

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 18, № 4



2016

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н. П. ОГАРЁВА

Журнал Средневолжского математического общества

ТОМ 18, № 4

Издается с декабря 1998 года

Выходит четыре раза в год

Главный редактор

В. Ф. Тишкин

Институт прикладной математики

им. М. В. Келдыша РАН

Заместитель главного редактора

Н. Д. Кузьмичев

Национальный исследовательский

Мордовский государственный

университет им. Н. П. Огарёва

Ответственный секретарь

П. А. Шаманаев

Национальный исследовательский

Мордовский государственный

университет им. Н. П. Огарёва

Редакционная коллегия

А. С. Андреев

Ш. А. Алимов

А. М. Ахтямов

Ш. А. Аюпов

И. В. Бойков

П. А. Вельмисов

В. К. Горбунов

В. З. Гринес

Ю. Н. Дерюгин

А. П. Жабко

В. И. Жегалов

Т. Ш. Кальменов

А. М. Камачкин

Е. Б. Кузнецов

В. Н. Кризский

Б. В. Логинов

Anca Veronica Ion

С. И. Мартынов

П. П. Матус

О. В. Починка

В. П. Радченко

И. П. Рязанцева

М. С. Салахитдинов

С. И. Спивак

М. Т. Терехин

Редакционный совет

Н. Д. Морозкин

Башкирский государственный

университет

П. В. Сенин

Национальный исследовательский

Мордовский государственный

университет им. Н. П. Огарева

Л. А. Сухарев

Средне-Волжское

математическое общество

Н. Г. Ярушкина

Ульяновский государственный

технический университет

САРАНСК

2016

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва».

Издатель: Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Территория распространения: зарубежные страны, Российская Федерация.

Язык: русский.

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректурa: Язовцева О. С.

Перевод: Сыромясов А. О.

Адрес учредителя, издателя и редакции: 430005, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

Тел.: (8342) 27-02-56

E-mail для статей: journal@svmo.ru

Web: <http://journal.svmo.ru>

© Оформление. Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», 2016

Дата выхода в свет 29.12.2016. Цена свободная.

Подписано в печать 01.12.2016. Формат 70x108 1/16. Объем 10,46 усл. печ.л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1681.

Типография Издательства Мордовского университета

430005, г. Саранск, ул. Советская, 24

Содержание

ОТ РЕДАКЦИИ	6
-------------------	---

МАТЕМАТИКА

А. С. Андреев, Л. С. Тахтенкова

Об устойчивости и стабилизации нелинейного уравнения второго порядка	8
1. Введение	8
2. Постановка задачи поиска условий асимптотической устойчивости	9
3. Плоское вращательное движение спутника на эллиптической орбите	11

А. С. Гонченко, А. Д. Козлов

О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях	17
1. Введение	17
2. Описание сценариев в случае трехмерных неориентируемых отображений. .	20
3. Примеры.	24

Е. Я. Гуревич, Д. С. Малышев

О топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере S^n посредством раскрашенного графа	30
--	----

М. И. Малкин, К. А. Сафонов

Применение нидинг-рядов для полусопряженности отображений Лоренца с нулевой энтропией	34
1. Введение	34
2. Предварительные сведения	35
3. Построение кусочно-линейной модели	36

С. Н. Нагорных, Е. В. Нагорных

Критическая плотность и интегралы лиминального уравнения дислокаций	41
---	----

О. А. Перегудова, Д. С. Макаров

Стабилизация программного движения манипуляционных роботов на основе измерения координат звеньев	46
1. Введение	46
2. Постановка задачи	47
3. Решение задачи стабилизации	47
4. Заключение	49

М. В. Радионова, В. В. Чичагов

Критерий согласия с модифицированной статистикой хи-квадрат	52
1. Введение	52
2. Основные результаты	54

П. М. Симонов, А. В. Чистяков

Локальные гомеоморфизмы стоуновского компакта и локальная обратимость измеримых отображений	64
1. Введение	64
2. Почти локальные гомеоморфизмы стоуновского компакта	67
3. Локальная обратимость измеримых отображений	70

Т. К. Юлдашев, К. Х. Шабадиков

Квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение псевдопараболического типа с вырожденным ядром и интегральным условием	76
1. Постановка задачи	76
2. Счетная система нелинейных интегральных уравнений	77
3. Однозначная разрешимость ССНИУ	81
4. Сходимость ряда Фурье	85

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

П. А. Вельмисов, А. В. Гладун

Об управлении динамикой трубопровода	89
1. Введение	89
2. Постановка задачи	89
3. Исследование управляемости	91
4. Построение управлений	92

А. О. Сыромясов, А. С. Шуршина

Расчет коэффициента диффузии лекарственного вещества из трехмерной пленки хитозана	98
1. Введение	98
2. Постановка обратной задачи диффузии из трехмерной пленки	99
3. Определение искомых параметров на основе аналитического решения прямой задачи диффузии	100
4. Численная проверка решения	102
5. Сравнение результатов решения для трехмерной и одномерной пленок	103
6. Заключение	104

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

В. К. Горбунов, А. Г. Львов

Математическая модель оценки производственных фондов малого предпринимательства 107

1. Введение 107
2. Производственные функции в абсолютной и индексной формах 110
3. Задача построения ПФ МП с реконструкцией эффективных фондов 112
4. Пример построения ПФ МП с реконструкцией эффективных фондов 115

А. В. Калинин, А. А. Тюхтина

Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями 119

1. Введение 119
2. Постановка задач и основные результаты 120
3. Предварительные утверждения 123
4. Доказательство основных результатов 127

Н. Д. Кузьмичев, М. А. Васютин, Е. А. Лапшина, Д. А. Шилкин

Математическое моделирование температурной зависимости второго критического поля тонких плёнок нитрида ниобия 134

1. Введение 134
2. Математическая модель зависимости $H_{c2}(T)$ 135
3. Эксперимент и обработка результатов 138
4. Обсуждение 139
5. Заключение 140

Г. И. Сахибгареева, О. С. Травкина, О. Ю. Кирьянова, Р. З. Куватова, И. М. Губайдуллин

Расчет материального баланса для кристаллизации цеолитов и математическое моделирование ионного обмена на них 143

1. Введение 143
2. Задача определения материального баланса 144
 - 2.1. Расчет необходимого количества веществ, участвующих в реакции 145
 - 2.2. Расчет кристаллообразующих компонентов (в пересчете на оксиды) до кристаллизации 146
 - 2.3. Теоретический расчет химического состава маточного раствора и твердой фазы 146
3. Постановка задачи 148
4. Описание информационно-аналитической системы 148
5. Выводы 150

О. С. Язовцева, Т. Ф. Мамедова, И. М. Губайдуллин

Исследование устойчивости некоторого решения системы кинетических уравнений химической реакции 152

1. Постановка задачи 152

2.	Исследование асимптотической устойчивости положения равновесия по части переменных методом сравнения Е.В. Воскресенского	153
3.	Численное моделирование изменения концентраций веществ	155
4.	Заключение	156

М. С. Янбеков, Э. Р. Гиззатова, С. И. Спивак

	Моделирование различных режимов поведения конверсии мономера в процессах радикальной полимеризации диенов	159
1.	Введение	159
2.	Методы	160
3.	Результаты	162
4.	Обсуждение	164
5.	Заключение	165

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Вячеслав Зигмундович Гринес (к семидесятилетию со дня рождения)	168
---	-----

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»	172
Правила верстки рукописей в системе LaTeX	174
Алфавитный указатель	176

ОТ РЕДАКЦИИ

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Рубрики журнала:

- математика;
- прикладная математика и механика;
- математическое моделирование и информатика.

Журнал «Журнал Средневолжского математического общества» входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH), а статьи опубликованные в нем приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (заключение президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских учёных - РИНЦ. Адрес доступа на информационной платформе eLIBRARY.RU: http://elibrary.ru/title_about.asp?id=32209.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

МАТЕМАТИКА

УДК 531-36

Об устойчивости и стабилизации нелинейного уравнения второго порядка© А. С. Андреев ¹, Л. С. Тахтенкова ²

Аннотация. Излагаются результаты решения задачи о достаточных условиях асимптотической устойчивости положения равновесия обыкновенного дифференциального и стохастического дифференциального уравнений специального вида. Полученные теоремы применяются для решения задачи о стабилизации плоского вращательного движения спутника на эллиптической орбите, в том числе при воздействии случайных сил и (или) при случайном изменении параметров. Доказана теорема о достаточных условиях асимптотической устойчивости на основе функции Ляпунова, имеющей знакопостоянную производную в силу обыкновенного дифференциального уравнения и соответствующий оператор в силу стохастического дифференциального уравнения. Новизна результатов состоит в получении новых условий устойчивости робастного характера. В частности, найдено решение задачи о стабилизации движения спутника, при котором он совершает в абсолютном пространстве три оборота за время, равное двум периодам обращения центра масс по орбите.

Ключевые слова: функция Ляпунова, асимптотическая устойчивость, положение равновесия, стабилизация, спутник, случайные возмущения.

1. Введение

Модельным уравнением второго порядка многих механических систем физических, биологических и других процессов является нелинейное уравнение второго порядка. Исследованию устойчивости и стабилизации положения равновесия системы, описываемой таким уравнением без учета стохастических возмущений, посвящены многие работы [1], [2 – 6]. Анализ соответствующих результатов можно найти в статьях [7, 8]. Гораздо в меньшей степени изучена устойчивость нелинейного стохастического дифференциального уравнения второго порядка [9]. Основные результаты здесь получены для линейного случая. Целью настоящей работы является вывод новой формы достаточных условий устойчивости и стабилизируемости положения равновесия системы, описываемой обыкновенным дифференциальным и стохастическим дифференциальным уравнениями второго порядка, с применением к задаче о стабилизации плоского вращательного движения спутника на эллиптической орбите.

¹ декан факультета математики, информационных и авиационных технологий, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; andreevas@sv.ulsu.ru

² Аспирант кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; lubov.s.alex@yandex.ru

2. Постановка задачи поиска условий асимптотической устойчивости

Исследование устойчивости и стабилизации движения целого ряда механических систем сводится к исследованию уравнения второго порядка:

$$\ddot{x} + k(t, x, \dot{x})\dot{x} + f(t, x, \dot{x}) \sin x = 0, \quad (2.1)$$

где функции $k(t, x, \dot{x}) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$, $f(t, x, \dot{x}) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$ и в некоторой области $\mathbb{R}^+ \times \{|x| < H_0, |\dot{x}| < H_0, 0 < H_0 \leq +\infty\}$ удовлетворяют условиям:

$$\begin{aligned} 0 < k_{\min} &\leq k(t, x, \dot{x}) \leq k_{\max}, \\ 0 < f_{\min} &\leq f(t, x, \dot{x}) \leq f_{\max}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Задача об устойчивости нулевого решения $\dot{x} = x = 0$ этого уравнения может быть решена на основе следующей теоремы.

Т е о р е м а 2.1. *Предположим, существует такая постоянная μ , что выполнены условия*

$$\begin{aligned} 0 < \mu &\leq k_{\min}, \\ \sqrt{\frac{f_{\max}}{\alpha}} - \sqrt{f_{\min}} &\leq 2\sqrt{\mu(k_{\min} - \mu)}, \\ \sqrt{\mu\left(\frac{k_{\max}}{\alpha} - \mu\right)} - \sqrt{\mu(k_{\min} - \mu)} &\leq 2\sqrt{f_{\min}}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Тогда положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (2.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем функцию Ляпунова в виде:

$$V = \frac{1}{2}(\dot{x} + \mu \sin x)^2 + \frac{1}{2}g \sin^2 x,$$

где $\mu > 0, g > 0$ – некоторые постоянные.

Очевидно, что V определенно положительна по $\dot{x}$ и x .

Производная функции V имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} = (\dot{x} + \mu \sin x)(\mu \dot{x} \cos x - k(t, x, \dot{x})\dot{x} - f(t, x, \dot{x}) \sin x) + g \dot{x} \sin x \cos x = & \\ = (\mu \cos x - k(t, x, \dot{x}))\dot{x}^2 + & \\ + (\mu(\mu \cos x - k(t, x, \dot{x})) - f(t, x, \dot{x}) + g \cos x)\dot{x} \sin x - \mu f(t, x, \dot{x}) \sin^2 x. & \end{aligned}$$

Находим, что $\dot{V} \leq 0$, если выполнены следующие условия:

$$\mu \cos x - k(t, x, \dot{x}) \leq 0,$$

$$\mu f(t, x, \dot{x}) \geq 0,$$

$$(\mu(\mu \cos x - k(t, x, \dot{x})) - f(t, x, \dot{x}) + g \cos x)^2 \leq -4\mu f(t, x, \dot{x})(\mu \cos x - k(t, x, \dot{x})). \quad (2.4)$$

Можно показать, что эти соотношения выполняются вне зависимости от $(t, x, \dot{x})$, если для некоторой постоянной $0 < \alpha \leq 1$ выполняются условия (2.3).

При этом получаем, что, в соответствии с неравенствами (2.4), множество $\{\dot{V} = 0\} = \{\dot{x} = 0\}$. Уравнения, предельные к (2.1) [10], имеют аналогичный вид. Несложно определить, что для таких уравнений множество $\{\dot{x} = 0\}$ содержит решения $\dot{x} = x = 0$. Соответственно, согласно теореме из [10, 11] при условиях (2.3) положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (2.1) равномерно асимптотически устойчиво. $\square$

З а м е ч а н и е 2.1. Если условия (2.2) и (2.3) выполняются при $H_0 = \infty$, тогда $\dot{x} = x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво глобально.

Рассмотрим уравнение при случайных возмущениях:

$$\ddot{x} + k(t, x, \dot{x})\dot{x} + f(t, x, \dot{x}) \sin x = \sigma(t)\xi(t) \sin x, \quad (2.5)$$

где $\xi(t)$ – стандартный винеровский процесс, $\sigma(t) \in \mathbb{C}(\mathbb{R}^+)$, $\sigma(t) \leq \sigma_{\max}^2$, $k(t, x, \dot{x})$, $f(t, x, \dot{x})$ определены выше.

Исследуется задача поиска условий асимптотической устойчивости по вероятности положения равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (2.5).

Т е о р е м а 2.2. Предположим, что существует такая постоянная μ , что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2f_{\min}}\sigma_{\max}^2 &\leq \mu \leq k_{\min}, \\ \sqrt{\frac{f_{\max}}{\alpha} - \frac{\sigma_{\min}^2}{2\mu}} - \sqrt{f_{\min} - \frac{\sigma_{\max}^2}{2\mu\alpha}} &\leq 2\sqrt{\mu(k_{\min} - \mu)}, \\ \sqrt{\mu\left(\frac{k_{\max}}{\alpha} - \mu\right)} - \sqrt{\mu(k_{\min} - \mu)} &\leq 2\sqrt{f_{\min} - \frac{\sigma_{\max}^2}{2\mu\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Тогда положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (2.5) асимптотически устойчиво по вероятности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем аналогичную определенно положительную функцию Ляпунова:

$$V = \frac{1}{2}(\dot{x} + \mu \sin x)^2 + \frac{1}{2}g \sin^2 x.$$

Вычислим оператор LV [12]:

$$\begin{aligned} LV &= (\dot{x} + \mu \sin x)(\mu \dot{x} \cos x - k(t, x, \dot{x})\dot{x} - f(t, x, \dot{x}) \sin x) + g \dot{x} \sin x \cos x + \frac{1}{2}\sigma^2(t) \sin^2 x = \\ &= (\mu \cos x - k(t, x, \dot{x}))\dot{x}^2 + (\mu(\mu \cos x - k(t, x, \dot{x})) - f(t, x, \dot{x}) + g \cos x)\dot{x} \sin x + \left(\frac{1}{2}\sigma^2(t) - \right. \\ &\quad \left. - \mu f(t, x, \dot{x})\right) \sin^2 x. \end{aligned}$$

Согласно [9] условие $LV \leq 0$ является условием устойчивости, которое по теореме Сильвестра [13] записывается в виде:

$$\mu \cos x - k(t, x, \dot{x}) \leq 0,$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2(t) - \mu f(t, x, \dot{x}) \leq 0,$$

$$(\mu(\mu \cos x - k(t, x, \dot{x})) - f(t, x, \dot{x}) + g \cos x)^2 \leq 4\left(\frac{1}{2}\sigma^2(t) - \mu f(t, x, \dot{x})\right)(\mu \cos x - k(t, x, \dot{x})).$$

Анализ этих неравенств вне зависимости от $(t, x, \dot{x})$ приводит к утверждению, что эти условия выполнены, если имеют место соотношения (2.6). По аналогии с предыдущей теоремой можно заключить, что этого также достаточно для асимптотической устойчивости по вероятности. $\square$

3. Плоское вращательное движение спутника на эллиптической орбите

Плоское вращательное движение спутника на эллиптической орбите описывается следующим уравнением [14]:

$$\ddot{\Theta} - \frac{2e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \dot{\Theta} + \frac{3(A - C)}{B(1 + e \cos \nu)} \sin \Theta \cos \Theta = \frac{2e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} + U, \quad (3.1)$$

где ν – истинная аномалия, e – эксцентриситет, A, B, C – главные центральные моменты инерции спутника, U – управление, $\dot{\Theta} = \frac{\partial \Theta}{\partial \nu}$, $\ddot{\Theta} = \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \nu^2}$.

Положим, что управление

$$U_1 = \ddot{\Theta}_0 - \frac{2e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \dot{\Theta}_0 + \frac{3(A - C)}{2B(1 + e \cos \nu)} \sin 2\Theta_0 - \frac{2e \sin \nu}{1 + e \cos \nu}$$

обеспечивает заданное вращательное движение по закону $\Theta = \Theta_0(\nu)$.

Уравнение возмущенного движения записывается в виде:

$$\ddot{x} - \frac{2e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \dot{x} + \frac{3(A - C)}{B(1 + e \cos \nu)} \cos(2\Theta_0 + x) \sin x = U_2, \quad U_2 = U - U_1. \quad (3.2)$$

Решим задачу синтеза управления U_2

$$U_2 = -k_1 \dot{x} - k_2 \sin x, \quad (3.3)$$

где k_1, k_2 – некоторые постоянные, при котором невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ уравнения

$$\ddot{x} + (k_1 - \frac{2e \sin \nu}{1 + e \cos \nu}) \dot{x} + (k_2 + \frac{3(A - C)}{B(1 + e \cos \nu)}) \cos(2\Theta_0 + x) \sin x = 0 \quad (3.4)$$

асимптотически устойчиво.

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3.1. *Предположим, что коэффициенты усиления k_1 и k_2 подобраны так, что:*

$$0 < \mu \leq k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1 - e^2}},$$

$$\sqrt{\frac{k_2}{\alpha} + \frac{3(A - C)}{B(1 - e)\alpha}} - \sqrt{k_2 - \frac{3(A - C)}{B(1 - e)}} \leq 2\sqrt{\mu(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1 - e^2}} - \mu)},$$

$$\sqrt{\mu(\frac{k_1}{\alpha} + \frac{2e}{\alpha\sqrt{1 - e^2}} - \mu)} - \sqrt{\mu(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1 - e^2}} - \mu)} \leq 2\sqrt{k_2 - \frac{3(A - C)}{B(1 - e)}}, \quad A > C;$$

$$\sqrt{\frac{k_2}{\alpha} - \frac{3(A - C)}{B(1 - e)\alpha}} - \sqrt{k_2 + \frac{3(A - C)}{B(1 - e)}} \leq 2\sqrt{\mu(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1 - e^2}} - \mu)},$$

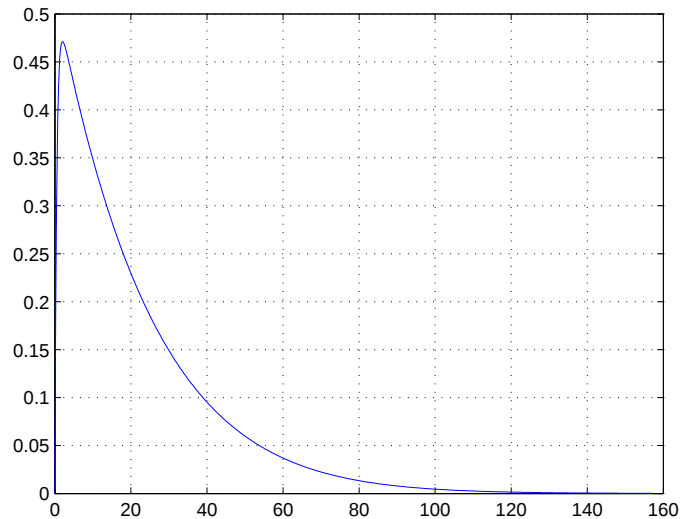
$$\sqrt{\mu(\frac{k_1}{\alpha} + \frac{2e}{\alpha\sqrt{1 - e^2}} - \mu)} - \sqrt{\mu(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1 - e^2}} - \mu)} \leq 2\sqrt{k_2 + \frac{3(A - C)}{B(1 - e)}}, \quad A < C,$$

где $0 < \alpha \leq 1$.

Тогда управление (3.3) решает задачу о стабилизации заданного вращательного движения.

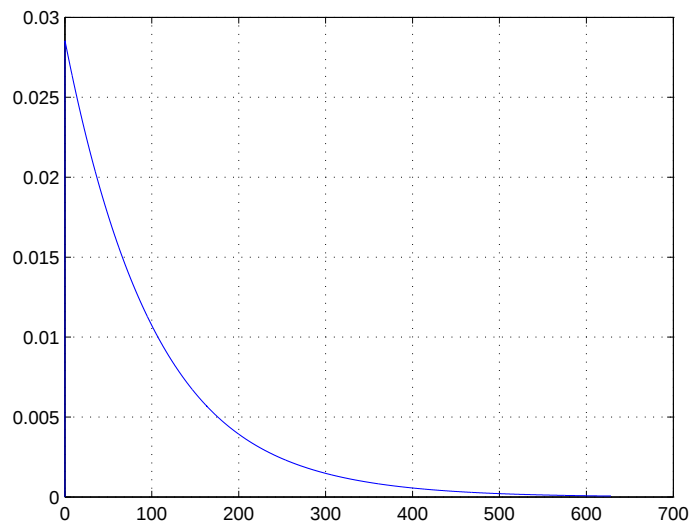
Доказательство опирается на приведенную выше теорему 2.1.

С помощью системы MATLAB выполнено численное решение системы (3.4). При этом проводилась проверка соответствия выбранных коэффициентов k_1 и k_2 условиям теоремы (3.1.). Значения параметров $e = 0.2$, $\frac{A-C}{B} = 0.6$, $\Theta_0 = \pi$.



Р и с у н о к 3.1

$k_1 = 2, k_2 = 3$



Р и с у н о к 3.2

$k_1 = 35, k_2 = 18$

Рассмотрим уравнение возмущенного плоского вращательного движения спутника на эллиптической орбите при случайных возмущениях:

$$\ddot{x} + \left(k_1 - \frac{2e \sin \nu}{1 + e \cos \nu}\right) \dot{x} + \left(k_2 + \frac{3(A-C)}{B(1 + e \cos \nu)} \cos(2\Theta_0 + x)\right) \sin x = \sigma(\nu) \xi(\nu) \sin x. \quad (3.5)$$

Определим изменения условий для коэффициентов k_1 и k_2 для решения поставленной выше задачи синтеза управления, но с учетом случайных возмущений, описанных в правой части уравнения (3.5).

Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3.2. *Предположим, что коэффициенты усиления k_1 и k_2 подобраны так, что:*

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{max}^2}{2(k_2 - \frac{3(A-C)}{B(1-e)})} &\leq \mu \leq k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \sqrt{\left(\frac{k_2}{\alpha} + \frac{3(A-C)}{B(1-e)\alpha} - \frac{\sigma_{min}^2}{2\mu}\right)} - \sqrt{\left(k_2 - \frac{3(A-C)}{B(1-e)} - \frac{\sigma_{max}^2}{2\mu\alpha}\right)} &\leq 2\sqrt{\mu\left(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}} - \mu\right)}, \\ \sqrt{\mu\left(\frac{k_1}{\alpha} + \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}\alpha} - \mu\right)} - \sqrt{\mu\left(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}} - \mu\right)} &\leq 2\sqrt{k_2 - \frac{3(A-C)}{B(1-e)} - \frac{\sigma_{max}^2}{2\mu\alpha}}, \quad A > C; \\ \frac{\sigma_{max}^2}{2(k_2 + \frac{3(A-C)}{B(1-e)})} &\leq \mu \leq k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}}, \\ \sqrt{\left(\frac{k_2}{\alpha} - \frac{3(A-C)}{B(1-e)\alpha} - \frac{\sigma_{min}^2}{2\mu}\right)} - \sqrt{\left(k_2 + \frac{3(A-C)}{B(1-e)} - \frac{\sigma_{max}^2}{2\mu\alpha}\right)} &\leq 2\sqrt{\mu\left(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}} - \mu\right)}, \\ \sqrt{\mu\left(\frac{k_1}{\alpha} + \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}\alpha} - \mu\right)} - \sqrt{\mu\left(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}} - \mu\right)} &\leq 2\sqrt{k_2 + \frac{3(A-C)}{B(1-e)} - \frac{\sigma_{max}^2}{2\mu\alpha}}, \quad A < C, \end{aligned}$$

где $0 < \alpha \leq 1$.

Тогда управление $U = U_1 + U_2$ решает задачу о стабилизации заданного вращательного движения, и, следовательно, решение $\dot{x} = x = 0$ системы (3.5) асимптотически устойчиво по вероятности.

Доказательство опирается на приведенную выше теорему 2.2.

Как следует из уравнений движения (3.1), при $A - C = 2eB$, $U = 0$ и $0 < e \leq \frac{1}{2}$ это уравнение имеет решение [14]

$$\Theta = \Theta_0 = \frac{\nu}{2}. \quad (3.6)$$

В соответствии с этим решением спутник вращается в плоскости орбиты, совершая в абсолютном пространстве три оборота за время, равное двум периодам обращения центра масс по орбите. В работах [15, 16] найдено, что движение неустойчиво при всех $e \in (0, \frac{1}{2}]$, кроме $e = e_0 = 0,054773$, при котором оно устойчиво.

Уравнение возмущенного движения (3.2) в рассматриваемом случае принимает вид:

$$\ddot{x} - \frac{2e \sin \nu}{1 + e \cos \nu} \dot{x} + \frac{6e}{(1 + e \cos \nu)} \cos(\nu + x) \sin x = U_2 \quad (3.7)$$

Согласно теореме 2.1 движение может быть стабилизировано управлением (3.3). Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 3.3. *Предположим, что коэффициенты k_1 и k_2 подобраны так, что*

$$0 < \mu \leq k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$\sqrt{\frac{k_2}{\alpha} + \frac{6e}{\alpha(1+e)}} - \sqrt{k_2 - \frac{6e}{1-e}} \leq 2\sqrt{\mu(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}} - \mu)},$$

$$\sqrt{\mu(\frac{k_1}{\alpha} + \frac{2e}{\alpha\sqrt{1-e^2}} - \mu)} - \sqrt{\mu(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}} - \mu)} \leq 2\sqrt{k_2 - \frac{6e}{1-e}}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Тогда управление (3.3) решает задачу о стабилизации заданного вращательного движения.

Доказательство опирается на теорему 2.1.

Уравнение возмущенного движения в рассматриваемом случае при случайных возмущениях записывается в виде:

$$\ddot{x} + (k_1 - \frac{2e \sin \nu}{1 + e \cos \nu})\dot{x} + (k_2 + \frac{6e}{(1 + e \cos \nu)} \cos(\nu + x)) \sin x = \sigma(\nu)\xi(\nu) \sin x. \quad (3.8)$$

Действие случайных возмущений может быть устранено выбором коэффициентов k_1 и k_2 , которые удовлетворяют условиям, определенным в следующей теореме.

Т е о р е м а 3.4. *Предположим, что коэффициенты k_1 и k_2 подобраны так, что*

$$\frac{\sigma_{max}^2(1-e)}{2(k_2(1-e) - 6e)} \leq \mu \leq k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}},$$

$$\sqrt{\frac{k_2}{\alpha} + \frac{6e}{\alpha(1+e)}} - \frac{\sigma_{min}^2}{2\mu} - \sqrt{k_2 - \frac{6e}{1-e} - \frac{\sigma_{max}^2}{2\mu\alpha}} \leq 2\sqrt{\mu(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}} - \mu)},$$

$$\sqrt{\mu(\frac{k_1}{\alpha} + \frac{2e}{\alpha\sqrt{1-e^2}} - \mu)} - \sqrt{\mu(k_1 - \frac{2e}{\sqrt{1-e^2}} - \mu)} \leq 2\sqrt{k_2 - \frac{6e}{1-e} - \frac{\sigma_{max}^2}{2\mu\alpha}}, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Тогда управление $U = U_1 + U_2$ решает задачу о стабилизации заданного вращательного движения.

Доказательство опирается на теорему 2.2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 15-01-08482.

Дата поступления 01.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. Р. Меркин, *Введение в теорию устойчивости движения*, Наука, М., 1987, 304 с.
2. А. Andreev, O. Yurjeva, "On stability of a mechanical system with one degree of freedom", *Facta Universitatis, Series Mechanics, Automatic, Control and Robotics*, **2:7/2**. Special issue (1997), 409-420.
3. R. J. Ballieu, K. Peiffer, "Attractivity of the Origin for the Equation $\ddot{x} + k(t, x, \dot{x})||\dot{x}|^\alpha \dot{x} + g(x) = 0$ ", *J. of Mat. Anal. And Appl.*, **65** (1978), 321-332.
4. L. Hatvani, T. Krisztin, V. Totik, "A necessary and sufficient condition for the asymptotic stability of the damped oscillator", *J. Different. Equat.*, **119:1** (1995), 209-223.

5. L. Hatvani, "Integral conditions on the asymptotic stability of the damped linear oscillator with small damping", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **124**:2 (1996), 415-422.
6. N. Ianiro, C. Maffei, "On the asymptotic behavior of the solutions of nonlinear equation", *Nonlinear differential equations: invariance, stability and bifurcations.*: N-Y.: Acad. Press., 1982, 175-182.
7. А. С. Андреев, О. Д. Юрьева, "Об устойчивости механической системы с одной степенью свободы", *Известия РАН серия МММИУ.*, **1**:1 (1997), 102-114.
8. Л. Хатвани, "О действии демпфирования на свойства устойчивости равновесий неавтономных систем", *ПММ.*, **65**:4 (2001), 725-732.
9. Р. З. Хасьминский, *Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров*, Наука, М., 1969, 367 с.
10. А. С. Андреев, "Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы", *ПММ.*, **48**:2 (1984), 225-232.
11. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, "К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости", *ПММ.*, **70**:6 (2006), 965-976.
12. Б. Оксендаль, *Стохастические дифференциальные уравнения. Введение в теорию и приложения*, Мир, АСТ, М., 2003, 408 с.
13. И. Г. Малкин, *Теория устойчивости движения*, Наука, М., 1966, 533 с.
14. В. В. Белецкий, *Движение искусственного спутника относительно центра масс*, Наука, М., 1965, 416 с.
15. А. А. Хентов, "Об устойчивости по первому приближению одного вращения искусственного спутника Земли вокруг центра масс", *Космические исследования*, **6**:5 (1966), 733-795.
16. А. П. Маркеев, "Об одном способе аналитического представления отображений, сохраняющих площадь", *ПММ.*, **75**:5 (2014), 611-624.

On stability and stabilization of the second-order nonlinear equation

© A. S. Andreev³, L. S. Takhtenkova⁴

Abstract. The article presents the solution of the problem about sufficient conditions for asymptotic stability of equilibrium position for special-kind ordinary and stochastic differential equations. Theorems obtained in the paper are applied for solution of the stabilization problem for two-dimensional rotational motion of a satellite on elliptic orbit. This motion may be influenced by random forces; parameters of the motion also may vary stochastically. Authors prove the theorem about the sufficient conditions of asymptotic stability. These conditions are based on Lyapunov function with sign-constant derivative by virtue of the ordinary differential equation and the corresponding operator by virtue of the stochastic differential equation. Novelty of the results is that new robust stability conditions are obtained. In particular the authors solved the problem about stabilization of satellite's motion wherein it makes three turns in absolute space during a time equal to two periods of revolution of the center of mass on the orbit.

Key Words: Lyapunov function, asymptotic stability, equilibrium position, stabilization, satellite, stochastic perturbation

³ Dean of Faculty of Mathematics and Information and Aviation Technology, Prof., D.Sc., Head of Information Security and Control Theory Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; andreevas@sv.ulsu.ru

⁴ Postgraduate student of Information Security and Control Theory Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; lubov.s.alex@yandex.ru

УДК 517.925

О сценариях возникновения хаоса в трехмерных неориентируемых отображениях

© А. С. Гонченко¹, А. Д. Козлов²

Аннотация. Для однопараметрических семейств трехмерных неориентируемых отображений изучаются сценарии возникновения странных гомоклинических (содержащих только одну неподвижную точку) аттракторов. Описаны 4 различных вида таких сценариев, приводящих к возникновению дискретных гомоклинических неориентируемых аттракторов: соответственно лоренцевского и восьмерочного типов (содержащих неподвижную точку типа седло), а также двух типов спиральных аттракторов (содержащих неподвижную точку типа седло-фокус). Даны примеры реализации этих сценариев в случае трехмерных неориентируемых обобщенных отображений Эно.

Ключевые слова: странный аттрактор, аттрактор Лоренца, спиральный аттрактор, гомоклиническая траектория, инвариантная кривая, трехмерное обобщенное отображение Эно

1. Введение

В работах [1], [2], [3] были исследованы некоторые универсальные сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов в случае трехмерных ориентируемых отображений. Здесь термином «гомоклинический» мы ограничиваем круг рассматриваемых странных аттракторов только теми, которые содержат ровно одну неподвижную точку (типа седло, если все мультипликаторы действительны, или седло-фокус, если у неподвижной точки есть пара комплексно-сопряженных мультипликаторов). Универсальность сценариев означает, во-первых, то, что они могут реализовываться в общих однопараметрических семействах, и во-вторых, то, что для таких сценариев не требуется выполнения каких-либо специальных свойств рассматриваемых систем (типа наличия симметрий и т.п.).

В работе [1] были описаны три различных сценария такого рода, связанных с возникновением дискретных аттракторов лоренцевского типа, восьмерочного типа и спирального типа соответственно. Качественные схемы для первых двух сценариев показаны на рис. 1.1, а для третьего – на рис. 1.2. Все они могут реализовываться в однопараметрических семействах T_μ трехмерных ориентируемых отображений, и все начинаются с тех значений μ , при которых T_μ имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку O_μ , которая при некотором значении параметра μ теряет устойчивость, и здесь в сценариях появляются различия.

Сценарий 1 возникновения дискретного аттрактора Лоренца (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в) рисунка 1.1). При некотором значении μ точка O_μ теряет устойчивость в результате *бифуркации удвоения периода*: она сама становится седловой типа (2,1), т.е. с двумерным устойчивым и одномерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2 (он в этот момент становится аттрактором). Затем при изменении параметра, в результате серии некоторых бифуркаций, этот цикл и все притягивающие инвариантные множества, которые от него отрождаются, теряют устойчивость. Каким способом это происходит, зависит от конкретной задачи.³ При

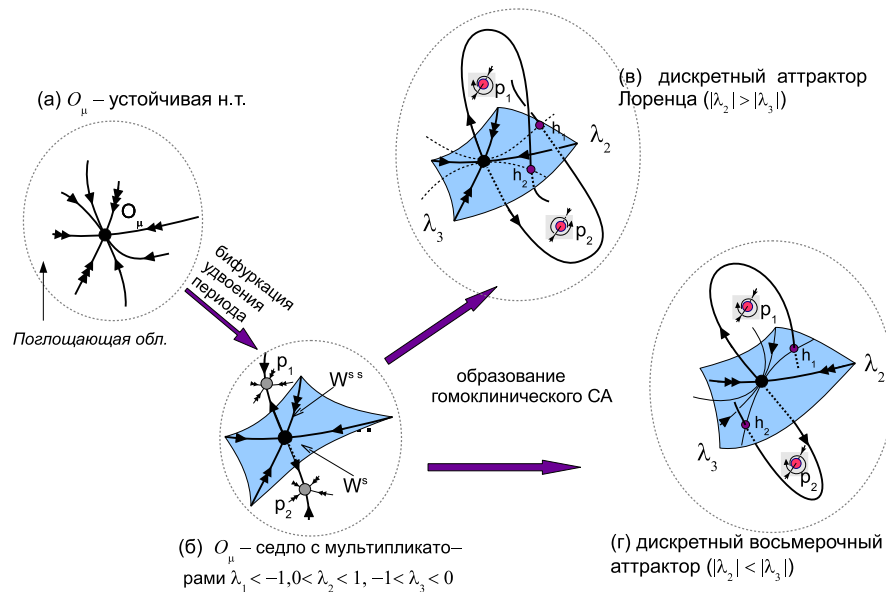
¹ Научный сотрудник НИИ суперкомпьютерных технологий, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; agonchenko@mail.ru

² Лаборант НИИ суперкомпьютерных технологий, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kozzzloff@list.ru

этом важно, что инвариантные многообразия седловой точки O_μ пересекаются и, когда $W^u(O_\mu)$ целиком лежит в поглощающей области, образуется *гомоклинический аттрактор*. Поскольку точка O_μ имеет в этот момент мультипликатор $\lambda_1 < -1$, то два других λ_2 и λ_3 будут действительными и разных знаков, например, $0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$. В случае, когда $|\lambda_2| > |\lambda_3|$, конфигурация получившегося гомоклинического аттрактора будет очень похожа по форме на аттрактор Лоренца, см. рис. 1.1(в). Только здесь мы имеем дело с его дискретным вариантом. При этом роль состояния равновесия аттрактора в случае отображения будет играть неподвижная точка O_μ , а в “дырках” дискретного аттрактора, вместо равновесий, будет лежать седловой цикл (p_1, p_2) периода 2. Кроме того, точка O_μ делит своё одномерное неустойчивое многообразие $W^u(O_\mu)$ на две связные компоненты – сепаратрисы. Поскольку неустойчивый мультипликатор λ_1 отрицательный, то точки на $W^u(O_\mu)$ будут “прыгать” под действием T_μ с одной сепаратрисы на другую (в классическом аттракторе Лоренца каждая из сепаратрис сама по себе инвариантна). Отметим также, что отрицательность мультипликаторов точки O_μ обеспечивает локальную (на её инвариантных многообразиях) симметрию, схожую с симметрией в модели Лоренца [11].

