ранг матрицы  $n$ -го порядка СЛАУ с  $n$  неизвестными принимает значение, равное  $n - 1$ . Такие ситуации возникают, например, при решении задач упруговязкопластичности в механике деформируемого твердого тела. Был предложен алгоритм, который основан на применении метода продолжения решения по параметру. Решение преобразованной системы находилось путем применения правила Крамера и численных методов интегрирования начальной задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

<sup>1</sup> Болотин Леонид Борисович, студент кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5473-9458>, yourleo@yandex.ru

<sup>2</sup> Кузнецов Евгений Борисович, профессор кафедры дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5759-0062>, kuznetsov@mai.ru

Недостаток такого алгоритма заключается в том, что при применении правила Крамера к решению СЛАУ  $n$ -го порядка необходимо знать  $n + 1$  определитель  $n$ -го порядка, вычисление которых с заданной точностью сильно усложняется при увеличении порядка СЛАУ. Этот недостаток особенно очевиден при решении плохо обусловленных СЛАУ. Поэтому для решения таких систем здесь применяется метод Гаусса.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений вида:

$$A(t)x = b(t), \quad (2.1)$$

где  $A$  – квадратная матрица  $\|a_{ij}\|_n^n$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ,  $b = (b_1, \dots, b_n)^T$ , параметр задачи  $t \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим решение системы (2.1) с матрицей вида

$$A(t) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{11} + \varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n} + \varepsilon_n(1-t) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

где строка  $a_{11} + \varepsilon_1(1-t), \dots, a_{1n} + \varepsilon_n(1-t)$  –  $k$ -ая строка,  $k = \overline{1, n}$ ,  $\varepsilon_i \ll 1$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $t \in [0, 2]$ .

## 3. Метод решения задачи

В окрестности  $t = 1$  решение  $x_i(t)$  системы (2.1) будет плохо обусловленным, а при  $t = 1$  матрица системы становится вырожденной. Для решения системы применим метод продолжения решения по наилучшему параметру [3].

Продифференцируем систему (2.1) по переменной  $t$ :

$$A(t)\dot{x} = \dot{b}(t) - \dot{A}(t)x. \quad (3.1)$$

После введения обозначения

$$e(t) = -\dot{b}(t) + \dot{A}(t)x \quad (3.2)$$

систему уравнений (3.1) можно записать в виде

$$A(t)\dot{x} + e(t)\dot{t} = 0. \quad (3.3)$$

Предполагая, что переменные  $x$  и  $t$  являются функциями наилучшего параметра  $\lambda$ , который является длиной дуги кривой множества решений системы уравнений (2.1), см. [3], перепишем систему (3.3) в матричной форме

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & e_1(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} + \varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n} + \varepsilon_n(1-t) & e_2(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & e_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \\ \vdots \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$



Здесь штрих определяет дифференцирование по наилучшему параметру  $\lambda$ , который удовлетворяет равенству

$$\sum_{i=1}^n (x'_i)^2 + (t')^2 = 1, \quad (3.4)$$

где  $x'_i$  и  $t'$  – производные функций  $x_i$  и  $t$  по параметру  $\lambda$ .

Наилучший параметр с учетом уравнения (3.4) делает задачу (3.3) нелинейной в силу последнего уравнения преобразованной системы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & e_1(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} + \varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n} + \varepsilon_n(1-t) & e_2(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & e_n(t) \\ x'_1 & \cdots & x'_n & t' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \\ \vdots \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Линеаризуем эту систему, переписав последнее уравнение в виде

$$\sum_{i=1}^n (x'_{i*})(x'_i) + (t'_*)(t') = 1, \quad (3.5)$$

где индекс "звездочка" обозначает значение функции, вычисленное на предыдущем шаге процесса пошагового интегрирования. Тогда с учетом (3.5) линеаризованная система запишется в виде

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & e_1(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{11} + \varepsilon_1(1-t) & \cdots & a_{1n} + \varepsilon_n(1-t) & e_2(t) \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & e_n(t) \\ x'_{1*} & \cdots & x'_{n*} & t'_* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_k \\ \vdots \\ t' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Это уже система линейных алгебраических уравнений, которая может быть решена, например, методом Гаусса. В линеаризованной системе звездочкой помечены компоненты единичного вектора  $X'_* = (x'_{1*}, \dots, x'_{n*}, t'_*)^T$  – вектора производных, вычисленных на предыдущем шаге процесса продолжения решения, а вектор  $X' = (x'_1, \dots, x'_n, t')^T$  – вектор производных, вычисленных на рассматриваемом шаге в результате решения линеаризованной системы. Как и вектор  $X'_*$ , вектор  $X'$  направлен по касательной к интегральной кривой задачи, но не является единичным, как это требует последнее уравнение преобразованной системы, так как в силу последнего уравнения линеаризованной системы проекция вектора  $X'$  на направление единичного вектора  $X'_*$  равна единице. Но его можно сделать единичным, произведя нормировку по формуле

$$X'_* = \frac{X'}{\|X'\|},$$

где  $\|X'\|$  – квадратичная норма матрицы  $X'$ .

Полученный таким образом вектор будет решением на данном шаге исходной задачи и ее можно интегрировать любым численным методом интегрирования задачи Коши с начальными условиями, взятыми из предыдущего шага.

При решении преобразованной системы начальное приближение единичного вектора  $X'_*$  выбирается из условия, чтобы он не был ортогональным к вектору касательной в начальной точке интегральной кривой. Если эта точка не является предельной по переменной  $t'$ , то вектор  $X'_*$  можно принять, например, равном  $X'_* = (0, 0, \dots, 1)^T$ .

#### 4. Пример

В качестве примера рассматривалось численное решение следующей СЛАУ третьего порядка:

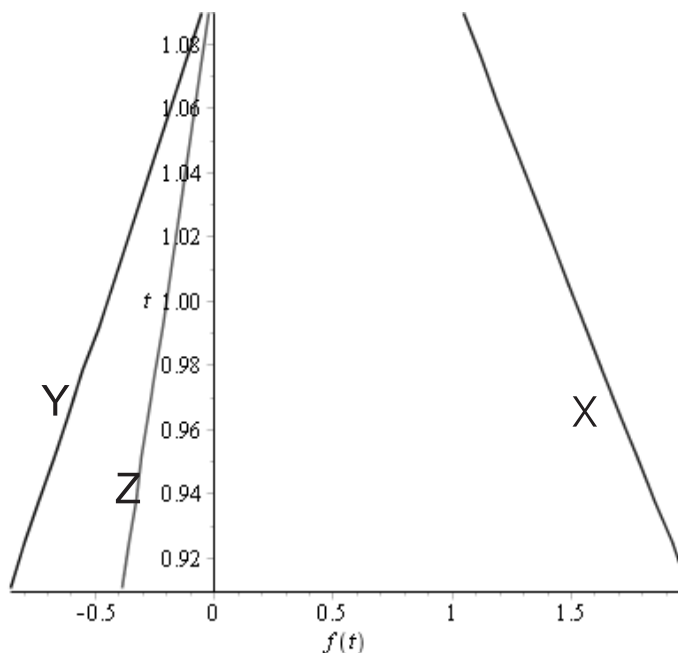
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 + 0.1(1-t) & 1 + 0.2(1-t) & 3 + 0.3(1-t) \\ 3 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Численное решение задачи на отрезке  $t \in [0, 2]$  было получено в вычислительной среде MathCAD 14 несколькими численными методами интегрирования начальной задачи [4].

Применялись следующие методы:

1. Метод Эйлера.
2. Метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

На рис. 4.1 приведены графики решения с применением обоих методов в окрестности особой точки  $t = 1$ . Заметим, что графики, полученные при помощи правила Крамера и метода Гаусса решения СЛАУ практически не отличались.



Р и с у н о к 4.1

Отметим, что достоверное решение непреобразованной задачи этими методами получить не удалось из-за переполнения памяти ЭВМ в окрестности особой точки.

## 5. Выводы

Таким образом, предложен алгоритм и разработана вычислительная программа применения метода Гаусса для решения СЛАУ с особенностями, содержащей параметр. Данный алгоритм при решении СЛАУ низкого порядка дает такие же результаты, как и алгоритм, использующий правило Крамера [1, 2], но может с успехом использоваться и при решении систем высокого порядка. В настоящее время ведется работа по применению для решения задач рассмотренного класса искусственных нейронных сетей.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-08-00943.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Б. Болотин, Е.Б. Кузнецов, “Решение плохо обусловленной системы линейных алгебраических уравнений”, *Журнал Сведневолжского математического общества*, **18:1** (2016), 7-11.
2. Л.Б. Болотин, Е.Б. Кузнецов, “Решение системы линейных алгебраических уравнений с особенностью”, *Материалы VII Всероссийской научной молодежной школы-семинара "Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ" имени Е.В. Воскресенского с международным участием*, 2016, 20-21.
3. В.И. Шалашилин, Е.Б. Кузнецов, *Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике*, Эдиториал УРСС, М., 1999, 222 с.
4. Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков, *Численные методы*, Наука, М., 1987, 599 с.

Поступила 18.04.2017

MSC2010 65F22

# Gauss method application to solution of ill-conditioned systems of linear algebraic equations

© L. B. Bolotin<sup>3</sup> E. B. Kuznetsov<sup>4</sup>

**Abstract.** The paper deals with the numerical solution of the system of linear algebraic equations that is singular under certain values of the problem parameter, which can be, for example, time. The solution of such system by the Kramer's rule or using Gaussian elimination method is impossible in the neighborhood of singularity of the system matrix. The algorithm is proposed which can successfully overcome the neighborhood of the singularity and singular points where the system matrix degenerates. The algorithm implies the application of the method of solution continuation with respect to the best parameter and Gaussian elimination method for linear algebraic equations' system.

**Key Words:** system of linear algebraic equations, singular points, method of solution continuation with respect to a parameter, the best parameter of continuation, numerical methods, ordinary differential equations.

## REFERENCES

1. L. B. Bolotin, E. B. Kuznetsov, "[Solution of ill-conditioned system of linear algebraic equations]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18:1** (2016), 7-11 (In Russ.).
2. L. B. Bolotin, E. B. Kuznetsov, "[Solution of linear algebraic equations system with singularities]", *Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennyye metody i komplekсы programm" imeni E. V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E. V. Voskresensky with international participation] (Saransk, 12-15 July 2016) SVMO Publ.*, 2016, 20-21 (In Russ.).
3. V. I. Shalashilin, E. B. Kuznetsov, *Parametric Continuation and Optimal Parametrization in Applied Mathematics and Mechanics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht / Boston / London, 2003, 236 p.
4. N. S. Bahvalov, N. P. Zhidkov, G. M. Kobelkov, *Numerical methods*, Nauka, Moscow, 1987 (In Russ.), 599 p.

Submitted 18.04.2017

<sup>3</sup> **Leonid B. Bolotin**, student, Department of differential equations, Moscow Aviation Institute (National Research University) (125993, Russia, Moscow, Volokolamskoe Shosse, 4.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5473-9458>, yourleo@yandex.ru

<sup>4</sup> **Evgeny B. Kuznetsov**, Professor, Department of differential equations, Moscow Aviation Institute (National Research University) (125993, Russia, Moscow, Volokolamskoe Shosse, 4.), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-5759-0062>, kuznetsov@mai.ru

УДК 514.7

# О слоениях с трансверсальной линейной связностью

© А. Ю. Долгоносова<sup>1</sup>

**Аннотация.** Предметом данной статьи является обзор недавних результатов о слоениях с трансверсальной линейной связностью, полученных автором совместно с Н.И. Жуковой, и сопоставление их с результатами других авторов. Обзор состоит из трех частей. Первая часть посвящена группам автоморфизмов слоений с трансверсальной линейной связностью в категории слоений. Во второй части изложены результаты об эквивалентности различных подходов к понятию полноты для исследуемого класса слоений. В третьей части представлены теоремы о псевдоримановых слоениях, образующих важный класс слоений с трансверсальной линейной связностью. В частности, изложены результаты о графиках псевдоримановых слоений, которые содержат всю информацию о слоениях.

**Ключевые слова:** слоение, линейная связность, псевдориманово слоение, график слоения, бесконечномерная группа Ли, связность Эресмана.

## 1. Введение

Понятие слоения было введено французским математиком П. Пенлеве в конце 19 века как инструмент глобального анализа решений обыкновенных дифференциальных уравнений. Общая теория слоений была сформирована в 40-х годах 20-ого века на стыке дифференциальной геометрии, топологии и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Классические работы по теории слоений принадлежат Ш. Эресману, Ж. Рибу, а также А. Хевлигеру и Э. Жису. Значительный вклад в развитие геометрической теории слоения внесли И. Тамура, Р. Герман, Т. Инаба, П. Молино, С.П. Новиков, Ф. Тондеур, Б. Рейнхарт и П. Швейцер. Теория слоений нашла применение в теории оптимального управления, в теории динамических систем, в аналитической механике, в симплектической и контактной геометрии и других областях математики.

Исследованию слоений, согласованных с геометрическими структурами, посвящены многочисленные работы различных авторов таких, как Б. Рейнхарт, П. Молино, Ф. Тондеур, Ф. Камбер, Р. Волак, А. Бежанку и Х. Фарран, Л. Конлон, В.В. Ровенский, Х. Альварус Лопес, П. Вальчак, Н.И. Жукова и другие. В исследовании различных структур на слоеных многообразиях центральное место занимают слоения с трансверсальными структурами.

Слоения произвольной коразмерности на гладких многообразиях, допускающие в качестве трансверсальной структуры линейную связность, называются слоениями с трансверсальной линейной связностью (Определение 2.1.). Слоения с трансверсальной линейной связностью включают в себя трансверсально аффинные слоения, а также псевдоримановы, лоренцевы и римановы слоения.

Целью данной статьи является обзор недавних результатов о слоениях с трансверсальной линейной связностью, полученных автором совместно с Н.И. Жуковой, и сопоставление их с известными достижениями других авторов.

<sup>1</sup> Долгоносова Анна Юрьевна, старший преподаватель кафедры фундаментальной математики, стажер-исследователь лаборатории ТМД, Национальный исследовательский университет „Высшая школа экономики“ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0656-6374>, [annadolgonosova@gmail.com](mailto:annadolgonosova@gmail.com)

По существу, работа состоит из трех частей. Первая часть посвящена результатам о группе автоморфизмов слоений с трансверсальной линейной связностью в категории слоений. Во второй части изложены результаты об эквивалентности различных подходов к понятию полноты для исследуемого класса слоений. В третьей части представлены теоремы о псевдоримановых слоениях, образующих значимый подкласс слоений с трансверсальной линейной связностью.

## 2. Слоение с трансверсальной линейной связностью и ассоциированное расслоение трансверсальных реперов

Напомним понятие слоения с трансверсальной линейной связностью. Пусть  $N$  —  $q$ -мерное многообразие и  $M$  — гладкое  $n$ -мерное многообразие, где  $0 < q < n$ .  $N$ -коциклом называется множество  $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j \in J}$ , удовлетворяющее следующим условиям.

1. Семейство  $\{U_i, i \in J\}$  образует открытое покрытие многообразия  $M$ .
2. Отображения  $f_i : U_i \rightarrow N$  в  $N$  являются субмерсиями со связными слоями.
3. Если  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ ,  $i, j \in J$ , тогда определен диффеоморфизм

$$k_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j)$$

такой, что:  $f_i = k_{ij} \circ f_j$ .

Компоненты линейной связности всех субмерсий  $p_j$  из максимального (по включению)  $N$ -коцикла  $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j \in J}$  образуют базу некоторой новой топологии  $\Omega$  на  $M$ . Компоненты линейной связности топологического пространства  $(M, \Omega)$  образуют разбиение  $F = \{L_\alpha | \alpha \in A\}$  многообразия  $M$ , которое называется слоением, заданным указанным коциклом, а  $L_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , называются слоями этого слоения.

Пусть  $(M^{(1)}, \nabla^{(1)})$  и  $(M^{(2)}, \nabla^{(2)})$  — многообразия линейной связности, где  $\nabla^{(1)}$  и  $\nabla^{(2)}$  — операторы ковариантного дифференцирования. Напомним, что диффеоморфизм  $f : M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$  называется изоморфизмом многообразий линейной связности  $(M^{(1)}, \nabla^{(1)})$  и  $(M^{(2)}, \nabla^{(2)})$ , если он удовлетворяет равенству  $f_*(\nabla_X^{(1)} Y) = \nabla_{f_* X}^{(2)} f_* Y$  для любых гладких векторных полей  $X$  и  $Y$  на  $M^{(1)}$ .

**О п р е д е л е н и е 2.1.** Пусть  $(M, F)$  — слоение, заданное  $N$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{k_{ij}\}\}_{i,j \in J}$ . Слоение  $(M, F)$  называется слоением с трансверсальной линейной связностью, если на  $N$  задана такая линейная связность  $\nabla^N$ , что каждый локальный диффеоморфизм  $k_{ij}$  является изоморфизмом линейных связностей, индуцированных на открытых подмножествах  $f_i(U_i \cap U_j)$  и  $f_j(U_i \cap U_j)$  в  $N$ .

Конструкция слоеного расслоения используется многими авторами при исследовании слоений.

Пусть  $(M, F)$  — слоение коразмерности  $q$  с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом, и  $H = GL(q; R)$  — группа Ли невырожденных  $q$ -мерных матриц. Тогда определены:

- 1) главное  $H$ -расслоение с проекцией  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$ ;
- 2)  $H$ -инвариантное слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ , слои которого посредством  $\pi$  накрывают соответствующие слои слоения  $(M, F)$ .

Это расслоение обозначается через  $\mathcal{R}(M, H)$ , а слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  называется поднятым.

$H$ -связностью в главном  $H$ -расслоении  $\mathcal{R}(M, H)$  над  $n$ -мерным многообразием  $M$  называется  $n$ -мерное  $H$ -инвариантное распределение  $Q$  на  $\mathcal{R}$ , трансверсальное слоям расслоения.

Обозначим через  $\mathfrak{h}$  алгебру Ли группы Ли  $H$ . Напомним, что  $H$ -связность  $Q$  в  $H$ -расслоении  $\mathcal{R}(M, H)$ , где  $H = GL(q, \mathbb{R})$ , называется *трансверсально проектируемой* [1], если  $\mathfrak{h}$ -значная 1-форма связности  $\omega$  удовлетворяет условиям:

$$i_X(\omega) = 0, \quad i_X(d\omega) = 0 \quad (2.1)$$

для любого гладкого векторного поля, касательного к поднятому слоению.

В [2] доказано следующее утверждение.

**Предложение 2.1.** Пусть  $(M, F)$  — слоение коразмерности  $q$  с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом. Тогда существуют:

- 1) слоеное расслоение  $\mathcal{R}(M, H)$  с поднятым слоением  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ , которое является  $e$ -слоением;
- 2) трансверсально проектируемая  $H$ -связность  $Q$  на  $\mathcal{R}$ , причем ее форма связности  $\omega$  удовлетворяет условиям (2.1).

**Определение 2.2.** Главное  $H$ -расслоение  $\mathcal{R}(M, H)$ , удовлетворяющее Предложению 2.1., называется слоеным расслоением трансверсальных реперов для слоения  $(M, F)$  с трансверсальной линейной связностью.

Подчеркнем, что задание слоения  $(M, F)$  с трансверсальной линейной связностью эквивалентно заданию трансверсально проектируемой  $H$ -связности в расслоении трансверсальных реперов над  $M$ .

### 3. Группы автоморфизмов слоений с трансверсальной линейной связностью

В любой категории с каждым объектом ассоциируется группа его автоморфизмов. Одной из важных математических задач является исследование группы автоморфизмов объекта в заданной категории и нахождение условий, при которых эта группа допускает структуру группы Ли (см., например, введение в монографии Ш. Кобаяси [3]).

Через  $\mathcal{Fol}$  мы обозначаем категорию слоений, объектами которой являются гладкие слоения, а морфизмами двух слоений — гладкие отображения, переводящие слои одного слоения в слои другого слоения. Для простоты гладкость понимается класса  $C^\infty$ , как это принято в дифференциальной геометрии, хотя фактически для выполнения всех результатов данной работы достаточно гладкости класса  $C^2$ .

При исследовании слоений с трансверсальными структурами рассматривается категория  $\mathcal{Fol}^T$ , в которой изоморфизмы сохраняют не только слоения, но и трансверсальную геометрическую структуру. К таким работам относятся, в частности, статьи И. В. Белько [4], Дж. А. Лесли [5] и Н.И. Жуковой [6].

Дж. Ханно и А. Моримота доказали, что группа всех аффинных преобразований аффинной связности есть конечномерная группа Ли. Ранее эта теорема была доказана К. Номидзу при дополнительном предположении полноты аффинной связности. Поэтому для указанной выше категории слоений  $\mathcal{Fol}^T$  И. В. Белько в [4] поставил вопрос о существовании структуры конечномерной группы Ли в группе базовых автоморфизмов трансверсально проектируемых линейных связностей на слоеном многообразии, где группой базовых автоморфизмов называется факторгруппа всех автоморфизмов по нормальной подгруппе автоморфизмов, сохраняющих каждый слой слоения. Первые результаты такого рода были получены Дж. А. Лесли [5]. Для слоений с трансверсальной жесткой геометрией

Н.И. Жуковой [6] введен инвариант — структурная алгебра Ли и доказано, что равенство нулю этого инварианта является достаточным условием для того, чтобы группа базовых автоморфизмов допускала структуру конечномерной группой Ли. В [6] найдены также топологические достаточные условия для того, чтобы указанная группа была конечномерной группой Ли и получены некоторые точные оценки размерности этой группы. Так как слоения с трансверсальной линейной связностью входят в класс слоений с жесткими трансверсальными геометриями, то результаты статьи [6] верны и для них.

В отличие от предыдущих работ далее в этом разделе мы рассматриваем категорию гладких слоений  $\mathcal{Fol}$ , где изоморфизмы "не замечают" дополнительную трансверсальную структуру. При такой постановке задачи группы автоморфизмов гладких многообразий и слоений являются бесконечномерными многообразиями. При этом важно знать, на каких пространствах моделируются такие многообразия.

Например, Р. Палé [7] была введена гладкая структура на множестве  $C^\infty(M', M)$  гладких отображений  $M' \rightarrow M$  компактных многообразий  $M'$  и  $M$ . В качестве модельного пространства им был взят индуктивный предел гильбертовых пространств. Группа диффеоморфизмов  $Diff(M)$  компактного многообразия  $M$  была исследована многими авторами. Дж. А. Лесли и Х. Омори ввели структуру бесконечномерных многообразий на  $Diff(M)$ , моделируемых на пространствах Фреше и на индуктивных пределах гильбертовых пространств, соответственно.

В случае некомпактного многообразия  $M$  применение  $FD$ -топологии позволило П. Михору [8] ввести гладкую структуру на  $Diff(M)$ , моделируемую на  $LF$ -пространствах, т.е., на индуктивных пределах пространств Фреше. Далее группа диффеоморфизмов многообразия  $M$  с  $FD$ -топологией обозначается через  $\mathcal{D}(M)$ .

Пусть  $(M, F)$  — произвольное гладкое слоение с трансверсальной линейной связностью. Объектом дальнейшего исследования является подгруппа  $\mathcal{D}(M, F)$  группы  $\mathcal{D}(M)$ , элементами которой являются автоморфизмы слоения  $(M, F)$  в категории слоений  $\mathcal{Fol}$ .

Для того, чтобы ввести структуру гладкого бесконечномерного многообразия, моделируемого на  $LF$ -пространствах, в группе  $\mathcal{D}(M)$ , П. Михор [8] предложил конструкцию локальной добавки. Е. Масиас-Виргос и Е. Санмартин [9] адаптировали этот метод к слоениям. Они ввели и применили локальные слоенные добавки в исследовании групп автоморфизмов римановых слоений.

В работе автора и Н.И. Жуковой [2] доказана следующая теорема, которая обобщает результаты Е. Масиас-Виргоса и Е. Санмартин для римановых слоений [9] на слоения с трансверсальной линейной связностью.

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть  $(M, F)$  — слоение с трансверсальной линейной связностью произвольной коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии  $M$ . Тогда группа автоморфизмов  $\mathcal{D}(M, F)$  слоения  $(M, F)$  в категории слоений  $\mathcal{Fol}$  допускает структуру бесконечномерной группы Ли, моделируемой на  $LF$ -пространствах.

Для того, чтобы рассказать о методе доказательства Теоремы 3.1., напомним следующее понятие.

**О п р е д е л е н и е 3.1.** Распределение на многообразии линейной связности называется геодезически инвариантным, если каждая геодезическая объемлющего пространства, касающаяся этого распределения в одной точке, касается его в каждой своей точке [10].

Нами доказано следующее утверждение ([2], Теорема 4.1).



**Т е о р е м а 3.2.** Пусть  $(M, F)$  — слоение коразмерности  $q$  с трансверсальной линейной связностью и  $\mathfrak{M}$  —  $q$ -мерное распределение, трансверсальное слоению  $(M, F)$ . Тогда на многообразии  $M$  существует трансверсально проектируемая линейная связность  $\nabla^{\mathfrak{M}}$ , относительно которой оба распределения  $\mathfrak{M}$  и  $TF$  являются вполне геодезическими.

Для построения специальной линейной связности  $\nabla^{\mathfrak{M}}$ , удовлетворяющей Теореме 3.2., нами была использована конструкция слоеного расслоения трансверсальных реперов. Мы применили также результаты Уиломора и Уокера [11] о существовании линейной связности без кручения на многообразии  $M$ , относительно которой слоение  $(M, F)$  параллельно.

Применение Теоремы 13 и Следствия 14 из [9] позволило нам свести доказательство Теоремы 3.1. к построению слоеной локальной добавки для  $(M, F)$ . Благодаря использованию специальной связности  $\nabla^{\mathfrak{M}}$  наша конструкция слоеной адаптированной локальной добавки значительно проще, чем аналогичная конструкция для римановых слоений, используемая Масиас-Вигосом и Е. Санмартин в ([9]).

**З а м е ч а н и е 3.1.** Так как псевдоримановы слоения, и в частности, лоренцевы слоения, принадлежат классу слоений с трансверсальной линейной связностью, то Теоремы 3.1. и 3.2. верны и для них.

## 4. Полнота слоений с трансверсальной линейной связностью

Согласно известной теореме Хопфа — Ринова для риманова многообразия, понятие геодезической полноты эквивалентно полноте метрического пространства, метрика которого определяется с помощью функционала длины. Следовательно, любое компактное риманово многообразие является полным.

В работе [12] построены примеры компактных аффинных многообразий, не являющихся полными. Это иллюстрирует существенное отличие геодезической полноты многообразий аффинной связности от полноты римановых многообразий.

Р.А. Волак в [13] поставил вопрос об эквивалентности различных определений полноты для трансверсально аффинных слоений. Мы исследуем этот вопрос в классе слоений с трансверсальной линейной связностью.

В отличие от римановых слоений на компактных многообразиях, слоения с трансверсальной линейной связностью на компактных многообразиях не всегда являются геодезически полными.

Обозначим через  $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$  полупрямое произведение группы  $H = GL(q, \mathbb{R})$  и векторной группы  $\mathbb{R}^q$ . Группу  $G$  можно интерпретировать как группу всех аффинных преобразований  $Aff(A^q)$   $q$ -мерного аффинного пространства  $A^q$ , а  $H = GL(q, \mathbb{R})$  как стационарную подгруппу аффинной группы  $Aff(A^q)$  в некоторой точке. Как известно, слоение  $(M, F)$  с трансверсальной линейной связностью можно рассматривать как картаново слоение с трансверсальной картановой геометрией типа  $(G, H)$  [14].

**О п р е д е л е н и е 4.1.** Сохраним обозначения, введенные в разделе 2. Пусть  $(M, F)$  — слоение коразмерности  $q$  с трансверсально проектируемой линейной связностью и  $\mathcal{R}(M, H)$  — ассоциированное расслоение трансверсальных реперов. Пусть  $\mathfrak{M}$  — фиксированное  $q$ -мерное распределение, трансверсальное слоению  $(M, F)$ .

Слоение  $(M, F)$  называется  $\mathfrak{M}$ -полным, если любое векторное поле  $X$  такое, что  $X|_u \in \mathfrak{M}_u \forall u \in \mathcal{R}$  и  $\omega(X) = \text{const}$ , является полным.

Слоение  $(M, F)$  называется полным, если существует трансверсальное распределение  $\mathfrak{M}$ , относительно которого оно является  $\mathfrak{M}$ -полным.

В работе [15] доказана следующая теорема об эквивалентности различных подходов к определению полноты для исследуемого класса слоений.

**Т е о р е м а 4.1.** Пусть  $(M, F)$  — слоение коразмерности  $q$  с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in I}$ . Тогда следующие три условия эквивалентны:

1. Слоение  $(M, F)$ , рассматриваемое как картаново, является полным.
2. Слоение  $(M, F)$  полное в смысле определения 4.1.
3. На  $M$  существует трансверсальное  $q$ -мерное распределение  $\mathfrak{M}$  и линейная связность  $\nabla$  такие, что:
  - 1) каждая субмерсия  $f_i$  является аффинным отображением;
  - 2) распределения  $\mathfrak{M}$  и  $TF$  геодезически инвариантны;
  - 3) канонический параметр на каждой максимальной геодезической, касающейся распределения  $\mathfrak{M}$ , изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Заметим, что слоение  $(M, F)$  с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in I}$ , является трансверсально аффинным слоением тогда и только тогда, когда кривизна и кручение линейной связности  $\nabla^N$  равны нулю.

В [15] получено следующее необходимое условие полноты трансверсально аффинных слоений, которое, вообще говоря, не является достаточным.

**Т е о р е м а 4.2.** Пусть  $(M, F)$  — трансверсально аффинное слоение произвольной коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии. Тогда из выполнения любого из трех эквивалентных условий полноты в Теореме 4.1. вытекает выполнение следующих двух независимых условий:

- (i) существует связность Эресмана для слоения  $(M, F)$ ;
- (ii) индуцированное слоение на универсальном накрывающем многообразии  $\widetilde{M}$  образовано слоями субмерсии  $r: \widetilde{M} \rightarrow A^q$  на аффинное пространство  $A^q$ .

В [15] построены примеры, показывающие независимость условий (i) и (ii) в Теореме 4.2.

## 5. Геометрия псевдоримановых слоений

Римановы слоения, образующие подкласс слоений с трансверсальной линейной связностью, естественным образом возникают при изучении расслоений, слои которых являются поверхностями уровня. Они имеют большое прикладное значение в теории оптимального управления и в теории динамических систем. Римановы слоения являются наиболее глубоко изученными среди слоений с трансверсальными геометрическими структурами. Впервые понятие риманова слоения появилось в работе Рейнхарта. Исследованию римановых слоений посвящены многочисленные работы ряда математиков таких, как П. Молино, А. Хефлигер, Э. Жис, Ф.Тондеур, Р. Герман, Е. Салем, И. Карьер, и многих других (см. [1] и ссылки там).

Задачу о нахождении критерия римановости слоения поставил Р.А. Волак в [16]. Он изучал компактные слоения, то есть, слоения, все слои которых компактны, и доказал, что

А. Ю. Долгоносова. О слоениях с трансверсальной линейной связностью

любое полное компактное  $G$ -слоение конечного типа, а также любое полное компактное слоение, допускающее трансверсальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка, является римановым. Н.И. Жукова распространила эти результаты на компактные картановы слоения. В [17] ею доказан критерий римановости для конформных слоений коразмерности  $q \geq 3$ .

По сравнению с римановыми, псевдоримановы слоения имеют значительно более сложную структуру. Это объясняется, в частности, тем, что псевдо-ортогональная группа является некомпактной в отличие от ортогональной группы.

Простые псевдоримановы слоения образованы слоями псевдоримановых субмерсий, введенных и исследованных в классических работах О'Нейла и А. Грея.

Псевдоримановы слоения представляют интерес для различных направлений исследований в теоретической физике.

**О п р е д е л е н и е 5.1.** Если каждый слой гладкого слоения  $(M, F)$  на псевдоримановом многообразии  $(M, g)$ , наделенный индуцированной метрикой, является псевдоримановым многообразием, и метрика  $g$  трансверсально проектируема, т.е. производная  $L_X g$  от  $g$  равна нулю для любых гладких векторных полей  $X$ , касательных к  $(M, F)$ , то слоение  $(M, F)$  называется псевдоримановым.

Следующий критерий псевдоримановости слоения на псевдоримановом многообразии доказан в [18].

**Т е о р е м а 5.1.** Пусть  $(M, F)$  — гладкое слоение произвольной коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном псевдоримановом многообразии  $(M, g)$ ,  $0 < q < n$ . Тогда для того, чтобы  $(M, F)$  было псевдоримановым слоением, необходимо и достаточно, чтобы на слоях слоения индуцировалась псевдориманова метрика и  $q$ -мерное распределение  $D$ , ортогональное к  $TF$ , было геодезически инвариантным.

Из Теоремы 5.1. вытекает аналогичный критерий для римановых слоений, принадлежащий Б. Рейнхарту, подробное доказательство которого изложено в монографии Молино [1]. Это доказательство существенно опирается на свойство геодезических римановых многообразий быть локально экстремалиями функционала длины. Подчеркнем, что данное свойство не имеет аналога в псевдоримановой геометрии. Отметим, что доказательство Теоремы 5.1. существенно использует критерий А. Д. Льюиса [10] геодезической инвариантности распределения на многообразии аффинной связности.

**С л е д с т в и е 5.1.** Сюръективная субмерсия  $p: M \rightarrow B$  псевдоримановых многообразий  $M$  и  $B$  является псевдоримановой тогда и только тогда, когда индуцируется псевдориманова метрика на слоях и любая геодезическая, ортогональная слоению в одной точке, остается ортогональной ему в каждой своей точке.

В работе Н.И. Жуковой и К.И. Шеиной [19] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы слоение с трансверсальной линейной связностью являлось псевдоримановым слоением произвольной сигнатуры и, в частности, римановым слоением.

Понятие группоида голономии принадлежит Ш. Эресману. Позднее эквивалентная конструкция под названием графика слоения была предложена Х.Винкелнкемпером. График  $G(F)$  слоения  $(M, F)$  несет в себе информацию о слоении  $(M, F)$  и о его группах голономии. Одно из фундаментальных понятий  $K$ -теории и некоммутативной геометрии,  $C^*$ -алгебра, строится на графике  $G(F)$  [20].

Исследованию графиков псевдоримановых слоений посвящена работа [18], в которой доказана следующая теорема.

А. Ю. Долгоносова. О слоениях с трансверсальной линейной связностью

**Т е о р е м а 5.2.** Пусть  $G(F)$  — график псевдориманова слоения  $(M, F)$  на псевдоримановом многообразии  $(M, g)$  и  $p_i : G(F) \rightarrow M$ ,  $i = 1, 2$ , — его канонические проекции. Тогда:

1. График  $G(F)$  является хаусдорфовым  $(2n - q)$ -мерным многообразием и на нем существует единственная псевдориманова метрика  $d$  такая, что индуцированное слоение

$$\mathbb{F} = \{\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha) | L_\alpha \in F\}$$

на  $(G(F), d)$  является псевдоримановым слоением, а  $p_i$  являются псевдоримановыми субмерсиями, причем слои субмерсий  $p_1$  и  $p_2$  ортогональны.

2. Каждый слой  $\mathbb{L}_\alpha = p_i^{-1}(L_\alpha)$  индуцированного слоения изометричен псевдориманову фактор-многообразию  $(\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\alpha) / \Psi_\alpha$  произведения псевдоримановых многообразий  $\mathcal{L}_\alpha \times \mathcal{L}_\alpha$ , где  $\mathcal{L}_\alpha$  — голономное псевдориманово накрывающее пространство для слоя  $L_\alpha$ , по группе изометрий  $\Psi_\alpha$ , изоморфной группам голономии  $\Gamma(\mathbb{L}_\alpha)$  и  $\Gamma(L_\alpha)$  слоев  $L_\alpha \in F$  и  $\mathbb{L}_\alpha \in \mathbb{F}$ ,  $p_i(\mathbb{L}_\alpha) = L_\alpha$ .

Как известно, график произвольного гладкого слоения  $(M, F)$  коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном гладком многообразии  $M$  является, вообще говоря, нехаусдорфовым гладким многообразием размерности  $(2n - q)$ .

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00312) и программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ-Нижний Новгород в 2017 году (проект № 90).

Выражаю благодарность Н.И. Жуковой за научное руководство данной работой.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. P. Molino, “Proprietes cohomologiques et proprietes topologiques des feuilletages a connexion transverse projectable”, *Topology*, **12**:12 (1973), 317–325.
2. N.I. Zhukova, A.Yu. Dolgonosova, “The automorphism groups of foliations with transverse linear connection”, *Central European Journal of Mathematics*, **11**:12 (2013), 2076–2088.
3. S. Kobayashi, *Transformation groups in differential geometry*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
4. И.В. Белько, “Аффинные преобразования трансверсальной проектируемой связности на многообразии со слоением”, *Матем. сб.*, **117**:2 (1982), 181–195.
5. A. J. Leslie, “A remark on the group of automorphisms of a foliations having a dense leaf”, *J. Diff. Geom.*, **7** (1972), 597–601.
6. N.I. Zhukova, “Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms”, *Bulletin of Peoples' Friendship University of Russia*, 2009, № 2, 14–35.
7. R. A. Palais, *Foundations of global non-linear analysis*, Benjamin, New-York, 1968.
8. P. Michor, “Manifolds of differentiable mappings”, *Shiva, Orpington*, 1980.

9. E. Macias-Virgos, E. Sanmartin, “Manifolds of maps in Riemannian foliations”, *Geometrial Dedicata*, 2000, № 79, 143–156.
10. A.D. Lewis, “Affine connections and distributions with applications to nonholonomic mechanics”, *Rep. Math. Phys.*, **42**:1–2 (1998), 135–164.
11. A.G. Walker, “Connexions for parallel distributions in the large”, *Quart. J. Math.*, **2**:6 (1955), 301–308.
12. D. Fried, W. Goldman, W.M. Hirsh., “Affine manifolds with nilpotent holonomy”, *Comment. Math. Helvetici*, 1981, № 56, 487–523.
13. R.A. Wolak, “Growth of leaves in transversely affine foliations”, *Proceedings of the American mathematical society*, **127**:7 (1999), 2167–2173.
14. Н.И. Жукова, “Минимальные множества картановых слоений”, *Тр. МИАН*, **256** (2012), 115–147.
15. Н.И. Жукова, А.Ю. Долгоносова, “Эквивалентные подходы к понятию полноты слоений с трансверсальной линейной связностью”, *Труды Средневолжского математического общества*, **17**:4 (2015), 14–23.
16. R.A. Wolak, “Leaves of foliations with transverse G -structures of finite type”, *Publications Matematicas*, 1989, № 33, 153–162.
17. Н.И. Жукова, “Аналог гипотезы Лихнеровича для конформных слоений”, *Сиб. матем. журнал*, **52**:3 (2011), 555–574.
18. N.I. Zhukova, A.Yu. Dolgonosova, “Pseudo-Riemannian foliations and their graphs”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 2018, № 1, - 12–25.
19. Н.И. Жукова, К.И. Шеина, “Критерий псевдоримановости слоения с трансверсальной линейной связностью”, *Труды Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), 30–40.
20. A. Connes, *Noncommutative geometry*, Academic Press, Boston, 1994.

Поступила 24.03.2017

MSC2010 57R30

# On foliations with transverse linear connection

© A. Yu. Dolgonosova <sup>2</sup>

**Abstract.** The subject of this article is a review of the results on foliations with transversal linear connection obtained by the author together with N.I. Zhukova, and their comparison with the results of other authors. The work consists of three parts. The first part focuses on automorphism groups of foliations with a transversal linear connection in the category of foliations. In the second part the equivalence of the concepts of completeness for the class of foliations under investigation is studied. In the third part we present theorems on pseudo-Riemannian foliations that form an important class of foliations with a transversal linear connection. In particular, we present results on graphs of pseudo-Riemannian foliations that contain all information about foliations.

**Key Words:** foliation, linear connection, pseudo-Riemannian foliation, graph of foliation, infinite-dimensional Lie group, Ehresmann connection.

## REFERENCES

1. P. Molino, “[Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projectable]”, *Topology*, **12**:12 (1973), 317–325.
2. N.I. Zhukova, A.Yu. Dolgonosova, “[The automorphism groups of foliations with transverse linear connection]”, *Central European Journal of Mathematics*, **11**:12 (2013), 2076–2088.
3. S. Kobayashi, *[Transformation groups in differential geometry]*, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
4. I. V. Bel’ko, “Affinnye preobrazovaniya transversalno proekteruemoy svaznosti na mnogoobraziy so sloeniem [Affine transformations of a transversal projectable connection on a foliated] manifold”, *Math. USSR Sb.*, **117**:2 (1982), 181–195 (In Russ.).
5. A. J. Leslie, “[A remark on the group of automorphisms of a foliations having a dense leaf]”, *J. Diff. Geom.*, **7** (1972), 597–601.
6. N.I. Zhukova, “[Complete foliations with transverse rigid geometries and their basic automorphisms]”, *Bulletin of Peoples’ Friendship University of Russia*, **2** (2009), 14–35.
7. R. A. Palais, *[Foundations of global non-linear analysis]*, Benjamin, New-York, 1968.
8. P. Michor, “[Manifolds of differentiable mappings]”, *Shiva, Orpington*, 1980.
9. E. Macias-Virgos, E. Sanmartin, “[Manifolds of maps in Riemannian foliations]”, *Geometriae Dedicata*, **79** (2000), 143–156.
10. A. D. Lewis, “[Affine connections and distributions with applications to nonholonomic mechanics]”, *Rep. Math. Phys.*, **42**:1–2 (1998), 135–164.

---

<sup>2</sup> **Anna Yu. Dolgonosova**, senior lecturer of department of fundamental mathematics, research assistant of laboratory of topological methods of dynamics, National Research University Higher School of Economics (25/12 Bolshaya Pecherskaya Str., Nizhny Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-0656-6374>, [annadolgonosova@gmail.com](mailto:annadolgonosova@gmail.com)

11. A. G. Walker, “[Connexions for parallel distributions in the large]”, *Quart. J. Math.*, **2**:6 (1955), 301–308.
12. D. Fried, W. Goldman, W. M. Hirsh., “[Affine manifolds with nilpotent holonomy]”, *Comment. Math. Helvetici*, **56** (1981), 487–523.
13. R. A. Wolak, “[Growth of leaves in transversely affine foliations]”, *Proceedings of the American mathematical society*, **127**:7 (1999), 2167—2173.
14. N. I. Zhukova, “Minimalnye mnozhestva cartanovykh sloeniy [The minimal sets of Cartan foliations]”, *Tr. MIAN*, **256** (2012), 115–147 (In Russ.).
15. N. I. Zhukova, A. Yu. Dolgonosova, “Ekivalentnye podhody k ponyatiyu polnoty sloeniy sloeniy s transversalnoy lineynoy svyaznostyu [Equivalent approaches to the concept of completeness of foliations with transverse linear connection]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **17**:4 (2015), 14–23 (In Russ.).
16. R. A. Wolak, “[Leaves of foliations with transverse  $G$ -structures of finite type]”, *Publications Mathematiques*, **33** (1989), 153–162.
17. N. I. Zhukova, “Analog gipotezy Lichnerovicha dlya conformnykh sloeniy [An analogue of Lichnerovich’s conjecture for conformal foliations]”, *Sib. math. journal*, **52**:3 (2011), 555–574 (In Russ.).
18. N. I. Zhukova, A. Yu. Dolgonosova, “[Pseudo-Riemannian foliations and their graphs]”, *Lobachevskii Journal of Mathematics*, **1** (2018), 12–25.
19. N. I. Zhukova, K. I. Sheina, “Kritery psevdorimanovosti sloeniy s transversalnoy lineynoy svyaznostyu [A criterion for foliations with transverse linear connection to be pseudo-Riemannian]”, *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:2 (2016), 30–40 (In Russ.).
20. A. Connes, *[Noncommutative geometry]*, Academic Press, Boston, 1994.

*Submitted 24.03.2017*

УДК 515.162

## Ориентируемость инвариантных слоений псевдоаносовских гомеоморфизмов и разветвлённые накрытия

© А. Ю. Жиров<sup>1</sup>

**Аннотация.** В статье рассматривается псевдоаносовский гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности (возможно, обобщённый), инвариантные слоения которого неориентируемы. Описана конструкция, посредством которой по такому гомеоморфизму строится двулистное накрытие данной поверхности (вообще говоря, разветвлённое) и псевдоаносовский гомеоморфизм накрывающей поверхности, который накрывает исходный и имеет ориентируемые инвариантные слоения. Если исходный гомеоморфизм не имеет особенностей нечётной валентности, то накрытие, которое строится, — неразветвлённое. В противном случае оно имеет точки ветвления кратности 2 в особенностях нечётной валентности. Устанавливается, что в первом случае накрывающий гомеоморфизм имеет вдвое большее по сравнению с исходным число особенностей тех же валентностей, а во втором число особенностей чётных валентностей удваивается и к ним прибавляются особенности удвоенных нечётных валентностей.

**Ключевые слова:** псевдоаносовские гомеоморфизмы, сингулярные слоения, разветвленные накрытия.

### 1. Псевдоаносовские гомеоморфизмы

Пусть  $f : M \rightarrow M$  — обобщённый псевдоаносовский гомеоморфизм (ГРА-гомеоморфизм) замкнутой ориентируемой поверхности рода  $g$ , т.е. такой, что имеются два  $f$ -инвариантных трансверсальных друг другу одномерных слоения  $\mathcal{W}^u, \mathcal{W}^s$  поверхности  $M$  с конечным множеством  $S$  общих особенностей, инвариантных относительно  $f$  и таких, что  $f$  растягивает слои первого с некоторым коэффициентом  $\lambda > 1$  (называемом дилатацией ГРА-гомеоморфизма) и сжимает слои второго с коэффициентом  $\lambda^{-1}$ . Растяжение и сжатие слоёв понимается в смысле трансверсальных мер  $\mu^s, \mu^u$ . Первая измеряет длины дуг слоёв  $\mathcal{W}^u$ , вторая — слоёв  $\mathcal{W}^s$  (точное определение этих мер см. [1],[2]). При этом в окрестности особой точки каждое из слоений устроено как седло с  $d \neq 2$  сепаратрисами (особая точка валентности  $d$ ). Если нет особых точек валентности 1 (игл), то гомеоморфизм называется псевдоаносовским (РА-гомеоморфизм). Сингулярным типом ГРА-гомеоморфизма  $f$  называется последовательность  $\mathcal{B} = \mathcal{B}(f) = \{b_d : d \in \mathbb{N}\}$ , где  $b_d$  есть число особенностей валентности  $d$ . Дилатация и сингулярный тип представляют собой инварианты топологической сопряжённости ГРА-гомеоморфизмов.

Наряду с ними инвариантом является свойство ориентируемости инвариантных слоений. Слоение с особенностями называется ориентируемым, если для любой дуги слоя и любой трансверсальной ему дуги индекс пересечения во всех точках одинаков. Легко видеть, что если инвариантные слоения ГРА-гомеоморфизма имеют хотя бы одну особую точку нечётной валентности, то они не могут быть ориентируемыми. Например, «существенно обобщённый» псевдоаносовский гомеоморфизм (обобщённый псевдоаносовский,

<sup>1</sup> Жиров Алексей Юрьевич, профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет) (125993, Россия, г. Москва, Волоколамское шоссе, 4.), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-8957-3934>, alexei\_zhirov@mail.ru



не являющийся псевдоаносовским, т.е. имеющий хотя бы одну особенность типа игла) имеет неориентируемые инвариантные слоения. В 1974 г. Р.В. Плыкиным [3] был приведён пример существования такого гомеоморфизма сферы (псевдоаносовские гомеоморфизмы тогда ещё не были введены). Он построил диффеоморфизм двумерной сферы, удовлетворяющий аксиоме А.С. Смейла, неблуждающее множество которого состоит из одномерного гиперболического аттрактора и четырёх отталкивающих неподвижных точек, а этот диффеоморфизм изотопен посредством изотопии, фиксирующей отталкивающие точки, GRA-гомеоморфизму с четырьмя особенностями типа игла.

Если валентности всех особых точек чётны, то слоения могут быть как ориентируемыми, так и неориентируемыми. Это вытекает из теоремы Х. Мазура и Дж. Смайли [4], а в [5] имеются примеры двух псевдоаносовских гомеоморфизмов кренделя (примеры 15.2 и 15.3), инвариантные слоения которых имеют по две особенности валентности 4, причём для первого из них слоения ориентируемы, а для второго – нет.

*Разветвлённое  $k$ -листное накрытие* поверхности  $M$  с множеством ветвления  $\Sigma \subset M$  – это такое непрерывное отображение  $p$  некоторой поверхности  $\tilde{M}$  на  $M$ , что для каждой точки  $x \notin \Sigma$  найдётся открытый диск  $U \ni x$ , для которого  $p^{-1}(U)$  есть объединение  $k$  непересекающихся дисков  $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_k$  и ограничения  $p|_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \rightarrow U$  суть гомеоморфизмы, а для каждой точки  $x \in \Sigma$  найдётся содержащий её диск  $U$ , для которого  $p^{-1}(U)$  есть объединение  $k(x) < k$  дисков  $\tilde{U}_1, \dots, \tilde{U}_{k(x)}$  и в некоторых локальных координатах на плоскости комплексного переменного  $z$  отображение  $p|_{\tilde{U}_i}$  имеет вид  $z \mapsto z^{k_i}$  ( $k_i \geq 1$ ,  $\sum k_i = k$ ). Точка  $\tilde{x}_i \in p^{-1}(x) \cap \tilde{U}_i$  ( $x \in \Sigma$ ), для которой  $k_i > 1$ , называется точкой ветвления, а число  $k_i$  – её кратностью.

Основной результат настоящей работы составляет следующая

**Т е о р е м а.** Пусть  $f : M \rightarrow M$  есть обобщённый псевдоаносовский гомеоморфизм замкнутой ориентируемой поверхности рода  $g$  с неориентируемыми инвариантными слоениями, имеющий сингулярный тип  $\mathcal{B}(f) = \{b_d\}$ . Тогда существуют замкнутая ориентируемая поверхность  $\tilde{M}$  рода

$$\tilde{g} = 2g - 1 + \frac{1}{2} \sum_{k \geq 1} b_{2k-1},$$

псевдоаносовский гомеоморфизм  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$  с ориентируемыми инвариантными слоениями и двулистное разветвлённое накрытие  $p : \tilde{M} \rightarrow M$  с множеством ветвления, совпадающим с множеством особенностей нечётной валентности инвариантных слоений  $f$ . При этом

1). Гомеоморфизм  $\tilde{f}$  накрывает  $f$  т.е.  $p \circ \tilde{f} = f \circ p$  и имеет ту же дилатацию, что и  $f$ .

2). Отображение накрытия  $p$  переводит слои растягивающегося слоения  $\tilde{W}^u$  (сжимающегося слоения  $\tilde{W}^s$ ) гомеоморфизма  $\tilde{f}$  в слои растягивающегося (сжимающегося) слоения  $f$ .

3). Сингулярный тип  $\mathcal{B}(\tilde{f}) = \{\tilde{b}_d\}$  гомеоморфизма  $\tilde{f}$  определяется следующим образом:

$$\tilde{b}_d = \begin{cases} 0, & \text{если } d \text{ нечётно (или } d = 2); \\ 2b_d + b_{d/2}, & \text{если } d \text{ чётно и не кратно 4 (и } d \neq 2); \\ 2b_d, & \text{если } d \text{ кратно 4}; \end{cases}$$

Для подробного описания, какое соответствие между инвариантными слоениями гомеоморфизмов  $\tilde{f}$  и  $f$  осуществляет отображение накрытия, можно сказать следующее.

1) Особые точки инвариантных слоений  $\tilde{f}$  суть прообразы особых точек валентностей, отличных от 1, инвариантных слоений  $f$ .

2) Прообраз каждого сжимающегося (растягивающегося) особого слоя  $f$ , выходящего из особой точки валентности 1 (если таковые имеются), есть неособый слой для сжимающегося (растягивающегося) слоя  $\tilde{f}$ .

3) Прообраз слоя, выходящего из особой точки нечётной валентности  $d > 2$  (если таковые имеются), есть объединение двух особых слоёв, выходящих из особой точки валентности  $2d$ .

4) Прообраз каждого особого слоя, выходящего из особой точки чётной валентности, есть объединение двух особых слоёв, выходящих из двух различных особых точек той же валентности.

**З а м е ч а н и е 1.** Если инвариантные слоения исходного гомеоморфизма  $f$  не имеют особых точек нечётных валентностей, то, согласно утверждению теоремы, накрытие  $p$  не имеет точек ветвления, т.е. является двулистным накрытием в обычном смысле этого слова.

Так, для псевдоаносовского гомеоморфизма из упомянутого выше примера 15.3 [5], согласно этой теореме, получается двулистное накрытие кренделя поверхностью рода 3 и накрывающий псевдоаносовский гомеоморфизм с четырьмя особыми точками инвариантных слоений, валентности 4 каждая. Для примера Плыкина получается двулистное разветвлённое накрытие сферы тором с четырьмя точками ветвления кратности 2 и накрывающий гомеоморфизм без особых точек инвариантных слоений, т.е. диффеоморфизм Аносова двумерного тора. Посуществу это обстоятельство позволило дать способ построение диффеоморфизма Плыкина способом, отличным от первоначальной конструкции (см. например [6], §17.2).

Перечисленные выше свойства разветвлённого накрытия  $p$  очевидным образом вытекают из доказательства теоремы, которое состоит в явном построении поверхности  $\tilde{M}$ , отображения  $p$  и гомеоморфизма  $\tilde{f}$ . Оно основано на технике ленточных представлений ГРА-гомеоморфизмов, развитой в [5]. Для удобства читателя те конструкции из [5], которые потребуются, будут воспроизведены ниже.

Доказательство теоремы состоит в явном построении поверхности  $\tilde{M}$ , отображения  $p$  и гомеоморфизма  $\tilde{f}$ . Оно основано на технике ленточных представлений ГРА-гомеоморфизмов, развитой в [5]. Оставшаяся часть данного сообщения содержит краткое и неформальное описание этой конструкции, представляющей, по мнению автора, самостоятельный интерес в связи с возможными обобщениями.