Сценарий 2 возникновения дискретного восьмерочного аттрактора (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (г) рисунка 1.1). Начало этого сценария такое же, как и в первом случае. Принципиальное отличие состоит в том, что в момент образования гомоклинического пересечения мультипликаторы точки O_μ такие, что опять $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2 < 1, -1 < \lambda_3 < 0$, но $|\lambda_2| < |\lambda_3|$. Тогда по форме гомоклинический аттрактор, см. рис. 1.1(г), будет похож на аттрактор, возникающий при периодическом возмущении двумерной системы с гомоклинической восьмеркой седлового равновесия [12]. Поэтому такой аттрактор был назван в [1],[3] “дискретным восьмерочным аттрактором”.

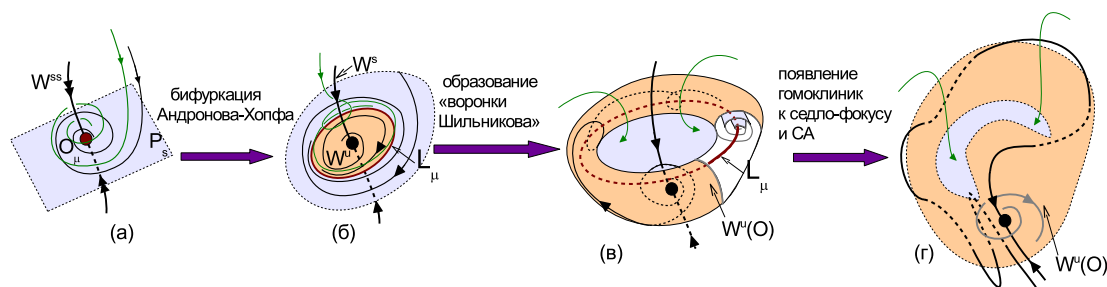
³ Укажем два простейших варианта: 1) устойчивый цикл (p_1, p_2) претерпевает обратную бифуркацию Андронова-Хопфа (в него “влипает” замкнутая инвариантная кривая (C_1, C_2) периода 2 седлового типа, которая, в свою очередь, отражается от гомоклинической восьмерки седла O_μ в момент ее образования) – такие бифуркации происходят, например, в отображении Пуанкаре одной модели кельтского камня, [4],[5], а в случае потоков – в модели Лоренца, [6]; 2) устойчивый цикл (p_1, p_2) претерпевает прямую бифуркацию Андронова-Хопфа (из него рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая периода 2, которая затем сливается с инвариантной кривой (C_1, C_2) и исчезает) – такие бифуркации происходят в некоторых трехмерных отображениях Эно, [7],[1],[8], а в случае потоков – в модели Шимицу-Мориока, [9],[10].



Р и с у н о к 1.1

Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению либо дискретного аттрактора Лоренца (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в)), либо дискретного восьмерочного аттрактора (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (г)). Здесь показаны точки h_1 и h_2 , принадлежащие одной и той же гомоклинической траектории, такие, что $h_i \in W^s(O_\mu) \cap W^u(O_\mu)$ и $h_2 = T_\mu(h_1)$. Эти точки расположены с одной стороны от $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$ в лоренцевском случае (в) и по разные стороны от $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$ в случае восьмерочного аттрактора (г).

Сценарий 3 возникновения дискретного аттрактора Шильникова (рис. 1.2). Этот сценарий существенно отличается от первых двух тем, что первой бифуркацией потери устойчивости точки O_μ здесь является бифуркацией Андронова-Хопфа. В результате этой бифуркации неподвижная точка становится седло-фокусом типа (1,2), т.е. с одномерным устойчивым и двумерным неустойчивым инвариантными многообразиями, а из нее рождается замкнутая инвариантная кривая L_μ , рис. 1.2(б). Соответственно предполагается, что при дальнейшем изменении μ сначала аттрактором является эта кривая L_μ , а затем она теряет устойчивость (каким способом – зависит от конкретной задачи, см., например, [2]), и формируется странный гомоклинический аттрактор, содержащий седло-фокус O_μ и его неустойчивое двумерное многообразие, рис. 1.2(г). При этом важным этапом в становлении аттрактора является образование т.н. “воронки Шильникова”, когда кривая L_μ меняет свой тип с узлового на фокусный – тогда неустойчивое многообразие точки O_μ начинает накручиваться на L_μ , рис. 1.2(в), и в образовавшуюся воронку будут втягиваться все траектории из поглощающей области (кроме одной из устойчивых сепаратрис седло-фокуса O_μ). Заметим, что подобный сценарий возникновения спирального аттрактора у трехмерных потоков был рассмотрен еще в работе Л. П. Шильникова [13]. Поэтому возникающий в случае отображений такой аттрактор спирального типа был назван в [2] “дискретным аттрактором Шильникова”.



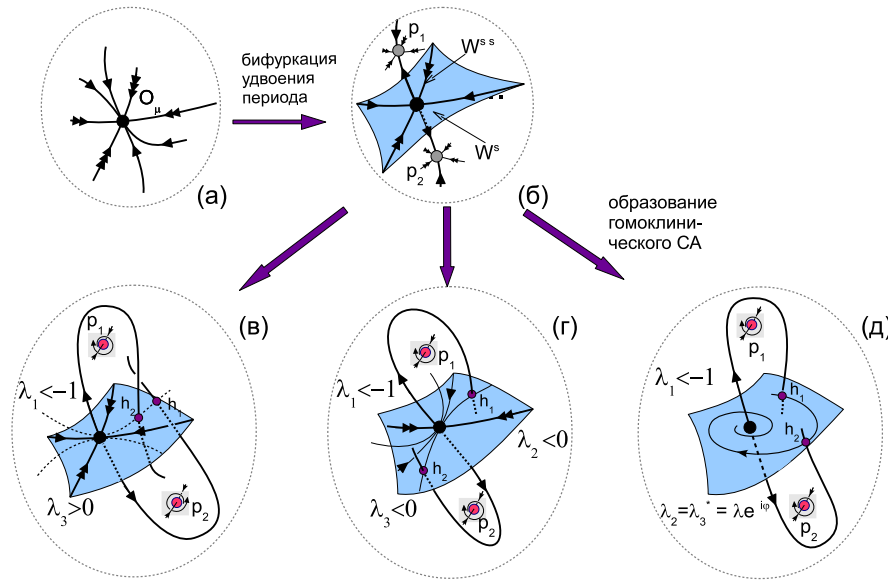
Р и с у н о к 1.2

Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению дискретного аттрактора Шильникова.

В случае *неориентируемых* трехмерных отображений (дiffeоморфизмов), которые рассматриваются в настоящей статье, как показано, похожие сценарии также возможны. Однако, в силу неориентируемости отображений, все они имеют свою специфику – описание таких сценариев дается в § 1. Здесь мы выделяем 4 вида сценариев, приводящих к возникновению соответственно неориентируемых странных гомоклинических аттракторов, таких как дискретный аттрактор Лоренца, восьмерочный аттрактор, спиральный аттрактор и аттрактор Шильникова. В § 2 приведены результаты численного исследования трехмерных неориентируемых обобщенных отображений Эно различного вида, иллюстрирующих конкретных реализаций указанных в § 1 сценариев, см. рис. 7-10. Мы показываем также, что у трехмерных неориентируемых отображений могут существовать такие же аттракторы, как и в ориентируемом случае, но только это уже “двухкомпонентные” гомоклинические аттракторы, содержащие седловые точки периода 2, см. рис. 3.5, соответственно каждая компонента аттрактора инвариантна относительно T^2 .

2. Описание сценариев в случае трехмерных неориентируемых отображений.

Рассмотрим однопараметрическое семейство T_μ трехмерных неориентируемых отображений. Предположим, что T_μ при $\mu_0 < \mu < \mu_1$ имеет асимптотически устойчивую неподвижную точку O_μ , т.е. мультипликаторы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ точки O_μ такие, что $|\lambda_i| < 1$, и поскольку T_μ неориентируемо, то $\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 < 0$. Пусть $\mu = \mu_1$ – это значение параметра, при котором точка O_μ теряет устойчивость, но при этом не исчезает. Тогда, в общем случае, μ_1 – это бифуркационное значение параметра, отвечающее либо бифуркации удвоения периода точки O_μ , либо (дискретной) бифуркации Андронова-Хопфа. В первом случае у точки O_μ при $\mu = \mu_1$ появляется мультипликатор -1 , а во втором – пара мультипликаторов $e^{\pm i\varphi}$ с $0 < \varphi < \pi$. Описываемые ниже сценарии возникновения странных гомоклинических аттракторов, содержащих точку O_μ , предполагают также, что эта точка лежит в некоторой достаточно большой поглощающей области U .

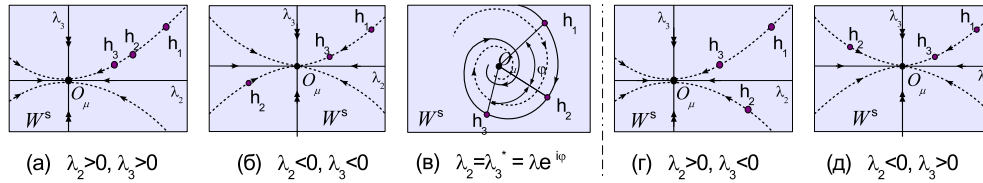


Р и с у н о к 2.1

Иллюстрация бифуркационных сценариев, приводящих к возникновению дискретных неориентируемых гомоклинических аттракторов: “тонкого” аттрактора Лоренца (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в)); восьмерочного аттрактора (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (г)); спирального аттрактора (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (д)). Здесь показаны точки h_1 и h_2 , принадлежащие одной и той же гомоклинической траектории, такие, что $h_i \in W^s(O_\mu) \cap W^u(O_\mu)$ и $h_2 = T_\mu(h_1)$. Эти точки расположены с одной стороны от $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$ в лоренцевском случае (в), по разные стороны от $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$ в случае восьмерочного аттрактора (г), и гомоклинические точки лежат в $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$ на спирали, закручивающейся вокруг O_μ , в случае спирального аттрактора (д).

Первый сценарий, см. рис. 2.1 (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (в)), приводит к появлению неориентируемого гомоклинического аттрактора, который мы называем “тонкий дискретный аттрактор Лоренца”. Он возникает в результате цепочки: устойчивая неподвижная точка $\Rightarrow$ бифуркация удвоения периода $\Rightarrow$ образование гомоклинических пересечений многообразий седловой неподвижной точки с мультипликаторами $\lambda_1 < -1, 0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1$. Поскольку устойчивые мультипликаторы здесь *положительны*, то гомоклиническая точка в $W_{loc}^s(O_\mu)$ и все её образы относительно положительных итераций T_μ будут лежать в $W_{loc}^s(O_\mu)$ на одной и той же гладкой инвариантной кривой, входящей в точку O_μ (а не на разных, как в случае ориентируемого дискретного аттрактора Лоренца, ср. рис. 1.1(в) и 2.1(в) а также рис. 2.2 (а) и (г)).⁴

⁴Заметим, что в общем случае гомоклинический аттрактор можно представлять как замыкание неустойчивого многообразия точки O_μ . Поскольку неустойчивые сепаратрисы седла O_μ накапливаются сами к себе (образуя, что называется, одномерный неразложимый континуум), то их гомоклинические точки на $W_{loc}^s(O_\mu)$ будут лежать вблизи точек $h_1, h_2, \dots, h_i = T^{i-1}(h_1), \dots$. Последние же, т.к. $0 < \lambda_2, \lambda_3 < 1$, будут лежать на одной гладкой кривой, входящей в O_μ с одной стороны от $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$, см. рис. 2.2, – в этом случае термин “тонкий” кажется здесь вполне подходящим.



Р и с у н о к 2.2

Иллюстрация поведения итераций точки $h_1 \in W_{loc}^{ss}(O_\mu)$ отображения T_μ в зависимости от знаков мультипликаторов λ_2, λ_3 устойчивой (на $W_{loc}^{ss}(O_\mu)$) неподвижной точки O_μ .

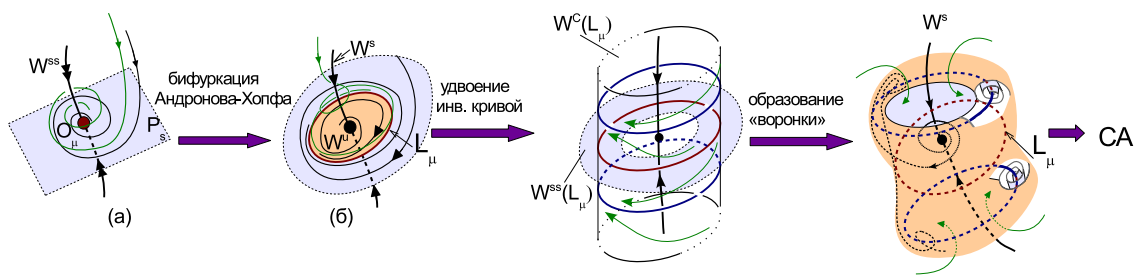
Второй сценарий, образования неориентируемого дискретного восьмерочного аттрактора, см. рис. 2.1 (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (г)), может быть реализован в тех случаях, когда все мультипликаторы точки O_μ отрицательны, т.е. когда $\lambda_1 < -1 < \lambda_2, \lambda_3 < 0$ при $\mu > \mu_1$. Возникающие здесь гомоклинические аттракторы очень похожи на те, которые имеют место в ориентируемом случае, ср. рис. 1.1(г) и 2.1(г).

Третий сценарий связан с образованием неориентируемого дискретного спирального аттрактора, см. рис. 2.1 (путь (а) $\Rightarrow$ (б) $\Rightarrow$ (д)). Этот сценарий можно рассматривать как промежуточный между первыми двумя сценариями (“лоренцевским” и “восьмерочным”). Здесь опять первая бифуркация потери устойчивости - это бифуркация удвоения периода точки O_μ , в результате которой она приобретает мультипликаторы $\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \lambda e^{\pm i\varphi}$, где $0 < \lambda < 1$. То есть, точка O_μ становится седло-фокусом типа (2,1), а в её окрестности рождается устойчивая траектория периода 2. Опять в результате потери устойчивости этой траектории и других устойчивых инвариантных множеств, которые могут от неё отродиться, и последующего образования гомоклинических пересечений инвариантных многообразий точки O_μ , здесь может образоваться неориентируемый дискретный спиральный аттрактор.

Этот аттрактор в какой-то степени может быть похож и на дискретный аттрактор Лоренца и на дискретный восьмерочный аттрактор. Более того, при эволюции устойчивых мультипликаторов точки O_μ они могут стать действительными одного знака. В случае, когда устойчивые мультипликаторы становятся положительными, возможен переход от спирального аттрактора к лоренцевскому, а в случае отрицательных мультипликаторов – к восьмерочному.⁵

В ряду этих новых сценариев особое место, как нам кажется, занимает (четвертый) сценарий возникновения неориентируемого дискретного аттрактора Шильникова (схематическую иллюстрацию см. на рис. 2.3). Здесь, также как и в ориентируемом случае, первой бифуркацией потери устойчивости точки O_μ является бифуркация Андронова-Хопфа, в результате которой точка O_μ становится седло-фокусом типа (1,2) с мультипликаторами $\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm i\psi}, -1 < \lambda_3 < 0$, где $\rho > 1$, а в её окрестности рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая L_μ . Поначалу эта кривая является аттрактором, затем она и все ассоциированные с ней устойчивые инвариантные множества теряют устойчивость, образуется неориентируемая “воронка Шильникова” и возникает странный аттрактор, содержащий точку O_μ и её неустойчивое инвариантное многообразие.

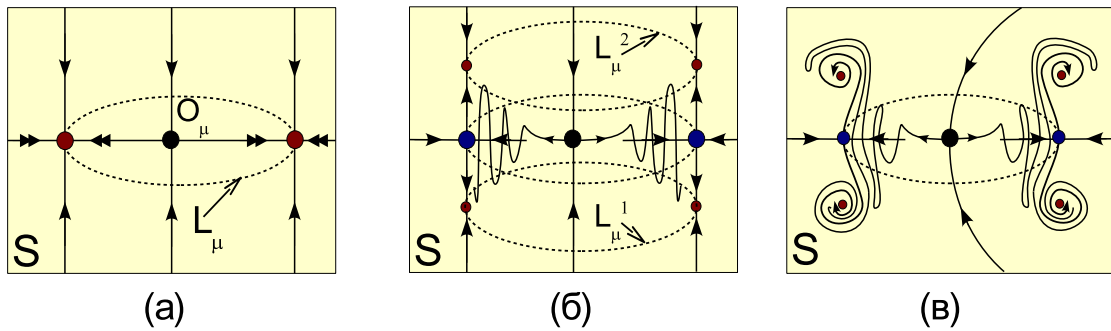
⁵ Такие переходы мы также наблюдали в компьютерных экспериментах с трехмерными отображениями Энэ.



Р и с у н о к 2.3

Иллюстрация бифуркационного сценария, приводящего к возникновению дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова. Здесь в этот сценарий включен переход (б) $\rightarrow$ (в), связанный с бифуркацией удвоения кривой L_μ , см. также рис. 2.4.

Однако здесь есть принципиальные отличия от ориентируемого случая. В частности, неориентируемая “воронка Шильникова” образуется более сложным образом. После бифуркации Андронова-Хопфа точка O_μ становится седло-фокусом типа (1,2), ее неустойчивое многообразие является двумерным диском D_μ с краем L_μ . Заметим, что D_μ является частью центрального многообразия W_μ^C точки O_μ . При значениях параметра μ , близких к бифуркационному, W_μ^C – гладкая поверхность, соответственно воронки нет. Для её образования нужно, чтобы W_μ^C потеряло гладкость. В ориентируемом случае это происходило из-за “дифференцируемой бифуркации”, когда кривая L_μ меняла свой тип с узлового на фокусный [1],[2]. В неориентируемом случае этого, очевидно, не может быть, так как L_μ имеет тип “неориентируемого узла”. Однако здесь есть другие варианты такого разрушения. Один из наиболее очевидных (а главное, наблюдаемых в численных экспериментах) вариант – это когда при изменении μ кривая L_μ сначала претерпевает бифуркацию “удвоения”, в результате которой она становится седловой, а в её окрестности появляется пара устойчивых инвариантных кривых $\hat{L}_\mu^1$ и $\hat{L}_\mu^2$ периода 2 (таких, что $T_\mu(\hat{L}_\mu^1) = \hat{L}_\mu^2, T_\mu(\hat{L}_\mu^2) = \hat{L}_\mu^1$), переход (б) $\rightarrow$ (в) на рис. 2.3. Каждая из кривых $\hat{L}_\mu^1$ и $\hat{L}_\mu^2$ инвариантна относительно T_μ , поэтому с ними при изменении μ одновременно может случиться “дифференцируемая бифуркация” (кривые из узлового типа становятся фокального), в результате которой неустойчивое двумерное многообразие седла O_μ начинает навиваться на эти обе кривые, формируя уже нечто границы “двусторонней воронки”, в которую будут входить все траектории из поглощающей области, см. рис. 2.3(г). После потери устойчивости инвариантными кривыми $\hat{L}_\mu^1$ и $\hat{L}_\mu^2$ (и всеми теми устойчивыми инвариантными множествами, которые от них отрождаются) может как раз и образоваться неориентируемый дискретный аттрактор Шильникова.



Р и с у н о к 2.4

Иллюстрация сценария образования неориентируемой воронки Шильникова. Здесь S – это двумерная площадка, содержащая точку O_μ и $W_{loc}^s(O_\mu)$ и пересекающая трансверсально кривую L_μ в двух точках. Площадка S пересекает трансверсально также двумерные инвариантные многообразия $W^u(O_\mu)$, $W^C(L_\mu)$ и $W^{ss}(L_\mu)$ по соответствующим кривым.

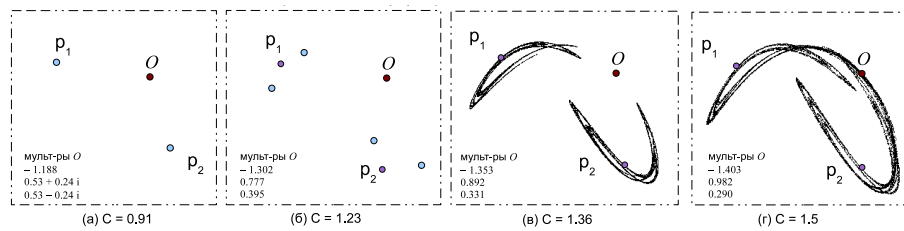
Отметим существенное отличие структуры бифуркаций удвоения инвариантных кривых в ориентируемом и неориентируемом случаях. В ориентируемом случае сама инвариантная кривая становится седловой, а в её окрестности появляется *одна* устойчивая инвариантная кривая двойной длины, обвивающая исходную кривую. В неориентируемом случае сама инвариантная кривая L_μ также становится седловой, но в её окрестности появляются *две* устойчивые инвариантные кривые той же длины, но периода два, см. рис. 2.3(в) и 2.4. Это связано с тем, что вблизи бифуркационного момента центральным двумерным инвариантным многообразием кривой L_μ в ориентируемом случае является лист Мёбиуса, а в неориентируемом – цилиндр. Последнее объясняется тем, что направление сильного сжатия для DT_μ , оно же ортогональное к двумерному центральному многообразию $W^C(L_\mu)$, сохраняется (на самом многообразии $W^C(L_\mu)$ вектор ортогональный кривой L_μ меняет направление на противоположное под действием DT_μ).

3. Примеры.

В этом параграфе мы рассматриваем конкретные примеры реализации рассмотренных в § 2. сценариев в случае неориентируемых трехмерных обобщенных отображений Эно вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = Bx + Az + Cy + g(y, z), \quad (3.1)$$

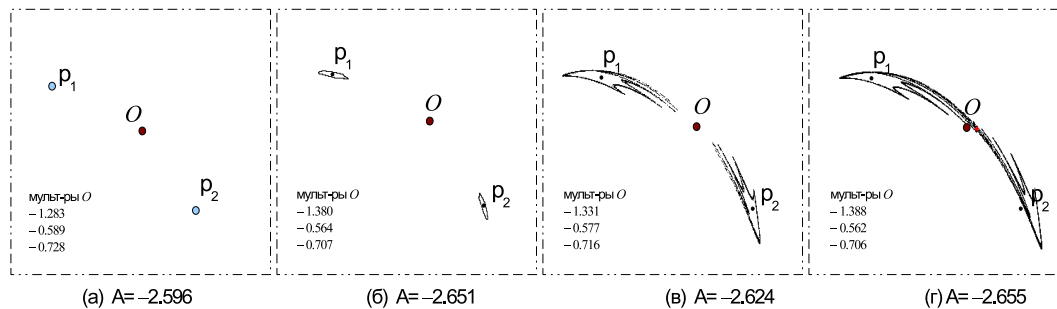
где A, B, C – коэффициенты (B – якобиан отображения (3.1)), $g(y, z)$ – функция только координат y и z , обращающаяся в нуль при $y = z = 0$ вместе с первыми производными. В этом случае отображение (3.1) всегда имеет неподвижную точку $O(0, 0, 0)$, тип которой зависит только от коэффициентов A, B, C . Например, эта точка асимптотически устойчива в области Δ_s значений A, B и C , определяемой неравенствами $C < 1 - B - A, C < A + B + 1, C > B^2 - 1 - AB$, [3]. Мы рассматриваем случай, когда отображение (3.1) неориентируемо, т.е. $B < 0$.



Р и с у н о к 3.1

Этапы возникновения неориентируемого дискретного “тонкого” аттрактора Лоренца в случае отображения (3.1) с $B = -0.4$; $A = -0.13$; $g = 1.5yz - 0.54y^3 + 0.54z^3$ при изменении C от $C = 0.9$ до $C = 1.5$.

На рис. 3.1 показаны этапы возникновения неориентируемого дискретного “тонкого” аттрактора Лоренца в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при фиксированных $B = -0.4$; $A = -0.13$; $g = 1.5yz - 0.54y^3 + 0.54z^3$, где C – параметр. Здесь точка $O(0, 0, 0)$ асимптотически устойчива при $-0.892 < C < 0.47$, при $C = 0.47$ она теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода: сама



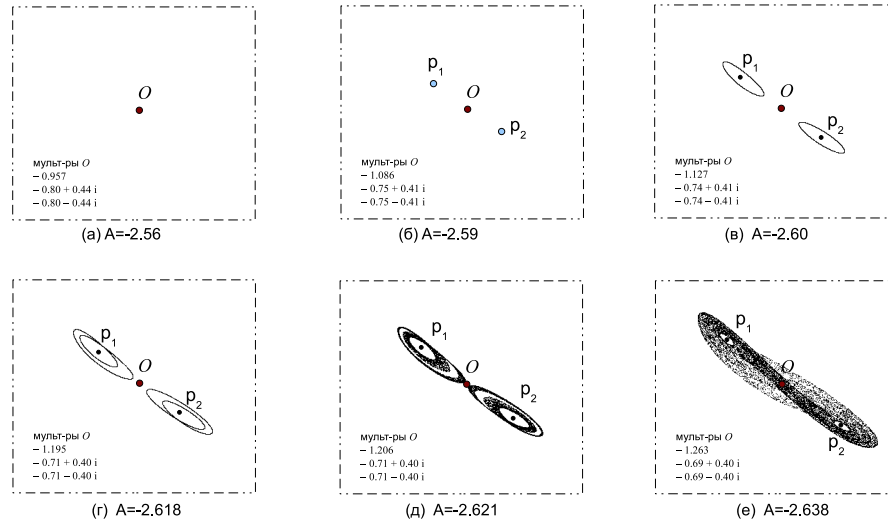
Р и с у н о к 3.2

Этапы возникновения неориентируемого восьмерочного аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (3.1) с $B = -0.55$; $g = 1.3y^2 + 12.5yz + 2.2z^2 + 2.7z^3$ и $C = \frac{2}{3}A - 0.385$ при изменении A .

точка становится седловой (на интервале $0.47 < C < 1.53$ точка O имеет мультипликаторы $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ такие, что $\lambda_1 < -1, |\lambda_{2,3}| < 1$), а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2, рис. 3.1(а). В свою очередь, при изменении C цикл (p_1, p_2) теряет устойчивость в результате второй бифуркации удвоения периода, рис. 3.1(б). Эта бифуркация подсказывает [1], что здесь может возникнуть двухкомпонентный дискретный аттрактор лоренцевского или восьмерочного типа, содержащий цикл (p_1, p_2) . Численный счет подтверждает это: на рис. 3.1(в) показан такой аттрактор – он содержит цикл (p_1, p_2) с мультипликаторами (в соответствии с [1],[3] – это двухкомпонентный квазиаттрактор, тип которого можно определить как промежуточный между лоренцевским и восьмерочным). При дальнейшем изменении C в результате образования гомоклинических пересечений инвариантных многообразий точки O образуется однокомпонентный дискретный “тонкий” аттрактора Лоренца, рис. 3.1(г).

На рис. 3.2 показаны этапы возникновения неориентируемого восьмерочного аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при $B = -0.55$; $g = 1.3y^2 +$

$12.5yz + 2.2z^2 + 2.7z^3$ и $C = \frac{2}{3}A - 0.385$, где A – параметр. Здесь точка $O(0, 0, 0)$ асимптотически устойчива при $-2.205 < A < 1.161$, при $A = -2.823$ она теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода: сама точка становится седловой (на всем интервале $A < -2.823$ точка O имеет мультипликаторы такие, что $\lambda_1 < -1, |\lambda_{2,3}| < 1$), а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2, рис. 3.2(а). При дальнейшем уменьшении A цикл (p_1, p_2) теряет устойчивость в результате дискретной бифуркации Андронова-Хопфа, после которой аттрактором

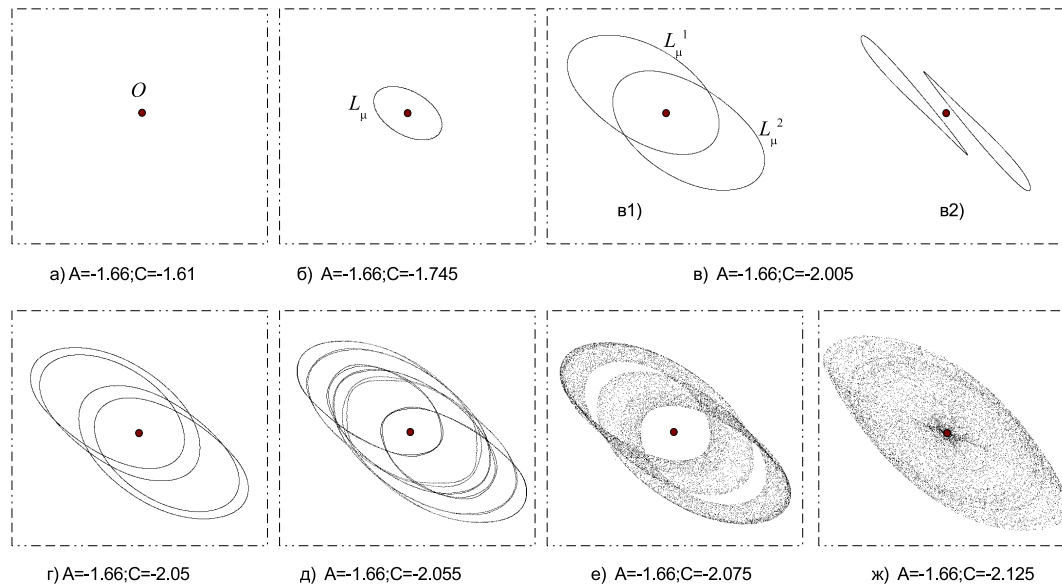


Р и с у н о к 3.3

Этапы возникновения неориентируемого спирального аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при $B = -0.8; C = -2.37; g(y, z) = -1.5yz - y^3 + 1.45z^3$, где A – параметр.

становится замкнутая инвариантная кривая периода 2, рис. 3.2(б); в свою очередь, эта инвариантная кривая разрушается в соответствии со сценарием Афраймовича-Шильникова [14], образуется сначала двухкомпонентный странный аттрактор типа “тор-хаос”, рис. 3.2(в), а затем и дискретный неориентируемый восьмерочный аттрактор, содержащий точку O , рис. 3.2(г).

На рис. 3.3 показаны этапы возникновения неориентируемого спирального аттрактора в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при $B = -0.8; C = -2.37; g(y, z) = -1.5yz - y^3 + 1.45z^3$, где A – параметр. Здесь точка $O(0, 0, 0)$ асимптотически устойчива при $A^* = -2.57 < A < -2.5125$, рис. 3.3(а); при $A = A^*$ она теряет устойчивость в результате бифуркации удвоения периода: сама точка становится седловой (на всем интервале $A < -A^*$ точка O имеет мультипликаторы такие, что $\lambda_1 < -1, \lambda_{2,3} = \rho e^{\pm i\omega}$, где $0 < \rho < 1, 0 < \omega < 1$), а в её окрестности рождается устойчивый цикл (p_1, p_2) периода 2, рис. 3.3(б). При дальнейшем уменьшении A цикл (p_1, p_2) теряет устойчивость в результате дискретной бифуркации Андронова-Хопфа, после которой аттрактором становится замкнутая инвариантная кривая периода 2, рис. 3.3(в); далее с этой кривой происходит несколько бифуркаций удвоений (см. рис. 3.3(г) после первого удвоения) и возникает двухкомпонентный странный аттрактор типа “тор-хаос”, рис. 3.3(д); затем этот аттрактор трансформируется в дискретный неориентируемый спиральный аттрактор, содержащий точку O , рис. 3.3(е).



Р и с у н о к 3.4

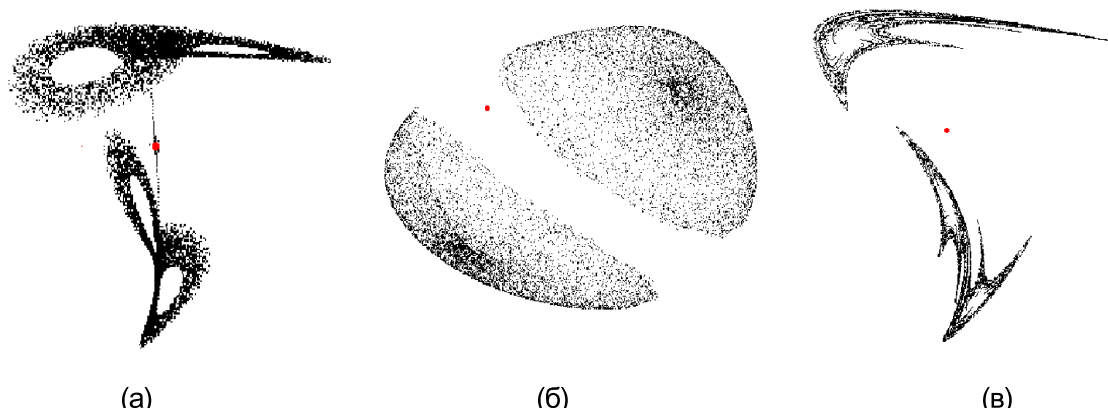
Этапы возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова в в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при $B = -0.8; A = -1.66; g(y, z) = -1.5z^3 + 2.5y^3$, где C – параметр.

На рис. 3.4 показаны этапы возникновения дискретного неориентируемого аттрактора Шильникова в однопараметрическом семействе отображений (3.1) при $B = -0.8; A = -1.66; g(y, z) = -1.5z^3 + 2.5y^3$, где C – параметр. Здесь точка $O(0, 0, 0)$ асимптотически устойчива при $C^* = -1.688 < C < -1.46$, рис. 3.4(а) при $C < C^*$ она теряет устойчивость в результате дискретной бифуркации Андронова-Хопфа – точка O становится седло-фокусом типа $(1, 2)$, а в её окрестности рождается устойчивая замкнутая инвариантная кривая L_μ , рис. 3.4(б). Эта кривая затем «удваивается» – сама кривая становится седлового типа, а в её окрестности появляются устойчивые замкнутые инвариантные кривые L_μ^1 и L_μ^2 периода 2 (показаны на рис. 3.4(в) в разных ракурсах в1) и в2)), которые затем претерпевают несколько бифуркаций удвоения (рис. 3.4(г)–(д)), трансформируются в «тор-хаос», рис. 3.4(е); в конце концов возникает дискретный неориентируемый аттрактор Шильникова, содержащий точку O .

Заметим также, что у трехмерных неориентируемых отображений могут существовать такие же странные гомоклинические аттракторы, как и в ориентируемом случае, но только с точками периода два (или четного периода). Такие аттракторы состоят из двух компонент, каждая из которых содержит точку цикла периода 2. Кроме того, каждая компонента аттрактора инвариантна относительно T^2 . Примеры дискретных (ориентируемых) периода 2 аттракторов Лоренца, Шильникова и восьмерочного в случае отображения

$$\bar{x} = y, \bar{y} = z, \bar{z} = Bx + Cy + Az - z^2 \quad (3.2)$$

показаны на рис. 3.5 (а), (б) и (в) соответственно.



Р и с у н о к 3.5

Примеры дискретных ориентируемых периода 2 странных аттракторов:

(а) аттрактор Лоренца; (б) аттрактор Шильникова и (в) восьмерочный аттрактор.

Авторы благодарят Гонченко С.В. за весьма полезные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФ No. 14-41-00044 и РФФИ No. 16-01-00324. А. Гонченко также работал над статьей в рамках базовой части финансовой программы Министерства Образования и Науки РФ.