Ленточные представления ГРА-гомеоморфизма строятся по его марковским разбиениям описываемого ниже специального вида. Вообще *марковское разбиение* для ГРА-гомеоморфизма есть конечный набор параллелограммов  $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ , т.е. замкнутых подмножеств  $M$ , каждое из которых есть образ при непрерывном отображении  $\chi_j$  в  $M$  плоского прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат (горизонтальной и вертикальной), переводящим горизонтальные (вертикальные) отрезки в дуги слоёв сжимающегося (растягивающегося) слоения. Образ внутренности прямоугольника назовём внутренней частью параллелограмма. Требуется чтобы внутренние части параллелограммов не пересекались, их объединение совпадало с самой поверхностью, а для множеств  $\partial^s \mathcal{P}$  (объединение сжимающихся сторон всех параллелограммов) и  $\partial^u \mathcal{P}$  (объединение их растягивающихся сторон) было выполнено  $f(\partial^s \mathcal{P}) \subset \partial^s \mathcal{P}$ ,  $f(\partial^u \mathcal{P}) \supset \partial^u \mathcal{P}$ .

**Л е м м а 1.1.** ([5], §5) Пусть  $W_1^s, \dots, W_m^s$  есть семейство особых слоёв, циклически переходящих друг в друга, и  $S_k$  есть особая точка, принадлежащая  $W_k^s$ . Тогда существуют

- 1) семейство дуг  $I_k \subset W_k^s$ , циклически переходящих друг в друга, таких, что  $S_k \in I_k$ ;
- 2) марковское разбиение  $\mathcal{P} = \{\Pi_1, \dots, \Pi_n\}$  такое, что  $\partial^s \mathcal{P} = \cup_k I_k$ , каждая сжимающаяся сторона любого параллелограмма содержится в той дуге  $I_k$ , с которой она имеет общие внутренние точки и каждая связная компонента множества  $\partial^u \mathcal{P} \setminus \bigcup_k \text{int } I_k$  содержит особую точку инвариантных слоений.

Рассмотрим марковское разбиение, обладающее перечисленными в лемме свойствами. Каждая компонента связности множества  $\partial^u \mathcal{P}$  представляет собой *звезду*, т.е. объединение дуг (*лучей*) всех особых слоёв растягивающегося слоения, исходящих из некоторой особой точки (*центра звезды*), и имеющих концы внутри дуг  $I_k$ .

Сделаем в поверхности  $M$  разрезы вдоль лучей всех звёзд. Каждую связную компоненту края  $\partial \Pi$  полученной поверхности  $\Pi$  будем рассматривать как  $d$ -угольник, где  $d$  – число лучей соответствующей звезды, считая его вершинами точки пересечения с дугами  $I_k$ , отличные от их концов, а сторонами – соединяющие вершины дуги растягивающихся слоёв (в случае  $d = 1$  получается одноугольник со стороной, получающейся при разрезании вдоль единственного луча). Полученную поверхность с краем  $\Pi$  назовём *ленточной*. Подмножества  $\Pi$ , получающиеся из параллелограммов марковского разбиения, будем называть *лентами* и обозначать теми же символами  $\Pi_j$ , а сжимающиеся (растягивающиеся) стороны параллелограмма будем называть *концами* ленты. Можно сказать, что ленточная поверхность получается приклеиванием лент их концами к дугам  $I_k$  (после разрезания они становятся дизъюнктными), которые будем называть *базисными отрезками*, а их объединение  $I$  – *базисом* ленточной поверхности.

Выберем для каждого базисного отрезка два направления: одно, которое будем называть горизонтальным и говорить о нём «направление слева направо» – это направление на самом базисном отрезке, а другое – вертикальное или «направление снизу вверх» – это трансверсальное направление к нему. При этом потребуем, чтобы указанная пара направлений задавала одну и ту же ориентацию поверхности, которую зафиксируем. Тогда в понятном смысле можно говорить о том, что данная лента приклеена данным концом к базису сверху или снизу. Соответственно будем говорить о том, что лента приклеена к базису либо *односторонне* (т.е. обоими концами сверху или обоими снизу), либо *двусторонне* (одним концом сверху, а другим снизу). Разумеется эти характеристики лент зависят от произвола в выборе горизонтальных и вертикальных направлений для базисных отрезков. Заметим, что при изменении на противоположное одного из направлений для какого-либо базисного отрезка, другое автоматически изменяется на противоположное.

**Л е м м а 1.2.** *Инвариантные слоения GPA-гомеоморфизма ориентируемы тогда и только тогда, когда для базисных отрезков его ленточной поверхности можно выбрать горизонтальные и вертикальные направления таким образом, что все ленты будут приклеены к базису двусторонне.*

По ленточной поверхности  $\Pi$  данного GPA-гомеоморфизма построим поверхность  $\tilde{\Pi}$  и двулистное (неразветвлённое) накрытие  $p: \tilde{\Pi} \rightarrow \Pi$ , причём поверхность  $\tilde{\Pi}$  по построению будет устроена как ленточная в том смысле, что она получается приклеиванием  $2n$  лент к  $2m$  дизъюнктивных базисных отрезков, где  $n$  и  $m$  – число лент и базисных отрезков  $\Pi$  соответственно. Предположим, что горизонтальные направления выбраны таким образом, что их левые концы суть содержащиеся в них периодические точки. Занумеруем отрезки  $\Delta_1, \dots, \Delta_{2n}$ , вдоль которых к базису приклеены ленты, в соответствии с возрастанием номеров базисных отрезков и направлением каждого из них слева направо, предполагая при этом, что сначала в этой последовательности следуют концы лент, вдоль которых

они приклеены к базису сверху, а затем те, вдоль которых ленты приклеены снизу. Конец ленты, имеющий меньший номер, будем называть первым, а другой её конец – вторым.

Рассмотрим дизъюнктивное объединение двух экземпляров исходной ленточной поверхности. Обозначим их  $\Pi^a$  и  $\Pi^b$  соответственно. Базисные отрезки и ленты первого экземпляра обозначим  $I_k^a$  и  $\Pi_j^a$ , а базисные отрезки и ленты второго –  $I_k^b$  и  $\Pi_j^b$ . Обозначим  $\tilde{I} = I^a \cup I^b$ , где  $I^a = \cup_k I_k^a$  и  $I^b = \cup_k I_k^b$  (все объединения дизъюнкты). Затем, оставляя без изменения ленты, приклеенные к каждому экземпляру базиса двусторонне, «переклеим» ленты, приклеенные односторонне, следующим образом.

Пусть лента  $\Pi_j$  приклеена к базису поверхности  $\Pi$  односторонне. Обозначим через  $\Delta'$  и  $\Delta''$  первый и второй её концы соответственно. Рассмотрим «копии»  $\Pi_j^a$ ,  $\Pi_j^b$  ленты  $\Pi_j$ , а также копии  $\Delta'_a$ ,  $\Delta''_a$ ,  $\Delta'_b$  и  $\Delta''_b$  отрезков  $\Delta'$  и  $\Delta''$ . Отрежем ленты  $\Pi_j^a$ ,  $\Pi_j^b$  от  $\tilde{I}$ : первую вдоль отрезка  $\Delta''_a$ , а вторую вдоль  $\Delta''_b$ . После этого приклеим ленту  $\Pi_j^a$  вдоль «освободившегося конца» к отрезку  $\Delta''_b$ , а ленту  $\Pi_j^b$  – к  $\Delta''_a$ .

Полученную поверхность обозначим  $\tilde{\Pi}$  и определим отображение  $p: \tilde{\Pi} \rightarrow \Pi$  как переводящее каждую из двух точек, являющихся «копиями» точки  $x \in \Pi$ , в саму эту точку. Очевидно, что  $p$  есть двулистное накрытие, а поверхность  $\tilde{\Pi}$  может рассматриваться как абстрактная ленточная поверхность в указанном выше смысле. То, что мы называем её абстрактной, связано с тем, что а priori она может не быть ленточной поверхностью какого-либо GPA-гомеоморфизма. Например, это так, если она окажется несвязной (так оно и будет, если все ленты поверхности  $\Pi$  приклеены к её базису двусторонне), что невозможно в случае ленточной поверхности GPA-гомеоморфизма, поскольку слои его инвариантных слоений плотны в  $M$ .

**Л е м м а 1.3.** *Если инвариантные слоения GPA-гомеоморфизма  $f$  неориентируемы, то абстрактная ленточная поверхность  $\tilde{\Pi}$ , построенная по его ленточной поверхности  $\Pi$  связна.*

**Л е м м а 1.4.** *Подъём при накрытии  $p: \tilde{\Pi} \rightarrow \Pi$  каждой компоненты края ленточной поверхности  $\Pi$ , являющейся  $d$ -угольником, есть  $2d$ -угольная компонента края поверхности  $\tilde{\Pi}$ , если  $d$  нечётно, и дизъюнктивное объединение двух  $d$ -угольных компонент её края, если  $d$  чётно. Этими многоугольниками с чётным числом углов исчерпываются все компоненты края  $\tilde{\Pi}$ .*

Разрезание поверхности  $M$ , приводящее к поверхности  $\Pi$ , производится по дугам, составляющим множество  $\partial^u \mathcal{P}$ , а  $f(\partial^u \mathcal{P}) \supset \partial^u \mathcal{P}$ . Поэтому после разрезания из GPA-гомеоморфизма  $f$  получается непрерывное отображение  $\Pi \rightarrow \Pi$ , которое будем обозначать тем же символом  $f$ .

Определим непрерывное отображение  $\tilde{f}: \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}$ , накрывающее  $f: \Pi \rightarrow \Pi$ . Для этого рассмотрим отображения  $\iota_a, \iota_b: \Pi \rightarrow \tilde{\Pi}$ , определяемые следующими условиями:

$$\begin{aligned} \iota_a(\Pi \setminus I) &= \Pi^a \setminus \tilde{I}; & \iota_a(I) &= I_a; & \iota_b(\Pi \setminus I) &= \Pi^b \setminus \tilde{I}; & \iota_b(I) &= I_b; \\ p \circ \iota_a &= p \circ \iota_b = \text{id}. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Из конструкции поверхности  $\tilde{\Pi}$  вытекает, что указанными условиями эти отображения корректно определены, причём их ограничения на каждое из множеств  $\Pi \setminus I$  и  $I$  непрерывны, а сами они имеют разрывы на  $I$  в точках тех отрезков, вдоль которых производились переклейки лент.

Определим ограничение отображения  $\tilde{f}$  на базисе поверхности  $\tilde{\Pi}$ , полагая

$$\tilde{f}|_{I_a} = \iota_a \circ f \circ p|_{I_a}; \quad \tilde{f}|_{I_b} = \iota_b \circ f \circ p|_{I_b}, \quad (1.2)$$

а затем продолжим его на ленты этой поверхности.

Для этого зададим два отображения

$$f_a : \Pi^a \setminus \iota_a(f^{-1}(I)) \rightarrow \tilde{\Pi}, \quad f_b : \Pi^b \setminus \iota_b(f^{-1}(I)) \rightarrow \tilde{\Pi},$$

полагая

$$f_a := \iota_a \circ f \circ p, \quad f_b := \iota_b \circ f \circ p. \quad (1.3)$$

Первое из них непрерывно на каждой связной компоненте множества  $\Pi^a \setminus \iota_a(f^{-1}(I))$ , а второе — на каждой связной компоненте  $\Pi^b \setminus \iota_b(f^{-1}(I))$ . С помощью этих двух отображений будем строить продолжение  $\tilde{f}$  на ленты.

Рассмотрим для каждой ленты  $\Pi_j$  исходной ленточной поверхности  $\Pi$  связные компоненты множества  $\Pi_j \setminus f^{-1}(I)$ . Для краткости будем называть их *секторами* ленты  $\Pi_j$ . Обозначим через  $K_j$  их число, а сами секторы — через  $\Pi_{j,1}, \dots, \Pi_{j,K_j}$ , занумеровав их вторым индексом в соответствии с направлением на ленте от её первого конца ко второму. Замыкание сектора есть параллелограмм. Его сжимающиеся стороны будем называть *концами сектора*, причём *первым концом* сектора  $\Pi_{j,1}$  будем считать тот, который совпадает с первым концом ленты  $\Pi_j$  а другой — *вторым*. Для сектора  $\Pi_{j,k}$  ( $k > 1$ ) будем считать первым концом тот, который совпадает со вторым концом  $\Pi_{j,k-1}$ , а другой — вторым его концом. Заметим, что сами концы сектора в нём не содержатся. Очевидно, что образ под действием  $f$  каждого сектора содержится в некоторой ленте, а образы его концов — в концах этой ленты и, следовательно в базисе  $I$ .

Определим секторы для лент поверхности  $\tilde{\Pi}$ , полагая  $\Pi_{j,k}^a := \iota_a(\Pi_{j,k})$ ,  $\Pi_{j,k}^b := \iota_b(\Pi_{j,k})$ , а также первый и второй концы каждого из них как образы первого и второго концов сектора  $\Pi_{j,k}$  при отображениях  $\iota_a, \iota_b$ .

Зададим отображение  $\tilde{f}$  на первых секторах лент поверхности  $\tilde{\Pi}$ , полагая

$$\tilde{f}|_{\Pi_{j,1}^a} := f_a|_{\Pi_{j,1}}; \quad \tilde{f}|_{\Pi_{j,1}^b} := f_b|_{\Pi_{j,1}}. \quad (1.4)$$

Далее, для каждой ленты  $\tilde{\Pi}_j^a$  ( $\tilde{\Pi}_j^b$ ) будем последовательно определять  $\tilde{f}$  на секторах  $\Pi_{j,2}^a, \dots, \Pi_{j,K_j}^a$  (соответственно  $\Pi_{j,2}^b, \dots, \Pi_{j,K_j}^b$ ) следующим образом.

Пусть для  $1 < k \leq K_j$  (при фиксированном  $j \in \overline{1, n}$ )  $\Pi_{i_{k-1}}$  есть лента поверхности  $\Pi$ , содержащая  $f(\Pi_{j,k-1})$ .

Предположим, что ограничения  $\tilde{f}|_{\Pi_{j,k-1}^a}$  и  $\tilde{f}|_{\Pi_{j,k-1}^b}$  уже определены, причём

$$\tilde{f}|_{\Pi_{j,k-1}^a} = f_a|_{\Pi_{j,k-1}^a}; \quad \tilde{f}|_{\Pi_{j,k-1}^b} = f_b|_{\Pi_{j,k-1}^b}.$$

Тогда полагаем

$$\begin{aligned} \tilde{f}|_{\Pi_{j,k}^a} &:= \begin{cases} f_a|_{\Pi_{j,k}^a}, & \text{если } \Pi_{i_{k-1}} \text{ приклеена к базису двусторонне;} \\ f_b|_{\Pi_{j,k}^a}, & \text{если } \Pi_{i_{k-1}} \text{ приклеена к базису односторонне;} \end{cases} \\ \tilde{f}|_{\Pi_{j,k}^b} &:= \begin{cases} f_b|_{\Pi_{j,k}^b}, & \text{если } \Pi_{i_{k-1}} \text{ приклеена к базису двусторонне;} \\ f_a|_{\Pi_{j,k}^b}, & \text{если } \Pi_{i_{k-1}} \text{ приклеена к базису односторонне;} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.5)$$

В случае, когда эти ограничения определены как

$$\tilde{f}|_{\Pi_{j,k-1}^a} = f_b|_{\Pi_{j,k-1}^a}; \quad \tilde{f}|_{\Pi_{j,k-1}^b} = f_a|_{\Pi_{j,k-1}^b},$$

ограничения  $\tilde{f}|_{\Pi_{j,k}^a}$  и  $\tilde{f}|_{\Pi_{j,k}^b}$  определяем по тем же формулам (1.5), поменяв в их правых частях местами  $f_a$  и  $f_b$ .

Формулы (1.4)–(1.5) определяют отображение  $\tilde{f}$  на всей поверхности  $\tilde{\Pi}$  кроме точек, принадлежащих концам секторов её лент, т.е. точек множества  $\tilde{I} \cup_{\iota_a}(f^{-1}I) \cup_{\iota_b}(f^{-1}I)$ . На  $\tilde{I}$  оно было определено равенствами (1.2). Можно показать, что продолжение по непрерывности отображения  $\tilde{f}$  на концы секторов превращает его в непрерывное отображение  $\tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}$ .

По построению оно взаимно однозначно на внутренности  $\tilde{\Pi}$ , а на крае устроено следующим образом. В силу леммы 4 каждая компонента края  $\tilde{\Pi}$  есть многоугольник с вершинами, лежащими внутри базисных отрезков, и сторонами, являющимися дугами, составленными из краёв лент. Каждая сторона такого многоугольника содержит единственную периодическую точку отображения  $\tilde{f}$ . Рассмотрим, какую-нибудь вершину  $A$  такого многоугольника. Пусть  $\delta_1$  и  $\delta_2$  — дуги, содержащиеся в его смежных сторонах и соединяющие данную вершину с периодическими точками, лежащими на этих сторонах. Дуги  $\delta_1$  и  $\delta_2$  содержат дуги  $\delta'_1$  и  $\delta'_2$ , имеющие точку  $A$  общим концом, и такие, что  $\tilde{f}(\delta'_1) = \tilde{f}(\delta'_2)$  есть дуга, все точки которой лежат внутри  $\tilde{\Pi}$  кроме образов её концов, отличных от  $\tilde{f}(A)$ . Последние переходят в одну точку на крае  $\tilde{\Pi}$ , а именно — в одну из вершин некоторого многоугольника, являющегося компонентой края  $\tilde{\Pi}$ . Иными словами, каждой точке  $x_1 \in \delta'_1$  соответствует единственная точка  $x_2 \in \delta'_2$  такая, что  $\tilde{f}(x_1) = \tilde{f}(x_2)$ .

Замкнутую поверхность  $\tilde{M}$  получим, отождествив точки  $x_1, x_2$  каждой такой пары, а также точки  $\tilde{f}^{-k}(x_1), \tilde{f}^{-k}(x_2)$  ( $k \geq 1$ ). Кроме того, отождествим все периодические точки, лежащие на одной и той же компоненте края  $\tilde{\Pi}$ .

При таких отождествлениях из отображения  $p : \tilde{\Pi} \rightarrow \Pi$  получится разветвлённое накрытие  $p : \tilde{M} \rightarrow M$ , а из отображения  $\tilde{f} : \tilde{\Pi} \rightarrow \tilde{\Pi}$  — гомеоморфизм  $\tilde{f} : \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ , накрывающий  $f$ . Гомеоморфизм  $\tilde{f}$ , как это легко вытекает из построения, — псевдоаносовский с особыми точками инвариантных слоений, получающимися при отождествлении периодических точек на крае  $\tilde{\Pi}$ . Сама эта поверхность является для него ленточной поверхностью. Поэтому из леммы 4 вытекает утверждение (iii) теоремы. Кроме того, если, оставив без изменения направления первых  $m$  базисных отрезков  $\tilde{\Pi}$ , изменить направления остальных на противоположные, получим, что все ленты  $\tilde{\Pi}$  будут приклеены к её базису двусторонне. В силу леммы 2 это означает, что инвариантные слоения для  $\tilde{f}$  ориентируемы. Соотношение между родами поверхностей  $M$  и  $\tilde{M}$  легко получается из формулы Эйлера–Пуанкаре, согласно которой сумма индексов особых точек слоения с особенностями равна эйлеровой характеристике поверхности. Утверждение (ii) вытекает непосредственно из построения.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces*. Orsay *seminaire*, Asterisque. V. 66–67, 1979.
2. Э. Кэссон, С. Блейлер, *Теория автоморфизмов поверхностей по Нильсену и Тёрстену*, ФАЗИС, М., 1998.
3. Р.В. Плыкин, “Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей”, *Матем. сб.*, **94**:2 (1974), 243–264.
4. H. Masur, J. Smille, “Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms”, *Comment. Math. Helvetici*, **68** (1993), 289–307.

5. А. Ю. Жиров, *Топологическая сопряжённость псевдоаносовских гомеоморфизмов*, МЦНМО, М., 2013.
6. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.

Поступила 10.04.2017

MSC2010 37E30

## Orientability of invariant foliations of pseudo-Anosovian homeomorphisms and branched coverings

© A. Yu. Zhiron<sup>2</sup>

**Abstract.** This paper deals with pseudo-Anosov homeomorphism (possibly generalized) of closed orientable surface; invariant foliations of this mapping are supposed to be non-orientable. A construction is described that helps to build two-sheeted (in general, branched) covering of this surface and pseudo-Anosov homeomorphism of the covering surface that covers the original and has orientable invariant foliations. The covering and the homeomorphism are constructed by means of original mapping. If the original homeomorphism does not have singularities of odd valency then the constructed covering is not branched. Otherwise it has branch points of multiplicity 2 in singularities of odd valency. It is established that in the first case the covering homeomorphism has twice the number of singularities of the same valences as compared with the original. In the second case the number of singularities of even valencies doubles and the features of doubled odd valences are added to them.

**Key Words:** pseudo-Anosov homeomorphisms, foliations with singularities, branched coverings.

## REFERENCES

1. A. Fathi, F. Laudenbach, V. Poenaru, *Travaux de Thurston sur les surfaces. Orsay seminaire*, Asterisque. V. 66–67, 1979.
2. E. Casson, S. Bleiler, *Automorphisms of Surfaces after Nielsen and Thurston (London Mathematical Society Student Texts)*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.
3. R.V. Plykin, “[Sources and sinks of A-diffeomorphisms of surfaces]”, *Matem. sbornik*, **94**:2 (1974), 243–264 (In Russ).
4. H. Masur, J. Smille, “Quadratic differentials with prescribed singularities and pseudo-Anosov diffeomorphisms”, *Comment. Math. Helvetici*, **68** (1993), 289–307.
5. A.U. Zhiron, *Topologicheskaya sopryazhennost psevdanosovskikh gomeomorfizmov [Topological conjugency of pseudo-Anosov homeomorphisms]*, MCCNE, М., 2013 (In Russ).
6. A.B. Katok, B. Hasselblatt, *Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

Submitted 10.04.2017

<sup>2</sup> Alexey Yu. Zhiron, Professor, Moscow Aviation Institute (National Research University) (125993, Russia, Moscow, Volokolamskoe Shosse, 4.), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-8957-3934>, alexei\_zhiron@mail.ru

УДК 517.938

## Сопряжение диффеоморфизмов Смейла-Виеториса посредством сопряжения эндоморфизмов

© Н. В. Исаенкова<sup>1</sup>, Е. В. Жужома<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье установлена взаимосвязь между сопряжением диффеоморфизмов Смейла-Виеториса и сопряжением соответствующих неособых эндоморфизмов окружности. Именно, получено необходимое условие сопряженности ограничений диффеоморфизмов Смейла-Виеториса на базовых многообразиях. Показано, что одним из необходимых условий сопряженности рассматриваемого класса диффеоморфизмов является сопряженность соответствующих эндоморфизмов окружности. В работе также доказана техническая теорема, в которой получены некоторые достаточные условия существования гомеоморфизма на базовых многообразиях, переводящего орбиты одного диффеоморфизма Смейла-Виеториса в орбиты другого диффеоморфизма с наличием коммутативной диаграммы отображений. Совместно с первым результатом все это дает частичное решение задачи топологической эквивалентности. В дальнейшем материалы данной статьи могут понадобиться для получения инвариантов сопряженности диффеоморфизмов рассматриваемого класса на базовых многообразиях.

**Ключевые слова:** сопряженность, коммутативная диаграмма, топологическая эквивалентность, соленид, неособый эндоморфизм.

### 1. Введение

Установление топологической классификации является одной из основных задач теории динамических систем. При решении задачи классификации выделяется класс диффеоморфизмов, внутри которого сперва решается задача топологической эквивалентности (нахождение необходимых и достаточных условий существования гомеоморфизма многообразия, переводящего орбиты одного диффеоморфизма в орбиты другого диффеоморфизма, с наличием коммутативной диаграммы отображений) и задача реализации. При этом один из этапов состоит в описании возможных инвариантных множеств, определяющих динамику диффеоморфизмов из рассматриваемого класса. Благодаря работам Аносова Д.В., Плыкина Р.В., Смейла С. и др. было установлено, что даже у структурно устойчивых (грубых) диффеоморфизмов могут быть сложно устроенные с топологической точки зрения инвариантные множества. Одним из первых примеров таких множеств является соленид.

В современную теорию динамических систем солениды ввел Смейл [1]. Он построил пример диффеоморфизма полнотория в себя и доказал, что данный диффеоморфизм имеет притягивающее инвариантное множество, гомеоморфное солениду с гиперболической структурой. Первым обобщением данного примера была конструкция Р. Вильямса,

<sup>1</sup> **Исаенкова Наталья Викторовна**, доцент кафедры математики, информатики и информационных технологий, ФГКОУ ВО «Нижегородская академия Министерства внутренних дел Российской Федерации» (603950, Россия, г. Нижний Новгород, Анкудиновское шоссе, д. 3, БОКС – 268), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4880-3526>, [nisaenkova@mail.ru](mailto:nisaenkova@mail.ru)

<sup>2</sup> **Жужома Евгений Викторович**, профессор кафедры фундаментальной математики, ФГБОУ ВО Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (603005, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25/12), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8682-7591>, [zhuzhoma@mail.ru](mailto:zhuzhoma@mail.ru)



который рассматривал обобщенные солениды [2] – [4] и получил их внутреннюю классификацию. Это означает, что Вильямс получил необходимое и достаточное условие сопряженности ограничений двух диффеоморфизмов на их одномерные растягивающиеся аттракторы, гомеоморфные солениду. Отметим работы учеников Р. Вильямса, относящиеся к данному направлению [5], [6], [7].

Важный класс обобщенных соленидов составляют одномерные растягивающиеся аттракторы на двумерных поверхностях. Внешняя классификация таких аттракторов произведена Плыкиным Р.В., Гринесом В.З. и их учениками [8]–[11]. Существенные результаты в этом направлении для потоков на плоскости и сфере получены в работах А.А.Андропова, Л.С.Понтрягина, Е.А.Леонтович, А.Г.Майера. Качественная теория динамических систем на двумерном торе разработана А.Пуанкаре и А.Данжуа. На двумерных многообразиях большего рода динамические системы с этой точки зрения рассматривались С.Х.Арансоном, В.З.Гринесом, М.М.Пейксото и др. [12], [13].

В статье [14] вводится и изучается класс диффеоморфизмов с инвариантными соленидальными множествами, который включает в себя классический пример Смейла с соленидальным растягивающимся аттрактором, а также производится описание всех возможных инвариантных (базисных) множеств. Из работ [15], [16] следует, что из внутренней классификации соленидальных базисных множеств не следует внешняя классификация. Если рассматривать эту задачу в обратном порядке, то смысл становится более понятным, то есть из внешней классификации внутренняя классификация следует. Вильямсом получена только внутренняя классификация ограничений диффеоморфизмов на их растягивающиеся аттракторы, внешняя классификация соленидальных базисных множеств, заданных на многообразиях размерности не менее трех, до настоящего времени изучена не полностью.

Главным результатом данной статьи является получение необходимого условия сопряженности ограничений диффеоморфизмов Смейла-Виеториса на базовых многообразиях, что представляет собой начальный этап решения задачи классификации. Одним из необходимых условий сопряженности рассматриваемого класса диффеоморфизмов является сопряженность соответствующих неособых эндоморфизмов окружности. Также здесь доказывается техническая теорема, где получены некоторые достаточные условия существования гомеоморфизма на базовых многообразиях, которая понадобится в дальнейшем для изучения сопряженности диффеоморфизмов Смейла-Виеториса.

## 2. Необходимые определения и понятия

Напомним некоторые определения, и приведем необходимые для дальнейшего результаты. Пусть  $\Lambda$ ,  $\Lambda'$  – инвариантные множества диффеоморфизмов  $f$ ,  $f'$  соответственно. Если существует гомеоморфизм  $\varphi : M \rightarrow M$  такой, что

$$\varphi(\Lambda) = \Lambda' \quad \text{и} \quad f'|_{\Lambda} = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}|_{\Lambda'},$$

то говорят, что ограничения  $f|_{\Lambda}$  и  $f'|_{\Lambda'}$  *сопряжены*, или диффеоморфизмы  $f$  и  $f'$  *сопряжены на инвариантных множествах*  $\Lambda$ ,  $\Lambda'$  соответственно. Если  $\Lambda = NW(f)$ ,  $\Lambda' = NW(f')$ , то  $f$  и  $f'$  называются  *$\Omega$ -сопряженными*. Если  $\Lambda = \Lambda' = M$ , то  $f$  и  $f'$  называются *сопряженными*.

Согласно [14], диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$ , удовлетворяющий аксиоме А Смейла, замкнутого  $n$ -многообразия  $M^n$  является диффеоморфизмом *Смейла-Виеториса* (принадлежит классу  $SV$ ), если существует вложенное в  $M^n$  базовое многообразие  $\mathcal{B}^n = S^1 \times D^{n-1}$  такое, что ограничение  $f|_{\mathcal{B}^n} \stackrel{\text{def}}{=} F$  является диффеоморфизмом  $F : \mathcal{B}^n \rightarrow F(\mathcal{B}^n) \subset \mathcal{B}^n$  на свой образ, который удовлетворяет следующим условиям:

- $F$  имеет вид

$$F(t, z) = (g(t), w(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \quad (2.1)$$

где  $g : S^1 \rightarrow S^1$  – неособый  $C^1$  эндоморфизм степени  $d \geq 2$ ;

- при фиксированном  $t \in S^1$  преобразование  $w|_{\{t\} \times D^{n-1}} : \{t\} \times D^{n-1} \rightarrow \mathcal{B}^n$  является равномерно сжимающим  $C^1$  вложением

$$\{t\} \times D^{n-1} \rightarrow \text{int}(\{g(t)\} \times D^{n-1}), \quad (2.2)$$

т.е. существуют константы  $0 < \lambda < 1$ ,  $C > 0$  такие, что

$$\text{diam}(F^k(\{t\} \times D^{n-1})) \leq C\lambda^k \text{diam}(\{t\} \times D^{n-1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}. \quad (2.3)$$

*Соленоидом* называется множество, которое можно представить в виде пересечения последовательности полноторий  $\mathcal{B}_1 \supset \mathcal{B}_2 \supset \dots \supset \mathcal{B}_i \supset \dots$ , таких, что для любого  $i \geq 1$  ось полнотория  $\mathcal{B}_{i+1}$  обходит  $n_i \geq 2$  раз ось полнотория  $\mathcal{B}_i$ , не образуя крюков. Соленоид является множеством канторовского типа (совершенным, нигде не плотным), с топологической размерностью равной единице, связным и вполне разрывным континуумом, локально гомеоморфным произведению отрезка на канторово множество.

Рассмотрим окружность  $S^1$ . Сюръективное  $C^1$  отображение  $g : S^1 \rightarrow S^1$  называется *эндоморфизмом* [17]. Эндоморфизм  $g$  называется *неособым*, если его производная  $Dg \neq 0$  [18]. Поскольку  $d \geq 2$ , то  $E_d$  является растягивающим эндоморфизмом ( $g : S^1 \rightarrow S^1$  – *растягивающий* эндоморфизм, если  $Dg > 1$ ). Шуб [17] классифицировал растягивающиеся эндоморфизмы, показав, что степень является полным инвариантом сопряженности в классе растягивающих эндоморфизмов.

Неособые эндоморфизмы окружности образуют важный класс  $d$ -накрытий окружности.  $d$ -*накрытием* окружности  $S^1$  называется сюръективный локальный гомеоморфизм  $S^1 \rightarrow S^1$  степени  $|d| \geq 2$ , при этом прообраз каждой точки состоит из  $|d| \in \mathbb{N}$  точек. В статье [19] сделана классификация  $d$ -накрытий окружности  $S^1$  с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. В [19] показано, что полным классификационным инвариантом с точностью до  $d$ -эквивалентности является наделенное схемой инвариантное счетное множество (отмеченное множество) линейного растягивающего эндоморфизма степени  $d$ .

### 3. Доказательство основных результатов

Первым основным результатом данной статьи является необходимое условие существования гомеоморфизма, сопрягающего диффеоморфизмы Смейла-Виеториса  $F_1$  и  $F_2$  на базовых многообразиях  $\mathcal{B}_1^n$  и  $\mathcal{B}_2^n$ . Показывается, что сопряженность диффеоморфизмов Смейла-Виеториса необходимо влечет сопряженность соответствующих эндоморфизмов.

**Т е о р е м а 3.1.** *Если диффеоморфизмы Смейла-Виеториса  $F_1$  и  $F_2$  сопряжены на базовых многообразиях  $\mathcal{B}_1^n$  и  $\mathcal{B}_2^n$ , тогда существует гомеоморфизм*

$$\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus \text{int}F_1(\mathcal{B}_1^n) \rightarrow \mathcal{B}_2^n \setminus \text{int}F_2(\mathcal{B}_2^n)$$

*такой, что выполняются следующие условия:*

- $\psi_*$  имеет вид:

$$\psi_*(t, z) = (\psi(t), w_*(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \quad (3.1)$$

- $\psi : S^1 \rightarrow S^1$  сопрягает эндоморфизмы  $g_1$  и  $g_2$ , т.е. выполняются равенство

$$g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1. \quad (3.2)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Из сопряженности  $F_1$  и  $F_2$  на базовых многообразиях следует, что существует гомеоморфизм  $\varphi : \mathcal{B}_1^n \rightarrow \mathcal{B}_2^n$  такой, что

$$F_2^n \circ \varphi = \varphi \circ F_1^n. \quad (3.3)$$

Возьмем некоторое  $t \in S^1$  и рассмотрим устойчивое многообразие в точке  $(t, z) \in \{t\} \times D^{n-1}$

$$W_1^s(t, z) = \{(t, z') \in \{t\} \times D^{n-1} : \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(F_1^j(t, z), F_1^j(t, z')) \rightarrow 0\}.$$

Так как  $\varphi$  - гомеоморфизм, то  $\rho(\varphi \circ F_1^n(t, z), \varphi \circ F_1^n(t, z')) \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . Согласно 3.3, получаем  $\rho(F_2^n \circ \varphi(t, z), F_2^n \circ \varphi(t, z')) \rightarrow 0$ . Тогда  $\varphi(t, z') \in W_2^s(\varphi(t, z))$ , где

$$W_2^s(\varphi(t, z)) = \{\varphi(t, z') : \lim_{j \rightarrow \infty} \rho(F_2^j(\varphi(t, z)), F_2^j(\varphi(t, z'))) \rightarrow 0\}.$$

Таким образом, точки  $\varphi(t, z)$ ,  $\varphi(t, z')$  принадлежат одному диску и отображение  $\varphi$  имеет вид  $\varphi(t, z) = (\psi(t), w_*(t, z))$ ,  $t \in S^1$ ,  $z \in D^{n-1}$ .

Используя вид диффеоморфизма  $F_1$  и отображения  $\varphi$ , из  $F_2 \circ \varphi = \varphi \circ F_1$  получим равенства  $F_2(\psi(t), w_*(t, z)) = \varphi(g_1(t), w_1(t, z)) = (g_2 \circ \psi(t), w_*(t, z)) = (\psi \circ g_1(t), w_1(t, z))$ . Значит,  $g_2 \circ \psi(t) = \psi \circ g_1(t)$  и  $\psi : S^1 \rightarrow S^1$  сопрягает эндоморфизмы  $g_1$  и  $g_2$ .  $\square$

Рассмотрим теперь теорему, в которой получены некоторые достаточные условия существования гомеоморфизма на базовых многообразиях, переводящего орбиты одного диффеоморфизма в орбиты другого диффеоморфизма с наличием коммутативной диаграммы отображений (совместно с теоремой 3.1. это дает частичное решение задачи топологической эквивалентности). Этот результат понадобится в дальнейшем для получения инвариантов сопряженности диффеоморфизмов класса  $SV$  на базовых многообразиях.

**Т е о р е м а 3.2.** Диффеоморфизмы Смейла-Виеториса  $F_1$  и  $F_2$  сопряжены на базовых многообразиях  $\mathcal{B}_1^n$  и  $\mathcal{B}_2^n$  тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм

$$\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus \text{int} F_1(\mathcal{B}_1^n) \rightarrow \mathcal{B}_2^n \setminus \text{int} F_2(\mathcal{B}_2^n)$$

такой, что выполняются следующие условия:

- $\psi_*$  имеет вид:

$$\psi_*(t, z) = (\psi(t), w_*(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \quad (3.4)$$

- $\psi_*$  сопрягает  $F_1$  и  $F_2$  на границах базовых многообразий  $\partial \mathcal{B}_1^n$  и  $\partial \mathcal{B}_2^n$ ,
- $\psi : S^1 \rightarrow S^1$  сопрягает эндоморфизмы  $g_1$  и  $g_2$ , т.е. выполняются равенство

$$g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1. \quad (3.5)$$

Для того, чтобы доказать достаточное условие, построим сопрягающий гомеоморфизм для  $F_1$  и  $F_2$  на базовых многообразиях. Нетрудно показать, что пересечения для соответствующих диффеоморфизмов Смейла-Виеториса  $\cap_{k \geq 0} F_i^k(\mathcal{B}_i^n) = \text{Sol}(F_i)$ , где  $i = 1, 2$  являются соленидами. Соленид обладает сложной динамикой, поэтому искомый гомеоморфизм строится отдельно на соленидальных множествах таких диффеоморфизмов и на дополнении к соленидам.

Сперва построим сопрягающий гомеоморфизм на базовых многообразиях без соленида. Рассмотрим два диффеоморфизма  $F_1 : \mathcal{B}_1^n \rightarrow \mathcal{B}_1^n$  и  $F_2 : \mathcal{B}_2^n \rightarrow \mathcal{B}_2^n$ , принадлежащих классу  $SV$  и удовлетворяющих условиям 2.1 - 2.3. Для определенности положим  $F_1(t, z) = (g_1(t), w_1(t, z))$ , и  $F_2(t, z) = (g_2(t), w_2(t, z))$ ,  $t \in S^1$ ,  $z \in D^{n-1}$ .

Зададим произвольный гомеоморфизм  $\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus \text{int} F_1(\mathcal{B}_1^n) \rightarrow \mathcal{B}_2^n \setminus \text{int} F_2(\mathcal{B}_2^n)$  такой, что выполняются следующие условия:

- $\psi_*$  имеет вид:

$$\psi_*(t, z) = (\psi(t), w_*(t, z)), \quad t \in S^1, \quad z \in D^{n-1}, \quad (3.6)$$

- $\psi_*$  сопрягает  $F_1$  и  $F_2$  на границах базовых многообразий  $\partial \mathcal{B}_1^n$  и  $\partial \mathcal{B}_2^n$ ,

$$\psi_* \circ F_1|_{\partial \mathcal{B}_1^n} = F_2 \circ \psi_*|_{\partial \mathcal{B}_1^n} \quad (3.7)$$

- $\psi : S^1 \rightarrow S^1$  сопрягает эндоморфизмы  $g_1$  и  $g_2$ , т.е. выполняются равенство

$$g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1. \quad (3.8)$$

Рассмотрим множества  $\cap_{k \geq 0} F_i^k(\mathcal{B}_i^n) = \text{Sol}(F_i)$ , где  $i = 1, 2$ . Введем отображение  $\psi_{*,e} : \mathcal{B}_1^n \setminus \text{Sol}(F_1) \rightarrow \mathcal{B}_2^n \setminus \text{Sol}(F_2)$ , где  $\forall x \in \mathcal{B}_1^n \setminus \text{Sol}(F_1)$  определяется в силу соотношения

$$\psi_{*,e}(x) = F_2^n \circ \psi_* \circ F_1^{-n}(x). \quad (3.9)$$

**Л е м м а 3.1.**

$$\bigcup_{j \geq 0} F^j[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)] = \mathcal{B}^n \setminus \text{Sol}(F).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Лемма тривиальна для  $j = 0$ , где  $\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n) = \mathcal{B}^n \setminus \text{Sol}(F)$ . Для  $j = 1$  имеем  $\bigcup_{j \geq 0} F[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)] = [\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)] \cup [F(\mathcal{B}^n) \setminus F^2(\mathcal{B}^n)]$ .

Используя свойство этих множеств и определение соленида, получаем

$$[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)] \cup [F(\mathcal{B}^n) \setminus F^2(\mathcal{B}^n)] = \mathcal{B}^n \setminus [F(\mathcal{B}^n) \cap F^2(\mathcal{B}^n)] = \mathcal{B}^n \setminus \text{Sol}(F).$$

Пусть по предположению индукции выполняется равенство  $\bigcup_{j \geq 0} F^j[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)] = \mathcal{B}^n \setminus \text{Sol}(F)$ . Тогда, исходя из этого, первого шага индукции и свойства множеств, получаем  $\bigcup_{j \geq 0} F^{j+1}[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)] = F[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)] \cup \left[ \bigcup_{j \geq 1} F^{j+1}[\mathcal{B}^n \setminus F(\mathcal{B}^n)] \right] = [F(\mathcal{B}^n \setminus \text{Sol}(F))] \cup [\mathcal{B}^n \setminus \text{Sol}(F)] = [F(\mathcal{B}^n) \setminus \text{Sol}(F)] \cup [\mathcal{B}^n \setminus \text{Sol}(F)] = [F(\mathcal{B}^n) \cup \mathcal{B}^n] \setminus \text{Sol}(F) = \mathcal{B}^n \setminus \text{Sol}(F)$ .

Лемма доказана.  $\square$

**Л е м м а 3.2.** Отображение  $\psi_{*,e}$  является гомеоморфизмом таким, что

$$\psi_{*,e} \circ F_1(x) = F_2 \circ \psi_{*,e}(x).$$

**Доказательство.** Отображение  $\psi_{*,e}$  является гомеоморфизмом, как композиция диффеоморфизмов Смейла-Виеториса  $F_1$  и  $F_2$  и гомеоморфизма  $\psi_*$ .

Докажем равенство  $\psi_{*,e} \circ F_1^n(x) = F_2^n \circ \psi_{*,e}(x)$ . Возьмем точку  $x \in \text{int} F_1(\mathcal{B}_1^n)$ , существует такое натуральное число  $n$ , что  $F_1^{-n}(x) \in \mathcal{B}_1^n \setminus \text{int} F_1(\mathcal{B}_1^n)$ . Согласно лемме 3.1.  $F_1^{-n}(x) \in \mathcal{B}_1^n \setminus \text{Sol}(F_1)$ . Гомеоморфизм  $\psi_* : \mathcal{B}_1^n \setminus \text{int} F_1(\mathcal{B}_1^n) \rightarrow \mathcal{B}_2^n \setminus \text{int} F_2(\mathcal{B}_2^n)$  удовлетворяет условиям 3.6 и 3.8, тогда  $\psi(F_1^{-n}(x)) \in \mathcal{B}_2^n \setminus \text{Sol}(F_2)$ . Учитывая способ задания отображения  $\psi_{*,e} = F_2^n \circ \psi_* \circ F_1^{-n}$ , получаем

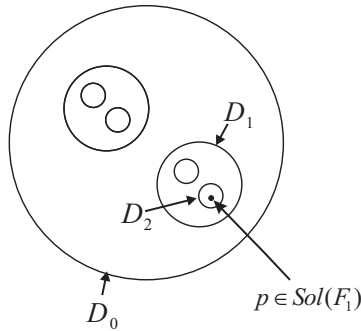
$$\psi_{*,e} \circ F_1^n(F_1^{-n}(x)) = \psi_{*,e}(x) = F_2^n \circ \psi_{*,e}(F_1^{-n}(x)).$$

Таким образом,  $\psi_{*,e} \circ F_1(x) = F_2 \circ \psi_{*,e}(x)$  и выполняется следующая коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_1^n \setminus \text{Sol}(F_1) & \xrightarrow{\psi_{*,e}} & \mathcal{B}_2^n \setminus \text{Sol}(F_2) \\ \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 \\ \mathcal{B}_1^n \setminus \text{Sol}(F_1) & \xrightarrow{\psi_{*,e}} & \mathcal{B}_2^n \setminus \text{Sol}(F_2) \end{array}.$$

Лемма доказана.  $\square$

Используя результаты статьи [14], рассмотрим символические модели ограничений диффеоморфизмов класса  $SV$   $F_1$  и  $F_2$  на  $\text{Sol}(F_1)$  и  $\text{Sol}(F_2)$  соответственно. Возьмем точку  $p \in \text{Sol}(F_1)$ . Согласно лемме 3 статьи [14], существует последовательность замкнутых двумерных дисков  $D_i = F_1^i(\{t_i\} \times D^{n-1})$  таких, что  $p \in \dots \subset D_i \subset \dots \subset D_0$  и  $p = \bigcap_{i \geq 0} D_i$ , см. рис. 3.1.



Р и с у н о к 3.1

Сечение соленоидального инвариантного множества

Определим отображение  $\psi_{*,es} : \text{Sol}(F_1) \rightarrow \text{Sol}(F_2)$ , где  $\psi_{*,es}(p) = p'$ ,  $p' \in \text{Sol}(F_2)$ .

Пользуясь обозначениями и результатами статьи [14], рассмотрим  $\prod_{g_1}$  как подмножество множества  $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ , состоящее из последовательностей  $\{t_i\}_0^\infty$ , где  $t_i = g_1(t_{i+1})$  при всех  $i \geq 0$ . Топология на  $\prod_{g_1}$  индуцируется топологией на  $\prod_{i \in \mathbb{Z}_0^+} S_i^1$ . На  $\prod_{g_1}$  определен гомеоморфизм  $\hat{g}_1 : \prod_{g_1} \rightarrow \prod_{g_1}$ , действующий по правилу

$$\hat{g}_1(\{t_0, \dots, t_i, \dots\}) = \{g_1(t_0), t_0, \dots, t_i, \dots\}.$$

Пространство  $\prod_{g_1}$  с отображением  $\hat{g}_1$ , следуя [4], называется *обратным пределом преобразования*  $g_1$ .

Аналогичным образом строится обратный предел для эндоморфизма  $g_2$ .

Напомним, что для каждого из соленоидов  $\text{Sol}(F_1)$  и  $\text{Sol}(F_2)$  введены отображения  $\theta_j : \text{Sol}(F_j) \rightarrow \prod_{g_j}$   $j = 1, 2$  следующим образом  $\theta_j(p) = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}$ .

Определим отображение  $\bar{\psi} : \prod_{g_1} \rightarrow \prod_{g_2}$ , положив

$$\bar{\psi}(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_i, \dots\}, \quad t'_i = \psi(t_i), \quad \forall i \geq 0. \quad (3.10)$$

где  $\psi : S^1 \rightarrow S^1$  сопрягающий гомеоморфизм такой, что  $g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1$ .

**Л е м м а 3.3.** *Для отображения  $\bar{\psi} : \prod_{g_1} \rightarrow \prod_{g_2}$  верны равенства*

$$t'_i = g_2(t'_{i+1}), \quad \forall i \geq 0. \quad (3.11)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу задания отображения  $\psi_{*,es}$  правила 3.10, леммы 3 статьи [14] и сопряженности эндоморфизмов  $g_1$  и  $g_2$  гомеоморфизмом  $\psi$  получаем

$$g_2(t'_{i+1}) = g_2(\psi(t_{i+1})) = \psi(g_1(t_{i+1})) = \psi(t_i) = t'_i \quad \square.$$

**Л е м м а 3.4.**  *$\bar{\psi}$  – взаимнооднозначное отображение.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Докажем инъективность отображения  $\bar{\psi}$ . Для этого возьмем две различные последовательности  $\{t_i\}_0^\infty, \{t'_i\}_0^\infty \in \prod_{g_1}$ , т.е. существуют такие  $i, j$ , что  $t_i \neq t_j$ . Отсюда и способа задания отображения  $\bar{\psi}$ , где на каждой компоненте действует гомеоморфизм  $\psi$  следует, что  $\psi(t_i) \neq \psi(t_j)$ , т.е. образы этих последовательностей  $\bar{\psi}(\{t_i\}_0^\infty) \neq \bar{\psi}(\{t'_i\}_0^\infty)$ .

Пусть  $\{t_i\}_0^\infty = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_i, \dots\} \in \prod_{g_2}$ . Существует такая последовательность  $\{t'_1, \dots, t'_i, \dots\} \in \prod_{g_1}$ , что при действии отображения  $\bar{\psi}$ , с учетом равенства  $t'_0 = g_2(t'_1)$  и в силу леммы 3.3. переходит в исходную  $\bar{\psi}(\{t'_1, \dots, t'_i, \dots\}) = \{g_2(t'_1), t'_1, \dots, t'_i, \dots\} = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_i, \dots\}$ . Это и доказывает сюръективность рассматриваемого отображения.  $\square$

**Л е м м а 3.5.** *Отображение  $\bar{\psi}$  непрерывно.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $\{r_0, \dots, r_i, \dots\} \in \prod_{g_1}$ , и пусть  $U_\varepsilon$  – окрестность точки  $\bar{\psi}(\{r_0, \dots, r_i, \dots\}) = \{\psi(r_0), \psi(r_1), \dots, \psi(r_i), \dots\}$ . Согласно определению тихоновской топологии, не уменьшая общности, можно считать, что существуют некоторые  $k \in \mathbb{Z}^+$  и сколь угодно малое  $\varepsilon > 0$  такие, что для любой точки  $t = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in U_\varepsilon$  выполняются неравенства:  $|\psi(r_0) - \psi(t_0)| < \varepsilon$ ,  $|\psi(r_i) - \psi(t_i)| < \varepsilon$  для любого  $i = 1, \dots, k-1$ . Так как  $\psi$  непрерывно, то существует  $\delta > 0$  такое, что  $|r_i - t_i| < \delta$  влечет  $|\psi(r_i) - \psi(t_i)| < \varepsilon$  для любого  $i = 1, \dots, k-1$ . Ясно что, можно считать  $\delta \leq \varepsilon$ . Зададим окрестность  $U_\delta$  точки  $\{r_0, \dots, r_i, \dots\}$ , положив  $t = \{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\} \in U_\delta$ , если  $|r_i - t_i| < \delta$  для любого  $i = 1, \dots, k-1$ . Тогда  $\bar{\psi}(U_\delta) \subset U_\varepsilon$ .  $\square$

Таким образом, отображение  $\psi_{*,es} : Sol(F_1) \rightarrow Sol(F_2)$  можно представить в виде композиции гомеоморфизмом

$$\psi_{*,es} = \theta_2^{-1} \circ \bar{\psi} \circ \theta_1. \quad (3.12)$$

**Л е м м а 3.6.** *Отображение  $\psi_{*,es}$  является гомеоморфизмом таким, что*

$$\psi_{*,es} \circ F_1(p) = F_2 \circ \psi_{*,es}(p).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Докажем сперва инъективность отображения  $\psi_{*,es}$ .

Возьмем различные  $p_1, p_2 \in Sol(F_1)$ . Согласно лемме 3 статьи [14], каждой точке  $p_i$ ,  $i = 1, 2$ , соответствует единственная последовательность точек  $\{t_i\}_0^\infty$ ,  $t_i \in S^1$ , и

соответствующая последовательность замкнутых дисков  $D_j^i = F_1^j(\{t_j^i\} \times D^{n-1})$  таких, что  $p_i = \cap_{j \geq 0} D_j^i$ . Поскольку  $p_1 \neq p_2$  и диаметры дисков стремятся к нулю, то

$$D_1^1 = D_1^2, \dots, D_{k-1}^1 = D_{k-1}^2, D_k^1 \neq D_k^2.$$

Поэтому  $t_k^1 \neq t_k^2$  и, значит,  $\theta_1(p_1) \neq \theta_1(p_2)$ .

В силу леммы 3.4. различные последовательности  $\theta_1(p_1) = (\{t_0^1, t_1^1, \dots, t_i^1, \dots\})$  и  $\theta_1(p_2) = (\{t_0^2, t_1^2, \dots, t_i^2, \dots\})$ , в которых существует  $k$  такое, что  $t_k^1 \neq t_k^2$ , перейдут в последовательности  $\bar{\psi}(\theta_1(p_1)) = (\{\psi(t_0^1), \psi(t_1^1), \dots, \psi(t_i^1), \dots\})$ ,  $\bar{\psi}(\theta_1(p_2)) = (\{\psi(t_0^2), \psi(t_1^2), \dots, \psi(t_i^2), \dots\})$ , где  $\psi(t_k^1) \neq \psi(t_k^2)$ , т.е.  $\bar{\psi}(\theta_1(p_1)) \neq \bar{\psi}(\theta_1(p_2))$ .

С учетом способа задания 3.10 отображения  $\bar{\psi}$ , верны равенства

$$(\{\psi(t_0^1), \psi(t_1^1), \dots, \psi(t_i^1), \dots\}) = (\{t_0^{1'}, t_1^{1'}, \dots, t_i^{1'}, \dots\}),$$

$$(\{\psi(t_0^2), \psi(t_1^2), \dots, \psi(t_i^2), \dots\}) = (\{t_0^{2'}, t_1^{2'}, \dots, t_i^{2'}, \dots\}).$$

Из леммы 3.3.  $t_i^{j'} = g_2(t_{i+1}^{j'})$ ,  $j = 1, 2$  и условия (2.3) вытекает что

$$\{t_0^{j'}\} \times D^2 \supset F_2(\{t_1^{j'}\} \times D^{n-1}) \supset \dots \supset F_2^i(\{t_i^{j'}\} \times D^{n-1}) \supset \dots$$

Более того, так как  $\text{diam}(F_2^i(\{t_i^{j'}\} \times D^{n-1})) \rightarrow 0$  при  $i \rightarrow \infty$  и  $j = 1, 2$ , то пересечения  $\cap_{i \geq 0} F_2^i(\{t_i^{j'}\} \times D^{n-1})$  состоят ровно из одной точки  $p_1', p_2'$  соответственно. Из определения множества  $Sol(F_2)$  следует, что  $p_1', p_2' \in Sol(F_2)$ . Т.к. существует  $k$  для которого верно равенство  $\psi(t_k^1) \neq \psi(t_k^2)$ , то  $p_1' \neq p_2'$  и, следовательно,  $\theta_2^{-1}(\bar{\psi}(\theta_1(p_1))) \neq \theta_2^{-1}(\bar{\psi}(\theta_1(p_2)))$ .

Докажем сюръективность отображения  $\psi_{*,es}$ . Возьмем  $p' \in Sol(F_2)$ . Согласно лемме 3 статьи [14] определена единственная последовательность точек  $(\{t_0', t_1', \dots, t_i', \dots\})$  такая, что  $\theta_2(p') = (\{t_0', t_1', \dots, t_i', \dots\})$ . В силу леммы 3.4. существует последовательность

$$(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) = (\bar{\psi})^{-1}(\{t_0', t_1', \dots, t_i', \dots\}),$$

где  $t_i' = \psi(t_i)$ . Из проведенных в предыдущем пункте рассуждений следует, что  $\theta_1^{-1}(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) = p$ ,  $p \in Sol(F_1)$ . Таким образом  $\psi_{*,es}(p) = \theta_2^{-1} \circ \bar{\psi} \circ \theta_1(p) = p'$ .