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гонченко А.С., Гонченко С.В., Шильников Л.П., “К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений”, *Нелинейная Динамика*, **8:1** (2012), 3–28.
2. Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O. and Turaev D., “Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps”, *Int. J. Bif. and Chaos*, **24(8)** (2014), 25 с.
3. Gonchenko A., Gonchenko S., “Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps”, *to appear in Physica D (or arXiv:1510.02252v2 [math.DS] for this version.*
4. S.V. Gonchenko, A.S. Gonchenko, A.O. Kazakov, “Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **15:5** (2013), 521–538.
5. A.S. Gonchenko, S.V. Gonchenko, “Lorenz-like attractors in a nonholonomic model of a rattleback”, *Nonlinearity*, **28** (2015), 3403–3417.
6. Л.П. Шильников, *Теория бифуркаций и модель Лоренца // Дополнение I к книге Дж.Марсдена и М.Мак-Кракена «Бифуркация рождения цикла и ее приложения.»*, Мир, М., 1980, 19 с.
7. S.Gonchenko, I.Ovsyannikov, C.Simo, D.Turaev, “Three-dimensional Henon-like maps and wild Lorenz-like attractors”, *Int. J. of Bifurcation and chaos*, **15:11** (2005), 3493–3508.

8. S.V. Gonchenko, A.S. Gonchenko, I.I. Ovsyannikov, D.V. Turaev, “Examples of Lorenz-like Attractors in Henon-like Maps”, *Math. Model. Nat. Phenom.*, **8**:5 (2013), 32–54.
9. А.Л. Шильников, “Бифуркации и хаос в системе Мориока-Шимицу”, *Методы КТДУ*, Горький, 1986, 180–183.
10. A.L. Shilnikov, “On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimuizu-Morioka model”, *Physica D*, **62** (1993), 338–346.
11. Lorenz E. N., “Deterministic nonperiodic flow”, *J. of the Atmospheric Sciences*, **20** (1963), 130–141.
12. Gonchenko S.V., Simo C. and Vieiro A., “Richness of dynamics and global bifurcations in systems with a homoclinic figure-eight”, *Nonlinearity*, **26** (2013), 621–678.
13. Шильников Л.П., “Теория бифуркаций и турбулентность - I”, *Межвузовский сб. Методы КТДУ*, Горький, 1986, 150–163.
14. В.С. Афраймович, Л.П. Шильников, “Инвариантные двумерные торы, их разрушение и стохастичность”, *Межвузовский сб. Методы КТДУ*, Горький, 1983, 3–26.

On scenarios of chaos appearance in three-dimensional nonoriented maps

© A. S. Gonchenko⁶, A. D. Kozlov⁷

Abstract. For one-parameter families of three-dimensional nonorientable maps we study scenarios of appearance of strange homoclinic attractors (containing only one fixed point). We describe 4 different scenarios leading to discrete homoclinic nonorientable attractors: correspondingly, of Lorenz and figure-eight types (containing a saddle fixed point), and spiral attractors of two types (containing a saddle-focus fixed point). Some examples of realization of these scenarios in the case of three-dimensional nonorientable generalized Henon maps are given.

Key Words: strange attractor, Lorenz attractor, spiral attractor, homoclinic orbit, invariant curve, three-dimensional generalized Henon map

⁶ Researcher at Research Institute of Supercomputing Technologies, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; agonchenko@mail.ru

⁷ Laboratory assistant at Institute of Supercomputing Technologies, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; kozzzloff@list.ru

УДК 517.938

О топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере S^n посредством раскрашенного графа

© Е. Я. Гуревич¹, Д. С. Малышев²

Аннотация. В работе рассматривается класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере S^n размерности $n > 3$. Каждому диффеоморфизму $f \in G$ ставится в соответствие раскрашенный граф Γ_f , оснащенный автоморфизмом P_f и дается определение изоморфизма двух таких графов. Анонсируется результат о том, что существование изоморфизма графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ в смысле данного определения является необходимым и достаточным условием топологической сопряженности диффеоморфизмов $f, f' \in G$, и существует алгоритм, распознающий существование изоморфизма таких графов за линейное время.

Ключевые слова: структурно-устойчивые динамические системы, диффеоморфизмы Морса-Смейла, топологическая классификация, алгоритм распознавания изоморфизма графов

Задача топологической классификации динамических систем восходит к работам А. А. Андропова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович, А. Г. Майера и М. Пейшото. А. А. Андронов и Л. С. Понтрягин в 1937 году ввели понятие грубости динамической системы и показали, что необходимые и достаточные условия грубости потока на плоскости (двумерной сфере) состоят в требовании конечности множества неблуждающих орбит, его гиперболичности и отсутствия траекторий, идущих из седла в седло. В 1960 году С. Смейл ввел класс динамических систем на многообразиях произвольной размерности, удовлетворяющих аналогичным условиям, при этом условие отсутствия траекторий, идущих из седла в седло, трансформировалось в более общее условие трансверальности пересечения инвариантных многообразий неподвижных точек и периодических орбит. Такие системы позднее получили название систем Морса-Смейла. Условие конечности множества неблуждающих орбит приводит к идее сведения проблемы топологической классификации таких систем к комбинаторной задаче описания взаимного расположения этих орбит в несущем многообразии. Впервые этот подход был применен Е. А. Леонтович и А. Г. Майером для классификации потоков на двумерной сфере с конечным числом особых траекторий и был развит в работах М. Пейшото, А. А. Ошемкова и В. В. Шарко, а так же Я. Л. Уманского, С. Ю. Пилюгина, в которых решалась аналогичная задача для потоков Морса-Смейла на многообразиях размерности 2, 3 и выше, а также В. З. Гринесом, А. Н. Безденежных для диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях с конечным числом гетероклинических орбит.

Как оказалось, эта идея, вообще говоря, не работает в случае диффеоморфизмов на многообразиях размерности 3 из-за существования диффеоморфизмов с дико вложенными инвариантными многообразиями седел. Этот факт потребовал нового языка для получения топологических инвариантов в классе таких систем. Полная топологическая классификация произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях получена в цикле работ Х. Бонатти, В. З. Гринеса, О. В. Починки, Е. В. Жужомы, В.

¹ Доцент кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; egurevich@hse.ru

² Профессор кафедры прикладной математики и информатики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Н. Новгород; dsmalyshev@hse.ru

С. Медведева (см. для ссылок обзор [5]). Идея, приведшая к успешному решению этой задачи, состоит в выделении связных аттрактора и репеллера и описания блуждающего множества, содержащегося в области притяжения аттрактора (области отталкивания репеллера), при помощи *схемы диффеоморфизма* – инварианта, отражающего структуру пространства орбит и вложения инвариантных многообразий седловых периодических точек.

В работах В. З. Гринеса, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведева [3], [4] был сделан первый шаг в топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях M^n размерности большей трех ($n \geq 4$) в предположении, что множество неустойчивых сепаратрис одномерно и не содержит гетероклинических пересечений. Было установлено, что классы топологической сопряженности таких диффеоморфизмов определяются графом диффеоморфизма, как и в случае градиентно-подобных динамических систем на поверхностях, и что, вообще говоря, не верно для случая $n = 3$. В работе [6] при помощи схемы диффеоморфизма была получена топологическая классификация n -мерных диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений в предположении, что размерность инвариантных многообразий седловых периодических точек равна 1 или $(n - 1)$.

Настоящая работа является продолжением работ [3], [4], [6]. Мы рассматриваем класс G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на сфере S^n , $n > 3$, не имеющих гетероклинических пересечений. Сразу отметим, что, в силу [6] (теорема 3), справедливо следующее утверждение.

Предложение 1.1. *Инвариантные многообразия любой седловой периодической точки произвольного каскада $f \in G$ имеют размерность 1 и $n - 1$.*

Пусть Ω_f — неблуждающее множество диффеоморфизма $f \in G$, $\Omega_f^i = \{p \in \Omega_f \mid \dim W_p^u = i\}$, $i \in \{0, 1, n - 1, n\}$.

Для описания класса топологической эквивалентности диффеоморфизма $f \in G$ воспользуемся идеей А. А. Ошемкова и В. В. Шарко и поставим ему в соответствие раскрашенный граф, оснащенный автоморфизмом, который определяется ниже.

Следующее утверждение, доказанное в [7] (см. теорему 2.3), является одним из ключевых для обоснования вводимого инварианта. Если p — седловая периодическая точка, то каждую компоненту связности множества $W_p^s \setminus p$ ($W_p^u \setminus p$) будем называть *устойчивой* (*неустойчивой*) *сепаратрисой* и обозначать через l_p^s (l_p^u).

Предложение 1.2. *Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ — диффеоморфизм Морса-Смейла. Тогда:*

- 1) $M^n = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^u = \bigcup_{p \in \Omega_f} W_p^s$;
- 2) для любой точки $p \in \Omega_f$ многообразие W_p^u является гладким подмногообразием многообразия M^n ;
- 3) для любой точки $p \in \Omega_f$ верно равенство $cl\ l_p^u \setminus (l_p^u \cup p) = \bigcup_{q \in \Omega_f : W_q^s \cap l_p^u \neq \emptyset} W_q^u$ ³.

Из пункта 3 этого утверждения, в частности, следует, что для любой седловой точки σ диффеоморфизма $f \in G$ замыкание ее инвариантного многообразия W_σ^δ размерности $(n - 1)$ содержит, кроме самого этого многообразия, в точности одну периодическую точку. Эта точка является стоковой в случае $\delta = u$ и источниковой в случае $\delta = s$. Тогда

³ Здесь $cl\ l_p^u$ обозначает замыкание множества l_p^u .

множество $cl\ W_\sigma^\delta$ является сферой размерности $(n-1)$, гладкой во всех точках кроме, возможно, одной. В силу работ [2], [1], эта сфера является цилиндрически вложенной (что контрастирует со случаем $n=3$)⁴. Объединение $\mathcal{L}_f = \bigcup_{p \in \Omega_f^1} cl\ W_p^s \cup \bigcup_{q \in \Omega_f^{n-1}} cl\ W_q^u$

замыканий всех инвариантных многообразий размерности $(n-1)$ делит сферу S^n на $k = |\Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}| + 1$ компоненту связности⁵. Обозначим эти компоненты связности через

$D_1, \dots, D_k$ и положим $\mathcal{D}_f = \bigcup_{i=1}^k D_i$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Раскрашенным графом диффеоморфизма $f \in G$ будем называть граф Γ_f со следующими свойствами:

- 1) множество Γ_f^0 вершин графа Γ_f изоморфно множеству $\mathcal{D}_f$, множество Γ_f^1 ребер изоморфно множеству $\mathcal{L}_f$ посредством некоторого изоморфизма $\xi : \Gamma_f^0 \cup \Gamma_f^1 \rightarrow \mathcal{D}_f \cup \mathcal{L}_f$;
- 2) вершины v_i, v_j соединены ребром $e_{i,j}$ тогда и только тогда, когда соответствующие вершинам v_i, v_j области D_i, D_j имеют общую границу;
- 3) ребро $e_{i,j}$ имеет цвет $s(u)$, если ему соответствует многообразие $W_p^s \subset \mathcal{L}_f$ ($W_q^u \subset \mathcal{L}_f$).
- 4) Граф Γ_f оснащен автоморфизмом $P_f : \Gamma_f^0 \rightarrow \Gamma_f^0$ таким, что $\xi P_f = f \xi$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G$ называются изоморфными, если существует изоморфизм $\eta : \Gamma_f^0 \rightarrow \Gamma_{f'}^0$ такой, что $P_{f'} = \eta P_f \eta^{-1}$.

Т е о р е м а 1.1. Диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда графы $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ изоморфны.

Следующий результат показывает, что раскрашенный граф оказывается наиболее эффективным инвариантом для классификации диффеоморфизмов из класса G , поскольку существует оптимальный линейный алгоритм различения графов таких диффеоморфизмов.

Т е о р е м а 1.2. Пусть $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ – графы диффеоморфизмов $f, f' \in G$ с одинаковым числом k вершин. Тогда существует алгоритм проверки существования изоморфизма графов $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ за время $O(n)$.

Благодарности

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 16-31-60008-мол-а-дк, 15-01-03687-а, 16-51-10005-Ко_а), Российского научного фонда (проект 14-41-00044), гранта Президента РФ МК-4819.2016.1, Программы Фундаментальных исследований в НИУ ВШЭ в 2016 году (проект 98) и лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

Дата поступления 30.11.2016

⁴ Сфера $S^{n-1} \subset M^n$ называется цилиндрически вложенной в M^n , если существует топологическое вложение $h : S^{n-1} \times [-1; +1] \rightarrow M^n$ такое, что $h(S^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$.

⁵ Здесь $|P|$ обозначает мощность множества P .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Brown M., “Locally flat imbeddings of topological manifolds”, *Ann. of Math*, **75**:2 (1962), 331-341.
2. Cantrell J.C., “Almost locally flat sphere S^{n-1} in S^n ”, *Proceeding of the American Mathematical society*, **15**:4 (1964), 574-578.
3. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **261** (2008), 61-86.
4. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “О топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на многообразиях размерности большей 3”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **270** (2010), 62-86.
5. В. З. Гринес, О. В. Починка, “Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *УМН*, 2013, № 1(409), 129–188.
6. V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, “Topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersection”, *Journal of Mathematical Sciences*, **208**:1 (2015.), 81-90.
7. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:6 (1967), 747–817.

On the topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms on the sphere S^n via colored graphs

© E. Gurevich⁶, D. Malyshev⁷

Abstract. We consider a class G of orientation-preserving Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinic intersections defined on the sphere S^n of dimension $n > 3$. For every diffeomorphism $f \in G$ corresponding colored graph Γ_f , endowed by a automorphism P_f , is found. We also give definition of isomorphism of such graphs. The result is stated that existing isomorphism of graphs $\Gamma_f, \Gamma_{f'}$ is the necessary and sufficient condition of topological conjugacy of diffeomorphisms $f, f' \in G$, and that an algorithm exists which recognizes this existence by linear time.

Key Words: structurally stable dynamical systems, Morse-Smale diffeomorphisms, topological classification, algorithm of recognizing an existence of an isomorphism of graphs

⁶ Associate professor of Fundamental Mathematics Department, National Research University Higher School of Economics, egurevich@hse.ru

⁷ Professor of Department of Applied Mathematics and Informatics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; dsmalyshev@hse.ru

УДК 512.917+513.9

Применение нидинг-рядов для полусопряженности отображений Лоренца с нулевой энтропией

© М. И. Малкин¹, К. А. Сафонов²

Аннотация. Для одномерных разрывных отображений лоренцевского типа с нулевой топологической энтропией применяется техника нидинг-инвариантов и нидинг-рядов. Нидинг-техника была введена Дж. Милнором и В. Терстоном для непрерывных кусочно-монотонных одномерных отображений и применялась ранее для отображений с положительной топологической энтропией. В данной работе показано, что в предельном переходе к нулевой энтропии с помощью нидинг-рядов удастся задать инвариантную меру для лоренцевских отображений указанного класса и, тем самым, сконструировать полусопряженность (а в транзитивном случае — сопряженность) с модельным лоренцевским отображением единичного наклона.

Ключевые слова: топологическая энтропия, отображения лоренцевского типа, нидинг-инварианты

1. Введение

Одномерные разрывные отображения с двумя интервалами монотонного возрастания (отображения лоренцевского типа), а также их надстройки являются моделями, демонстрирующими основные особенности потоков со сложным поведением предельных траекторий, подобных поведению траекторий в системах со странными аттракторами типа аттрактора Лоренца (см. [1]). В данной работе рассматривается вопрос о построении инвариантной меры и связанной с ней конструкцией полусопряженности отображений лоренцевского типа нулевой энтропии с кусочно-линейными моделями постоянного наклона. Для отображений с положительной топологической энтропией подобная конструкция была приведена в работе [6]. Для этого была существенно использована техника нидинг-последовательностей и нидинг-рядов.

Нидинг-техника была введена Дж. Милнором и В. Терстоном в [1] для непрерывных кусочно-монотонных одномерных отображений. Кроме символических нидинг-последовательностей и соответствующих формальных нидинг-рядов Милнор и Терстон рассматривали значения нидинг-рядов внутри комплексного круга сходимости. При этом существенно использовался тот факт, что радиус сходимости нидинг-рядов равен единице, так что внутри единичного круга можно применять мощные средства теории аналитических функций. В случае положительности топологической энтропии $h_{top}(f)$ отображения f наименьший положительный корень функционального нидинг-ряда строго меньше единицы, и таким образом, корректно определены операции с аналитическими нидинг-рядами и их обратными — динамическими дзета-функциями Артина-Мазура — вплоть до границы сходимости (т.е. внутри единичного круга). Поэтому нидинг-техника обычно применялась для кусочно-монотонных непрерывных отображений с положительной энтропией (как в задачах классификации, так и при изучении топологических инвариантов). В работах М.И. Малкина [2], [5], [6] она была обобщена на разрывные отображения лоренцевского типа с положительной топологической энтропией. В частности, была построена полусопряженность с кусочно-линейным отображением постоянного наклона, равного $h_{top}(f)$.

¹ Доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, malkin@unn.ru

² Студент Нижегородского государственного университета им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

Мы переносим эту конструкцию на случай лоренцевских отображений без периодических точек. Такие отображения имеют нулевую топологическую энтропию и иррациональное число вращения и оказываются полусопряженными иррациональному повороту окружности.

В данной работе показано, что предельный переход на границе круга сходимости нидинг-рядов возможен, так что и в случае нулевой топологической энтропии нидинг-техника позволяет построить инвариантную меру и записать соответствующие формулы для полусопряженности с модельными отображениями постоянного наклона.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 15-01-03687-а, 14-01-00344) и RSF grant 14-41-00044.

2. Предварительные сведения

Рассмотрим семейство отображений $f : I \rightarrow I$ отрезка $I = [0; 1]$ в себя — отображений лоренцевского типа, удовлетворяющих условиям:

1. f -непрерывная монотонно возрастающая функция на каждом из полуинтервалов $[0; c_f)$ и $(c_f; 1]$,
2. $\lim_{x \rightarrow c_f+0} f(x) = 0$,
3. $\lim_{x \rightarrow c_f-0} f(x) = 1$.

Отметим, что второе и третье условия являются, фактически, удобными условиями нормировки (интересная динамика отображения, удовлетворяющая только первому условию, имеет место лишь на отрезке $f(c_f+), f(c_f-)$).

Введем обозначение для множества точных прообразов точки разрыва

$$D_0 = \{c_f\}, D_n = \{x \in I \mid f^n(x) = c_f, f^{n-1}(x) \neq c_f\}, D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n.$$

Согласно [3], топологическую энтропию для разрывного отображения f можно определить как

$$h_{top}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln l_n}{n}, \text{ где } l_n = \text{card} D_n. \quad (2.1)$$

Данный предел существует для любого отображения и принимает значения из отрезка $[0, \log 2]$.

Далее всюду будем считать отображение f фиксированным. Для произвольного подмножества $J \subset I$ введем формальный степенной ряд

$$L(J, t) = \sum_{i=0}^{\infty} l_i(J) t^i, \text{ где } l_i(J) = \text{card}(J \cap D_i).$$

Из формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости степенного ряда имеем

$$r(f) = r(L(I, t)) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\text{card} D_n}}. \quad (2.2)$$

Таким образом, из (2.1) и (2.2) получаем $h_{top}(f) = -\log r(f)$ при $r \leq 1$ и вопрос о вычислении энтропии сводится к вычислению $r(f)$.

Введем еще одну функцию, определенную на полукольце $\mathcal{R}$ открытых интервалов, используя символическое описание лоренцевских отображений.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Нидинг-последовательностью точки $x \in I \setminus D$ называется последовательность $\omega(x) = \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots$, где $\omega_i = \text{sign}(f^i(x) - c_f)$. Формальный степенной ряд $\tilde{\omega}(x, t) = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i t^i$ переменного t будем называть нидинг-рядом точки x .*

Отображение $\omega(x)$ устанавливает полусопряженность между ограничением f на множество $I \setminus D$ и односторонней схемой Бернулли из двух символов $\{+1, -1\}$ (с тихоновской топологией и лексикографическим порядком).

Для каждой точки $x \in D$ определим пару нидинг-последовательностей по формуле:

$$K^+(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \rightarrow x+0} \omega(y), \quad K^-(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \rightarrow x-0} \omega(y), \quad y \in I \setminus D.$$

О п р е д е л е н и е 2.2. *Нидинг-инвариантом отображения $f \in \mathcal{F}$ называется пара последовательностей $(K_f^+, K_f^-) = (K_f^+(c_f), K_f^-(c_f))$.*

Каждому элементу $(x, y) \in \mathcal{R}$ сопоставим формальный степенной ряд

$$K((x, y), t) = \tilde{K}^-(y, t) - \tilde{K}^+(x, t).$$

Введенные ряды связаны формальным соотношением (см. [2])

$$K((x, y), t) = (\tilde{K}_f^+(t) - \tilde{K}_f^-(t))L((x, y), t). \quad (2.3)$$

Лоренцевское отображение f можно рассматривать в качестве отображения окружности, если отождествить концы интервала I . При этом отождествленная точка становится точкой разрыва, а c_f — точкой непрерывности. Обозначим соответствующее отображение окружности $\bar{f}$. Для таких отображений можно определить поднятие, т.е. отображение $F: R \rightarrow R$, для которого $\bar{f} \circ \pi = \pi \circ F$. Далее, аналогично непрерывным отображениям окружности вводится число вращения

$$\rho(f, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n}$$

и множество вращения

$$\rho(f) = \{\rho(f, x) | x \in I\},$$

которое является замкнутым интервалом, возможно тривиальным.

Мы будем рассматривать класс лоренцевских отображений, для которых множество вращения тривиально и является иррациональным числом. Данное условие равносильно отсутствию у отображения периодических орбит, а следовательно, оно имеет нулевую топологическую энтропию.

3. Построение кусочно-линейной модели

Для начала мы рассмотрим случай $f(0) = f(1)$. При этом условии отображение $\bar{f}$ является гомеоморфизмом окружности. Известно, что иррациональный гомеоморфизм окружности строго эргодичен, при этом производящая функция единственной эргодической меры полусопрягает гомеоморфизм с поворотом окружности на угол $\rho(f)$. Используя степенные ряды из предыдущего параграфа, мы получим формулу для единственной инвариантной нормированной меры. Далее мы перенесем нашу конструкцию на случай $f(0) \neq f(1)$.

Из условия нулевой энтропии имеем $r(f) = r(L(I, t)) = 1$. Так как $0 \leq l_n(J) \leq l_n(I)$, то степенные ряды $L(J, t)$ определяют аналитические функции при $|t| < 1$. Рассмотрим выражение

$$\Lambda(J, t) = \frac{L(J, t)}{L(I, t)}. \quad (3.4)$$

Так как коэффициенты ряда $L(I, t)$ неотрицательны и при этом не все равны нулю, эта аналитическая функция не обращается в нуль на полуинтервале $[0, 1)$. Следовательно для каждого $J \subset I$ функция $\Lambda(J, t)$ определена при $0 \leq t < 1$ и справедливо неравенство

$$0 \leq \Lambda(J, t) \leq 1 \text{ при } 0 \leq t < 1.$$

Из последнего условия и непрерывности по переменной t следует, что существует предел

$$\Lambda(J) = \lim_{t \rightarrow 1} \Lambda(J, t).$$

Для открытых интервалов $J \in \mathcal{R}$ функцию $\Lambda(J, t)$ можно определить другим способом. Для этого напомним, что $r(f) = 1$ совпадает с наименьшим положительным корнем аналитической функции $K_f^+ - K_f^-$. Тогда ряд $K(I, t) = (K_f^+ - K_f^-)L(I, t)$ определяет аналитическую функцию в круге $|t| < 1$ и отличную от 0 на полуинтервале $[0, 1)$. Используя соотношение (2.3), имеем

$$\Lambda(J, t) = \frac{K(J, t)}{K(I, t)}. \quad (3.5)$$

Предложение 3.1. Функция $\phi(x) = \Lambda([0, x))$ является неубывающей и непрерывной слева.

Доказательство. Необходимо показать, что условие $\Lambda([0, x_1)) \leq \Lambda([0, x_2))$ выполняется для всех $x_1 < x_2 \in I$. Из неравенства $x_1 < x_2$ следует, что $[0, x_1) \subset [0, x_2)$. Далее, для коэффициентов формальных рядов имеем

$$0 \leq l_n([0, x_1)) \leq l_n([0, x_2)),$$

$$\Lambda([0, x_1), t) \leq \Lambda([0, x_2), t).$$

Из последнего неравенства при предельном переходе в (3.4) следует неубывание функции $\phi(x)$.

Доказательство закончено.

Для доказательства второго свойства сначала покажем аддитивность функции $\Lambda(J)$

Предложение 3.2. Пусть $a < b < c \in I$. Тогда $\Lambda([a, c)) = \Lambda([a, b)) + \Lambda([b, c))$.

Доказательство. Аналогично предыдущему доказательству воспользуемся соотношением для коэффициентов степенных рядов

$$l_n([a, c)) = l_n([a, b)) + l_n([b, c)),$$

из которого при предельном переходе в 3.4 непосредственно следует наше утверждение.

Доказательство закончено.

Непрерывность слева для $\phi(x)$ означает, что

$$\lim_{x_1 \rightarrow x_2} L([x_1, x_2)) = 0, \quad \forall x_1 < x_2 \in I.$$

По функции $\phi(x)$ построим меру Лебега—Стилтьеса, которую обозначим μ_ϕ . Данная мера является борелевской и нормированной. При этом мера любого замкнутого или открытого интервала, а также любого полуинтервала $J \subset I$ вычисляется по формуле

$$\mu_\phi(J) = \Lambda(J).$$

Наша задача — показать, что мера μ_ϕ также является инвариантной.

Предложение 3.3. *Если полуинтервал $J = [x, y)$ целиком содержится в одном из интервалов непрерывности отображения f , то $\Lambda(f(J)) = \Lambda(J)$.*

Доказательство. В нашем случае ограничение $f|_J$ является гомеоморфизмом, поэтому $l_n(f(J)) = l_{n+1}(J)$ и $L(f(J), t) = tL(J, t)$. Переходя к пределу в (3.4), получаем требуемое равенство.

Доказательство закончено.

Для доказательства инвариантности меры μ_ϕ рассмотрим для начала случай $f(0) = f(1)$. В этом случае прообраз любого полуинтервала $J = [x, y)$ можно разбить на два непересекающихся полуинтервала U_1, U_2 таких, что $f(U_1) \cap f(U_2) = \emptyset$ и отображения $f|_{U_i}$ являются гомеоморфизмами. В этом случае имеем

$$\Lambda(f^{-1}(J)) = \Lambda(U_1 \cup U_2) = \Lambda(U_1) + \Lambda(U_2) = \Lambda(f(U_1)) + \Lambda(f(U_2)) = \Lambda(J).$$

Таким образом, показана инвариантность меры μ_ϕ . В остальных двух случаях рассуждения остаются аналогичными, если показать, что

$$\mu_\phi[f(0), f(1-0)) = 0.$$

При условии $f(0) > f(1)$ это очевидно, так как

$$f^{-1}([f(0), f(1)]) = \emptyset.$$

В последнем случае найдутся $a, b \in I \setminus \partial I$, для которых $f(a) = 1, f(b) = 0$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} \mu_\phi(I) &= \mu_\phi[0, a) + \mu_\phi[a, c) + \mu_\phi[c, b) + \mu_\phi[b, 1) = \mu_\phi[0, f(0)) + \\ &+ 2\mu_\phi[f(0), f(1-0)) + \mu_\phi[f(1-0), 1) = \mu_\phi(I) + \mu_\phi[f(0), f(1-0)) \end{aligned}$$

Из последнего равенства следует, что $\mu_\phi[f(0), f(1-0)) = 0$.

Все рассуждения, приведенные выше, подходят для любого лоренцевского отображения с нулевой топологической энтропией. Далее для нас будет важна иррациональность числа вращения. В этом случае отображение не имеет периодических точек, а значит и одноточечных подмножеств положительной меры (не имеет атомов).

Из последнего равенства следует:

$$\mu_\phi[x, y) = \mu_\phi(x, y).$$

Исходя из (3.5), функцию $\phi(x)$ можно определить другим способом, а именно:

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \frac{K([0, x), t)}{K([0, 1), t)}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Функция $\phi : I \rightarrow I$ для таких отображений является непрерывной, неубывающей и сюръективной. Покажем, что данная функция устанавливает полусопряженность между исходным отображением f и кусочно-линейным отображением.

Обозначим $\omega = \mu_\phi[0, f(0))$. Для каждого $0 \leq x < c$ выполняется

$$\phi(f(x)) = \mu_\phi[0, f(x)) = \mu_\phi[0, f(0)) + \mu_\phi[f(0), f(x)) = \omega + \mu_\phi[0, x) = \phi(x) + \omega$$

Для остальных $c \leq x < 1$ равенство принимает вид

$$\begin{aligned} \phi(f(x)) &= \mu_\phi[0, f(x)) = \mu_\phi[0, f(1-0)) - \mu_\phi[f(x), f(1-0)) = \mu_\phi[0, f(0)) + \\ &+ \mu_\phi[f(0), f(1-0)) + \mu_\phi[x, 1) = \omega + 1 - \mu_\phi[0, x) = 1 - \phi(x) + \omega. \end{aligned}$$

Несложно заметить, что $\phi \circ f = f_\omega \circ \phi$, где

$$f_\omega(x) = \begin{cases} x + \omega, & 0 \leq x < 1 - \omega, \\ 1 - x + \omega, & 1 - \omega \leq x < 1. \end{cases}$$

Последнее отображение можно рассматривать как поворот окружности (единичной длины) на угол ω , а его множество вращения состоит из одного числа $\rho(f_\omega) = \omega$. Так как множество вращения является инвариантом полусопряженности, то справедливо равенство

$$\omega = \rho(f) = \mu_\phi[0, f(0)).$$

Таким образом, доказана

Т е о р е м а 3.1. *В классе лоренцевских отображений без периодических точек единственная нормированная инвариантная мера может быть выражена на интервалах $J \in I$ с помощью нидинг рядов в виде $\mu_\phi(J) = \Lambda(J) \lim_{t \rightarrow 1} \Lambda(J, t)$, где $\Lambda(J, t)$ определяется по формуле (5). Соответствующая этой мере полусопряженность с модельным кусочно-линейным отображением единичного наклона с числом вращения $\rho(f)$ определяется формулой*

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \frac{K([0, x), t)}{K([0, 1), t)}, & 0 < x < 1. \end{cases}$$

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Afraimovich V., Sze-Bi Hsu., "Lecture on chaotic dynamical systems", *AMS/IP, Studies in Advanced Mathematics*, (2002), v.28..
2. M. Malkin., "On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval", *Selecta Mathematica Sovietica*, 1989, 131–139.
3. L.-S. Young., "On the prevalence of horseshoes", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **263**:1 (1981), 75–88.
4. J.Milnor and W.Thurston., *Dynamical Systems, Proc., 1986-87 (J.C.Alexander,Ed.). Lec. Notes Math.*, v.1342, Springer-Verlag, 1988.
5. M. Malkin, "Rotation intervals and the dynamics of Lorenz type mappings", *Selecta Mathematica Sovietica*, **10** (1991), 265–275.

6. М.И. Малкин, “О топологической сопряженности разрывных отображений отрезка”, *Украинский Математический Журнал*, **32:5** (1980), 610-616.

Application of kneading series to semiconjugacy of Lorenz maps of zero entropy

© M. Malkin³, K. Safonov⁴

Abstract. For one-dimensional discontinuous maps of Lorenz type with zero topological entropy, we apply the technique of kneading invariants and kneading series. The kneading technique was introduced first by J. Milnor and W. Thurston for continuous piecewise-monotone one-dimensional maps and was applied to maps with positive topological entropy. In present paper we show that by approaching the zero entropy one may (using kneading series) define invariant measure for Lorenz maps under consideration. Thus one may construct semiconjugacy (being actually a conjugacy in the transitive case) with a model map of unit slope.

Key Words: topological entropy, Lorenz type maps, kneading invariants

³ Associate professor of Department of Differential Equations, Mathematical and Numerical Analysis, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru

⁴ Student, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod

УДК 517.9

Критическая плотность и интегралы лиминального уравнения дислокаций

© С. Н. Нагорных¹, Е. В. Нагорных²

Аннотация. Рассмотрены особые точки и интегралы уравнения в частных производных скалярной плотности дислокаций для тонкой пластины с сильным изгибом. Показана необходимость метода характеристик для получения обыкновенных дифференциальных уравнений и их особых точек. Получены два критических значения скалярной плотности дислокаций для изолированной особой точки. Эти значения скалярной плотности достаточно иметь для обращения исходного уравнения в тождество. Бифуркация уравнения Ферхюльста играет важную роль при рассмотрении разных видов особых точек как в детерминированном виде, так и при возбуждении белым шумом. Приведены следствия для стационарных особых точек, для другого обыкновенного дифференциального уравнения, для критического параметра пластины, для критического параметра уравнения Ферхюльста, возбужденного шумом, для дислокационных эффектов, для упрочнения и разрушения пластины. Сформулирована задача Зельдовича как задача нахождения интегралов уравнения в частных производных с особыми точками и топологическим инвариантом дислокационной структуры пластины.

Ключевые слова: особые точки, дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка, обыкновенное дифференциальное уравнение, классификация интегралов, точка бифуркации уравнения Ферхюльста, белый шум

Сильный изгиб тонких пластин [1] имеет вид уравнения в частных производных (УЧП) для скалярной плотности дислокаций $\nu(x, t)$, которое в [2] названо лиминальным.

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \xi(\nu) \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right)^2 = h(\nu), \nu \in [0, \infty), \quad (1.1)$$

где $\xi(\nu) = (\lambda - \frac{\gamma}{\nu}) / \nu^3$, $h(\nu) = A\nu - B\nu^2$, $\nu = \frac{1}{2d\zeta}$, $d = b \frac{\cos \chi}{1 - \cos \alpha/2}$, $\beta \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial \zeta}{\partial y}$, ζ – прогиб пластины, d – расстояние в дислокационной структуре, b – модуль вектора Бюргерса, χ , α – углы прогиба полос скольжения и пластины, в которой присутствует ползучесть и переползание дислокаций, λ , γ , A , B – постоянные. УЧП вида

$$f(x, t) \frac{\partial \nu}{\partial t} + \bar{\xi}(x, t) \left(\frac{\partial \nu}{\partial x} \right) = 0 \quad (1.2)$$

методом характеристик приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ)

$$\frac{dt}{f(x, t)} = \frac{dx}{\bar{\xi}(x, t)}, \quad (1.3)$$

к главному интегралу $\bar{F}(x, t) = c$ и решению $\nu(x, t) = \bar{\Phi}(\bar{F}(x, t))$ с произвольной функцией $\bar{\Phi}$. Выражение

$$f(x_0, t_0) = \bar{\xi}(x_0, t_0) = 0 \quad (1.4)$$

¹ Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

² Доцент кафедры численного моделирования физико-механических процессов, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород

определяет изолированные особые точки (ОТ) x_0, t_0 . Пересечение характеристик на плоскости ν, x называется ОТ пересечения (критическая плотность $\nu_{\text{кр}}$ уравнения (1.1)). Кроме того, имеется ОТ неединственности, граничные ОТ и их комбинации [3]. Запишем в неявном виде уравнение (1.1):

$$F(p, q, \nu, x, t) = 0, \quad (1.5)$$

где $p = \frac{\partial \nu}{\partial t}$, $q = \frac{\partial \nu}{\partial x}$, $\nu(x, t) > 0$ – гладкое решение с непрерывными производными по x, t . Для нахождения $\nu_{\text{кр}}$ необходимо записать характеристическое уравнение, соответствующее уравнению (1.5)

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{2\xi q} = \frac{d\nu}{p + 2\xi q^2} = -\frac{dp}{p(q^2\xi'_\nu - h'_\nu)} = -\frac{dq}{q(q^2\xi'_\nu - h'_\nu)}. \quad (1.6)$$

Из первого и третьего членов (1.6) получаем ОДУ

$$\frac{d\nu}{dx} = \pm \sqrt{\frac{(B\nu - A)\nu^5}{\lambda\nu - \gamma}}. \quad (1.7)$$

Уравнение (1.7) эквивалентно системе ОДУ с изолированной ОТ

$$\dot{\nu} = \pm \sqrt{(B\nu - A)\nu^5}, \dot{x} = \pm \sqrt{\lambda\nu - \gamma} \quad (1.8)$$

с критической плотностью

$$\nu_{1\text{кр}} = \frac{\gamma}{\lambda}, \quad (1.9)$$

что соответствует числителю $\xi(\nu) = 0$ и является ОТ пересечения $x = c_1$, $\nu = \nu_{\text{кр}}$ на плоскости (ν, x)

$$\nu_{2\text{кр}} = \frac{A}{B}, \quad (1.10)$$

что соответствует $h(\nu) = 0$, либо

$$\nu_{1\text{кр}} = \frac{\gamma}{\lambda}, \nu_{2\text{кр}} = 0, \quad (1.11)$$

Теорема Хорстхемке-Саичева по Стратоновичу [5] дает асимптотическую сходимость $\xi(\nu) \rightarrow -\delta(\nu)$, когда интенсивность белого шума, равная $2\nu_{1\text{кр}}$, стремится к ∞ . Тогда $\nu \in [0, \infty)$. Достаточно в (1.1) подставить $\nu_{1\text{кр}}$, а затем $\nu_{2\text{кр}}$, чтобы получить верное тождество уравнения (1.1). Действительно, $h(\nu) = 0$ только при $\nu = \nu_{2\text{кр}}$, которое является устойчивым стационарным решением уравнения Ферхюльста

$$\dot{\nu} = h(\nu), \nu \in [0, \infty) \quad (1.12)$$

в точке бифуркации $\nu = 0$, $\frac{A}{B} = 0$. Неустойчивым решением является $\nu = 0$ [4]. Точкой бифуркации уравнения Ферхюльста назовем ОТ комбинации неединственности и граничной ОТ. Если сначала подставить в (1.1) $\nu_{2\text{кр}}$, то уравнение (1.1) выполняется тождественно. Сформулируем Теорему 1.