В силу леммы 3.5. и леммы 5 из [14],  $\psi_{*,es}$  – непрерывное отображение, как композиция непрерывных отображений. Таким образом,  $\psi_{*,es}$  – гомеоморфизм.

Докажем равенство  $\psi_{*,es} \circ F_1(p) = F_2 \circ \psi_{*,es}(p)$ , которое можно представить в виде коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} Sol(F_1) & \xrightarrow{\psi_{*,es}} & Sol(F_2) \\ \downarrow F_1 & & \downarrow F_2 \\ Sol(F_1) & \xrightarrow{\psi_{*,es}} & Sol(F_2) \end{array}$$

Преобразуем левую часть равенства. Согласно лемме 5 статьи [14], отображение  $\theta_1$  является гомеоморфизмом таким, что  $\theta_1 \circ f_1 = \widehat{g}_1 \circ \theta_1$ . Учитывая способ задания  $\psi_{*,es}$  3.12 и предыдущее равенство  $\psi_{*,es} \circ F_1(p) = \theta_2^{-1} \circ \bar{\psi} \circ \theta_1 \circ F_1(p) = \theta_2^{-1} \circ \bar{\psi} \circ \widehat{g}_1 \circ \theta_1(p)$ . Действуя отображениями  $\theta_1$  и  $\widehat{g}_1$ , получаем  $\theta_2^{-1} \circ \bar{\psi} \circ \widehat{g}_1 \circ \theta_1(p) = \theta_2^{-1} \circ \bar{\psi} \circ \widehat{g}_1(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) = \theta_2^{-1} \circ \bar{\psi}(\{g_1(t_0), t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) = \theta_2^{-1}(\{\psi(g_1(t_0)), \psi(t_0), \psi(t_1), \dots, \psi(t_i), \dots\})$ .

В силу того, что  $\psi$  – сопрягающий гомеоморфизм  $g_1$  и  $g_2$ , получаем  $\theta_2^{-1}(\{\psi(g_1(t_0)), \psi(t_0), \psi(t_1), \dots, \psi(t_i), \dots\}) = \theta_2^{-1}(\{g_2(\psi(t_0)), \psi(t_0), \psi(t_1), \dots, \psi(t_i), \dots\}) = \theta_2^{-1} \circ \widehat{g}_2(\{\psi(t_0), \psi(t_1), \dots, \psi(t_i), \dots\})$ .

Аналогично, согласно лемме 5 из [14], существует отображение  $\theta_2$ , являющееся гомеоморфизмом таким, что  $\theta_2 \circ F_2 = \widehat{g}_2 \circ \theta_2$ . Преобразовав это равенство последовательным умножением на  $\theta_2^{-1}$  сначала слева, а затем справа, получаем

$$F_2 \circ \theta_2^{-1} = \theta_2^{-1} \circ \widehat{g}_2. \quad (3.13)$$

Преобразуем теперь правую часть доказываемого равенства. Используя представление отображения  $\psi_{*,es}$  в виде 3.12, правила действий отображений  $\theta_1$  и  $\overline{\psi}$ , имеем  $F_2 \circ \psi_{*,es}(p) = F_2 \circ \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \theta_1(p) = F_2 \circ \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi}(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) = F_2 \circ \theta_2^{-1}(\{\psi(t_0), \psi(t_1), \dots, \psi(t_i), \dots\})$ .

Согласно 3.13,  $\psi_{*,es} \circ F_1(p) = F_2 \circ \psi_{*,es}(p)$ . Лемма доказана.

□ В силу обозначений, введенных выше, определим отображение

$$\psi_{**}(p) = \begin{cases} F_2^n \circ \psi_* \circ F_1^{-n}(p), & p \in \mathcal{B}_1^n \setminus \text{Sol}(F_1) \\ \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \theta_1(p), & p \in \text{Sol}(F_1) \end{cases}.$$

**Л е м м а 3.7.**  $\psi_{**}$  – сопрягающий гомеоморфизм для  $F_1$  и  $F_2$  на базовых многообразиях такой, что

$$\psi_{**} \circ F_1|_{\mathcal{B}_1^n} = F_2 \circ \psi_{**}|_{\mathcal{B}_1^n}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**  $\psi_{**}$  – взаимно однозначное отображение в силу лемм 3.2. и 3.7.

Для отображения  $\psi_{*,e} = F_2^n \circ \psi_* \circ F_1^{-n}$ , действующего на дополнении к солениодам на базовых многообразиях  $\psi_{*,e} : \mathcal{B}_1^n \setminus \text{Sol}(F_1) \rightarrow \mathcal{B}_2^n \setminus \text{Sol}(F_2)$ , непрерывность следует из композиции непрерывных отображений.

Рассмотрим  $t$ -сечение, где  $t \in S^1$  – множество вида  $\{t\} \times D^{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} D_t^{n-1}$ . Каждое сечение естественным образом отождествляется с  $D^{n-1}$  посредством проекции  $p_2 : S^1 \times D^{n-1} \rightarrow D^{n-1}$ .

Гомеоморфизм  $\psi_*$  имеет вид  $\psi_*(t, z) = (\psi(t), w_*(t, z))$ ,  $t \in S^1$ ,  $z \in D^{n-1}$ , где  $\psi : S^1 \rightarrow S^1$  сопрягает эндоморфизмы  $g_1$  и  $g_2$ , т.е. выполняются равенство  $g_2 \circ \psi = \psi \circ g_1$ , тогда  $g_2^n \circ \psi = \psi \circ g_1^n$ . Из этого будет следовать, что гомеоморфизм  $\psi_*$  сохраняет дисковую структуру, т.е. переводит  $t$ -сечение в  $\psi(t)$ -сечение и верно равенство

$$\psi_*(D_{t_i}^{n-1} \setminus \text{Sol}(F_1)) = D_{\psi(t_i)}^{n-1} \setminus \text{Sol}(F_2). \quad (3.14)$$

Докажем непрерывность отображения  $\psi_{*,es} : \text{Sol}(F_1) \rightarrow \text{Sol}(F_2)$ , действующего по правилу  $\psi_{*,es} = \theta_2^{-1} \circ \overline{\psi} \circ \theta_1$ .

Возьмем точку  $p \in \text{Sol}(F_1)$ . Согласно лемме 3 статьи [14] существует последовательность  $(\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\}) \in \prod_{g_1}$  такая, что  $\theta_1(p) = (\{t_0, t_1, \dots, t_i, \dots\})$ . Тогда  $\psi_{*,es}(p) = \theta_2^{-1}(\{t'_0, t'_1, \dots, t'_i, \dots\})$ , где  $t'_i = \psi(t_i)$ .

Пусть  $U'$  окрестность точки  $\theta_2(\psi_{*,es}(p)) = \{t'_i\}_0^\infty$ , где  $p \in \text{Sol}(F_1)$ . Зафиксируем  $\varepsilon > 0$ ,  $r \in \mathbb{N}$ . Согласно определению топологии на множестве  $\prod_{g_2}$ , можно считать  $U' = \{x'_i\}_0^\infty \in \prod_g : |x'_i - t'_i| < \varepsilon$ , для  $i = 0, \dots, r\}$ .

Так как для точки  $\theta_2(\psi_{*,es}(p)) = \{t'_0, t'_1, \dots, t'_i, \dots\}$  в ее окрестности  $U'$ , заданной числами  $r \in \mathbb{N}$  и  $\varepsilon > 0$ , выполняется равенство  $t'_{r-j} = g_2^j(t'_r)$  для всех  $1 \leq j \leq r$ , а отображение  $g_2$  непрерывное, то существует такое  $0 < \delta \leq \varepsilon$ , что  $|x'_r - t'_r| < \delta$  влечет  $|x'_i - t'_i| < \varepsilon$  для всех  $i = 0, \dots, r-1$ .

Введем обозначение  $D_{t,\delta} \stackrel{\text{def}}{=} [t - \delta, t + \delta] \times D_t^{n-1}$ , где  $D_t^{n-1}$  –  $t$ -сечение,  $t \in S^1$ . Пусть  $U$  окрестность точки  $p \in \text{Sol}(F_1)$ . Тогда для любой точки  $q \in U(p) \cap \text{Sol}(F_1)$ , в силу леммы 3 статьи [14],  $\theta_1(q) = \{x_0, x_1, \dots, x_i, \dots\} \in \prod_{g_1}$  и

$$q = \bigcap_{i \geq 0} F_1^i(D_{x_i}^{n-1}) = D_{x_0}^{n-1} \cap F_1(D_{x_1}^{n-1}) \cap F_1^2(D_{x_2}^{n-1}) \cap \dots \quad (3.15)$$



Тогда для точки  $\psi_{*,es}(q) = \theta_2^{-1}(\{x'_0, x'_1, \dots, x'_i, \dots\})$ , где  $x'_i = \psi(x_i)$ , в силу равенства 3.14 выполняется

$$\psi_{*,es}(q) = \bigcap_{i \geq 0} F_2^i(D_{\psi(x_i)}^{n-1}) = D_{\psi(x_0)}^{n-1} \cap F_2(D_{\psi(x_1)}^{n-1}) \cap F_2^2(D_{\psi(x_2)}^{n-1}) \cap \dots$$

Диффеоморфизм  $F_1$  имеет вид  $F_1(t, z) = (g_1(t), w_1(t, z))$ , где  $g_1 : S^1 \rightarrow S^1$  – неособый  $C^1$  эндоморфизм степени  $d \geq 2$ . Существует  $\delta_r > 0$ ,  $\delta_r \leq \dots \leq \delta_2 \leq \delta_1 \leq \varepsilon$  такое, что  $F_1^r(D_{t_r, \delta_r}^{n-1}) \cap F_1^r(D_{t_r^2, \delta_r}^{n-1}) \cap \dots \cap F_1^r(D_{t_1^d, \delta_r}^{n-1}) = \emptyset$ . Тогда точка  $q \in F_1^r(D_{t_r, \delta_r}^{n-1}) \subset \dots \subset F_1^2(D_{t_2, \delta_2}^{n-1}) \subset F_1(D_{t_1, \delta_1}^{n-1}) \subset F_1(D_{t_0, \varepsilon}^{n-1})$ . Так как  $q \in U(p) \cap \text{Sol}(F_1)$ , то  $q \in D_{x_0}^{n-1} \cap F_1(D_{x_1}^{n-1}) \cap F_1^2(D_{x_2}^{n-1}) \cap \dots \cap F_1^r(D_{x_r}^{n-1}) \cap F_1^r(D_{t_r, \delta_r}^{n-1})$ . Значит,  $F_1^r(D_{x_r}^{n-1}) \cap F_1^r(D_{t_r, \delta_r}^{n-1}) \neq \emptyset$ ,  $D_{x_r}^{n-1} \cap D_{t_r, \delta_r}^{n-1} \neq \emptyset$  и  $|x_r - t_r| < \delta_r$ . Поскольку  $g_1$  равномерно непрерывное отображение, получаем неравенства  $|g_1(x_r) - g_1(t_r)| < \varepsilon$ ,  $|g_1^2(x_r) - g_1^2(t_r)| < \varepsilon$ ,  $\dots$ ,  $|g_1^r(x_r) - g_1^r(t_r)| < \varepsilon$ , т.е.  $|x_{r-1} - t_{r-1}| < \varepsilon$ ,  $|x_{r-2} - t_{r-2}| < \varepsilon$ ,  $\dots$ ,  $|x_0 - t_0| < \varepsilon$ .

Из 3.15 для точки  $\psi_{*,es}(q) = \theta_2^{-1}(\{x'_0, x'_1, \dots, x'_i, \dots\})$ , где  $x'_i = \psi(x_i)$ , и в силу равенства 3.14 выполняется

$$\psi_{*,es}(q) = \bigcap_{i \geq 0} F_2^i(D_{\psi(x_i)}^{n-1}) = D_{\psi(x_0)}^{n-1} \cap F_2(D_{\psi(x_1)}^{n-1}) \cap F_2^2(D_{\psi(x_2)}^{n-1}) \cap \dots$$

Так как отображение  $\bar{\psi}$  непрерывно, см. лемму 3.5., тогда  $|x'_{r-1} - t'_{r-1}| < \varepsilon$ ,  $|x'_{r-2} - t'_{r-2}| < \varepsilon$ ,  $\dots$ ,  $|x'_0 - t'_0| < \varepsilon$ . Итак,  $\psi_{*,es}(q) \in U'(\psi_{*,es}(p))$  для любой точки  $q \in U(p)$ . Следовательно,  $\psi_{*,es}$  – непрерывное отображение.  $\psi_{*,es}^{-1}$  – непрерывное отображение, как прообраз непрерывного отображения на компакте. Таким образом,  $\psi_{*,es}$  – гомеоморфизм.

Наличие коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}_1^n & \xrightarrow{F_1} & \mathcal{B}_1^n \\ \downarrow \psi_{**} & & \downarrow \psi_{**} \\ \mathcal{B}_2^n & \xrightarrow{F_2} & \mathcal{B}_2^n \end{array}$$

следует из лемм 3.2., 3.7. и условия 3.7 для гомеоморфизма  $\psi_*$  о сопряжении  $F_1$  и  $F_2$  на границах базовых многообразий  $\partial \mathcal{B}_1^n$  и  $\partial \mathcal{B}_2^n$ .  $\square$

*Благодарности.* Первый автор (Н. В. Исаенкова) благодарит РФФИ (проект 15-01-03687-а) за финансовую поддержку. Второй автор (Е. В. Жужома) благодарит РНФ, проект 17-11-01041, за финансовую поддержку. Утверждение о необходимом условии существования сопряжения диффеоморфизмов Смейла-Виеториса (Теорема 3.1), леммы 3.1-3.4 доказаны в рамках поддержки РФФИ (проекты 15-01-03687-а, 16-51-10005-Ко\_а) и программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году (проект 90). Утверждение о достаточных условиях существования сопряжения диффеоморфизмов Смейла-Виеториса с помощью сопряжений соответствующих эндоморфизмов (Теорема 3.2), леммы 3.5-3.7 доказаны в рамках поддержки РНФ, проект 17-11-01041.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747-817.
2. R.F. Williams, “One-dimensional non-wandering sets”, *Topology*, **6** (1967), 473-487.

3. R.F. Williams, "Classification of subshifts of finite type", *Annals of Math.*, **9** (1973), 120-153.
4. R.F. Williams, "Expanding attractors", *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169-203.
5. L. Block, "Diffeomorphisms obtained from diffeomorphisms", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **214** (1975), 403-413.
6. F. Farrell, L. Jones, "New attractors in hyperbolic dynamics", *Jour. Diff. Geom.*, **15** (1980), 107-133.
7. J. Gibbons, "One-dimensional basic set in the three-sphere", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 163-178.
8. В.З. Гринес, "О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах, 1", *Труды ММО*, **32** (1975), 35-60.
9. В.З. Гринес, "О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах, 2", *Труды ММО*, **34** (1977), 243-252.
10. В.З. Гринес, "О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами", *Матем. сб.*, **188**:4 (1997), 57-94.
11. В.З. Гринес, Е.В. Жужома, "О топологической классификации ориентируемых аттракторов на  $n$ -мерном торе", *Успехи мат. наук*, **34**:4 (1979), 185-186.
12. С.Х. Арансон, В.З. Гринес, "О некоторых инвариантах динамических систем на двумерных многообразиях (необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности транзитивных систем)", *Матем. сб.*, **90**:132:3 (1973), 372-402.
13. В.З. Гринес, "О топологической эквивалентности одномерных базисных множеств диффеоморфизмов на двумерных многообразиях", *УМН*, **180**:6 (1974), 163-164.
14. Е.В. Жужома, Н.В. Исаенкова, "О нульмерных соленоидальных базисных множествах", *Матем. сб.*, **202**:3 (2011), 47-68.
15. C. Robinson, R. Williams, "Classification of expanding attractors: an example", *Topology*, **15** (1976), 321-323.
16. Е.В. Жужома, Н.В. Исаенкова, "О классификации одномерных растягивающихся аттракторов", *Матем. зам.*, **86**:3 (2009), 360-370.
17. M. Shub, "Endomorphisms of compact differentiable manifolds", *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175-199.
18. Z. Nitecki, "Nonsingular endomorphisms of the circle", *Proc. Symp. Pure Math.*, **14** (1970), 203-220.
19. Е.В. Жужома, Н.В. Исаенкова, "Классификация накрытий окружности", *Труды МИАН. Российская академия наук*, **3** (2012), 96-101.

Поступила 10.03.2017

MSC2010 37D20, 37G30

# Conjugacy of Smale-Vietoris diffeomorphisms using a conjugacy of endomorphisms

© N. V. Isaenkova <sup>3</sup>, E. V. Zhuzhoma <sup>4</sup>

**Abstract.** In the paper one gets the connection between a conjugacy of Smale-Vietoris diffeomorphisms and corresponding nonsingular circle endomorphisms conjugacy. To be precise, one gets the necessary condition for a conjugacy of the restriction of Smale-Vietoris diffeomorphism on basic manifolds. It is shown that a necessary condition for a conjugacy of the diffeomorphisms' class under consideration is a conjugacy of corresponding circle endomorphisms. In the paper the technical theorem is also proved that contains some sufficient conditions of the existence of homeomorphism on basic manifolds that takes the orbits of Smale-Vietoris diffeomorphism to the orbits of another diffeomorphism with a commutative diagram of mappings. Together with the first result it gives the particular solution of the topological equivalence problem. Later on, the results of this paper may be useful to find invariants of conjugacy for diffeomorphisms of the class under consideration on basic manifolds.

**Key Words:** conjugacy, commutative diagram, topological equivalence, solenoid, nonsingular endomorphism.

## REFERENCES

1. S. Smale, "Differentiable dynamical systems", *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 747-817.
2. R.F. Williams, "One-dimensional non-wandering sets", *Topology*, **6** (1967), 473-487.
3. R.F. Williams, "Classification of subshifts of finite type", *Annals of Math.*, **9** (1973), 120-153.
4. R.F. Williams, "Expanding attractors", *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169-203.
5. L. Block, "Diffeomorphisms obtained from diffeomorphisms", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **214** (1975), 403-413.
6. F. Farrell, L. Jones, "New attractors in hyperbolic dynamics", *Jour. Diff. Geom.*, **15** (1980), 107-133.
7. J. Gibbons, "One-dimensional basic set in the three-sphere", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **164** (1972), 163-178.
8. V.Z. Grines, "On topological conjugacy of diffeomorphisms of two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basic sets, 1", *Transactions of the Moscow mathematical society*, **32** (1975), 35-60.
9. V.Z. Grines, "On topological conjugacy of diffeomorphisms of two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basic sets, 2", *Transactions of the Moscow mathematical society*, **34** (1977), 243-252.

<sup>3</sup> **Nataliya V. Isaenkova**, Professor of department of Mathematics, Computer Science and Information Technology, Nizhniy Novgorod Academy of the Ministry of the Interior of the Russian Federation (3 Ankudinovskoe Shosse, Nizhni Novgorod, 603950, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0003-4880-3526>, [nisaenkova@mail.ru](mailto:nisaenkova@mail.ru)

<sup>4</sup> **Evgeny V. Zhuzhoma**, Professor of department of Fundamental Mathematics, National research University "Higher school of Economics" ( 25/12 Bolshaya Pecherskaya, Nizhni Novgorod, 603005, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8682-7591>, [zhuzhoma@mail.ru](mailto:zhuzhoma@mail.ru)

10. V.Z. Grines, “On the topological classification of structurally stable diffeomorphisms of surfaces with one-dimensional attractors and repellers”, *Sb. Math.*, **188**:4 (1997), 537–569.
11. V.Z. Grines, E.V. Zhuzhoma, “On the topological classification of orientable attractors on an  $n$ -dimensional torus”, *Russian Math. Surveys*, **34**:4 (1979), 163–164.
12. S.Kh. Aranson, V.Z. Grines, “On some invariants of dynamical systems on two-dimensional manifolds (necessary and sufficient conditions for the topological equivalence of transitive dynamical systems)”, *Math. USSR-Sb.*, **19**:3 (1973), 365–393.
13. V.Z. Grines, “On the topological equivalence of one-dimensional basic sets diffeomorphisms on two-dimensional manifolds”, *Successes of mathematical Sciences*, **180**:6 (1974), 163–164.
14. E.V. Zhuzhoma, N.V. Isaenkova, “Zero-dimensional solenoidal base sets”, *Sb. Math.*, **202**:3 (2011), 351–372.
15. C. Robinson, R. Williams, “Classification of expanding attractors: an example”, *Topology*, **15** (1976), 321–323.
16. E.V. Zhuzhoma, N.V. Isaenkova N.V., “On classification of one-dimensional expanding attractors”, *Math. Notes*, **86**:3 (2009), 333–341.
17. M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175–199.
18. Z. Nitecki, “Nonsingular endomorphisms of the circle”, *Proc. Symp. Pure Math.*, **14** (1970), 203–220.
19. E.V. Zhuzhoma, N.V. Isaenkova, “Classification of coverings of the circle”, *Proc. Steklov Inst. Math.*, **3** (2012), 88–93.

*Submitted 10.03.2017*

УДК 517.928.4

# Стабилизация сингулярно возмущенных систем с полиномиальной правой частью

© М. В. Козлов<sup>1</sup>

**Аннотация.** В статье рассматривается задача стабилизации сингулярно возмущенных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с однородной правой частью в виде полиномов нечетной степени при достаточно малых значениях возмущающего параметра. Получены достаточные условия стабилизации нулевого решения указанных систем до асимптотической устойчивости управлением обратной связью в виде полиномов той же степени, что и правая часть исходной системы. Предполагается, что измерению подлежат только компоненты вектора медленных переменных и управление может входить только в медленную подсистему. Для различных случаев описаны способы построения стабилизирующих управлений. В качестве метода исследования применяется декомпозиция сингулярно возмущенной системы на быструю и медленную подсистемы меньшей размерности. Для анализа устойчивости применяется метод функций Ляпунова.

**Ключевые слова:** сингулярные возмущения, малый параметр, стабилизация, однородная форма.

## 1. Введение

Сингулярно возмущенные дифференциальные уравнения широко применяются при математическом моделировании аэрокосмических, механических, биологических и других видов систем (см. обзор [1]). Одним из наиболее важных направлений в исследовании сингулярно возмущенных систем является задача об устойчивости по Ляпунову и, как следствие, задача управления и стабилизации. Данной тематике посвящено немало работ (см. [1]–[6]). Данная статья посвящена стабилизации нулевого решения сингулярно возмущенных систем с однородной правой частью в виде полиномов нечетной степени.

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x^{[\mu]} + A_{12}y^{\{\mu\}}, \\ \varepsilon \dot{y} = A_{21}x^{[\mu]} + A_{22}y^{\{\mu\}}, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n$ ,  $y = (y_1, \dots, y_m)^T \in R^m$ ,  $\varepsilon > 0$  — малый параметр,  $\mu > 0$  — нечетное число;  $x^{[\mu]} \in R^N$  — вектор-столбец, составленный из всевозможных мономов вида  $x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n}$ ,  $k_1 + \dots + k_n = \mu$ , следующих в лексикографическом порядке;  $y^{\{\mu\}} = (y_1^\mu, \dots, y_m^\mu)^T$ ;  $A_{ij}$  — вещественные матрицы соответствующих размерностей. В работе [5] на основе метода декомпозиции, впервые предложенного А. Н. Тихоновым [7], были получены условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1) в виде следующей теоремы.

<sup>1</sup> **Козлов Михаил Владимирович**, преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7681-8931>, [kozlov.mvl@yandex.ru](mailto:kozlov.mvl@yandex.ru)

**Т е о р е м а 1.1.** Если матрица  $A_{22}$  является диагональной отрицательно определенной и нулевое решение системы

$$\dot{x} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x^{[\mu]}$$

асимптотически устойчиво, то при  $\varepsilon < \varepsilon_0$  нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво в целом ( $\varepsilon_0$  — некоторое достаточно малое число).

В работе [6] был рассмотрен случай, когда измерению подлежат только компоненты вектора быстрых переменных  $y$ . Вследствие этого, стабилизация системы (2.1) осуществлялась добавлением в правую часть управления, зависящего только от  $y$ , что приводило к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x^{[\mu]} + A_{12}y^{\{\mu\}} + K_1y^{\{\mu\}}, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}x^{[\mu]} + A_{22}y^{\{\mu\}} + K_2y^{\{\mu\}}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Матрицы  $K_1$ ,  $K_2$  подбирались таким образом, чтобы система (1.2) удовлетворяла теореме 1.1. В настоящей работе это исследование продолжено на случай, когда измерению подлежит только вектор медленных переменных  $x$ , а управление может входить только в первую подсистему (2.1).

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим систему (2.1) с добавлением к ней управляющего воздействия

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x^{[\mu]} + A_{12}y^{\{\mu\}} + BU, \\ \varepsilon\dot{y} = A_{21}x^{[\mu]} + A_{22}y^{\{\mu\}}, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $B$  — заданная постоянная матрица размерности  $(n \times r)$ ,  $U \in R^r$  — вектор управления. Управление  $U$  будем строить по принципу обратной связи в следующей форме

$$U = Kx^{[\mu]}, \quad (2.2)$$

где  $K$  — постоянная  $(r \times N)$ -матрица, подлежащая определению. Задача состоит в построении такой матрицы  $K$ , что нулевое решение системы (2.1) при управлении (2.2) становится асимптотически устойчивым при достаточно малых значениях параметра  $\varepsilon$ .

Согласно теореме 1.1., достаточные условия асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.1) можно сформулировать в виде следующего утверждения.

**Т е о р е м а 2.1.** Пусть выполнены условия:

- 1) матрица  $A_{22}$  является диагональной отрицательно определенной;
- 2) матрица  $K$  такова, что нулевое решение системы

$$\dot{x} = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} + BK)x^{[\mu]} \quad (2.3)$$

асимптотически устойчиво. Тогда нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво при  $\varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $\varepsilon_0$  — некоторое число.

Таким образом, при выполнении первого условия теоремы 2.1. задача сводится к построению матрицы  $K$ , стабилизирующей нулевое решение системы (2.3).

### 3. Построение матрицы $K$

Введем обозначение  $A = A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$  и перепишем систему (2.3) в виде

$$\dot{x} = (A + BK)x^{[\mu]}. \quad (3.1)$$

Рассмотрим несколько случаев стабилизируемости системы (3.1).

2.1. Случай, когда может быть стабилизирована система

$$\dot{x} = BKx^{[\mu]}. \quad (3.2)$$

Зададим матрицу  $K$  так, чтобы столбцы, соответствующие смешанным мономам в векторе  $x^{[\mu]}$ , были нулевыми. Обозначим через  $K_0$  ( $r \times n$ )-матрицу, полученную из матрицы  $K$  удалением этих нулевых столбцов. Тогда систему (3.2) можно переписать в виде

$$\dot{x} = BK_0x^{\{\mu\}}. \quad (3.3)$$

В работе [8] было показано, что для асимптотической устойчивости нулевого решения системы вида (3.3) необходимо выполнение условия

$$\text{rang } B = n. \quad (3.4)$$

Если условие (3.4) выполнено, то матрица  $S = BB^T$  является симметрической положительно определенной и матрица  $K_0 = -B^T$  стабилизирует систему (3.3). В итоге получаем следующее утверждение.

**Л е м м а 3.1.** *Если выполнено условие (3.4), то система (3.1) стабилизируется матрицей  $K$ , в которой на месте столбцов, соответствующих мономам вида  $x_i^\mu$ , стоят столбцы матрицы  $K_0 = -hB^T$ , а остальные столбцы являются нулевыми,  $h > 0$  — достаточно большое число.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Система (3.1) при выбранных обозначениях принимает вид

$$\dot{x} = Ax^{[\mu]} - hSx^{\{\mu\}}. \quad (3.5)$$

Рассмотрим положительно определенную квадратичную форму  $v = \frac{1}{2}x^T S^{-1}x$ , полная производная которой в силу системы (3.5) допускает следующую оценку

$$\frac{dv}{dt}|_{(3.5)} = x^T S^{-1}Ax - hx^T x^{\{\mu\}} \leq \sqrt{N} \|S^{-1}\| \|A\| \|x\|^{\mu+1} - h\sqrt{n} \|x\|^{\mu+1},$$

и, очевидно, при  $h > h_0 = \|S^{-1}\| \|A\| \sqrt{N/n}$  является отрицательно определенной функцией. Следовательно, построенная матрица  $K$  стабилизирует нулевое решение системы (3.1) при  $h > h_0$ . Утверждение доказано. Лемма 3.1..

2.2. Случай, когда систему (3.2) невозможно стабилизировать. В этом случае  $\text{rang } B = k < n$ . Как указано в работе [8], систему (3.1) при помощи линейного преобразования фазовых координат можно привести к виду, когда управляющие воздействия входят только в  $k$  уравнений системы. Для определенности будем считать, что система (3.1) уже имеет такой вид, что управление входит только в первые  $k$  уравнений, т.е. последние  $(n - k)$  строк матрицы являются нулевыми. Тогда система (3.1) представляется в виде

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = (A^{(1)} + B^{(1)}K)x^{[\mu]}, \\ \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}x^{[\mu]}, \end{cases} \quad (3.6)$$

где  $x^{(1)} = (x_1, \dots, x_k)^T$ ,  $x^{(2)} = (x_{k+1}, \dots, x_n)^T$ ,  $A^{(1)}$  —  $(k \times N)$ -матрица, состоящая из первых  $k$  строк матрицы  $A$ ,  $A^{(2)}$  —  $((n-k) \times N)$ -матрица, состоящая из остальных строк матрицы  $A$ ,  $B^{(1)}$  —  $k \times r$ -матрица, состоящая из первых  $k$  строк матрицы  $B$ . Выделим в первой подсистеме системы (3.6) блок, содержащий только вектор  $x^{(1)\{\mu\}}$ , в результате чего получим

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = (A^{(1)} + B^{(1)}K^{(1)})x^{[\mu]} + B^{(1)}K^{(2)}x^{(1)\{\mu\}}, \\ \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}x^{[\mu]}, \end{cases} \quad (3.7)$$

где  $K^{(1)}$  —  $(r \times N)$ -матрица, в которой столбцы, соответствующим степеням  $x^{(1)\{\mu\}}$ , являются нулевыми;  $K^{(2)}$  —  $(r \times k)$ -матрица.

**Л е м м а 3.2.** При  $K^{(2)} = -B^{(1)T}$  можно подобрать такую матрицу  $K^{(1)}$ , что нулевое решение системы (3.7) будет асимптотически устойчиво по вектору  $x^{(1)}$  с контролем начальных данных по этому вектору.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим линейную систему

$$A^{(1)} + B^{(1)}K^{(1)} = 0. \quad (3.8)$$

Поскольку матрица  $B^{(1)}$  имеет  $k$  строк и  $\text{rang } B^{(1)} = k$ , то система (3.8) имеет решение  $K^{(1)} = K^{(1)*}$ . Кроме того, матрица  $S = B^{(1)}B^{(1)T}$  симметрическая и положительно определенная. Подставляя в систему (3.7)  $K^{(2)} = -B^{(1)T}$  и  $K^{(1)} = K^{(1)*}$ , получаем

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = -Sx^{(1)\{\mu\}}, \\ \dot{x}^{(2)} = A^{(2)}x^{[\mu]}, \end{cases} \quad (3.9)$$

Теперь воспользуемся функцией Ляпунова  $v = \frac{1}{2}x^{(1)T}S^{-1}x^{(1)}$ , полная производная которой в силу системы (3.9) является отрицательно определенной функцией

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{(3.9)} = -(x_1^{\mu+1} + \dots + x_n^{\mu+1}).$$

Следовательно, нулевое решение системы (3.7) асимптотически  $x^{(1)}$ -устойчиво с  $x^{(1)}$ -контролем начальных данных. Лемма 3.2. доказана.

Таким образом, нулевое решение системы (3.7) может быть частично стабилизировано (по вектору  $x^{(1)}$ ). Для стабилизации по всему фазовому вектору необходимо, чтобы вторая часть системы (3.7) не содержала изолированных подсистем с не асимптотически устойчивым нулевым решением. Предположим, что изолированных подсистем нет вообще, и рассмотрим частный случай, когда система (3.7) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = (A^{(1)} + B^{(1)}K^{(1)})x^{[\mu]} + B^{(1)}K^{(2)}x^{(1)\{\mu\}}, \\ \dot{x}^{(2)} = A_1^{(2)}x^{(1)\{\mu\}} + A_2^{(2)}x^{(2)\{\mu\}}. \end{cases} \quad (3.10)$$

Пусть  $K^{(1)} = K^{(1)*}$ ,  $K^{(2)} = -hB^{(1)T}$ , тогда систему (3.10) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x}^{(1)} = -hSx^{(1)\{\mu\}}, \\ \dot{x}^{(2)} = A_1^{(2)}x^{(1)\{\mu\}} + A_2^{(2)}x^{(2)\{\mu\}}. \end{cases} \quad (3.11)$$



**Л е м м а 3.3.** Если нулевое решение системы

$$\dot{x}^{(2)} = A_2^{(2)} x^{(2)\{\mu\}} \quad (3.12)$$

асимптотически устойчиво, то при достаточно большом  $h > 0$  нулевое решение системы (3.11) также асимптотически устойчиво.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно [9], существует положительно определенная однородная степени 2 функция Ляпунова  $v(x^{(2)})$ , для которой справедливы оценки

$$\|grad v\| \leq \|x^{(2)}\|, \quad (3.13)$$

$$\frac{dv}{dt}|_{(3.12)} = grad^T v \cdot A_2^{(2)} x^{(2)\{\mu\}} \leq -c \|x^{(2)}\|^{\mu+1}, c > 0. \quad (3.14)$$

Рассмотрим положительно определенную функцию  $V = \frac{1}{2}x^{(1)T}S^{-1}x^{(1)} + v(x^{(2)})$ . Ее производная в силу системы (3.11) имеет вид

$$\frac{dv}{dt}|_{(3.11)} = -hx^{(1)T}x^{(1)\{\mu\}} + grad^T v \cdot A_1^{(2)}x^{(1)\{\mu\}} + grad^T v \cdot A_2^{(2)}x^{(2)\{\mu\}}.$$

С учетом (3.13), (3.14) справедлива оценка

$$\frac{dv}{dt}|_{(3.11)} \leq -h\sqrt{k} \|x^{(1)}\|^{\mu+1} + \sqrt{k} \|A_1^{(2)}\| \cdot \|x^{(1)}\|^\mu \cdot \|x^{(2)}\| - c \|x^{(2)}\|^{\mu+1}. \quad (3.15)$$

Для любого  $\delta > 0$  справедливо неравенство

$$\|x^{(1)}\|^\mu \cdot \|x^{(2)}\| \leq d \left( \delta \|x^{(1)}\|^{\mu+1} + \frac{1}{\delta^\mu} \|x^{(2)}\|^{\mu+1} \right),$$

где  $d > 0$  — наибольшее значение функции  $f(r_1, r_2) = r_1^\mu r_2$  на множестве  $r_1^{\mu+1} + r_2^{\mu+1} = 1$ ,  $r_{1,2} > 0$ . Продолжая оценку (3.15), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt}|_{(3.11)} &\leq -h\sqrt{k} \|x^{(1)}\|^{\mu+1} + d\delta\sqrt{k} \|A_1^{(2)}\| \cdot \|x^{(1)}\|^{\mu+1} + \\ &+ \frac{d}{\delta^\mu} \sqrt{k} \|A_1^{(2)}\| \cdot \|x^{(2)}\|^{\mu+1} - c \|x^{(2)}\|^{\mu+1}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

При  $\delta > \delta_0 = \left( \frac{d}{c} \sqrt{k} \|A_1^{(2)}\| \right)^{1/\mu}$  и  $h > h_0 = d\delta \|A_1^{(2)}\|$  правая часть неравенства (3.16) становится отрицательно определенной функцией. Следовательно, при данных значениях  $h$  нулевое решение системы (3.11) асимптотически устойчиво. Лемма 3.3. доказана.

## 4. Пример

Приведем пример построения матрицы  $K$  для системы вида (3.1).

**П р и м е р 4.1.** Рассмотрим систему

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = Ax^{[3]} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix} Kx^{[3]}, \quad (4.1)$$

где  $x \in R^3$ ,  $x^{[3]} = (x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, x_1x_2x_3, x_1x_2^2x_3, x_1x_3^2, x_2^3, x_2^2x_3, x_2x_3^2, x_3^3)^T$ ,  $A \in R^{3,10}$ ,  $K \in R^{3,10}$ .

Рассмотрим различные случаи стабилизируемости системы (4.1).

1) Пусть  $b_1, b_2, b_3 \neq 0$ , т.е.  $\text{rang } B = 3$ . Тогда, согласно лемме 3.1., стабилизирующая матрица  $K$  может иметь следующий вид

$$K = -h \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \end{pmatrix}.$$

2) Пусть  $b_1, b_2 \neq 0$ ,  $b_3 = 0$ , т.е.  $\text{rang } B = 2$ . Тогда систему (4.1) можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \left( A^{1,2} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix} K^{(1)} \right) x^{[3]} + \\ + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{11} & k_{17} \\ k_{21} & k_{27} \\ k_{31} & k_{37} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix}, \quad (4.2) \\ \dot{x}_3 = A^3 x^{[3]},$$

где  $A^{1,2}$  есть матрица, состоящая из первых двух строк матрицы  $A$ ;  $A^3$  — третья строка матрицы  $A$ ;  $K^{(1)}$  есть матрица  $K$ , в которой первый и седьмой столбцы нулевые.

Согласно лемме 3.2. можно подобрать такую матрицу  $K^{(1)}$ , чтобы

$$A^{1,2} + \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix} K^{(1)} = 0.$$

Кроме того подстановка

$$\begin{pmatrix} k_{11} & k_{17} \\ k_{21} & k_{27} \\ k_{31} & k_{37} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 \end{pmatrix}^T$$

приводит систему (4.2) к виду

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} b_1^2 & 0 \\ 0 & b_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^3 \\ x_2^3 \end{pmatrix}, \quad (4.3) \\ \dot{x}_3 = A^3 x^{[3]},$$

Очевидно, что нулевое решение системы (4.3) асимптотически устойчиво по вектору  $(x_1^3, x_2^3)$ . Если же строка  $A^3$  имеет вид

$$A^3 = (a_1, 0, 0, 0, 0, 0, a_3, 0, 0, a_3), \quad (4.4)$$

где  $a_1, a_2 \in R$ ,  $a_3 < 0$ , то нулевое решение системы (4.3) асимптотически устойчиво по всему набору фазовых переменных.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Yan Zhang, D. Subbaram Naidu, Chenxiao Cai, and Yun Zou, “Singular Perturbations and Time Scales in Control Theories and Applications: an overview 2002-2012”, *International Journal of Information and Systems Sciences*, **9**:1 (2014), 1–36.
2. А. И. Климушев, Н. Н. Красовский, “Равномерная асимптотическая устойчивость систем дифференциальных уравнений с малым параметром при производных”, *Прикладная математика и механика*, **25**:4 (1961), 680-690.
3. C. Lobry, T. Sari, “Singular Perturbation Methods in Control Theory”, *Contrôle non linéaire et applications, Travaux en cours 64, Hermann, Paris*, 2005, № 15, 151-177.
4. Х. К. Халил, *Нелинейные системы / пер. с англ. И. А. Макарова; под ред. А. Л. Фрадкова. - Изд. 3-е.*, Ин-т компьютерных исслед, Москва, Ижевск, 2009, 812 с.
5. А. А. Косов, “Об устойчивости сингулярных однородных систем”, *Материалы конф. «Ляпуновские чтения». Иркутск: ИДСТУ СО РАН*, 2014, 16.
6. А. А. Косов, М. В. Козлов, “Стабилизация одного класса сингулярных систем на основе декомпозиции”, *Информационные технологии и проблемы математического моделирования сложных систем*, 2016, № 15, 77-84.
7. А. Н. Тихонов, “Системы дифференциальных уравнений, содержащих малые параметры при производных”, *Мат. сборник*, **31**:3 (1952), 575-586.
8. А. А. Косов, “О стабилизации нелинейных управляемых систем по однородному приближению”, *Качественные свойства, асимптотика и стабилизация нелинейных динамических систем: межвуз. сб. науч. тр.*, 2010, 74-81.
9. L. Rossier, “Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field”, *Systems & Control Letters*, 1992, № 19, 467-473.

Поступила 28.04.2017

MSC2010 34H15

# Stabilization of singularly perturbed systems with a polynomial right-hand side

© M. V. Kozlov <sup>2</sup>

**Abstract.** The article considers the problem of stabilization of singularly perturbed systems of ordinary differential equations with homogeneous right-hand side in the form of polynomials of odd degree. The values of the perturbing parameter are supposed to be small. Sufficient conditions are obtained for stabilizing the zero solution of these systems to asymptotic stability by feedback control in the form of polynomials of the same degree as the right-hand side of the original system. It is assumed that only components of the vector of slow variables are subject for measurement and that control can only enter into the slow subsystem. For various cases, methods for constructing stabilizing controls are described. As a method of investigation, decomposition of a singularly perturbed system into a fast and slow subsystems of smaller dimension is applied. For stability analysis, the Lyapunov function method is used.

**Key Words:** singular perturbations, small parameter, stabilization, homogenous form.

## REFERENCES

1. Yan Zhang, D. Subbaram Naidu, Chenxiao Cai, and Yun Zou, "Singular Perturbations and Time Scales in Control Theories and Applications: an overview 2002-2012", *International Journal of Information and Systems Sciences*, **9**:1 (2014), 1–36.
2. A. I. Klimushev, N. N. Krasovskiy, "Uniform asymptotic stability of systems of differential Equations with a small parameter for the derivatives", *Prikladnaya matematika i mekhanika*, **25**:4 (1961), 680-690.
3. C. Lobry, T. Sari, "Singular Perturbation Methods in Control Theory", *Contrôle non linéaire et applications, Travaux en cours 64*, Hermann, Paris, 2005, № 15, 151-177.
4. Kh. K. Khalil, *Nonlinear Systems / per. s angl. I. A. Makarova; pod red. A. L. Fradkova. - Izd. 3-e.*, In-t komp'yuternykh issled, Moskva, Izhevsk, 2009, 812 c.
5. A. A. Kosov, "On the stability of singular homogeneous systems", *Materialy konf. «Lyapunovskie chteniya»*. Irkutsk: IDSTU SO RAN, 2014, 16.
6. A. A. Kosov, M. V. Kozlov, "Stabilization of a class of singular systems based on decomposition", *Informatsionnye tekhnologii i problemy matematicheskogo modelirovaniya slozhnykh sistem*, 2016, № 15, 77-84.
7. A. N. Tikhonov, "Systems of differential equations containing small parameters for derivatives", *Mat. sbornik*, **31**:3 (1952), 575-586.
8. A. A. Kosov, "On the stabilization of nonlinear controlled systems by homogeneous approximation", *Kachestvennye svoystva, asimptotika i stabilizatsiya nelineynykh dinamicheskikh sistem: mezhvuz. sb. nauch. tr.*, 2010, 74-81.

<sup>2</sup> **Mikhail V. Kozlov**, Lecture, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7681-8931>, [kozlov.mvl@yandex.ru](mailto:kozlov.mvl@yandex.ru)

- 
9. L. Rossier, “Homogeneous Lyapunov function for homogeneous continuous vector field”, *Systems & Control Letters*, 1992, № 19, 467-473.

*Submitted 28.04.2017*

УДК 517.9

# О существовании эндоморфизма двумерного тора со строго инвариантным сжимающимся репеллером

© Е. Д. Куренков<sup>1</sup>

**Аннотация.** В настоящей работе строится эндоморфизм  $f$  двумерного тора, удовлетворяющий аксиоме  $A$ , неблуждающее множество которого обладает одномерным сжимающимся репеллером  $\Lambda$ . Этот репеллер обладает следующими свойствами:

- 1)  $f(\Lambda) = \Lambda$ ,  $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ ;
- 2)  $\Lambda$  локально гомеоморфно произведению канторовского множества на отрезок;
- 3)  $T^2 \setminus \Lambda$  состоит из счетного объединения непересекающихся открытых дисков.

Идея построения основана на «хирургической» операции, предложенной С. Смейлом [1], в применении к алгебраическому эндоморфизму Аносова на торе. Приводятся результаты численного эксперимента, подтверждающие, что построенный эндоморфизм имеет указанные свойства. Предложенная конструкция показывает принципиальное различие между структурой одномерных базисных множеств эндоморфизмов и соответствующих базисных множеств диффеоморфизмов. В частности, полученный результат контрастирует с фактом конечности множества дисков в множестве  $T^2 \setminus \Lambda$ , в случае, когда диффеоморфизм удовлетворяет аксиоме  $A$  и обладает просторно расположенным репеллером  $\Lambda$  [2].

**Ключевые слова:** эндоморфизм, аксиома  $A$ , базисное множество, репеллер.

## 1. Введение

Под  $C^r$  – эндоморфизмом гладкого замкнутого связного многообразия  $M^n$  понимается гладкое сюръективное отображение класса  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Если эндоморфизм  $f$  обладает обратным отображением класса  $C^r$ , то он называется  $C^r$ -диффеоморфизмом.

Пусть  $f: M^n \rightarrow M^n$  – эндоморфизм класса  $C^r$  ( $r \geq 1$ ), заданный на замкнутом многообразии  $M^n$ , снабженном римановой метрикой. Для любой точки  $x \in M^n$  существует, вообще говоря, бесконечное множество последовательностей вида  $\bar{x} = \{x_i \in M^n \mid x_0 = x, f(x_i) = x_{i+1}, i \in \mathbb{Z}\}$ . Каждую из таких последовательностей будем называть частной траекторией точки  $x$ .

Пусть  $\Lambda \subset M^n$  замкнутое  $f$ -инвариантное (инвариантное относительно эндоморфизма  $f$ ) множество, то есть  $f(\Lambda) = \Lambda$ .

Следуя Ф. Пшетыцкому [3] дадим определение гиперболического множества, обобщающее определение для диффеоморфизмов, данное С. Смейлом [1]

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Множество  $\Lambda$  эндоморфизма  $f: M^n \rightarrow M^n$  называется гиперболическим, если существуют константы  $C > 0$ ,  $0 < \lambda < 1$  такие, что для любой частной траектории  $\bar{x} \subset \Lambda$  точки  $x$  существует представление касательного подрасслоения  $T_{\bar{x}}M^n$  в виде  $T_{\bar{x}}M^n = \bigcup_{x_i \in \bar{x}} E_{x_i, \bar{x}}^s \oplus E_{x_i, \bar{x}}^u$ <sup>2</sup> такое, что:

1.  $Df(E_{x_i, \bar{x}}^s) = E_{x_{i+1}, \bar{x}}^s$ ,  $Df(E_{x_i, \bar{x}}^u) = E_{x_{i+1}, \bar{x}}^u$ , где  $E_{x_i, \bar{x}}^s, E_{x_i, \bar{x}}^u \subset T_{x_i}M^n$ ;

<sup>1</sup> Куренков Евгений Дмитриевич, стажер-исследователь лаборатории ТМД, НИУ ВШЭ (603155, Россия, г. Нижний Новгород, ул. Большая Печерская, д. 25), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3544-1143>, [ekurenkov@hse.ru](mailto:ekurenkov@hse.ru)

<sup>2</sup> Символ  $\oplus$  означает прямую сумму линейных подпространств.

2.  $\|Df^k(v)\| \leq C\lambda^k\|v\|$ , для любых  $k \geq 0, i \in \mathbb{Z}, v \in E_{x_i, \bar{x}}^s$ ;
3.  $\|Df^k(v)\| \geq (1/C)\lambda^{-k}\|v\|$ , для любых  $k \geq 0, i \in \mathbb{Z}, v \in E_{x_i, \bar{x}}^u$ .

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Эндоморфизм  $f: M^n \rightarrow M^n$ , называется эндоморфизмом Аносова, если всеобъемлющее многообразие  $M^n$  является гиперболическим множеством эндоморфизма  $f$ .

В работе [3] для эндоморфизмов было предложено обобщение аксиомы  $A$ , введенной С. Смейлом в [1] для диффеоморфизмов.

**О п р е д е л е н и е 1.3.** Говорят, что эндоморфизм  $f: M^n \rightarrow M^n$  удовлетворяет аксиоме  $A$  (является  $A$ -эндоморфизмом), если выполнены следующие условия:

1. неблуждающее множество  $\Omega_f$  — гиперболично и не содержит критических точек эндоморфизма  $f$ ;
2. множество периодических точек  $\text{Per}_f$  эндоморфизма  $f$  плотно в неблуждающем множестве  $\Omega_f$ .

Для  $A$ -эндоморфизма, имеет место теорема о спектральном разложении, доказанная в [3], и обобщающая соответствующий результат, полученный С. Смейлом в [1].

**П р е д л о ж е н и е 1.1.** Пусть эндоморфизм  $f: M^n \rightarrow M^n$  удовлетворяет аксиоме  $A$ . Тогда его неблуждающее множество  $\Omega$  единственным образом представляется в виде объединения конечного числа непересекающихся замкнутых  $f$ -инвариантных подмножеств (называемых базисными множествами)  $\Omega = \bigcup_{i=1}^l \Omega_i$  таких, что ограничение  $f$  на каждое базисное множество является топологически транзитивным.

**О п р е д е л е н и е 1.4.** Базисное множество  $\Omega_i$  эндоморфизма  $f: M^n \rightarrow M^n$  называется аттрактором, если существует его замкнутая окрестность  $U$  такая, что  $f(U) \subset \text{Int } U$  и  $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \Omega_i$ .

**О п р е д е л е н и е 1.5.** Базисное множество  $\Omega_i$  эндоморфизма  $f: M^n \rightarrow M^n$  называется репеллером, если существует его открытая окрестность  $U$  такая, что  $cl(U) \subset f(U)$  и  $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = \Omega_i$ <sup>3</sup>.

**О п р е д е л е н и е 1.6.** Репеллер (аттрактор)  $\Omega_i$   $A$ -эндоморфизма  $f: M^n \rightarrow M^n$  называется сжимающимся (растягивающимся), если его топологическая размерность совпадает с размерностью устойчивых (неустойчивых) инвариантных многообразий точек из  $\Omega_i$ .

Настоящая статья является первым шагом в доказательстве гипотезы, справедливость которой на данном этапе подтверждена численным экспериментом.

**Т е о р е м а 1.1.** Существует  $C^\infty$ -гладкий  $A$ -эндоморфизм  $f: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  такой, что его спектральное разложение содержит одномерный сжимающийся репеллер  $\Lambda$ . Более того, неустойчивое многообразие любой точки  $x \in \Lambda$  не зависит от частной траектории точки  $x$ , и множество  $\Lambda$  является нетривиальным репеллером, то есть локально гомеоморфно произведению отрезка на канторово множество.

<sup>3</sup> Под  $f^{-1}(A)$  понимается полный прообраз множества  $A$ .

## 2. Конструкция эндоморфизма

Представим  $\mathbb{T}^2$  как фактор-пространство  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$  и обозначим через  $\pi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  естественную проекцию  $\mathbb{R}^2$  на  $\mathbb{T}^2$ . Рассмотрим алгебраический эндоморфизм  $g: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  двумерного тора, индуцированный матрицей  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  по формуле  $g(x) = Ax \bmod 1$ , где  $x$  принадлежит плоскости  $\mathbb{R}^2$ .

Непосредственно проверяется, что  $g$  является гиперболическим эндоморфизмом Аносова с устойчивым  $W_g^s$  и неустойчивым  $W_g^u$  одномерными слоениями, которые являются образами в силу проекции  $\pi$  инвариантных слоений матрицы  $A$ , состоящими из всех прямых параллельных векторам  $\vec{e}_s = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_u = \begin{pmatrix} 1 + \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$  соответственно. Эти векторы ортогональны, и являются собственными векторами матрицы  $A$  с собственными значениями  $\lambda_s = 2 - \sqrt{2} < 1$ ,  $\lambda_u = 2 + \sqrt{2} > 1$ . Через  $W_g^s(x)$  ( $W_g^u(x)$ ) будем обозначать элемент слоения  $W_g^s$  ( $W_g^u$ ), проходящий через точку  $x \in \mathbb{T}^2$ . Далее, мы будем рассматривать пару  $\vec{e}_u/\|\vec{e}_u\|$ ,  $\vec{e}_s/\|\vec{e}_s\|$  в качестве базисных единичных векторов системы координат  $(u_1; u_2)$  так, что  $(1; 0)$  и  $(0; 1)$  суть координаты векторов  $\vec{e}_u/\|\vec{e}_u\|$ ,  $\vec{e}_s/\|\vec{e}_s\|$  соответственно.

Эндоморфизм  $g$  имеет одну неподвижную точку, которую мы обозначим через  $O$ ,  $g(O) = O$ . Поскольку  $\det g = 2$ , то  $g$  является двулистным накрытием, и полный прообраз  $g^{-1}(O)$  состоит из двух точек  $O$  и  $O_1 \neq O$ . Возьмем  $r_0 > 0$  столь малым, чтобы  $\lambda_u r_0$ -окрестности точек  $O$  и  $O_1$  не пересекались. Пусть  $\delta: [0; \infty) \rightarrow [0; 1]$  —  $C^\infty$ -функция такая, что  $\delta(r) \equiv 1$  при  $0 \leq r \leq \frac{r_0}{2}$ , и  $\delta(r) \equiv 0$  при  $r \geq r_0$ .

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -u_1 \cdot \delta(\sqrt{u_1^2 + u_2^2}) \\ \dot{u}_2 = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

и обозначим через  $\varphi^t$  сдвиг на время  $t$  вдоль траекторий этой системы. Возьмем число  $\tau > 0$  такое, что

$$e^{-\tau} \cdot \lambda_u < 1. \quad (2.2)$$

Положим

$$f = \varphi^\tau \circ g. \quad (2.3)$$

Ясно, что  $f$  является эндоморфизмом тора  $\mathbb{T}^2$  на себя. Непосредственно из (2.3) вытекает, что эндоморфизм  $f$  является локальным диффеоморфизмом, который также является 2-листным накрытием  $\mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ , и гомотопен эндоморфизму  $g$ . Кроме того, по построению слоение  $W_g^u$  инвариантно относительно эндоморфизма  $f$ ,  $f(W_g^u(z)) = W_g^u(f(z))$ .