Т е о р е м а 1.2. Для получения $\nu_{1,2\text{кр}}$ УЧП пластины (1.1) необходимо к методу характеристик, то есть к ОДУ, применить изолированность окрестности ОТ при $\nu_{1\text{кр}} \rightarrow \infty$ и достаточно для $\nu_{1\text{кр}}$ получить числитель $\xi(\nu) = 0$, для $\nu_{2\text{кр}}$ получить $h(\nu) = 0$ и верное тождество уравнения (1.1).

С л е д с т в и е 1.1. Стационарное уравнение (1.1) дает стационарные ОТ, которые совпадают с изолированными ОТ. Однако действительное стационарное решение существует при $A > B\nu$, а действительные обыкновенные точки (1.7) существуют при $B\nu > A$. Обыкновенными точками называются точки, не удовлетворяющие условию $\nu_{2кр} = 0$, то есть точки, удовлетворяющие $\nu > 0$. В соответствии с теоремой о выпрямлении в окрестности обыкновенной точки имеем из второго уравнения (1.8)

$$x = \sqrt{-\gamma} \left(1 - \frac{\lambda}{2\gamma} \nu \right) t + c_1, \quad (1.13)$$

то есть для начальных условий $t = 0$ характеристику $x = c_1$.

С л е д с т в и е 1.2. Для первого и второго члена (1.6) имеем

$$2\xi(\nu) \frac{\partial \nu}{\partial x} dt = dx \quad (1.14)$$

также характеристику $x = c_1$, ОТ пересечения $\nu_{1кр} = \frac{\gamma}{\lambda}$, точку бифуркации и стационарное решение уравнения Ферхюльста $\nu_{2кр} = \frac{A}{B}$. Тогда ОТ с $\nu_{1кр}$ назовем граничной ОТ.

С л е д с т в и е 1.3. Количественное неравенство $\nu_{1кр} \neq \nu_{2кр}$ определяется критическим параметром пластины β при одинаковых параметрах нагружения $\Phi_{1,2}$ и дислокационной структуры K , то есть $\frac{K\Phi_1}{\beta} \neq K\Phi_2$.

С л е д с т в и е 1.4. Согласно теореме Хорстхемке–Саичева по Стратановичу [5] $\frac{A}{B} + \sigma\xi_t$, $\frac{2A}{B\sigma^2} \rightarrow 0$ под действием белого шума σ^2 происходит асимптотический переход от несимметричной плотности вероятности (ПВ) к дельта-функции $\delta(\nu)$, где ξ_t – случайный гауссовский процесс. Тогда точка бифуркации уравнения Ферхюльста называется точкой пересечения стационарного решения уравнения Ферхюльста и уравнения Фоккера–Планка. Аналогичная ОТ разрыва введена в исследование уравнения Лапласа [6].

С л е д с т в и е 1.5. Асимптотический переход под действием шума от несимметричной ПВ к $\delta(\nu_{ik})$ для $\int \nu_{ik} df_i = b_k$, где f_i – площадь, b_k – сумма векторов Бургерса [1], свидетельствует о переходе от тензора плотности дислокаций ν_{ik} к тензору дислокационной поляризации. Другой вариант – это переход к аморфизации пластины, когда $b_k \rightarrow 0$ в окрестности $\nu_{ik}^{кр} = 0$. Переход к $\delta(\nu)$ можно интерпретировать также как переход от неоднородно распределенных внутренних напряжений с несимметричной ПВ на упругое деформирование в окрестности $\nu_{кр} = 0$. Параметр дислокационной структуры K имеет вид

$$K = \frac{\ln(L/r_0)}{2\pi c_0 d^2}, \quad (1.15)$$

где $\ln(L/r_0)$ – относительное натяжение линии дислокации с ядром $r_0 \sim 2 \div 3b$, L – расстояние между дислокациями, c_0 – относительная плотность точечных дефектов кристалла, d – расстояние между стенками переползающих дислокаций. Интерпретация (1.9), (1.1) при $d \sim b$ означает распад ядра дислокации на конечное число дислокаций в паре стенок, соответствующее $\nu_{1кр}$, при d пропорциональном размеру блока означает критическую плотность блока, при d пропорциональном размеру зерна означает критическую плотность зерна $\nu_{1кр}$, при d – размере дислокационной структуры означает $\nu_{1кр}$ дислокационной структуры.

С л е д с т в и е 1.6. Пусть $h(\nu) = A\nu_{1,2\kappa p} - B\nu_{1,2\kappa p}^2 - C\sqrt{\nu}$ является «возбуждением» $h(\nu_{1,2\kappa p})$. Тогда закон параболического упрочнения пластины будет иметь вид [7]

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = A\nu_{1,2\kappa p} - B\nu_{1,2\kappa p}^2 + C\sqrt{\nu}. \quad (1.16)$$

С л е д с т в и е 1.7. Приравняем $\sigma_{xx} - \sigma_{yy}$ напряжению образования трещины длиной $\bar{L}$ про Гриффиту и получим в пластине трещины размером $\sim \bar{L}^{-1/2}$ [7] с расположением в полосах скольжения и переползания дислокаций, определяемых топологическим инвариантом $\frac{1}{\cos \varphi}$ [2].

В соответствии с Теоремой 1 интегралы уравнения (1.1) можно классифицировать на основе полного интеграла [8]

$$t + c_3x + \int \frac{2c_3^2\xi(\nu) d\nu}{1 + \sqrt{1 + 4c_3^2\xi(\nu)h(\nu)}} = c_2. \quad (1.17)$$

Т е о р е м а 1.3. Для получения интеграла (1.17), комбинации ОТ пересечения и изолированной ОТ уравнения (1.1) необходимо иметь частное решение $\nu = c_3x + c_2 + c_4t$ и достаточно сначала реализовать условие $h(\nu) = 0$ и получить интеграл $t + c_3x + \int 2c_3^2\xi(\nu) d\nu = c_2$, а затем условие числителя $\xi(\nu) = 0$ и получить интеграл $t + c_3x = c_2$.

С л е д с т в и е 1.1. В задаче Коши при $t = 0$ интеграл $t + c_3x = c_2$ соответствует изолированной ОТ и ОТ пересечения $x = c_1$.

С л е д с т в и е 1.2. Разделим числитель и знаменатель (1.7) на B . Имеем

$$\frac{d\nu}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\nu^5\left(\nu - \frac{A}{B}\right)}{\frac{\lambda}{B}\nu - \frac{\gamma}{B}}}. \quad (1.18)$$

Характеристика классификации $\nu = c_3x + c_2$ имеет в окрестности $\nu_{1\kappa p}$ постоянную c_3 , содержащую

$$\frac{\gamma}{B} = \frac{\ln(L/r_0)\kappa\Phi}{8b^2d^4\pi c_0l_x}, \quad (1.19)$$

где $\kappa = \frac{l_x}{\tilde{l}}$ – топологический инвариант дислокационной структуры пластины, l_x – путь зарождения скользящих дислокаций, $\tilde{l}$ – путь скользящих дислокаций, замыкающих скольжение – переползание дислокаций в одну и другую сторону («восьмерка»). Нахождение характеристики, содержащей топологический инвариант в окрестности ОТ $\nu_{1\kappa p}$ является решением задачи Зельдовича [9].

Дата поступления 05.09.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М., *Теория упругости.*, М.: Наука., 1987, 246 с.
2. Алексеев С. Н., Нагорных С. Н., «Лиминальное диссипативное уравнение плотности переползающих дислокаций для однокомпонентного изгиба плоской пластины.», *Журн. СВМО.*, **14**:1 (2012).

3. Петровский И.Г., *Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений*, М.: УРСС, 2003, 272 с.
4. Хорстхемке В., Лефевр Р., *Индукцированные шумом переходы*, М.: Мир, 1987, 397 с.
5. Нагорных С.Н., Саблуков Д.С., “Плотность вероятности как решение уравнения Фоккера-Планка в индуцированных шумом переходах. Журнал Средневолжского математического общества.”, *Журн. СВМО.*, **17**:1 (2015).
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А., *Уравнения математической физики*, М.: Наука, 1966, 724 с.
7. Фридель Ж., *Дислокации*, М.: Мир, 1967, 643 с.
8. Зайцев В.Ф., Полянин А.Д., *Справочник дифференциальные уравнения с частными производными первого порядка*, М.: Физико-математическая литература, 2003, 416 с.
9. Зельдович Я.Б., *Избранные труды. Химическая физика. Гидродинамика*, М.: Наука, 1984, 374 с.

Critical density and integrals of liminal dislocation equation.

© S. N. Nagornykh³, E. V. Nagornykh⁴

Abstract. The paper deals with partial differential equation where unknown function is dislocation scalar density for a thin plate with large bending. Singular points and integrals of this equation are considered. It is shown that usage of characteristics method is necessary to obtain ordinary differential equations and their singular points. Two critical values of the dislocation scalar density for isolated singular point are found. They are sufficient for the conversion of initial equation into identity. Verhulst equation's bifurcation is important for analysis of different kinds of singular points in determined form as well as under excitation by the white noise. The consequence is given for stationary singular points, for another ordinary differential equation, for critical plate parameters, for critical parameter of Verhulst equation excited by the noise, for dislocation effects, for hardening and fracture of the plate. Zeldovich problem is formulated as a problem of obtaining integrals for partial differential equations with singular points and topological invariant of the plate dislocation structure.

Key Words: Singular points, first order partial differential equation, ordinary differential equation, classification of integrals, bifurcation point of Verhulst equation, white noise.

³ Associate professor of Applied Mathematics Department, Nizhniy Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhniy Novgorod; algorithm@sandy.ru

⁴ Associate professor of Numerical Simulation of Physical and Mechanical Processes Department, Lobachevsky State University of Nizhniy Novgorod, Nizhniy Novgorod

УДК 51-7;62-51

Стабилизация программного движения манипуляционных роботов на основе измерения координат звеньев

© О. А. Перегудова¹, Д. С. Макаров²

Аннотация. Применение известных стратегий и алгоритмов построения и реализации управления нелинейными механическими системами имеет определенные трудности, связанные с необходимостью установки датчиков полного измерения текущих координат и скоростей, усложняющих конструкцию управляемого объекта. Для большинства практических задач управления современными манипуляционными роботами, состоящими из нескольких звеньев, требование о наличии полной информации о текущих значениях координат и скоростей звеньев является недостижимым. В статье исследуется проблема построения стабилизирующих законов управления движением манипуляционных роботов при отсутствии датчиков скоростей. Предложен подход, основанный на построении нелинейного динамического компенсатора первого порядка, позволяющий построить достаточно простой по своей структуре нелинейный закон управления. Новизна результатов состоит в построении управляющих воздействий, решающих указанные задачи в достаточно общей постановке. С использованием метода векторных функций Ляпунова найдены достаточные условия стабилизации программного движения многосвязного манипулятора.

Ключевые слова: манипуляционный робот, программное движение, стабилизация, нелинейный динамический компенсатор, вектор-функция Ляпунова

1. Введение

Проблема управления движением нелинейных механических систем без измерения скоростей стала активно изучаться с начала 90-х годов прошлого века. В ранних исследованиях [1] – [3] были получены результаты, решающие задачи стабилизации программной позиции и локального отслеживания траектории на основе построения наблюдателя (фильтра) скоростей и применения метода линеаризации обратной связью. Такие законы управления являются весьма сложными по структуре, так как содержат вычисляемые в режиме он-лайн моменты всех сил, действующих на систему, а также слагаемое, представляющее собой произведение матрицы инерции системы на программное ускорение. Точная реализация данных законов возможна лишь на имеющейся полной информации о параметрах системы и действующих силах. В работе [4] решена задача глобального отслеживания траектории механической системы с одной степенью свободы без измерения скоростей на основе применения приближенного дифференцирования и построения управления при помощи метода линеаризации обратной связью. Как отмечалось ранее, недостатком данного метода является сложность структуры построенного управления, большие объемы вычисления в режиме он-лайн и необходимость построения точной динамической модели системы. В работах [5], [6] для решения задач стабилизации программной позиции и программного движения натуральной механической системы без измерения скоростей были построены наблюдатели, имеющие порядок, равный числу степеней свободы системы,

¹ Профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; peregudovaoa@gmail.com

² Аспирант кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; prostodenis@mail.ru

не требующие точной информации о динамической модели системы. Но, следует отметить, что результаты, полученные в работах [5], [6], применимы лишь для механических систем без учета диссипативно-ускоряющих сил, кроме того, решение задачи о стабилизации программного движения получено в малом, что сужает область применимости данных результатов. В работе [7] дано решение задачи полуглобального отслеживания траектории механических систем, находящихся под действием лишь потенциальных и ограниченных управляющих сил, что сужает класс рассматриваемых механических систем. В работе [8] решена задача о стабилизации программного движения голономной механической системы общего вида без измерения скоростей. Решение данной задачи получено на основе построения вектор-функции Ляпунова и системы сравнения.

В настоящей работе для задачи о стабилизации программного движения голономной механической системы общего вида без измерения скоростей предложен нелинейный динамический компенсатор более общего вида по сравнению с известными результатами [5]–[8].

2. Постановка задачи

Уравнения движения манипуляционных роботов можно представить в виде

$$A(q)\ddot{q} = C(q, \dot{q})\dot{q} + Q + U, \quad (2.1)$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)' \in R^n$ – вектор угловых координат звеньев манипулятора, символ $(\cdot)'$ означает операцию транспонирования, $A(q) \in R^{n \times n}$ – матрица инерции, $C(q, \dot{q}) \in R^{n \times n}$ – матрица центробежных и кориолисовых сил, функция $Q = Q(t, q, \dot{q})$ представляет собой вектор обобщенных неуправляемых сил, U – вектор управляющих сил.

Отметим, что матрица $(\dot{A}(q) - 2C(q, \dot{q}))$ является кососимметричной [9], т.е. для всех $x \in R^n$ имеет место следующее неравенство

$$x' \left(\frac{1}{2} \dot{A}(q(t)) - C(q(t), \dot{q}) \right) x = 0. \quad (2.2)$$

Определим множество X программных движений манипуляционного робота (2.1) в виде

$$X = \{q^{(0)}(t) : [t_0, +\infty) \rightarrow R^n : \\ \|q^{(0)}(t)\| < g_0, \quad \|\dot{q}^{(0)}(t)\| < g_1, \quad \|\ddot{q}^{(0)}(t)\| < g_2\},$$

где g_i ($i = 0, 1, 2$) – некоторые положительные постоянные, $t_0 = \text{const} \geq 0$, $\|\cdot\|$ – евклидова векторная норма.

Рассмотрим задачу о стабилизации некоторого заданного программного движения $q^{(0)}(t) \in X$ манипулятора на основе информации, получаемой от датчиков угловых координат звеньев без измерения угловых скоростей.

3. Решение задачи стабилизации

Введем отклонения от программного движения

$$x = q - q^{(0)}(t). \quad (3.1)$$

Будем искать стабилизирующий закон управления в виде

$$U = U^{(0)}(t) + U^{(1)}(t, x, y), \quad (3.2)$$

где $U^{(0)}(t)$ – программное управление, функция $U^{(1)}(t, x, y)$ имеет вид

$$U^{(1)}(t, x, y) = -K_1(t)p(x) - K_2(t)y, U^{(1)}(t, 0, 0) \equiv 0. \quad (3.3)$$

Здесь матрицы $K_i \in R^{n \times n}$ ($i = 1, 2$) являются кусочно непрерывными функциями времени, вектор $y \in R^n$ есть решение следующего дифференциального уравнения

$$\dot{y} = -a(y + b\dot{x} + cp(x)), \quad (3.4)$$

где a , b и c – некоторые положительные постоянные, $p : R^n \rightarrow R^n$ $p(0) = 0$, $\|p(x)\| \geq p_0(x)$, $p_0(x) \leq l\|x\|^m$ ($l = \text{const} > 0$, $m = \text{const} \geq 1$), $p_0(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = C^{(1)}(t, x, 2\dot{q}^{(0)} + \dot{x})\dot{x} + Q^{(1)}(t, x) + Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) - K_1(t)p(x) - K_2(t)y, \quad (3.5)$$

где $A^{(1)}(t, x) = A(q^{(0)}(t) + x)$, $C^{(1)}(t, x, y) = C(q^{(0)}(t) + x, y)$, $Q^{(1)}(t, x) = (A^{(0)}(t) - A^{(1)}(t, x))\ddot{q}^{(0)}(t) + (C^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) - C^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t) + Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t)) - Q(t, q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$, $Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) = Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x}) - Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t))$.

Предположим, что функции $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ имеют следующий вид

$$Q^{(1)}(t, x) = F(t, x)p(x), \quad Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) = D(t, x, \dot{x})\dot{x}, \quad (3.6)$$

где матрицы функции $F : R^+ \times R^n \rightarrow R^{n \times n}$ и $D : R^+ \times R^n \times R^n \rightarrow R^{n \times n}$ являются непрерывными и ограниченными.

Для решения задачи стабилизации программного движения будем использовать метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова. Выберем вектор-функцию Ляпунова в виде

$$V = (V_1, V_2, V_3)', \quad (3.7)$$

где $V_1 = \|p(x)\|$, $V_2 = \|y - \alpha p\|$, $V_3 = \sqrt{(\dot{x} + \beta y)'A^{(1)}(t, x)(\dot{x} + \beta y)}$, $\alpha = \text{const} > 0$ and $\beta = \text{const} > 0$.

Вычисляя производные по времени функций V_1^2 , V_2^2 и V_3^2 в силу системы (3.5), получим

$$2V_1\dot{V}_1 = -2\alpha\beta p' \frac{\partial p}{\partial x} p - 2\beta p' \frac{\partial p}{\partial x} (y - \alpha p) + 2p' \frac{\partial p}{\partial x} (\dot{x} + \beta y),$$

$$\begin{aligned} 2V_2\dot{V}_2 = & 2(y - \alpha p)'(-a(\alpha + c + \alpha b\beta)E + \alpha^2\beta \frac{\partial p}{\partial x})p + 2(y - \alpha p)'(-a(1 - b\beta)E + \alpha\beta \frac{\partial p}{\partial x})(y - \alpha p) - \\ & - 2(y - \alpha p)'(abE + \alpha \frac{\partial p}{\partial x})(\dot{x} + \beta y), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2V_3\dot{V}_3 = & 2(\dot{x} + \beta y)'(F - ac\beta A^{(1)} - K_1(t))p + \\ & + 2(\dot{x} + \beta y)'(-\beta D - K_2(t) - \alpha\beta(1 - b\beta)A^{(1)} + (C^{(1)}(t, x, -2\beta\dot{q}^{(0)}(t) + \beta^2 y))')y + \\ & + 2(\dot{x} + \beta y)'(C^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t) - \beta y) + D - ab\beta A^{(1)})(\dot{x} + \beta y). \end{aligned}$$

Определим следующие функции времени t и координат x, y

$$\mu_1(x) = \lg n \left\| -\frac{\partial p}{\partial x} \right\|, \quad \mu_2(x) = \lg n \left\| \frac{\partial p}{\partial x} \right\|, \quad m_1(x) = \left\| \frac{\partial p}{\partial x} \right\|, \quad (3.8)$$

$$m_2(t, x) = \|F - ac\beta A^{(1)} - K_1\|, \quad (3.9)$$

$$m_3(t, x, y) = \|- \beta D - K_2 - a\beta(1 - b\beta)A^{(1)} + (C^{(1)}(t, x, -2\beta\dot{q}^{(0)}(t) + \beta^2 y))'\|, \quad (3.10)$$

$$\mu_3(t, x, y) = \lg n \|C^{(1)}(t, x, \dot{q}^0(t) - \beta y) + D - ab\beta A^{(1)}\|. \quad (3.11)$$

где символ $\lg n \|\cdot\|$ означает логарифмическую норму матрицы, соответствующую евклидовой векторной норме и вычисляемой по формуле: $\lg n \|M\| = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(M + M') \quad \forall M \in R^{n \times n}$, $\lambda_{\max}(\cdot)$ – максимальное собственное значение соответствующей матрицы.

Для производных по времени компонент вектор-функции Ляпунова (3.7) в силу системы (3.5) получим оценки

$$\dot{V}_1 \leq -\alpha\beta\mu_1 V_1 + \beta m_1 V_2 + \frac{m_1}{\lambda(t, x, y, \dot{x})} V_3, \quad (3.12)$$

$$\dot{V}_2 \leq (a(\alpha + c + \alpha\beta b) + \alpha^2\beta m_1) V_1 + (a(b\beta - 1) + \alpha\beta\mu_2) V_2 + \frac{ab + \alpha m_1}{\lambda(t, x, y, \dot{x})} V_3, \quad (3.13)$$

$$\dot{V}_3 \leq \frac{m_2 + \alpha m_3}{\lambda(t, x, y, \dot{x})} V_1 + \frac{m_3}{\lambda(t, x, y, \dot{x})} V_2 + \frac{\mu_3}{(\lambda(t, x, y, \dot{x}))^2} V_3, \quad (3.14)$$

где функция $\lambda(t, x, y, \dot{x})$ определяется из следующего соотношения

$$\lambda(t, x, y, \dot{x}) \|\dot{x} + \beta y\| = V_3, \quad \lambda_1 \leq \lambda(t, x, y, \dot{x}) \leq \lambda_2,$$

$$\lambda_1 = \text{const} > 0, \quad \lambda_2 = \text{const} > 0.$$

Используя оценки (3.12) – (3.14), получим следующую систему сравнения

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= -\alpha\beta\mu_1 u_1 + \beta m_1 u_2 + \frac{m_1}{\lambda(t, x, y, \dot{x})} u_3, \\ \dot{u}_2 &= (a(\alpha + c + \alpha\beta b) + \alpha^2\beta m_1) u_1 + (a(b\beta - 1) + \alpha\beta\mu_2) u_2 + \frac{ab + \alpha m_1}{\lambda(t, x, y, \dot{x})} u_3, \\ \dot{u}_3 &= \frac{m_2 + \alpha m_3}{\lambda(t, x, y, \dot{x})} u_1 + \frac{m_3}{\lambda(t, x, y, \dot{x})} u_2 + \frac{\mu_3}{(\lambda(t, x, y, \dot{x}))^2} u_3. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Используя модификацию метода сравнения, получим, что обобщенная система (3.5), (3.15) является экспоненциально u -устойчивой, если выполняется следующее условие

$$\begin{aligned} & \frac{(\beta m_1 + a(\alpha + c + \alpha\beta b) + \alpha^2\beta m_1)^2}{\alpha\beta\mu_1(a(1 - b\beta) - \alpha\beta\mu_2)} - \frac{(m_1 + m_2 + \alpha m_3)^2}{\alpha\beta\mu_1\mu_3} + \frac{(ab + \alpha m_1 + m_3)^2}{(a(b\beta - 1) + \alpha\beta\mu_2)\mu_3} \\ & + \frac{(\beta m_1 + a(\alpha + c + \alpha\beta b) + \alpha^2\beta m_1)(m_1 + m_2 + \alpha m_3)(ab + \alpha m_1 + m_3)}{\alpha\beta\mu_1(a(b\beta - 1) + \alpha\beta\mu_2)\mu_3} \leq \text{const} < 4, \\ & \mu_1 \leq \text{const} < 0, \quad a(b\beta - 1) + \alpha\beta\mu_2 \leq \text{const} < 0, \quad \mu_3 \leq \text{const} < 0. \end{aligned}$$

4. Заключение

В работе получены условия стабилизации программного движения манипуляционного робота на основе измерения текущих координат звеньев. Задача решена с использованием метода вектор-функции Ляпунова с построением нелинейного динамического компенсатора. В отличие от известных результатов [5] – [8] уравнение компенсатора найдено в общем виде.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. S. Nicosia and P. Tomei, "Robot control by using only joint position measurements", *IEEE Trans. Aut. Contr.*, **35**:9 (1990), 1058-1061.
2. H. Berghuis, P. Lohnberg and H. Nijmeijer, "Tracking control of robots using only position measurements", 30th Conf. on Decision and Control, **1** (1991), 1039-1040.
3. R. Kelly, "A simple set-point robot controller by using only position measurements", In Preprint 12th IFAC World Congress (Sydney), **6** (1993), 173-176.
4. A. Loria, "Global tracking control of one degree of freedom Euler-Lagrange systems without velocity measurements", *European J. Contr.*, **2** (1996), 144-151.
5. I. V. Burkov, "Stabilization of mechanical systems via bounded control and without velocity measurement", 2nd Russian-Swedish Control Conf. (St. Petersburg Technical Univ.), 1995, 37-41.
6. I. V. Burkov, "Stabilization of position of uniform motion of mechanical systems via bounded control and without velocity measurements", 3-rd IEEE Multi - conference on Systems and Control. (St. Petersburg), 2009, 400-405.
7. A. Loria and H. Nijmeijer, "Bounded output feedback tracking control of fully actuated Euler-Lagrange systems", *Systems & Control Letters*, **33** (3) (1998), 151-161.
8. Andreev A.S., Peregudova O.A., Makarov D.S., *Motion control of multilink manipulators without velocity measurement*, <http://ieeexplore.ieee.org/document/7541159/>, Proceedings of 2016 International Conference Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems (Pyatnitskiy's Conference) (Moscow), 2016.
9. M. Spong, H. Seth and M. Vidyasagar, *Robot Dynamics and Control*, Wiley, New York, 2004.

Stabilization of program motion for robotic manipulator on the base of the measurement of the link coordinates

© O. A. Peregodova³, D. S. Makarov⁴

Abstract. The use of the known strategies and algorithms for constructing and implementing the controllers of nonlinear mechanical systems has certain difficulties associated with the need to install the sensors for the complete measurement of the current coordinates and velocities, which complicates the design of the controlled object. For the majority of the modern practical problems on the control of robotic manipulators consisting of several units the requirement for information on the current values of the coordinates and velocities of the links is unattainable. In the article the problem of constructing a stabilizing control laws for robotic manipulators in the absence of the speed sensors is investigated. The investigation approach is based on the construction of non-linear dynamic compensator of the first order, which allows to build a non-linear control law fairly simple in its structure. The novelty of the results is in the construction of the control actions to address these problems in a rather general formulation. Using the method of Lyapunov vector functions the sufficient conditions for stabilization of program motion for multilink manipulators are obtained.

Key Words: robotic manipulator, program movement, stabilization, non-linear dynamic compensator, Lyapunov vector function

³ Professor of Information Security and Control Theory Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; peregodovaoa@gmail.com

⁴ Postgraduate of Information Security and Control Theory Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; prostodenis@mail.ru

УДК 519.223.3

Критерий согласия с модифицированной статистикой хи-квадрат

© М. В. Радионова¹, В. В. Чичагов²

Аннотация. В данной статье продолжено исследование возможностей применения параметрических функций, допускающих несмещенную оценку, к проверке гипотезы о виде распределения с помощью критерия хи-квадрат. Предложен новый класс асимптотических критериев вальдовского типа для проверки гипотезы о виде распределения, принадлежащего однопараметрическому экспоненциальному семейству. По уровню сложности предложенные критерии занимают промежуточное место между тестом Никулина-Рао-Робсона и тестом моментных условий. В качестве следствий к основному утверждению приведено два примера построения модифицированной тестовой статистики хи-квадрат. Следствие 2.1 содержит результат, устанавливающий связь предложенной в работе тестовой статистики с одномерной версией статистики Никулина-Рао-Робсона. В следствии 2.2 представлена тестовая статистика, предназначенная для проверки гипотезы о виде распределения с дополнительным ограничением специального вида на гипотетическое распределение.

Ключевые слова: экспоненциальное семейство, несмещенная оценка, критерий согласия, мощность

1. Введение

Одной из фундаментальных проблем математической и прикладной статистики является задача проверки гипотезы о виде распределения случайной величины ξ_0 по выборке $X_1, \dots, X_n$, элементами которой являются независимые случайные величины, имеющие то же распределение, что и ξ_0 . Наиболее часто для решения такой задачи применяется критерий согласия хи-квадрат. Этот критерий был предложен К. Пирсоном [1] в 1900 г. для проверки гипотезы о значении параметра полиномиального распределения, но может быть применен и к проверке простой гипотезы о виде распределения $H_0: F_{\xi_0}(x) = F_{\xi}(x)$, $x \in \mathbf{R}$, где $F_{\xi_0}(x)$ — функция распределения случайной величины ξ_0 , а $F_{\xi}(x)$ — полностью определенная функция распределения гипотетической случайной величины ξ . Для этого числовую прямую $\mathbf{R}$ разбивают на атомы $\{\Delta_j, j = \overline{1, J}\}$, и вычисляют статистику

$$\chi_n^2 = \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\pi_j)^2}{n\pi_j}, \quad (1.1)$$

где ν_j — число элементов выборки, принадлежащих атому Δ_j , а π_j — вероятность попадания на атом Δ_j гипотетической случайной величины ξ . В работе [1] показано, что статистика (1.1) при $n \rightarrow \infty$ имеет асимптотическое распределение χ^2 с $J - 1$ степенями свободы. В соответствии с критерием хи-квадрат Пирсона асимптотического уровня значимости α гипотеза H_0 принимается, если $\chi_n^2 < x_{1-\alpha}[\chi_{J-1}^2]$, где $x_p[\chi_{\nu}^2]$ — квантиль уровня p распределения χ^2 с ν степенями свободы.

В 1924 г. Р. Фишер [2] распространил применение критерия хи-квадрат на случай сложной гипотезы о виде распределения. Он предложил использовать статистику хи-квадрат

¹ Доцент кафедры высшей математики, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики, г. Пермь; m.radionova@rambler.ru

² Доцент кафедры высшей математики, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь; chichagov@psu.ru

для проверки гипотезы о принадлежности функции распределения $F_{\xi_0}(x)$ параметрическому семейству

$$\left\{ F_{\xi}(x; \theta), \theta = (\theta_1, \dots, \theta_s)^{\top} \in \Theta \subset \mathbf{R}^s \right\}.$$

Отметим, что в этом случае в действительности проверяется гипотеза $H'_0 : p_j = \pi_j(\theta)$, $j = \overline{1, J}$, где $p_j = \mathbf{P}(\xi_0 \in \Delta_j)$, $\pi_j(\theta) = \mathbf{P}(\xi \in \Delta_j)$, а θ — неизвестный параметр распределения ξ .

Статистика критерия хи-квадрат, предложенная Фишером, имеет вид

$$\chi_n^2(\theta^*) = \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\pi_j(\theta^*))^2}{n\pi_j(\theta^*)}, \quad (1.2)$$

где θ^* — оценка неизвестного параметра θ , вычисленная по методу минимума хи-квадрат $\theta^* = \arg \min_{\theta \in \Theta} \chi_n^2(\theta)$ или асимптотически эквивалентная ей оценка, являющаяся корнем уравнения

$$\sum_{j=1}^J \frac{\nu_j}{\pi_j(\theta)} \frac{\partial \pi_j(\theta)}{\partial \theta_{\ell}} = 0, \quad \ell = \overline{1, s}.$$

Фишер показал, что предельным распределением статистики (1.2) при $n \rightarrow \infty$ является распределение хи-квадрат с $(J - s - 1)$ степенями свободы. До 1954 года считалось, что предельное распределение статистики (1.2) не изменится, если оценку минимума хи-квадрат неизвестного параметра θ заменить оценкой максимального правдоподобия θ_{ML} , вычисленной по негруппированным данным $X_1, \dots, X_n$. Однако, как показали Леман и Чернов [3], статистика $\chi_n^2(\theta_{ML})$ распределена в пределе при $n \rightarrow \infty$ как $\sum_{j=1}^{J-s-1} Z_j^2 + \sum_{j=1}^s \mu_j Z_{j+J-s-1}^2$, где $\{Z_j\}$ — независимые стандартные нормально распределенные случайные величины, а числа $\{\mu_j, j = 1, \dots, s\}$ лежат между 0 и 1, и, вообще говоря, зависят от неизвестного значения параметра θ .

В 1973 г. М.С. Никулиным [4] для семейства распределений сдвига и масштаба предложена модификация статистики $\chi_n^2(\theta_{ML})$, предельное распределение которой есть хи-квадрат с $(J-1)$ степенями свободы и не зависит от размерности оцениваемого параметра и способа разбиения на атомы. Позднее, в [5]–[7] были рассмотрены другие модификации статистики $\chi_n^2(\theta_{ML})$, среди которых следует выделить статистику

$$Y_n^2(\theta_{ML}) = \chi_n^2(\theta_{ML}) + \frac{1}{n} \mathbf{u}^{\top} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{u}, \quad (1.3)$$

где $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_s)^{\top}$, $u_j = \sum_{i=1}^J \frac{\nu_i}{\pi_i(\theta_{ML})} \frac{\partial \pi_i(\theta_{ML})}{\partial \theta_j}$, $\mathbf{C} = [c_{lk}(\theta_{ML})]_{s \times s}$ — матрица с элементами $c_{lk}(\theta_{ML}) = i_{lk} - \sum_{i=1}^J \frac{1}{\pi_i(\theta_{ML})} \frac{\partial \pi_i(\theta_{ML})}{\partial \theta_l} \frac{\partial \pi_i(\theta_{ML})}{\partial \theta_k}$, а i_{lk} — (l, k) -й элемент информационной матрицы Фишера $\mathbf{i}(\theta) = \mathbf{M} \left[\left(\frac{\partial \ln f(\xi, \theta)}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \ln f(\xi, \theta)}{\partial \theta} \right)^{\top} \right]$, $f(x, \theta)$ — плотность распределения гипотетической случайной величины. Статистика (1.3) получила название статистики Никулина–Рао–Робсона. В соответствии с критерием Никулина–Рао–Робсона асимптотического уровня значимости α гипотеза H'_0 принимается, если $Y_n^2(\theta_{ML}) < x_{1-\alpha}[\chi_{J-1}^2]$. Критерий Никулина–Рао–Робсона, как отмечается в [6], можно использовать для атомов как с фиксированными, так и со случайными границами.

Более общий подход к проверке гипотезы о виде распределения случайной величины ξ_0 , чем проверка гипотезы H_0 или H'_0 , предложен в [8] и заключается он в проверке

гипотезы

$$H_0'' : \mathbf{M}h_j(\xi_0) = g_j(\theta), \quad j = \overline{1, L}. \quad (1.4)$$

Здесь $\{h_1(x), h_2(x), \dots, h_L(x)\}$ — заданный набор функций, которые в дальнейшем будем называть «пробными»; $\{g_j(\theta) = \mathbf{M}h_j(\xi), j = \overline{1, L}\}$ — соответствующий им набор функций, отражающий определенные свойства гипотетического распределения ξ ; θ — неизвестный параметр гипотетического распределения. В эконометрических приложениях, связанных с идентификацией распределения ξ_0 , соотношения вида (1.4) получили название моментных условий (см., например, [9]).

Заметим, что гипотеза вида H_0' является частным случаем гипотезы (1.4) при $L = J$ и $h_j(x) = I(x \in \Delta_j)$, где $I(A)$ — индикатор события A . Использование в (1.4) в качестве «пробных» функций помимо индикаторных функций $I(x \in \Delta_j)$, $j = 1, \dots, J-1$, еще одной не индикаторной функции позволило получить в [10] с помощью оценок максимального правдоподобия при $s = 1$ столь же простое представление тестовой статистики, как и (1.3). В [8] построение тестовой статистики осуществлено на основе несмещенных оценок с равномерно минимальной дисперсией (НОРМД) моментов некоторых функций от гипотетической случайной величины, распределение которой принадлежит однопараметрическому экспоненциальному семейству. В данной работе результаты, полученные в [8], распространяются на более широкий класс «пробных» функций.

2. Основные результаты

Будем предполагать, что гипотетическое распределение случайной величины ξ удовлетворяет следующим предположениям.