Обозначим через  $u_1(t, M_0)$ ,  $u_2(t, M_0)$  решение системы (2.1) с начальным условием  $(0, M_0)$ , то есть такое решение, что  $u_i(0, M_0) = M_0$ ,  $i = 1, 2$ . Если точка  $M_0$  принадлежит  $r_0$ -окрестности  $U(r_0)$  точки  $O$ , и имеет в ней координаты  $(u_{10}; u_{20})$ , то мы также будем записывать решение в виде  $u_i(t, (u_{10}; u_{20}))$ ,  $i = 1, 2$ . Из (2.1) следует, что  $u_2(t, (u_{10}; u_{20})) = u_{20}$  для  $\forall t$ . Поэтому якобиан диффеоморфизма

$$\varphi^\tau: (u_{10}; u_{20}) \rightarrow (u_1(\tau, (u_{10}; u_{20})); u_2(\tau, (u_{10}; u_{20})))$$

равен

$$D(\varphi^\tau) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u_{10}} & \frac{\partial u_1}{\partial u_{20}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где  $\frac{\partial u_1}{\partial u_{10}}$ ,  $\frac{\partial u_1}{\partial u_{20}}$  вычисляются при  $t = \tau$ . Отсюда и (2.3) вытекает, что якобиан эндоморфизма  $f$  равен

$$D(f) = D\varphi^\tau \cdot Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial u_{10}} & \frac{\partial u_1}{\partial u_{20}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_u \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_{10}} & \lambda_s \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_{20}} \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

*Е. Д. Куренков. О существовании эндоморфизма двумерного тора со строго...*



Равенство (2.4) имеет место на всем торе  $\mathbb{T}^2$ , поскольку вне окрестности  $U(r_0)$ , в силу (2.1),  $\frac{\partial u_1}{\partial u_{10}} = 1$  и  $\frac{\partial u_1}{\partial u_{20}} = 0$ .

Покажем, что точка  $O = p_0$  является гиперболическим стоком эндоморфизма  $f$ . Действительно, в  $\frac{r_0}{2}$ -окрестности  $U(\frac{r_0}{2})$  точки  $p_0$  система (2.1) имеет вид  $\dot{u}_1 = -u_1$ ,  $\dot{u}_2 = 0$ . Поэтому якобиан диффеоморфизма  $\varphi^\tau$  равен  $D\varphi^\tau = \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Следовательно, якобиан эндоморфизма  $f$  в точке  $O$  равен

$$Df = \begin{pmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-\tau}\lambda_u & 0 \\ 0 & \lambda_s \end{pmatrix}.$$

Отсюда и (2.2) вытекает требуемое утверждение.

Отметим, что кривая  $W_g^u(O)$  инвариантна относительно  $f$ ,  $f(W_g^u(O)) = W_g^u(O)$ . Более того, на  $W_g^u(O)$  имеются ровно три неподвижные относительно  $f$  точки  $p_0$ ,  $p_1$ ,  $p_2$ , причем  $p_1$  и  $p_2$  являются гиперболическими седлами, и  $p_0$  на  $W_g^u(O)$  находится между точками  $p_1$ ,  $p_2$ . Далее, существует гомеоморфная диску окрестность  $V$  точки  $p_0$ , не содержащая точек  $p_1$ ,  $p_2$ , и такая, что

1.  $cl f(V) \subset V$ ,  $\bigcap_{n \geq 0} f^n(V) = p_0$ .
2. Полный прообраз  $f^{-1}(V)$  состоит из двух (попарно непересекающихся) компонент связности, каждая из которых гомеоморфна диску.
3.  $\lambda_u \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_{10}}|_V < 1$ ,  $\lambda_u \cdot \frac{\partial u_1}{\partial u_{10}}|_{\mathbb{T}^2 \setminus comp_V[f^{-1}(V)]} > 1$ , где  $comp_V[f^{-1}(V)]$  – компонента связности множества  $f^{-1}(V)$ , содержащая  $V$ .

Пусть  $V$  – окрестность точки  $p_0$ , удовлетворяющая вышеприведенным условиям, и пусть

$$W_f^s(p_0) = W_0^s = \bigcup_{i \geq 0} f^{-i}(V).$$

Другими словами,  $W_0^s$  есть объединение полных прообразов окрестности  $V$  относительно отображений  $f^i$  для всех  $i \geq 0$ , где  $f^0 = id$  – тождественное отображение. Тогда множество  $W_0^s$  удовлетворяет следующим свойствам:

1.  $W_0^s$  является открытым множеством таким, что  $f^j(x) \rightarrow p_0$  при  $j \rightarrow \infty$  для любой точки  $x \in W_0^s$ .
2.  $W_0^s$  является инвариантным множеством,

$$f(W_0^s) = W_0^s = f^{-1}(W_0^s).$$

В частности, если  $z \notin W_0^s$  – периодическая точка, то любая частная траектория, проходящая через  $z$ , не пересекается с  $W_0^s$ .

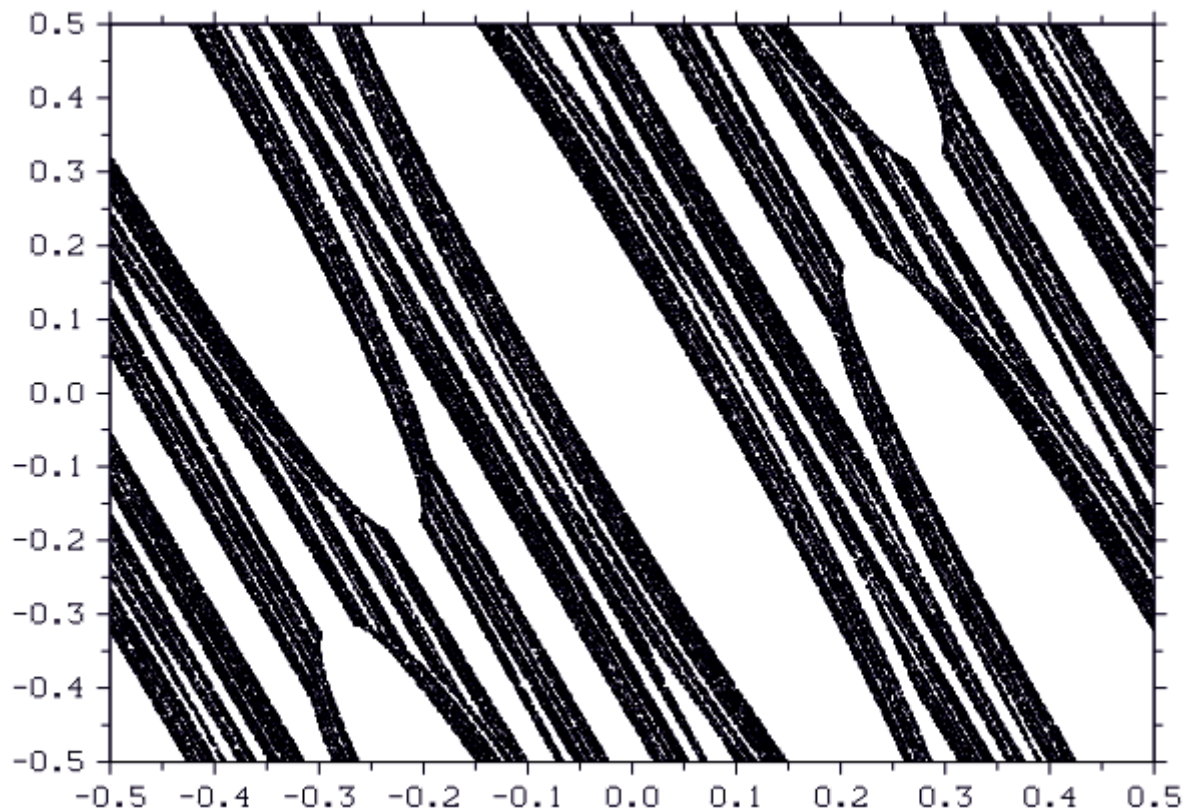
3.  $p_1, p_2 \notin W_0^s$ .

Действительно, множество  $W_0^s$  открытое, поскольку отображение  $f$  непрерывное. Если  $x \in W_0^s$ , то  $f^k(x) \in V$  для некоторого  $k \in \mathbb{N}$ . Отсюда вытекает первое утверждение. Из него и определения множества  $W_0^s$  следует второе утверждение. По конструкции, точки  $p_1, p_2$  не принадлежат  $V$  и являются неподвижными относительно эндоморфизма  $f$ . Тогда  $p_1, p_2 \notin W_0^s$  и, следовательно,  $W_0^s \neq \mathbb{T}^2$ . Положим

$$\mathbb{T}^2 \setminus W_0^s = \Lambda \neq \emptyset.$$

По построению,  $\Lambda$  является замкнутым и инвариантным множеством:

$$f(\Lambda) = \Lambda = f^{-1}(\Lambda).$$



Р и с у н о к 2.1

Репеллер

Дальнейшее исследование множества  $\Lambda$  проводилось численными методами (см. рис. 2.1), оно показало, что исследуемый эндоморфизм обладает инвариантным гиперболическим множеством. Исходя из этого, получаем, что через каждую точку множества  $x \in \Lambda$  проходит устойчивое  $W_f^s(x)$  и неустойчивое  $W_f^u(x)$  инвариантные многообразия, обладающие следующими свойствами:

1) для любой точки  $x \in \Lambda$  устойчивое многообразие  $W_f^s(x)$  целиком принадлежат множеству  $\Lambda$ ;

2) неустойчивое многообразие  $W_f^u(x)$  для каждой точки  $x \in \Lambda$  не зависит от частной траектории (лежащей в  $\Lambda$ ) этой точки, а зависит только от самой точки  $x$ , поэтому обозначение неустойчивого многообразия  $W_f^u(x)$  корректно.

Покажем, что для любой точки  $x \in \Lambda$  многообразие  $W_f^u(x)$  является одномерной кривой всюду плотной в  $\mathbb{T}^2$ .

Действительно, из построения  $f$  вытекает, что  $W_f^u(x) = W_g^u(x)$  для любой точки  $x \in \Lambda \setminus W_g^u(O)$ . Так как  $W_g^u(x)$  всюду плотно в  $\mathbb{T}^2$ , то достаточно доказать утверждение только для  $W_f^u(p_1)$  и  $W_f^u(p_2)$ . Имеем равенство  $W_f^u(p_1) \cup W_f^u(p_2) = W_g^u(p_0) \setminus \{p_0\}$ . Поскольку каждый из полуслоев множества  $W_g^u(p_0) \setminus \{p_0\}$  всюду плотен в  $\mathbb{T}^2$ , то неустойчивые многообразия  $W_f^u(p_1)$ ,  $W_f^u(p_2)$  всюду плотны в  $\mathbb{T}^2$ . Аналогично показывается, что устойчивое многообразие  $W_f^s(p_0)$  открыто и всюду плотно в  $\mathbb{T}^2$ . Отсюда вытекает, что каждое из устойчивых  $W_f^s(p_1)$ ,  $W_f^s(p_2)$  многообразий всюду плотно в  $\Lambda$ .

Покажем, что топологическая размерность множества  $\Lambda$  равна единице,

$$\dim \Lambda = 1.$$

Действительно, дополнение к множеству  $\Lambda$  открыто и всюду плотно. Поэтому  $\Lambda$  нигде не плотно, и следовательно  $\dim \Lambda \leq 1$ . Так как  $\Lambda$  содержит одномерные кривые, то  $\dim \Lambda \geq 1$ . Отсюда получаем требуемое утверждение.

Таким образом, из выше сказанного следует, что множество  $\Lambda$  является нетривиальным репеллером, локально гомеоморфным произведению отрезка на канторово множество.

**Благодарности.** Автор благодарит В.З. Гринеса и Е.В. Жужому за постановку задачи и полезные обсуждения. Исследования выполнены в рамках программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2017 году (проект Т-90) при частичной поддержке РФФИ (грант 16-51-10005-Ко\_а).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
2. В. З. Гринес, “О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах  $\Gamma$ ”, *Труды Московского математического общества*, **32** (1975), 35–60.
3. F. Przytycki, “Anosov endomorphisms”, *Stud. Math.*, **58**:3 (1976), 249–285.

*Поступила 26.03.2017*

MSC2010 37C70

# On existence of an endomorphism of 2-torus with strictly invariant repeller

© E. D. Kurenkov <sup>4</sup>

**Abstract.** In the article we construct endomorphism  $f$  of 2-torus. This endomorphism satisfies an axiom  $A$  and has non-wondering set that contains one-dimensional contracting repeller satisfying following properties:

- 1)  $f(\Lambda) = \Lambda$ ,  $f^{-1}(\Lambda) = \Lambda$ ;
- 2)  $\Lambda$  is locally homeomorphic to the product of the Cantor set and the interval;
- 3)  $T^2 \setminus \Lambda$  consist of a countable family of disjoint open disks.

The key idea of construction consists in applying the surgery introduced by S. Smale [1] to an algebraic Anosov endomorphism of the two-torus. We present the results of computational experiment that demonstrate correctness of our construction. Suggested construction reveals significant difference between one-dimensional basic sets of endomorphisms and one-dimensional basic sets of corresponding diffeomorphisms. In particular, the result contrasts with the fact that wondering set of axiom  $A$ -satisfying diffeomorphism consists of a finite number of open disks in case of spaciouly situated basic set [2].

**Key Words:** endomorphism, axiom  $A$ , basic set, repeller.

## REFERENCES

1. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.
2. V. Z. Grines, “[On topological conjugacy of diffeomorphisms of 2-manifold on one-dimensional orientable basic sets I]”, *Trudi Moskovskogo matematicheskogo obshchestva*, **32** (1975), 35–60 (In Russ.).
3. F. Przytycki, “Anosov endomorphisms”, *Stud. Math.*, **58**:3 (1976), 249–285.

*Submitted 26.03.2017*

---

<sup>4</sup> **Evgeniy D. Kurenkov**, research assistant of laboratory TMD, National Research University Higher School of Economics (25 Bolshaya Pechyorskaya Str., Nizhnii Novgorod 603155, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-3544-1143>, [ekurenkov@hse.ru](mailto:ekurenkov@hse.ru)

УДК 517.925

# Определение условий существования предельных циклов первого рода систем с цилиндрическим фазовым пространством

© С. С. Мамонов<sup>1</sup>, А. О. Харламова<sup>2</sup>

**Аннотация.** Рассматривается система дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством, которая является математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки частоты (ЧФАПЧ). Для системы (ЧФАПЧ) мало изученным является вопрос реализации колебательных режимов, которые связаны с нарушением устойчивости состояния равновесия, соответствующего режиму синхронизации и образованию устойчивого предельного цикла вокруг этого состояния равновесия. В работе с использованием принципа тора, метода нелокального сведения и результатов, полученных для нахождения решения системы матричных уравнений, решается задача разработки численно-аналитического подхода для определения условий существования предельных циклов первого рода системы дифференциальных уравнений, которые соответствуют колебательным режимам системы (ЧФАПЧ). Составлен алгоритм для проверки условий существования предельных циклов первого рода, позволяющий определить в фазовом пространстве исходной системы область, содержащую начальные условия предельного цикла первого рода. Прикладное значение полученных результатов заключается в возможности использования системы (ЧФАПЧ) как генератора модулированных колебаний, а также для определения условий существования квазисинхронных режимов фазовых систем.

**Ключевые слова:** фазовая система, квазисинхронные режимы, предельные циклы первого рода, режимы синхронизации, неподвижная точка, оператор сдвига по траекториям.

## 1. Введение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с цилиндрическим фазовым пространством

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + b\varphi(\sigma) + d\frac{2kc^Tx}{1+\tau^2(c^Tx)^2}, \\ \dot{\sigma} &= c^Tx,\end{aligned}\tag{1.1}$$

где  $x, b, c, d \in \mathbb{R}^2, k, \tau \in \mathbb{R}$ , матрица  $A$  имеет действительные собственные значения,  $\varphi(\sigma) — \Delta$ -периодическая непрерывно дифференцируемая функция. Система (1.1) является математической моделью системы частотно-фазовой автоподстройки (ЧФАП) [1-4].

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Решение  $z(t, z_0) = \begin{pmatrix} x(t, x_0) \\ \sigma(t, \sigma_0) \end{pmatrix}$  системы (1.1) называется предельным циклом первого рода, если существует  $\tau > 0$ , такое что для любого  $t \in \mathbb{R}$  выполняются неравенства  $x(t + \tau, x_0) = x(t, x_0)$ ,  $\sigma(t + \tau, \sigma_0) = \sigma(t, \sigma_0)$ .

<sup>1</sup> **Мамонов Сергей Станиславович**, профессор кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, ФГБОУ ВО "РГУ им. С. А. Есенина" (390000, Россия, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5626-748X>, s.mamonov@rsu.edu.ru

<sup>2</sup> **Харламова Анастасия Олеговна**, аспирант кафедры математики и методики преподавания математических дисциплин, ФГБОУ ВО "РГУ им. С. А. Есенина" (390000, Россия, г. Рязань, ул. Свободы, д. 46.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7811-381X>, a.harlamova@rsu.edu.ru

В статье используются методы нахождения предельных циклов второго рода, предложенные в работе [4] для определения циклов первого рода. Циклы первого рода изучались в работах [5], [6], где были получены условия их существования без использования решения системы матричных уравнений, найдены параметры бифуркации и разработан алгоритм нахождения неустойчивых циклов системы (1.1). Практическая значимость циклов первого рода заключается в том, что они определяют квазисинхронные режимы фазовой системы [3] или синхронизм второго рода [2]. Установление в системе ЧФАП квазисинхронного режима связано с нарушением устойчивости состояния равновесия, соответствующего режиму синхронизации и образованию устойчивого предельного цикла вокруг этого состояния равновесия.

## 2. Основной результат

**Т е о р е м а 2.1.** Пусть для системы (1.1) выполнены условия:

1)  $c^T b = -\Gamma < 0$ ,  $c^T A = l^T$ ,  $l^T b = \nu > 0$ ,  $c^T d = \xi_2 > 0$ ,  $l^T d = -\xi_1 < 0$ ,  $\text{rang} \|c, l\| = 2$ ,  $l^T A = -\alpha_1 l^T - \beta_1 c^T$ ,  $c^T A^{-1} b \neq 0$ ,  $\alpha_1 > 0$ ,  $\beta_1 > 0$ ,  $k > 0$ ;

2)  $\varphi(\sigma) - \Delta$ -периодическая функция, имеющая два нуля на периоде  $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$ ,  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$ , для  $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_1$  справедливы соотношения  $\varphi(\sigma) = a_2 \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma})$ ,  $|\varphi_2(\tilde{\sigma})| \leq \tau_1 + \tau_2 |\tilde{\sigma}|$ ,  $\varphi(\sigma) = \varphi(\tilde{\sigma} + \sigma_1) = \varphi_0(\tilde{\sigma})$ ,  $\dot{\varphi}_0(0) > 0$ ,  $\tilde{\sigma}_2 = \sigma_2 - \sigma_1$ ,  $\dot{\varphi}_0(\tilde{\sigma}_2) < 0$ ,  $\dot{\varphi}(\tilde{\sigma})$  — ограничена на сегменте  $[0; \Delta]$ ,  $\tau_1 \geq 0$ ,  $\tau_2 \geq 0$ ;

3) система матричных уравнений относительно матриц  $H$ ,  $L_2$ ,  $M_2$

$$A^T H + H A = -L_2 - 2\tilde{\lambda}_1 H, \quad (2.1)$$

$$(A + 2kdc^T)^T H + H (A + 2kdc^T) = -M_2 + 2m_2 cc^T - 2\tilde{\lambda}_1 H, \quad (2.2)$$

$$Hb = -c, \quad (2.3)$$

при  $\tilde{\lambda}_1 > 0$ ,  $m_2 > 0$  имеет решение  $H = H^T \geq 0$ ,  $L_2 = L_2^T \geq 0$ ,  $M_2 = M_2^T \geq 0$ , матрица  $H$  имеет действительные собственные значения;

4) матрицы  $H$ ,  $L_2$ ,  $M_2$  удовлетворяют соотношениям

$$H = \bar{\gamma}_1 cc^T + \bar{\gamma}_2 (l + \nu \Gamma^{-1} c) (l + \nu \Gamma^{-1} c)^T, \quad (2.4)$$

$$L_2 = 2\bar{\eta}_1 (l + \bar{\eta}_2 c) (l + \bar{\eta}_2 c)^T, \quad (2.5)$$

$$M_2 = 2\bar{\nu}_1 (l + \bar{\nu}_2 c) (l + \bar{\nu}_2 c)^T, \quad (2.6)$$

где  $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2, \bar{\eta}_1, \bar{\nu}_1 \in \mathbb{R}^+$ ;

5) существуют  $\lambda_1, \lambda_2, \tilde{\lambda}_1 \in \mathbb{R}$ , удовлетворяющие неравенствам

$$\lambda_2^2 = a_2 + \sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 (\nu \Gamma^{-1} - 2\tilde{\lambda}_1) + \lambda_1^2, \quad (2.7)$$

$$\tilde{\lambda}_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1 a_2 \Gamma - \bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 \lambda_2^2 - \bar{\gamma}_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1^3 \leq 0; \quad (2.8)$$

6) существует  $R \in \mathbb{R}$ , такое что

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}} - \tilde{\lambda}_1 \right) R^2 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_2} \lambda_2} R^2 + \left( \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_2^3} \tau_1 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1} \Gamma \lambda_1}{\lambda_2^3} \tau_1 \right) R^3 + \\ & + \left( \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{\bar{\gamma}_1} \lambda_2^4} \tau_2 + \frac{\sqrt{\bar{\gamma}_1} \Gamma \lambda_1}{\lambda_2^4} \tau_2 \right) R^4 + \frac{m_2}{2\tau \sqrt{\bar{\gamma}_1}} R + \left| 2k \sqrt{\bar{\gamma}_1} \xi_2 \lambda_1 - \frac{m_2 \lambda_1}{\sqrt{\bar{\gamma}_1}} \right| \frac{R}{2\tau \lambda_2} < 0; \end{aligned} \quad (2.9)$$

7) существует  $R > 0$  такое, что система дифференциальных уравнений второго порядка

$$\dot{y} = -\frac{\nu y}{\Gamma\sqrt{\Gamma}} - \varphi(\sigma) + \mu + \xi_2 \frac{2ky}{\sqrt{\Gamma}(1 + \tau^2\Gamma y^2)}, \quad \dot{\sigma} = y, \quad (2.10)$$

при  $\mu = \mu_1 > \frac{R}{\Gamma\sqrt{\gamma_2}}$  имеет решение, определяющее функцию  $f_1^-(\sigma)$ ,  $f_1^-(-\bar{\sigma}_3) = f_1^-(\bar{\sigma}_2) = 0$ ,  $-\bar{\sigma}_3 < 0$ ,  $\bar{\sigma}_2 > 0$ ,  $f_1^-(\sigma) < 0$  для любого  $\sigma \in (-\bar{\sigma}_3; \bar{\sigma}_2)$ ;

8) существует  $R > 0$  такое, что система (2.10) при  $\mu = -\mu_2 < -\frac{R}{\Gamma\sqrt{\gamma_2}}$  имеет решение, определяющее функцию  $f_1^+(\sigma)$ ,  $f_1^+(-\bar{\sigma}_1) = f_1^+(\bar{\sigma}_2)$ ,  $-\bar{\sigma}_3 < -\bar{\sigma}_1 < 0$ ,  $f_1^+(\sigma) > 0$  для любого  $\sigma \in (-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2)$ ;

9) для любого  $\sigma \in [-\bar{\sigma}_3; -\bar{\sigma}_1]$  выполняется соотношение  $\left(-\frac{R}{\sqrt{\gamma_2}} - \Gamma\varphi(\sigma)\right) > 0$ ;

10) рассмотрим функции  $g_1^\pm(\sigma) = \left(\sqrt{\gamma_1}\sqrt{\Gamma}f_1^\pm(\sigma) + \tilde{\sigma}\lambda_1\right)^2 + \tilde{\gamma}_2\nu^2\Gamma^{-1}\left(f_1^\pm(\sigma)\right)^2 + \tilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2$ , тогда на промежутке  $[-\bar{\sigma}_5; \bar{\sigma}_4]$  справедливы неравенства  $g_1^-(\sigma) < f_1^-(\sigma)$ ,  $g_1^+(\sigma) > f_1^+(\sigma)$ .

Тогда система (1.1) имеет предельный цикл первого рода.

**Доказательство.** Рассмотрим функции  $V_1(z) = x^T Hx + 2\sqrt{\gamma_1}c^T x \tilde{\sigma}\lambda_1 + \tilde{\sigma}^2\lambda_1^2 + \tilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2$ ,  $V_1^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma}f_1^+(\sigma)$ ,  $V_1^-(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma}f_1^-(\sigma)$ ,  $W(z) = c^T x$ , где  $z = \begin{pmatrix} x \\ \sigma \end{pmatrix}$ ,  $f_1^+(\sigma)$ ,  $f_1^-(\sigma)$  удовлетворяют условиям 7 и 8 теоремы. Пусть  $D = \{z : V_1(z) = x^T Hx + 2\sqrt{\gamma_1}c^T x \tilde{\sigma}\lambda_1 + \tilde{\sigma}^2\lambda_1^2 + \tilde{\sigma}^2\lambda_2^2 - R^2 \leq 0\}$ ,  $\partial D = \{z : V_1(z) = 0\}$ . Множество  $D$  представляет собой эллипсоид.

Пусть

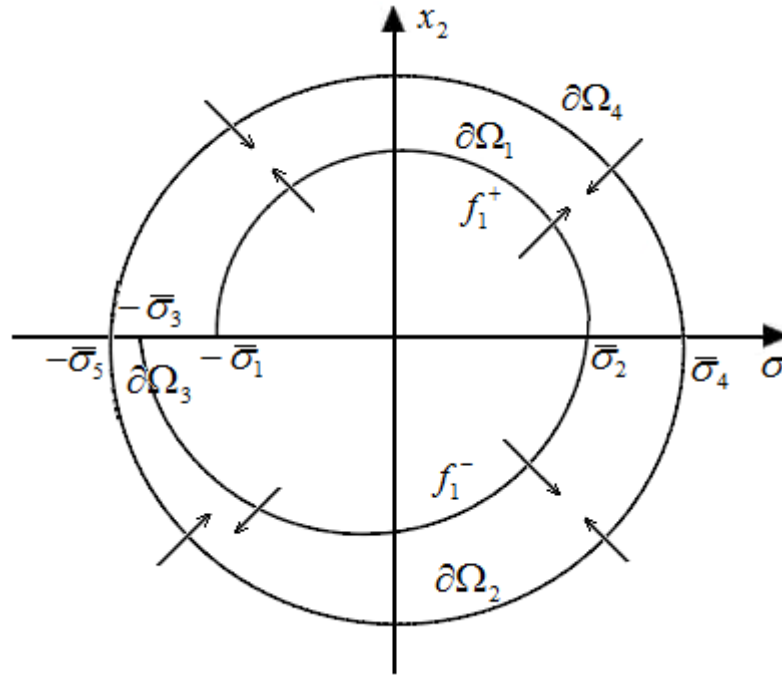
$$\partial Q_1 = \left\{z : V_1^+(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma}f_1^+(\sigma) = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2]\right\},$$

$$\partial Q_2 = \left\{z : V_1^-(z) = c^T x - \sqrt{\Gamma}f_1^-(\sigma) = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; \bar{\sigma}_2]\right\},$$

$$\partial Q_3 = \left\{z : W(z) = c^T x = 0, \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; -\bar{\sigma}_1]\right\},$$

$\partial Q = \partial Q_1 \cup \partial Q_2 \cup \partial Q_3$ , тогда  $\partial Q$  является цилиндрической поверхностью. Обозначим внешность цилиндрической поверхности вместе с поверхностью  $\partial Q$  через множество  $Q$ .

Множество  $\Omega = Q \cap D$  является тороидальным, сечение его плоскостью  $l^T x = 0$  изображено на рисунке 2.1, а граница этого множества определяется равенством  $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$ , где  $\partial\Omega_1 = \partial Q_1 \cap D$ ,  $\partial\Omega_2 = \partial Q_2 \cap D$ ,  $\partial\Omega_3 = \partial Q_3 \cap D$ ,  $\partial\Omega_4 = Q \cap \partial D$ .



Р и с у н о к 2.1

Рассмотрим множество  $\partial\Omega_4$ , если  $z \in \partial\Omega_4$ , то из (2.4) справедливо равенство

$$\begin{aligned} V_1(z) &= x^T H x + 2\sqrt{\gamma_1} c^T x \tilde{\sigma} \lambda_1 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_1^2 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2 = \bar{\gamma}_1 (c^T x)^2 + \bar{\gamma}_2 (l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x)^2 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_1^2 + \\ &+ 2\sqrt{\gamma_1} c^T x \tilde{\sigma} \lambda_1 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2 = (\sqrt{\gamma_1} c^T x + \tilde{\sigma} \lambda_1)^2 + \bar{\gamma}_2 (l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x)^2 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 - R^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Используя условия 1–6 теоремы и соотношения (2.1), (2.2), (2.11) найдем производную функции  $V_1(z)$  на множестве  $\partial\Omega_4$  в силу системы (1.1) и с учётом равенства  $\varphi(\sigma) = a_2 \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma})$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(z) &= x^T (A^T H + H A) x - 2c^T x \varphi(\sigma) + \frac{2k}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} x^T (cd^T H + H dc^T) x + \\ &+ 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 l^T x \tilde{\sigma} - 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \Gamma \varphi(\sigma) \tilde{\sigma} + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \tilde{\sigma} \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 (c^T x)^2 + \\ &+ 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \tilde{\sigma} c^T x = \frac{1}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} \left( -\tau^2 (c^T x)^2 x^T L_2 x + 2(c^T x)^2 m_2 - x^T M_2 x \right) - \\ &- 2\tilde{\lambda}_1 x^T H x + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 l^T x \tilde{\sigma} - 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \Gamma \varphi(\sigma) \tilde{\sigma} + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \tilde{\sigma} \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} + \\ &+ 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 (c^T x)^2 + 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \tilde{\sigma} c^T x - 2c^T x \varphi(\sigma). \end{aligned} \quad (2.12)$$



Из (2.11) получим, что  $V_1(z)$  удовлетворяет соотношению

$$\begin{aligned} V_1(z) = & \tilde{\sigma}^2 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) + 2\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} \frac{\sqrt{\gamma_1} \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} c^T x \tilde{\sigma} + \frac{\gamma_1 \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} (c^T x)^2 - \frac{\gamma_1 \lambda_1^2}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} (c^T x)^2 + \\ & + \gamma_1 (c^T x)^2 + \gamma_2 (l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x)^2 - R^2 = \left( \tilde{\sigma} \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2} + \frac{\sqrt{\gamma_1} \lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} c^T x \right)^2 + (c^T x)^2 \times \\ & \times \frac{\sqrt{\gamma_1} \lambda_1^2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}} + \gamma_2 (l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x)^2 - R^2 = 0. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Производная функции  $V_1(z)$  в силу (2.12) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(z) \leq & \frac{2m_2 (c^T x)^2}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} - 2\tilde{\lambda}_1 x^T H x - 2c^T x \varphi(\sigma) + 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \tilde{\sigma} c^T x + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 l^T x \tilde{\sigma} - \\ & - 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \Gamma \varphi(\sigma) \tilde{\sigma} + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \tilde{\sigma} \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 (c^T x)^2 + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 l^T x \tilde{\sigma} - \\ & - 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \Gamma \varphi(\sigma) \tilde{\sigma} + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \tilde{\sigma} \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 (c^T x)^2. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Из соотношения (2.14) запишем слагаемое  $\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 (c^T x)^2$  в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{\gamma_1} \lambda_1 (c^T x)^2 = & \gamma_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 \left( \gamma_1 (c^T x)^2 + 2\sqrt{\gamma_1} c^T x \lambda_1 \tilde{\sigma} + \lambda_1^2 \tilde{\sigma}^2 - 2\sqrt{\gamma_1} c^T x \lambda_1 \tilde{\sigma} - \lambda_1^2 \tilde{\sigma}^2 \right) = \\ = & \gamma_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 (\sqrt{\gamma_1} c^T x + \lambda_1 \tilde{\sigma})^2 - 2\lambda_1^2 c^T x \tilde{\sigma} - \gamma_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1^3 \tilde{\sigma}^2. \end{aligned} \quad (2.15)$$

В силу условий (2.14), (2.15) и того, что  $\varphi(\sigma) = a_2 \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma})$  имеем

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(z) \leq & \frac{2m_2 (c^T x)^2}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \tilde{\sigma} \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} - 2\tilde{\lambda}_1 R^2 + 4\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \tilde{\lambda}_1 c^T x \tilde{\sigma} + \\ & + 2\tilde{\lambda}_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \tilde{\sigma}^2 - 2c^T x \tilde{\sigma} a_2 - 2c^T x \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma}) + 2(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) \tilde{\sigma} c^T x + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \times \\ & \times (l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x) \tilde{\sigma} - 2\nu \Gamma^{-1} \sqrt{\gamma_1} \lambda_1 c^T x \tilde{\sigma} - 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \Gamma a_2 \tilde{\sigma}^2 - 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \Gamma \tilde{\sigma}^3 \varphi_2(\tilde{\sigma}) - \\ & - 2\gamma_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 \lambda_2^2 \tilde{\sigma}^2 + 2\gamma_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 R^2 - 4\lambda_1^2 c^T x \tilde{\sigma} - 2\gamma_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1^3 \tilde{\sigma}^2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

В неравенстве (2.16) найдем коэффициент при  $\frac{1}{2} c^T x \tilde{\sigma}$  и используя (2.7) получим

$$2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \tilde{\lambda}_1 - a_2 + (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \nu \Gamma^{-1} \sqrt{\gamma_1} \lambda_1 - 2\lambda_1^2 = 0. \quad (2.17)$$

Из (2.16), используя соотношение (2.8), найдем коэффициент при  $\frac{1}{2} \tilde{\sigma}^2$

$$\tilde{\lambda}_1 (\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \sqrt{\gamma_1} \lambda_1 a_2 \Gamma - \gamma_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 \lambda_2^2 - \gamma_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1^3 \leq 0. \quad (2.18)$$

В (2.16) преобразуем слагаемое  $\frac{2m_2 (c^T x)^2}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \tilde{\sigma} \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2}$  к виду

$$\begin{aligned} \frac{2m_2 (c^T x)^2}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} + 2\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \tilde{\sigma} \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} = & \frac{2m_2 (c^T x) (\sqrt{\gamma_1} c^T x + \lambda_1 \tilde{\sigma} - \lambda_1 \tilde{\sigma})}{\sqrt{\gamma_1} (1 + \tau^2 (c^T x)^2)} + \\ & + 2k\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \xi_2 \frac{2\tilde{\sigma} c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} = (\sqrt{\gamma_1} c^T x + \lambda_1 \tilde{\sigma}) \frac{2m_2 c^T x}{\sqrt{\gamma_1} (1 + \tau^2 (c^T x)^2)} - \\ & - 2m_2 \gamma_1^{-\frac{1}{2}} \lambda_1 \tilde{\sigma} \frac{c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} + 4k\sqrt{\gamma_1} \lambda_1 \xi_2 \tilde{\sigma} \frac{c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

В силу (2.11), (2.13), (2.16), (2.19) для  $z \in \partial\Omega_4$  справедливы оценки

$$\frac{c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} \leq \frac{1}{2\tau}, \quad (2.20)$$

$$|c^T \sqrt{\gamma_1} + \tilde{\sigma} \lambda_1| \leq R, \quad (2.21)$$

$$|\tilde{\sigma}| \leq R \lambda_2^{-1}, \quad (2.22)$$

$$|l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x| \leq R \bar{\gamma}_2^{-\frac{1}{2}}, \quad (2.23)$$

$$|c^T x| \leq \frac{R \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\bar{\gamma}_1 \lambda_2}, \quad (2.24)$$

Исходя из соотношений (2.9), (2.17), (2.18), (2.20)–(2.24) производная функции  $V_1(z)$  на множестве  $\partial\Omega_4$  в силу системы (1.1) при  $\varphi(\sigma) = a_2 \tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^2 \varphi_2(\tilde{\sigma})$  примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \dot{V}_1(z) &\leq \left( \frac{\lambda_1}{\sqrt{\gamma_1}} - \tilde{\lambda}_1 \right) R^2 + \frac{\sqrt{\gamma_1} \lambda_1}{\sqrt{\gamma_2} \lambda_2} R^2 + |c^T x| (\tau_1 + \tau_2 |\tilde{\sigma}|) \tilde{\sigma}^2 + \sqrt{\gamma_1} \Gamma \lambda_1 (\tau_1 + \tau_2 |\tilde{\sigma}|) |\tilde{\sigma}|^3 + \\ &+ \frac{m_2}{2\tau \sqrt{\gamma_1}} R + \left( 2k \sqrt{\gamma_1} \xi_2 \lambda_1 - \frac{m_2}{\sqrt{\gamma_1}} \lambda_1 \right) \frac{c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} \tilde{\sigma} \leq \left( \frac{\lambda_1}{\sqrt{\gamma_1}} - \tilde{\lambda}_1 \right) R^2 + \frac{\sqrt{\gamma_1} \lambda_1}{\sqrt{\gamma_2} \lambda_2} R^2 + \\ &+ \left( \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{\gamma_1} \lambda_2^3} \tau_1 + \frac{\sqrt{\gamma_1} \Gamma \lambda_1}{\lambda_2^3} \tau_1 \right) R^3 + \left( \frac{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}{\sqrt{\gamma_1} \lambda_2^4} \tau_2 + \frac{\sqrt{\gamma_1} \Gamma \lambda_1}{\lambda_2^4} \tau_2 \right) R^4 + \frac{m_2}{2\tau \sqrt{\gamma_1}} R + \\ &+ \left| 2k \sqrt{\gamma_1} \xi_2 \lambda_1 - \frac{m_2}{\sqrt{\gamma_1}} \lambda_1 \right| \frac{R}{2\tau \lambda_2} < 0. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Пусть  $z \in \partial\Omega_1$ , тогда справедливы соотношения

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} f_1^+(\sigma), \quad \sigma \in [-\bar{\sigma}_1; \bar{\sigma}_2], \quad (2.26)$$

$$|l^T x + \nu \Gamma^{-1} c^T x| \leq R \bar{\gamma}_2^{-\frac{1}{2}}. \quad (2.27)$$

Используя (2.26), (2.27), условия 1, 8 теоремы найдём производную функции  $V_1^+(z)$  в силу системы (1.1) на множестве  $\partial\Omega_1$

$$\begin{aligned} \dot{V}_1^+(z) &= c^T A x + c^T b \varphi(\sigma) + c^T d \frac{2k c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} - \sqrt{\Gamma} \frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma} c^T x = l^T x - \Gamma \varphi(\sigma) + \\ &+ \xi_2 \frac{2k c^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} - \Gamma f_1^+(\sigma) \frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma} \geq -R \bar{\gamma}_2^{-\frac{1}{2}} - \nu \Gamma^{-\frac{1}{2}} f_1^+(\sigma) - \Gamma \varphi(\sigma) + \\ &+ \xi_2 \frac{2k \sqrt{\Gamma} f_1^+(\sigma)}{1 + \tau^2 \Gamma (f_1^+(\sigma))^2} - \Gamma f_1^+(\sigma) \frac{df_1^+(\sigma)}{d\sigma} = -R \bar{\gamma}_2^{-\frac{1}{2}} + \mu_2 \Gamma > -R \bar{\gamma}_2^{-\frac{1}{2}} + R \bar{\gamma}_2^{-\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Для  $z \in \partial\Omega_2$  выполняется условие

$$c^T x = \sqrt{\Gamma} f_1^-(\sigma), \quad \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; \bar{\sigma}_2]. \quad (2.29)$$

Найдём производную функции  $V_1^-(z)$  в силу системы (1.1) на множестве  $\partial\Omega_2$ . Аналогично (2.28), используя (2.27), (2.29), условия 1, 7 теоремы, получим

$$\dot{V}_1^-(z) < 0. \quad (2.30)$$

Рассмотрим множество  $\partial\Omega_3$ , если  $z \in \partial\Omega_3$ , то справедливы неравенство (2.27) и равенство

$$c^T x = 0, \quad \sigma \in [-\bar{\sigma}_3; -\bar{\sigma}_1]. \quad (2.31)$$

В силу условий 1, 9 теоремы и (2.27), (2.31) получим, что производная функции  $W(z)$  в силу системы (1.1) удовлетворяет соотношению

$$\dot{W}(z) = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) + \xi_2 \frac{2kc^T x}{1 + \tau^2 (c^T x)^2} = l^T x - \Gamma\varphi(\sigma) \geq -R\bar{\gamma}_2^{-\frac{1}{2}} - \Gamma\varphi(\sigma) > 0. \quad (2.32)$$

С учётом соотношений (2.25), (2.28), (2.30), (2.32) получим, что множество  $\Omega$  является положительно инвариантным.

Рассмотрим функцию  $Q_0(z) = \tilde{\sigma}$  и плоскость  $P = \{z : Q_0(z) = 0\}$ . Найдём пересечение множества  $\Omega$  и плоскости  $P$ , обозначим получившиеся множества через  $D_1$  и  $D_2$ , тогда  $\Omega \cap P = D_1 \cup D_2$ , где  $D_1 = \Omega \cap P \cap \{z : c^T x > 0\}$ ,  $D_2 = \Omega \cap P \cap \{z : c^T x < 0\}$ . Рассмотрим функцию  $Q_1(z) = c^T x$  и плоскость  $L = \{z : Q_1(z) = 0\}$ . Найдём пересечение множества  $\Omega$  и плоскости  $L$ , обозначим получившиеся множества через  $D_3$  и  $D_4$ , тогда  $\Omega \cap L = D_3 \cup D_4$ , где  $D_3 = \Omega \cap L \cap \{z : \tilde{\sigma} > 0\}$ ,  $D_4 = \Omega \cap L \cap \{z : \tilde{\sigma} < 0\}$ .

Используя условия 1 и 2 теоремы, неравенство (2.14), положительную инвариантность множества  $\Omega$  получим, что функция  $\tilde{\sigma}(t)$  — бесконечное число раз меняет знак.

Возьмём точку  $z_0 \in D_1$ , и введём оператор  $T_z = z(t_0 + T_z)$ . Из непрерывности траекторий  $g_{z_0}$  системы (1.1) и того факта, что множество  $D_1$  — множество без контакта следует непрерывность оператора  $T$ . Множество  $D_1$  — замкнутое, ограниченное, выпуклое, оператор  $T$  отображает множество  $D_1$  в себя,  $T(D_1) \subset D_1$ , тогда по теореме Брауэра существует неподвижная точка оператора  $T$  такая, что  $Tz^* = z^* \in D_1$ . Неподвижная точка  $z^*$  определяет начальные условия предельного цикла первого рода. Таким образом, система (1.1) имеет предельный цикл первого рода. Теорема доказана.

**Л е м м а 2.1.** Пусть для системы матричных уравнений (2.1)–(2.3) выполнены соотношения  $A = \begin{pmatrix} -\tilde{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ ,  $d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \end{pmatrix}$ ,  $c_1 b_1^{-1} < 0$ ,  $c_2 b_2^{-1} < 0$ ,  $c^T b = -\Gamma$ ,  $c^T A b = \nu > 0$ ,  $\varepsilon_0 = \nu \Gamma^{-1}$ ,  $\alpha = \tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1$ ,  $\text{rang} \|c, l\| = 2$ , тогда матричные уравнения (2.1)–(2.3) имеют решение  $H = H^T \geq 0$ ,  $L_2 = L_2^T \geq 0$ ,  $M_2 = M_2^T \geq 0$ , матрицы  $H$ ,  $L_2$ ,  $M_2$  удовлетворяют соотношениям (2.4)–(2.6), где

$$\bar{\gamma}_1 = \Gamma^{-1}, \quad \bar{\gamma}_2 = \left( \Gamma \left( \tilde{\lambda}_2 - \varepsilon_0 \right) \left( \varepsilon_0 - \tilde{\lambda}_1 \right) \right)^{-1}, \quad (2.33)$$

$$\bar{\eta}_1 = \left( \Gamma \left( \varepsilon_0 - \tilde{\lambda}_1 \right) \right)^{-1}, \quad \bar{\eta}_2 = \tilde{\lambda}_1, \quad (2.34)$$

$$m_2 = -\alpha^{-1} k^2 c_2 b_2 (d_1 b_1^{-1} - d_2 b_2^{-1})^2 - 2k d_1 b_1^{-1}, \quad (2.35)$$

$$\bar{\nu}_1 = -(\alpha b_2 c_2)^{-1}, \quad \bar{\nu}_2 = \tilde{\lambda}_1 + k c_2 b_2 (d_1 b_1^{-1} - d_2 b_2^{-1}). \quad (2.36)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Непосредственной подстановкой в уравнение (2.1) показывается, что матрицы  $H = \begin{pmatrix} -c_1 b_1^{-1} & 0 \\ 0 & -c_2 b_2^{-1} \end{pmatrix}$ ,  $L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha c_2 b_2^{-1} \end{pmatrix}$  удовлетворяют соотношениям (2.4), (2.5), где  $\bar{\gamma}_1$ ,  $\bar{\gamma}_2$ ,  $\bar{\eta}_1$ ,  $\bar{\eta}_2$  определяются равенствами (2.33), (2.34). Используя (2.1) из (2.2) определим матрицу  $M_2$

$$-M_2 = -L_2 + (2kdc^T)^T H + H (2kdc^T) - 2m_2 cc^T. \quad (2.37)$$

Из уравнения (2.37) определяется значение  $m_2$ , для которого  $\det M_2 = 0$ . Если  $m_2$  удовлетворяет (2.37), то  $\det M_2 = 0$  и  $M_2 = \bar{u}\bar{u}^T$ . Так как  $\text{rang } \|c, l\| = 2$ , то для вектора  $\bar{u}$  справедливо разложение по линейно независимым векторам  $c$  и  $l$ ,  $u = \sqrt{2\bar{\nu}_1}(l + \bar{\nu}_2 c)$ , где  $\bar{\nu}_1, \bar{\nu}_2$  находятся с помощью соотношений (2.36). Лемма доказана.

**Пример 2.1.** Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{\tilde{x}} = \tilde{A}\tilde{x} + \tilde{b}\varphi(\sigma) + \tilde{d}\frac{2k\tilde{c}^T\tilde{x}}{1 + \tau^2(\tilde{c}^T\tilde{x})^2}, \quad \dot{\sigma} = \tilde{c}^T\tilde{x}, \quad (2.38)$$

где  $\tilde{A} = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & -\beta_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{b} = \begin{pmatrix} \nu \\ -\Gamma \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $\tilde{d} = \begin{pmatrix} -\xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ ,  $\varphi(\sigma) = \sin(\sigma) - \gamma$ ,  $D = \alpha_1^2 - 4\beta_1 > 0$ . Матрица  $\tilde{A}$  имеет действительные собственные значения  $(-\tilde{\lambda}_1)$ ,  $(-\tilde{\lambda}_2)$ ,  $\tilde{\lambda}_1 = 2^{-1}(\alpha_1 - \sqrt{D})$ ,  $\tilde{\lambda}_2 = 2^{-1}(\alpha_1 + \sqrt{D})$ ,  $\tilde{\lambda}_1\tilde{\lambda}_2 = \beta_1$ ,  $\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 = \alpha_1$ ,  $\tilde{\lambda}_2 - \tilde{\lambda}_1 = \sqrt{D} = \alpha$ .

В системе (2.38) сделаем замену переменных  $\tilde{x} = Sx$ , получим систему (1.1), где  $A = S^{-1}\tilde{A}S$ ,  $b = S^{-1}\tilde{b}$ ,  $c^T = \tilde{c}^TS$ ,  $d = S^{-1}\tilde{d}$ . Пусть  $S = \begin{pmatrix} \beta_1 & -\tilde{\lambda}_2 \\ -\tilde{\lambda}_2 & 1 \end{pmatrix}$ , тогда  $\det S = \Delta_s = -\tilde{\lambda}_2\sqrt{D} < 0$ ,  $S^{-1} = \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} 1 & \tilde{\lambda}_2 \\ \tilde{\lambda}_2 & \beta_1 \end{pmatrix}$ ,  $A = \begin{pmatrix} -\tilde{\lambda}_1 & 0 \\ 0 & -\tilde{\lambda}_2 \end{pmatrix}$ ,  $b = \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} \nu - \tilde{\lambda}_2\Gamma \\ \tilde{\lambda}_2\nu - \Gamma\beta_1 \end{pmatrix}$ ,  $c = \begin{pmatrix} -\tilde{\lambda}_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $d = \Delta_s^{-1} \begin{pmatrix} -\xi_1 + \tilde{\lambda}_2\xi_2 \\ -\tilde{\lambda}_2\xi_1 + \beta_1\xi_2 \end{pmatrix}$ ,  $l = A^Tc = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}$ ,  $l^TA = -\alpha_1l^T - \beta_1c^T$ ,  $l^Tb = \nu$ ,  $\det \|c, l\| = -\Delta_s \neq 0$ ,  $\text{rang } \|c, l\| = 2$ . Для системы (1.1) выполняется условие 1 теоремы. Рассмотрим случай  $\alpha_1 = 1.25$ ,  $\beta_1 = 0.0519$ ,  $\xi_1 = 0.0344$ ,  $\xi_2 = 0.8$ ,  $\Gamma = 1$ ,  $\nu = 0.043$ ,  $\tau = 55.9$ ,  $k = 0.0374$ ,  $\varphi(\sigma) = \sin \sigma - \gamma$ ,  $\gamma = 0.36$ .

Функция  $\varphi(\sigma)$  —  $\Delta$ -периодическая с периодом  $\Delta = 2\pi$ . Уравнение  $\varphi(\sigma) = 0$  на сегменте  $[0; \Delta]$  имеет два корня  $\varphi(\sigma_1) = \varphi(\sigma_2) = 0$ , где  $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \Delta$ ,  $\sigma_1 = \arcsin \gamma$ ,  $\sigma_2 = \pi - 2\arcsin \gamma$ , получим  $\sigma_1 = 0.368$ ,  $\sigma_2 = 2.41$ . Обозначим  $\tilde{\sigma} = \sigma - \sigma_1$ , тогда  $\sigma = \tilde{\sigma} + \sigma_1$ . Функцию  $\varphi(\sigma)$  представим в виде  $\varphi(\sigma) = a_2\tilde{\sigma} + \tilde{\sigma}^2\varphi_2(\tilde{\sigma})$ , для этого найдем производные функции  $\varphi_0(\tilde{\sigma}) = -\gamma + \sin(\tilde{\sigma} + \sigma_1)$  в нуле, получим разложение функции  $\varphi_0(\tilde{\sigma})$  в ряд  $\varphi_0(\tilde{\sigma}) = \cos \sigma_1\tilde{\sigma} - \frac{\sin \sigma_1}{2!}\tilde{\sigma}^2 - \frac{\cos \sigma_1}{3!}\tilde{\sigma}^3 + \frac{\sin \sigma_1}{4!}\tilde{\sigma}^4 + \dots$ , отсюда  $a_2 = \cos \sigma_1 = \sqrt{1 - \gamma^2} = 0.933$ . Найдем разложение в ряд функции  $\varphi_2(\tilde{\sigma}) = (-\frac{\gamma}{2!} + \frac{\gamma}{4!}\tilde{\sigma}^2 - \frac{\gamma}{6!}\tilde{\sigma}^4 + \dots) + \tilde{\sigma} \cos \sigma_1 (-\frac{1}{3!} + \frac{\tilde{\sigma}^2}{5!} - \frac{\tilde{\sigma}^4}{7!} + \dots) = \varphi_{21} + \tilde{\sigma}\varphi_{22}$ . Ряды  $\varphi_{21}$  и  $\varphi_{22}$  сходятся, тогда  $|\varphi_2| \leq |\varphi_{21}| + |\tilde{\sigma}| |\varphi_{22}| \leq 2^{-1}\gamma + 6^{-1}a_2|\tilde{\sigma}|$ . Получили, что  $\varphi_2(\tilde{\sigma})$  — знакопередающийся ряд  $0 < s < a_1$ , где  $a_1 > 0$  таким образом, функция  $|\varphi_2(\tilde{\sigma})| \leq \tau_1 + \tau_2|\tilde{\sigma}|$ , где  $\tau_1 = 2^{-1}\gamma = 0.18$ ,  $\tau_2 = 6^{-1}\sqrt{1 - \gamma^2} = 0.155$ . Найдём  $\dot{\varphi}_0(0) = \cos 0 = 1 > 0$ ,  $\dot{\varphi}_0(\tilde{\sigma}_2) = \cos \sigma_2 = \cos 2.41 = -0.737 < 0$ ,  $\dot{\varphi}(\tilde{\sigma}) = \cos \tilde{\sigma}$  — ограниченная функция на сегменте  $[0; \Delta]$ . Для системы (1.1) выполнено условие 2 теоремы.

Используя соотношения (2.33)–(2.36) леммы, найдем значения  $\bar{\gamma}_1 = 1$ ,  $\varepsilon_0 = 0.043$ ,  $\alpha = 1.164$ ,  $\bar{\gamma}_2 = 10^6$ ,  $m_2 = 0.0598$ ,  $\bar{\eta}_1 = 1.16 \cdot 10^6$ ,  $\bar{\eta}_2 = 0.043$ ,  $\bar{\nu}_1 = 1.16 \cdot 10^6$ ,  $\bar{\nu}_2 = 0.043$ ,  $h_{11} = -c_1b_1^{-1} = 1.457$ ,  $h_{22} = -c_2b_2^{-1} = 1.355 \cdot 10^6$ . Так как  $h_{11} > 0$ ,  $h_{22} > 0$ ,  $\bar{\eta}_1 > 0$ ,  $\bar{\nu}_2 > 0$ , то матрица  $H$  имеет действительные собственные значения  $\det H \geq 0$ ,  $L_1, L_2$  удовлетворяют неравенствам  $L_1 \geq 0, L_2 \geq 0$ . Для системы (1.1) выполнены условия 3, 4 теоремы.

Решая неравенства (2.7)–(2.8) относительно  $\lambda_1$  учитывая, что  $\tilde{\lambda}_1 = 0.043$ , получим  $\lambda_1 \in [0.0215; +\infty)$ . Для системы (1.1) выполнено условие 5 теоремы.

Возьмём  $\lambda_1 = 0.0215$  и по формуле (2.7) определим  $\lambda_2 = 0.966$ . Решение неравенства (2.9) определяется корнями многочлена четвертой степени. Численно показывается, что если  $R \in [0.0407; 0.06107]$ , то условие 6 теоремы выполнено.

Возьмём  $\frac{R}{\sqrt{\gamma_2}} = 4.404 \cdot 10^{-5} > 0$ . Численно показывается, что система второго порядка (2.10) при  $\mu = -\mu_2 = -4.414 \cdot 10^{-5} < -4.404 \cdot 10^{-5}$  имеет решение, определяющее функцию  $f_1^+(\sigma)$  такую, что  $f_1^+(0) = 0.008$  и для любого  $\sigma \in (-0.00826; 0.0083)$  функция  $f_1^+(\sigma) > 0$ ,  $f_1^+(-0.00826) = f_1^+(0.0083) = 0$ . Условие 8 теоремы выполняется. Аналогично проводится проверка условия 7.

Численно показывается, что при  $\sigma \in [-0.00832; -0.00826]$  выполняется соотношение  $(-4.404 \cdot 10^{-5} - \varphi(\sigma)) > 0$ . В теореме выполнено условие 9.

Численными методами показано, что при  $\sigma \in [-0.0365; 0.0365]$  для функций  $f_1^+(\sigma)$ ,  $f_1^-(\sigma)$ ,  $g_1^+(\sigma)$ ,  $g_1^-(\sigma)$  выполняются неравенства из условия 10.

Для системы (1.1) выполнены все условия теоремы, тогда система (1.1) имеет предельный цикл первого рода. Условия теоремы позволяют определить область начальных условий цикла первого рода системы (1.1). Для рассматриваемого примера найдём  $M = \Omega \cap \{z : \tilde{\sigma} = 0\}$ . Для границы множества  $\Omega$  возьмём  $f_1^+(0) = f_1^-(0) = 0.008$ . Множество  $M$  определяется линиями

$$\begin{aligned} L_1 : x^T H x + 2\sqrt{\gamma_1} c^T x \tilde{\sigma} \lambda_1 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_1^2 + \tilde{\sigma}^2 \lambda_2^2 = R^2 &\Leftrightarrow \tilde{x}^T (S^{-1})^T H S^{-1} \tilde{x} = R^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 10^6 \tilde{x}_1^2 + 2 \cdot 43 \cdot 10^3 \tilde{x}_1 \tilde{x}_2 + 1850 \tilde{x}_2^2 = 0.044041, \end{aligned}$$

$$L_2 : c^T x = \sqrt{\Gamma} f_1^+(0) \Leftrightarrow x_2 = 0.008,$$

$$L_3 : c^T x = \sqrt{\Gamma} f_1^-(0) \Leftrightarrow x_2 = -0.008.$$

Численными методами показывается, что цикл первого рода определяется начальными условиями  $x_1 = -0.00057$ ,  $x_2 = 0.0132568713$ ,  $\sigma = 0.368$ .

Практическая значимость полученных результатов заключается в том, что они позволяют определить условия существования квазисинхронных режимов для системы частотно-фазовой автоподстройки частоты.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. В. Шахгильдян, А. А. Ляховкин, *Системы фазовой автоподстройки частоты*, Связь, М., 1972, 446 с.
2. Г. А. Леонов, И. М. Буркин, А. И. Шепелявый, *Частотные методы в теории колебаний*, СПбГУ, СПб., 1992, 162 с.
3. В. Д. Шалфеев, В. В. Матросов, *Нелинейная динамика систем фазовой синхронизации*, ННГУ, Н. Новгород., 2013, 366 с.
4. С. С. Мамонов, "Достаточные условия существования предельных циклов второго рода системы частотно-фазовой синхронизации", *Труды Средневолжского математического общества*. — Саранск., **10** (2008), 203–210.
5. С. С. Мамонов, А. О. Харламова, "Квазисинхронные режимы фазовой системы", *Вестник РГРТУ*, **56** (2016), 45–51.
6. А. О. Харламова, "Предельные циклы первого рода фазовых систем", *Вестник РАЕН. Дифференциальные уравнения*, **3** (2016), 68–74.

Поступила 10.04.2017

MSC2010 34C25

# Determination of the conditions of existence of limit cycles of a first-order systems with cylindrical phase space

© S. S. Mamonov<sup>3</sup>, A. O. Kharlamova<sup>4</sup>

**Abstract.** This article deals with a system of differential equations with a cylindrical phase space, which is a mathematical model of a frequency-phase locked loop (FPLL) system. For the system (FPLL) little studied is the implementation of oscillatory regimes that are associated with a violation of stability of the equilibrium state corresponding to the synchronization regime and to the formation of stable limit cycle around this equilibrium state. A numerical-analytical approach is developed to determine the conditions of existence of the first kind limiting cycles of a differential equations' system that correspond to the system oscillatory modes. To do this, author used the torus principle, the nonlocal reduction method and the results obtained to find the solution of the system of matrix equations. An algorithm is developed for checking the conditions for the existence of limit cycles of the first kind, which allows to determine a region in the phase space of initial system that contains containing initial conditions of the cycle. Applicative value of the obtained results is in the possibility of using the system (FPLL) for generation of modulated oscillations, as well as for determining the conditions of the existence of phase systems' quasynchronous regimes.

**Key Words:** phase system, quasi-synchronous modes, limiting first-order cycles, synchronization modes, fixed point, shift operator along trajectories.

## REFERENCES

1. V. V. Shahgildyan, A. A. Lyakhovkin, *Sistemy fazovoy avtopodstroyki chastoty [Phase-locked loop systems]*, Svyaz', Moscow, 1972 (In Russ.), 446 p.
2. G. A. Leonov, I. M. Burkin, A. I. Shepelyavy, *Chastotnye metody v teorii kolebaniy [Frequency methods in the theory of vibrations]*, SPbGU, St. Petersburg, 1992 (In Russ.), 368 p.
3. V. D. Shalfeev, V. V. Matrosov, *Nelineynaya dinamika sistem fazovoy sinkhronizatsii [Nonlinear dynamics of phase synchronization systems]*, NNGU, N. Novgorod, 2013 (In Russ.), 366 p.
4. S. S. Mamonov, "[Sufficient conditions for the existence of limit cycles of the second kind of the frequency-phase synchronization system]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **10** (2008), 203–210 (In Russ.).
5. S. S. Mamonov, A. O. Kharlamova, "[Quasynchronous regimes of a phase system]", *Vestnik Ryazanskogo gosudarstvennogo radiotekhnicheskogo universiteta*, **56** (2016), 45–51 (In Russ.).
6. A. O. Kharlamova, "[Limit cycles of the first kind of phase systems]", *Vestnik RAEN. Differentsial'nye uravneniya*, **3** (2016), 68–74 (In Russ.).

Submitted 10.04.2017

<sup>3</sup> **Sergei S. Mamonov**, Full Professor, Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan State University named after S.A. Esenina (46 Svobody Str., Ryazan 390000, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5626-748X>, [s.mamonov@rsu.edu.ru](mailto:s.mamonov@rsu.edu.ru)

<sup>4</sup> **Anastasiya O. Kharlamova**, Graduate Student, Department of mathematics and methods of teaching mathematical disciplines, Ryazan State University named after S.A. Esenina (46 Svobody Str., Ryazan 390000, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-7811-381X>, [a.harlamova@rsu.edu.ru](mailto:a.harlamova@rsu.edu.ru)

УДК 517.988

# Непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона для $m$ -аккретивных уравнений

© И. П. Рязанцева<sup>1</sup>

**Аннотация.** В банаховом пространстве для нелинейного уравнения при приближенном задании данных (оператора и правой части заданного операторного уравнения) с дифференцируемым по Фреше  $m$ -аккретивным оператором построен непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона, получены достаточные условия его сильной сходимости к некоторому решению заданного уравнения, определяемому однозначно. Предварительно доказываются вспомогательные утверждения о непрерывности величин, определяемых через регуляризованные решения и их производные. Приближения оператора предполагаются дифференцируемыми. Доказывается однозначная разрешимость дифференциального уравнения, определяющего изучаемый метод регуляризации, доказываемая. При доказательстве сходимости непрерывного метода используется известная сходимость операторного метода регуляризации для аккретивных уравнений. Требования на геометрию банахова пространства, в котором строится непрерывный метод, и его сопряженного выполняются для широкого класса банаховых пространств. При приближенном задании правой части уравнения отдельно изучены случаи невозмущенного и возмущенного оператора. Построены примеры параметрических функций, используемых в уравнении, определяющем изучаемый метод. Указан пример оператора, возникающего в теории скалярной функции плотности, для которого выполнены условия сходимости метода.

**Ключевые слова:** банахово пространство,  $m$ -аккретивный оператор, дуальное отображение, метод Ньютона, непрерывный метод, возмущенные данные, регуляризация, сходимость.

## 1. Основные предположения, вспомогательные утверждения и постановка задачи

Пусть  $X$  – вещественное рефлексивное банахово пространство. Не теряя общности, считаем, что  $X$  и сопряженное ему пространство  $X^*$  строго выпуклы.

Пусть  $J : X \rightarrow X^*$  – дуальное отображение (см. [1] – [3]), т.е.

$$\|Jx\| = \|x\|, \quad \langle Jx, x \rangle = \|x\|^2 \quad \forall x \in X, \quad (1.1)$$

здесь  $\langle u, v \rangle$ ,  $u \in X^*$ ,  $v \in X$  есть отношение двойственности между пространствами  $X$  и  $X^*$ .

В наших условиях  $D(J) = X$ ,  $R(J) = X^*$ ,  $J$  – однозначное строго монотонное и коэрцитивное отображение в  $X$  (см., например, [3]). Рассмотрим в  $X$  уравнение

$$Ax = f, \quad (1.2)$$

<sup>1</sup> Рязанцева Ирина Прокофьевна, профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева (603950, Россия, Нижний Новгород, ул. Минина, д.24), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6215-1662>, [iryzantseva@applmath.ru](mailto:iryzantseva@applmath.ru)

где  $f$  – некоторый фиксированный элемент из  $X$ ,  $A : X \rightarrow X$  – аккретивный на  $X$  оператор, т.е.

$$\langle J(x - y), Ax - Ay \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in X. \quad (1.3)$$

Предположим, что (1.2) имеет непустое множество решений  $N$ , и определим (см. [2], с.143) единственное решение  $x^*$  уравнения (1.2), удовлетворяющее неравенству

$$\langle J(x^* - x), x^* \rangle \leq 0 \quad \forall x \in N. \quad (1.4)$$

Далее считаем, что норма в  $X$  равномерно дифференцируема по Гато (см. [4]). Кроме того, предположим, что оператор  $A$  дифференцируем по Фреше на  $X$ , тогда из (1.3) вытекает неравенство (см., например, [1], с.316)

$$\langle Jh, A'(x)h \rangle \geq 0 \quad \forall x, h \in X. \quad (1.5)$$

Пусть  $A$  –  $m$ -аккретивное отображение, т.е.  $R(A + \alpha E) = X$  при любом  $\alpha > 0$ , здесь  $E : X \rightarrow X$  – единичный оператор.

Отметим, что из (1.5) следует аккретивность линейного оператора  $A'(x) : X \rightarrow X$  при всех  $x \in X$ , который также считаем  $m$ -аккретивным.

В наших условиях уравнение (1.2) представляет собой некорректную задачу. В данной заметке для уравнения (1.2) будет построен и исследован непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона. В гильбертовом пространстве для монотонного оператора этот метод изучался в [5].

В [2], [4] для решения (1.2) изучался операторный метод регуляризации вида

$$Ax_\alpha(t) + \alpha(t)x_\alpha(t) = f, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (1.6)$$

где  $\alpha(t)$  – положительная функция, причём

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0. \quad (1.7)$$

В наших предположениях имеет место утверждение (см. [2, 4]):

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x_\alpha(t) - x^*\| = 0, \quad (1.8)$$

где  $x^* \in N$  и удовлетворяет (1.4).

Далее считаем, что  $\alpha(t) \in C^1[t_0, +\infty)$  и убывает на  $[t_0, +\infty)$ .

Пусть данные  $A$  и  $f$  задачи (1.2) известны приближённо, т.е. вместо  $A$  и  $f$  известны их приближения  $A(t)$  и  $f(t)$  соответственно, которые при всех  $t \geq t_0 \geq 0$  обладают свойствами:

1).  $A(t) : X \rightarrow X$  –  $m$ -аккретивный дифференцируемый по Фреше оператор, при всех  $u \in X$  существует  $A'(t)u = (A(t)u)'_t$ , т.е. определён оператор  $A'(t) : X \rightarrow X$ , причём элемент  $A'(t)u(t)$  непрерывно зависит от  $t$  при  $t \in [t_0, +\infty)$  для любой фиксированной  $u(t) \in C[t_0, +\infty)$  со значениями в  $X$ , и линейный оператор  $(A(t)u)'_u : X \rightarrow X$  является ограниченным на  $X$  при фиксированных  $u \in X$  и  $t \in [t_0, +\infty)$ , производная  $(A(t)u(t))'_u$  непрерывна по  $t$  на  $[t_0, +\infty)$  при любой  $u(t) \in C[t_0, +\infty)$ , и  $(A(t)u)'_u$  непрерывно зависит от  $u \in X$  при любом  $t \in [t_0, +\infty)$ ;

$$\|A(t)z - Az\| \leq h(t)g(\|z\|) \quad \forall z \in X, \quad (1.9)$$

$$\|A'(t)z\| \leq h_1(t)q(\|z\|) \quad \forall z \in X, \quad (1.10)$$



причем функции  $g(s)$  и  $q(s)$  определённые при  $s \geq 0$ , неотрицательны и переводят всякое ограниченное множество в ограниченное, функции  $h(t)$  и  $h_1(t)$ , входящие в (1.9) и (1.10) соответственно, являются бесконечно малыми при  $t \rightarrow +\infty$ ;

2). Функция  $f(t) \in X$  и имеет непрерывную производную  $f'(t)$ ,

$$\|f(t) - f\| \leq \delta(t); \quad (1.11)$$

где  $\delta(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

Подобно [5] непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона для уравнения (1.2) определим в форме следующей задачи Коши

$$(A(t)w(t))'_w w'(t) + \alpha(t)w'(t) - f'(t) + \gamma(t)[A(t)w(t) + \alpha(t)w(t) - f(t)] = 0, \quad (1.12)$$

$$w(t_0) = w_0 \in X, \quad (1.13)$$

т.е. регуляризацию проводим по аккретивному оператору  $A(t)$  и его производной Фреше  $(A(t)x)'_x$ .

Докажем вспомогательные утверждения.

**Л е м м а 1.1.** *В наших предположениях величина*

$$\xi(t, u(t)) = (A(t) + \alpha(t)E)^{-1} u(t),$$

*непрерывна по  $t$  при всех  $t \geq t_0$  для любой функции  $u(t) \in C[t_0, +\infty)$  со значениями в  $X$  и непрерывна по  $u$  на  $X$  при фиксированном  $t$ .*

**Доказательство.** Для фиксированной функции  $u(t) \in C[t_0, +\infty)$  и для  $t_1, t_2 \in [t_0, +\infty)$  найдем элементы  $\xi_i = \xi(t_i, u(t_i))$ , т.е.  $(A(t_i) + \alpha(t_i)E)^{-1}u(t_i) = \xi_i$ . Значит,  $A(t_i)\xi_i + \alpha(t_i)\xi_i = u(t_i)$  при  $i = 1, 2$ . Отсюда имеем равенство

$$\langle J(\xi_1 - \xi_2), A(t_1)\xi_1 - A(t_2)\xi_2 \rangle + \langle J(\xi_1 - \xi_2), \alpha(t_1)\xi_1 - \alpha(t_2)\xi_2 \rangle = \langle J(\xi_1 - \xi_2), u(t_1) - u(t_2) \rangle.$$

Отсюда, подобно [5], получаем неравенство

$$\|\xi_1 - \xi_2\| \leq \frac{1}{\alpha(t_2)} (\|A(t_2)\xi_1 - A(t_1)\xi_1\| + |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)|\|\xi_1\| + \|u(t_1) - u(t_2)\|). \quad (1.14)$$

Теперь, приняв во внимание непрерывность  $A(t)u$  по  $t$  при фиксированном  $u$ , непрерывность  $\alpha(t)$  и  $u(t)$  при  $t \in [t_0, +\infty)$ , имеем непрерывность  $\xi(t, u(t))$  по  $t$ .

Теперь зафиксируем  $t \geq t_0$ , и задав  $u_1$  и  $u_2$  из  $X$ , определим элементы  $\tilde{\xi}_i = (A(t) + \alpha(t)E)^{-1}u_i$ , т.е.  $A(t)\tilde{\xi}_i + \alpha(t)\tilde{\xi}_i = u_i$ ,  $i = 1, 2$ . Значит, справедливо равенство

$$\langle J(\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2), A(t)\tilde{\xi}_1 - A(t)\tilde{\xi}_2 \rangle + \alpha(t)\|\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2\|^2 = \langle J(\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2), u_1 - u_2 \rangle,$$

отсюда в силу аккретивности оператора  $A(t)$  имеем

$$\|\tilde{\xi}_1 - \tilde{\xi}_2\| \leq \frac{1}{\alpha(t)} \|u_1 - u_2\|. \quad (1.15)$$

Следовательно, лемма доказана полностью.

**Л е м м а 1.2.** Пусть

$$\chi(t, u(t), w(t)) = [(A(t)u(t))'_u + \alpha(t)E]^{-1} w(t),$$

где  $u(t)$  и  $w(t)$  – непрерывные на  $[t_0, +\infty)$  функции со значениями в  $X$ . Тогда в наших предположениях  $\chi(t, u(t), w(t))$  непрерывна по  $t$  на  $[t_0, +\infty)$  и непрерывна по  $u$  при фиксированных  $t$  и  $w(t)$ .

**Доказательство.** Пусть  $u(t), w(t)$  – функции из  $C[t_0, +\infty)$ , и  $t_1$  и  $t_2$  есть значения из  $[t_0, +\infty)$ ,  $\chi_i = \chi(t_i, u(t_i), w(t_i))$ ,  $i = 1, 2$ . Следовательно,

$$[(A(t_i)u(t_i))'_u + \alpha(t_i)E]^{-1} w(t_i) = \chi_i \quad \text{т.е.} \quad (A(t_i)u(t_i))'_u \chi_i + \alpha(t_i)\chi_i = w(t_i), \quad i = 1, 2.$$

Поскольку аккретивный дифференцируемый по Фреше оператор  $A$  обладает свойством (1.5), то подобно [5] (см. лемму 2 в [5]) получаем неравенство

$$\begin{aligned} \|\chi_1 - \chi_2\| \leq \frac{1}{\alpha(t_2)} & \left[ \|(A(t_2)u(t_2))'_u - (A(t_1)u(t_1))'_u\| \|\chi_1\| + \right. \\ & \left. + |\alpha(t_2) - \alpha(t_1)| \|\chi_1\| + \|w(t_1) - w(t_2)\| \right]. \end{aligned}$$

Тем самым в наших условиях непрерывность  $\chi(t, u(t), w(t))$  по  $t$  доказана. Пусть при фиксированных  $t \geq t_0$ ,  $w = w(t)$ ,  $u_1$  и  $u_2$  из  $X$  верны равенства

$$[(A(t)u_i)'_{u_i} + \alpha(t)E]^{-1} w = z_i, \quad \text{или} \quad (A(t)u_i)'_{u_i} z_i + \alpha(t)z_i = w, \quad i = 1, 2.$$

Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} & \langle J(z_1 - z_2), (A(t)u_1)'_{u_1} z_1 - (A(t)u_1)'_{u_1} z_2 \rangle + \alpha(t) \|z_1 - z_2\|^2 + \\ & + \langle J(z_1 - z_2), [(A(t)u_1)'_{u_1} - (A(t)u_2)'_{u_2}] z_2 \rangle = 0. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая свойство (1.5) для оператора  $(A(t)u_1)'_{u_1}$ , имеем неравенство

$$\|z_1 - z_2\| \leq \frac{1}{\alpha(t)} \|(A(t)u_1)'_{u_1} - (A(t)u_2)'_{u_2}\| \|z_2\|.$$

В силу непрерывности  $(A(t)u)'_u$  по  $u$  при любом фиксированном  $t \geq t_0$  (см. условие (i)) лемма доказана полностью.

Установим условия сходимости решения задачи (1.12), (1.13) при  $t \rightarrow \infty$  к решению  $x^*$  уравнения (1.2).

## 2. Сходимость метода при точном задании оператора

Пусть оператор  $A$  в (1.2) известен, а вместо элемента  $f$  известны его приближения  $f(t)$ , удовлетворяющие условиям (ii). Непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона (1.12), (1.13) в нашем случае примет вид

$$A'(v(t))v'(t) + \alpha(t)v'(t) - f'(t) + \gamma(t)[Av(t) + \alpha(t)v(t) - f(t)] = 0, \quad (2.1)$$

$$v(t_0) = v_0 \in X. \quad (2.2)$$

Перепишем (2.1) в следующем виде

$$\frac{du(t)}{dt} = -\gamma(t)u(t) + \alpha'(t)v(t), \quad (2.3)$$

где

$$u(t) = Av(t) + \alpha(t)v(t) - f(t). \quad (2.4)$$

Так как

$$v(t) = (A + \alpha(t)E)^{-1} (u(t) + f(t)), \quad (2.5)$$

то от (2.3) придем к уравнению

$$\frac{du(t)}{dt} = -\gamma(t)u(t) + \alpha'(t) (A + \alpha(t)E)^{-1} (u(t) + f(t)). \quad (2.6)$$

Установим условия однозначной разрешимости задачи Коши для уравнения (2.6) при любом начальном условии  $u(t_0) = u_0 \in X$ . В силу непрерывности функций  $\gamma(t)$ ,  $\alpha'(t)$ ,  $f(t)$  и леммы 1.1. делаем вывод о непрерывности оператора

$$F(t, u) = -\gamma(t)u + \alpha'(t) (A + \alpha(t)E)^{-1} (u + f(t)). \quad (2.7)$$

по  $t$  на  $[t_0, +\infty)$  при любом фиксированном элементе  $u$  из  $X$ .

Далее сделаем дополнительные предположения относительно параметрических функций  $\alpha(t)$  и  $\gamma(t)$ : пусть справедливы неравенства

$$\gamma(t) \leq \gamma_0 \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.8)$$

$$\frac{|\alpha'(t)|}{\alpha(t)} \leq \lambda_0 \quad \forall t \geq t_0, \quad (2.9)$$

где  $\gamma_0$  и  $\lambda_0$  – некоторые положительные числа.

Тогда, используя оценку (1.15), установим справедливость условия Липшица для оператора  $F(t, u)$  по переменной  $u$  с постоянной  $\gamma_0 + \lambda_0$ . Теперь однозначная разрешимость задачи Коши для уравнения (2.6) в классе функций  $C^1[t_0, +\infty)$  следует из [6], с. 399 – 401. Таким образом, однозначно определяется элемент  $v(t)$  при всех  $t \geq t_0$  по формуле (2.5). Кроме того, в наших предположениях существует непрерывная производная (см. [5] и лемму 1.2.).

$$v'(t) = [A'(v(t)) + \alpha(t)E]^{-1}(u'(t) - \alpha'(t)v(t) + f'(t)). \quad (2.10)$$

Следовательно, установлено существование единственного решения  $v(t) \in C^1[t_0, +\infty)$  задачи Коши (2.1), (2.2).

Пусть существует постоянная  $\rho_0 > 0$  такая, что

$$\langle J(Az + \alpha(t)z - f(t)), z \rangle \geq 0 \quad \text{при} \quad \|z\| \geq \rho_0 \quad \forall t \geq t_0. \quad (2.11)$$

Далее из (2.3) имеем

$$\left\langle Ju(t), \frac{du(t)}{dt} \right\rangle + \gamma(t)\|u(t)\|^2 = \alpha'(t)\langle Ju(t), v(t) \rangle. \quad (2.12)$$

Пусть  $\|v(t)\| \geq \rho_0$  при некотором  $t \in [t_0, +\infty)$ , тогда в силу (2.4) и (2.11) справедливо неравенство  $\langle Ju(t), v(t) \rangle \geq 0$ . Поскольку функция  $\alpha(t)$  по условию убывает, то с учётом равенства (см., например, [3], пример 5.7)

$$\langle Ju(t), u'(t) \rangle = \left( \frac{1}{2}\|u(t)\|^2 \right)'_t = \|u(t)\| \frac{d\|u(t)\|}{dt}$$

от (2.12) при выбранном  $t$  приходим к неравенству

$$\frac{d\|u(t)\|}{dt} + \gamma(t)\|u(t)\| \leq 0. \quad (2.13)$$

Пусть  $t \in [t_0, +\infty)$  и  $\|v(t)\| < \rho_0$ , тогда из (2.12) выводим неравенство

$$\frac{d\|u(t)\|}{dt} + \gamma(t)\|u(t)\| < -\alpha'(t)\rho_0. \quad (2.14)$$

Теперь, приняв во внимание (2.13), заключаем, что (2.14) верно при всех  $t \geq t_0$ . Следовательно, справедлива оценка (см. [7], с. 264)

$$\|u(t)\| \leq a_0 \exp\left(-\int_{t_0}^t \gamma(s)ds\right) - \rho_0 \int_{t_0}^t \alpha'(\theta) \exp\left(-\int_{\theta}^t \gamma(s)ds\right) d\theta, \quad (2.15)$$

где положительная постоянная  $a_0$  удовлетворяет неравенству  $\|Av_0 + \alpha(t)v_0 - f(t)\| \leq a_0$ ,  $v_0$  – элемент из начального условия (2.2).

Из (1.6) и (2.4) имеем

$$\begin{aligned} \langle J(v(t) - x_\alpha(t)), Av(t) - Ax_\alpha(t) \rangle + \alpha(t) \langle J(v(t) - x_\alpha(t)), v(t) - x_\alpha(t) \rangle = \\ = \langle J(v(t) - x_\alpha(t)), f(t) - f + u(t) \rangle. \end{aligned}$$

Свойство аккретивности оператора  $A$  позволяет отсюда вывести неравенство

$$\alpha(t)\|v(t) - x_\alpha(t)\|^2 \leq \langle J(v(t) - x_\alpha(t)), f(t) - f \rangle + \langle J(v(t) - x_\alpha(t)), u(t) \rangle.$$

Отсюда в силу предположения (1.11) и определения оператора  $J$  (см. (1.1)) получаем оценку

$$\|v(t) - x_\alpha(t)\| \leq \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} + \frac{\|u(t)\|}{\alpha(t)},$$

которая на основании (2.15) принимает вид

$$\|v(t) - x_\alpha(t)\| \leq a_1 \left[ \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} + \frac{\exp\left(-\int_{t_0}^t \gamma(s)ds\right)}{\alpha(t)} - \frac{\int_{t_0}^t \alpha'(\theta) \exp\left(-\int_{\theta}^t \gamma(s)ds\right) d\theta}{\alpha(t)} \right],$$

где  $a_1$  – положительная постоянная, далее через  $a_k$  будем обозначать положительные постоянные.

Теперь, подобно [5], устанавливаем утверждение.

**Т е о р е м а 2.1.** Пусть  $X$  – рефлексивное строго выпуклое вместе со своим сопряжённым банахово пространство, норма в  $X$  равномерно дифференцируема по Гато,  $A : X \rightarrow X$  –  $m$ -аккретивный дифференцируемый по Фреше оператор, причём  $A'(u)$  – ограниченный и непрерывна по  $u$  на  $X$  оператор, уравнение (1.2) имеет непустое множество решений  $N$ ,  $\alpha(t)$  и  $\gamma(t)$  – положительные функции, причем  $\alpha(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ ,  $\gamma(t) \in C[t_0, +\infty)$ ,  $\alpha(t)$  убывает, выполнены условия (1.7), (2.8), (2.9) и

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\exp\left(-\int_{t_0}^t \gamma(s)ds\right)}{\alpha(t)} = 0, \quad (2.16)$$

И. П. Рязанцева. Непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона для...

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\alpha'(t)}{\alpha'(t) + \alpha(t)\gamma(t)} = 0. \quad (2.17)$$

Предположим, что правая часть  $f$  уравнения (1.2) известна приближённо, её приближения  $f(t)$  удовлетворяют условиям (ii), причем

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\delta(t)}{\alpha(t)} = 0, \quad (2.18)$$

и справедливо неравенство (2.11).

Тогда задача Коши (2.1), (2.2) имеет единственное решение класса  $C^1[t_0, +\infty)$ , которое при  $t \rightarrow +\infty$  сильно сходится к элементу  $x^* \in N$ , определяемому неравенством (1.4).

### 3. Случай приближённо заданного оператора

Пусть выполнены предположения теоремы 2.1. и условия (i). Тогда непрерывный регуляризованный аналог метода Ньютона имеет вид (1.12), (1.13). Введём новую функцию

$$\tilde{u}(t) = A(t)w(t) + \alpha(t)w(t) - f(t), \quad (3.1)$$

тогда (1.12) даёт равенство

$$\frac{d\tilde{u}(t)}{dt} + \gamma(t)\tilde{u}(t) = A'(t)w(t) + \alpha'(t)w(t). \quad (3.2)$$

Из (3.1) найдем

$$w(t) = (A(t) + \alpha(t)E)^{-1} (\tilde{u}(t) + f(t)) \quad (3.3)$$

и перепишем (3.2) в следующем виде

$$\frac{d\tilde{u}(t)}{dt} = -\gamma(t)\tilde{u}(t) + (A'(t) + \alpha'(t)E) (A(t) + \alpha(t)E)^{-1} (\tilde{u}(t) + f(t)). \quad (3.4)$$

Пусть справедливо неравенство

$$\|A'(t)u_1 - A'(t)u_2\| \leq \tilde{L}(t)\|u_1 - u_2\|, \quad \tilde{L}(t) > 0 \quad \forall u_1, u_2 \in X, \quad \forall t \geq t_0, \quad (3.5)$$

где функция  $\tilde{L}(t)$  обладает свойством

$$\frac{\tilde{L}(t)}{\alpha(t)} \leq L_0 \quad \forall t \geq t_0, \quad L_0 > 0. \quad (3.6)$$

Теперь, подобно [5], в наших предположениях устанавливается однозначная разрешимость уравнения (1.12) в классе функций  $C^1[t_0, +\infty)$  для любого начального условия (1.13).

На основании леммы 1.1. делаем вывод о непрерывности  $w(t)$  на  $[t_0, +\infty)$ . В то же время

$$w'(t) = [(A(t)w(t))'_w + \alpha(t)E]^{-1} (\tilde{u}'(t) - (A'(t) + \alpha'(t)E)w(t) + f'(t)).$$

Далее, в наших предположениях по лемме 1.2. устанавливаем, что  $w'(t) \in C[t_0, +\infty)$ , т.е.  $w(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ .

Предположим, что  $w(t)$  – ограниченная на  $[t_0, +\infty)$  функция, и существует постоянная  $\tilde{\rho} > 0$  такая, что

$$\langle J(A(t)z + \alpha(t)z - f(t)), z \rangle \geq 0 \quad \text{при} \quad \|z\| \geq \tilde{\rho} \quad \forall t \geq t_0. \quad (3.7)$$

Из (3.2) получаем равенство

$$\left\langle J\tilde{u}(t), \frac{d\tilde{u}(t)}{dt} \right\rangle + \gamma(t)\|\tilde{u}(t)\|^2 = \langle J\tilde{u}(t), A'(t)w(t) \rangle + \alpha'(t)\langle J\tilde{u}(t), w(t) \rangle.$$

Отсюда теми же рассуждениями, что и при выводе (2.14), приходим к неравенству

$$\frac{d\|\tilde{u}(t)\|}{dt} + \gamma(t)\|\tilde{u}(t)\| \leq \|A'(t)w(t)\| - \alpha'(t)\tilde{\rho}_0.$$

Теперь предполагаемая ограниченность  $w(t)$  на  $[t_0, +\infty)$  и неравенство (1.10) позволяют от последнего неравенства перейти к следующему

$$\frac{d\|\tilde{u}(t)\|}{dt} + \gamma(t)\|\tilde{u}(t)\| \leq a_2[h_1(t) - \alpha'(t)].$$

Вновь применив лемму из [7], имеем оценку

$$\|\tilde{u}(t)\| \leq a_3 \left[ \exp \left( - \int_{t_0}^t \gamma(s) ds \right) + \int_{t_0}^t [h_1(\theta) - \alpha'(\theta)] \exp \left( - \int_{\theta}^t \gamma(s) ds \right) d\theta \right]. \quad (3.8)$$

Далее, вычитая из (3.1) равенство (1.6) и находя значения функционала  $J(w(t) - x_\alpha(t))$  на элементах правой и левой частей полученного равенства, имеем

$$\begin{aligned} & \langle J(w(t) - x_\alpha(t)), A(t)w(t) - A(t)x_\alpha(t) \rangle + \alpha(t)\|w(t) - x_\alpha(t)\|^2 = \\ & = \langle J(w(t) - x_\alpha(t)), Ax_\alpha(t) - A(t)x_\alpha(t) \rangle + \langle J(w(t) - x_\alpha(t)), f(t) - f + \tilde{u}(t) \rangle. \end{aligned}$$

Аккретивность оператора  $A(t)$ , ограниченность  $\|x_\alpha(t)\|$  на  $[t_0, +\infty)$  (см. (1.8)), предположения (1.9), (1.11) позволяют из последнего равенства вывести оценку

$$\|w(t) - x_\alpha(t)\| \leq a_4 \frac{\delta(t) + h(t)}{\alpha(t)} + \frac{\|\tilde{u}(t)\|}{\alpha(t)} \quad \forall t \geq t_0.$$

Применив правило Лопиталья в правой части (3.8), заключаем, что при выполнении условий

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h(t)}{\alpha(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{h_1(t)}{\alpha'(t) + \alpha(t)\gamma(t)} = 0, \quad (3.9)$$

и (2.16) – (2.18) из последнего неравенства вытекает сходимость  $\|w(t) - x_\alpha(t)\| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow +\infty$ .

Сформулируем полученное утверждение.

**Т е о р е м а 3.1.** Пусть в условиях теоремы 2.1. оператор  $A$  возмущен, и выполнены условия (i), (3.5), (3.6), и вместо (2.11) выполнено неравенство (3.7). Тогда задача Коши (1.12), (1.13) имеет единственное решение  $w(t) \in C^1[t_0, +\infty)$ . Предположим, что это решение ограничено на  $[t_0, +\infty)$ , и справедливы условия (3.9), тогда  $w(t)$  при  $t \rightarrow +\infty$  сходится по норме пространства  $X$  к решению  $x^*$  уравнения (1.2), определяемому неравенством (1.4).

**З а м е ч а н и е 3.1.** Примеры параметрических функций, удовлетворяющих условиям теорем 2.1. и 3.1., приведены в [5].

**З а м е ч а н и е 3.2.** Условие (3.7) есть одно из известных достаточных условий разрешимости уравнения (см., например, [1])

$$J(A(t)x + \alpha(t)x - f(t)) = 0, \quad t \geq t_0. \quad (3.10)$$

Поскольку в наших условиях на пространства  $X$  и  $X^*$  равенство  $Jz = 0$  возможно тогда и только тогда, когда  $z = 0$ , то из (3.10) получаем, что  $A(t)x + \alpha(t)x = f(t)$ . Так как операторы  $A(t)$  по условию являются  $m$ -аккретивными, то (3.7) не противоречит ранее принятым предположениям. Аналогично устанавливается, что (2.11) есть одно из достаточных условий разрешимости операторного уравнения  $Ax + \alpha(t)x = f(t)$ .

**З а м е ч а н и е 3.3.** Подобно [5] выводится ограниченность  $w(t)$  на  $[t_0, +\infty)$  из неравенства

$$\langle Jw(t), ((A(t)w(t))'_w + \alpha(t)E)^{-1}(\gamma(t)[A(t)w(t) + \alpha(t)w(t) - f(t)] + f'(t)) \rangle \geq 0$$

при  $\|w(t)\| \geq R_0 > 0$ .

**З а м е ч а н и е 3.4.** В отличие от [5] (см. теорему 2) в теореме 3.1. отсутствует требование ограниченности функции  $g(s)/s$  при  $s \rightarrow \infty$ . В [5] выполнение в  $H$  неравенств вида (2.11) и (3.7) (при  $J = E$ ) не предполагалось. Они выводились на основании (1.9) и (1.11) из неравенства  $(Ax - f, x) \geq 0$  при  $\|x\| \geq \rho > 0, x \in H$ . Для оператора  $A$  в банаховом пространстве  $X$  указанное неравенство принимает вид  $\langle J(Ax - f), x \rangle \geq 0$  при  $\|x\| \geq \rho > 0, x \in X$ . Чтобы вывести отсюда неравенства (2.11) и (3.7) необходимы равномерная монотонность  $J$  на  $X$  и выполнение неравенства Гёльдера для  $J$  на  $X$ . Примеры банаховых пространств с такими свойствами оператора  $J$  неизвестны (см., например, [2], [3]). Отметим, что непосредственная проверка указанных неравенств в  $H$  и  $X$  может быть невозможна, так как  $A$  и  $f$  в общем случае неизвестны.

**З а м е ч а н и е 3.5.** В [5] показано как настроить метод (1.12), (1.13) для случая, когда известны единственные приближения  $A^h$  и  $f^\delta$  оператора  $A$  и элемента  $f$  соответственно.

**П р и м е р 3.1.** Рассмотрим оператор  $A : L^p[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$  ( $p > 1$ ) следующего вида

$$Az(x) = \begin{cases} z(x)/[b_1 + b_2 z(x)], & z(x) \geq 0, \\ 0, & z(x) < 0, \end{cases}$$

где  $b_1$  и  $b_2$  – положительные постоянные. Покажем аккретивность  $A$ .

Поскольку в  $L^p[a, b]$  оператор  $J : L^p[a, b] \rightarrow L^q[a, b]$  имеет вид

$$Jz(x) = \|z\|^{2-p}|z(x)|^{p-2}z(x) \quad \forall z(x) \in L^p[a, b], \quad z(x) \neq 0$$

и  $J(0) = 0$ , то при  $z_1(x) > 0$  и  $z_2(x) > 0$  получаем

$$\begin{aligned} & \langle J(z_1(x) - z_2(x)), Az_1(x) - Az_2(x) \rangle = \\ & = \|z_1 - z_2\|^{2-p} \int_a^b |z_1(x) - z_2(x)|^{p-2} [z_1(x) - z_2(x)] \left[ \frac{z_1(x)}{b_1 + b_2 z_1(x)} - \frac{z_2(x)}{b_1 + b_2 z_2(x)} \right] dx = \end{aligned}$$

$$= b_1 \|z_1 - z_2\|^{2-p} \int_a^b \frac{|z_1(x) - z_2(x)|^p}{[b_1 + b_2 z_1(x)][b_1 + b_2 z_2(x)]} dx \geq 0.$$

Пусть возмущённый оператор  $A(t)$ ,  $t \in [t_0, +\infty)$  определяется следующим образом

$$A(t)z(x) = \begin{cases} z(x)/[b_1(t) + b_2(t)z(x)], & z(x) \geq 0, \\ 0, & z(x) < 0, \end{cases}$$

где  $b_1(t)$  и  $b_2(t)$  – положительные функции из  $C^1[t_0, +\infty)$ , причем

$$b_i(t) \geq a_i > 0, \quad |b_i - b_i(t)| \leq h(t), \quad i = 1, 2, \quad t \geq t_0, \quad h(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow +\infty.$$

Аккретивность операторов  $A(t) : L^p[a, b] \rightarrow L^p[a, b]$  проверяется теми же рассуждениями, что и для оператора  $A$ . Справедливость неравенств (1.9), (1.10) устанавливается подобно [5].

Как следует из доказательств теорем 1 и 2, выполнение неравенств (2.11) и (3.7) требуется только на решениях задач (2.1), (2.2) и (1.12), (1.13) соответственно. Значит, справедливость (2.11) и (3.7) можно установить численно.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Вайнберг, *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, Москва, 1972, 416 с.
2. Ya. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006, 410 с.
3. И. П. Рязанцева, *Избранные главы теории операторов монотонного типа*, НГТУ, Нижний Новгород, 2008, 272 с.
4. Быонг Нгуен, Тхи Хонг Фыонг Нгуен, “Методы регуляризации для нелинейных некорректных уравнений, содержащих  $m$ -аккретивные отображения в банаховых пространствах”, *Известия вузов. Математика*, 2013, № 2, 67–74.
5. И. П. Рязанцева, “Регуляризованный непрерывный аналог метода Ньютона для монотонных уравнений в гильбертовом пространстве”, *Известия вузов. Математика*, 2016, № 11, 53–67.
6. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1980, 495 с.
7. Ф. П. Васильев, *Методы решения экстремальных задач*, Наука, Москва, 1981, 400 с.

Представлено 20.02.2017



MSC2010 65J15

# Continuous regularization analog of Newton method for m-accretive equations

© I. P. Ryazantseva<sup>2</sup>

**Abstract.** Paper studies nonlinear equations with approximate data (i.e. the operator and the right-hand side of an operator equation) with the Frechet-differentiable m-accretive operator in Banach space. For such equation a regularized continuous analog of Newton's method is constructed; sufficient conditions for method's strong convergence to a certain uniquely determined solution of the given equation are obtained. Previously we prove auxiliary assertions of continuity of values that are determined in terms of regularized solutions and their derivatives. The approximations of the operator are assumed to be differentiable. One-valued solvability of the differential equation defining the investigated regularization method is proved. In the proof of the continuous method convergence known convergence of operator regularization method for accretive equations is used. Requirements on the geometry of Banach space and its conjugate are performed for a wide class of Banach spaces. For approximate right-hand side definition of the equation the cases of the unperturbed and of the perturbed operator are studied separately. Examples are built for parametric functions that are used in the equation that defines the method studied. The example is specified of an operator arising in the theory of a scalar density function, for which the conditions of convergence of the method are performed.

**Key Words:** Banach space, m-accretive operator, duality mapping, Newton's method, continuous method, perturbed data, regularization, convergence.

## REFERENCES

1. M. M. Vainberg, *Variational method and the monotone operator method in the theory of nonlinear equations [The variational method and the method of monotone operators in the theory of nonlinear equations]*, Nauka, Publ., Moscow, 1972 (In Russ.), 416 p.
2. Ya. Alber, I. Ryazantseva, *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Publ., Dordrecht, 2006 (In Netherlands), 410 p.
3. I. P. Ryazantseva, *Izbrannye glavy teorii operatorov monotonnogo tipa [Electly chapters of theory monotone type operators]*, NGTU, Publ., Nizhny Novgorod, 2008 (In Russ.), 272 p.
4. Nguyen Buong and Nguyen Thi Hong Phuong, "[Regularization methods for nonlinear ill-posed equations involving m-accretive mappings in Banach spaces]", *Izv. vuzov. Matematika*, **2** (2013), 67-74 (In Russ.).
5. I. P. Ryazantseva, "[Regularized continuous analog of Newton's method for monotone equations in Hilbert space]", *Izv. vuzov. Matematika*, **11** (2016), 53-67 (In Russ.).
6. V. A. Trenogin, *Funktsional'nyy analiz [Functional analysis]*, Nauka, Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 495 p.
7. F. P. Vasil'ev, *Metody resheniya ekstremal'nykh zadach [Methods for solving of extremal problems]*, Nauka, Publ., Moscow, 1981 (In Russ.), 400 p.

Submitted 20.02.2017

<sup>2</sup> **Irina P. Ryazantseva**, Professor, Department of Applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University after R.E. Alekseev (24 Minina Str., Nizhny Novgorod 603950, Russia), Dr. Sci. (Phys.-Math.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-6215-1662>, [lryazantseva@applmath.ru](mailto:lryazantseva@applmath.ru)

УДК 517.9

# Потоки Морса-Смейла и модели топологии магнитных полей в плазме

© А. Н. Сахаров<sup>1</sup>, А. А. Шиловская<sup>2</sup>

**Аннотация.** Настоящая статья является продолжением работы [14] и посвящена изложению результатов, связанных с построением моделей магнитных полей в электропроводящей среде (плазме) в терминах динамических систем. Исследования в этом направлении интенсивно ведутся в течении последних 20 лет. Так как решение уравнений магнитной гидродинамики сопряжено с известными трудностями, то в рассматриваемом подходе используются приближенные модели магнитного поля. Строится класс моделей векторных полей, объединенных общим названием *модель топологии магнитных зарядов*. Поля из этого класса порождают непрерывные динамические системы (потoki) на трехмерных многообразиях с достаточно простой структурой. Во-первых, неблуждающее множество конечно и состоит из гиперболических состояний равновесия, во-вторых, эти потоки допускают существование так называемой самоиндексирующейся энергетической функции, позволяющей провести их полную топологическую классификацию. Кроме того, поля из указанного класса могут быть сколь угодно близко аппроксимированы векторными полями, порождающими структурно устойчивые потоки. Особое внимание уделяется полям в короне Солнца, что связано с актуальной задачей оценки выброса энергии при солнечных вспышках.

**Ключевые слова:** особые точки поля, магнитные силовые линии, источники, стоки, сепаратрисы, сепараторы, гетероклинические траектории.

## 1. Введение

Структура (топология силовых линий) магнитного поля в плазме играет важную роль для решения ряда задач магнитной гидродинамики (МГД): эволюция магнитного поля в короне Солнца, устойчивость плазмы в термоядерных реакторах, механизмы турбулентного динамо<sup>3</sup>, теория магнитного пересоединения.

Эволюция магнитного поля в плазме описывается системой уравнений в частных производных (уравнениями МГД, [1], гл. 8), которые определяют два векторных поля на некотором трехмерном многообразии  $M^3$  (которое будем называть несущим): магнитное поле  $\mathbf{H}$  и поле скоростей частиц плазмы  $\mathbf{v}$ . Поэтому решение задачи описания топологии магнитного поля включает в себя два этапа. На первом этапе решается система уравнений МГД. Найденное поле  $\mathbf{H}$  порождает (при известных предположениях) непрерывную динамическую систему (поток) на  $M^3$ . На втором этапе находятся интегральные

<sup>1</sup> Сахаров Александр Николаевич, доцент кафедры высшей математики и теоретической механики, ФГБОУ ВО "Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия" (603107, Россия, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д. 97), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-4520-8062>, [ansakharov2008@yandex.ru](mailto:ansakharov2008@yandex.ru)

<sup>2</sup> Шиловская Анна Анатольевна, аспирант кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Институт информационных технологий, математики и механики, ФГАОУ ВО "Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского (603950, Россия, ГСП-20, г. Нижний Новгород, пр-т Гагарина, д.23, корп.6), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-3328-8157>, [a.shilovskaia@gmail.com](mailto:a.shilovskaia@gmail.com)

<sup>3</sup> Динамо – механизм усиления или поддержания стационарного (либо колебательного) состояния магнитного поля гидродинамическими движениями проводящей среды.

кривые этой системы, структура которых и определяет топологию магнитного поля. Так как решение задачи первого этапа сопряжено с известными трудностями, то в магнитной гидродинамике используется подход, основанный на построении приближенной модели магнитного поля, учитывающей специфику решаемой задачи. Удачный выбор такой модели позволяет, во-первых не решать уравнения МГД, и, во-вторых, получить адекватную физическую картину топологии магнитного поля.

Здесь мы сосредоточимся на задаче построения реалистических моделей магнитного поля в атмосфере Солнца, которая весьма актуальна для оценки величины выброса энергии при солнечных вспышках. Реальные физические поля достаточно часто не удовлетворяют требованиям, гарантирующим существование глобальных непрерывных потоков на несущем многообразии. Однако, при ряде дополнительных ограничений физического характера (их точное описание будет приведено ниже) можно получить поля, которые являются стандартными объектами теории динамических систем. Как уже было отмечено в работе [14] возникает класс моделей магнитных полей, для которых является естественным рассмотрение следующих задач:

**Задача 1.** Для заданного набора источников поля построить все структурно устойчивые<sup>4</sup> конфигурации магнитных силовых линий (фазовые портреты соответствующего потока);

**Задача 2.** Найти типичные<sup>5</sup> бифуркации конфигураций, порождаемых однопараметрическим семействами таких векторных полей.

В последнее десятилетие решению этих двух задач было посвящено большое количество работ специалистов в области астрофизики. Появился даже термин *магнитная топология*, обозначающий метод описания структуры магнитного поля в терминах трехмерных векторных полей. Однако, для получения полной картины не хватает, на наш взгляд, строгого математического обоснования этих результатов, чему посвящена настоящая статья.

Нелокальные бифуркации в магнитных полях связаны с рождением или разрушением так называемых сепараторов, математическими образами которых являются гетероклинические траектории потоков, принадлежащие пересечению устойчивых и неустойчивых многообразий седловых состояний равновесия. Проблема существования таких траекторий для произвольных потоков Морса-Смейла<sup>6</sup> является нетривиальной (см. напрмер, работы [3]-[6]).

Изучение топологии магнитных полей в плазме в терминах динамических систем началось достаточно давно (в начале 60-х годов прошлого века), о чем свидетельствует внушительное количество публикаций по данной тематике. Большую их часть можно найти в библиографическом списке монографии [7] и обзора [8]. Некоторые более поздние работы приведены списке литературы данной публикации. Отдельно отметим пионерские работы

<sup>4</sup> Пусть  $\mathbf{v}$  –  $C^r$ -гладкое векторное поле ( $r \geq 1$ ) на  $C^{r+1}$ -гладком многообразии  $M$ . Поток, порождаемый полем  $\mathbf{v}$ , называется структурно устойчивым (грубым), если в пространстве всех  $C^1$ -гладких векторных полей на  $M$  существует окрестность поля  $\mathbf{v}$  такая, что всякое векторное поле из этой окрестности топологически орбитально эквивалентно исходному, причем, гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность, близок к тождественному.

<sup>5</sup> Понятие типичности бифуркации векторных полей подробно обсуждается в книге [2].

<sup>6</sup> Гладкий поток называется потоком Морса-Смейла, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) его неблуждающее множество является объединением конечного числа гиперболических положений равновесия и замкнутых траекторий;

2) пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий траекторий неблуждающего множества трансверсальны.

[9], [10], [11] и [12], с которых собственно и началось применение топологических методов для изучения рассматриваемого класса магнитных полей.

Работа организована следующим образом. В разделе 2 рассматриваются геометрические понятия, используемые при описании топологической структуры произвольных магнитных полей, удовлетворяющих уравнениям МГД. Кроме того, обсуждается свойство вмерзновенности магнитного поля в идеальную плазму. Следствием этого свойства является неизменность топологической структуры магнитного поля с течением времени: поля  $\mathbf{H}_{t_1}$  и  $\mathbf{H}_{t_2}$  орбитально топологически эквивалентны<sup>7</sup>.

В разделе 3 рассматриваются основные модели магнитных полей в короне Солнца: так называемые модели топологии магнитных зарядов (модели ТМЗ).

В разделе 4 рассмотрена простейшая но важная модель ТМЗ, порождаемого потенциалом, определяемым положением зарядов в фазовом пространстве.

## 2. Геометрия магнитных полей, удовлетворяющих уравнениям МГД

Будем предполагать, если не оговорено отдельно, что несущее многообразие  $M^3$ , на котором задано магнитное поле, гомеоморфно трехмерной сфере  $S^3$ . Пусть  $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$  – вектор магнитной индукции произвольного магнитного поля, удовлетворяющего уравнениям МГД. Если обозначить через  $\mathbf{r} = \{x, y, z\}$  евклидовы координаты точки  $S^3$  в локальной карте, то силовые линии магнитного поля являются интегральными кривыми векторного дифференциального уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{B}(\mathbf{r}), \quad (2.1)$$

где  $s$  – параметр, определяющий положение точки на интегральной кривой относительно начального положения.

### 2.1. Особенности магнитного поля

Описание топологии силовых линий магнитного поля начинается с описания конфигурации особенностей поля. Электромагнитное поле имеет особенности в точках, где оно равно нулю (такие точки называются нулевыми точками поля), а также в точках, где расположены источники поля: электрические или магнитные заряды. Силовые линии поля либо начинаются, либо заканчиваются в этих точках. Магнитные заряды – монополи – до сих пор экспериментально не обнаружены, поэтому считается, что магнитное поле не имеет источников. Математически это свойство эквивалентно равенству

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \quad (2.2)$$

*Нулевые точки* поля определяются уравнением

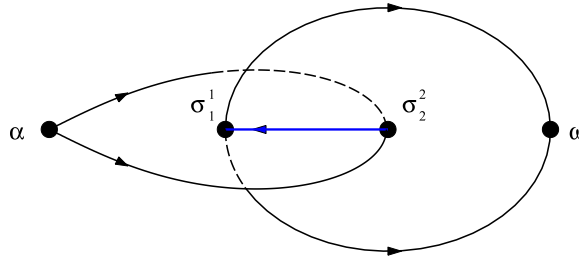
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 0. \quad (2.3)$$

Они являются положениями равновесия (неподвижными точками) потока, порождаемого этим полем. Из условия бездивергентности (2.2) следует, что собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  нулевой точки удовлетворяют равенству

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0. \quad (2.4)$$

<sup>7</sup> Два векторных поля на многообразии  $M^3$  называются топологически орбитально эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $h : M^3 \rightarrow M^3$ , переводящий интегральные кривые первого поля в интегральные кривые второго, сохраняя их ориентации.

В типичном случае вещественные части собственных значений  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  нулевой точки поля  $\mathbf{B}$  не равны нулю. Тогда из равенства (2.4) следует, что нулевая точка является седлом с двумерной и одномерной сепаратрисами. Так как собственные значения являются корнями вещественного многочлена третьей степени, то они либо все вещественные, либо одно из них вещественно, а два других – комплексно сопряженные.



Р и с у н о к 2.1

Гетероклиническое пересечение двумерных сепаратрис

В литературе по физике магнитных полей одномерную сепаратрису седла называют *шипом* (spine), а двумерную – *веерной поверхностью* (fan). Пересечения веерных поверхностей различных нулевых точек принято называть *сепараторами*. Если эти пересечения трансверсальны, то их называют *гетероклиническими сепараторами*. На языке непрерывных динамических систем (потоков) – это гетероклинические траектории (рис. 2.1). Объединение особенностей поля, шипов, веерных поверхностей и сепараторов определяет топологическую структуру поля и называется *скелетом* магнитного поля<sup>8</sup>.