A1. Распределение вероятностей случайной величины ξ принадлежит естественному однопараметрическому экспоненциальному семейству [11], определяемому выражением

$$f(x; \theta) = \exp \{ \theta T(x) - \kappa(\theta) + d(x) \}, \quad x \in \mathfrak{X} \subset \mathbf{R}. \quad (2.1)$$

Здесь $f(x; \theta)$ — плотность распределения случайной величины ξ относительно меры $\mu(x)$, являющейся либо мерой Лебега, если ξ имеет абсолютно непрерывное распределение, либо считающей мерой, когда ξ имеет решетчатое распределение; $\theta \in \Theta \subset \mathbf{R}$ — неизвестный параметр распределения; $d(x)$, $T(x)$ — известные борелевские функции, $\kappa(\theta)$ — кумулянтное преобразование распределения $T(\xi)$; $\mathfrak{X}$ — носитель распределения ξ . При этом $a = \mathbf{M}T(\xi) = \kappa'(\theta)$, $b^2 = \mathbf{D}T(\xi) = \kappa''(\theta) > 0$.

A2. Если $\mu(x)$ — мера Лебега, то существует $n_0 \in \mathbf{N}$ такое, что нормированная сумма $Z_n = \frac{S_n - na}{b\sqrt{n}}$, где $S_n = \sum_{i=1}^n T(X_i)$, имеет непрерывную ограниченную плотность. Если $\mu(x)$ — считающая мера, то носитель $\mathfrak{X}$ не содержится ни в какой подрешетке целочисленной решетки $\mathbf{Z}$.

Т е о р е м а 2.1. Пусть выполнены условия **A1-A2**; $\{h_j(x), j = \overline{1, L}\}$ — заданный набор «пробных» функций таких, что $g_j(\theta) = \mathbf{M}h_j(\xi)$, $j = \overline{1, L}$, и $\mathbf{M}h_j^2(\xi) < \infty$; $\hat{g}_j$ — НОРМД функции $g_j(\theta)$ по выборке по выборке $X_1, \dots, X_n$ из генеральной совокупности ξ , а $\bar{g}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_j(X_i)$, $j = \overline{1, L}$. Тогда при $n \rightarrow \infty$

1) последовательность случайных векторов $\mathbf{Y}_n = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}})$, в которых $\bar{\mathbf{g}} = (\bar{g}_1, \bar{g}_2, \dots, \bar{g}_L)^\top$, а $\hat{\mathbf{g}} = (\hat{g}_1, \hat{g}_2, \dots, \hat{g}_L)^\top$, асимптотически нормальна с нулевым вектором средних и ковариационной матрицей

$$\Sigma(\theta) = \Sigma_h(\theta) - b^{-2} \mathbf{g}'(\theta) [\mathbf{g}'(\theta)]^\top, \quad (2.2)$$

где $\Sigma_h(\theta)$ – ковариационная матрица вектора $\mathbf{h}(\xi) = (h_1(\xi), \dots, h_L(\xi))^T$, $\mathbf{g}'(\theta) = (g'_1(\theta), \dots, g'_L(\theta))^T$;

2) если ковариационная матрица $\Sigma(\theta)$ не вырождена, то асимптотическим распределением квадратичной формы

$$\chi_n(\theta) = n(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}})^T \Sigma^{-1}(\theta) (\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}) \quad (2.3)$$

является распределение χ^2 с L степенями свободы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу неравенства Коши-Буняковского и существования второго момента $\mathbf{M}h_j^2(\xi)$ верно неравенство

$$\mathbf{M}|(T(\xi) - a) \cdot h_j(\xi)| \leq \sqrt{\mathbf{D}T(\xi) \cdot \mathbf{M}h_j^2(\xi)} < \infty, \quad j = \overline{1, L}.$$

Отсюда следует существование производной $g'_j(\theta)$, определяемой выражением

$$\begin{aligned} g'_j(\theta) &= \int_{\mathfrak{X}} h_j(x) [T(x) - \kappa'(\theta)] \exp \{ \theta T(x) - \kappa(\theta) + d(x) \} d\mu(x) = \\ &= \mathbf{M}[T(\xi) \cdot h_j(\xi)] - \mathbf{M}T(\xi) \cdot \mathbf{M}h_j(\xi) = \mathbf{cov}(T(\xi), h_j(\xi)), \end{aligned} \quad (2.4)$$

где $\mathbf{cov}(\eta, \zeta)$ – ковариация между случайными величинами η и ζ , так как

$$\begin{aligned} a &= \mathbf{M}T(\xi) = \kappa'(\theta), \\ g_j(\theta) &= \mathbf{M}h_j(\xi) = \int_{\mathfrak{X}} h_j(x) \exp \{ \theta T(x) - \kappa(\theta) + d(x) \} d\mu(x), \\ \mathbf{M}[T(\xi) h_j(\xi)] &= \int_{\mathfrak{X}} h_j(x) \cdot T(x) \exp \{ \theta T(x) - \kappa(\theta) + d(x) \} d\mu(x). \end{aligned}$$

Поскольку $\mathbf{M}h_j^2(\xi) < \infty$, а $\hat{g}_j$ – НОРМД функции $g_j(\theta)$, то и $\mathbf{D}\hat{g}_j \leq \mathbf{D}\bar{g}_j = \mathbf{D}h_j(\xi) < \infty$. Поэтому по теореме 6.2 из [12] и лемме 1 из [13] в предположениях **A1-A2** при $n \rightarrow \infty$ справедливы стохастические разложения

$$\sqrt{n}(\hat{g}_j - g_j(\theta)) = \frac{1}{b} g'_j(\theta) Z_n + o_P(1), \quad j = 1, \dots, L.$$

Заметим, что теорема 6.2 из [12] позволяет найти асимптотическое разложение функции, определяющей НОРМД $\hat{g}_j$, а лемма 1 из [13] – соответствующее ему стохастическое разложение.

Поэтому для любых $i, j = 1, \dots, L$ имеет место представление

$$n(\hat{g}_i - g_i(\theta))(\hat{g}_j - g_j(\theta)) = \frac{1}{b^2} g'_i(\theta) g'_j(\theta) Z_n^2 + o_P(1), \quad (2.5)$$

которое позволяет представить вектор $\mathbf{Y}_n$ следующим образом:

$$\mathbf{Y}_n = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta)) - \sqrt{n}(\hat{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta)) = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta)) - \frac{1}{b} \mathbf{g}'(\theta) Z_n + o_P(1).$$

Так как вектор

$$\mathbf{Y}_n^0 = \sqrt{n}(\bar{\mathbf{g}} - \mathbf{g}(\theta)) - \frac{1}{b} \mathbf{g}'(\theta) Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{G}(X_i),$$

в котором

$$\mathbf{G}(X_i) = \mathbf{h}(X_i) - \mathbf{g}(\theta) - \frac{1}{b^2} \mathbf{g}'(\theta) (T(X_i) - a)$$

представлен в виде суммы независимых одинаково распределенных векторов, то по многомерной центральной предельной теореме при $n \rightarrow \infty$ последовательность случайных векторов $\{\mathbf{Y}_n\}$ сходится к случайному вектору $\mathbf{Y}$, имеющему нормальное распределение с вектором средних $\mathbf{M}[\mathbf{Y}] = \mathbf{M}[\mathbf{G}(\xi)] = \mathbf{0}$ и ковариационной матрицей $\Sigma(\theta) = \mathbf{M}[\mathbf{G}(\xi) \mathbf{G}^\top(\xi)]$.

С учетом (2.4) для $i, j = 1, \dots, L$ имеем

$$\mathbf{M} \left[(h_i(\xi) - g_i(\theta)) g'_j(\theta) \frac{(T(\xi) - a)}{b^2} \right] = \frac{1}{b^2} g'_j(\theta) \text{cov}(h_i(\xi), T(\xi)) = \frac{1}{b^2} g'_j(\theta) g'_i(\theta).$$

Отсюда получим

$$\begin{aligned} \Sigma(\theta) &= \Sigma_h(\theta) - 2\mathbf{M} \left[(\mathbf{h}(\xi) - \mathbf{g}(\theta)) \frac{[\mathbf{g}'(\theta)]^\top (T(\xi) - a)}{b^2} \right] + \frac{\mathbf{g}'(\theta) [\mathbf{g}'(\theta)]^\top}{b^2} = \\ &= \Sigma_h(\theta) - \frac{\mathbf{g}'(\theta) [\mathbf{g}'(\theta)]^\top}{b^2}, \end{aligned}$$

что завершает доказательство 1-го из утверждений теоремы.

Справедливость второго утверждения теоремы в условиях невырожденности матрицы $\Sigma(\theta)$ очевидна.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Отметим, что ранее в [8] было доказано утверждение аналогичное утверждению теоремы, но лишь для частного случая, когда $h_j(x) = T^j(x)$, $j = \overline{1, L}$.

З а м е ч а н и е 2.1. В условиях теоремы 1 асимптотическим распределением статистики

$$\chi_h = n(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}})^\top \tilde{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}), \quad (2.6)$$

где $\tilde{\Sigma}$ – некоторая состоятельная оценка матрицы $\Sigma(\theta)$, является распределение χ^2 с L степенями свободы.

Это утверждение позволяет предложить следующий вариант критерия хи-квадрат для проверки сложной гипотезы о виде распределения.

Критерий согласия χ_h асимптотического уровня значимости α . Нулевую гипотезу (1.4) следует принять, если выполнено неравенство

$$\chi_h = n(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}})^\top \tilde{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}) < x_{1-\alpha}[\chi_L^2], \quad (2.7)$$

и отвергнуть ее в противном случае.

З а м е ч а н и е 2.2. Так как оценки максимального правдоподобия и НОРМД в условиях **A1-A2** асимптотически эквивалентны [14] с точностью до слагаемых порядка $\mathbf{O}_P(n^{-1})$, то утверждение теоремы 1 сохранит силу, если НОРМД $\hat{g}_j$ функции $g_j(\theta)$, $j = \overline{1, L}$ заменить на оценку максимального правдоподобия.

З а м е ч а н и е 2.3. Если матрица $\Sigma_h(\theta)$ не вырождена и $b^2 \neq [\mathbf{g}'(\theta)]^\top \Sigma_h^{-1}(\theta) \mathbf{g}'(\theta)$, то матрица $\Sigma(\theta)$ не вырождена, а квадратичная форма $\chi_n(\theta)$ допускает следующее представление

$$\chi_n(\theta) = n(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}})^\top \Sigma_h^{-1}(\theta) (\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}) + \frac{n \left[(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}})^\top \Sigma_h^{-1}(\theta) \mathbf{g}'(\theta) \right]^2}{b^2 - \mathbf{g}'(\theta)^\top \Sigma_h^{-1}(\theta) \mathbf{g}'(\theta)}. \quad (2.8)$$

Справедливость (2.8) следует из соотношения

$$\Sigma^{-1}(\theta) = \Sigma_h^{-1}(\theta) + \frac{\Sigma_h^{-1}(\theta) \mathbf{g}'(\theta) [\mathbf{g}'(\theta)]^\top \Sigma_h^{-1}(\theta)}{b^2 - [\mathbf{g}'(\theta)]^\top \Sigma_h^{-1}(\theta) \mathbf{g}'(\theta)}, \quad (2.9)$$

которое получено с помощью формулы обращения матрицы при малоранговой модификации [15], примененной к (2.2).

З а м е ч а н и е 2.4. $\hat{a}, \hat{\pi}_j, \hat{a}_j, \hat{A}_j, \hat{\beta}_J, \hat{\zeta}_J, \hat{\mathbf{M}}T^2(\xi)$ – НОРМД функций

$$a, \pi_j(\theta), a_j(\theta) = \mathbf{M}[T(\xi)I(\xi \in \Delta_j)], A_j(\theta) = \mathbf{M}[h(\xi)I(\xi \in \Delta_j)], j = 1, \dots, J, \\ \beta_J(\theta) = \mathbf{M}[h^2(\xi)I(\xi \in \Delta_J)], \zeta_J(\theta) = \mathbf{M}[h(\xi)T(\xi)I(\xi \in \Delta_J)], \mathbf{M}T^2(\xi),$$

определяются выражениями

$$\hat{a} = \int_{\mathfrak{X}} T(x) \hat{f}(x|S_n) d\mu(x), \quad \hat{\pi}_j = \int_{\Delta_j} \hat{f}(x|S_n) d\mu(x), \quad \hat{a}_j = \int_{\Delta_j} T(x) \hat{f}(x|S_n) d\mu(x), \\ \hat{A}_j = \int_{\Delta_j} h(x) \hat{f}(x|S_n) d\mu(x), \quad \hat{\beta}_J = \int_{\Delta_J} h^2(x) \hat{f}(x|S_n) d\mu(x), \\ \hat{\zeta}_J = \int_{\Delta_J} h(x) T(x) \hat{f}(x|S_n) d\mu(x), \quad \hat{\mathbf{M}}T^2(\xi) = \int_{\mathfrak{X}} T^2(x) \hat{f}(x|S_n) d\mu(x),$$

где $\hat{f}(x|S_n)$ – НОРМД плотности распределения (2.1). В соответствии с теоремой 6.2 [12] и леммой 1 [13] эти несмещенные оценки являются состоятельными при $n \rightarrow \infty$, если $\mathbf{D}h(\xi) < \infty$ и $\mathbf{D}[h^2(\xi)I(\xi \in \Delta_J)] < \infty$.

Конструируя «пробные» функции с учетом разбиения $\{\Delta_j, j = 1, \dots, J\}$, можно получать достаточно компактные явные выражения тестовой статистики (2.6). Ниже в виде следствий приводятся 2 примера таких статистик. Отметим, что результат первого из следствий был получен ранее с помощью прямых вычислений в [16]. Его версия для однопараметрического гамма распределения с неизвестным параметром масштаба представлена в [17] и в теореме 5.3 [7].

С л е д с т в и е 2.1. Пусть выполнены условия **A1-A2**; $L = J-1$, $\pi_j(\theta) > 0$, $j = \overline{1, J}$, а «пробные» функции равны $h_j(x) = I(x \in \Delta_j)$, $j = \overline{1, J-1}$. Тогда квадратичная форма (2.3) примет вид

$$\chi_n(\theta) = \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)^2}{n\pi_j(\theta)} + \frac{1}{n} \left\{ b^2 - \sum_{j=1}^J \frac{[\pi_j'(\theta)]^2}{\pi_j(\theta)} \right\}^{-1} \left[\sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j) \pi_j'(\theta)}{\pi_j(\theta)} \right]^2, \quad (2.10)$$

а статистика

$$\chi_h = \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)^2}{n\hat{\pi}_j} + \frac{1}{n} \left\{ \hat{\mathbf{M}}T^2(\xi) - \sum_{j=1}^J \frac{\hat{a}_j^2}{\hat{\pi}_j} \right\}^{-1} \left[\sum_{j=1}^J \frac{\nu_j \hat{a}_j}{\hat{\pi}_j} - n\hat{a} \right]^2 \quad (2.11)$$

имеет при $n \rightarrow \infty$ асимптотическое распределение χ^2 с $J-1$ степенями свободы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при сделанных предположениях

$$g_j(\theta) = \mathbf{M}I(\xi \in \Delta_j) = \pi_j(\theta), \quad \bar{g}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_i \in \Delta_j) = \frac{\nu_j}{n},$$

причем $g'_j(\theta) = \pi'_j(\theta)$. При этом элементы матрицы

$$\Sigma_h(\theta) \equiv \Sigma_\pi(\theta) = [\sigma_{ij}(\theta)]_{(J-1) \times (J-1)}$$

определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(\theta) &= \mathbf{M}[I(\xi \in \Delta_i) \cdot I(\xi \in \Delta_j)] - \mathbf{M}I(\xi \in \Delta_i) \cdot \mathbf{M}I(\xi \in \Delta_j) = \\ &= \delta_{ij}\pi_i(\theta) - \pi_i(\theta)\pi_j(\theta), \quad i, j = \overline{1, J-1}, \end{aligned}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Хорошо известно [18], что матрица $\Sigma_\pi(\theta)$ является невырожденной, а элементы обратной к ней матрицы $\Sigma_\pi^{-1}(\theta) = [\sigma_{ij}^{-1}(\theta)]$ равны $\sigma_{ij}^{-1}(\theta) = \frac{1}{\pi_j(\theta)} + \frac{\delta_{ij}}{\pi_i(\theta)}$. Поэтому для векторов $\mathbf{x}^\top = (x_1, \dots, x_{J-1})$, $\mathbf{y}^\top = (y_1, \dots, y_{J-1})$, элементы которых удовлетворяют соотношениям $\sum_{j=1}^{J-1} x_j = -x_J$ и $\sum_{j=1}^{J-1} y_j = -y_J$, верно равенство

$$\mathbf{x}^\top \Sigma_\pi^{-1}(\theta) \mathbf{y} = \sum_{j=1}^J \frac{x_j y_j}{\pi_j(\theta)}. \quad (2.12)$$

Теперь нетрудно убедиться в справедливости (2.10), вычислив (2.8) с применением (2.12), имея в виду, что $\sum_{j=1}^J (\nu_j - n\hat{\pi}_j) = \sum_{j=1}^J \pi'_j(\theta) = 0$.

Воспользовавшись (2.4), найдем выражение для производной

$$\pi'_j(\theta) = \text{cov}(T(\xi), I(\xi \in \Delta_j)) = a_j(\theta) - a\pi_j(\theta), \quad j = \overline{1, J}, \quad (2.13)$$

применяя которое, получим

$$\begin{aligned} b^2 - \sum_{j=1}^J \frac{[\pi'_j(\theta)]^2}{\pi_j(\theta)} &= b^2 - \sum_{j=1}^J \frac{[a_j(\theta) - a\pi_j(\theta)]^2}{\pi_j(\theta)} = \mathbf{M}T^2(\xi) - \sum_{j=1}^J \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)}, \\ \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j) \pi'_j(\theta)}{\pi_j(\theta)} &= \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j) (a_j(\theta) - a\pi_j(\theta))}{\pi_j(\theta)} = \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j) a_j(\theta)}{\pi_j(\theta)}. \end{aligned}$$

Заменяя в последних соотношениях неизвестные функции на их НОРМД, придем к (2.11). Сходимость статистики (2.11) к распределению хи-квадрат в силу замечаний 1 и 4 очевидна.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

С л е д с т в и е 2.2. Пусть выполнены условия **A1-A2**; $L = J$; $\pi_j(\theta) > 0$, $j = \overline{1, J}$; $\beta_J(\theta) = \mathbf{M}[h^2(\xi)I(\xi \in \Delta_J)] < \infty$; условная дисперсия $\mathbf{D}[T(\xi)|\xi \in \Delta_j] > 0$ хотя бы при одном $j \in \{1, 2, \dots, J-1\}$ и $\mathbf{D}[h(\xi)|\xi \in \Delta_J] > 0$; «пробные» функции определяются выражением

$$h_j(\xi) = \begin{cases} I(\xi \in \Delta_j), & j = \overline{1, J-1}, \\ h(\xi)I(\xi \in \Delta_J), & j = J. \end{cases}$$

Тогда квадратичная форма (2.3) примет вид

$$\begin{aligned} \chi_n(\theta) = & \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)^2}{n\pi_j(\theta)} + \frac{[V_J(\theta) - n\bar{g}_J + n\hat{A}_J]^2}{n(\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta))} + \\ & + \frac{1}{n} \left\{ \mathbf{M}T^2(\xi) - \sum_{j=1}^J \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)} - \frac{[\zeta_J(\theta) - U_J(\theta)]^2}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)} \right\}^{-1} \times \\ & \times \left[\sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)a_j(\theta)}{\pi_j(\theta)} + \frac{(V_J(\theta) - n\bar{g}_J + n\hat{A}_J)(U_J(\theta) - \zeta_J(\theta))}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)} \right]^2, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $V_J(\theta) = (\nu_J - n\hat{\pi}_J)A_J(\theta)/\pi_J(\theta)$, $U_J(\theta) = a_J(\theta)A_J(\theta)/\pi_J(\theta)$, а статистика

$$\begin{aligned} \chi_h = & \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)^2}{n\hat{\pi}_j} + \frac{[\nu_J\hat{A}_J/\hat{\pi}_J - n\bar{g}_J]^2}{n(\hat{\beta}_J - \hat{A}_J^2/\hat{\pi}_J)} + \\ & + \frac{1}{n} \left\{ \hat{\mathbf{M}}T^2(\xi) - \sum_{j=1}^J \frac{\hat{a}_j^2}{\hat{\pi}_j} - \frac{[\hat{\zeta}_J - \hat{a}_J\hat{A}_J/\hat{\pi}_J]^2}{\hat{\beta}_J - \hat{A}_J^2/\hat{\pi}_J} \right\}^{-1} \times \\ & \times \left[\sum_{j=1}^J \frac{\nu_j\hat{a}_j}{\hat{\pi}_j} - n\hat{a} - \frac{(\nu_J\hat{A}_J/\hat{\pi}_J - n\bar{g}_J)(\hat{\zeta}_J - \hat{a}_J\hat{A}_J/\hat{\pi}_J)}{\hat{\beta}_J - \hat{A}_J^2/\hat{\pi}_J} \right]^2, \end{aligned} \quad (2.15)$$

имеет при $n \rightarrow \infty$ асимптотическое распределение χ^2 с J степенями свободы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в данном случае

$$\Sigma_h(\theta) = \begin{bmatrix} \Sigma_\pi & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & \beta_J(\theta) - A_J^2(\theta) \end{bmatrix}$$

где $\Sigma_\pi = [\delta_{ij}\pi_i - \pi_i\pi_j]_{(J-1) \times (J-1)}$, $\mathbf{c}^\top = -A_J(\theta)(\pi_1(\theta), \dots, \pi_{J-1}(\theta))$.

Так как $\mathbf{D}[h(\xi)|\xi \in \Delta_J] > 0$ и $\mathbf{D}[T(\xi)|\xi \in \Delta_j] > 0$ хотя бы при одном $j \in \{1, 2, \dots, J-1\}$, то верны неравенства

$$\beta_J(\theta) - \frac{A_J^2(\theta)}{\pi_J(\theta)} = \pi_J(\theta)\mathbf{D}[h(\xi)I(\xi \in \Delta_J)|\xi \in \Delta_J] > 0, \quad (2.16)$$

$$\sum_{j=1}^{J-1} \left(b_j(\theta) - \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)} \right) = \sum_{j=1}^{J-1} \pi_j(\theta)\mathbf{D}[T(\xi)I(\xi \in \Delta_j)|\xi \in \Delta_j] > 0, \quad (2.17)$$

где $a_j(\theta) = \mathbf{M}[T(\xi)I(\xi \in \Delta_j)]$, $b_j(\theta) = \mathbf{M}[T^2(\xi)I(\xi \in \Delta_j)]$.

Следующее неравенство

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^2 \left[\left(T(\xi)I(\xi \in \Delta_J) - \frac{a_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} \right) \left(h(\xi)I(\xi \in \Delta_J) - \frac{A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} \right) | \xi \in \Delta_J \right] = \\ = \left[\frac{\zeta_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} - \frac{a_J(\theta)A_J(\theta)}{\pi_J^2(\theta)} \right]^2 \leq \left[\frac{b_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} - \left(\frac{a_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} \right)^2 \right] \left[\frac{\beta_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} - \left(\frac{A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (2.18)$$

где $\zeta_J(\theta) = \mathbf{M}[h(\xi)T(\xi)I(\xi \in \Delta_J)]$, представляет собой частный случай неравенства Коши–Буняковского для условного математического ожидания.

Убедимся в том, что матрица $\Sigma_h(\theta)$ не вырождена. Известно [9] (раздел 2.6.2), что определитель $|\Sigma_h(\theta)|$ блочной матрицы $\Sigma_h(\theta)$ можно представить следующим образом:

$$|\Sigma_h(\theta)| = |\Sigma_\pi| \cdot |\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta) - \mathbf{c}^\top \Sigma_\pi^{-1} \mathbf{c}|.$$

Отсюда на основании (2.12) и (2.16) следует невырожденность матрицы $\Sigma_h(\theta)$, поскольку

$$|\Sigma_\pi| = \prod_{j=1}^J \pi_j(\theta) > 0, \quad \sum_{j=1}^{J-1} c_j = -A_J(\theta) (1 - \pi_J(\theta))$$

и

$$\begin{aligned} \beta_J(\theta) - A_J^2(\theta) - \mathbf{c}^\top \Sigma_\pi^{-1} \mathbf{c} &= \beta_J(\theta) - A_J^2(\theta) \left[1 + \sum_{j=1}^{J-1} \pi_j(\theta) + \frac{(1-\pi_J(\theta))^2}{\pi_J(\theta)} \right] = \\ &= \beta_J(\theta) - \frac{A_J^2(\theta)}{\pi_J(\theta)} > 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Воспользовавшись формулой обращения блочной матрицы [9] (раздел 2.6.3)

$$\Sigma_h^{-1}(\theta) = \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}} \begin{bmatrix} A_{11}^{-1} A_{12} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} \\ -A_{21} A_{11}^{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

при $A_{11} = \Sigma_\pi$, $A_{22} = \beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)$ и (2.12), получим соотношение

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_{J-1}, u)^\top \Sigma_h^{-1}(\theta) (y_1, \dots, y_{J-1}, z) &= \mathbf{x}^\top \Sigma_\pi^{-1} \mathbf{y} + \\ &+ \frac{(\mathbf{x}^\top \Sigma_\pi^{-1} \mathbf{c} - u)(\mathbf{y}^\top \Sigma_\pi^{-1} \mathbf{c} - z)}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)} = \sum_{j=1}^J \frac{x_j y_j}{\pi_j(\theta)} + \frac{(x_J A_J(\theta)/\pi_J(\theta) - u)(y_J A_J(\theta)/\pi_J(\theta) - z)}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

справедливое для векторов $\mathbf{x}^\top = (x_1, \dots, x_{J-1})$, $\mathbf{y}^\top = (y_1, \dots, y_{J-1})$ таких, что $\sum_{j=1}^{J-1} x_j = -x_J$ и $\sum_{j=1}^{J-1} y_j = -y_J$, и любых действительных чисел u, z , поскольку

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\top \Sigma_\pi^{-1} \mathbf{c} &= -A_J(\theta) \sum_{j=1}^{J-1} x_j + \frac{x_J A_J(\theta) (1 - \pi_J(\theta))}{\pi_J(\theta)} = \frac{x_J A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)}, \\ \mathbf{y}^\top \Sigma_\pi^{-1} \mathbf{c} &= \frac{y_J A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись (2.4), найдем

$$A'_J(\theta) = \text{cov}(T(\xi), h(\xi)I(\xi \in \Delta_J)) = \zeta_J(\theta) - a A_J(\theta). \quad (2.21)$$

Используя (2.13), (2.17)–(2.21) и имея в виду, что в данном случае

$$\mathbf{g}(\theta) = (\pi_1(\theta), \dots, \pi_{J-1}(\theta), A_J(\theta))^\top,$$

убедимся в справедливости соотношений

$$\begin{aligned} n(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}})^\top \Sigma_h^{-1}(\theta) (\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}}) &= \\ &= \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j)^2}{n\pi_j(\theta)} + \frac{\left[(\nu_J - n\hat{\pi}_J) A_J(\theta)/\pi_J(\theta) - n\bar{g}_J + n\hat{A}_J \right]^2}{n(\beta_J - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta))}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b^2 - [\mathbf{g}'(\theta)]^\top \Sigma_h^{-1}(\theta) \mathbf{g}'(\theta) &= b^2 - \sum_{j=1}^J \frac{[\pi_j'(\theta)]^2}{\pi_j(\theta)} - \frac{[\pi_j'(\theta)A_J(\theta)/\pi_J(\theta) - A_J'(\theta)]^2}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)} = \\
&= b^2 - \sum_{j=1}^J \frac{[a_j(\theta) - a\pi_j(\theta)]^2}{\pi_j(\theta)} - \frac{[a_J(\theta)A_J(\theta)/\pi_J(\theta) - \zeta_J(\theta)]^2}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)} = \\
&= \sum_{j=1}^J \left[b_j^2(\theta) - \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)} \right] - \pi_J(\theta) \frac{[\zeta_J(\theta)/\pi_J(\theta) - a_J(\theta)A_J(\theta)/\pi_J^2(\theta)]^2}{\beta_J(\theta)/\pi_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J^2(\theta)} \geq \\
&\geq \sum_{j=1}^J \left[b_j^2(\theta) - \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)} \right] - \left[b_J(\theta) - \frac{a_J^2(\theta)}{\pi_J(\theta)} \right] = \sum_{j=1}^{J-1} \left[b_j^2(\theta) - \frac{a_j^2(\theta)}{\pi_j(\theta)} \right] > 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\bar{\mathbf{g}} - \hat{\mathbf{g}})^\top \Sigma_h^{-1}(\theta) \mathbf{g}'(\theta) &= \\
&= \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j) \pi_j'(\theta)}{n\pi_j(\theta)} + \frac{\left(\frac{(\nu_J - n\hat{\pi}_J)A_J(\theta)}{n\pi_J(\theta)} - \bar{g}_J + \hat{A}_J \right) \left(\frac{\pi_J'(\theta)A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} - A_J'(\theta) \right)}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)} = \\
&= \sum_{j=1}^J \frac{(\nu_j - n\hat{\pi}_j) a_j(\theta)}{n\pi_j(\theta)} + \frac{\left(\frac{(\nu_J - n\hat{\pi}_J)A_J(\theta)}{n\pi_J(\theta)} - \bar{g}_J + \hat{A}_J \right) \left(\frac{a_J(\theta)A_J(\theta)}{\pi_J(\theta)} - \zeta_J(\theta) \right)}{\beta_J(\theta) - A_J^2(\theta)/\pi_J(\theta)}.
\end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения в (2.8), получим (2.14). Заменяя в (2.14) неизвестные функции на их несмещенные оценки, которые являются состоятельными при сделанных предположениях, приходим к (2.15). Сходимость к распределению хи-квадрат в силу замечаний 1 и 4 очевидна.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ, проект №2096.

Дата поступления 04.07.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Pearson K., "On the criterion that a given system of derivations from the probable in the case of correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling", *Philosophical Magazine*, 1900, № 302, 157–175.
2. Fisher R. A., "On a property connecting the measure of discrepancy with the method of maximum likelihood", *Atti de Congresso Internazionale dei Mathematici*, 1928, № 302, 94–100.
3. Chernoff G., Lehmann E.L., "The use of maximum likelihood estimates in tests for goodness of fit", *Annals of Mathematical Statistics*, 1954, № 25, 579–586.
4. Никулин М.С., "Критерий хи-квадрат для непрерывных распределений с параметрами сдвига и масштаба", *Теория вероятностей и ее применение*, 1973, № 3, 583–592.
5. Nikulin M.S., Mirvaliev M., "Goodness-of-fit chi-squared type criterions", *Industrial Laboratory*, 1992, 280–291.

6. Bagdonavicius V., Kruopis J., Nikulin M.S., *Non-parametric Tests for Complete Data*, ISTE Ltd John Wiley and Sons, 2011, 309 pp.
7. Voinov V., Nikulin M., Balakrishnan N., *Chi-Squared Goodness of Fit Tests with Applications*, Elsevier Inc, Oxford, 2013, 229 pp.
8. Радионова М.В., Чичагов В.В., “Об одном классе критериев согласия типа хи-квадрат”, *Вестник Ижевского государственного технического университета*, 2014, № 4, 151–156.
9. Greene W.H., *Econometric Analysis*, Prentice Hall, 1999, 1024 pp.
10. Чичагов В.В., “Модифицированный критерий согласия хи-квадрат с одним ограничением на гипотетическое распределение”, *Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр., Перм. гос. нац. исслед. ун-т, Пермь*, 2015, № 26, 68–85.
11. Brown L.D., “Fundamentals of Statistical Exponential Families with Applications in Statistical Decision Theory”, *Lecture Notes-Monograph Series, Institute of Mathematical Statistics*, 1986.
12. Чичагов В. В., “Асимптотические разложения высокого порядка для несмещенных оценок и их дисперсий в модели однопараметрического экспоненциального семейства”, *Информатика и ее применения*, 2015, № 3, 75–87.
13. Чичагов В. В., “Стохастические разложения несмещенных оценок в случае однопараметрического экспоненциального распределения”, *Информатика и ее применения*, 2008, № 2, 62–70.
14. Portnoy S., “Asymptotic efficiency of minimum variance unbiased estimators”, *Annals of Statistics*, 1977, № 5, 522–529.
15. Хорн Р., Джонсон Ч., *Матричный анализ*, Мир, Москва, 1989, 656 с.
16. Суслова О. Н., Чичагов В. В., “Критерий хи-квадрат для однопараметрических распределений из экспоненциального семейства, построенный на основе несмещенных оценок”, *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*, 2006, № 3, 80–85.
17. Чичагов В. В., “Поведение статистики хи-квадрат с использованием несмещенных оценок в случае однопараметрического распределение из экспоненциального семейства”, *Статистические методы оценивания и проверки гипотез: межвуз. сб. науч. тр., Перм. гос. нац. исслед. ун-т, Пермь*, 2006, № 19, 78–89.
18. Боровков А. А., *Математическая статистика*, Наука, Москва, 1984, 472 с.

Goodness-of-fit test with modified statistics chi-square

© M. V. Radionova³, V. V. Chichagov⁴

Abstract. In the paper we continue the research on possibility of using parametric functions that allow unbiased estimates to test a null hypothesis about a kind of distribution by the chi-square test. Based on Wald's method a new asymptotic test is proposed for testing hypothesis according to which the distribution of random value belongs to a one-parameter exponential family. According to a level of complexity this test occupies an intermediate position between the Nikulin-Rao-Robson's test and the test of moment conditions. Two examples are mentioned as corollaries for the main statement of the paper. Corollary 2.1 contains the result connecting the proposed test statistic with one-dimensional version of the Nikulin-Rao-Robson's statistic. Corollary 2.2 contains test statistic for testing a null hypothesis about the kind of distribution with a special additional restriction on a hypothetical distribution.

Key Words: exponential family of functions, unbiased estimate, fitting criterion, power

³ Associate professor of Higher Mathematics Department, National Research University Higher School of Economics, Perm; m.radionova@rambler.ru

⁴ Associate professor of Higher Mathematics Department, Perm State National Research University, Perm; chichagov@psu.ru

УДК 517.987

Локальные гомеоморфизмы стоуновского компакта и локальная обратимость измеримых отображений

© П. М. Симонов¹, А. В. Чистяков²

Аннотация. Доказано утверждение о том, что открытое непрерывное отображение экстремально несвязного хаусдорфова компакта счетного типа в топологическое пространство, компоненты связности которого не являются множествами первой категории по Бэру, является локальным гомеоморфизмом тогда и только тогда, когда это отображение переводит все множества первой категории за исключением, быть может, подмножеств одного замкнутого нигде не плотного множества, в множества первой категории. Полученный результат используется для характеристики локальной обратимости измеримых отображений стандартных пространств с мерами. В частности, выясняется, что известное N -условие Лузина не только гарантирует измеримость образа при измеримом отображении, но и фактически является критерием локальной обратимости.

Ключевые слова: экстремально несвязный компакт, открыто-замкнутые множества, множество первой категории по Бэру, локальный гомеоморфизм, N -условие Лузина, стоуновский компакт, свойство антиинъективности

1. Введение

Вполне несвязные и, в частности, экстремально несвязные компактные пространства занимают особое место в иерархии топологических пространств ввиду глубоко нетривиальных связей с формальными алгебраическими структурами. Именно к этому классу пространств относятся канонические представления пространства максимальных идеалов булевых алгебр (М. Стоун, 1936) и пространства максимальных идеалов коммутативных банаховых алгебр (И.М. Гельфанд, 1939). В каноническом представлении абстрактная булева алгебра становится алгеброй открыто-замкнутых множеств компакта Стоуна, а абстрактная коммутативная банахова алгебра реализуется в виде алгебры непрерывных функций на компакте Гельфанда. Использование канонических реализаций оказалось чрезвычайно плодотворным подходом к решению сложнейших алгебраических и теоретико-множественных проблем. Эффективность такого подхода вполне объяснима: дискретное, сильно разрывное множество максимальных идеалов наделяется богатой дополнительной структурой непрерывности, что позволяет использовать для решения алгебраических проблем мощные аналитические и топологические методы. Естественно, для того, чтобы достичь такой непрерывности, необходимо необозримое множество точек (сходная ситуация возникает и в построенной в 1937 г. Э. Чехом и М. Стоуном теории компактных расширений вполне регулярных пространств). Фактически, в наиболее интересных случаях компакты Стоуна и Гельфанда столь велики, что мы не можем построить ни единой из их точек. Тем не менее, эти пространства полезны при изучении не только алгебраических, но и чисто аналитических проблем. Неопределимо и эвристическое значение необычной топологии экстремально несвязных пространств для понимания трудностей, возникающих в таких теориях как теория меры и связанные с ней разделы функционального анализа.

¹ Профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь; simpm@mail.ru

² Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Из теоремы М. Стоуна о представлении булевых алгебр следует, что каждое утверждение теории меры, в котором фигурирует только идеал множеств нулевой меры, имеет «топологическую» версию. Правила перевода здесь — следствие согласованности категории и индуцированной на стоуновском компакте меры: подмножество стоуновского компакта полной булевой алгебры с конечной мерой имеет меру нуль в том и только в том случае, если оно является множеством первой категории. В этой статье топологические аналогии используются для характеристики локальной обратимости измеримых отображений стандартных пространств с мерами. Оказывается, что для локальной обратимости измеримого отображения необходимо и достаточно, чтобы, поднятое на стоуновский компакт, оно переводило тонкие множества (первой категории) в тонкие множества. Этот факт заставляет по-новому понять известное условие Лузина: оно не только гарантирует измеримость образа при измеримом отображении, но и является необходимым и достаточным условием локальной обратимости.