## 2.2. Свойство вмерзновенности и устойчивость топологии магнитного поля

Эволюция во времени магнитного поля описывается уравнением индукции

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nu_m \Delta \mathbf{B} = 0, \quad (2.5)$$

где  $\nu_m$  – магнитная вязкость, характеризующая проводимость плазмы,  $\mathbf{v}$  – скорость движения частиц плазмы. Таким образом, геометрия магнитного поля меняется с течением времени, т.к. правая часть уравнения (2.1) зависит от  $t$  как от параметра.

В идеально проводящей плазме ( $\nu_m = 0$ ) магнитное поле обладает так называемым свойством *вмерзновенности*: при движении среды силовые линии следуют за ней, будучи как бы приклеенными к ее частицам (теорема Альфвена<sup>9</sup> [13]). Критерием вмерзновенности магнитного поля в плазму является выполнение уравнения индукции.

**Т е о р е м а 2.1.** ([14], теорема 2.1) *Правая часть уравнения (2.5) при  $\nu_m = 0$  равна скобке Пуассона полей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$ .*

<sup>8</sup> При построении изображений скелетов векторных полей мы придерживаемся общепринятых обозначений: источники обозначаются буквой  $\alpha$ , стоки –  $\omega$ , седла –  $\sigma^n$ , где  $n$  – размерность неустойчивого многообразия.

<sup>9</sup> Ханнес Улоф Йёста Альфвен (швед. Hannes Olof Gosta Alfven; 30 мая 1908, Норрчёпинг – 2 апреля 1995, Юрскольм) – известный шведский физик, специалист по физике плазмы. Лауреат Нобелевской премии по физике в 1970 г. за работы в области теории магнитогидродинамики.

Равенство нулю скобки Пуассона<sup>10</sup> эквивалентно свойству коммутруемости потоков, порождаемых этими полями ([16], гл. 8, § 39, теорема D).

В идеальной плазме свойство вмороженности поля является следствием постоянства магнитного потока через поверхность, натянутую на произвольный замкнутый контур, который движется вместе с плазмой (теорема Кельвина о циркуляции для магнитного потока). Рассмотрим закон Ома для плазмы

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = \mathbf{R},$$

где  $\mathbf{E}$  – напряженность электрического поля,  $\mathbf{R} = \nu_m \nabla \times \mathbf{B}$ . Пусть вектор  $\mathbf{R}$  удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{R}) = 0, \quad (2.6)$$

которое при  $\mathbf{B} \neq 0$  эквивалентно уравнению

$$\nabla \times \mathbf{R} = \alpha \mathbf{B},$$

где  $\alpha$  – некоторая скалярная функция. Небольшой модификацией доказательства теоремы 2.1 можно показать, что скобка Пуассона полей  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{B}$  и в этом случае также равна нулю. Таким образом, при выполнении условия (2.6) магнитное поле обладает свойством вмороженности<sup>11</sup>.

Экспериментальные наблюдения показывают, что эволюция структуры магнитного поля в плазме демонстрирует характер релаксационных колебаний: в течении значительного промежутка времени структура магнитного поля не изменяется, затем быстро происходит перестройка структуры, которая сопровождается явлением *перезамыкания магнитных силовых линий* [7]. Так как силовые линии поля движутся вместе с частицами плазмы, то линии с разными направлениями<sup>12</sup> могут оказаться достаточно близко. Далее силовые линии могут либо разойтись без изменения топологии, либо перезамкнуться. Очевидно, возможными моделями явления магнитного перезамыкания являются бифуркации в системе (2.1), приводящие к изменению топологии поля.

Так как вектор индукции  $\mathbf{B}$  зависит от времени  $t$ , то поля  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_1)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_2)$  определяют, вообще говоря, две различные конфигурации интегральных кривых. Свойство вмороженности гарантирует неизменность топологии магнитного поля во времени.

**Т е о р е м а 2.2.** ([15]) Пусть магнитное поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  коммутирует с вектором скорости частиц плазмы. Тогда поля  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_1)$  и  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t_2)$  топологически орбитально эквивалентны для всех  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ .

### 3. Модели топологии магнитных зарядов

#### 3.1. Свойства полей, определяемых моделями топологии магнитных зарядов

Некоторые особенности магнитного поля в короне Солнца позволяют использовать в качестве его моделей поля с точечными источниками, в которых условие бездивергентности поля (2.2) нарушается. С точки зрения электродинамики, точечные источники поля

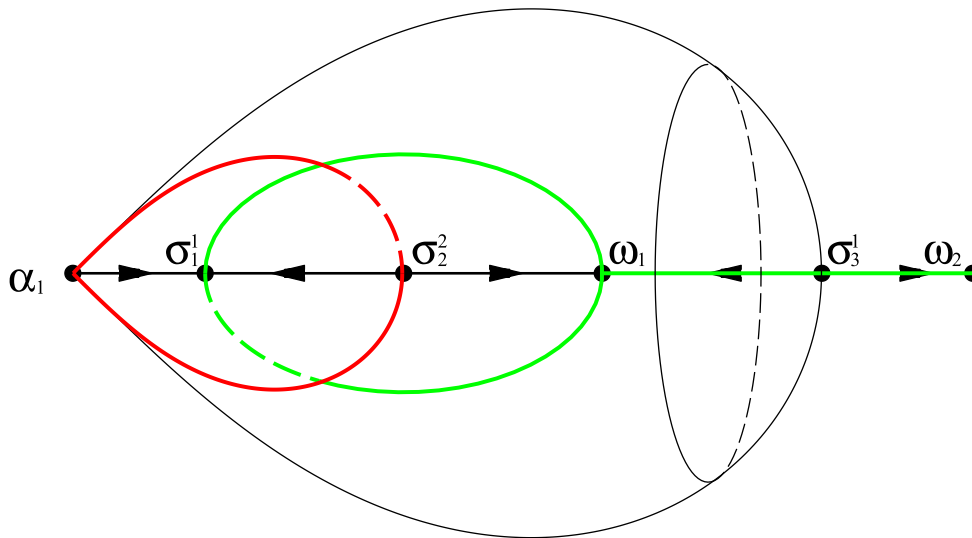
<sup>10</sup> Пусть  $L_u$ ,  $L_v$  – оператор дифференцирования по направлению поля  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  соответственно. Дифференциальный оператор (1-го порядка)  $L_u L_v - L_v L_u$  называется скобкой Пуассона векторных полей  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{v}$ .

<sup>11</sup> Впервые в геометрических терминах свойство вмороженности обсуждалось в работе [15].

<sup>12</sup> Направление силовой линии в заданной точке совпадает с направлением вектора  $\mathbf{B}$ , касающегося линии в этой точке.

это особенности поля, в которых оно принимает бесконечные значения. Для того, чтобы избежать работы с бесконечностями в астрофизике используется так называемая модель *топологии магнитного заряда* (модель ТМЗ), суть которой сводится к следующему:

1. реальный источник поля представляется в виде нулевой точки поля, которая является устойчивым (неустойчивым) положением равновесия;
2. поле потенциально, то есть представимо в виде  $\mathbf{B} = \nabla\Phi$ , где  $\Phi$  – скалярный потенциал;
3. при моделировании магнитного поля короны Солнца граница фотосферы рассматривается как двумерная сфера  $S^2$ , на которой располагаются все источники поля.



Р и с у н о к 3.1

Скелет магнитного поля с тремя источниками ( $\alpha_1$  – источник,  $\omega_1, \omega_2$  – стоки) и тремя седлами ( $\sigma_1^1, \sigma_2^2, \sigma_3^1$ ). Сепаратор – интегральная кривая, соединяющая седло  $\sigma_1^1$  с седлом  $\sigma_2^2$

Физическое обоснование корректности этой модели можно найти, например, в обзоре [8]. С точки зрения теории динамических систем суть модели ТМЗ сводится к следующему.

Обычно поток (непрерывная динамическая система) порождается векторным полем, особенностями которого являются только нулевые точки. Так как геометрически силовые линии поля в окрестности источников ведут себя также, как в окрестности неустойчивых (устойчивых) нулевых точек поля, то в модели ТМЗ условие 1 утверждает, что геометрия реального поля несущественно отличается от геометрии поля, у которого источники (стоки) поля являются неустойчивыми (устойчивыми) нулевыми точками. На границе фотосферы этим точкам соответствуют следы (конечного размера) пучков магнитных линий, пересекающих границу. Таким образом, точечные источники – компактификация этих следов. Хотя дивергенция поля в этих точках не равна нулю, однако именно это условие позволяет из множества потенциальных полей выделить класс полей, допускающих полную топологическую классификацию, что невозможно для бездивергентных полей.

Естественно предположить, что потенциальное поле в условии 2 порождается *функцией Морса*<sup>13</sup>. Известно (см., например, книгу [17]), что существует плотное множество

<sup>13</sup> Напомним, что  $C^2$ -функция  $\varphi$  на  $n$ -мерном многообразии называется функцией Морса, если для любой ее критической точки  $p$  существует окрестность  $V_p$  с координатной системой  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  и целое  $i_p$  – индекс  $p$  такие, что  $\varphi(\mathbf{x})|_{V_p} = \varphi(p) - \sum_{k=1}^{i_p} x_k^2 + \sum_{k=i_p+1}^n x_k^2$

градиентных векторных полей таких, что любое поле из этого множества порождается функцией Морса  $\varphi$  и допускает так называемую *самоиндексирующуюся энергетическую функцию*  $f$ , которая является функцией Морса со свойствами:

- 1) множество критических точек  $\varphi$  и  $f$  совпадают;
- 2) для каждой критической точки  $p$  имеем  $f(p) = \varphi(x) + \text{const}$  при  $x \in V_p$  и  $f(p) = i_p$ ;
- 3)  $\nabla \varphi \cdot \nabla f < 0$  вне множества критических точек.

Вообще говоря, условие 3 не является существенным, оно лишь дает некоторые удобства при численном исследовании моделей поля. Кроме того, иногда его дополняют предположением об инвариантности границы фотосферы относительно порождаемого потока (компонента  $B_z$  магнитного поля равна нулю).

Как показано в [5] и [18] модель ТМЗ приводит к рассмотрению сформулированных во введении задач для векторных полей, порождающих потоки со следующими свойствами:

- 1) каждый поток  $\mathbf{F}^t$  не имеет замкнутых траекторий и его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических состояний равновесия;
- 2) поток  $\mathbf{F}^t$  допускает самоиндексирующуюся энергетическую функцию  $f : S^3 \rightarrow [0, 3]$ .

Будем обозначать через  $G$  множество потоков со свойствами 1) и 2). Заметим, что потоки из  $G$  не обязательно являются структурно устойчивыми.

На рис. 3.1 показан скелет магнитного поля с одним источником, двумя стоками и тремя нулевыми точками, построенный в соответствии с моделью ТМЗ.

### 3.2. Энергетическая функция и топологическая классификация

Самоиндексирующуюся энергетическую функцию потоков из класса  $G$  можно использовать для топологической классификации этих потоков.

Рассмотрим векторное поле, порождающее поток из класса  $G$ . Пусть  $\Omega_0$  – множество источников,  $\Omega_3$  – множество стоков,  $\Omega_{1,2}$  – множество седел индексов 1 и 2, соответственно. Если  $f$  – самоиндексирующаяся энергетическая функция, соответствующая этому полю, то  $\Sigma = f^{-1}(3/2)$ . Из предположений модели ТМЗ следует, что число особенностей поля удовлетворяет соотношению

$$n_\alpha - n_\sigma^2 = n_\omega - n_\sigma^1, \quad (3.1)$$

где  $n_\alpha$  – число источников,  $n_\omega$  – число стоков,  $n_\sigma^1$  – число седел индекса 1,  $n_\sigma^2$  – число седел индекса 2. Оно является следствием равенства нулю суммы индексов особых точек векторного поля на трехмерном замкнутом многообразии. Равенство (3.1) определяет топологию поля с точностью до числа гетероклинических пересечений устойчивых и неустойчивых двумерных сепаратрис. Далее, пусть

$$g = \frac{n_\sigma^1 + n_\sigma^2 - n_\alpha - n_\omega + 2}{2}.$$

Тогда для произвольного потока из  $G$  справедливы следующие утверждения ([18], лемма 2):

1.  $g$  – целое неотрицательное число;
2. поток имеет не менее  $g$  седел индекса 1, устойчивое многообразие которых содержит гетероклиническую траекторию;
3. поверхность уровня энергетической функции  $\Sigma$  является замкнутой ориентируемой поверхностью рода  $g$ .



Энергетическая функция потоков из класса  $G$  является полным топологическим инвариантом в следующем смысле.

**О п р е д е л е н и е 3.1.** Говорят, что самоиндексирующиеся энергетические функции  $f$  и  $f'$  потоков  $F^t$  и  $F'^t$  согласованно топологически эквивалентны, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм  $H : S^3 \rightarrow S^3$  такой, что

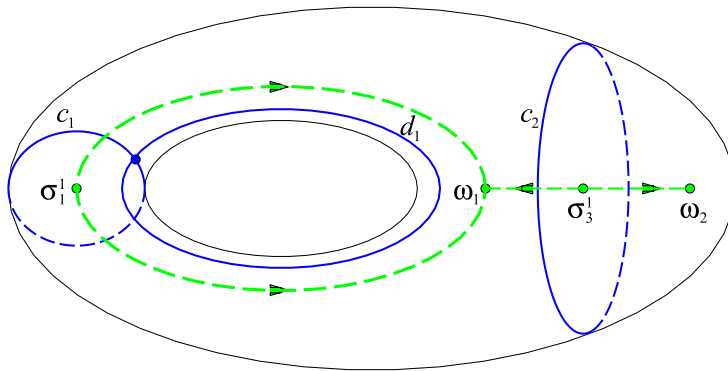
1.  $f' \circ H = f$ ;
2.  $H(W_{\Omega_1}^s \cap \Sigma) = W_{\Omega'_1}^s \cap \Sigma'$ ,  $H(W_{\Omega_2}^u \cap \Sigma) = W_{\Omega'_2}^u \cap \Sigma'$ .

Два потока из класса  $G$  топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их энергетические функции согласованно топологически эквивалентны ([18], теорема 3).

### 3.3. Градиентно-подобные потоки

Как было отмечено выше, потенциальные векторные поля порождают потоки, которые не обязательно являются структурно устойчивыми. С другой стороны, как было показано С. Смейлом ([19], теорема А), градиентный поток, порождаемый функцией Морса, может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в  $C^1$ -топологии) *градиентно-подобным потоком*. Напомним, что градиентно-подобные потоки это потоки Морса-Смейла, у которых отсутствуют замкнутые траектории. Градиентно-подобные потоки структурно устойчивы, для потоков на трехмерной сфере существует полная топологическая классификация (см., например, [20]). В силу этого можно считать, что структурно устойчивые конфигурации магнитных полей, удовлетворяющих требованиям модели ТМЗ, представляются градиентно-подобными потоками.

В каком смысле равенство (3.1) является топологическим инвариантом градиентно-подобных потоков? При фиксированном числе источников и стоков это уравнение имеет целочисленные решения вида  $n_\sigma^1 + m$ ,  $n_\sigma^2 + m$ ,  $m = 0, 1, \dots$ . Покажем, что каждому  $m$  соответствует структурно устойчивая конфигурация интегральных кривых.



Р и с у н о к 3.2

Окрестность аттрактора (штриховые линии) для поля, скелет которого изображен на рис. 3.1

Для различения топологически не эквивалентных конфигураций будем использовать топологический инвариант градиентно-подобных потоков на трехмерных многообразиях, предложенный в работе [20].

Обозначим через  $W_a^u$ ,  $W_a^s$  неустойчивое и устойчивое интегральное многообразие точки  $a$ . Объединение  $A$  стоков, седел индекса 1 и их неустойчивых сепаратрис является

аттрактором<sup>14</sup> потока, порождаемого рассматриваемым векторным полем (соответственно, объединение  $R$  источников, седел индекса 2 и их устойчивых сепаратрис является репеллером потока).

Известно [21], что граница  $F$  трубчатой окрестности множества  $A$  представляет собой ориентированную поверхность рода  $n_\sigma^1 - n_\omega + 1$ , которая задает разбиение Хегора<sup>15</sup> сферы  $S^3$ . Пересечения

$$\{c_k = W_{\sigma_k^1}^s \cap F, k = 1, 2, \dots, n_\sigma^1\}$$

представляют собой набор непересекающихся простых замкнутых кривых на поверхности  $F$ . Еще один набор замкнутых кривых на  $F$  дают пересечения

$$\{d_k = W_{\sigma_k^2}^u \cap F, k = 1, 2, \dots, n_\sigma^2\}.$$

По построению число гетероклинических интегральных кривых равно числу пересечений кривых первого набора с кривыми из второго набора (рис. 3.2).

Тогда, согласно теореме 1 из [20], поверхность  $F$  с первым и вторым наборами замкнутых кривых является полным топологическим инвариантом потока, порождаемого векторным полем: две конфигурации интегральных кривых орбитально топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существует гомеоморфизм  $h : F \rightarrow F'$ , который переводит первый набор окружностей в первый, а второй во второй. Алгоритм проверки существования гомеоморфизма  $h$  приведен в упомянутой работе [20].

**З а м е ч а н и е 3.1.** Каждому  $t$  соответствует счетное число топологически не эквивалентных конфигураций интегральных кривых, т.к. число гетероклинических траекторий потока Морса-Смейла – топологический инвариант.

#### 4. Простая модель потенциального поля, удовлетворяющая модели ТМЗ

Здесь рассматривается простая, но очень популярная модель магнитного поля, порождаемая потенциалом, имеющим конечное число источников поля. Потенциал задается положением зарядов в фазовом пространстве и имеет вид

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|}. \quad (4.1)$$

Тогда

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \Phi(\mathbf{r}) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_k}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|^3}. \quad (4.2)$$

Это поле имеет  $n$  источников с интенсивностями  $\alpha_k$ , расположенных в точках  $\mathbf{r}_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ . Условие бездивергентности  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  выполняется всюду, кроме источников поля. В равенстве (4.2) подразумевается баланс источников поля, то есть сумма

<sup>14</sup> Замкнутое множество  $A$  называется *аттрактором* потока  $f^t$ , если оно имеет компактную окрестность  $U_A$  такую, что  $f^t(U_A) \subset \operatorname{int} U_A$  и  $A = \bigcap_{t \geq 0} f^t(U_A)$ . Множество  $R$  называется *репеллером*, если оно

– аттрактор потока  $f^{-t}$ .

<sup>15</sup> Разбиение Хегора замкнутого трехмерного многообразия – представление его в виде объединения двух трехмерных многообразий с общим краем, каждое из которых является полным кренделем (handlebody).

интенсивностей всех источников равна нулю. В случае неравенства нулю этой суммы добавляется источник соответствующей интенсивности, расположенный в бесконечно удаленной точке.

В этой модели магнитное поле в источниках принимает бесконечные значения. Однако, как было отмечено выше, поведение силовых линий в окрестности источников не отличается от поведения этих линий в окрестности притягивающих (отталкивающих) нулевых точек поля. Построим векторное поле, эквивалентное полю (4.2), такое что все источники являются нулевыми точками. В физике ей соответствуют так называемая *процедура регуляризации* в окрестности источников.

Пусть  $a(\mathbf{r}) = \prod_{k=1}^n \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|^3$ . Тогда уравнение (2.3) можно представить в виде

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{a(\mathbf{r})} \sum_{k=1}^n \alpha_k (\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) a(\mathbf{r}) / \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\|^3 = \frac{1}{a(\mathbf{r})} \mathbf{Q}(\mathbf{r}).$$

Ясно, что уравнение  $\mathbf{Q}(\mathbf{r}) = 0$  определяет нули поля  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  и имеет, кроме этого, простые нули в точках  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ .

Пусть  $\epsilon > 0$ , для любого  $k = 1, 2, \dots, n$  найдем шар  $U_k(\epsilon)$  радиуса  $\rho(\epsilon)$  с центром в точке  $\mathbf{r}_k$  такой, что  $a(\mathbf{r}) < \epsilon$  для всех  $\mathbf{r} \in U_k(\epsilon)$ . Очевидно, что  $\rho(\epsilon) \rightarrow 0$  при  $\epsilon \rightarrow 0$ . Рассмотрим векторное поле

$$\mathbf{B}_\epsilon(\mathbf{r}) = \frac{1}{a(\mathbf{r}, \epsilon)} \mathbf{Q}(\mathbf{r}), \quad (4.3)$$

где  $a(\mathbf{r}, \epsilon) = a(\mathbf{r}) + \epsilon \sum_{k=1}^n b_k(\mathbf{r})$ , а  $b_k : \bar{U}_k(\epsilon) \rightarrow [0, 1]$  —  $C^\infty$ -функция такая, что

1.  $b_k(\mathbf{r}) = 1$  при  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\| \leq \frac{\rho(\epsilon)}{2}$ ,
2.  $0 < b_k(\mathbf{r}) < 1$  при  $\frac{\rho(\epsilon)}{2} < \|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\| < \rho(\epsilon)$ ,
3.  $b_k(\mathbf{r}) = 0$  при  $\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_k\| \geq \rho(\epsilon)$ .

Определенное таким образом поле  $\mathbf{B}_\epsilon(\mathbf{r})$  имеет те же самые нули, что и поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ , бездивергентно в области  $S^3 \setminus \bigcup_{k=1}^n U_k(\epsilon)$  и имеет в качестве источников-стоков простые нулевые точки  $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ .

Как связаны векторные поля (4.2) и (4.3)? Ответ дает следующая теорема.

**Т е о р е м а 4.1.** *Поле  $\mathbf{B}(\mathbf{r})$  орбитально топологически эквивалентно полю  $\mathbf{B}_\epsilon(\mathbf{r})$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $h : S^3 \rightarrow S^3$  — отображение, задаваемое следующим образом. Вне окрестностей  $U_k(\epsilon)$   $h$  — тождественное отображение, так как интегральные кривые обоих полей совпадают.

В окрестности  $U_k(\epsilon)$  все интегральные кривые уравнения (2.1) входят в источник  $\mathbf{r}_k$  или выходят из него, причем достигают источник за конечное “время”, зависящее, вообще говоря, от начальных данных<sup>16</sup>.

<sup>16</sup> В простейшем случае одного источника уравнение (2.1) в сферических координатах  $(\varphi, \theta, \rho = \|\mathbf{r}\|)$  записывается в виде системы

$$\dot{\varphi} = 0, \quad \dot{\theta} = 0, \quad \dot{\rho} = \frac{\alpha}{\rho^2},$$

Рассмотрим интегральные кривые полей  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{B}_\varepsilon$  с одинаковыми начальными данными на границе шара  $U_k(\varepsilon): (\varphi_0, \theta_0, \rho(\varepsilon))$ . Тогда гомеоморфизм  $h: U_k(\varepsilon) \rightarrow U_k(\varepsilon)$  строится следующим образом. Пусть  $\mathbf{F}_{\mathbf{B}_\varepsilon}^s(\mathbf{r}_0)$  – интегральная кривая уравнения

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{B}_\varepsilon(\mathbf{r}) \quad (4.4)$$

с начальным значением  $\mathbf{r}_0$ . Сопоставим точке  $\mathbf{F}_{\mathbf{B}_\varepsilon}^s(\phi_0, \theta_0, \rho(\varepsilon))$  точку на интегральной кривой поля  $\mathbf{B}$  с параметром  $s_k s / (s_k - s)$ , где  $s_k(\phi_0, \theta_0, \rho(\varepsilon))$  – “время” достижения точки  $\mathbf{r}_k$ . Так как функция  $s_k(\phi_0, \theta_0, \rho(\varepsilon))$  непрерывна, то это соответствие будет не только взаимно однозначным, но и непрерывным.

Далее, при  $\mathbf{r} \in U_k(\varepsilon)$  уравнение (4.4) представляет собой сингулярно возмущенное уравнение

$$a(\mathbf{r}, \varepsilon) \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{Q}(\mathbf{r}), \quad (4.5)$$

имеющее единственное положение равновесия, которое асимптотически устойчиво (неустойчиво). Пусть  $\mathbf{r}(s, \mathbf{r}_0, \varepsilon)$  – решение (4.5) с начальным значением  $\mathbf{r}_0 = (\varphi_0, \theta_0, \rho(\varepsilon))$ . Тогда согласно классической теореме А.Н. Тихонова [22]  $\mathbf{r}(s, \mathbf{r}_0, \varepsilon) \rightarrow \mathbf{r}_k$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Отсюда следует, что отображение  $h$  мало отличается от тождественного и непрерывно.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

**Благодарности.** Авторы выражают благодарность В.З. Гринесу, Е.В. Жужоме и Е.Я. Гуревич за внимание к работе и полезные обсуждения. Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 15-01-03687.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Наука, М., 1982.
2. В.И. Арнольд, В.С. Афраймович, Ю.С. Ильяшенко, Л.П. Шильников, *Теория бифуркаций. Итоги науки и техники. Совер. пробл. математики. т. 5.*, Наука, М., 1985.
3. В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, О.В. Починка, “О существовании магнитных линий, соединяющих нулевые точки”, *Журнал СВМО*, **16:1** (2014), 8–15.
4. В.З. Гринес, Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужома, С.Х. Зинина, “Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса-Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы”, *Нелинейная динамика*, **10:4** (2014), 427–438.
5. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, “On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids”, *Physica D*, **294** (2015), 1–5.
6. Е.В. Жужома, В.С. Медведев, “Рождение сепараторов в магнитных полях”, *Динамические системы*, 2017 (в печати).
7. Э. Прист, Т. Форбс, *Магнитное пересоединение: магнитогидродинамическая теория и приложения*, Физматлит, М., 2005.

общее решение которой имеет вид  $\varphi = \varphi_0, \theta = \theta_0, \rho = (2\alpha_k s + \rho_0^3)^{1/3}$ . Интегральные кривые с начальными данными на границе шара  $U(\varepsilon)$  через конечное значение параметра  $s_0 = \frac{\rho_0^3}{3|\alpha|}$  входят в точку 0.

А. Н. Сахаров, А. А. Шиловская. Потоки Морса-Смейла и модели топологии...

8. D.W. Longcope, “Topological Methods for the Analysis of Solar Magnetic Fields”, *Living Rev. Solar Phys.*, **2:7** (2005), 5–72.
9. М.М. Молоденский, С.И. Сыроватский, “Магнитное поле в активных областях и его нулевые точки”, *Астрономический Журнал*, **54** (1977), 1293–1304.
10. В.С. Горбачев, С.Р. Кельнер, Б.В. Сомов, А.С. Шварц, “Новый топологический подход к вопросу о триггере солнечных вспышек”, *Астрономический журнал*, **65:3** (1988), 601–612.
11. E.R. Priest, V.S. Titov, “Magnetic Reconnection at Three-Dimensional Points”, *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **354** (1996), 2951–2992.
12. D.W. Longcope, “Topology and current ribbons: a model for current, reconnection and flaring in a complex, evolving corona”, *Solar Phys.*, **169:1** (1996), 91–121.
13. H. Alfven, “On sunspots and the solar cycle”, *Arc. F. Math. Astr. Phys.*, **29A** (1943), 1–17.
14. М.Л. Коломиец, А.Н. Сахаров, Е.В. Трегубова, “Топология магнитных полей и динамические системы”, *Журнал СВМО*, **18:1** (2016), 31–44.
15. G. Hornig, K. Schindler, “Magnetic topology and the problem of its invariant definition”, *Physics of Plasmas*, **3** (1996), 781–793.
16. В.И. Арнольд, *Математические методы классической механики*, Наука, М., 1974.
17. А.Т. Фоменко, *Дифференциальная геометрия и топология*, Издательство МГУ, М., 1983.
18. V. Grines, O. Pochinka, “Topological Classification of Global Magnetic Fields in the Solar Corona”, *Solar Physics*, 2017 (in press).
19. S. Smale, “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math.*, **74:1** (1961), 199–206.
20. А.О. Пришляк, “Векторные поля Морса-Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях”, *Матем. заметки*, **71:2** (2002), 254–260.
21. В.З. Гринес, Е.В. Жужома, В.С. Медведев, “Новые соотношения для систем Морса-Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сборник*, **194:7** (2003), 25–56.
22. А.Н. Тихонов, “О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра”, *Матем. сб.*, **22:2** (1948), 193–204.

Поступила 10.04.2017

MSC2010 37C15

# Morse-Smale flows and the model of the topology of magnetic fields in plasma

© A. N. Sakharov<sup>17</sup>, A. A. Shilovskaya<sup>18</sup>

**Abstract.** This article is a continuation of the work [14] and is devoted to the presentation of results related to the construction of models of magnetic fields in an electrically conductive medium (plasma) in terms of dynamic systems. Research in this direction has been intensively pursued over the past 20 years. Since the solution of magnetic hydrodynamics' equations is associated with certain difficulties approximate models of magnetic fields are used. A class of vector fields' models is constructed, united by the common name *model of the topology of magnetic charges*. Fields from this class generate continuous dynamical systems (flows) on three-dimensional manifolds with a sufficiently simple structure. First, the non-wandering set is finite and consists of hyperbolic equilibrium states. Second, these flows allow the existence of a so-called self-indexing energy function that allows them to be completely topologically classified. In addition, fields of this class may be arbitrarily closely approximated by vector fields generating structurally stable flows. Particular attention is paid to the fields in the corona of the Sun, which is associated with the actual problem of energy release estimation in solar flares.

**Key Words:** singular points of the field, magnetic field lines, sources, sinks, separatrix, separators, heteroclinic curves.

## REFERENCES

1. L.D. Landau, E.M. Lifshits, *Elektrodinamika sploshnykh sred [Continuum electrodynamics]*, Nauka, M., 1982 (In Russ).
2. V.I. Arnold, V.S. Afraimovich, U.C. Iliashenko, L.P. Shilnikov, *Teoriya bifurkatsiy [Bifurcation theory]. Itogi nauki i tekhniki. Sovr. prob. matematiki. m. 5.*, Nauka, M., 1985 (In Russ).
3. V.Z. Grines, E.V. Zhuzhoma, V.S. Medvedev, O.V. Pochinka, "[On the existence of magnetic lines connecting the zero points]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **16**:1 (2014), 8–15 (In Russ).
4. V.Z. Grines, E.Ya. Gurevich, E.V. Zhuzhoma, S.H. Zinina, "[Heteroclinic curves of Morse-Smale diffeomorphisms and separators in a magnetic field of a plasma]", *Nelineynaya dinamika*, **10**:4 (2014), 427–438 (In Russ).
5. V. Grines, T. Medvedev, O. Pochinka, E. Zhuzhoma, "[On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids]", *Physica D*, **294** pages 1–5 (2015).
6. E.V. Zhuzhoma, V.S. Medvedev, "[The birth of separators in magnetic fields]", *Dinamicheskie sistemy*, 2017 (в печати) (In Russ).

<sup>17</sup> **Alexandr N. Sakharov**, Assistant professor of department of higher mathematic and theoretical mechanics, FGBOU VO "Nizhegorodskaya State Agricultural Academy"(603107, Russia, Nizhny Novgorod, Gagarin Avenue, 97), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-4520-8062>, [ansakharov2008@yandex.ru](mailto:ansakharov2008@yandex.ru)

<sup>18</sup> **Anna A. Shilovskaia**, postgraduate student of the Department of differential equations, mathematical and numerical analysis, Institute of Informational Technology, Mathematics and Mechanics, N.I. Lobachevsky State University (23 Gagarin Av., Nizny Novgorod 603950, Russia), ORCID:<http://orcid.org/0000-0002-3328-8157>, [a.shilovskaia@gmail.com](mailto:a.shilovskaia@gmail.com)

7. E. Priest, T. Forbes, *Magnetic reconnection: magnetohydrodynamic theory and applications*, Phizmatlit, M., 2005 (In Russ).
8. D.W. Longcope, “Topological Methods for the Analysis of Solar Magnetic Fields”, *Living Rev. Solar Phys.*, **2**:7 (2005), 5–72.
9. M.M. Molodenskiy, S.I. Syrovatskiy, “[Magnetic field in active regions and its zero points]”, *Astronomicheskii Zhurnal*, **54** (1977), 1293–1304 (In Russ).
10. V.S. Gorbachev, S.R. Kelner, B.V. Somov, A.S. Shvarts, “[A new topological approach to the problem of the trigger of solar flares]”, *Astronomicheskii Zhurnal*, **65**:3 (1988), 601–612 (In Russ).
11. E.R. Priest, V.S. Titov, “Magnetic Reconnection at Three-Dimensional Points”, *Phil. Trans. R. Soc. A.*, **354** (1996), 2951–2992.
12. D.W. Longcope, “Topology and current ribbons: a model for current, reconnection and flaring in a complex, evolving corona”, *Solar Phys.*, **169**:1 (1996), 91–121.
13. H. Alfven, “On sunspots and the solar cycle”, *Arc. F. Math. Astr. Phys.*, **29A** (1943), 1–17.
14. M.L. Kolomiets, A.N. Sakharov, E.V. Tregubova, “[The topology of magnetic fields and dynamical systems]”, *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, **18**:1 (2016), 31–44 (In Russ).
15. G. Hornig, K. Schindler, “Magnetic topology and the problem of its invariant definition”, *Physics of Plasmas*, **3** (1996), 781–793.
16. V.I. Arnold, *[Mathematical methods of classical mechanics]*, Nauka, M., 1974 (In Russ).
17. A.T. Fomenko, *Diffentsialnaya geometriya i topologiya [Differential geometry and topology]*, MGU publ., M., 1983 (In Russ).
18. V. Grines, O. Pochinka, “[Topological Classification of Global Magnetic Fields in the Solar Corona]”, *Solar Physics*, 2017 (in press).
19. S. Smale, “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math.*, **74**:1 (1961), 199–206.
20. A.O. Prishlyak, “[Vector Morse-Smale fields without closed trajectories on three-dimensional manifolds]”, *Matem. zametki*, **71**:2 (2002), 254–260 (In Russ).
21. V.Z. Grines, E.V. Zhuzoma, V.S. Medvedev, “[New relations for Morse-Smale systems with trivially embedded one-dimensional separatrices]”, *Matem. sbornik*, **194**:7 (2003), 25–56 (In Russ).
22. A.N. Tihonov, “[On the dependence of solutions of differential equations on a small parameter]”, *Matem. sbornik*, **22**:2 (1948), 193–204 (In Russ).

*Submitted 10.04.2017*

УДК 517.9

# Достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и ее приложение к устойчивости по части переменных

© П. А. Шаманаев<sup>1</sup>, О. С. Язовцева<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье получены достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности для систем нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов. Метод доказательства основан на построении в банаховом пространстве оператора, связывающего решения нелинейной системы и ее линейного приближения, и применении принципа Шаудера о неподвижной точке. Существование построенного оператора доказывается с использованием покомпонентных оценок элементов фундаментальной матрицы линейного приближения. Оператор позволяет построить отображение, устанавливающее соотношение между начальными точками исследуемой системы и ее линейного приближения. Приведены достаточные условия устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевых решений локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем по Брауэру. В качестве приложения рассмотрена задача об устойчивости по части переменных множества положений равновесия системы нелинейных уравнений, соответствующей кинетической модели некоторых стадий компактной схемы реакции пиролиза пропана. Поставленная задача сводится к исследованию устойчивости тривиального положения равновесия нелинейной системы, совпадающей с исследуемой системой. Далее показано, что нелинейная система локально покомпонентно асимптотически эквивалентна по Брауэру ее линейному приближению. С учетом того, что нулевое решение линейного приближения асимптотически устойчиво по первым двум компонентам и имеет асимптотическое равновесие по остальным компонентам, делается вывод о том, что каждое положение равновесия исследуемой системы так же обладает этими свойствами.

**Ключевые слова:** нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность по Брауэру, принцип Шаудера о неподвижной точке, устойчивость по части переменных, химическая кинетика.

## 1. Введение

Идея разбиения множества систем обыкновенных дифференциальных уравнений на классы эквивалентности на основе асимптотического поведения их решений принадлежит А.М. Ляпунову [1]. Если поведение решений рассматривается при  $t \rightarrow \infty$ , эквивалентность носит название асимптотической эквивалентности. Этому направлению посвящены работы [2]–[8]. В работах [2]–[3] для классификации нелинейных систем введены понятия покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру и Левинсону относительно некоторых эталонных функций.

<sup>1</sup> **Шаманаев Павел Анатольевич**, доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, [korspa@yandex.ru](mailto:korspa@yandex.ru)

<sup>2</sup> **Язовцева Ольга Сергеевна**, аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО "МГУ им. Н. П. Огарёва" (430005, Россия, Республика Мордовия, г. Саранск, ул. Большевикская, д. 68.), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8075-4491>, [kurinaos@gmail.com](mailto:kurinaos@gmail.com)



В настоящей работе продолжено развитие идей Е.В. Воскресенского [2] о покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру и Левинсону относительно некоторых функций нелинейных систем в некоторой области фазового пространства. Введенные определения позволяют распространить методику на более широкий класс нелинейных систем, чем в работах [2]-[3]. В работе получены достаточные условия локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауэру для нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов.

Рассмотрим множество  $\Xi$  всех систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x), \quad (1.1)$$

где  $x \in R^n$ ,  $f \in C^{(0,1)}([T, +\infty) \times R^n, R^n)$ ,  $T \geq 0$ ,  $f(t, 0) \equiv 0$ .

Будем считать, что у системы вида (1.1) из множества  $\Xi$  существует совокупность решений  $x(t : t_0, x^{(0)})$ , определённых при всех  $t \geq t_0 \geq T$  и  $x^{(0)} \in D \subseteq R^n$ , где  $D$  — некоторая область пространства  $R^n$ , содержащая окрестность нуля.

Обозначим через  $x(t : t_0, x^{(0)})$  и  $y(t : t_0, y^{(0)})$  решения с начальными данными  $(t_0, x^{(0)})$  и  $(t_0, y^{(0)})$  соответственно системы дифференциальных уравнений (1.1) и системы

$$\frac{dy}{dt} = g(t, y), \quad (1.2)$$

принадлежащей множеству  $\Xi$ .

Следующие определения развивают идеи Е.В. Воскресенского из работ [2]-[3].

**О п р е д е л е н и е 1.1.** Системы обыкновенных дифференциальных уравнений (1.1) и (1.2) будем называть локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауэру относительно функции  $\mu_i(t)$ , если при фиксированном  $t_0 \geq T$  существуют два отображения  $P^{(1)} : V \rightarrow U$  и  $P^{(2)} : U \rightarrow V$  такие, что

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, P^{(2)}x^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \quad (1.3)$$

$$y_i(t : t_0, y^{(0)}) = x_i(t : t_0, P^{(1)}y^{(0)}) + o(\mu_i(t)), \quad (1.4)$$

при  $t \rightarrow \infty$  для всех  $i \in M_0 \subseteq N$ ,  $N = \{1, \dots, n\}$ . Здесь  $x_i(t : t_0, x^{(0)})$ ,  $y_i(t : t_0, y^{(0)})$  —  $i$ -ые компоненты решений, для которых  $x^{(0)} \in U$ ,  $y^{(0)} \in V$ ,  $U, V \subseteq D$  — некоторые области, содержащие окрестность нуля,  $\mu : [T, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ .

**О п р е д е л е н и е 1.2.** Если в определении 1.1. положить  $M_0 = N$ , то системы (1.1) и (1.2) будем называть локально асимптотически эквивалентными по Брауэру относительно функций  $\mu_i(t)$ .

**З а м е ч а н и е 1.1.** Определение 1.2. обобщает определение локально асимптотически эквивалентных систем по Брауэру относительно функции  $\mu(t)$  из работы [2]. Для этого достаточно в определении 1.2. положить  $\mu_i(t) \equiv \mu(t)$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

**О п р е д е л е н и е 1.3.** Будем говорить, что система (1.1) имеет локальное асимптотическое равновесие по компонентам  $i$ ,  $i \in M_0 \subseteq N$ , если каждое ее решение  $x_i(t : t_0, x^{(0)})$ ,  $x^{(0)} \in U \subseteq R^n$ , обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_i(t : t_0, x^{(0)}) = b_i < \infty, \quad i \in M_0, \quad (1.5)$$

и, наоборот, для любых чисел  $b_i$ ,  $i \in M_0$ , таких, что  $b = colon(b_1, \dots, b_n) \in V \subseteq D$ , существует решение  $x_i(t : t_0, x^{(0)})$ ,  $x^{(0)} \in U \subseteq D$ , системы (1.1) такое, что справедливо равенство (1.5).

**О п р е д е л е н и е 1.4.** Если в определении 1.3. положить  $M_0 = N$ , то будем говорить, что система (1.1) имеет локальное асимптотическое равновесие.

В работе [2] приведены достаточные условия устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевых решений асимптотически эквивалентных систем по Брауэру, исходя из свойств правых частей исследуемых систем. Сформулируем достаточные условия устойчивости (асимптотической устойчивости) нулевых решений локально покомпонентно асимптотически эквивалентных систем по Брауэру, исходя из определения (1.1.).

**Т е о р е м а 1.1.** Пусть системы (1.1) и (1.2) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауэру относительно функций  $\mu_i(t)$ , причем отображения  $P^{(1)}$  и  $P^{(2)}$  являются непрерывными в нуле и справедливы равенства

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, P^{(2)}x^{(0)}) + \mu_i(t)\delta_i(t : t_0, x^{(0)}), \quad (1.6)$$

$$y_i(t : t_0, x^{(0)}) = x_i(t : t_0, P^{(1)}y^{(0)}) + \mu_i(t)\gamma_i(t : t_0, y^{(0)}), \quad (1.7)$$

$i \in M_0$ ,  $\delta_i(t : t_0, x^{(0)})$  и  $\gamma_i(t : t_0, y^{(0)})$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x^{(0)}$  и  $y^{(0)}$ , соответственно. Тогда, если у одной системы существует устойчивое (асимптотически устойчивое) нулевое решение по компонентам  $i \in M_0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_i(t) = d_i, d_i \in R^1$  ( $\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_i(t) = 0$ ), то вторая система имеет так же устойчивое (асимптотически устойчивое) нулевое решение по компонентам  $i \in M_0$ ; кроме того, если одна система имеет локальное асимптотическое равновесие по компонентам  $i \in M_0$ , то этим же свойством будут обладать решения второй системы.

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 1.2.1 из работы [2].

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим нелинейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов из множества  $\Xi$

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(x), \quad (2.1)$$

где  $A$  – постоянная  $(n \times n)$ -матрица,

$$P(x) = \begin{pmatrix} P_1(x) \\ \dots \\ P_n(x) \end{pmatrix}, \quad P_j(x) = \sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} x^p, \quad x^p = x_1^{p_1} x_2^{p_2} \dots x_n^{p_n}, \quad \sigma \geq 2, \quad |p| = p_1 + \dots + p_n;$$

и ее линейное приближение

$$\frac{dy}{dt} = Ay. \quad (2.2)$$

Разобьём множество  $N = \{1, \dots, n\}$  на  $r$  непересекающихся подмножеств:

$$\begin{aligned} N_1 &= \{1, 2, \dots, l_1\}, \\ N_2 &= \{l_1 + 1, \dots, l_2\}, \\ &\dots, \\ N_r &= \{l_{r-1} + 1, \dots, l_r = n\}. \end{aligned}$$

Пусть собственные значения  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ) матрицы  $A$  имеют следующие вещественные части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_1 &= \dots = \operatorname{Re} \lambda_{l_1} = \Lambda_1, \\ \operatorname{Re} \lambda_{l_1+1} &= \dots = \operatorname{Re} \lambda_{l_2} = \Lambda_2, \\ &\dots \\ \operatorname{Re} \lambda_{l_{r-1}+1} &= \dots = \operatorname{Re} \lambda_{l_r} = \Lambda_r, \end{aligned}$$

такие что  $\Lambda_1 < \Lambda_2 < \dots < \Lambda_r$ .

Тогда фундаментальную матрицу системы (2.2) можно представить в виде

$$Y(t) = [y^{(1)}(t), y^{(2)}(t), \dots, y^{(n)}(t)],$$

где  $y^{(j)}(t)$  – вектор-функции размерности  $n$ , представляющие собой линейно независимые решения системы (2.2), такие, что при  $j \in N_k, k = \overline{1, r}$ , справедливы неравенства [9]

$$\|y^{(j)}(t - t_0)\| \leq De^{(\Lambda_k + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad (2.3)$$

$$\|y^{(j)}(t - t_0)\| \leq De^{(\Lambda_k - \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \leq t_0, \quad (2.4)$$

где  $\varepsilon > 0$  – достаточно малое вещественное число.

Рассмотрим  $i$ -ую строку фундаментальной матрицы  $Y(t)$ . Учитывая (2.3), получим оценку для элементов фундаментальной матрицы

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq De^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \geq t_0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.5)$$

где  $\beta_i$  принимает максимальное значение из чисел  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$  при оценке элементов  $y_{ij}(t)$ , по тем индексам  $j$ , для которых  $y_{ij}(t) \neq 0$ .

Учитывая оценку (2.4), аналогично получим

$$|y_{ij}(t - t_0)| \leq De^{(\alpha_i - \varepsilon)(t - t_0)}, \quad t \leq t_0, \quad j = \overline{1, n}, \quad (2.6)$$

где  $\alpha_i$  принимает минимальное значение из чисел  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_r$  при оценке элементов  $y_{ij}(t)$ , по тем индексам  $j$ , для которых  $y_{ij}(t) \neq 0$ .

Ставится задача о получении достаточных условий локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности систем (2.1) и (2.2) по Брауеру.

### 3. Локальная покомпонентная асимптотическая эквивалентность и устойчивость по части переменных нелинейных систем с возмущениями в виде векторных полиномов

Не ограничивая общности, будем считать, что множество  $M_0 = \{1, \dots, q\}$ . В случае, если  $M_0$  состоит из произвольного набора чисел  $i_1, i_2, \dots, i_q$  из множества  $N$ , то можно сделать перенумерацию компонентов  $x_i$  вектора  $x$ .

**Т е о р е м а 3.1.** Если выполняются неравенства

$$p_1\beta_1 + \dots + p_n\beta_n < \alpha_i, \quad i \in M_0, \quad (3.1)$$

$$p_1\beta_1 + \dots + p_n\beta_n < \beta_i, \quad i \in N \setminus M_0, \quad (3.2)$$

по всем наборам  $(p_1, \dots, p_n)$  таким, что  $d_p^{(j)} \neq 0, j = \overline{1, n}$ , то системы (2.1) и (2.2) являются локально покомпонентно асимптотически эквивалентными по Брауеру относительно функций  $\mu_i(t) = e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}$ ,  $i \in M_0$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Изложение доказательства будем проводить согласно работам [2]-[3].

Построим банахово пространство

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C([T, +\infty), R^n), |\varphi_i(t)| \leq ce^{(\beta_i + \varepsilon)(t-t_0)}, t \geq t_0, \varepsilon > 0, c \in R_+^1, i = \overline{1, n}\}.$$

В пространстве  $\Omega$  введем норму

$$\|\varphi\|_\Omega = \max_{i=\overline{1, n}} \sup_{t \geq t_0} \{|\varphi_i(t)| e^{-(\beta_i + \varepsilon)(t-t_0)}\}. \quad (3.3)$$

Определим на  $\Omega$  оператор

$$L\varphi = y(t) - \int_t^{+\infty} Y_1(t-s)P(\varphi(s))ds + \int_{t_0}^t Y_2(t-s)P(\varphi(s))ds, \quad (3.4)$$

где  $y(t) = Y(t-t_0)y^{(0)}$ ,

$$Y(t) = Y_1(t) + Y_2(t), \quad Y_1(t) = Y(t)I_1 \equiv \begin{bmatrix} \tilde{Y}_1(t) \\ O_1 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = Y(t)I_2 \equiv \begin{bmatrix} O_2 \\ \tilde{Y}_2(t) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

где  $I_1, I_2$  – операторы, обнуляющие элементы матрицы  $Y(t)$  с  $q+1$ -ую по  $n$ -ую и с 1-ой по  $q$ -ую строки соответственно;  $\tilde{Y}_1(t)$  – матрица размерности  $q \times n$ ,  $\tilde{y}_1^{ij}(t) \equiv y_{ij}(t)$ ,  $i = \overline{1, q}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;  $\tilde{Y}_2(t)$  – матрица размерности  $(n-q) \times n$ ,  $\tilde{y}_2^{ij}(t) \equiv y_{ij}(t)$ ,  $i = q+1, n$ ,  $j = \overline{1, n}$ ;  $O_1, O_2$  – нулевые матрицы размерности  $(n-q) \times n$  и  $q \times n$  соответственно.

Для компонент решения системы (2.2) справедливы оценки

$$|y_i(t)| \leq \sum_{j=1}^n |y_{ij}(t-t_0)| |y_j^{(0)}| \leq De^{(\beta_i + \varepsilon)(t-t_0)} \|y^{(0)}\|, \quad t \geq t_0, i = \overline{1, n}.$$

Рассмотрим шар

$$\Omega_0 = \{\varphi : \|\varphi\|_\Omega \leq c_0, c_0 \in R_+^1\}$$

с достаточно малым  $c_0$  и покажем, что  $L : \Omega_0 \rightarrow \Omega_0$ .

Пусть  $\|\varphi\|_\Omega \leq c_0$ . Тогда справедлива следующая оценка для  $i$ -х компонент ( $i \in M_0$ ) оператора  $L$

$$\begin{aligned} |(L\varphi)_i| &\leq e^{(\beta_i + \varepsilon)(t-t_0)} \left[ D\|y^{(0)}\| + D \sum_{j=1}^n \sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} D^{|p|} c_0^{|p|} \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_t^{+\infty} \exp\{(-\alpha_i + \varepsilon + p_1\beta_1 + \dots + p_n\beta_n)(s-t_0)\} ds \right], \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Аналогично для индексов  $i \in N \setminus M_0$  выполняется оценка

$$\begin{aligned} |(L\varphi)_i| &\leq e^{(\beta_i + \varepsilon)(t-t_0)} \left[ D\|y^{(0)}\| + D \sum_{j=1}^n \sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} D^{|p|} c_0^{|p|} \right. \\ &\quad \cdot \left. \int_{t_0}^t \exp\{(-\beta_i + \varepsilon + p_1\beta_1 + \dots + p_n\beta_n)(s-t_0)\} ds \right], \quad t \geq t_0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Учитывая условия (3.1) и (3.2), подберем  $t_0$  такое, что при всех  $t \geq t_0$

$$D \sum_{j=1}^n \sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} D^{|p|} c_0^{|p|-1} \int_t^{+\infty} \exp \{(-\alpha_i + \varepsilon + p_1 \beta_1 + \dots + p_n \beta_n)(s - t_0)\} ds \leq \theta_1, \quad (3.8)$$

$$D \sum_{j=1}^n \sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} D^{|p|} c_0^{|p|-1} \int_{t_0}^t \exp \{(-\beta_i + \varepsilon + p_1 \beta_1 + \dots + p_n \beta_n)(s - t_0)\} ds \leq \theta_2. \quad (3.9)$$

Выберем  $y^{(0)}$  такое, что

$$\|y^{(0)}\| \leq \frac{1-\theta}{D} c_0, \quad \text{где } \theta = \max\{\theta_1, \theta_2\}. \quad (3.10)$$

Тогда, учитывая (3.6)-(3.9), получим

$$\|L\varphi\| \leq c_0 e^{(\beta_i + \varepsilon)(t-t_0)} \quad \text{при всех } \varphi \in \Omega_0,$$

и, следовательно,

$$\|L\varphi\|_{\Omega} \leq c_0 \quad \text{при всех } \varphi \in \Omega_0.$$

Отсюда следует, что  $L : \Omega_0 \rightarrow \Omega_0$ .

Покажем, что оператор  $L$  является непрерывным на  $\Omega_0$ . Пусть  $\{\varphi_l\}, l = 1, 2, \dots$  – последовательность функций из  $\Omega_0$ , сходящаяся к  $\varphi \in \Omega_0$ , то есть

$$\|\varphi_l - \varphi\|_{\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty.$$

Так как векторный полином  $P(x)$  является непрерывной вектор-функцией по  $x$ , то

$$\|Y_k(t-s)P(\varphi_l(s)) - Y_k(t-s)P(\varphi(s))\|_{\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty,$$

$k = 1, 2$  при каждом фиксированном  $t \geq t_0$ .

Тогда, применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла [10] к оператору  $L$ , получим

$$\|(L\varphi)_l - L\varphi\|_{\Omega} \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow +\infty.$$

Из оценок (3.6) и (3.7) следует, что множество функций

$$y = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0, \quad (3.11)$$

равномерно ограничено.

Найдем

$$\frac{d}{dt} L\varphi(t) = Ay + P(\varphi(t)) - A \left[ \int_t^{+\infty} Y_1(t-s)P(\varphi(s))ds + \int_{t_0}^t Y_2(t-s)P(\varphi(s))ds \right].$$

С учётом оценок (3.6) и (3.7) имеем

$$\left\| \frac{d}{dt} L\varphi(t) \right\|_{\Omega} \leq c_0$$

при всех  $\|\varphi\|_{\Omega} \leq c_0$ . Тогда

$$\|L\varphi(t_1) - L\varphi(t_2)\|_{\Omega} \leq c_0 \|t_1 - t_2\|_{\Omega},$$

что доказывает равномерную непрерывность множества функций (3.11) на любом компакте из  $[t_0, +\infty)$ .

Следовательно, согласно теореме Арцела [11], множество функций (3.11) является компактным, а оператор  $L$  является вполне непрерывным на  $\Omega_0$ .

Таким образом, все условия принципа Шаудера [11] о существовании неподвижной точки оператора  $L$  выполнены

$$\varphi = L\varphi, \quad \varphi \in \Omega_0, \quad (3.12)$$

где  $\varphi$  – неподвижная точка оператора  $L$ .

С учётом (3.4) уравнение (3.12) имеет вид

$$x(t) = y(t) - \int_t^{+\infty} Y_1(t-s)P(x(s))ds + \int_{t_0}^t Y_2(t-s)P(x(s))ds. \quad (3.13)$$

Из построения оператора  $L$  следует, что если в уравнении (3.13) в качестве  $x(t)$  взять решение  $x(t : t_0, x^{(0)})$  системы (2.1) с начальными данными  $x^{(0)} = x(0)$ , то  $y(t)$  является решением системы (2.2) с начальными данными  $y^{(0)} = y(0)$ . И наоборот, если  $y(t)$  является решением (2.2), то  $x(t)$  является решением (2.1).

Из уравнения (3.13) следует, что отображение

$$y^{(0)} = x^{(0)} + \int_{t_0}^{\infty} Y_1(t_0-s)P(x(s : t_0, x^{(0)}))ds$$

существует и устанавливает соответствие между начальными точками решений  $x(t : t_0, x^{(0)})$  и  $y(t : t_0, y^{(0)})$  систем (2.1) и (2.2).