Следует также сказать о том, что ни прямой, ни обратный перевод не является автоматическим. Она из существенных причин здесь заключается в том, что топологические утверждения существенно зависят от несчетных форм аксиомы выбора. В «прямых» доказательствах метрических фактов часто удается ограничиться более слабыми формами этой аксиомы, вплоть до счетной. В любом случае «обратный спуск» со стоуновского компакта на исходное пространство с мерой часто представляет значительные трудности (и не всегда возможен).

В основной теореме (в теореме 2) этой статьи утверждается, что непрерывное открытое отображение хаусдорфова экстремально несвязного пространства в хаусдорфово пространство, не имеющего компонент связности первой категории по Бэру и переводящее множества первой категории во множества первой категории, является локальным гомеоморфизмом. Обратное к теореме утверждение достаточно очевидно. Следовательно, теорема дает критерий локального гомеоморфизма экстремально несвязного компакта. Согласно теоремам М. Стоуна и И.М. Гельфанда экстремально несвязными компактными являются канонические реализации пространства максимальных идеалов полных булевых алгебр и некоторых важных классов коммутативных банаховых алгебр (таких, например, как алгебра $L^\infty(X, \mu)$ ограниченных μ -измеримых функций на пространстве X с полной мерой μ). Поэтому можно предположить, что сформулированный критерий окажется полезным при исследовании ряда вопросов, относящихся к теории булевых алгебр, теории банаховых алгебр и теории меры. Фактически доказанные здесь теоремы об отображениях экстремально несвязных компактов представляют собой топологическую версию утверждений, обнаруженных при изучении локальной обратимости измеримых отображений стандартных пространств с мерами.

В статье [8] показано, что в классе измеримых отображений стандартных вероятностных пространств, индуцирующих гомоморфизмы полной булевой алгебры измеримых множеств, свойство кусочно-инъективности фактически эквивалентно свойству N Лузина: мера образа любого множества нулевой меры равна нулю.

Стандартным пространством с мерой (или, по терминологии, введенной В.А. Рохлиным [5][с. 117], пространством Лебега) называется пространство с конечной мерой, метрически изоморфное полному сепарабельному метрическому пространству с борелевской мерой [5][с. 121], [2][с. 435], [6][с. 140]. Измеримое отображение $\alpha : X \rightarrow Y$ стандартного пространства X с мерой μ в стандартное пространство Y с мерой ν мы называем локально обратимым, если для любого измеримого множества $A \subset X$ с $\mu(A) > 0$ найдется измеримое подмножество $B \subset A$ такое, что $\mu(B) > 0$, множество $C := \alpha(B)$ измеримо и ограничение $\alpha|_B : B \rightarrow C$ является изоморфизмом по модулю множеств меры нуль (вообще говоря, не сохраняющем меру) измеримой структуры пространств (B, μ_B)

и (C, ν_C) [5][с. 113]. Согласно принципу исчерпывания [6][с. 67], [3][с. 111] локальная обратимость измеримого отображения $\alpha : X \rightarrow Y$ эквивалентна существованию не более чем счетного разбиения $X = \sqcup X_i$ пространства X на измеримые компоненты X_i , удовлетворяющие условиям: $\mu(X_0) = 0$; при $i > 0$ множество $Y_i := \alpha(X_i)$ измеримо, ограничение $\alpha_{X_i} : X_i \rightarrow Y_i$ обратимо и индуцирует σ -изоморфизм σ -алгебр измеримых подмножеств пространств X_i и Y_i .

Нетрудно убедиться в том, что локально обратимое измеримое $\alpha : X \rightarrow Y$ отображение удовлетворяет двум условиям:

- 1) для всех множеств $C \subset Y$ меры нуль мера прообраза $\alpha^{-1}(C)$ равна нулю;
- 2) существует подмножество $\tilde{X}$ пространства X полной меры такое, что для всех множеств $A \subset \tilde{X}$ меры нуль мера образа $\alpha(A)$ равна нулю.

Первое условие, называемое условием согласования, означает, что поточечное отображение α по правилу $\alpha^* : [C] \rightarrow \alpha^{-1}(C)$ (C — измеримое подмножество пространства Y) корректно порождает σ -гомоморфизм классов эквивалентности $[\cdot]$ измеримых множеств. Ясно, что условие согласования является инвариантом класса эквивалентности измеримых отображений и потому эквивалентные по модулю нуль отображения $\alpha : X \rightarrow Y$ индуцируют эквивалентные измеримые разбиения $\{\alpha^{-1}(y)\}_{y \in Y}$ пространства X на прообразы точек. Более того, имеется взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентных $\text{mod } 0$ измеримых отображений пространства X в сепарабельное метрическое пространство Y , классами равных $\text{mod } 0$ измеримых разбиений пространства X и классами μ -эквивалентных σ -подалгебр алгебры измеримых подмножеств X (или, что эквивалентно, замкнутых подалгебр коммутативной банаховой алгебры $L^\infty(X, \mu)$).

Второе условие известно как **свойство (N) Н.Н. Лузина** [4][с. 231], доказавшего, что оно является критерием измеримости образа измеримого множества при измеримом отображении стандартных пространств с мерами. Эта теорема Лузина почти не встречается в монографиях по теории меры. В связи с этим приведем ее формулировку и доказательство.

Теорема 0. Пусть $\alpha : X \rightarrow Y$ — измеримое отображение стандартных пространств с мерами. Для того, чтобы образ любого измеримого множества $A \subset X$ представлял собою измеримое множество, необходимо и достаточно, чтобы отображение обладало свойством:

$$\text{если } \mu(A) = 0, \text{ то } \nu(\alpha(A)) = 0. \quad (N)$$

Доказательство. 1) Пусть существует множество A с $\mu(A) > 0$ такое, что $\nu^*(\alpha(A)) > 0$ (здесь ν^* — внешняя мера, порожденная мерой ν). По теореме 2.2.4 [7][с. 73] в $\alpha(A)$ имеется ν -неизмеримое подмножество C . Множество $\tilde{A} := \alpha^{-1}(C) \cap A$ имеет меру нуль и потому измеримо. Но $\alpha(\tilde{A}) = C$ — неизмеримое множество. Полученное противоречие свидетельствует о необходимости условия (N).

2) Согласно известной теореме Лузина [7][с. 89] найдется последовательность компактных подмножеств $X_n \subset X$ такая, что $X_n \subset X_{n+1}$ при всех $n = 1, \dots$, сужение $\alpha_{X_n} : X_n \rightarrow Y$ непрерывно, а $\mu(X_0) = 0$, где $X_0 := X \setminus \bigcup_{n \geq 1} X_n$. Каждое измеримое множество $A \subset X$ можно представить в виде $A = A_1 \cup A_0$, где A_1 — борелевское множество типа F_σ , A_0 — множество нулевой меры. Вследствие непрерывности отображения α_{X_n} множество $\alpha(A_1 \cap X_n)$ есть множество типа F_σ . Поскольку α обладает свойством (N), то $\nu(\alpha(A_0)) = 0$ и $\nu(\alpha(A_1 \cap X_0)) = 0$. Измеримость множества очевидна ввиду равенств $\alpha(A) = \alpha(A_1 \cup A_0) = \alpha((\bigcup_{n \geq 0} A_1 \cap X_n) \cup A_0) = \alpha(\bigcup_{n \geq 1} (A_1 \cap X_n)) \cup \alpha(A_1 \cap X_0) \cup \alpha(A_0)$.

2. Почти локальные гомеоморфизмы стоуновского компакта

Топологическое пространство X называется экстремально несвязным [11][с. 540], если для каждого открытого множества $U \subset X$ замыкание $\bar{U}$ открыто в X .

Если X — хаусдорфов экстремально несвязный компакт, то семейство $\mathcal{U}_{oc}(X)$ всех открыто-замкнутых подмножеств составляет базу топологии пространства X . Среди необычных свойств экстремально несвязных пространств отметим следующие: непересекающиеся открытые множества обладают непересекающимися замыканиями; любое множество, состоящее более чем из двух точек, несвязно; не существует сходящихся последовательностей, состоящих из бесконечного числа (различных) точек. Мы будем предполагать, что X — экстремально несвязный компакт счетного типа. Счетность типа означает, что любое семейство непустых попарно дизъюнктивных открытых множеств не более чем счетно.

Топологическое пространство Y назовем **слабым пространством Бэра**, если любое непустое открыто-замкнутое подмножество $V \subset Y$ (компонента связности) не является множеством первой категории по Бэру.

Напомним, что подмножество A топологического пространства X называется множеством первой категории по Бэру, если A является объединением не более чем счетного семейства нигде не плотных в X множеств. Множество всех подмножеств первой категории в X является σ -идеалом булевой алгебры 2^X всех подмножеств $A \subset X$, который мы обозначим через $\mathcal{J}(X)$.

Ниже запись $X_n \nearrow X \pmod{\mathcal{J}(X)}$ означает, что $X_n \subset X_{n+1}$ и $(X \setminus \bigcup_n X_n) \in \mathcal{J}(X)$. Соответственно, $X_n \searrow \emptyset \pmod{\mathcal{J}(X)}$, если $X \setminus X_n \nearrow X \pmod{\mathcal{J}(X)}$.

Теорема 1. Пусть $\alpha : X \rightarrow Y$ — непрерывное открытое отображение экстремально несвязного хаусдорфова компакта X счетного типа в слабое пространство Бэра Y . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) существуют не более чем счетное семейство открыто-замкнутых подмножеств $(Y_i \subset Y)_{i \in I}$ и семейство непрерывных отображений $(\beta_i : Y_i \rightarrow X)_{i \in I}$ такие, что:

- а) множество $\tilde{X} := \bigcup_{i \in I} \beta_i(Y_i)$ открыто и всюду плотно;
- б) $\beta_i(y) \neq \beta_j(y)$ при $i \neq j$ для всех $y \in Y_i \cap Y_j$; в) $\alpha^{-1}(y) \cap \tilde{X} = \{\beta_i(y)\}_{i: y \in Y_i}$ для всех $y \in Y$;

2) существует не более чем счетный набор попарно дизъюнктивных открыто-замкнутых множеств $(X_i \subset X)_{i \in I}$ такой, что:

- а) множество $\tilde{X} := \bigcup_{i \in I} X_i$ открыто и всюду плотно;
- б) сужение $\alpha|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$ инъективно для всех $i \in I$;

3) существует, последовательность открыто-замкнутых множеств $X_n \nearrow X \pmod{\mathcal{J}(X)}$ такая, что при любом n множество $\alpha^{-1}(y) \cap X_n$ содержит не более чем n точек;

4) существует последовательность открыто-замкнутых подмножеств $X_n \subset X$ такая, что $X_n \nearrow X \pmod{\mathcal{J}(X)}$ и при каждом n сужение $\alpha_n := \alpha|_{X_n} : X_n \rightarrow Y$ обладает свойством: если $A_k \searrow \emptyset \pmod{(\mathcal{J}(X))}$, то $\alpha_n(A_k) \searrow \emptyset \pmod{\mathcal{J}(Y)}$;

5) существует открытое всюду плотное множество $\tilde{X} \subset X$ такое, что сужение $\tilde{\alpha} := \alpha|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \rightarrow Y$ удовлетворяет условию: для всех $A \in \mathcal{J}(X) \cap \tilde{X}$ имеем $\tilde{\alpha}(A) \in \mathcal{J}(Y)$.

В доказательстве теоремы используется следующий аналог известной в теории меры леммы об исчерпывании [3][с. 111], [6][с. 67].

Лемма 1. Пусть семейство $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{U}_{oc}(X)$ удовлетворяет условию: для любого $U \in \mathcal{U}_{oc}(X)$ найдется множество $P \in \mathcal{P}(X)$ такое, что $P \subset U$.

Тогда найдется не более чем счетное семейство попарно дизъюнктивных множеств $(\tilde{X}_i \in \mathcal{P}(X))_{i \in I}$ такое, что множество $\tilde{X} := \bigcup_{i \in I} \tilde{X}_i$ открыто и всюду плотно.

Доказательство. Искомое семейство будем строить с помощью трансфинитной индукции [11][с. 25]. Начнем построение, полагая $i := 1$, $X_i := X$.

А) Из условия леммы следует, что $\mathcal{P}_i := \{U \in \mathcal{P}(X) : U \subset X_i\} \neq \emptyset$. Поэтому выберем некоторое множество $\tilde{X}_i \in \mathcal{P}(X)_i$. Положим $X_{i+1} := X_i \setminus \tilde{X}_i$. Если $X_{i+1} = \emptyset$, то исчерпывающее компакт X семейство $(\tilde{X}_i)$ уже найдено. Если $X_{i+1} \neq \emptyset$, то $X_{i+1} \in \mathcal{U}_{oc}(X)$, так как $\tilde{X}_i \in \mathcal{U}_{oc}(X)$. Следовательно, заменяя i на $i + 1$ и возвращаясь в А), мы можем повторить процедуру выбора.

В) В результате итераций А) мы либо за конечное число шагов построим исчерпывающий X набор $(\tilde{X}_i)$, либо получим (бесконечную) последовательность попарно дизъюнктивных множеств $\tilde{X}_j \in \mathcal{P}(X)$ ($j = 1, 2, \dots$) и соответствующую ей убывающую последовательность множеств $(X_j) \in \mathcal{U}_{oc}(X)$. Во втором случае мы полагаем $i := \aleph$ и $X_i := X \setminus \bigcup_{j < i} \tilde{X}_j$, где $\aleph$ — первый бесконечный кардинал. Так как компакт X экстремально несвязен, то замыкания открытых множеств открыты. Поэтому множество X_i открыто-замкнуто. Если $X_i \in \mathcal{J}(X)$, то $X_i = \emptyset$ и лемма доказана. В противном случае возвращаемся к процедуре выбора, описанной в А. Аналогичным образом мы поступаем и при достижении второго $i := \aleph + \aleph$ и последующих предельных ординалов. Так как любое дизъюнктивное семейство непустых открытых множеств не более чем счетно, то процесс выбора множеств оборвется на некотором конечном или счетном ординале.

Доказательство теоремы начнем с самого существенного шага: $\boxed{5) \Rightarrow 1)}$. Обозначим через $\mathcal{P} := \mathcal{P}(X)$ множество всех $P \in \mathcal{U}_{oc}(X)$ таких, что сужение $\alpha|_P : P \rightarrow Y$ инъективно. Проверим, что семейство $\mathcal{P}$ удовлетворяет условиям леммы 1.

Множество открыто $\tilde{X}$ и всюду плотно, а семейство $\mathcal{U}_{oc}(X)$ является базой топологии пространства X . Поэтому без ограничения общности можно считать, что $U \subset \tilde{X}$ ($U \in \mathcal{U}_{oc}(X)$). Так как отображение α непрерывно и открыто, то $B := \alpha(U)$ — непустое открыто-замкнутое подмножество пространства Y . Следовательно, сужение $\alpha_U := \alpha|_U : U \rightarrow B$ — непрерывное открытое отображение U на B , причем $\alpha_U(\mathcal{J}(U)) \subset \mathcal{J}(B)$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ множество всех замкнутых подмножеств A компакта $U \subset X$ таких, что $\alpha_U(A) = B$. Упорядочим множества из $\mathcal{A}$ по включению: $A_2 \preceq A_1$, если $A_2 \subset A_1$. Поскольку множество U компактно, то пересечение элементов любой цепи $(A_i)_{i \in I}$ непусто: $A := \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$. Кроме того, из компактности U также следует [1][Предл. 1, с. 505], что

$$\alpha_U(A) = \alpha\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} \alpha(A_i) = B. \quad (1)$$

Таким образом, любая цепь в $\mathcal{A}$ имеет наименьший элемент. Согласно лемме Цорна множество $\mathcal{A}$ содержит минимальный элемент A .

Предположим, что $\text{int } A = \emptyset$. Тогда $A \in \mathcal{J}(U)$. Из включений (1) следует, что $B = \alpha_U(U) \in \mathcal{J}(Y)$. Но множество B непусто и открыто-замкнуто, а пространство Y — слабое пространство Бэра. Поэтому, если $B \neq \emptyset$, то $B \notin \mathcal{J}(Y)$. Следовательно, принятое предположение приводит к противоречию.

Значит, $\text{int } A \neq \emptyset$ и мы можем положить $P := \text{int } A$. Проверим, что $P \in \mathcal{P}$, т.е. сужение $\alpha|_P$ инъективно. Если это не так, то $\alpha(x_1) = \alpha(x_2)$ для двух различных точек $x_1, x_2 \in P$. Отделим точки x_1 и x_2 непересекающимися открыто-замкнутыми окрестностями U_1 и U_2 , лежащими в P . Так как отображение α непрерывно и открыто, то множество $V := \alpha(U_1) \cap \alpha(U_2)$ открыто-замкнуто в Y . Обозначим: $A_1 := \alpha^{-1}(V) \cap U_2$ и

$\tilde{A} := A \setminus A_1$, Ясно, что множество A_1 непусто и открыто-замкнуто. Поэтому множество $\tilde{A}$ замкнуто, $\tilde{A} \subset A$ и $\tilde{A} \neq A$. Из включения

$$\alpha(\alpha^{-1}(V) \cap U_1) \supset V \cap \alpha(U_1) = V$$

следует $\alpha(\tilde{A}) = \alpha(A) = B$. Действительно, если $y \in V$, то найдется $x \in \alpha^{-1}(V) \cap U_1 \subset \tilde{A}$. Если же $y \notin V$, то найдется $x \in [(\alpha^{-1}(B) \cap A) \setminus \alpha^{-1}(V)] \subset \tilde{A}$. Отсюда заключаем, что $\tilde{A} \in \mathcal{A}$. Так как A — минимальный элемент семейства $\mathcal{A}$, то возникает противоречие.

Таким образом, система $\mathcal{P}$ удовлетворяет условию леммы 1. По этой лемме найдется не более чем счетное семейство $(X_i \in \mathcal{P})_{i \in I}$ такое, что множество $\tilde{X} := \bigcap_{i \in I} \mathcal{P}_i$ открыто и всюду плотно. Положим $Y_i := \alpha(X_i)$ и $\alpha_i := \alpha|_{X_i} : X_i \rightarrow Y_i$ ($i \in I$). При каждом i отображение α_i непрерывно, открыто и биективно. Это означает, что α_i является гомеоморфизмом. Следовательно, обратное отображение $\beta_i := \alpha_i^{-1} : Y_i \rightarrow X_i$ непрерывно и открыто. Так как $X_i \cap X_j = \emptyset$ при $i \neq j$, то $\beta_i(y) \neq \beta_j(y)$ для всех $y \in Y_i \cap Y_j$. И, наконец, по построению

$$\alpha^{-1}(y) \cap \tilde{X} = \{\beta_i(y)\}_{i: y \in Y_i}$$

для всех $y \in Y$.

1) $\Rightarrow$ 2). Положим $X_i := \beta_i(Y_i)$ ($i \in I$).

2) $\Rightarrow$ 3). Положим $X_n := \bigcup_{i \leq n} \tilde{X}_i$.

4) $\Rightarrow$ 5). Положим $\tilde{X} := \bigcup_{n \geq 1} \tilde{X}_n$. Пусть $A \in \mathcal{J}(X) \cap \tilde{X}$. Последовательность $A_n :=$

$A \cap \tilde{X}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) состоит из элементов σ -идеала $\mathcal{J}(X)$. Из утверждения 4) следует, что $\alpha(A_n) \in \mathcal{J}(Y)$ для всех $n = 1, \dots$. Так как $\alpha(A_n) \searrow \alpha(A)$ и $\mathcal{J}(Y)$ — σ -идеал, то $\alpha(A) \in \mathcal{J}(Y)$.

3) $\Rightarrow$ 4). Для последовательности $X_n \nearrow X \pmod{\mathcal{J}(X)}$ при каждом n и $y \in Y$ имеем:

$$\alpha^{-1}(y) \cap X_n = \{x_i : i = 1, \dots, m(y)\}, m(y) \leq n.$$

Обозначим: $m_1 = \max_y m(y)$ и $Y_1 := \{y \in Y : m(y) = m_1\}$. Пусть $\bar{y} \in Y_1$. Тогда $\alpha^{-1}(\bar{y}) \cap X_n = \{\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m_1}\}$. Отделим точки $\bar{x}_i$ ($i = 1, \dots, m_1$) открыто-замкнутыми окрестностями $U_1, \dots, U_{m_1}$ так, чтобы $\bar{x}_i \in U_i$. Множество $V_{\bar{y}} := \bigcap_{i=1}^{m_1} (\alpha(U_i))$ непусто, так как $\bar{y} \in V_{\bar{y}}$. Проверим, что сужение $\alpha|_{\alpha^{-1}(V_{\bar{y}}) \cap U_i}$ инъективно для всех $i = 1, \dots, m_1$. Пусть для определенности $i = 1$. Предположим, что найдутся две точки $x_1^{(1)}, x_1^{(2)} \in U_1$ для которых $\alpha(x_1^{(1)}) = \alpha(x_1^{(2)}) = y$. Но тогда, поскольку при $i \neq 1$ найдется точка $x_i \in U_i$, для которой $\alpha(x_i) = y$, множество $\alpha^{-1}(y)$ должно содержать по крайней мере $m_1 + 1$ точку. Ясно, что это невозможно. Поэтому $V_{\bar{y}} \subset Y_1$. Множество $V_{\bar{y}}$ — открыто-замкнутая окрестность точки $\bar{y} \in Y_1$. Отсюда следует, что множество Y_1 есть открытое подмножество пространства Y . Положим $X_{n_1} := \alpha^{-1}(Y_1) \cap X_n$. Отметим особо, что, как выше показано, у каждой точки $x \in X_{n_1}$ существует открыто-замкнутая окрестность $U = \alpha^{-1}(V_{\bar{y}}) \cap U_i$ с инъективным сужением $\alpha|_U$. Положим $m_2 = \max\{m(y) : y \in Y \setminus Y_1\}$ и, повторяя процесс, найдем множество X_{n_2} с тем же свойством. Продолжение этого процесса станет невозможным лишь тогда, когда будут исчерпаны все точки множества X_n . Таким образом доказано что любая точка $x \in X_n$ обладает открыто-замкнутой окрестностью U_x с инъективным сужением $\alpha|_{U_x}$. Выберем из покрытия $\{U_x\}_{x \in X_n}$ конечное подпокрытие $\{X_{ni} := U_{x_i} : i = 1, \dots, k\}$.

Сужение $\alpha_{ni} := \alpha|_{X_{ni}} : X_{ni} \rightarrow \alpha X_{ni}$ является биекцией. Так как отображение α_{ni} открыто, то оно является гомеоморфизмом и потому переводит $\mathcal{J}(X_{ni})$ на $\mathcal{J}(\alpha(X_{ni}))$.

Отсюда имеем

$$\alpha(\mathcal{J}(X_n)) = \cup_i(\alpha\mathcal{J}(X_{ni})) \subset \mathcal{J}(Y).$$

Если $A_k \in \mathcal{U}_{oc}(X_n)$ и $A_k \searrow \emptyset \pmod{\mathcal{J}(X_n)}$, то, вследствие компактности A_k , $\alpha(A_k) \searrow \alpha(A)$, где $A := \cap_k A_k \in \mathcal{J}(X_n)$. Так как $\alpha(\mathcal{J}(X_n)) \subset \mathcal{J}(Y)$, то $\alpha(A) \in \mathcal{J}(Y)$. Следовательно, $\alpha(A_k) \searrow \emptyset \pmod{\mathcal{J}(Y)}$.

3. Локальная обратимость измеримых отображений

Согласно теореме о представлении полная булева σ -алгебра $\mathcal{A}$ имеет каноническую реализацию в виде фактор-алгебры $\mathcal{B}/\mathcal{I}$, где $\mathcal{B}$ — наименьшая σ -алгебра, содержащая поле $\mathcal{B}_{oc}$ открыто-замкнутых множеств экстремально несвязного пространства $\mathcal{X}$ (пространства Стоуна этой алгебры), $\mathcal{I}$ — идеал множеств первой категории в $\mathcal{X}$. Поэтому вполне естественно использовать теорему 1 для изучения свойств σ -гомоморфизмов полных булевых алгебр. Одним из наиболее важных примеров таких алгебр являются σ -алгебры с полной конечной мерой. Они имеют счетный тип и потому их пространство Стоуна тоже счетного типа. Мы применим теорему 1 для изучения σ -гомоморфизмов так называемых стандартных пространств с мерой (полных сепарабельных метрических пространств и их борелевских подмножеств с борелевской алгеброй и определенной на ней борелевской мерой). Приведем предварительно некоторые следствия из теоремы о представлении σ -алгебр.

Пусть (X, Σ, μ) — пространство с полной конечной мерой, Σ_0 — идеал множеств меры нуль. По теореме о представлении фактор-алгебра $\mathcal{A} := \Sigma/\Sigma_0$ изоморфна фактор-алгебре $\hat{\Sigma}/\hat{\Sigma}_0$ алгебры $\hat{\Sigma}$, порожденной полем $\hat{\Sigma}_{oc}$ открыто-замкнутых множеств стоуновского компакта $\hat{X}$ по идеалу $\hat{\Sigma}_0$ множеств первой категории. Здесь уместно заметить, что $\mathcal{A}$ регулярна и потому каждое множество первой категории в $\hat{X}$ на самом деле нигде не плотно. Отметим также, что экстремально несвязный компакт $\hat{X}$ изоморфен компакту Гельфанда банаховой алгебры $L^\infty(X, \Sigma, \mu)$, что позволяет смотреть на классы эквивалентности измеримых ограниченных функций как на функции непрерывные.

Ввиду изометрии $\Sigma/\Sigma_0 \cong \hat{\Sigma}/\hat{\Sigma}_0$ мы имеем возможность “поднимать” возникающие в теории меры проблемы на стоуновский компакт.

Мы коснемся одной из таких проблем — характеристики свойства локальной обратимости σ -гомоморфизмов алгебр с мерами. Мы потому рассматриваем стандартную ситуацию, что только в стандартной ситуации каждый σ -гомоморфизм порождается поточечным отображением.

Пусть (X, Σ, μ) и $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ — стандартные пространства с мерами. Рассмотрим измеримое отображение $\alpha : X \rightarrow Y$, удовлетворяющее **условию согласования (условию «независания»)**:

$$\text{если } B \in \mathcal{S} \text{ и } \nu(B) = 0, \text{ то } \mu(\alpha^{-1}(B)) = 0.$$

Это условие необходимо и достаточно для того, чтобы по правилу

$$h : [B]_{\mathcal{S}_0} \rightarrow [\alpha^{-1}(B)]_{\Sigma_0} \quad (B \in \mathcal{S})$$

корректно порождался σ -гомоморфизм $h : \mathcal{S}/\mathcal{S}_0 \rightarrow \Sigma/\Sigma_0$. Наличие канонических изоморфизмов

$$\Sigma/\Sigma_0 \cong \hat{\Sigma}/\hat{\Sigma}_0 \text{ и } \mathcal{S}/\mathcal{S}_0 \cong \hat{\mathcal{S}}/\hat{\mathcal{S}}_0$$

позволяет перенести σ -гомоморфизм h на σ -гомоморфизм $\hat{h} : \hat{\mathcal{S}}/\hat{\mathcal{S}}_0 \rightarrow \hat{\Sigma}/\hat{\Sigma}_0$ их канонических представлений. Известно, что этот гомоморфизм порождается поточечным отображением $\hat{\alpha} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$, которое непрерывно и удовлетворяет условию: если множество $\hat{B}$ нигде не плотно в $\hat{Y}$, то $\hat{\alpha}^{-1}(\hat{B})$ нигде плотно в $\hat{X}$. Изучим это условие отдельно.

Обозначим через $\mathcal{R}(X)$ класс нигде не плотных множеств топологического пространства X . Соответственно, через $\mathcal{R}(Y)$ — класс нигде не плотных подмножеств топологического пространства Y .

Непрерывное отображение $\alpha : X \rightarrow Y$ будем называть $\mathcal{R}$ -непрерывным, если для всех $B \in \mathcal{R}(Y)$ получаем $\alpha^{-1}(B) \in \mathcal{R}(X)$.

Следующее утверждение дает нам возможность воспользоваться теоремой 1.

Лемма 2. Пусть X и Y — экстремально несвязные компакты. Тогда любое $\mathcal{R}$ -непрерывное отображение $\alpha : X \rightarrow Y$ открыто.

Доказательство. Открыто-замкнутые множества образуют базу топологий пространств X и Y . Поэтому достаточно проверить, что $\alpha(U)$ — открытое в Y множество для каждого открыто-замкнутого подмножества $U \subset X$.

Предположим сначала, что $\text{int } V = \emptyset$. Из непрерывности отображения α и компактности множества U следует, что V есть замкнутое подмножество пространства Y . Так как по предположению его внутренность пуста, то V нигде не плотно, т.е. $V \in \mathcal{R}(Y)$. Ввиду $\mathcal{R}$ -непрерывности $\alpha^{-1}(V) \in \mathcal{R}(X)$. Следовательно, $\text{int } \alpha^{-1}(V) = \emptyset$. Но $\text{int } \alpha^{-1}(V) = \alpha^{-1}(\alpha(U)) \supset U \neq \emptyset$. Получено противоречие.

Таким образом, $\text{int } V \neq \emptyset$. По характеристическому свойству экстремально несвязности $V_1 = \overline{\text{int } V}$ — открытое множество. Так как $V_1 \subset V$, то $V_1 = \text{int } V$.

Предположим теперь, что $V_1 \neq V$. Тогда множество $U_2 := U \setminus \alpha^{-1}(V_1)$ должно быть непустым открыто-замкнутым подмножеством пространства X . Ясно, что $\alpha(U_2) = V_2 := V \setminus V_1$ и $\text{int } V_2 = \emptyset$. Этот вывод противоречит факту, установленному выше. Поэтому $\alpha(U) = V = V_1$ и, следовательно, множество $\alpha(U)$ является открыто-замкнутым подмножеством пространства Y .

Теперь у нас все подготовлено для того, чтобы сформулировать утверждение о локальной обратимости измеримого отображения.

Теорема 2. Пусть $\alpha : X \rightarrow Y$ — измеримое отображение стандартных пространств с мерами (X, Σ, μ) и $(Y, \mathcal{S}, \nu)$, удовлетворяющее условию согласования: если $B \in \mathcal{S}$ и $\nu(B) = 0$, то $\mu(\alpha^{-1}(B)) = 0$.

Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) существует множество $\tilde{X}$ полной меры такое, что сужение $\tilde{\alpha} := \alpha|_{\tilde{X}} : \tilde{X} \rightarrow Y$ удовлетворяет N -условию Лузина: если $A \in \Sigma \cap \tilde{X}$ и $\mu(A) = 0$, то $\nu(\alpha(A)) = 0$;

2) существует не более чем счетный набор $\{A_i \in \Sigma : i = 0, 1, \dots\}$ попарно дизъюнктных множеств такой, что: а) $\mu(X_0) = 0$, $\mu(X_i) > 0$ при $i > 0$ и $\cup_{i \geq 0} X_i = X$;

б) при $i > 0$ множество $Y_k := \alpha(X_k)$ измеримо, сужение $\alpha_k := \alpha|_{X_k} : X_k \rightarrow Y_k$ обратимо и обратное отображение $\beta_k := \alpha_k^{-1} : Y_k \rightarrow X_k$ удовлетворяет условию согласования;

3) для отображения $\hat{\alpha} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$, индуцированного в канонических стоуновских представлениях, существует открытое всюду плотное множество $\tilde{\hat{X}}$ такое, что сужение $\tilde{\hat{\alpha}} := \hat{\alpha}|_{\tilde{\hat{X}}} : \tilde{\hat{X}} \rightarrow \hat{Y}$ удовлетворяет условию: если $\hat{A} \in \mathcal{J}(\hat{X}) \cap \tilde{\hat{X}}$, то $\hat{\alpha}(\hat{A}) \in \mathcal{J}(\hat{Y})$.

Заметим, что утверждение 2) этой теоремы эквивалентно свойству локальной обратимости: для любого множества $A \in \Sigma$ с $\mu(A) > 0$ найдется множество $A_1 \in \Sigma$ такое, что: $A_1 \subset A$, $\mu(A_1) > 0$, $\alpha(A_1) \in \mathcal{T}$, отображение $\alpha|_{A_1} : A_1 \rightarrow \alpha(A_1)$ обратимо и обратное отображение удовлетворяет условию согласования.

По содержанию теоремы можно сказать следующее. В утверждении 1) выясняется новая роль условия Лузина: оно не только гарантирует измеримость образа измеримого множества при измеримом отображении, но и является скрытым критерием локальной обратимости этого отображения. Переформулировка этого условия в утверждении 3) фактически является нестандартным критерием локальной обратимости.

Мы приведем здесь только краткое **доказательство**, опуская громоздкие чисто технические детали.

1) $\Rightarrow$ 2). Предположим, что утверждение 2) неверно. Тогда, как следует из леммы 2 найдется множество X_0 с $\mu(X_0) > 0$ такое, что сужение $\alpha_0 := \alpha|_{X_0}$ обладает свойством **антиинъективности** [12], [9], [10]: если $A \in \Sigma \cap X_0$ и $\alpha|_A$ — инъекция, то $\mu(A) = 0$.

Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $X_0 = X$. В лемме 2 фактически установлено, что антиинъективность отображения $\alpha : X \rightarrow Y$ эквивалентна существованию σ -подалгебры $\Sigma_\tau \subset \Sigma$ такой, что: 1) $\mu|_{\Sigma_\tau}$ — диффузная (не имеющая атомов) мера; 2) σ -подалгебры Σ_τ и $\Sigma_\alpha := \alpha^{-1}(\mathcal{S})$ независимы.

Наименьшую σ -подалгебру $\sigma(\Sigma_\alpha, \Sigma_\tau)$, содержащую подалгебры Σ_α и Σ_τ , можно отождествить с проективным тензорным произведением $\Sigma_1 := \Sigma_\alpha \otimes \Sigma_\tau$, тем самым вложив $\Sigma_\alpha \otimes \Sigma_\tau$ в Σ . Так как $\alpha^{-1}(\mathcal{S}) = \Sigma_\alpha \times X$, то при таком вложении $i : \Sigma_\alpha \otimes \Sigma_\tau \cong \sigma(\Sigma_\alpha, \Sigma_\tau) \rightarrow \Sigma$ σ -гомоморфизм $\alpha^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \Sigma$ «пропускается» через оператор тождественного вложения $i_\alpha : \Sigma \times X \rightarrow \Sigma$, т.е. $i_\alpha(\alpha^{-1}) = \alpha^{-1}$. Отсюда следует, что $\alpha_\Sigma = \alpha(p_\alpha)$, где $p_\alpha : \Sigma_1 := \Sigma_\alpha \otimes \Sigma_\tau \rightarrow \Sigma_\alpha \cong \Sigma_\alpha \times X$ — «проекция» на первый множитель тензорного произведения Σ_1 . На образующих элементах $A \times B$ ($A \in \Sigma_\alpha, B \in \Sigma_\tau$) этого произведения проекция действует по правилу: $A \times B \mapsto A \times X$. Учитывая, что сужение $\mu_\tau := \mu|_{X \times \Sigma_\tau}$ является диффузной мерой, мы можем сказать, что для всех базовых множеств $C := A \times B$, для которых $\mu_\alpha(A) > 0$, а $\mu_\tau(B) = 0$, образ $\alpha(C)$ имеет ненулевую меру: $\nu(\alpha(C)) = \mu(A) > 0$, но $\mu(C) = 0$. Поскольку таких базовых множеств имеется более чем счетное кардинальное число (а именно, 2^c , где c — континуум), то полученный вывод несовместим с утверждением 1).

2) $\Rightarrow$ 1). Достаточно положить $\tilde{X} = \cup_{i>0} X_i$.

2) $\Rightarrow$ 3). Согласно теореме М. Стоуна для каждого ненулевого класса μ -эквивалентности $[A]_{\Sigma_0}$ ($A \subset \Sigma$, $\mu(A) > 0$) найдется единственное открыто-замкнутое множество $\hat{A} \subset \hat{X}$ такое, что $h_0[A] = \hat{A}$. Здесь $h_0 : \Sigma/\Sigma_0 \rightarrow \hat{\Sigma}_{oc}$ — изоморфизм полной булевой σ -алгебры Σ/Σ_0 на поле $\hat{\Sigma}_{oc}$ открыто-замкнутых подмножеств ее стоуновского компакта $\hat{X}$. Поэтому при $i > 0$ σ -алгебра Σ_i/Σ_{i0} ($\Sigma_i := \Sigma \cap X_i$, $\Sigma_{i0} := \Sigma_0 \cap X_i$, являющаяся компонентой (полосой) σ -алгебры Σ/Σ_0 , канонически изоморфна σ -алгебре $\hat{\Sigma}/\hat{\Sigma}_0$ ($\hat{\Sigma}_i := \hat{\Sigma} \cap \hat{X}_i$, $\hat{\Sigma}_{i0} := \hat{\Sigma}_0 \cap \hat{X}_i$). В утверждении 2) говорится о том, что отображение $\alpha_i := \alpha|_{X_i} : X_i \rightarrow Y_i$ порождает σ -изоморфизм $\alpha^{-1} : \mathcal{S}_i/\mathcal{S}_{i0} \rightarrow \Sigma_i/\Sigma_{i0}$. По теореме о представлении отображение $\hat{\alpha}_i : \hat{\alpha}|_{\hat{X}_i} : \hat{X}_i \rightarrow \hat{Y}_i$ также порождает σ -изоморфизм $\hat{\alpha}_i^{-1} : \hat{\mathcal{S}}_i/\hat{\mathcal{S}}_{i0} \rightarrow \hat{\Sigma}_i/\hat{\Sigma}_{i0}$. Ясно, что обратный к $\hat{\alpha}_i^{-1}$ σ -изоморфизм имеет вид $\hat{\alpha} : \hat{\Sigma}_i/\hat{\Sigma}_{i0} \rightarrow \hat{\mathcal{S}}_i/\hat{\mathcal{S}}_{i0}$ и потому

$$\hat{\alpha}_i(\hat{\Sigma}_{i0}) = \hat{\alpha}_i(\hat{\Sigma} \cap \hat{X}_i) \subset \hat{\mathcal{S}}_{i0} = \hat{\mathcal{S}}_0 \cap \hat{Y}_i \subset \hat{\mathcal{S}}_0.$$

При этом, поскольку $\mu(\cup_{i>0} X_i) = \mu(X)$, то открытое множество $\tilde{X} := \cup_{i>0} \hat{X}_i$ всюду плотно в $\hat{X}$.

3) $\Rightarrow$ 2). Порождающее σ -гомоморфизм канонических представлений отображение $\hat{\alpha} : \hat{X} \rightarrow \hat{Y}$ $\mathfrak{R}$ -непрерывно. Согласно лемме 2 отсюда следует, что отображение $\hat{\alpha}$ открыто. При этом имеет место утверждение 5) теоремы 1. Следовательно, справедливо и утверждение 2) этой теоремы: найдется не более чем счетный набор $\{\hat{X}_i \subset \hat{X} : i = 1, \dots\}$ попарно дизъюнктивных открыто-замкнутых подмножеств пространства $\hat{X}$ такой, что открытое множество $\tilde{X} := \cup_{i \geq 1} \hat{X}_i$ всюду плотно и сужение $\hat{\alpha}_i := \hat{\alpha}|_{\hat{X}_i} : \hat{X}_i \rightarrow \hat{Y}$ инъективно при всех $i = 1, \dots$. Так как отображение $\hat{\alpha}$ открыто, то отображение $\hat{\alpha}_i : \hat{X}_i \rightarrow \hat{Y}_i := \hat{\alpha}(\hat{X}_i)$ является гомеоморфизмом, порождающим σ -изоморфизм $\hat{\Sigma}_i/\hat{\Sigma}_{i0} \rightarrow \hat{\mathcal{S}}_i/\hat{\mathcal{S}}_{i0}$. Выберем борелевских представителей X_i и Y_i из классов эквивалентностей $h_0^{-1}(\hat{X}_i)$ и $h_0^{-1}(\hat{Y}_i)$. Далее

заметим, что σ -изоморфизм $\hat{\alpha}_i$ индуцирует σ -изоморфизм $h_i : \Sigma_i/\Sigma_{i0} \rightarrow \mathcal{S}_i/\mathcal{S}_{i0}$ соответствующих фактор-алгебр. Согласно теореме он порождается некоторым поточечным отображением $\tilde{\alpha} : X_i \rightarrow Y_i \subset Y$, эквивалентным сужению $\alpha_i := \alpha|_{X_i}$.

Замечание. Формулой $\hat{\mu}(\hat{A}) := \mu(A)$ ($A \in h_0^{-1}(\hat{A})$) мера μ переносится с σ -алгебры Σ на поле $\hat{\Sigma}_{oc}$ открыто-замкнутых подмножеств стоуновского компакта $\hat{X}$ σ -алгебры Σ/Σ_0 . Распространение этой меры на наименьшую σ -алгебру $\hat{\Sigma}$, содержащую $\hat{\Sigma}_{oc}$, приводит к появлению пространства с мерой $(\hat{X}, \hat{\Sigma}, \hat{\mu})$, метрически изоморфного пространству (X, Σ, μ) . Замечательным свойством меры $\hat{\mu}$ является ее согласованность с категорией: $\hat{\mu}(\hat{A})=0$ тогда и только тогда, когда $\hat{A}$ является множеством первой категории.

Для пространства $(\hat{X}, \hat{\Sigma}, \hat{\mu})$ ввиду такой согласованности эквивалентность 1) $\iff$ 3) становится тавтологией, а эквивалентность 2) $\iff$ 3) — тавтологичной переформулировкой эквивалентности 2) $\iff$ 5) утверждением теоремы 1.

Замечание. Утверждение 2) теоремы 2 допускает трактовку в терминах σ -гоморфизмов классов эквивалентностей. Это утверждение является, по существу, переформулировкой утверждения 2) теоремы 1. В отличие от этого, утверждение 1), хотя и кажется на первый взгляд тавтологичным переводом утверждения 5) теоремы 1, на самом деле таковым не является: оно не имеет выражения в терминах классов эквивалентностей измеримых множеств

Предложение 1. Пусть $\alpha : X \rightarrow Y$ — непрерывное отображение компакта X в топологическое пространство Y и $(A_i)_{i \in I}$ — направленное по убыванию семейство замкнутых подмножеств компакта X с пересечением A . Тогда

$$\alpha(A) = \bigcap_{i \in I} \alpha(A_i).$$

Доказательство. При всех $i \in I$ $\alpha(A) \subset \alpha(A_i)$, так как $A \subset A_i$. Отсюда $\alpha(A) \subset \bigcap_{i \in I} \alpha(A_i)$. Проверим включение $\bigcap_{i \in I} \alpha(A_i) \subset \alpha(A)$.

Пусть $y \in \bigcap_{i \in I} \alpha(A_i)$. При каждом $i \in I$ множество $A_{iy} := A_i \cap \alpha^{-1}(y)$ замкнуто. Семейство $(A_{iy})_{i \in I}$ направлено по убыванию. Ввиду компактности X пересечение $A_y := \bigcap_{i \in I} A_{iy}$ непусто. Но $A_y = A \cap \alpha^{-1}(y)$. Поэтому

$$\alpha(A) \cap \{y\} \supset \alpha(A_y) \neq \emptyset,$$

т.е. $y \in \alpha(A)$.

Предложение 2. Каждое бесконечное подмножество A экстремально несвязного хаусдорфова компакта X содержит подмножество B , гомеоморфное расширению Стоуна–Чеха $\beta\mathbb{N}$ пространства $\mathbb{N}$ натуральных чисел.

Доказательство. По следующей итеративной схеме построим последовательность точек $a_1, a_2, \dots$ и последовательность открытых множеств $V_1, V_2, \dots$ таких, что $a_i \in V_i$, $V_i \cap V_j$ при $i \neq j$ и $A_d := \{a_1, a_2, \dots\} \subset A$.

Положим $X_1 := X$, $A_0 := A$ и $A_1 := A_0 \cap X_1$. Ввиду регулярности пространства X для двух (произвольно) выбранных точек x_1 и x_2 множества A_1 найдутся их окрестности U_1 и U_2 с непересекающимися замыканиями $\overline{U_1}$ и $\overline{U_2}$. Обозначим через C одно из замкнутых множеств $\overline{U_1}$, $\overline{U_2}$ и $X \setminus (U_1 \cup U_2)$, содержащее бесконечно много точек множества A_1 . Из точек x_1 и x_2 выберем точку a_1 , которая не принадлежит множеству C . Отделим точку a_1 от замкнутого множества C открытыми множествами V_1 и X_2 : $a_1 \in V_1$, $C \subset X_2$ и $V_1 \cap X_2 = \emptyset$. В результате первого шага построения найдены точка a_1 и открытое множество V_1 , также указано открытое в X подпространство X_2 , необходимое для продолжения построения.

Множество A_d является счетным дискретным топологическим пространством. Поэтому его расширение Стоуна–Чеха βD гомеоморфно пространству $\beta \mathbb{N}$. Проверим, что βD совпадает с замыканием $B := \overline{A_d}$ множества в топологии экстремально несвязного компакта X . Согласно известному критерию [11][с. 267] достаточно показать, что каковы бы ни были непересекающиеся подмножества I_1 и I_2 натурального ряда $\mathbb{N}$ замыкания в A подмножеств $A_1 := \{a_i : i \in I_1\}$ и $A_2 := \{a_i \in I_2\}$ множества A не пересекаются. Но это очевидно, так как вследствие экстремальной несвязности X замыкания непересекающихся открытых множеств $U_1 := \bigcup \{V_i : i \in I_1\}$ и $U_2 := \bigcup \{V_i : i \in I_2\}$, содержащих, соответственно, множества A_1 и A_2 , не пересекаются.

Для завершения доказательства осталось заметить, что поскольку A замкнуто в X , то $B = \overline{A_d} \subset A$.

Как известно [11][с. 268], мощность пространства $\beta \mathbb{N}$ равна 2^c ($c = 2^{\aleph_0}$). Поэтому из доказанного предложения вытекает

Следствие. *Мощность любого бесконечного замкнутого подмножества экстремально несвязного хаусдорфова компакта не меньше 2^c .*

Работа выполнена при поддержке АО «ПРОГНОЗ».

Дата поступления 27.10.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Бурбаки, *Интегрирование. Меры на локально компактных пространствах. Продолжение меры. Интегрирование мер. Меры на отделимых пространствах*, Наука, М., 1977, 600 с.
2. В.Г. Винокуров, “Компактные меры и произведения пространств Лебега”, *Мат. сборник. Новая серия*, **74 (116)**:3 (1967), 434–472.
3. Д. А. Владимиров, *Булевы алгебры*, Наука, М., 1969, 320 с.
4. И. П. Натансон, *Теория функций вещественной переменной*, Наука, М., 1974, 480 с.
5. А. В. Рохлин, “Об основных понятиях теории меры”, *Мат. сборник*, **25**:1 (1949), 107–150.
6. А. А. Самородницкий, *Теория меры*, Из-во Ленинград. ун-та, Л., 1990, 268 с.
7. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., М., 1987, 760 с.
8. А. В. Чистяков, “О кусочно-инъективных измеримых отображениях”, *Известия вузов. Математика.*, 2006, № 5, 67–72.
9. А. В. Чистяков, “Об ограниченных решениях стохастических систем Ито”, *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*, 2009, № 3(29), 103–121.
10. А. В. Чистяков, “Сильная необратимость операторов сдвига вдоль траекторий броуновского движения”, *Вестник Пермского университета. Математика. Механика. Информатика*, 2009, № 7(33), 84–89.

11. Р. Энгелькинг, *Общая топология*, Мир, М., 1986, 752 с.
12. N. J. Kalton, “Isomorphisms between L_p -function spaces when $p < 1$ ”, *J. of Funct. Anal.*, **42:3** (1981), 299–337.

Local homeomorphisms of Stone’s compact and local convertibility measures mappings

© P. M. Simonov³, A. V. Chistyakov⁴

Abstract. The paper is about open continuous mappings from extremely disconnected Hausdorff’s compact of countable type into topological space with connectivity components that are not sets of the Baire first category. It is proved that such mapping is local homomorphism if and only if it maps all first-category sets (maybe, except subsets of unique closed nowhere dense set) into first-category sets. The obtained result is used for characterization of local reversibility of measurable mappings that act on standard spaces with measures. In particular, it is found out that Luzin’s N -condition does not only guarantee the measurability of an image but actually is also a criterion of local reversibility.

Key Words: extremely disconnected compact, open-and-closed sets, a set of first Baire category, local homeomorphism, Luzin’s N -condition, Stone compact, anti-injective property

³ Professor of Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, Perm; simpn@mail.ru

⁴ Udmurt State University, Izhevsk

УДК 517.968

Квазилинейное интегро-дифференциальное уравнение псевдопараболического типа с вырожденным ядром и интегральным условием

© Т. К. Юлдашев¹ К. Х. Шабадиков²

Аннотация. Рассмотрены вопросы об однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи для одного квазилинейного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа с вырожденным ядром и отражением первого аргумента. Развита метод вырожденного ядра для случая рассматриваемого интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа третьего порядка. Применен метод Фурье разделения переменных. С помощью обозначения интегро-дифференциальное уравнение псевдопараболического типа сведено к системе из счетных систем алгебраических уравнений со сложной правой частью. После несложного преобразования получена счетная система нелинейных интегральных уравнений, однозначная разрешимость которой доказана методом последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений.

Ключевые слова: нелокальная смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение, вырожденное ядро, отражение аргумента, однозначная разрешимость

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению смешанных задач для уравнений математической физики. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1]–[3]. Изучению дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка посвящено большое количество публикаций многих математиков, в частности работы автора [4]–[7].

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы. Часто изучение задач моделирования фильтрации жидкости в пористых средах сводится к рассмотрению дифференциальных уравнений третьего порядка [8]. К дифференциальным уравнениям в частных производных третьего порядка также сводятся задачи изучения распространения волн в слабодиспергирующих средах [9], в холодной плазме и магнитной гидродинамике и т.д. Изучению уравнений в частных производных третьего порядка посвящено большое количество работ (см. [10]–[16]).

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [17]–[19]. В настоящей работе предлагается методика изучения нелокальной смешанной задачи для

¹ Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursun.k.yuldashev@gmail.com

² Доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан; konak.shabadikov@mail.ru

нелинейного интегро-дифференциального уравнения псевдопараболического типа третьего порядка с вырожденным ядром. Метод вырожденного ядра развивается в [20], [21] для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

В области Ω рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^3 U(t, x)}{\partial t \partial x^2} - \mu \int_{-T}^T K(t, s) \frac{\partial^2 U(-s, x)}{\partial x^2} ds = \\ & = \eta(t) \int_{-T}^T U(\theta, x) d\theta + f \left(x, \int_{-T}^T \int_0^l H(\theta, y) U(\theta, y) dy d\theta \right) \end{aligned} \quad (1.1)$$

с интегральным условием

$$U(0, x) + \int_{-T}^T \Theta(t) U(t, x) dt = \varphi(x), \quad x \in \Omega_l \quad (1.2)$$

и граничными условиями Бенара

$$U(t, 0) = U(t, l) = 0, \quad t \in \Omega_T, \quad (1.3)$$

где $\eta(t) \in C(\Omega_T)$, $f(x, \gamma) \in C(\Omega_l \times R)$, $\Theta(t) \in C^1(\Omega_T)$, $\varphi(x) \in C^3(\Omega_l)$, $\varphi(0) = \varphi(l) = 0$, $0 < \int_{-T}^T \int_0^l |H(t, x)| dx dt < \infty$, $K(t, s) = \sum_{i=1}^m a_i(t) b_i(s)$, $a_i(t), b_i(s) \in C(\Omega_T)$, $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l$, $\Omega_T \equiv [-T, T]$, $\Omega_l \equiv [0, l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$, μ – действительный спектральный параметр.

Здесь предполагается, что функции $a_i(t)$ и $b_i(s)$ являются линейно независимыми.

Определение. Под решением смешанной задачи (1.1)–(1.3) понимаем функцию $U(t, x) \in C^{1,2}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и условиям (1.2), (1.3).

2. Счетная система нелинейных интегральных уравнений

В уравнении (1.1) в интегральном слагаемом сделаем замену переменной: $s = -\tau$, отсюда $ds = -d\tau$. Тогда уравнение (1.1) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} - \frac{\partial^3 U(t, x)}{\partial t \partial x^2} + \mu \int_{-T}^T K(t, -\tau) \frac{\partial^2 U(\tau, x)}{\partial x^2} d\tau = \\ & = \eta(t) \int_{-T}^T U(\theta, x) d\theta + f \left(x, \int_{-T}^T \int_0^l H(\theta, y) U(\theta, y) dy d\theta \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Решение данной задачи разыскиваем в виде ряда Фурье:

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \vartheta_n(x), \quad (2.5)$$

где функции $\vartheta_n(x)$ определяются как собственные функции спектральной задачи $\vartheta''(x) + \lambda^2 \vartheta(x) = 0$, $\vartheta(0) = \vartheta(l) = 0$, $0 < \lambda$ и образуют полную систему ортонормированных собственных функций $\{\vartheta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L_2(\Omega_l)$, а λ_n – соответствующие собственные значения.

По предположению

$$f(x, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\gamma) \vartheta_n(x), \quad (2.6)$$

где $f_n(\gamma) = \int_0^l f(y, \gamma) \vartheta_n(y) dy$, $\gamma = \int_{-T}^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \vartheta_k(z) dz d\theta$.

Кроме того, учтем, что

$$\vartheta_n''(x) = -\lambda_n^2 \vartheta_n(x). \quad (2.7)$$

Подставляя ряды (2.5) и (2.6) в уравнение (2.4), с учетом (2.7) получим следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} u_n'(t) - \mu \omega_n \int_{-T}^T \sum_{i=1}^m a_i(t) b_i(-\tau) u_n(\tau) d\tau = \\ = \frac{1}{1 + \lambda_n^2} \eta(t) \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + \frac{1}{1 + \lambda_n^2} f_n(\gamma), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $\omega_n = \frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}$, $u_n(t) = \int_0^l U(t, y) \vartheta_n(y) dy$.

С помощью обозначения

$$c_{in} = \int_{-T}^T b_i(-\tau) u_n(\tau) d\tau \quad (2.9)$$

уравнение (2.8) перепишется в следующем виде

$$u_n'(t) = \mu \omega_n \sum_{i=1}^m a_i(t) c_{in} + \frac{\eta(t)}{1 + \lambda_n^2} \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + \frac{1}{1 + \lambda_n^2} f_n(\gamma). \quad (2.10)$$

Интегральное условие (1.2) для уравнения (2.10) запишем в следующем виде:

$$u_n(0) + \int_{-T}^T \Theta(t) u_n(t) dt = \varphi_n, \quad (2.11)$$

где $\varphi_n = \int_0^l \varphi(y) \vartheta_n(y) dy$.

Тогда путем интегрирования по t из (2.10) с учетом (2.11) получаем

$$\begin{aligned} u_n(t) = \varphi_n h - h \int_{-T}^T \Theta(t) \left[\mu \omega_n \sum_{i=1}^m q_i(t) c_{in} + \frac{p(t)}{1 + \lambda_n^2} \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + \frac{t}{1 + \lambda_n^2} f_n(\gamma) \right] dt + \\ + \mu \omega_n \sum_{i=1}^m q_i(t) c_{in} + \frac{p(t)}{1 + \lambda_n^2} \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + \frac{t}{1 + \lambda_n^2} f_n(\gamma), \end{aligned} \quad (2.12)$$

где $h^{-1} = \left(1 + \int_{-T}^T \Theta(t) dt \right)$, $p(t) = \int_0^t \eta(\tau) d\tau$, $q_i(t) = \int_0^t a_i(\tau) d\tau$, $i = \overline{1, m}$.

Подстановка выражения (2.12) в (2.9) дает систему из счетных систем алгебраических уравнений (СССАУ)

$$c_{in} + \mu \omega_n \sum_{j=1}^m A_{ij} c_{jn} = B_{in}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.13)$$

где

$$\begin{aligned} A_{ij} &= - \int_{-T}^T b_i(-\tau) q_j(\tau) d\tau + h \int_{-T}^T b_i(-\tau) \int_{-T}^T \Theta(\xi) q_j(\xi) d\xi d\tau, \\ B_{in} &= h \int_{-T}^T b_i(-\tau) \int_{-T}^T \Theta(\xi) \left[\frac{p(\xi)}{1 + \lambda_n^2} \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + \frac{\xi}{1 + \lambda_n^2} f_n(\gamma) \right] d\xi d\tau - \\ &\quad - \int_{-T}^T b_i(-\tau) \left[\varphi_n h + \frac{p(\tau)}{1 + \lambda_n^2} \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + \frac{s}{1 + \lambda_n^2} f_n(\gamma) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (2.14)$$

СССАУ (2.13) однозначно разрешима при любых конечных B_{in} , если выполняется следующее условие

$$\Delta_n(\mu) = \begin{vmatrix} 1 + \mu \omega_n A_{11} & \mu \omega_n A_{12} & \dots & \mu \omega_n A_{1m} \\ \mu \omega_n A_{21} & 1 + \mu \omega_n A_{22} & \dots & \mu \omega_n A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu \omega_n A_{m1} & \mu \omega_n A_{m2} & \dots & 1 + \mu \omega_n A_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (2.15)$$

Определитель $\Delta_n(\mu)$ в (2.15) есть многочлен относительно μ степени не выше m . Уравнение $\Delta_n(\mu) = 0$ имеет не более m различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1.1). Другие значения μ называются регулярными, при которых условие (2.15) выполняется. Для регулярных значений μ система (2.13) имеет единственное решение при любой конечной ненулевой правой части. В настоящей работе для таких регулярных значений параметра μ устанавливается однозначная разрешимость поставленной задачи (1.1)–(1.3).

Тогда решения СССАУ (2.13) записываются в виде

$$c_{in} = \frac{\Delta_{in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}, \quad i = \overline{1, m}, \quad (2.16)$$

где

$$\Delta_{in}(\mu) = \begin{vmatrix} 1 + \mu \omega_n A_{11} & \dots & \mu \omega_n A_{1(i-1)} & B_{1n} & \mu \omega_n A_{1(i+1)} & \dots & \mu \omega_n A_{1m} \\ \mu \omega_n A_{21} & \dots & \mu \omega_n A_{2(i-1)} & B_{2n} & \mu \omega_n A_{2(i+1)} & \dots & \mu \omega_n A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu \omega_n A_{m1} & \dots & \mu \omega_n A_{m(i-1)} & B_{mn} & \mu \omega_n A_{m(i+1)} & \dots & 1 + \mu \omega_n A_{mm} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_{in}(\mu)$ находятся B_{in} . В свою очередь, в составе B_{in} находятся неизвестные функции $u_n(t)$. В самом деле, эти неизвестные функции находились в правой части СССАУ (2.13). Чтобы вывести их из знака определителей, выражение в (2.14) запишем в следующем виде

$$B_{in} = B_{1in} + B_{2in} \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + B_{3in} f_n(\gamma),$$

где

$$B_{1in} = \varphi_n h \int_{-T}^T b_i(-\tau) d\tau,$$

$$B_{2in} = \frac{1}{1 + \lambda_n^2} \int_{-T}^T b_i(-\tau) \left[-p(\tau) + h \int_{-T}^T \Theta(\xi) p(\xi) d\xi \right] d\tau,$$

$$B_{3in} = \frac{1}{1 + \lambda_n^2} \int_{-T}^T b_i(-\tau) \left[-\tau + h \int_{-T}^T \xi \Theta(\xi) d\xi \right] d\tau.$$

В этом случае, согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_{in}(\mu) = \Delta_{1in}(\mu) + \Delta_{2in}(\mu) \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + \Delta_{3in}(\mu) f_n(\gamma),$$

где $\Delta_{kin}(\mu) =$

$$= \begin{vmatrix} 1 + \mu \omega_n A_{11} & \dots & \mu \omega_n A_{1(i-1)} & B_{k1n} & \mu \omega_n A_{1(i+1)} & \dots & \mu \omega_n A_{1m} \\ \mu \omega_n A_{21} & \dots & \mu \omega_n A_{2(i-1)} & B_{k2n} & \mu \omega_n A_{2(i+1)} & \dots & \mu \omega_n A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu \omega_n A_{m1} & \dots & \mu \omega_n A_{m(i-1)} & B_{kmn} & \mu \omega_n A_{m(i+1)} & \dots & 1 + \mu \omega_n A_{mm} \end{vmatrix}, \quad k = \overline{1, 3}.$$

Тогда формула (2.16) принимает вид

$$c_{in} = \frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} + \frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + \frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} f_n(\gamma), \quad i = \overline{1, m}. \quad (2.17)$$

Подставляя (2.17) в (2.12), имеем следующую счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ)

$$u_n(t) = \mathfrak{S}_1(t; u_n) \equiv Q_n(t) + G_n(t) \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta +$$

$$+ \Phi_n(t) \int_0^l f \left(y, \int_{-T}^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \vartheta_k(z) dz d\theta \right) \vartheta_n(y) dy, \quad (2.18)$$

где

$$Q_n(t) = h \varphi_n - \mu \omega_n h \int_{-T}^T \Theta(t) \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} dt + \mu \omega_n \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{\Delta_{1in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)},$$

$$G_n(t) = \frac{p(t)}{1 + \lambda_n^2} - h \int_{-T}^T \Theta(t) \frac{p(t)}{1 + \lambda_n^2} dt -$$

$$\begin{aligned}
& -\mu \omega_n h \int_{-T}^T \Theta(t) \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} dt + \mu \omega_n \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{\Delta_{2in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}, \\
& \Phi_n(t) = \frac{t}{1 + \lambda_n^2} - h \int_{-T}^T \Theta(t) \frac{t}{1 + \lambda_n^2} dt - \\
& -\mu \omega_n h \int_{-T}^T \Theta(t) \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)} dt + \mu \omega_n \sum_{i=1}^m q_i(t) \frac{\Delta_{3in}(\mu)}{\Delta_n(\mu)}.
\end{aligned}$$

3. Однозначная разрешимость ССНИУ

В множестве $\{u(t) = (u_n(t)) | u_n(t) \in C(\Omega_T), n = 1, 2, 3, \dots\}$ определяются операции сложения двух элементов и умножение элемента на скаляр покоординатно. Тогда данное множество становится линейным векторным пространством. Берем те элементы этого векторного пространства, которые удовлетворяют условию $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{t \in \Omega_T} |u_n(t)| \right)^2 < \infty$. С введением нормы

$$\|u(t)\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{t \in \Omega_T} |u_n(t)| \right)^2}$$

оно становится банаховым пространством и обозначается через $B_2(\Omega_T)$.

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполняется условие (2.15). Если

$$1. \beta_1 = \|Q(t)\|_{B_2(\Omega_T)} < \infty; \beta_2 = \|G(t)\|_{B_2(\Omega_T)} < \infty; \beta_3 = \|\Phi(t)\|_{B_2(T)} < \infty;$$

$$2. M = \|f(x, \gamma)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty; |f(x, \gamma_1) - f(x, \gamma_2)| \leq L(x) |\gamma_1 - \gamma_2|;$$

$$3. \rho = \beta_2 T + \beta_3 \delta_1 \delta_2 < 1; \delta_1 = \|L(x)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty; \delta_2 = \int_{-T}^T \int_0^l |H(t, x)| dx dt < \infty.$$

Тогда ССНИУ (2.18) имеет единственное решение в пространстве $B_2(\Omega_T)$. Это решение может быть найдено из следующего итерационного процесса

$$\begin{cases} u_n^0(t) = Q_n(t), \\ u_n^{j+1}(t) = \mathfrak{S}_1(t; u_n^j), j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.19)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим шар $S(u_n^0; r_1)$ с радиусом $r_1 = \beta_1 + \frac{\beta_3 M}{1 - \beta_2 T}$. В силу первого условия теоремы из (3.19) для нулевого приближения имеем

$$\|u^0(t)\|_{B_2(\Omega_T)} \leq \beta_1. \quad (3.20)$$

В силу условий теоремы и неравенства (3.20), из (3.19) для первой разности получаем оценку

$$\|u^1(t) - u^0(t)\|_{B_2(\Omega_T)} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\max_{t \in \Omega_T} |G_n(t)| \right)^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-T}^T |Q_n(t)|^2 dt +}$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\max_{t \in \Omega_T} |\Phi_n(t)| \left| \int_0^l f \left(y, \int_{-T}^T \int_0^l H(t, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t) \vartheta_k(z) dz dt \right) \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq \\
& \leq \|Q(t)\|_{B_2(\Omega_T)} \beta_2 T + \beta_3 \|f(x, \gamma)\|_{L_2(\Omega_t)} = \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M. \quad (3.21)
\end{aligned}$$

В силу условий теоремы и оценки (3.21), из (3.19) для разности $u^2(t) - u^0(t)$ получим оценку

$$\begin{aligned}
\|u^2(t) - u^0(t)\|_{B_2(\Omega_T)} & \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |G_n(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-T}^T |u_n^1(t) - u_n^0(t)| dt \right]^2} + \\
& + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |\Phi_{2n}(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l |f(y, \gamma^1) \vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq \\
& \leq (\beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M) \beta_2 T + \beta_3 M = \beta_1 (\beta_2 T)^2 + (\beta_2 T + 1) \beta_3 M, \quad (3.22)
\end{aligned}$$

где $\gamma^1 = \int_{-T}^T \int_0^l H(t, z) \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^1(t)| \vartheta_k(z) dz dt$.

Далее, из (3.19) с учетом (3.22) имеем

$$\begin{aligned}
\|u^3(t) - u^0(t)\|_{B_2(\Omega_T)} & \leq (\beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M) (\beta_2 T)^2 + (\beta_2 T + 1) \beta_3 M = \\
& = \beta_1 (\beta_2 T)^3 + ((\beta_2 T)^2 + \beta_2 T + 1) \beta_3 M. \quad (3.23)
\end{aligned}$$

Продолжая этот процесс, аналогично (3.23) получаем

$$\begin{aligned}
& \|u^j(t) - u^0(t)\|_{B_2(\Omega_T)} \leq \beta_1 (\beta_2 T)^j + \\
& + ((\beta_2 T)^{j-1} + (\beta_2 T)^{j-2} + \dots + (\beta_2 T)^2 + \beta_2 T + 1) \beta_3 M. \quad (3.24)
\end{aligned}$$

Из последнего условия теоремы следует, что $\beta_2 T < 1$. Поэтому из (3.24) с переходом к пределу при $j \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned}
& \lim_{j \rightarrow \infty} \|u^j(t) - u^0(t)\|_{B_2(\Omega_T)} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\beta_1 (\beta_2 T)^j + \right. \\
& \left. + ((\beta_2 T)^{j-1} + (\beta_2 T)^{j-2} + \dots + (\beta_2 T)^2 + \beta_2 T + 1) \beta_3 M \right],
\end{aligned}$$

имеем

$$\|u^\infty(t) - u^0(t)\|_{B_2(\Omega_T)} < \beta_1 + \frac{\beta_3 M}{1 - \beta_2 T} = r_1. \quad (3.25)$$

Из (3.25) следует, что оператор в правой части (2.18) отображает шар $S(u_n^0; r_1)$ в себя. Теперь для произвольной разности $u^{j+1}(t) - u^j(t)$ получим оценку

$$\|u^{j+1}(t) - u^j(t)\|_{B_2(\Omega_T)} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |G_n(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-T}^T |u^j(t) - u^{j-1}(t)| dt \right]^2} +$$

$$\begin{aligned}
& + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |\Phi_n(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l L(y) |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \times \\
& \times \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-T}^T \int_0^l |H(t, z)| \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^j(t) - u_k^{j-1}(t)| |\vartheta_k(z)| dz dt \right]^2} \leq \\
& \leq \left[\beta_2 T + \beta_3 \delta_2 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^l L(y) |\vartheta_n(y)| dy \right)^2} \right] \|u^j(t) - u^{j-1}(t)\|_{B_2(\Omega_T)} \leq \\
& \leq \rho \|u^j(t) - u^{j-1}(t)\|_{B_2(\Omega_T)}. \tag{3.26}
\end{aligned}$$

В силу последнего условия теоремы и из оценки (3.26) следует, что оператор в правой части (2.18) является сжимающим. Из оценок (3.20), (3.25) и (3.26) мы заключаем, что для оператора (2.18) существует единственная неподвижная точка (см. [22], стр. 389–401)). Следовательно, ССНИУ (2.18) имеет единственное решение $u(t) \in B_2(\Omega_T)$. Кроме того, для скорости сходимости справедлива оценка

$$\|u^{j+1}(t) - u(t)\|_{B_2(\Omega_T)} \leq \frac{\rho^{j+1}}{1 - \rho} (\beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M).$$

Дифференцируя ССНИУ (2.18) по t , имеем

$$\begin{aligned}
u'_n(t) = \mathfrak{S}_2(t; u'_n) \equiv Q'_n(t) + G'_n(t) \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + \\
+ \Phi'_n(t) \int_0^l f \left(y, \int_{-T}^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \vartheta_k(z) dz d\theta \right) \vartheta_n(y) dy, \tag{3.27}
\end{aligned}$$

где $Q'_n(t) \in C^1(\Omega_T)$, $G'_n(t) \in C^1(\Omega_T)$, $\Phi'_n(t) \in C^1(\Omega_T)$.

Т е о р е м а 3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.1. и $N_0 = \|Q'(t)\|_{B_2(\Omega_T)} < \infty$; $N_1 = \|G'(t)\|_{B_2(\Omega_T)} < \infty$; $N_2 = \|\Phi'(t)\|_{B_2(\Omega_T)} < \infty$. Тогда $u'(t) \in B_2(\Omega_T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим шар $S\left(\frac{d}{dt}u_n^0; r_2\right)$ с радиусом

$$r_2 = \max \left\{ N_0; N_1 T \left(\beta_1 + \frac{1}{1 - \beta_2 T} \right) + N_2 M \right\}.$$

Для оператора (3.27) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u_n^0(t) = Q'_n(t), \\ \frac{d}{dt} u_n^{j+1}(t) = \mathfrak{S}_2(t; u_n^j), \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \tag{3.28}$$

Покажем, что последовательные приближения (3.28) не выходят из шара $S\left(\frac{d}{dt}u_n^0; r_2\right)$.

В силу первого условия теоремы, из (3.28) для нулевого приближения имеем

$$\left\| \frac{d}{dt} u^0(t) \right\|_{B_2(\Omega_T)} \leq N_0. \quad (3.29)$$

В силу условий теоремы и неравенства (3.20), из (3.28) для первой разности получаем оценку

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} u^1(t) - \frac{d}{dt} u^0(t) \right\|_{B_2(\Omega_T)} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |G'_n(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \int_{-T}^T |u_n^0(t)|^2 dt} + \\ &+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\max_{t \in \Omega_T} |\Phi'_n(t)| \int_0^l \left| f \left(y, \int_{-T}^T \int_0^l H(t, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(t) \vartheta_k(z) dz dt \right) \vartheta_n(y) \right| dy \right]^2} \leq \\ &\leq N_1 \beta_1 T + N_2 M. \end{aligned}$$

В силу условий теоремы и оценки (3.21), из (3.28) для разности $\frac{d}{dt} u^2(t) - \frac{d}{dt} u^0(t)$ получим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} u^2(t) - \frac{d}{dt} u^0(t) \right\|_{B_2(\Omega_T)} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |G'_n(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{-T}^T |u_n^1(t) - u_n^0(t)| dt \right]^2} + \\ &+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |\Phi'_n(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l |f(y, \gamma^1) \vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq (\beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M) N_1 T + N_2 M. \end{aligned}$$

Далее, из (3.28) с учетом (3.22) имеем

$$\left\| \frac{d}{dt} u^3(t) - \frac{d}{dt} u^0(t) \right\|_{B_2(\Omega_T)} \leq N_1 T \left(\beta_1 (\beta_2 T)^2 + (\beta_2 T + 1) \beta_3 M \right) + N_2 M. \quad (3.30)$$

Продолжая этот процесс, аналогично (3.30) получаем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{dt} u^j(t) - \frac{d}{dt} u^0(t) \right\|_{B_2(\Omega_T)} &\leq N_1 T \left[\beta_1 (\beta_2 T)^j + \right. \\ &\left. + \left((\beta_2 T)^{j-1} + (\beta_2 T)^{j-2} + \dots + (\beta_2 T)^2 + \beta_2 T + 1 \right) \beta_3 M \right] + N_2 M. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Из последнего условия теоремы 3.1. следует, что $\beta_2 T < 1$. Поэтому из (3.31) с переходом к пределу при $j \rightarrow \infty$ имеем

$$\left\| \frac{d}{dt} u^\infty(t) - \frac{d}{dt} u^0(t) \right\|_{B_2(\Omega_T)} < N_1 T \left(\beta_1 + \frac{1}{1 - \beta_2 T} \right) + N_2 M \leq r_2. \quad (3.32)$$

Из (3.29) и (3.32) заключаем, что оператор в правой части (3.27) отображает шар $S\left(\frac{d}{dt} u_n^0; r_2\right)$ в себя. Отсюда следует, что $u'(t) \in B_2(\Omega_T)$.