Следовательно, можно взять  $U = \{u : u \in R^n, \|u\| \leq \varepsilon_1 < c_0\}$ ,  $V = \{v : v \in R^n, \|v\| \leq \varepsilon_2 < \frac{1-\theta}{D}c_0\}$ , а в качестве отображения  $P^{(2)}$

$$P^{(2)}x^{(0)} = x^{(0)} + \int_t^{+\infty} Y_1(t_0-s)P(x(s : t_0, x^{(0)}))ds. \quad (3.14)$$

Существование отображения  $P^{(1)}$  доказывается аналогично рассуждениям из работы [2].

Запишем уравнение (3.13) по компонентам  $i \in M_0$

$$x_i(t : t_0, x^{(0)}) = y_i(t : t_0, y^{(0)}) - \sum_{j=1}^n \int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s)P_j(x(s : t_0, x^{(0)}))ds. \quad (3.15)$$

С учётом (3.6) из (3.13) получим

$$|x_i(t : t_0, x^{(0)}) - y_i(t : t_0, y^{(0)})| \leq c_0 e^{(\beta_i + \varepsilon)(t-t_0)}, \quad t \leq t_0, \quad (3.16)$$

где  $i \in M_0$ ,  $x^{(0)}$  и  $y^{(0)}$  связаны соотношением  $y^{(0)} = P^{(2)}x^{(0)}$ .

Тогда из неравенств (3.16) следует справедливость соотношений (1.3) и (1.4) и, следовательно, системы (2.1) и (2.2) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауэру относительно функций  $\mu_i(t) = e^{(\beta_i + \varepsilon)(t-t_0)}$ ,  $i \in M_0$ .

Доказательство закончено.

**С л е д с т в и е 3.1.** Если неравенства (3.1) выполняются по всем  $i \in N$ , то системы (2.1) и (2.2) являются локально асимптотически эквивалентными по Брауэру по всем компонентам относительно функций  $\mu_i(t) = e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}$ .

**Т е о р е м а 3.2.** Пусть вещественные части собственных значений матрицы  $A$  удовлетворяют условию

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 < \dots < \Lambda_m < \Lambda_{m+1} = \Lambda_r = 0, \quad 1 \leq m \leq r \quad (\Lambda_{r+1} = 0), \quad (3.17)$$

причем, геометрические кратности собственных значений матрицы  $A$  с нулевыми вещественными частями равны 1. Тогда, если справедливы неравенства (3.1) и (3.2) теоремы 3.1, то нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво по компонентам  $i = \overline{1, m}$  и устойчиво по компонентам  $i = \overline{m+1, r}$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим в пространстве  $\Omega$  из теоремы 3.1 операторное уравнение

$$x = \xi + Jx, \quad (3.18)$$

где  $x = x(t : t_0, x^{(0)})$ ,

$$\xi = Y(t - t_0)x^{(0)}, \quad (3.19)$$

$$Jx = \int_{t_0}^t Y(t-s)P(x(s))ds. \quad (3.20)$$

Это уравнение представляет собой интегральную форму записи решения системы (2.1).

Так как по условию теоремы геометрические кратности собственных значений матрицы  $A$  с нулевыми вещественными частями равны 1, то из формул (3.3) определения нормы в пространстве  $\Omega$  следует, что

$$|x_i(t)| \leq \|x\|_{\Omega} e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.21)$$

причем  $x(t) \in \Omega_0$ , как только  $\|x\|_{\Omega} \leq c_0$ .

Учитывая неравенства (3.6)-(3.9), оценим компоненты оператора  $J$

$$|(Jx)_i| \leq \theta \|x\|_{\Omega} e^{(\beta_i + \varepsilon)(t - t_0)}, \quad i = \overline{1, n},$$

откуда

$$\|Jx\|_{\Omega} \leq \theta \|x\|_{\Omega}. \quad (3.22)$$

Здесь вещественное положительное число  $\theta$  определяется из условия

$$D \sum_{j=1}^n \sum_{|p|=2}^{\sigma} d_p^{(j)} D^{|p|} \|x\|_{\Omega}^{|p|-1} \int_{t_0}^t \exp \{(-\beta_i + \varepsilon + p_1 \beta_1 + \dots + p_n \beta_n)(s - t_0)\} ds \leq \theta < 1.$$

Выбирая  $x^{(0)}$  такое, что

$$\|x^{(0)}\| \leq \frac{1 - \theta}{D} c_0, \quad (3.23)$$

оценим  $\xi$ , учитывая условия (3.17),

$$\|\xi\| \leq (1 - \theta) c_0. \quad (3.24)$$

Тогда согласно работе [9] уравнение (3.18) имеет единственное решение, причем справедлива оценка

$$\|x(t)\| \leq D_1 \|x^{(0)}\|, \quad t \geq t_0, \quad D_1 = \frac{D}{1-\theta}. \quad (3.25)$$

Сопоставляя равенства (1.6) и (3.15), получим

$$\mu_i(t) \delta_i(t : t_0, x^{(0)}) = - \sum_{j=1}^n \int_t^{+\infty} y_{ij}(t-s) P_j(x(s : t_0, x^{(0)})) ds. \quad (3.26)$$

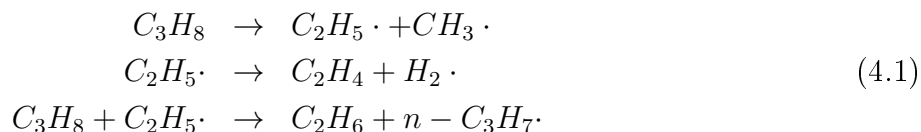
Тогда из оценок (3.16) и (3.25) следует, что  $\delta_i(t : t_0, x^{(0)})$  стремятся к нулю при  $t \rightarrow +\infty$  равномерно по  $x^{(0)}$ .

Таким образом, из теоремы 1.1 и условия (3.17) следует, что нулевое решение системы (2.1) асимптотически устойчиво по компонентам  $i = \overline{1, m}$  и устойчиво по компонентам  $i = \overline{m+1, r}$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

#### 4. Исследование устойчивости по части переменных множества положений равновесия математической модели реакции пиролиза пропана

Рассмотрим кинетическую модель некоторых стадий компактной схемы реакции пиролиза пропана [12]:



Математическая модель реакции имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{c}_1 = -k_1 c_1 - k_3 c_1 c_2 \\ \dot{c}_2 = k_1 c_1 - k_2 c_2 - k_3 c_1 c_2 \\ \dot{c}_3 = k_1 c_1 \\ \dot{c}_4 = k_2 c_2 \\ \dot{c}_5 = k_2 c_2 \\ \dot{c}_6 = k_3 c_1 c_2 \\ \dot{c}_7 = k_3 c_1 c_2 \end{cases}, \quad (4.2)$$

здесь  $t \geq 0$ ,  $c_i$  ( $i = \overline{1, 7}$ ) – концентрации веществ и радикалов  $C_3H_8$ ,  $C_2H_5\cdot$ ,  $CH_3\cdot$ ,  $C_2H_4$ ,  $H_2$ ,  $C_2H_6$ ,  $n-C_3H_7\cdot$ , соответственно,  $k_i > 0$  ( $i = \overline{1, 3}$ ) – константы скоростей химических реакций. Так как концентрации  $c_i$  представляют собой неотрицательные величины, то поведение решений системы достаточно рассматривать при  $c_i \geq 0$ . Не теряя общности, предположим, что  $k_1 > k_2$ .

Приравнивая правую часть системы (4.2) к нулю, находим, что положения равновесия образуют множество точек в пространстве  $R^7$  вида

$$c = colon(0, 0, c_3, c_4, c_5, c_6, c_7), \quad (4.3)$$

где  $c_i \in R_+^1, i = \overline{3, 7}$ .



Фиксируя некоторые  $c_i^*$ ,  $i = \overline{3, 7}$ , исследуем на устойчивость по части переменных некоторое ненулевое положение равновесия  $c^* = colon(0, 0, c_3^*, c_4^*, c_5^*, c_6^*, c_7^*)$  [13]-[14], а также асимптотику решений системы (4.2) в окрестности этого положения равновесия.

В системе (4.2) сделаем замену переменных

$$c = x + c^*. \quad (4.4)$$

Тогда система (4.2) будет иметь вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -k_1 x_1 - k_3 x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = k_1 x_1 - k_2 x_2 - k_3 x_1 x_2 \\ \dot{x}_3 = k_1 x_1 \\ \dot{x}_4 = k_2 x_2 \\ \dot{x}_5 = k_2 x_2 \\ \dot{x}_6 = k_3 x_1 x_2 \\ \dot{x}_7 = k_3 x_1 x_2 \end{cases}, \quad (4.5)$$

или, в векторной форме:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(x),$$

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & -k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P(x) = \begin{pmatrix} -k_3 x_1 x_2 \\ -k_3 x_1 x_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k_3 x_1 x_2 \\ k_3 x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача сводится к исследованию асимптотики поведения решений в окрестности тривиального решения  $x \equiv 0$  системы (4.5).

Линейное приближение системы (4.5) имеет вид:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -k_1 y_1 \\ \dot{y}_2 = k_1 y_1 - k_2 y_2 \\ \dot{y}_3 = k_1 y_1 \\ \dot{y}_4 = k_2 y_2 \\ \dot{y}_5 = k_2 y_2 \\ \dot{y}_6 = 0 \\ \dot{y}_7 = 0 \end{cases}. \quad (4.6)$$

Все собственные числа матрицы  $A$  являются вещественными числами и имеют геометрические кратности равными 1, причем  $\Lambda_1 = -k_1$ ,  $\Lambda_2 = -k_2$ ,  $m = 2$ ,  $\Lambda_k = 0$ ,  $k = \overline{3, 7}$ . Отсюда следует, что нулевое решение системы (4.6) устойчиво. Заметим, что так как матрица  $A$  имеет нулевые собственные значения, то имеет место критический случай согласно работы [15], и, следовательно, теоремы Ляпунова [1] об устойчивости по первому приближению нулевого положения равновесия нелинейной системы (4.5) неприменимы.

Для исследования устойчивости по части переменных нулевого положения равновесия нелинейной системы (4.5) и установления локальной покомпонентной асимптотической эквивалентности по Брауеру между системами (4.5) и (4.6) по всем переменным проверим справедливость условий теоремы 3.2. В этом случае  $M_0 = N \equiv \{1, \dots, 7\}$ .

Нормированная фундаментальная матрица системы (4.6) имеет вид:

$$Y(t-s) = \begin{pmatrix} e^{-k_1(t-s)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1}{k_1-k_2}[e^{-k_1(t-s)} - e^{-k_2(t-s)}] & e^{-k_2(t-s)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 - e^{-k_1(t-s)} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{1}{k_1-k_2}[k_2e^{-k_1(t-s)} - k_1e^{-k_2(t-s)}] & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 + \frac{1}{k_1-k_2}[k_2e^{-k_1(t-s)} - k_1e^{-k_2(t-s)}] & 1 - e^{-k_2(t-s)} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Из вида фундаментальной матрицы следует, что нулевое положение равновесия системы (4.6) асимптотически устойчиво по  $y_1$  и  $y_2$  и имеет асимптотическое равновесие по остальным компонентам.

Оценивая элементы фундаментальной матрицы  $Y(t-s)$  по строкам, определим  $\alpha_i$  и  $\beta_i$ :

$$\alpha_1 = \beta_1 = -k_1,$$

$$\alpha_2 = -k_1, \beta_2 = -k_2,$$

$$\alpha_i = \beta_i = 0, \quad i = \overline{3, 7}.$$

Так как  $d_p^{(j)} = 0$  при  $j \in \{4, 5, 6\}$ , то условие (3.1) будет иметь вид

$$p_1\beta_1 + p_2\beta_2 < \alpha_i, \quad i = \overline{1, 7}. \quad (4.7)$$

Так как  $p_1 = p_2 = 1$  для всех наборов  $(p_1, \dots, p_7)$ , для которых  $d_p^{(j)} \neq 0$ , то условия (4.7), а следовательно, и условия (3.1) теоремы 3.1. выполнены. Таким образом, нулевое решение системы (4.5) асимптотически устойчиво по компонентам  $i = \overline{1, 2}$  и устойчиво по компонентам  $i = \overline{3, 7}$ .

Учитывая замену переменных (4.4), можно сделать следующие выводы об асимптотическом поведении решений системы (4.2) в окрестности положения равновесия  $c^*$ :

- системы (2.1) и (2.2) локально покомпонентно асимптотически эквивалентны по Брауэру;
- каждое положение равновесия  $c^*$  системы (4.2) является асимптотически устойчивым по компонентам  $c_1$  и  $c_2$ ;
- решения системы (4.2), начинающиеся в окрестности положения равновесия  $c^*$  имеют асимптотическое равновесие по компонентам  $c_3, c_4, c_5, c_6, c_7$ , причем при  $t \rightarrow \infty$  эти решения стремятся к нему.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, Гостехиздат, М., 1950, 471 с.
2. Е. В. Воскресенский, *Асимптотические методы: теория и приложения*, СВМО, Саранск, 2000, 300 с.

3. Е. В. Воскресенский, *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Изд-во Сарат. Ун-та., Саратов, 1990, 224 с.
4. F. Brauer, “Asymptotic equivalence and asymptotic behavior of linear systems”, *Michigan Math.*, **9**:1 (1962), 33–43.
5. N. Levinson, “The asymptotic behaviour of a system of linear differential equations”, *Amer. J. Math.*, **63**:1 (1946), 1–6.
6. A. Wintner, “Linear variation of constants”, *Amer. J. Math.*, **68**:1 (1946).
7. N. Onuchic, “Relationship among the solutions of two systems of ordinary differential equations”, *Michigan Math. J.*, **10**:1 (1963), 129–139.
8. В. А. Якубович, “Об асимптотическом поведении решений системы дифференциальных уравнений”, *Матем. сб.*, **28(70)**:1 (1951), 217–240.
9. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, М., 1966, 576 с.
10. Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь, *Лекции по функциональному анализу*, Мир, М., 1979, 580 с.
11. В. А. Треногин, *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 249 с.
12. Л. Ф. Нурисламова, И. М. Губайдуллин, “Кинетическая модель реакции газофазного пиролиза пропана на основе компактной схемы”, *Информационные и математические технологии в науке и управлении*, **1**:1 (2015), 185–193.
13. В. В. Румянцев, А. С. Озиранер, *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, М., 1987, 253 с.
14. В. В. Воротников, “Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности”, *Автомат. и телемех.*, **3**:1 (1993), 3–62.
15. И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, Наука, М., 1966, 533 с.

Поступила 28.04.2017

MSC2010 34C20

# The sufficient conditions of local asymptotic equivalence of nonlinear systems of ordinary differential equations and its application for investigation of stability respect to part of variables

© P. A. Shamanaev<sup>3</sup> O. S. Yazovtseva<sup>4</sup>

**Abstract.** The article states sufficient conditions of local component-wise asymptotic equivalence for nonlinear systems of ordinary differential equations with perturbations in form of vector polynomials. The proof method is based on constructing of operator in Banach space, which connects solutions of nonlinear system and of its linear approximation, and on using the Schauder principle for fixed point. The existence of constructed operator is proved by using component-wise estimates for elements of fundamental matrix of linear approximation. The operator allows to construct mapping which establishes relation between initial points of nonlinear system and initial points of its linear approximation. Sufficient conditions for the stability (asymptotic stability) of zero solutions of locally component-wise asymptotically equivalent systems according to Brauer are presented. As an application of the theory built the nonlinear equations' system is considered which corresponds to the kinetic model of certain stages of compact scheme of propane pyrolysis reaction. The stability of equilibrium state of this system is investigated. The assigned task reduces to investigation of trivial equilibrium of nonlinear system coinciding with explored system. Then it is shown that nonlinear system is locally component-wise equivalent according to Brauer to its linear approximation. Taking in mind that trivial solution of linear approach is asymptotically stable with respect to the first two variables and has asymptotic equilibrium with respect to the other variables the conclusion is drawn that all the equilibria of explored system have the same properties.

**Key Words:** nonlinear systems of ordinary differential equations, local component-wise Brauer asymptotic equivalence, the Schauder principle for a fixed point, stability with respect to a part of variables, chemical kinetics.

## REFERENCES

1. A. M. Lyapunov, *Obshchaja zadacha ob ustojchivosti dvizhenija* [The general problem of the stability of motion], Gostekhizdat, Moscow, 1950 (In Russ.), 471 p.
2. E. V. Voskresenskiy, *Asimptoticheskie metody: teoriya i prilozheniya* [Asymptotic methods: theory and applications], SVMO Publ., Saransk, 2000 (In Russ.), 300 p.
3. E. V. Voskresenskiy, *Metody sravneniya v nelineynom analize* [Comparison methods in nonlinear analysis], Sarat. University publ., Saransk, 1990 (In Russ.), 224 c.
4. F. Brauer, "Asymptotic equivalence and asymptotic behavior of linear systems", *Michigan Math.*, **9**:1 (1962), 33–43.
5. N. Levinson, "The asymptotic behaviour of a system of linear differential equations", *Amer. J. Math.*, **63**:1 (1946), 1–6.

<sup>3</sup> **Pavel A. Shamanaev**, Associate Professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-0135-317X>, korspa@yandex.ru

<sup>4</sup> **Olga S. Yazovtseva**, Postgraduate student, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Mordovia State University (68 Bolshevistskaya Str., Saransk 430005, Republic of Mordovia, Russia), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-8075-4491>, kurinaos@gmail.com

6. A. Wintner, “Linear variation of constants”, *Amer. J. Math.*, **68**:1 (1946).
7. N. Onuchic, “Relationship among the solutions of two systems of ordinary differential equations”, *Michigan Math. J.*, **10**:1 (1963), 129–139.
8. V. A. Yakubovich, “[On asymptotic behavior of solutions of system of differential equations]”, *Mathem. sb.*, **28(70)**:1 (1951), 217–240 (In Russ.).
9. B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.
10. F. Riss, B. Sekefal’vi-Nad’, *Lektsii po funktsional’nomu analizu [Lectures on functional analysis]*, Mir Publ., Moscow, 1979 (In Russ.), 580 c.
11. V. A. Trenogin, *Funktsional’nyy analiz [Functional analysis]*, Nauka Publ., Moscow, 1980 (In Russ.), 249 c.
12. L. F. Nurislamova, I. M. Gubaydullin, “[Kinetic model of gas-phase propane pyrolysis reaction based on a compact scheme]”, *Informatsionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii*, **1**:1 (2015), 185–193 (In Russ.).
13. V. V. Rumyantsev, A. S. Oziraner, *Ustoychivost’ i stabilizatsiya dvizheniya po otnosheniyu k chasti peremennykh [Stability and stabilization of motion with respect to a part of the variables]*, Nauka Publ., Moscow, 1987 (In Russ.), 253 c.
14. V. V. Vorotnikov, “[Problems and methods of investigation of stability and stabilization with respect to a part of the variables: research directions, results, features]”, *Avtomat. i telemekh.*, **3**:1 (1993), 3–62 (In Russ.).
15. I. G. Malkin, *Theory of stability of motion*, Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 533 c.

*Submitted 28.04.2017*

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DOI 10.15507/2079-6900.19.2017.01.116-129

УДК 533.6.013.4

**Динамическая устойчивость упругой пластины при струйном обтекании**© А. В. Анкилов<sup>1</sup>, П. А. Вельмисов<sup>2</sup>

**Аннотация.** Предложена математическая модель динамической системы, содержащей упругую пластину при одностороннем обтекании ее потоком идеального несжимаемого газа с отрывом струи по схеме Кирхгофа. Поведение упругого материала описывается нелинейной моделью, учитывающей как продольные, так и поперечные деформации упругой пластины. Дано решение аэрогидродинамической части задачи, основанное на методах теории функций комплексного переменного. Получена связанная система интегро-дифференциальных уравнений с частными производными, содержащая только неизвестные функции деформации пластины. На основе построения функционала, соответствующего этой системе уравнений, получены достаточные условия устойчивости нулевого решения системы. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову.

**Ключевые слова:** аэрогидроупругость, математическое моделирование, динамическая устойчивость, упругая пластина, дозвуковой поток газа, дифференциальные уравнения в частных производных, функционал.

**1. Введение**

При проектировании конструкций, приборов, устройств, аппаратов, систем и т. д. различного назначения, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

В настоящее время механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа и аэрогидроупругость представляют собой хорошо развитые разделы механики сплошной среды.

Много исследований посвящено динамике, устойчивости и флаттеру пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа (среди последних в качестве примера отметим как российские [1-4], так и зарубежные [5-7] исследования). Большинство работ посвящено исследованию флаттера пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке, и только небольшая часть работ посвящена обтеканию пластин и оболочек дозвуковым потоком, что указывает на сложность исследования динамики упругих тел при указанном режиме обтекания и требует более пристального и глубокого внимания к этим задачам.

<sup>1</sup> Анкилов Андрей Владимирович, доцент кафедры «Высшая математика», ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5946-8535>, [ankil@ulstu.ru](mailto:ankil@ulstu.ru).

<sup>2</sup> Вельмисов Петр Александрович, зав. кафедрой «Высшая математика», ФГБОУ ВО «Ульяновский государственный технический университет» (432027, Россия, г. Ульяновск, ул. Северный Венец, д. 32.), доктор физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru).

В работе исследуется динамическая устойчивость упругой пластины при одностороннем обтекании ее дозвуковым потоком газа (жидкости) в модели идеальной несжимаемой среды с отрывом струи по схеме Кирхгофа. Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Поведение упругого материала в работе описывается нелинейной моделью. Для решения связанной задачи аэрогидроупругости используется подход, основанный на построении решения аэрогидродинамической части двумерной краевой задачи для уравнения Лапласа методами комплексного анализа, при этом аэрогидродинамическая нагрузка (давление жидкости или газа) определяется через функции, описывающие неизвестные деформации пластины [8]. При подстановке выражения для давления в уравнения колебаний пластин решение задачи сводится к исследованию системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными для функций деформаций. На основе построения функционала, соответствующего этой системе уравнений, получены достаточные условия устойчивости решений системы.

Подобные задачи по исследованию динамической устойчивости при дозвуковом режиме обтекания рассматривались в [8] – [17]. Кроме того, отличием от ранее полученных результатов [9] является то, что в данной работе рассмотрена нелинейная математическая модель упругого тела, учитывающая и продольные и поперечные колебания упругой пластины.

## 2. Математическая модель

Рассматривается плоская задача о колебаниях упругой пластины при одностороннем обтекании ее потоком идеальной несжимаемой среды с отрывом струи по схеме Кирхгофа. Пусть в плоскости  $xOy$  отрезок  $[0, l]$  оси  $Ox$  соответствует упругой пластине, которая в точке  $x = 0$  соединена с жесткой недеформируемой пластиной, занимающей положение  $y = 0$ ,  $x \in (-\infty, 0)$ . В бесконечно удаленной точке скорость среды равна  $V$  и направлена вдоль оси  $Ox$ .

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\Delta\varphi = 0, \quad (x, y) \in H = \{(x, y) \in R^2 : |x| < \infty, y > 0\}; \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (-\infty, 0); \quad (2.2)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (0, l); \quad (2.3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = \dot{h}(x, t) + Vh'(x, t), \quad x \in (l, +\infty); \quad (2.4)$$

$$\varphi_t(x, 0, t) + V\varphi_x(x, 0, t) = 0, \quad x \in (l, +\infty); \quad (2.5)$$

$$w(0, t) = 0; \quad (2.6)$$

$$h(l, t) = w(l, t); \quad (2.7)$$

$$|\nabla\varphi|_\infty^2 = (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_t^2)_\infty = 0; \quad (2.8)$$

$$P(x, t) = \rho(\varphi_t(x, 0, t) + V\varphi_x(x, 0, t)), \quad x \in (0, l); \quad (2.9)$$

$$\begin{cases} -EF(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t))' + M\ddot{u}(x, t) - \beta_2 I^{-1}\dot{u}''(x, t) = 0, \\ -EF[w'(x, t)(u'(x, t) + \frac{1}{2}w'^2(x, t))] + Dw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \\ + Nw''(x, t) + \beta_2\dot{w}''''(x, t) + \beta_1\dot{w}(x, t) + \beta_0w(x, t) = P(x, t), \end{cases} \quad x \in (0, l). \quad (2.10)$$

Здесь введены обозначения:  $\rho$  – плотность газа;  $M = h_p\rho_p$  – погонная масса пластины;  $h_p$  – толщина пластины;  $E$ ,  $\rho_p$  – модуль упругости и линейная плотность пластины;

$N$  – сжимающая (растягивающая) пластину сила;  $F = \frac{h_p}{1-\nu^2}$ ;  $D = EI$  – изгибная жесткость пластины;  $I = \frac{h_p^3}{12(1-\nu^2)}$  – момент инерции пластины;  $\beta_2, \beta_1$  – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования;  $\beta_0$  – коэффициент жесткости слоя обжатия;  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Индексы  $x, y, t$  снизу обозначают частные производные по  $x, y, t$ ; штрих обозначает частную производную по координате  $x$ , а точка – по времени  $t$ . Неизвестными являются функции:  $\varphi(x, y, t)$  – потенциал скорости газа;  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  – функции, определяющие деформации пластины в направлении осей  $Oy$  и  $Ox$  соответственно (поперечная и продольная составляющие деформации пластины);  $h(x, t)$  – функция, определяющая форму свободной поверхности;  $P(x, t)$  – аэродинамическая нагрузка на пластину.

Условия (2.2 – 2.4) – условия непротекания, (2.5) – условие непрерывности давления на свободной поверхности, (2.6) – условие закрепления пластины в точке  $x = 0$ , (2.7) – условие стыковки; (2.8) – условие на бесконечности.

В силу несжимаемости среды поток вектора скорости через вещественную ось равен нулю, поэтому граничные значения (2.2) – (2.4) должны удовлетворять условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_y(x, 0, t) dx = \int_0^l (\dot{w} + Vw') dx + \int_l^{\infty} (\dot{h} + Vh') dx = 0. \quad (2.11)$$

Для сходимости несобственного интеграла в (2.11) потребуем, чтобы для достаточно больших значений  $x$

$$|\dot{h} + Vh'| \leq A(t)x^{-\alpha}, \quad (2.12)$$

где  $A(t)$  – неотрицательная функция времени  $t$ ,  $t \geq 0$ ;  $\alpha > 1$ .

### 3. Определение силового воздействия потока

В верхней полуплоскости  $H$  введем комплексный потенциал  $W = f(z, t) = \varphi + i\psi$  (где  $z = x + iy$ ,  $\psi$  – функция тока) и рассмотрим в ней аналитическую функцию  $if_z(z, t) = \varphi_y + i\varphi_x$ . Пользуясь условиями (2.2) – (2.4), (2.8), представим  $if_z(z, t)$  в  $H$  с помощью интеграла Шварца [18] в виде

$$if_z(z, t) = \frac{1}{\pi i} \int_0^l w_1(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{\pi i} \int_l^{\infty} h_1(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z}, \quad (3.1)$$

$$w_1(x, t) = \dot{w} + Vw', \quad h_1(x, t) = \dot{h} + Vh'. \quad (3.2)$$

Введем обозначения

$$w_2(\tau, t) = \int_0^\tau w_1(x, t) dx = \int_0^\tau (\dot{w} + Vw') dx, \quad h_2(\tau, t) = \int_\tau^\infty h_1(x, t) dx = \int_\tau^\infty (\dot{h} + Vh') dx.$$

Поскольку  $w_2(0, t) = 0$ , а в силу условий (2.11), (2.12)

$$w_2(l, t) + h_2(l, t) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} h_2(\tau, t) \ln(\tau - z) = 0,$$

то, интегрируя в (3.1) сначала по  $z$ , а затем по частям, будем иметь

$$f(z, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^l w_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z} + \frac{1}{\pi} \int_l^{\infty} h_2(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - z} + C_1(t). \quad (3.3)$$



Продифференцируем (3.3) по  $t$  и перейдем по формулам Сохоцкого [18] к пределу при  $z \rightarrow x \in (l, \infty)$ . Отделяя вещественную часть, получим с учетом условия (2.8):

$$\varphi_t(x, 0, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{\partial w_2}{\partial t} \frac{d\tau}{\tau - x} + \frac{1}{\pi} \int_l^\infty \frac{\partial h_2}{\partial t} \frac{d\tau}{\tau - x}. \quad (3.4)$$

Из выражения (3.1) при  $z \rightarrow x \in (l, \infty)$  найдем

$$\varphi_x(x, 0, t) = -\frac{1}{\pi} \int_0^l w_1(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - x} - \frac{1}{\pi} \int_l^\infty h_1(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - x}. \quad (3.5)$$

Условие (2.5), таким образом, принимает вид

$$\int_0^l w_3(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - x} = \int_l^\infty h_3(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau - x}, \quad x \in (l, \infty), \quad (3.6)$$

$$w_3(x, t) = \frac{\partial w_2}{\partial t} + V w_1 = \int_0^x (\ddot{w} + V \dot{w}') dx + V \dot{w} + V^2 w', \quad (3.7)$$

$$h_3(x, t) = \frac{\partial h_2}{\partial t} - V h_1 = \int_x^\infty (\ddot{h} + V \dot{h}') dx - V \dot{h} - V^2 h'. \quad (3.8)$$

Выразим  $h_3(x, t)$  из (3.6). Пусть  $\tau_1 = -1/\tau$ ,  $x_1 = -1/x$ , тогда

$$\int_l^\infty h_3(x, t) \frac{d\tau}{\tau - x} = - \int_{-1/l}^0 h_3\left(-\frac{1}{\tau}, t\right) \frac{d\tau_1}{\tau_1^2(\tau_1^{-1} - x_1^{-1})} = \int_{-1/l}^0 h_3\left(-\frac{1}{\tau}, t\right) \frac{x_1 d\tau_1}{\tau_1(\tau_1 - x_1)},$$

и, следовательно, (3.6) можно представить в виде

$$\int_{-1/l}^0 \frac{1}{\tau_1} h_3\left(-\frac{1}{\tau}, t\right) \frac{d\tau_1}{\tau_1 - x_1} = \int_0^l w_3(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau x_1 + 1}. \quad (3.9)$$

Полученное равенство будем рассматривать как интегральное уравнение относительно функции  $\tilde{h}(\tau_1, t) = \frac{1}{\tau_1} h_3\left(-\frac{1}{\tau_1}, t\right)$ . Оно имеет следующие решения [19]:

- 1) решение, не ограниченное на обоих концах отрезка  $[-1/l, 0]$ ;
- 2) решение, ограниченное на одном из концов отрезка  $[-1/l, 0]$ ;
- 3) решение, ограниченное на обоих концах отрезка  $[-1/l, 0]$ , при условии, что

$$\int_{-1/l}^0 \frac{dx_1}{\sqrt{(x_1 + 1/l)(-x_1)}} \int_0^l w_3(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau x_1 + 1} = 0. \quad (3.10)$$

Решения, не ограниченные на левом конце отрезка, не подходят по смыслу рассматриваемой задачи. Решение 3) налагает дополнительное условие на  $w$ . В дальнейшем будем пользоваться решением 2) уравнения (3.6):

$$h_3(x, t) = \frac{\sqrt{x-l}}{\pi} \int_0^l w_3(\tau, t) \frac{d\tau}{\sqrt{l-\tau}(\tau-x)}, \quad x \in (l, \infty), \quad (3.11)$$

ограниченным на левом и не ограниченным на правом конце отрезка  $[-1/l, 0]$ , и полученным обращением интеграла типа Коши в левой части уравнения (3.9).

Интегрируя в (3.11) по частям с учетом (2.6), (3.7), (3.8) и затем дифференцируя полученное равенство по  $x$ , получим дифференциальное уравнение относительно функции  $h(x, t)$

$$\ddot{h} + 2V\dot{h}' + V^2 h'' = -\frac{V^2 w'(0, t)}{\pi x} \sqrt{\frac{l}{x-l}} + \quad (3.12)$$

$$+ \frac{1}{\pi\sqrt{x-l}} \int_0^l (\ddot{w}(\tau, t) + 2V\dot{w}'(\tau, t) + V^2w''(\tau, t)) \frac{\sqrt{l-\tau}}{\tau-x} d\tau, \quad x \in (l, \infty),$$

при условии

$$h'(l, t) = w'(l, t). \quad (3.13)$$

Преобразуем теперь правую часть выражения для давления (2.9). Исходя из выражений (3.1), (3.3), предельным переходом при  $z \rightarrow x \in (0, l)$  получим соответственно:

$$\begin{aligned} \varphi_x(x, 0, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^l w_1(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau-x} - \frac{1}{\pi} \int_l^\infty h_1(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau-x}, \\ \varphi_t(x, 0, t) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{\partial w_2}{\partial t}(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau-x} + \frac{1}{\pi} \int_l^\infty \frac{\partial h_2}{\partial t}(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau-x}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi_t + V\varphi_x = -\frac{1}{\pi} \int_0^l w_3(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau-x} + \frac{1}{\pi} \int_0^l h_3(\tau, t) \frac{d\tau}{\tau-x}, \quad x \in (0, l). \quad (3.14)$$

Преобразуя интегралы в (3.14) методом интегрирования по частям, с учетом условий (2.6), (2.7), (2.11), (3.13) будем иметь:

$$\phi_t + V\phi_x = \frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{\partial w_3}{\partial \tau} \ln|\tau-x| d\tau - \frac{1}{\pi} \int_l^\infty \frac{\partial h_3}{\partial \tau} \ln|\tau-x| d\tau + \frac{V^2}{\pi} w'(0, t) \ln x.$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_3}{\partial \tau}(\tau, t) &= -\frac{1}{\pi\sqrt{\tau-l}} \int_0^l \frac{\partial w_3}{\partial \xi}(\xi, t) \frac{\sqrt{l-\xi}}{\xi-\tau} d\xi + \frac{V^2 w'(0, t)}{\pi} \frac{\sqrt{l}}{\tau\sqrt{l-\tau}}, \\ \int_0^\infty \frac{\ln(\omega^2 + a^2)}{(\omega^2 + b^2)} d\omega &= \frac{\pi \ln(a+b)}{b}, \quad (a > 0; b > 0), \end{aligned}$$

и проводя ряд преобразований, получим выражение для давления (2.9):

$$\begin{aligned} P(x, t) &= \rho (\varphi_t + V\varphi_x)|_{y=0} = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^l \frac{\partial w_3}{\partial \tau}(\tau, t) \ln \frac{(\sqrt{l-x} + \sqrt{l-\tau})^2}{|\tau-x|} d\tau - \\ &\quad - \frac{\rho V^2 w'(0, t)}{\pi} \ln \frac{(\sqrt{l-x} + \sqrt{l})^2}{x}, \\ \frac{\partial w_3}{\partial x}(x, t) &= \ddot{w}(x, t) + 2V\dot{w}'(x, t) + V^2 w''(x, t), \quad x \in (0, l). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Если решение системы уравнений (3.15), (2.10) найдено, то отыскание функции  $h(x, t)$ , определяющей границу свободной поверхности, сводится к решению дифференциального уравнения (3.12) с краевыми условиями (2.7), (3.13). При этом функции  $w(x, t)$  и  $h(x, t)$  должны также удовлетворять условиям (2.11), (2.12). Далее, если функция  $h(x, t)$  найдена, то, полагая в (3.3)  $z = x + iy$  и отделяя вещественную часть, получим потенциал  $\varphi(x, y, t)$ .

#### 4. Исследование устойчивости

Введем обозначение

$$K(x, \tau) = \ln \left| \frac{\sqrt{l - \tau} + \sqrt{l - x}}{\sqrt{l - \tau} - \sqrt{l - x}} \right|, \quad x \neq \tau.$$

Тогда аэрогидродинамическая нагрузка (3.15) примет вид

$$P(x, t) = -\frac{\rho V^2 w'(0, t)}{\pi} K(x, 0) - \frac{\rho}{\pi} \int_0^l (\ddot{w}(\tau, t) + 2V\dot{w}'(\tau, t) + V^2 w''(\tau, t)) K(x, \tau) d\tau. \quad (4.1)$$

Интегрируя по частям, запишем (4.1) в виде

$$P(x, t) = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^l (\ddot{w}(\tau, t) + 2V\dot{w}'(\tau, t)) K(x, \tau) d\tau + \frac{\rho V^2}{\pi} \int_0^l w'(\tau, t) \frac{\partial K(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в систему (2.10), окончательно получим

$$\begin{cases} -EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right)' + M\ddot{u}(x, t) - \beta_2 I^{-1} \dot{u}''(x, t) = 0, \\ -EF \left[ w'(x, t) \left( u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right) \right]' + Dw''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + \\ + Nw''(x, t) + \beta_2 w''''(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t) = \\ = -\frac{\rho}{\pi} \int_0^l (\ddot{w}(\tau, t) + 2V\dot{w}'(\tau, t)) K(x, \tau) d\tau + \frac{\rho V^2}{\pi} \int_0^l w'(\tau, t) \frac{\partial K(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau, \quad x \in (0, l). \end{cases} \quad (4.3)$$

Получим достаточные условия устойчивости тривиального решения  $w(x, t) \equiv 0$ ,  $u(x, t) \equiv 0$  системы интегро-дифференциальных уравнений (4.3) по отношению к возмущениям начальных условий.

Введем функционал:

$$\begin{aligned} \Phi(t) = \int_0^l \left\{ EF \left( u'(x, t) + \frac{1}{2} w'^2(x, t) \right)^2 + M(\dot{u}^2(x, t) + \dot{w}^2(x, t)) + Dw''^2(x, t) - \right. \\ \left. - Nw'^2(x, t) + \beta_0 w^2(x, t) + 4M\theta u(x, t)\dot{u}(x, t) + 2M\theta \dot{w}(x, t)w(x, t) + \right. \\ \left. + 2\beta_2 I^{-1} \theta u'^2(x, t) + \beta_1 \theta w^2(x, t) + \beta_2 \theta w''^2(x, t) \right\} dx + \sum_{i=1}^4 I_i(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$I_1(t) = \frac{\rho}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x, t) \dot{w}(\tau, t) K(\tau, x) d\tau, \quad I_2(t) = -\frac{\rho V^2}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w'(x, t) w'(\tau, t) K(\tau, x) d\tau,$$

$$I_3(t) = \frac{2\rho\theta}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w(x, t) \dot{w}(\tau, t) K(\tau, x) d\tau, \quad I_4(t) = \frac{2\rho\theta}{\pi} \left( \int_0^l \frac{w(x, t)}{\sqrt{l-x}} dx \right)^2,$$

где параметр  $\theta \geq 0$ . Найдем производную от  $\Phi$  по  $t$ :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = 2 \int_0^l \left\{ EF \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right) (\dot{u}' + w' \dot{w}') + M\dot{u}\ddot{u} + M\dot{w}\ddot{w} + Dw''\dot{w}'' - Nw'\dot{w}' + \right. \\ \left. + \beta_0 w\dot{w} + 2M\theta \dot{u}^2 + 2M\theta u\dot{u} + M\theta \dot{w}^2 + M\theta w\dot{w} + 2\beta_2 I^{-1} \theta u'\dot{u}' + \right. \\ \left. + \beta_1 \theta w\dot{w} + \beta_2 \theta w''\dot{w}'' \right\} dx + \sum_{i=1}^4 \dot{I}_i(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Граничные условия для функций  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$  могут иметь вид

1) жесткое неподвижное заземление:

$$w(x, t) = w'(x, t) = u(x, t) = 0; \quad (4.6)$$

2) жесткое подвижное заземление:

$$w(x, t) = w'(x, t) = u'(x, t) = 0; \quad (4.7)$$

3) шарнирное неподвижное закрепление:

$$w(x, t) = w''(x, t) = u(x, t) = 0. \quad (4.8)$$

Пусть на левом конце пластины при  $x = 0$  имеют место условия (4.6) или (4.7), что согласуется с условием (2.6), а на правом конце пластины при  $x = l$  – условия (4.6), или (4.7), или (4.8).

Тогда для функций  $w(x, t)$ ,  $u(x, t)$ , являющихся решением системы уравнений (4.3), равенство (4.5) примет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \int_0^l \left\{ -2EF\theta \left( u' + \frac{1}{2}w'^2 \right)^2 - \beta_2 I^{-1} \dot{u}'^2 - \beta_2 \dot{w}''^2 - \beta_1 \dot{w}^2 + 2M\theta \dot{u}^2 + \right. \\ & \left. + M\theta \dot{w}^2 - \beta_0 \theta w^2 - D\theta w''^2 + N\theta w'^2 \right\} dx + \sum_{i=1}^4 \dot{I}_i(t) - \\ & - \frac{2\rho}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x, t) (\ddot{w}(\tau, t) + 2V\dot{w}'(\tau, t)) K(x, \tau) d\tau + \\ & + \frac{2\rho V^2}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x, t) w'(\tau, t) \frac{\partial K(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \\ & - \frac{2\rho\theta}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w(x, t) (\ddot{w}(\tau, t) + 2V\dot{w}'(\tau, t)) K(x, \tau) d\tau + \\ & + \frac{2\rho V^2 \theta}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w(x, t) w'(\tau, t) \frac{\partial K(x, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Пользуясь симметричностью ядра  $K(\tau, x) = K(x, \tau)$ , найдем  $\dot{I}_i(t)$  ( $i = \overline{1, 4}$ ).

Введем обозначение

$$K_1(x) = \int_0^l K(\tau, x) d\tau, \quad K_0 = \sup_{x \in (0, l)} K_1(x).$$

Произведем оценку интегралов  $\dot{I}_i(t)$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) и последних четырех интегралов в (4.9), используя неравенства  $\pm 2ab \leq a^2 + b^2$ ,  $K(\tau, x) \geq 0$ ,  $K(\tau, x) = K(x, \tau)$ . Тогда оценка (4.9) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) \leq & 2 \int_0^l \left\{ -\beta_2 \dot{w}''^2 - \left( \beta_1 - M\theta - \frac{4\rho\theta K_0}{\pi} \right) \dot{w}^2 - \beta_0 \theta w^2 - \left( D\theta - \frac{\rho V^3 l^2}{\pi} - \frac{\rho V^2 \theta l^2}{\pi} \right) w''^2 - \right. \\ & \left. + \left( N\theta + \frac{\rho\theta V^2 (4K_0 + l^2)}{\pi} \right) w'^2 - \beta_2 I^{-1} \dot{u}'^2 + 2M\theta \dot{u}^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Пусть выполняются неравенства

$$\beta_2 \geq 0, \quad D\theta - \frac{\rho V^3 l^2}{\pi} - \frac{\rho V^2 \theta l^2}{\pi} \geq 0, \quad (4.11)$$

тогда, используя неравенства Релея [20]

$$\begin{aligned} \int_0^l w''^2(x, t) dx &\geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad \int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_0^l w^2(x, t) dx, \\ \int_0^l \dot{w}^2(x, t) dx &\geq \eta_1 \int_0^l \dot{w}^2(x, t) dx, \end{aligned} \quad (4.12)$$

где  $\lambda_1, \mu_1$  — наименьшие собственные значения краевых задач  $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$ ,  $\psi''''(x) = \mu\psi(x)$  с краевыми условиями (4.6)–(4.8) для функции  $w(x, t)$ ,  $\eta_1$  — наименьшее собственное значение краевой задачи  $\psi''(x) = -\eta\psi(x)$  с краевыми условиями (4.6)–(4.8) для функции  $u(x, t)$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) &\leq -2 \int_0^l \left\{ \left( \beta_2 \mu_1 + \beta_1 - M\theta - \frac{4\rho\theta K_0}{\pi} \right) \dot{w}^2 + \beta_0 \theta w^2 + (\beta_2 I^{-1} \eta_1 - 2M\theta) \dot{u}^2 + \right. \\ &\quad \left. + \left[ \lambda_1 \left( D\theta - \frac{\rho V^3 l^2}{\pi} - \frac{\rho V^2 \theta l^2}{\pi} \right) - \left( N\theta + \frac{\rho\theta V^2 (4K_0 + l^2)}{\pi} \right) \right] w'^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Если выполняются условия

$$\begin{aligned} \beta_2 \mu_1 + \beta_1 - M\theta - \frac{4\rho\theta K_0}{\pi} &\geq 0, \quad \beta_2 I^{-1} \eta_1 - 2M\theta \geq 0, \\ D\lambda_1 \theta - N\theta - \frac{\rho V^3 l^2 \lambda_1}{\pi} - \frac{\rho V^2 \theta (4K_0 + l^2 + l^2 \lambda_1)}{\pi} &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.14)$$

то из (4.13) получим

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0.$$

Проинтегрируем это выражение от 0 до  $t$

$$\Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (4.15)$$

Подставим выражение для  $\Phi(0)$  в неравенство (4.15)

$$\begin{aligned} \Phi(t) &\leq \int_0^l \left\{ EF \left( u'_0 + \frac{1}{2} w'^2_0 \right)^2 + M(\dot{u}_0^2 + \dot{w}_0^2) + Dw''_0^2 - Nw'^2_0 + \beta_0 w_0^2 + 4M\theta u_0 \dot{u}_0 + \right. \\ &\quad \left. + 2M\theta \dot{w}_0 w_0 + 2\beta_2 I^{-1} \theta u'^2_0 + \beta_1 \theta w_0^2 + \beta_2 \theta w_0'^2 \right\} dx + \\ &\quad + \frac{\rho}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x, 0) \dot{w}(\tau, 0) K(\tau, x) d\tau - \frac{\rho V^2}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w'(x, 0) w'(\tau, 0) K(\tau, x) d\tau + \\ &\quad + \frac{2\rho\theta}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w(x, 0) \dot{w}(\tau, 0) K(\tau, x) d\tau + \frac{2\rho\theta}{\pi} \left( \int_0^l \frac{w(x, 0)}{\sqrt{l-x}} dx \right)^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Здесь индекс 0 снизу означает, что значение берется при  $t = 0$ .

Используя неравенства (4.12), неравенство  $\pm 2ab \leq a^2 + b^2$  и учитывая, что

$$\int_0^l dx \int_0^l w'(x, 0) w'(\tau, 0) K(\tau, x) d\tau \geq 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) \leq & \int_0^l \left\{ EF \left( u'_0 + \frac{1}{2} w'^2_0 \right)^2 + 2M\theta u^2_0 + 2M\theta \dot{u}^2_0 + \right. \\ & + 2\beta_2 I^{-1} \theta u'^2_0 + \left( M + M\theta + \frac{\rho K_0(1+\theta)}{\pi} \right) \dot{w}^2_0 + \\ & \left. + \left[ D + \beta_2 \theta + \frac{1}{\lambda_1} \left( |N| + \frac{4\rho \theta l^2}{\pi} \right) + \frac{1}{\mu_1} \left( \beta_0 + M\theta + \beta_1 \theta + \frac{\rho \theta K_0}{\pi} \right) \right] w''^2_0 \right\} dx. \end{aligned} \quad (4.17)$$

С другой стороны, учитывая, что

$$\int_0^l dx \int_0^l \dot{w}(x, t) \dot{w}(\tau, t) K(\tau, x) d\tau \geq 0,$$

получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \int_0^l \left\{ EF \left( u' + \frac{1}{2} w'^2 \right)^2 + M(\dot{u}^2 + \dot{w}^2) + 4M\theta u \dot{u} + \right. \\ & + 2\beta_2 I^{-1} \theta u'^2 + (D + \beta_2 \theta) w''^2 - N w'^2 + (\beta_0 + \beta_1 \theta) w^2 + 2M\theta \dot{w} w \} dx - \\ & - \frac{\rho V^2}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w'(x, t) w'(\tau, t) K(\tau, x) d\tau + \frac{2\rho \theta}{\pi} \int_0^l dx \int_0^l w(x, t) \dot{w}(\tau, t) K(\tau, x) d\tau. \end{aligned}$$

Используя первое неравенство (4.12), неравенство  $\pm 2ab \geq -a^2 - b^2$ , будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \int_0^l \left\{ M \dot{u}^2 + 4M\theta u \dot{u} + 2\beta_2 I^{-1} \theta u'^2 + \left( M - \frac{\rho \theta K_0}{\pi} \right) \dot{w}^2 + \right. \\ & + \left( \lambda_1 D + \beta_2 \lambda_1 \theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} \right) w'^2 + \left( \beta_0 + \beta_1 \theta - \frac{\rho \theta K_0}{\pi} \right) w^2 + 2M\theta \dot{w} w \} dx. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Пусть выполняются условия

$$M - \frac{\rho \theta K_0}{\pi} > 0, \quad \lambda_1 D + \beta_2 \lambda_1 \theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} > 0. \quad (4.19)$$

Используя неравенство Релея

$$\int_0^l w'^2(x, t) dx \geq \vartheta_1 \int_0^l w^2(x, t) dx, \quad (4.20)$$

где  $\vartheta_1$  — наименьшее собственное значение краевой задачи  $\psi''(x) = -\vartheta \psi(x)$  с краевыми условиями (4.6)–(4.8) для функции  $w(x, t)$  и третье неравенство (4.12), получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \int_0^l \left\{ M \dot{u}^2 + 4M\theta u \dot{u} + 2\beta_2 I^{-1} \eta_1 (1 - \psi_2) \theta u^2 + 2\beta_2 I^{-1} \psi_2 \theta u'^2 + \left( M - \frac{\rho \theta K_0}{\pi} \right) \dot{w}^2 + \right. \\ & + \psi_1 \left( \lambda_1 D + \beta_2 \lambda_1 \theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} \right) w'^2 + 2M\theta \dot{w} w + \\ & \left. + \left[ \vartheta_1 (1 - \psi_1) \left( \lambda_1 D + \beta_2 \lambda_1 \theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} \right) \beta_0 + \beta_1 \theta - \frac{\rho \theta K_0}{\pi} \right] w^2 w \right\} dx, \end{aligned} \quad (4.21)$$

где параметры  $\psi_1 \in (0, 1)$ ,  $\psi_2 \in (0, 1)$  выбираем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} & \beta_2 I^{-1} \eta_1 (1 - \psi_2) - 2M\theta \geq 0, \quad \left( M - \frac{\rho\theta K_0}{\pi} \right) \times \\ & \times \left[ \vartheta_1 (1 - \psi_1) \left( \lambda_1 D + \beta_2 \lambda_1 \theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} \right) \beta_0 + \beta_1 \theta - \frac{\rho\theta K_0}{\pi} \right] - M^2 \theta^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Учитывая неравенства (4.22) и то, что

$$w^2(x, t) \leq l \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad u^2(x, t) \leq l \int_0^l u'^2(x, t) dx,$$

окончательно получим

$$\begin{aligned} \Phi(t) & \geq \int_0^l \left( 2\beta_2 I^{-1} \psi_2 \theta u'^2 + \psi_1 \left( \lambda_1 D + \beta_2 \lambda_1 \theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} \right) w'^2 \right) dx \geq \\ & \geq \frac{2\beta_2 I^{-1} \psi_2 \theta}{l} u^2 + \frac{\psi_1}{l} \left( \lambda_1 D + \beta_2 \lambda_1 \theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} \right) w^2. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Используя оценки (4.17), (4.23), получим неравенство

$$\begin{aligned} & \frac{2\beta_2 I^{-1} \psi_2 \theta}{l} u^2(x, t) + \frac{\psi_1}{l} \left( \lambda_1 D + \beta_2 \lambda_1 \theta - N - \frac{\rho V^2 K_0}{\pi} \right) w^2(x, t) \leq \int_0^l \left\{ EF \left( u'_0 + \frac{1}{2} w'^2_0 \right)^2 + \right. \\ & + 2M\theta u_0^2 + 2M\theta \dot{u}_0^2 + 2\beta_2 I^{-1} \theta u'^2_0 + \left( M + M\theta + \frac{\rho K_0 (1 + \theta)}{\pi} \right) \dot{w}_0^2 + \\ & \left. + \left[ D + \beta_2 \theta + \frac{1}{\lambda_1} \left( |N| + \frac{4\rho\theta l^2}{\pi} \right) + \frac{1}{\mu_1} \left( \beta_0 + M\theta + \beta_1 \theta + \frac{\rho\theta K_0}{\pi} \right) \right] w_0''^2 \right\} dx, \end{aligned}$$

из которого следует теорема.

**Т е о р е м а 4.1.** Если найдутся числа  $\theta > 0$ ,  $\psi_1 \in (0, 1)$ ,  $\psi_2 \in (0, 1)$ , такие, что выполняются условия (4.11), (4.14), (4.19), (4.22), и краевые условия имеют вид (4.6)–(4.8), то решение  $w(x, t), u(x, t)$  системы уравнений (4.3) устойчиво по отношению к возмущениям начальных значений  $\dot{u}_0$ ,  $u_0$ ,  $u'_0$ ,  $\dot{w}_0$ ,  $w'_0$ ,  $w''_0$ .

## 5. Заключение

На основе предложенной нелинейной математической модели колебаний упругой пластины при одностороннем обтекании ее дозвуковым потоком идеальной несжимаемой среды с отрывом струи проведено исследование устойчивости этой пластины. Модель описывается системой дифференциальных уравнений с частными производными для неизвестных функций деформации пластины и потенциала скорости газа. На основе методов теории функций комплексного переменного получена связанная система интегродифференциальных уравнений с частными производными, содержащая только неизвестные функции деформации пластины. С помощью построенного функционала получены достаточные условия устойчивости нулевого решения этой системы уравнений. Полученные условия устойчивости накладывают ограничения на погонную массу пластины, изгибную жесткость пластины, сжимающее (растягивающее) пластину усилие, скорость невозмущенного однородного потока, а также на коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования, коэффициент жесткости слоя обжатия. Эти условия явно содержат основные параметры механической системы, и в таком виде они наиболее приспособлены для решения задач оптимизации, автоматического управления, автоматизированного проектирования.

**Благодарности.** Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 15-01-08599 и № 15-41-02455-р-поволжье-а.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. L. I. Mogilevich, V. S. Popov, L. N. Rabinsky, E. L. Kuznetsova, “Mathematical model of the plate on elastic foundation interacting with pulsating viscous liquid layer”, *Applied Mathematical Sciences*, **10**:21 (2016), 1101–1109.
2. V. V. Vedeneev, “Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds”, *Journal of Fluids and Structures*, **40** (2013), 366–372.
3. В. Б. Курзин, “Продольные колебания пластины, обтекаемой вязкой жидкостью в канале, обусловленные вынужденными поперечными колебаниями пластины”, *Прикладная механика и техническая физика*, **52**:3 (2011), 153–157.
4. В. Г. Соколов, И. О. Разов, “Параметрические колебания и динамическая устойчивость магистральных газопроводов при наземной прокладке”, *Вестник гражданских инженеров*, **43**:2 (2014), 65–68.
5. E. Aulisa, A. Ibragimov, E. Y. Kaya-Cekin, “Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **7**, **6** (2014), 1133–1148.
6. A. N. Kounadis, “Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping”, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **42**:1 (2007), 24–35.
7. S. Willems, A. Gulhan and B. Esser, “Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow”, *Progress in Flight Physics*, **5** (2013), 285–308.
8. П. А. Вельмисов, Ю. А. Решетников, *Устойчивость вязкоупругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, Саратовский государственный университет, Саратов, 1994, 176 с.
9. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, 2009, 220 с.
10. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, 2013, 322 с.
11. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Функционалы Ляпунова в некоторых задачах динамической устойчивости аэроупругих конструкций*, Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, 2015, 146 с.
12. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, *Устойчивость вязкоупругих элементов стенок проточных каналов*, Ульяновский государственный технический университет, Ульяновск, 2000, 115 с.



13. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, “Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem”, *Journal of Mathematical Sciences*, **219**:1 (2016), 14–26.
14. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Устойчивость решений начально-краевой задачи аэрогидроупругости”, *Современная математика. Фундаментальные направления*, **59** (2016), 35–52.
15. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Ю. А. Тамарова, “Исследование динамики и устойчивости упругого элемента проточного канала”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:1 (2016), 94–107.
16. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, “Устойчивость вязкоупругих элементов несущей поверхности в дозвуковом потоке”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **9**:1 (2007), 69–81.
17. А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов, Е. П. Семенова, “Исследование динамической устойчивости упругих элементов стенок канала”, *Вестник Саратовского государственного технического университета*, **2**:1 (38) (2009), 7–17.
18. М. А. Лаврентьев, *Методы теории функций комплексного переменного*, Наука, М., 1973, 736 с.
19. Ф. Д. Гахов, *Краевые задачи*, Изд-во физ-мат. лит., М., 1963, 640 с.
20. Л. Коллатц, *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 503 с.

Поступила 18.04.2017

MSC2010 74F10

## Dynamic stability of elastic plate at jet flow

© A. V. Ankilov<sup>3</sup>, P. A. Velmisov<sup>4</sup>

**Abstract.** The mathematical model of the dynamic system containing an elastic plate at a one-sided flow of ideal incompressible gas stream with a separation of jet according to Kirchhoff's scheme is offered. The behavior of elastic material is described by the nonlinear model considering both longitudinal and transversal deformations of an elastic plate. The solution of an aerohydrodynamic part of a problem is based on methods of the theory of functions of complex variable. The related system of the integro-differential equations with partial derivatives containing only unknown plate deformations functions is obtained. Basing on the building of the functional corresponding to this system of the equations the sufficient conditions for stability of system solutions are established. Definition of elastic body stability corresponds to the Lyapunov's concept of stability of dynamic systems.

**Key Words:** aerohydroelasticity, mathematical modeling, dynamic stability, elastic plate, subsonic flow of gas, partial differential equations, functional.

## REFERENCES

1. L. I. Mogilevich, V. S. Popov, L. N. Rabinsky, E. L. Kuznetsova, "Mathematical model of the plate on elastic foundation interacting with pulsating viscous liquid layer", *Applied Mathematical Sciences*, **10**:21 (2016), 1101–1109.
2. V. V. Vedeneev, "Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds", *Journal of Fluids and Structures*, **40** (2013), 366–372.
3. V. B. Kurzin, "Продольные колебания пластины, обтекаемой вязкой жидкостью в канале, обусловленные вынужденными поперечными колебаниями пластины", *Applied mechanics and technical physics*, **52**:3 (2011), 153–157 (In Russ.).
4. V. G. Sokolov, I. O. Razov, "Parametrical vibrations and dynamic stability of long-distance gas pipelines at above-ground laying", *Bulletin of Civil Engineers*, **43**:2 (2014), 65–68 (In Russ.).
5. E. Aulisa, A. Ibragimov, E. Y. Kaya-Cekin, "Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid", *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **7**, **6** (2014), 1133–1148.
6. A. N. Kounadis, "Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping", *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **42**:1 (2007), 24–35.
7. S. Willems, A. Gulhan and B. Esser, "Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow", *Progress in Flight Physics*, **5** (2013), 285–308.

<sup>3</sup> **Andrey V. Ankilov**, Associate Professor, Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets Str., Ulyanovsk 432027, Russia), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-5946-8535>, [ankil@ulstu.ru](mailto:ankil@ulstu.ru)

<sup>4</sup> **Petr A. Velmisov**, Head of Department of Higher Mathematics, Ulyanovsk State Technical University (32 Severny Venets Str., Ulyanovsk 432027, Russia), Dr. Sci. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0001-7825-7015>, [velmisov@ulstu.ru](mailto:velmisov@ulstu.ru).

8. P. A. Velmisov, Yu. A. Reshetnikov, *Stability of viscoelastic plates at aerohydrodynamic influence*, Saratov State University, Saratov, 1994 (In Russ.), 176 c.
9. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Dynamics and stability of elastic plates at aerohydrodynamic influence*, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2009 (In Russ.), 220 c.
10. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Mathematical modeling in problems of dynamic stability of deformable elements of constructions at aerohydrodynamic influence*, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2013 (In Russ.), 322 c.
11. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Lyapunov functionals in some problems of dynamic stability of aeroelastic constructions*, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2015 (In Russ.), 146 c.
12. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, *Stability of viscoelastic elements of walls of flowing channels*, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk, 2000 (In Russ.), 115 c.
13. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, "Stability of solutions to an aerohydroelasticity problem", *Journal of Mathematical Sciences*, **219**:1 (2016), 14–26.
14. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, "Stability of solutions of initial boundary value problem of aerohydroelasticity", *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions.*, **59** (2016), 35–52 (In Russ.).
15. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, Yu. A. Tamarova, "Research of dynamics and stability of an elastic element of the flow channel", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **18**:1 (2016), 94–107 (In Russ.).
16. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, "Stability of viscoelastic elements of bearing surface in subsonic flow", *Zhurnal Srednevolzhskogo Matematicheskogo Obshchestva*, **9**:1 (2007), 69–81 (In Russ.).
17. A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, E. P. Semenova, "Research of dynamic stability of elastic elements of channel walls", *Bulletin of Saratov State Technical University*, **2**:1 (38) (2009), 7–17 (In Russ.).
18. M. A. Lavrentev, *Methods of complex variable functions theories*, Science, M., 1973 (In Russ.), 736 c.
19. F. D. Gahov, *Boundary value problems*, Publishing house of physical and mathematical literature, M., 1963 (In Russ.), 640 c.
20. L. Kollatc, *Eigenvalue problems*, Science, M., 1968 (In Russ.), 503 c.

*Submitted 18.04.2017*

УДК 517.958:531.12; 534.11

## Вычисление собственных частот каната движущегося в продольном направлении

© В. Н. Анисимов<sup>1</sup>, В. Л. Литвинов<sup>2</sup>

**Аннотация.** В статье исследуются колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами. При постоянной скорости продольного движения колебания каната характеризуются набором собственных частот. В случае отсутствия сопротивления среды для решения задачи использовано дискретное интегральное преобразование Фурье. В результате в виде ряда получено уравнение, позволяющее найти точные значения собственных частот. При наличии сопротивления среды задача решалась методом Канторовича-Галеркина. Полученное уравнение позволяет найти приближённые значения двух первых собственных частот. Сравнением точных и приближённых частот оценена точность решения, полученного методом Канторовича-Галеркина. В статье проанализировано, как влияет скорость продольного движения каната на форму собственных колебаний. Решение произведено в безразмерных переменных, что позволяет использовать полученные результаты для расчёта колебаний широкого круга технических объектов.

**Ключевые слова:** колебания объектов с движущимися границами, краевые задачи, математические модели, резонансные свойства.

### 1. Введение

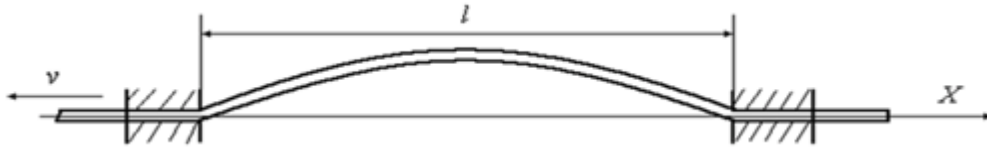
В статье исследуются поперечные колебания каната, движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Объект исследования относится к широкому кругу колеблющихся одномерных объектов с движущимися границами и нагрузками. Такие объекты широко распространены в технике. Это канаты грузоподъёмных установок [1, 2, 3], гибкие звенья передач [4, 5, 6], балки [7], лентопротяжные механизмы [8], конвейеры [9, 10] и т.д. Наличие движущихся границ делает неприменимыми к решению таких краевых задач классические методы математической физики, поэтому они в настоящее время изучены недостаточно.

<sup>1</sup> **Анисимов Валерий Николаевич**, заведующий кафедрой Общетеоретических дисциплин Сызранского филиала ФГБОУ ВО «СамГТУ» (446001, Россия, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, д.45.), кандидат физико-математических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1346-167X>, [anisimov170159@mail.ru](mailto:anisimov170159@mail.ru)

<sup>2</sup> **Литвинов Владислав Львович**, заместитель заведующего кафедрой Общетеоретических дисциплин Сызранского филиала ФГБОУ ВО «СамГТУ» (446001, Россия, Самарская обл., Сызрань, ул. Советская, д.45.), кандидат технических наук, ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>, [vladlitvinov@rambler.ru](mailto:vladlitvinov@rambler.ru)

## 2. Постановка задачи

Схема объекта изучения изображена на рисунке 2.1.



Р и с у н о к 2.1  
Схема объекта

Уравнение, учитывающее изгибную жёсткость, натяжение каната и сопротивление внешней среды, имеет вид [11]:

$$u_{tt}(x, t) + bu_{xxxx}(x, t) - a^2u_{xx}(x, t) + Gu_t(x, t) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь  $u(x, t)$  – поперечное смещение точки каната с координатой  $x$  в момент времени  $t$ ;  $b = \frac{EI}{\rho}$  ( $E$  – модуль упругости материала каната;  $I$  – осевой момент инерции сечения каната,  $\rho$  – масса единицы длины каната);  $a^2 = \frac{T}{\rho}$  ( $T$  – натяжение каната);  $G$  – коэффициент сопротивления среды (сила, действующая на единицу длины струны при единичной скорости поперечного движения). Граничные условия имеют вид:

$$u(vt, t) = 0; u(vt + l, t) = 0; u_x(vt, t) = 0; u_x(vt + l, t) = 0, \quad (2.2)$$

где  $v$  – скорость продольного движения каната,  $l$  – длина колеблющейся части. Введем безразмерные переменные:

$$u(x, t) = U(\xi, \tau); \xi = \frac{2\pi(x - vt)}{l}; \tau = \frac{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}}{l}t.$$

В результате получим задачу с условиями, заданными на неподвижных границах:

$$U_{\tau\tau}(\xi, \tau) + \beta U_{\xi\xi\xi\xi}(\xi, \tau) - U_{\xi\xi}(\xi, \tau) - \gamma U_{\xi\tau}(\xi, \tau) + \lambda U_{\tau}(\xi, \tau) - \eta U_{\xi}(\xi, \tau) = 0; \quad (2.3)$$

$$U(0, \tau) = 0; U(2\pi, \tau) = 0; U_{\xi}(0, \tau) = 0; U_{\xi}(2\pi, \tau) = 0. \quad (2.4)$$

Здесь

$$\beta = \frac{4\pi^2 b}{l^2(a^2 - v^2)}; \lambda = \frac{Gl}{2\pi\sqrt{a^2 - v^2}}; \gamma = \frac{2v}{\sqrt{a^2 - v^2}}; \eta = \frac{Gvl}{2\pi(a^2 - v^2)}.$$

Четыре коэффициента уравнения (2.1) могут быть выражены через три безразмерных параметра:

$$\alpha = \frac{v}{a}; \theta = \frac{4\pi^2 b}{l^2 a^2}; D = \frac{Gl}{2\pi\alpha}.$$

Параметры характеризуют:  $\alpha$  – скорость продольного движения каната;  $\theta$  – изгибную жёсткость;  $D$  – сопротивление среды.

Через безразмерные параметры коэффициенты уравнения (2.3) выражаются следующим образом:

$$\beta = \frac{\theta}{1 - \alpha^2}; \gamma = \frac{2\alpha}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \lambda = \frac{D}{\sqrt{1 - \alpha^2}}; \eta = \frac{\alpha D}{1 - \alpha^2}.$$

### 3. Решение задачи

Решим задачу (2.3), (2.4) без учёта изгибной жёсткости ( $\beta = 0$ ). Решение будем искать в виде [12]:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{i\omega\tau}.$$

Для вычисления функции  $\mu(\xi)$  получим следующую краевую задачу:

$$\mu''(\xi) + (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) - (\omega^2 + \lambda\omega)\mu(\xi) = 0; \quad (3.1)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0. \quad (3.2)$$

Решение задачи (3.1-3.2) не представляет затруднений. В результате решения получено выражение для собственных частот колебаний:

$$\omega_n = -\frac{\gamma\eta + 2\lambda}{\gamma^2 + 4} + i\frac{\sqrt{(\gamma^2 + 4)(n^2 + \eta^2) - (\gamma\eta + 2\lambda)^2}}{\gamma^2 + 4}, \quad (3.3)$$

Здесь  $i$  – мнимая единица;  $n$  – порядковый номер частоты. Действительная часть выражения (3.3) характеризует затухание колебаний, а мнимая частоту. При отсутствии затухания ( $\lambda = \eta = 0$ ) выражение (3.3) примет вид:

$$\omega_n = i\frac{n}{\sqrt{\gamma^2 + 4}}. \quad (3.4)$$

При этом собственные функции определяются выражением:

$$\mu(\xi) = \sin\left(\frac{(1-\alpha)n\xi}{2}\right) + \sin\left(\frac{(1+\alpha)n\xi}{2}\right).$$

Как изменяются собственные функции  $\mu(\xi)$  в зависимости от параметра  $\alpha$  показано на рис. 3.1.

Анализ рисунка 3.1 показывает, что чем больше скорость движения каната, тем больше искажаются собственные функции. Искажение происходит на границе, движущейся навстречу бегущим волнам.

Решим задачу с учётом изгибной жёсткости, но без учета затухания ( $\lambda = \eta = 0$ ). Решение будем искать в виде [12]

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{i\omega\tau}.$$

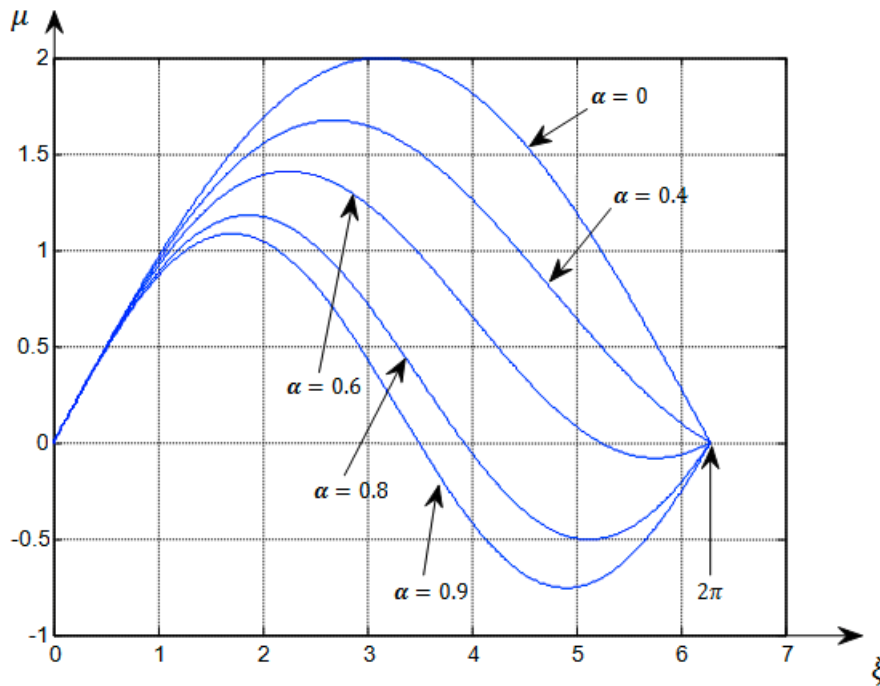
Для определения  $\mu(\xi)$  получим следующую задачу:

$$\beta\mu''''(\xi) - \mu''(\xi) - i\gamma\omega\mu'(\xi) - \omega^2\mu(\xi) = 0; \quad (3.5)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0; \mu'(0) = 0; \mu'(2\pi) = 0. \quad (3.6)$$

Для решения используем дискретное интегральное преобразование Фурье [13]:

$$F(p) = \int_0^{2\pi} \mu(\xi)e^{ip\xi}d\xi; p = 0, \pm 1, \pm 2...$$



Р и с у н о к 3.1

Зависимость собственных функций от скорости продольного движения каната

В результате применения преобразования получим:

$$F(p) = \frac{ip\beta\mu_2 - \beta\mu_3}{\beta p^4 + p^2 - \beta\omega p - \omega^2},$$

где  $\mu_2 = \mu''(2\pi) - \mu''(0)$ ;  $\mu_3 = \mu'''(2\pi) - \mu'''(0)$ .

Обратное интегральное преобразование имеет вид:

$$\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{p=-\infty}^{\infty} F(p)e^{-ip\xi}.$$

Объединяя в данном равенстве члены при  $p$  и  $-p$ , получим:

$$\mu(\xi) = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{\beta\mu_3}{\omega^2} + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{ip\beta\mu_2 B_p - \beta\mu_3 A_p}{A_p^2 - B_p^2} \cos(p\xi) \right) + \frac{i}{\pi} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{-ip\beta\mu_2 A_p + \beta\mu_3 B_p}{A_p^2 - B_p^2} \sin(p\xi). \quad (3.7)$$

Здесь  $A_p = \beta p^4 + p^2 - \omega^2$ ;  $B_p = \gamma\omega p$ .

При применении интегрального преобразования было учтено, что

$$\mu(2\pi) - \mu(0) = 0; \mu'(2\pi) - \mu'(0) = 0;$$

Поэтому, чтобы выполнялись граничные условия (3.6), две произвольные постоянные  $\mu_2$  и  $\mu_3$  должны быть получены из условий:  $\mu(0) = 0$  и  $\mu'(0) = 0$ . Подставляя в данные условия  $\mu(\xi)$ , определяемое выражением (3.7), получим линейную однородную систему алгебраических уравнений относительно  $\mu_2$  и  $\mu_3$ . Из равенства нулю её определителя получается уравнение собственных частот:

$$\left(\frac{\beta}{\omega^2} - 2 \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta A_p}{A_p^2 - B_p^2}\right) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta p^2 A_p}{A_p^2 - B_p^2} + 2 \left(\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\beta p B_p}{A_p^2 - B_p^2}\right)^2 = 0. \quad (3.8)$$

Решим задачу (2.3), (2.4) методом Канторовича-Галеркина [14, 15]. Решение будем искать в виде:

$$U(\xi, \tau) = \mu(\xi)e^{\omega\tau}.$$

Для определения  $\mu(\xi)$  получим следующую задачу:

$$L[\mu(\xi)] = \beta\mu''''(\xi) - \mu''(\xi) - (\gamma\omega + \eta)\mu'(\xi) + (\omega^2 + \omega\lambda)(\xi) = 0; \quad (3.9)$$

$$\mu(0) = 0; \mu(2\pi) = 0; \mu'(0) = 0; \mu'(2\pi) = 0. \quad (3.10)$$

Функцию  $\mu(\xi)$  возьмём в виде:

$$\mu(\xi) = C_1\mu_1(\xi) + C_2\mu_2(\xi),$$

где  $\mu_1(\xi) = \xi^2(\xi - 2\pi)^2$ ;  $\mu_2(\xi) = \xi^2(\xi - 2\pi)^2(\xi - \pi)$ . Данные функции удовлетворяют граничным условиям (3.10) и являются ортогональными на интервале  $(0, 2\pi)$ .

Согласно методу Канторовича-Галеркина [14, 15], произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  находятся из следующей однородной системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} L[\mu(\xi)]\mu_1(\xi)d\xi &= 0; \\ \int_0^{2\pi} L[\mu(\xi)]\mu_2(\xi)d\xi &= 0. \end{aligned}$$

Дифференциальный оператор  $L[\mu(\xi)]$  определяется выражением (3.9).

Произведя интегрирование и приравняв определитель системы к нулю, получим уравнение собственных частот:

$$\begin{aligned} \omega^4 + 2\lambda\omega^3 + \omega^2(2.86457\beta + \lambda^2 + 0.27795\gamma^2 + 1.41853) + \\ + \omega(2.86457\lambda\beta + 1.41852\lambda + 0.55591\gamma\eta) + \\ + (0.82177\beta^2 + 0.77244\beta + 0.27795\eta^2 + 0.69921) = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Данное уравнение позволяет получить две первые собственные частоты поперечных колебаний каната.

Уравнение (3.8) было решено численно при различных значениях параметров  $\alpha$  и  $\theta$ . Результаты вычислений приведены в таблице 1. При  $\theta = 0$  ряды, входящие в уравнение (3.8) расходятся, поэтому значения частот были вычислены по формуле (3.4).

Уравнение (3.11) решалось в среде MATLAB. Для оценки точности метода Канторовича-Галеркина уравнение (3.11) было решено для случая отсутствия затухания ( $\lambda = \eta = 0$ ). Результаты вычислений приведены в таблице 1. При каждом значении  $\alpha$  приведены следующие частоты: точное значение первой собственной частоты, точное значение второй собственной частоты, приближённое значение первой собственной частоты, приближённое значение второй собственной частоты. При отсутствии изгибной жёсткости



Таблица 1: Зависимость частоты от скорости продольного движения каната и изгибной жесткости

$\alpha \backslash \theta$	0	1	2	3	4	5	примечания
0	0.500	0.792	0.975	1.129	1.263	1.385	$\omega_1$ (точн.)
	1.000	1.898	2.450	2.914	3.307	3.658	$\omega_2$ (точн.)
		0.792	0.940	1.086	1.220	1.342	$\omega_1$ (прибл.)
0.2		1.912	2.503	2.972	3.375	3.734	$\omega_2$ (прибл.)
	0.490	0.795	0.985	1.143	1.281	1.406	$\omega_1$ (точн.)
	0.980	1.924	2.501	2.967	3.369	3.728	$\omega_2$ (точн.)
0.4		0.792	0.948	1.100	1.239	1.364	$\omega_1$ (прибл.)
		1.955	2.556	3.034	3.345	3.811	$\omega_2$ (прибл.)
	0.458	0.806	1.019	1.193	1.344	1.479	$\omega_1$ (точн.)
0.6	0.917	2.015	2.644	3.148	3.581	3.966	$\omega_2$ (точн.)
		0.795	0.980	1.150	1.302	1.439	$\omega_1$ (прибл.)
		2.100	2.737	3.246	3.685	4.076	$\omega_2$ (прибл.)
0.8	0.400	0.841	1.101	1.311	1.490	1.650	$\omega_1$ (точн.)
	0.800	2.227	2.973	3.561	4.063	4.510	$\omega_2$ (точн.)
		0.818	1.063	1.271	1.452	1.615	$\omega_1$ (прибл.)
0.9		2.419	3.141	3.723	4.224	4.671	$\omega_2$ (прибл.)
	0.300	0.966	1.346	1.643	1.894	2.117	$\omega_1$ (точн.)
	0.600	2.817	4.221	4.662	5.343	5.946	$\omega_2$ (точн.)
0.99		0.936	1.314	1.613	1.868	2.093	$\omega_1$ (прибл.)
		3.237	4.193	4.966	5.633	6.229	$\omega_2$ (прибл.)
	0.218	1.200	1.750	2.174	2.530	2.842	$\omega_1$ (точн.)
0.99	0.436	3.748	5.220	6.344	7.293	8.130	$\omega_2$ (точн.)
		1.178	1.732	2.159	2.518	2.833	$\omega_1$ (прибл.)
		4.455	5.732	6.836	7.754	8.574	$\omega_2$ (прибл.)
0.99	0.071	3.300	5.089	6.445	7.576	8.565	$\omega_1$ (точн.)
	0.141	11.180	15.847	19.376	22.338	24.946	$\omega_2$ (точн.)
		3.346	5.136	6.445	7.624	8.614	$\omega_1$ (прибл.)
		13.745	17.824	21.116	23.955	26.490	$\omega_2$ (прибл.)

( $\theta = 0$ ) частоты, полученные методом Канторовича-Галеркина, имеют большую погрешность, поэтому в таблице они не приведены. В этом случае они могут быть вычислены по формуле (3.3).

В таблице жирным шрифтом выделены приближённые частоты имеющие погрешность более 5%. Анализ табличных данных показывает, что погрешность частот, полученных методом Канторовича-Галеркина, увеличивается с увеличением  $\alpha$  и уменьшается с увеличением  $\theta$ .

Уравнение (3.8) позволяет получить любую собственную частоту. Например, при  $\alpha = 0.4$  и  $\theta = 2$  получены следующие собственные частоты:

$$\omega_1 = 1.019; \omega_2 = 2.644; \omega_3 = 4.995; \omega_4 = 8.103; \omega_5 = 11.972; \omega_6 = 16.620.$$

Уравнение (3.11) позволяет учесть затухание ( $D \neq 0$ ). Например, для параметров  $\alpha = 0.8$ ;  $\theta = 2$ ;  $D = 0.1$  получены следующие частоты:

$$\omega_1 = -0.0859 + 1.312i; \omega_2 = -0.0807 + 4.192i.$$

Действительная часть частот характеризует затухание колебаний, а мнимая частоту.

Если  $\omega_n$  безразмерная частота (задача (2.3), (2.4)), то частота исходной задачи (2.1), (2.2) находится по формуле:

$$W_n = \frac{\pi(\alpha^2 - \nu^2)\beta\omega_n}{l\nu}.$$

#### 4. Заключение

В статье произведен анализ колебаний каната движущегося в продольном направлении. Модель учитывает натяжение каната, изгибную жёсткость и сопротивление внешней среды. Решение произведено точным и приближённым методами, что позволяет оценить применимость метода Канторовича-Галеркина для описания колебаний систем с движущимися границами. Полученные количественные результаты могут быть использованы для расчёта широкого круга технических объектов.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. О. А. Горошко, Г. Н. Савин, *Введение в механику деформируемых одномерных тел переменной длины*, Наукова думка, Киев, 1971, 270 с.
2. W. D. Zhu, Y. Zheng, "Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control", *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, **1** (2006), 66–78.
3. В. Н. Анисимов, "Продольные резонансные колебания вязкоупругого каната грузоподъёмной установки", *Известия Самарского научного центра Российской академии наук*, **18:4** (2016), 128-133.
4. Ю. П. Самарин, В. Н. Анисимов, "Вынужденные поперечные колебания гибкого звена при разгоне уравнений", *Изв. вузов. Машиностроение.*, 1986, № 12, 17–21.
5. А. И. Весницкий, *Волны в системах с движущимися границами*, Физматлит, М., 2001, 320 с.
6. В. С. Тихонов, А. А. Абрамов, "Поперечные колебания гибкой нити переменной длины в потоке", *Вестник МГУ. Сер. 1*, 1993, № 5, 45-48.
7. А. А. Лежнева, "Изгибные колебания балки переменной длины", *Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела*, 1970, № 1, 159–161.
8. К. И. Рагульский, "Вопросы динамики прецизионных лентопротяжных механизмов", *Динамика машин*, Наука, М., 1971, 169–177.
9. В. И. Ерофеев, Д. А. Колесов, Е. Е. Лисенкова, "Исследование волновых процессов в одномерной системе, лежащей на упруго-инерционном основании, с движущейся нагрузкой", *Вестник научно-технического развития*, 2013, № 6 (70), 18–29.
10. Х. С. Хосаев, "Математическое описание динамических характеристик канатного става ленточного конвейера", *Тр. Сев.-Кавк. гос. технол. ун-та*, 2001, № 8, 234–239.

11. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Математические модели продольно-поперечных колебаний объектов с движущимися границами”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки*, **19**:2 (2015), 382–397.
12. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, *Резонансные свойства механических объектов с движущимися границами: монография*, Самар. гос. техн. ун-т, Самара, 2009, 131 с.
13. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, И. В. Корпен, “Об одном методе получения точного решения волнового уравнения, описывающего колебания систем с движущимися границами”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки*, 2012, № 3(28), 145–151.
14. В. Н. Анисимов, В. Л. Литвинов, “Исследование резонансных свойств механических объектов при помощи метода Канторовича-Галёркина”, *Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки*, 2009, № 1(18), 149–158.
15. Hu Ding, Li-Qun Chen, “Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams”, *J. Sound and Vibr.*, **17** (2010), 3484–3494.

Поступила 20.04.2017

MSC2010 35R37; 35G30, 35Q70

## Calculation of eigen frequencies of a rope moving in longitudinal direction

© V. N. Anisimov<sup>3</sup>, V. L. Litvinov<sup>4</sup>

**Abstract.** The article studies the oscillations of a rope moving in the longitudinal direction. The model takes into account the tension of the rope, flexural stiffness and resistance of the external environment. The object of the study refers to a wide range of oscillating one-dimensional objects with moving boundaries. At a constant speed of longitudinal motion, the rope oscillations are characterized by a set of eigenfrequencies. In the absence of medium resistance a discrete integral Fourier transform is used to solve the problem. As a result, an equation is obtained in the form of series, that makes it possible to find the exact values of the eigenfrequencies. In the presence of medium resistance the problem was solved by the Kantorovich-Galerkin method. The equation obtained allows us to find approximate values of the first two eigenfrequencies. A comparison of the exact and approximate frequencies estimates the accuracy of the solution obtained by the Kantorovich-Galerkin method. The article analyzes how the speed of longitudinal rope motion affects the shape of natural oscillations. The solution is made in dimensionless variables. It allows us to use the obtained results to calculate the oscillations of a wide range of technical objects.

**Key Words:** oscillations of objects with moving boundaries, boundary value problems, mathematical models, resonant properties.

## REFERENCES

1. O. A. Goroshko, G. N. Savin, *Vvedenie v mekhaniku deformiruemyykh odnomernyykh tel peremennoy dliny [Introduction in mechanics of one dimensional deformable bodies of variable length]*, Naukova Dumka, Kiev, 1971 (In Russian), 270 p.
2. W. D. Zhu, Y. Zheng, "Theoretical and experimental investigation of elevator cable dynamics and control", *Trans. ASME. J. Vibr. And Acoust.*, **1** (2006), 66–78.
3. V. N. Anisimov, "[Longitudinal resonance oscillations of a viscoelastic rope of a load-lifting installation]", *Izvestiya Samara Scientific Center, Russian Academy of Sciences*, **18:4** (2016), 128-133 (In Russian).
4. Yu. P. Samarin, V. N. Anisimov, "[Forced transverse vibrations of the flexible link at dispersal]", *Izv. Vuzov. Mashinostroyeniye*, **12** (1986), 17–21 (In Russian).
5. A. I. Vesnitskii, *Volny v sistemakh s dvizhushchimisya granitsami [Waves in systems with moving boundaries and loads]*, Fizmatlit, Moscow, 2001 (In Russian), 320 p.
6. V. S. Tikhonov, A. A. Abramov, "[Transverse Vibrations of a Flexible String with Time-Varying Length in Flow]", *Vest. Mosk. Univ. Ser. 1. Matematika*, **5** (1993), 45-48 (In Russian).
7. A. A. Lezhnyva, "[Bending vibration of beam of variable length]", *Izv. Acad. Nauk USSR. Mechanics of solidstate*, **1** (1970), 159–161 (In Russian).

<sup>3</sup> **Anisimov Valeriy N.**, Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran' Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya str., Syzran', Samara region, 446001, Russian Federation), Ph.D. (Physics and Mathematics), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-1346-167X>, [anisimov170159@mail.ru](mailto:anisimov170159@mail.ru)

<sup>4</sup> **Litvinov Vladislav L.**, Deputy Head of Dept., Dept. of General-Theoretical Disciplines, Syzran' Branch of Samara State Technical University (45, Sovetskaya str., Syzran', Samara region, 446001, Russian Federation), Ph.D. (Technical), ORCID: <http://orcid.org/0000-0002-6108-803X>, [vladlitvinov@rambler.ru](mailto:vladlitvinov@rambler.ru)

8. K. I. Ragulsky, “[Questions of the Dynamics of Precision Tape-Driving Mechanisms]”, *The Dynamics of Machines*, Nauka, Moscow, 1971, 169–177 (In Russian).
9. V. I. Erofeev, D. A. Kolesov, E. E. Lisenkova, “[Investigation of wave processes in a one-dimensional system lying on an elastic-inertial base, with a moving load]”, *Bulletin of Scientific and Technical Development*, **6 (70)** (2013), 18–29 (In Russian).
10. Kh. S. Khosaev, “[Mathematical description of the dynamic characteristics of the rope belt of a belt conveyor]”, *Tr. North-Caucasus. State. Technol. University*, **8** (2001), 234–239 (In Russian).
11. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “[Mathematical models of nonlinear longitudinal-cross oscillations of object with moving borders]”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **19:2** (2015), 382–397 (In Russian).
12. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, *Resonance properties of mechanical objects with moving boundaries: monograph*, Samar. State. Tech. University, Samar, 2009 (In Russian), 131 c.
13. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, I. V. Korpen, “[On a method of analytical solution of wave equation describing the oscillation system with moving boundaries]”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, **3(28)** (2012), 145–151 (In Russian).
14. V. N. Anisimov, V. L. Litvinov, “[Investigation of resonance characteristics of mechanical objects with moving borders by application of the Kantorovich-Galerkin method]”, *Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ. Ser. Fiz.-Mt. Nauki*, **1(18)** (2009), 149–158 (In Russian).
15. Hu Ding, Li-Qun Chen, “Galerkin methods for natural frequencies of high-speed axially moving beams”, *J. Sound and Vibr.*, **17** (2010), 3484–3494.

*Submitted 20.04.2017*

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

## ПАМЯТИ АЛЕКСЕЕНКО СЕРГЕЯ НИКОЛАЕВИЧА



27 октября 2016 года после тяжёлой болезни скончался Алексеенко Сергей Николаевич. Сергей Николаевич родился 17 декабря 1948 года в городе Фрунзе (ныне Бишкек). Его мать Людмила Сергеевна и отец Николай Константинович были геологами, поэтому воспитанием внука занимался дедушка по материнской линии Климов Сергей Александрович. Окончив школу в 1966 году, Сергей Николаевич поступил в Киргизский государственный университет по специальности математика, преподаватель математики. С тех пор жизнь С.Н. Алексеенко была связана с математическими исследованиями и преподаванием математики.

По результатам активной научной работы в 1976 году он защитил кандидатскую диссертацию по специальности дифференциальные и интегральные уравнения на тему «Асимптотические оценки решений сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при производной», выполненную под руководством И.М. Иманалиева. Одним из оппонентов диссертации был известный математик В.А. Треногин.

В кандидатской диссертации С.Н. Алексеенко впервые разработана асимптотическая теория и установлена равномерная относительно малого параметра оценка остаточного члена для нелинейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной.

Докторская диссертация по специальности дифференциальные уравнения на тему «Об исчезающей вязкости в трёхмерных краевых задачах динамики несжимаемой жидкости» была защищена в Бишкеке в 1994 году. Впоследствии Сергей Николаевич для получения

российского диплома доктора наук повторно защитил эту диссертацию в диссертационном совете Новосибирского государственного университета. В работе использован математический аппарат высокого уровня: метод априорных оценок решений дифференциальных уравнений в частных производных, метод пограничных функций, теория функциональных пространств Соболева, аппарат обобщённых и слабых решений, построены специальные квазинормированные пространства. Главные результаты диссертации: при стремлении к нулю параметра, характеризующего вязкость, доказана слабая сходимость решений начально-краевых задач для трёхмерной линеаризованной системы уравнений Навье-Стокса; для пространственных областей определённого вида, построено асимптотическое представление решения, содержащее функции погранслоя, для полной нелинейной системы уравнений Навье-Стокса с условием регулярного проскальзывания вдоль твердых стенок.

Начиная с 1991 года, С.Н. Алексеенко занимался разработкой нового метода исследования дифференциальных уравнений в частных производных, названного впоследствии методом дополнительного аргумента (МДА). Согласно этому методу исходная система дифференциальных уравнений приводится к удобной для исследования системе интегральных уравнений. С.Н. Алексеенко совместно с М.И. Иманалиевым в работах [4–7] концептуально разработал МДА. Этот метод обладает рядом преимуществ по сравнению с методом характеристик. МДА довольно быстро привлёк внимание специалистов. С.Н. Алексеенко распространил МДА на уравнения высших порядков и на системы уравнений в частных производных.

С.Н. Алексеенко опубликовал около 100 печатных научных работ, выступал с докладами на многочисленных научных конференциях разного уровня, под его руководством защищено несколько кандидатских диссертаций. В Кыргызско-Российском Славянском университете он являлся председателем диссертационного совета от Российского ВАК, заведовал кафедрой прикладной математики, был членом диссертационного совета в Институте математики. С.Н. Алексеенко неоднократно выступал в качестве оппонента на защитах докторских и кандидатских диссертаций.

Параллельно с научной работой Сергей Николаевич всегда занимался преподавательской деятельностью. Он читал математические курсы для обучающихся различных уровней. Им изданы многочисленные методические разработки и учебные пособия. В педагогической работе он выделялся аккуратностью, высокой квалификацией, профессионализмом. С.Н. Алексеенко успешно руководил НИРС, дипломными и курсовыми работами, руководил аспирантами. Сергей Николаевич прошел путь от ассистента до профессора и от младшего научного сотрудника до главного научного сотрудника.

В 2007 году С.Н. Алексеенко с семьёй переехал из Бишкека в Нижний Новгород, где начал работать на кафедре математического анализа в Нижегородском государственном педагогическом университете. С 2009 года он преподавал в Нижегородском государственном техническом университете на кафедре прикладной математики в должности профессора. Преподавал Сергей Николаевич преимущественно на специальности «Прикладная математика и информатика»: вёл практические занятия и читал лекции, как по основным курсам, так и по спецкурсам, которые определялись направленностью его научной деятельности, готовил методический материал разного уровня, принимал самое активное участие в подготовке кафедры к плановой аттестации вуза, руководил научной работой бакалавров, магистров и аспирантов, совершенствуя своё детище — МДА.

С.Н. Алексеенко принимал активное участие в работе научных конференций по дифференциальным уравнениям и школ-семинаров по математическому моделированию, проводимых Национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва, Средне-Волжским математическим обществом и Институтом приклад-

ной математики Российской академии наук им. М.В. Келдыша. Его энергичное участие играло бесценную образовательную и воспитательную роль практически для всех участников этих научных форумов.

Сергей Николаевич был доброжелательным человеком и надёжным товарищем. Служба науке и образованию всегда являлась его основным жизненным делом. Светлая память о Сергее Николаевиче будет жить в наших сердцах.

Избранные работы С.Н.Алексеевко:

1. Алексеевко С.Н. Асимптотическое решение краевой задачи для нелинейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, Илим, Фрунзе, 1974, в. 10.

2. Алексеевко С.Н. Об исчезающей вязкости в линеаризованной задаче протекания несжимаемой жидкости // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, Илим, Фрунзе, 1986, в. 18.

3. Алексеевко С.Н. Влияние свойств границы на поведение решений линеаризованной системы Навье-Стокса при вырождении по вязкости // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям, Илим, Фрунзе, 1987, в. 20.

4. Алексеевко С.Н., Иманалиев М.И. К теории нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады Академии наук, 1992, Т. 323, № 3.

5. Алексеевко С.Н., Иманалиев М.И. К теории систем нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных типа Уизема // Доклады Академии наук, 1992, Т. 325, № 6.

6. Алексеевко С.Н., Иманалиев М.И. К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени // Доклады Академии наук, 1993, Т. 329, № 5.

7. Алексеевко С.Н., Иманалиев М.И. К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // Доклады Российской Академии наук, 2001, Т. 379, № 1.

8. Алексеевко С. Н., Нагорных С. Н., Алексеевко Н. С. Нестационарное диссипативное уравнение в частных производных первого порядка плотности дислокаций с квадратичной нелинейностью // Журнал Средневолжского математического общества. — 2012. — Т. 14, № 2. — С. 15–21.

*А.А. Куркин, С.Н. Нагорных, И.П. Рязанцева, А.Н. Мошкова, Т.А. Шемякина,*

*П.А. Шаманаев, Л.А. Сухарев, Р.В. Жалнин, Т.Ф. Мамедова,*

*С.М. Мурюмин, Д.И. Бояркин, Д.К. Егорова*



# Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском языке, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы на русском и английском языках:

- коды УДК и MSC 2010;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО - полностью, должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail;
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи (только на русском);
- список литературы.

Индекс предметной классификации (MSC 2010) по AMS используется для тематического разделения ссылок в двух реферативных базах — Mathematical Reviews (MR) Американского математического общества (American Mathematical Society, AMS) и Европейского математического союза (Zentralblatt MATH, zbMATH). Справочники кодов УДК и MSC 2010 можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.

**Аннотация** должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание

ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

В тексте аннотации следует применять значимые слова из текста статьи.

Сокращения и условные обозначения, кроме общеупотребительных (в том числе в англоязычных специальных текстах), применяют в исключительных случаях или дают их определения при первом употреблении.

Единицы физических величин следует приводить в международной системе СИ. Допускается приводить в круглых скобках рядом с величиной в системе СИ значение величины в системе единиц, использованной в исходном документе.

В аннотации не делаются ссылки на номер публикации в списке литературы к статье.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

В тексте реферата на английском языке следует применять терминологию, характерную для иностранных специальных текстов. Следует избегать употребления терминов, являющихся прямой калькой русскоязычных терминов. Необходимо соблюдать единство терминологии в пределах реферата.

Перечислим обязательные качества аннотаций на английском языке к русскоязычным статьям. Аннотации должны быть:

- информативными (не содержать общих слов);
- оригинальными (не быть калькой русскоязычной аннотации);
- содержательными (отражать основное содержание статьи и результаты исследований);

- структурированными (следовать логике описания результатов в статье);

- "англоязычными" (написаны качественным английским языком).

Объем аннотаций на русском и английском языках должны быть в среднем от 100 до 250 слов.

**Ключевые слова** должны отражать основное содержание статьи, по возможности не повторять термины заглавия и аннотации, использовать термины из текста статьи, а также термины, определяющие предметную область и включающие другие важные понятия, которые позволят облегчить и расширить возможности нахождения статьи средствами информационно-поисковой системы. Раздел **Ключевые слова** должен содержать от 5 до 15 слов.

**Текст статьи.** При изложении текста статьи необходимо придерживаться следующей структуры:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье;

- материалы и методы решения задачи и принятые допущения;
- результаты - основное содержание статьи;
- обсуждение и анализ полученных результатов и сопоставление их с ранее известными;
- заключение — выводы и рекомендации.

**Список литературы** должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье и их количество не должно превышать 20.

**Внимание! Новые правила.** *С этого номера в статью включается список литературы на английском языке. Список литературы имеет заголовок **References** и располагается после ключевых слов на английском языке.*

**Описание схем библиографических ссылок для раздела References.**

*Статьи в журнале на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- Перевод заглавия статьи на английский язык;
- Название русскоязычного источника (транслитерация);
- [Перевод названия источника на английский язык – парафраз (для журналов можно не делать)];
- Выходные данные с обозначениями на английском языке, либо только цифровые (последнее, в зависимости от применяемого стандарта описания);
- Указание на язык статьи (in Russ.) после описания статьи.

*Книги (монографии и сборники) на русском языке:*

- Автор(ы) (транслитерация);
- название книги (транслитерация);
- [Перевод названия книги в квадратных скобках];
- Выходные данные: место издания на английском языке - Moscow, St. Petersburg; издательство на английском языке, если это организация (Moscow St. Univ. Publ.) и транслитерация, если издательство имеет собственное название с указанием на английском, что это издательство: Nauka Publ.;
- Количество страниц в издании (250 p.);
- Указание на язык (in Russ.) после описания книги.

Список литературы на русском и английском языках оформляется согласно стилю цитирования, принятому для использования в области математики Американским математическим обществом (American Mathematical Society, AMS) и Европейским математическим союзом (Zentralblatt MATH, zbMATH). Для этого используется формат AMSBIB, реализованный в стилевом пакете svmbib.sty.

Для транслитерации русского алфавита латиницей необходимо использовать систему BGN (Board of Geographic Names). На сайте <http://translit.net/ru/bgn/> можно бесплатно воспользоваться программой транслитерации русского алфавита в латиницу.

*Список литературы на русском языке в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями **ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка**, располагается за списком цитируемой литературы на русском языке и должен быть закомментирован. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт [elibrary.ru](http://elibrary.ru). **ГОСТ Р 7.0.5.-2008 Библиографическая ссылка** можно скачать из раздела **Полезные материалы** меню **Для автора** на сайте журнала.*

Подробные технические инструкции по оформлению рукописей содержатся в материале **Правила верстки рукописей в системе LaTeX**.

## **Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References*.**

### **Статьи в журналах на русском языке:**

P. A. Shamanaev, "[On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the form of homogeneous vector polynomials]", *Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 5:1 (2003), 145–151 (In Russ.).

P. A. Shamanaev, "[The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay]", *Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva*, 18:3 (2016), 61–69 (In Russ.).

### **Статьи в журналах на английском языке:**

M. J. Berger, J. Olinger, "Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations *Journal of Computational Physics*, 53 (1984), 484–512.

### **Статьи в электронном журнале на русском языке:**

M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev, "[An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]", *Ogarev-online*, 20 (2016) (In Russ.), Available at: <http://journal.mrsu.ru/arts/algorithm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii>

### **Статьи в сборниках на русском языке:**

A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev, "[Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences] *Prikladnaya matematika i mekhanika* [Applied Mathematics and Mechanics], 10, UIGTU Publ., Ulyanovsk, 2014, 4-13 (In Russ.).

### **Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy, *Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti* [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems], Nauka Publ., Moscow, 1966 (In Russ.), 576 p.

### **Материалы конференций на русском языке:**

A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev, [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand], *Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы программ" imeni E. V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem* [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E. V. Voskresensky with international participation] (Saransk, 12-15 July 2016), SVMO Publ., 105-107 (In Russ.)

P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative], *Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nyim uravneniyam i dinamicheskim sistemam"* [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"] (Saransk, 12-15 July 2016), 231-233 (In Russ.).

### **Диссертации на русском языке:**

P. A. Shamanaev, *Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya* [Lyapunov transformations and stability of motion], Diss. ... kand. fiz.-mat. nauk [ PhD phys. and math. sci. diss.], Saransk, 1997 (In Russ), 145 p.

# Правила верстки рукописей в системе LaTeX

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья будет возвращена на доработку.*

Компиляцию статьи необходимо производить с помощью пакета MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте – <http://www.miktex.org>.

Для верстки рукописи используются два файла: файл-преамбула и файл-шаблон. Их можно получить на сайте журнала в разделе **Правила оформления рукописей**. Адрес доступа: <http://www.journal.svmo.ru/page/rules>.

Текст статьи должен быть помещен в файл-шаблон с именем <Фамилия-ИО>.tex (который включается командой `\input` в файл-преамбулу). Например, `\input{shamanaev.tex}`

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

**Оформление заголовков статьи.** Для оформления заголовков статьи на русском и английском языках следует использовать команды `\headerRus` и `\headerEn`, соответственно.

Эти команды имеют следующие аргументы:

{УДК или MSC 2010} {название статьи} {автор(ы)} {Автор1\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.}, Автор2\footnote {Фамилия Имя Отчество, Должность, место работы, адрес организации, ученая степень, ORCID, e-mail.} } {Аннотация} {Ключевые слова}

**Оформление текста статьи.** Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defn**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т. д.

Для вставок букв  $\phi$  и  $\epsilon$  необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`,

`\textit`. Например, для вставок формул  $\Gamma_i$ ,  $\mathcal{D}_i$  в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\mathcal{D}}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

**Оформление рисунков.** Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень\_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Оформление списков литературы.** Для оформления списков литературы на русском и английском языках следует использовать окружения **thebibliography** и **thebibliographyEn**, соответственно.

Каждая русскоязычная библиографическая ссылка оформляется командой

`\RBibitem{метка для ссылки на источник}`,

а англоязычная библиографическая ссылка — командой

`\Bibitem{метка для ссылки на источник}`.

Далее для описания библиографической ссылки следует использовать команды, реализующие формат AMSBIB и относящиеся к стилевому пакету `svmobib.sty`. Основой этого пакета является стилевой файл `amsbib.sty`. Более подробно эти команды описаны в инструкции `amsbib.pdf`.

Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в файле-преамбуле). В качестве имени меток для русскоязычных библиографических ссылок нужно использовать 'ФамилияRBibНомерСсылки', а для англоязычных библиографических ссылок — 'ФамилияBibНомерСсылки'.

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

## Примеры оформления библиографических ссылок для раздела *References* с помощью команд из стилевого пакета `svmobib.sty`

### Статьи в журналах на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib1}
\by P. A. Shamanaev
\paper [On the local reducibility of systems of differential equations with perturbation in the
form of homogeneous vector polynomials]
\jour Trudy Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2003
\vol 5
\issue 1
\pages 145–151
\lang In Russ.
```

```
\Bibitem{shamanaevBib2}
\by P. A. Shamanaev
\paper [The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with
a the perturbation in the form of small linear term with delay]
\jour Zhurnal Srednevolzhskogo matematicheskogo obshchestva
\yr 2016
\vol 18
\issue 3
\pages 61–69
\lang In Russ.
```

### Статьи в журналах на английском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib3}
\by M. J. Berger, J. Oliger
\paper Adaptive mesh refinement for hyperbolic partial differential equations
\jour Journal of Computational Physics
\yr 1984
\vol 53
\pages 484–512
```

### Статьи в электронном журнале на русском языке:

```
\Bibitem{shamanaevBib4}
\by M. S. Chelyshov, P. A. Shamanaev,
\paper [An algorithm for solving the problem of minimizing a quadratic functional with
nonlinear constraints by the method of orthogonal cyclic reduction]
\jour Ogarev-online
\vol 20
\yr 2016
\lang In Russ.
\elink Available at: http://journal.mrsu.ru/arts/algoritm-resheniya-zadachi-minimizacii-kvadratichnogo-funkcionala-s-nelinejnymi-ogranicheniyami-s-ispolzovaniem-metoda-ortogonalnoj-ciklicheskoj-redukcii
```

**Статьи в сборниках на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib5}  
\by A. V. Ankilov, P. A. Velmisov, A. V. Korneev  
\paper [Investigation of pipeline dynamics for delay of external influences]  
\inbook Prikladnaya matematika i mekhanika [Applied Mathematics and Mechanics]  
\publaddr Ulyanovsk  
\publ UIGTU Publ.  
\yr 2014  
\serial 10  
\pages 4–13  
\lang In Russ.

**Книги (монографии и сборники) на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib6}  
\by B. F. Bylov, R. E. Vinograd, D. M. Grobman, V. V. Nemyitskiy  
\book Teoriya pokazateley Lyapunova i ee prilozheniya k voprosam ustoychivosti [The theory of Lyapunov exponents and its applications to stability problems]  
\publaddr Moscow  
\publ Nauka Publ.  
\yr 1966  
\totalpages 576  
\lang In Russ.

**Материалы конференций на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib7}  
\by A. A. Kyashkin, B. V. Loginov, P. A. Shamanaev  
\inbook [On the branching of periodic solutions of linear inhomogeneous differential equations with a perturbation in the form of a small linear summand]  
\proc Materialy VII Vserossiyskoy nauchnoy molodezhnoy shkoly-seminar "Matematicheskoe modelirovanie, chislennye metody i komplekсы программ" imeni E. V. Voskresenskogo s mezhdunarodnym uchastiem [Proceeding of the VII All-Russian Scientific Youth School-Seminar "Mathematical Modeling, Numerical Methods and Program Complexes" named after E. V. Voskresensky with international participation]  
\procinfo Saransk, 12-15 July 2016  
\publ SVMO Publ.  
\pages 105–107  
\lang In Russ.

\Bibitem{shamanaevBib8}  
\by P. A. Shamanaev, A. A. Kyashkin, B. V. Loginov  
\inbook [Branching of solutions of linear inhomogeneous differential equations with a small perturbation in the derivative]  
\proc Tezisy dokladov "Mezhdunarodnoy konferentsii po differentsial'nym uravneniyam i dinamicheskim sistemam" [Proceeding of the "International Conference on Differential Equations and Dynamical Systems"]  
\procinfo Suzdal, 8-12 July 2016  
\pages 231–233  
\lang In Russ.



**Диссертации на русском языке:**

\Bibitem{shamanaevBib9}  
\by P. A. Shamanaev  
\thesis Lyapunovskie preobrazovaniya i ustoychivost' dvizheniya [Lyapunov transformations and stability of motion]  
\thesisinfo Diss. ...kand. fiz.-mat. nauk [PhD phys. and math. sci. diss.]  
\publaddr Saransk  
\yr 1997  
\totalpages 145  
\lang In Russ.

## Алфавитный указатель

Анисимов В. Н.	130	Кузнецов Е. Б.	13
Анкилов А. В.	116	Куренков Е. Д.	60
Болотин Л. Б.	13	Литвинов В. Л.	130
Вельмисов П. А.	116	Мамонов С. С.	67
Долгоносова А. Ю.	19	Рязанцева И. П.	77
Жиров А. Ю.	30	Сахаров А. Н.	88
Жужома Е. В.	38	Харламова А. О.	67
Исаенкова Н. В.	38	Шаманаев П. А.	102
Козлов М. В.	51	Шиловская А. А.	88

Язовцева О. С. 102

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

*Компьютерная верстка:* Атряхин В. А.

*Корректурa:* Язовцева О. С.

*Перевод:* Сыромясов А. О.

Дата выхода в свет 29.06.2017. Цена свободная.

Подписано в печать 01.06.2017. Формат 70x108 1/16. Объем 13,65 усл. печ.л. Тираж 100 экз. Заказ № 742. Типография Издательства Мордовского университета 430005, г. Саранск, ул. Советская, 24

---

**Для заметок**

**Для заметок**