4. Сходимость ряда Фурье

Подставляя (2.18) в ряд Фурье (2.5), получаем формальное решение смешанной задачи (1.1)–(1.3):

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \mathfrak{S}_1(t; u_n) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ Q_n(t) + G_n(t) \int_{-T}^T u_n(\theta) d\theta + \right. \\ \left. + \Phi_n(t) \int_0^l f \left(y, \int_{-T}^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \vartheta_k(z) dz d\theta \right) \vartheta_n(y) dy \right\}. \quad (4.33)$$

Также подставляем (3.19) в ряд (2.5):

$$U^{j+1}(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \mathfrak{S}_1(t; u_n^j) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ Q_n(t) + G_n(t) \int_{-T}^T u_n^j(\theta) d\theta + \right. \\ \left. + \Phi_n(t) \int_0^l f \left(y, \int_{-T}^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^j(\theta) \vartheta_k(z) dz d\theta \right) \vartheta_n(y) dy \right\}. \quad (4.34)$$

Т е о р е м а 4.1. Пусть выполняются условия теоремы 3.2. и $u(t) \in B_2(\Omega_T)$ является единственным решением ССНИУ (2.18). Тогда последовательность функций (4.34) сходится к функции (4.33) при $j \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $u(t) \in B_2(\Omega_T)$ является единственным решением ССНИУ (2.18), то можно полагать, что

$$\|\mathfrak{S}_1(t; u^j) - \mathfrak{S}_1(t; u)\|_{B_2(\Omega_T)} \leq \frac{\varepsilon}{\delta_3},$$

где $0 < \delta_3 = \text{const}$, $0 < \varepsilon$ – малое число. Тогда для разности функций (4.34) и (4.33) получаем

$$|U^{j+1}(t, x) - U(t, x)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{j+1}(t) - u_n(t)| |\vartheta_n(x)| \leq \\ \leq \delta_3 \cdot \|\mathfrak{S}_1(t; u^j) - \mathfrak{S}_1(t; u)\|_{B_2(\Omega_T)} \leq \delta_3 \frac{\varepsilon}{\delta_3} = \varepsilon.$$

Так как для оператора (3.27) имеет место $u'(t) \in B_2(\Omega_T)$, то имеем

$$\left| \frac{\partial U(t, x)}{\partial t} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\mathfrak{S}_2(t; u'_n)| |\vartheta_n(x)| \leq \delta_3 \|\mathfrak{S}_2(t; u')\|_{B_2(\Omega_T)} < \infty.$$

Дифференцируя (4.33) два раза по x и учитывая (2.7), получаем

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_1(t; u_n) \vartheta_n''(x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \mathfrak{S}_1(t; u_n) \vartheta_n(x). \quad (4.35)$$

Интегрируя два раза по частям интеграла $u_n(t) = \int_0^l U(t, y) \vartheta_n(y) dy$, имеем

$$u_n(t) = -\frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \frac{\partial^2 U(t, y)}{\partial y^2} \vartheta_n(y) dy. \quad (4.36)$$

Подставляя (4.36) в (1.3) и используя неравенства Бесселя, окончательно получаем оценку

$$\left| -\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \mathfrak{S}_1(t; u_n) \vartheta_n(x) \right| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \frac{\partial^2 U(t, y)}{\partial y^2} \vartheta_n(y) dy \vartheta_n(x) \right| \leq$$

$$\leq \delta_3 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| \frac{\partial^2 U(t, y)}{\partial y^2} \right| |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq \delta_3 \left\| \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty.$$

Дата поступления 21.10.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.
2. Замышляева А. А., “Математические модели соболевского типа высокого порядка”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Матем. моделир. и программирование*, **7:2** (2014), 5—28.
3. Benney D. J., “Interactions of permanent waves of finite amplitude”, *Journ. Math. Phys.*, **43** (1964), 309—313.
4. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокого порядка”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **28:3** (2012), 17—29.
5. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для нелинейного интегро-дифференциального уравнения с гиперболическим оператором высокой степени”, *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математика. Механика. Физика*, **5:1** (2013), 69—75.
6. Юлдашев Т. К., “Смешанная задача для нелинейного уравнения с псевдопараболическим оператором высокой степени”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 277—295.
7. Юлдашев Т. К., Середкина А. И., “Обратная задача для квазилинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **32:3** (2013), 46—55.
8. Шхануков М. Х., “О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах”, *Дифференц. уравнения*, **18:4** (1982), 689—699.
9. Уизем Дж., *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977, 622 с.
10. Андреев А. А., Яковлева Ю. О., “Характеристическая задача для системы гиперболических дифференциальных уравнений третьего порядка общего вида с некротными характеристиками”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **30:1** (2013), 31—36.

11. Бештоков М. Х., “Численный метод решения одной нелокальной краевой задачи для уравнения третьего порядка гиперболического типа”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*, **54**:9 (2014), 1497—1514.
12. Зикиров О. С., “О задаче Дирихле для гиперболических уравнений третьего порядка”, *Изв. вузов. Математика*, 2014, № 7, 63—71.
13. Репин О. А., Кумыкова С. К., “Задача со смещением для уравнения третьего порядка с разрывными коэффициентами”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **29**:4 (2012), 17—25.
14. Сопуев А., Аркабаев Н. К., “Задачи сопряжения для линейных псевдопараболических уравнений третьего порядка”, *Вестник ТомГУ. Математика. Механика*, **21**:1 (2013), 16—23.
15. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения третьего порядка”, *Вестник СамГУ. Серия естественнонаучная*, 2013, № 1, 58—66.
16. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка”, *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, **34**:1 (2014), 56—65.
17. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А., “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделирование*, **12**:1 (2000), 94—103.
18. Иванчов Н. И., “Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием”, *Дифференц. уравнения*, **40**:4 (2004), 547—564.
19. Пулькина Л. С., “Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени”, *Изв. вузов. Математика*, 2012, № 10, 32—44.
20. Юлдашев Т. К., “Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка”, *Изв. вузов. Математика*, 2015, № 9, 74—79.
21. Юлдашев Т. К., “О разрешимости смешанной задачи для линейного параболого-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:3 (2013), 158—163.
22. Треногин В. А., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 495 с.

A pseudoparabolic type quasilinear integro-differential equation with degenerate kernel and integral condition

© T. K. Yuldashev³ K. H. Shabadikov⁴

Abstract. Nonlocal mixed-value problem for a quasilinear pseudoparabolic type integro-differential equation with degenerate kernel and reflective first argument is considered. The questions of one-value solvability of such equations are examined. For equations of the third order the method of degenerate kernel is developed. Fourier method of variables' separation is used. After some denoting the examined equation is reduced to a system of countable algebraic equations' systems with complex right-hand side. After simple transformation countable system of nonlinear integral equations is obtained. One-value solvability of this system is proved by method of successive approximations combined with method of contractive mappings.

Key Words: nonlocal mixed-value problem, integro-differential equation, degenerate kernel, argument reflection, one-valued solvability

³ Associate professor of Higher Mathematics Department, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursun.k.yuldashev@gmail.com

⁴ Associate professor of Mathematical Analysis and Differential Equations Department, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan, konak.shabadikov@mail.ru

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 539.3:533.6:517.9

Об управлении динамикой трубопровода

© П. А. Вельмисов¹, А. В. Гладун²

Аннотация. Изучается управляемость механической системы, представляющей собой полый упругий стержень с протекающей внутри него жидкостью или газом (трубопровод). Построены управления с обратной связью, обеспечивающие асимптотическую устойчивость колебаний трубопровода. Приведены результаты численного моделирования поведения механической системы при заданных параметрах под действием построенных управлений.

Ключевые слова: упругий трубопровод, динамика, управляемость, управление с обратной связью, функция Ляпунова, уравнения с частными производными, метод Галеркина

1. Введение

Составной частью многих конструкций, приборов, аппаратов, установок и т.д. являются трубопроводы, по которым протекает поток жидкости или газа. Поток, воздействуя на трубопровод, может возбуждать его колебания. Амплитуда, скорость или частота его колебаний могут увеличиваться с течением времени до значений, нарушающих надежность эксплуатации конструкций, вплоть до разрушения конструкций или их элементов. Таким образом, при эксплуатации механических систем с трубопроводами необходимо контролировать их динамику. С одной стороны, при проектировании таких конструкций можно заранее рассмотреть задачу определения параметров механической системы, гарантирующих нормальную работу конструкций и не приводящих к их разрушению или возникновению аварийной ситуации. Множество работ посвящено исследованию задачи динамической устойчивости трубопровода [1]-[21]. С другой стороны, можно рассмотреть задачу управления параметрами трубопровода, чему и посвящена данная статья. Управление параметрами предполагает активное воздействие на трубопровод с целью устранения возникающих в нём колебаний.

2. Постановка задачи

Рассмотрим механическую систему, состоящую из упругого полого стержня длиной l и протекающей внутри него жидкости. На плоскости xOy недеформированному стержню соответствует на оси Ox отрезок $(0, l)$. Скорость жидкости равна U и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox . Для описания динамики трубопровода используем уравнение [4]

¹ Заведующий кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru

² Доцент кафедры естественнонаучных дисциплин, Ульяновский институт гражданской авиации имени Главного маршала авиации Б.П. Бугаева, г. Ульяновск; aleksygladun@gmail.com

$$\begin{aligned}
& (m_0 + m_*)\ddot{w} + \left[EJw'' \left(1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right) \right]'' + m_* U^2 w'' \left[1 - \frac{3}{2} (w')^2 \right] + \\
& + Nw'' \left(1 + \frac{1}{2} (w')^2 \right) + 2m_* U \dot{w}' \left(1 + \frac{1}{2} (w')^2 \right) + \alpha \dot{w}'''' - \beta \ddot{w}'' + f(x, t, w, \dot{w}) = 0
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где коэффициенты m_0, m_*, J вычисляются по формулам:

$$m_0 = \rho_0 \pi (R_*^2 - R_0^2), \quad m_* = \rho_* \pi R_0^2, \quad J = \frac{\pi}{4} (R_*^4 - R_0^4).$$

Штрих и точка сверху обозначают частные производные по координате x и времени t соответственно. В уравнении (2.1) $w(x, t)$ – деформация (прогиб) в сечении x в момент времени t , $x \in (0, l)$, $t > 0$; E – модуль упругости; U , m_* , ρ_* – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа); l – длина трубы между опорами; R_*, R_0 – внешний и внутренний радиусы трубопровода; m_0, ρ_0 – масса металла на единицу длины трубы и плотность металла; N – сжимающая ($N > 0$) или растягивающая ($N < 0$) сила; α – коэффициент внутреннего демпфирования; коэффициент β учитывает инерцию вращения сечений; функция $f(x, t, w, \dot{w})$ определяет внешнее управляющее воздействие на трубопровод. Для построения решений уравнения (2.1) методом Галеркина будем задавать функцию в виде

$$w_M(x, t) = \sum_{k=1}^M v_k(t) g_k(x),$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$ – полная на $[0, l]$ система базисных функций, соответствующих условиям закрепления концов трубопровода. Рассмотрим случай шарнирного закрепления концов

$$w(0, t) = w''(0, t) = 0, \quad w(l, t) = w''(l, t) = 0,$$

в соответствии с которым выберем $g_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l}$ и ограничимся случаем $M = 2$. Как показано в работах [9], [13], при исследовании динамической устойчивости трубопровода, результаты применения метода Галеркина для случая двух ($M = 2$) и большего числа приближений ($M = 20$) отличаются несущественно. Для случая $M = 2$ функция $w(x, t)$ примет вид

$$w(x, t) = v_1 \sin \left(\frac{\pi x}{l} \right) + v_2(t) \sin \left(\frac{2\pi x}{l} \right).$$

На основе процедуры метода Галеркина получим систему из двух обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$

$$\begin{aligned}
& C v_1^3(t) + 8 C v_2^2(t) + \frac{2}{3} K v_1(t) v_2(t) \dot{v}_1(t) + \frac{1}{3} K v_1^2(t) \dot{v}_2(t) - \frac{36}{7} K v_2^2(t) \dot{v}_2(t) + \\
& + A v_1(t) + \frac{\pi^4 \alpha}{2 l^3} \dot{v}_1(t) + B \ddot{v}_1(t) - \frac{8}{3} m_* U \dot{v}_2(t) + \frac{l}{2} u_1(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2) = 0, \\
& \left(16C - \frac{9\pi^6 D}{l^5}\right) v_2^3(t) + \left(8C - \frac{9\pi^6 D}{2l^5}\right) v_1^2(t) v_2(t) + \frac{88}{21} K v_1(t) v_2(t) \dot{v}_2(t) + \\
& + \frac{44}{21} K v_2^2(t) \dot{v}_1(t) + K v_1^2(t) \dot{v}_1(t) + \left(4A + \frac{6\pi^4 D}{l^3}\right) v_2(t) + \frac{8\pi^4 \alpha}{l^3} \dot{v}_2(t) + \\
& + \left(B + \frac{3\pi^2 \beta}{2l}\right) \ddot{v}_2(t) + \frac{8}{3} m_* U \dot{v}_1(t) + \frac{l}{2} u_2(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2) = 0,
\end{aligned} \tag{2.2}$$

где $u_1(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2), u_2(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2)$ – управляющие воздействия, полученные в результате применения процедуры метода Галеркина к функции $f(x, t, w, \dot{w})$. Для упрощения записи системы (2.2) введены следующие обозначения

$$\begin{aligned}
A &= \frac{\pi^4 D}{2l^3} - \frac{\pi^2(m_* U^2 + N)}{2l}; & B &= \frac{\pi^2 \beta}{2l} + \frac{l(m_0 + m_*)}{2}; \\
C &= -\frac{3\pi^6 D}{16l^5} + \frac{\pi^4(3m_* U^2 - N)}{16l^3}; & K &= \frac{4\pi^2 m_* U}{5l^2}.
\end{aligned}$$

Рассмотрим две задачи управления деформацией трубопровода.

Задача 1. Найти кусочно-непрерывные (далее допустимые) управления $u_1(t), u_2(t), t \in [t_0, t_1]$, такие, что соответствующее им движение системы (2.2) удовлетворяет условиям

$$w(x, t_0) = w_0(x), \quad w(x, t_1) = w_1(x).$$

Задача 2. Найти такие управляющие воздействия $u_1(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2), u_2(t, v_1, v_2, \dot{v}_1, \dot{v}_2)$, которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения системы (2.2).

3. Исследование управляемости

Рассмотрим задачу 1. Для изучения управляемости системы (2.2) воспользуемся достаточным условием управляемости динамической системы по линейному приближению [22], [23]. Для применения условия управляемости необходимо привести систему уравнений (2.2) к нормальному виду. Введем новые переменные

$$y_1 = v_1(t), \quad y_2 = v_2(t), \quad y_3 = \dot{v}_1(t), \quad y_4 = \dot{v}_2(t),$$

и перепишем систему (2.2) в виде

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_3, \\
\dot{y}_2 &= y_4, \\
\dot{y}_3 &= \frac{(-1)}{B} \left[Cy_1^3 + 8Cy_1y_2^2 + \frac{2}{3} Ky_1y_2y_3 + \frac{1}{3} Ky_1^2y_4 - \frac{36}{7} Ky_2^2y_4 + \right. \\
&\quad \left. + Ay_1 + \frac{\pi^4\alpha}{2l^3} y_3 - \frac{8}{3} m_* Uy_4 + u_1 \right], \\
\dot{y}_4 &= \frac{(-2l)}{(2Bl + 3\pi^2\beta)} \left[\left(16C - \frac{9\pi^6 D}{l^5} \right) y_2^3 + \left(8C - \frac{9\pi^6 D}{2l^5} \right) y_1^2 y_2 + \frac{88}{21} Ky_1y_2y_4 + \right. \\
&\quad \left. + \frac{44}{21} Ky_2^2 y_3 + Ky_1^2 y_3 + \left(4A + \frac{6\pi^4 D}{l^3} \right) y_2 + \frac{8\pi^4\alpha}{l^3} y_4 + \frac{8}{3} m_* Uy_3 + u_2 \right].
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь u_1, u_2 – допустимые управления. Запишем систему линейного приближения в точке $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 0, 0)$, $u = (u_1, u_2)$. Имеем

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= y_3 \\
\dot{y}_2 &= y_4 \\
\dot{y}_3 &= \frac{(-1)}{B} \left[Ay_1 + \frac{\pi^4\alpha}{2l^3} y_3 - \frac{8}{3} m_* Uy_4 + u_1 \right] \\
\dot{y}_4 &= \frac{(-2l)}{(2Bl + 3\pi^2\beta)} \left[\left(4A + \frac{6\pi^4 D}{l^3} \right) y_2 + \frac{8\pi^4\alpha}{l^3} y_4 + \frac{8}{3} m_* Uy_3 + u_2 \right]
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Запишем систему (3.2) в матричном виде

$$\dot{y} = Ay + Bu$$

Чтобы система (3.1) была управляема в окрестности положения равновесия $y = 0$, достаточно, чтобы $\text{rank}\{B, AB\} = 4$.

Так как при $l \neq 0$

$$\det\{B, AB\} = \frac{16l^4}{(\pi^2\beta + l^2m_0 + l^2m)(4\pi^2\beta + l^2m_0 + l^2m)} \neq 0,$$

то линейная система (3.2) управляема, а система (3.1) управляема в окрестности положения равновесия $y = 0$ (2.2). Следовательно, управления $u_1(t)$, $u_2(t)$ можно использовать для управления динамикой трубопровода за конечный промежуток времени.

4. Построение управлений

Рассмотрим задачу 1, которая эквивалентна задаче о построении стабилизирующего управления для нулевого решения системы (3.1). Нулевое решение $y = 0$ означает отсутствие деформации трубопровода в течение всего времени его эксплуатации. Найдём такие управляющие воздействия $u_1(y)$, $u_2(y)$ которые обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения в силу уравнений (3.1).

Поскольку система (3.1) с управлениями $u_1(y)$, $u_2(y)$ автономная, будем решать поставленную задачу путем построения функции Ляпунова, удовлетворяющей условиям теоремы Барбашина-Красовского [24] об асимптотической устойчивости.

Возьмем в качестве функции Ляпунова следующую функцию

$$V(y) = Ay_1^2 + \left(4A + \frac{4\pi^4 D}{l^3}\right) y_2^2 + By_3^2 + \left(B + \frac{3\pi^2 \beta}{2l}\right) y_4^2, \quad (4.1)$$

которая является бесконечно большой положительно определенной. Производная от функции (4.1) в силу системы (3.1) имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} = & (-2)y_3 \left[Cy_1^3 + 8Cy_1y_2^2 + \frac{2}{3} Ky_1y_2y_3 + \frac{1}{3} Ky_1^2y_4 - \frac{36}{7} Ky_2^2y_4 - \frac{\pi^4 \alpha}{2l^3} y_3 - \frac{8}{3} m_* Uy_4 + u_1(y) \right] - \\ & - 2y_4 \left[\left(16C - \frac{9\pi^6 D}{l^5}\right) y_2^3 + \left(8C - \frac{9\pi^6 D}{2l^5}\right) y_1^2y_2 + \frac{88}{21} Ky_1y_2y_4 + \right. \\ & \left. + \frac{44}{21} Ky_2^2y_3 + Ky_1^2y_3 + \frac{8\pi^4 \alpha}{l^3} y_4 + \frac{8}{3} m_* Uy_3 + u_2(y) \right]. \end{aligned}$$

Для того, чтобы производная $\dot{V}$ была отрицательно определенной, зададим следующие управляющие функции

$$\begin{aligned} u_1(y) &= \frac{36}{7} Ky_2^2y_4 + \frac{8}{3} m_* Uy_4 - \frac{1}{3} Ky_1^2y_4 - \frac{2}{3} Ky_1y_2y_3 - 8Cy_1y_2^2 - Cy_1^3 + \frac{15\pi^4 \alpha}{2l^3} y_3, \\ u_2(y) &= (-1)\frac{44}{21} Ky_2^2y_3 - \frac{8}{3} m_* Uy_3 - Ky_1^2y_3 - \frac{88}{21} Ky_1y_2y_4 - \left(8C - \frac{9\pi^6 D}{2l^5}\right) y_2^2y_2 - \\ &- \left(16C - \frac{9\pi^6 D}{l^5}\right) y_2^3. \end{aligned}$$

Тогда

$$\dot{V}(y) = -\frac{16\pi^4 \alpha}{l^3} (y_3^2 + y_4^2), \quad \dot{V}(y) \leq 0,$$

причем $\dot{V}(y) = 0$ на многообразии $G: y_3^2 + y_4^2 = 0$, $\dot{V}(y) < 0$ вне многообразия G .

По теореме Барбашина-Красовского [24] невозмущенное движение $y = 0$ будет асимптотически устойчиво в целом, если многообразие G не содержит целых траекторий системы (3.1), кроме $y = 0$. Проверим это непосредственной подстановкой управляющих функций $u_1(y)$, $u_2(y)$ и равенств $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, описывающих многообразие G , в систему (3.1). Имеем

$$\dot{y}_1 = 0, \quad \dot{y}_2 = 0, \quad \dot{y}_3 = \frac{(-A)}{B} y_1, \quad \dot{y}_4 = \frac{(-4)(2Al^3 + 3\pi^4 D)}{(2Bl + 3\pi^2 \beta)l^2} y_2. \quad (4.2)$$

Видим, что уравнения системы (4.2) не обращаются в тождества, следовательно, многообразие G не содержит целых траекторий системы 3.1. Точки траектории не могут бесконечно оставаться на многообразии G , поскольку $\dot{y}_3 \neq 0, \dot{y}_4 \neq 0$, кроме случая, когда $y = 0$.

Таким образом, управления $u_1(y)$, $u_2(y)$ обеспечивают асимптотическую устойчивость невозмущенного движения $y = 0$ системы (3.1).

Приведем результаты численного моделирования динамики трубопровода. В работах [9],[13] построены области динамической устойчивости и неустойчивости трубопровода при начальных условиях

$$w(x, 0) = 0.02 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \dot{w}(x, 0) = 0,$$

которые, согласно методу Галеркина, для системы (3.1) означают

$$y_1(0) = 0.02, \quad y_2(0) = 0, \quad y_3(0) = 0, \quad y_4(0) = 0.$$

Рассмотрим точку $U = 20, N = 1500$ из области неустойчивости колебаний, в которой происходит неограниченное возрастание амплитуды колебаний с течением времени [9],[13]. Использование построенных управлений $u_1(y)$, $u_2(y)$ для механической системы (3.1) при указанных значениях скорости потока и сжимающей силы позволяет достаточно быстро погасить возникшие колебания (рис.1-4). На рис. 1, 2 представлено поведение координат y_1, y_3 системы 3.1 под действием построенных управлений, при этом $y_2(t) \equiv 0, y_4(t) \equiv 0$, на рис. 3, 4 изображены графики функции $w(x, t)$ при $x = l/4$ и $x = l/2$. На рис. 5, 6 показаны управления $u_1(t) = u_1(y(t)), u_2(t) = u_2(y(t))$.

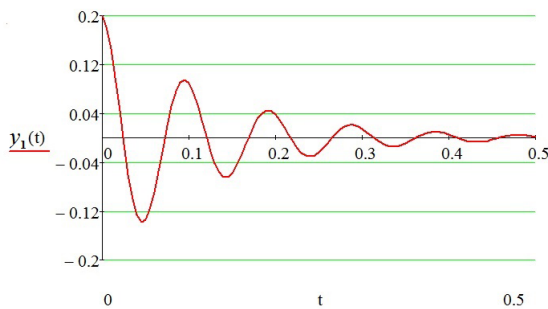


Рис. 1: Поведение $y_1(t)$.

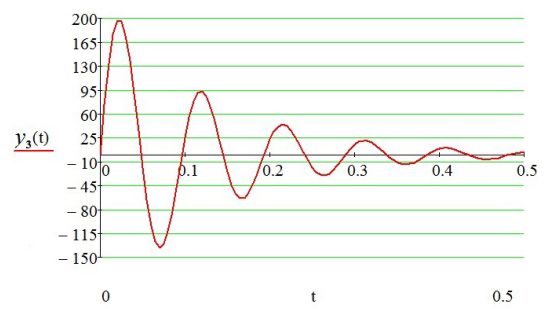


Рис. 2: Поведение $y_2(t)$.

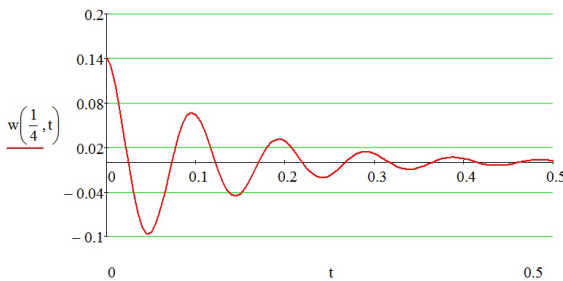


Рис. 3: Колебание точки $x = l/4$.

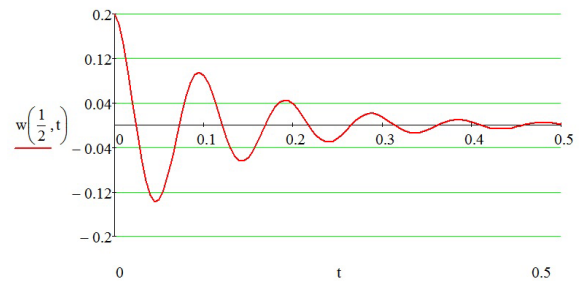


Рис. 4: Колебание точки $x = l/2$.

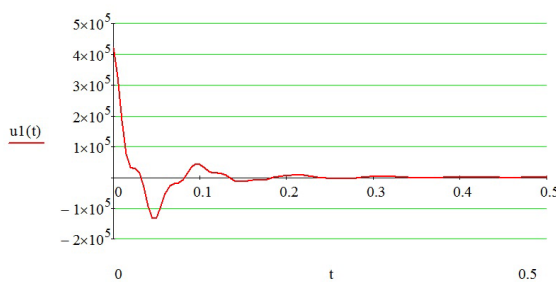


Рис. 5: Управление $u_1(t)$.

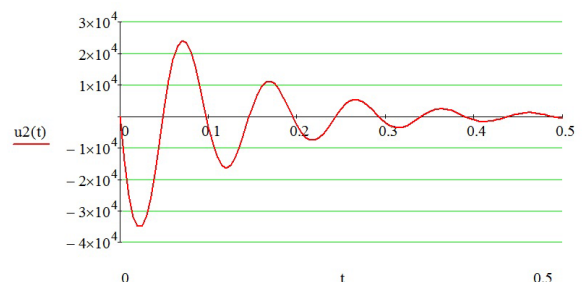


Рис. 6: Управление $u_2(t)$.

При построении управлений, решающих задачу 2, были выбраны следующие параметры механической системы: $E = 210 \cdot 10^9$ – модуль упругости стали; $\rho_* = 1000$ – плотность воды; $\rho_0 = 7000$ – плотность стали; $l = 1$; $R_* = 0,05$; $R_0 = 0,046$; $\alpha = 0,2$; $\beta = 0,5$.

Таким образом, в статье исследована на управляемость в окрестности положения равновесия система, описывающая динамику трубопровода. При помощи функции Ляпунова построены управления, обеспечивающие асимптотическую устойчивость колебаний трубопровода. Тем самым, показана возможность управления динамикой трубопровода с помощью внешних управляющих воздействий. Предложенная в статье методика построения стабилизирующих управлений может быть использована для других модельных уравнений, описывающих динамику трубопровода.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке грантов РФФИ № 15-01-08599, № 15-41-02455p_поволжье_a.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paidoussis M. P., “Задача о колебаниях трубопровода с протекающей жидкостью и ее связи с другими задачами прикладной механики”, *J. Sound and Vibr.*, **3**:310 (2008), С. 462-492.
2. Paidoussis M. P., “Issid N.T. Dymanic stability of piped conveying fluid”, *J. Sound and Vibr.*, **33** (1974), С. 267-294.
3. Vel'misov P. A., Garnefska L. V., Milusheva S. D., “Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики.”, *Rev. Mat. Estat., São Paulo, Brasil*, **19** (2011), С. 159-178.
4. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Корнеев А. В., *Исследование динамической устойчивости трубопровода. Материалы Всероссийской научной школы-конференции «Механика предельного состояния и смежные вопросы», посвященной 85-летию профессора Д.Д. Ивлева (Чебоксары, 15–18 сентября 2015 г.)*, ч. 2. Под редакцией Н.Ф. Морозова, Б.Г. Миронова, А.В. Манжирова, Ю.Н. Радаева., Чебоксары: Чуваш. гос. пед. ин-т, 2015, 270-275 с.
5. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Корнеев А. В., “Исследование динамической устойчивости трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий”, *Вестник Ульяновского государственного технического университета*, Ульяновск: УлГТУ, 2014, № 4, С. 29-36.
6. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, Ульяновск: УлГТУ, 2013, 322 с.
7. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., “О динамической устойчивости трубопровода”, *Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике: Тр. Международ. «Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007» (г. Ульяновск, 17–18 мая 2007 г.)*, **4**, Ульяновск: УлГТУ, 2007, 133-140.
8. Болотин В. В., *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, М.:Физматгиз, 1961, 339 с.

9. Вельмисов П. А., Корнеев А. В., Киреев С. В., “Исследование динамической устойчивости трубопровода.”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), С. 106-114.
10. Вельмисов П. А., Логинов Б. В., Милушева С. Д., “Исследование устойчивости трубопровода.”, *Приложение на математиката в техниката: Сб. доклади и научни съобщения. XXI национална школа.*, Болгария, Варна, 1995, С. 299-304.
11. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., “Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий”, *Вестник Ульяновского государственного технического университета*, Ульяновск: УлГТУ, 2004, № 4, С. 26-29.
12. Вельмисов П. А., Киреев С. В., *Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии.*, Ульяновск: УлГТУ, 2011, 200 с.
13. Вельмисов П. А., Корнеев А. В., “Математическое моделирование в задаче о динамической устойчивости трубопровода”, *Автоматизация процессов управления.*, **1**:39 (2015), С. 63-73.
14. Вельмисов П. А., Корнеев А. В., “О динамической устойчивости трубопровода”, *Проблемы математического и естественнонаучного образования, ред. А.И. Кириллов, С.А. Розанова. Сборник статей Международной конференции.*, Российский университет дружбы народов, М., 2015, С. 205-210.
15. Казакевич М. И., *Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов.*, М: Недра, 1977, 200 с.
16. Мовчан А./,А., “Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости”, *Прикладная математика и механика.*, **4** (1965), С. 760-962.
17. Сафина Г. Ф., “Исследование зависимостей частот колебаний участка трубопровода от характеристик жидкости.”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:4 (2014), С. 59-67.
18. Светлицкий В. А., *Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха.*, М: Машиностроение, 1982, 280 с.
19. Томпсон Дж. М. Т., *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: пер. с англ.*, М: Мир, 1985, 254 с.
20. Феодосьев В. И., *О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости*, Инж. сб., **10**, Изд-во АН СССР, 1951.
21. Челомей С. В., “О динамической устойчивости упругих систем”, *Докл. АН СССР. Серия «Механика»*, **252**:2 (1980), 307-310.
22. Гладун А. В., “Об относительной управляемости динамических систем по линейному приближению”, *Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины.*, **2**, 1998, 21-31.
23. Гладун А. В., “Управление вращательным движением твердого тела с помощью спарки гироидов”, *Вестник Ульяновского государственного технического университета.*, Ульяновск: УлГТУ, 2015, № 4, 49-52.

24. Барбашин Е. А., *Функции Ляпунова.*, М: Наука, 1970, 240 с.

On control of dynamic of a pipeline

© P. A. Velmisov³, A. V. Gladun⁴

Abstract. The problem of control of a mechanical system, which is a hollow elastic rod with a fluid or gas, flowing inside it (pipeline), is investigated. The feedback controls to provide the asymptotic stability of the pipeline vibrations are constructed. The results of numerical simulation of the behavior of the mechanical system under the action of constructed controls with given parameters are presented.

Key Words: elastic pipeline, dynamics, controllability, feedback control, Lyapunov function, partial differential equations, Galerkin method

³ Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

⁴ Associate Professor of the Department of Physical and Mathematical Sciences, Ulyanovsk Civil Aviation Institute named after Chief Marshal of Aviation B. P. Bugaev, Ulyanovsk; aleksygladun@gmail.com

УДК 517.958:544.034:615.011

Расчет коэффициента диффузии лекарственного вещества из трехмерной пленки хитозана

© А. О. Сыромясов¹, А. С. Шуршина²

Аннотация. Решается задача о вычислении коэффициента диффузии лекарственного вещества из хитозановой пленки, при этом учитывается, что все три пространственные измерения пленки конечны. Для большей согласованности с экспериментальными данными принята гипотеза, что коэффициент диффузии экспоненциально убывает с течением времени. Методом разделения переменных получено аналитическое решение прямой задачи; неизвестные величины найдены на его основе методом наименьших квадратов. Полученное приближение проверено численно в пакете ANSYS. Проведено сравнение коэффициентов диффузии, рассчитанных для одномерных и трехмерных пленок. Показано, что при переходе к трехмерной задаче коэффициент диффузии уменьшается по сравнению с одномерным случаем, однако качество приближения экспериментальных данных расчетными (сумма квадратов отклонений) при этом практически не изменяется.

Ключевые слова: диффузия, обратная задача, аналитическое решение, хитозан, пространственная пленка, метод наименьших квадратов

1. Введение

Одним из развивающихся направлений медицины является использование пропитанных лекарственным веществом (ЛВ) органических пленок для лечения ран. Для эффективного применения таких пластырей требуется знать скорость и время выделения ЛВ из пленки; эти параметры могут быть охарактеризованы коэффициентом диффузии D .

С целью определения диффузионных характеристик пластыря проводятся эксперименты, в ходе которых пленка пропитывается неким веществом и помещается в пробирку с водой, после чего концентрация c пропитывающего пленку вещества измеряется в различные моменты времени [1, 2, 3].

Общий подход к вычислению искомого коэффициента состоит в следующем. Записывают уравнение диффузии относительно неизвестной функции c с некоторыми начальными и граничными условиями, решают его аналитически или численно, после чего рассчитывают c в заданные моменты времени. Значение D подбирается так, чтобы расчетные значения концентрации были в некоем смысле близки к экспериментальным [4, 5].

Поскольку толщина лекарственной пленки многократно меньше ее длины и ширины, в упомянутых выше статьях предполагалось, что два последних измерения бесконечны. Такое допущение приводит к уравнению с одной пространственной переменной и позволяет существенно упростить решение прямой и обратной задач диффузии. В реальности же длина и ширина пластыря хотя и сравнительно велики, но конечны. В связи с этим представляют интерес следующие вопросы:

1. Как изменится значение коэффициента диффузии по сравнению с одномерным случаем, если принять во внимание конечные размеры пленки?
2. Насколько сильно учет конечности размеров пленки повлияет на значение Q^2 ?

¹ Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск, syall@yandex.ru

² Старший преподаватель кафедры высокомолекулярных соединений и общей химической технологии, Башкирский государственный университет, г. Уфа, anzhela_murzagil@mail.ru

Авторы данной статьи предполагают разрешить обе эти проблемы.

2. Постановка обратной задачи диффузии из трехмерной пленки

Будем моделировать пластырь прямым прямоугольным параллелепипедом толщины $2l_x$. Длина и ширина пластыря равны $2l_y$ и $2l_z$, соответственно. Для удобства введем прямоугольную систему координат $Oxyz$ с началом в центре параллелепипеда и осями, направленными параллельно его ребрам. Тогда пленка описывается системой неравенств

$$|x| \leq l_x, |y| \leq l_y, |z| \leq l_z. \quad (2.1)$$

Неизвестная концентрация лекарственного вещества есть функция времени t и трех пространственных координат: $c = c(t, x, y, z)$, удовлетворяющая уравнению диффузии

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \operatorname{div}(D \cdot \operatorname{grad} c). \quad (2.2)$$

Предполагается, что в начальный момент времени ЛВ распределено по объему пленки равномерно и его начальная концентрация равна c_0 во всех внутренних точках параллелепипеда (2.1):

$$c(0, x, y, z) = c_0. \quad (2.3)$$

На границе параллелепипеда концентрация вещества в произвольный момент времени равна нулю:

$$\begin{aligned} c(t, \pm l_x, y, z) &= 0, |y| \leq l_y, |z| \leq l_z; \\ c(t, x, \pm l_y, z) &= 0, |x| \leq l_x, |z| \leq l_z; \\ c(t, x, y, \pm l_z) &= 0, |x| \leq l_x, |y| \leq l_y. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Задачу (2.2)–(2.4) по определению концентрации c в функции времени и координат при известном коэффициенте D будем называть *прямой задачей диффузии*. Однако требуется решить *обратную задачу* – определить D по результатам наблюдений, прямо или косвенно описывающих функцию c , удовлетворяющую (2.2)–(2.4).

В опытах [1, 2, 3] с пленками на хитозановой основе наблюдаемой величиной служит средняя по объему пленки концентрация ЛВ:

$$\langle c \rangle(t) = \frac{1}{8l_x l_y l_z} \int_{-l_x}^{l_x} \int_{-l_y}^{l_y} \int_{-l_z}^{l_z} c(t, x, y, z) dx dy dz. \quad (2.5)$$

Толщина пластыря в этих опытах составляла $2l_x = 0.1$ мм, а длина и ширина были больше толщины в $L = 50$ раз.

Типичный пример экспериментальных данных приведен в табл. 1, которая содержит результаты измерений $\langle c \rangle(t)$ в пленке, изначально содержащей 0.01 моль амикацина на 1 моль хитозана и подвергнутой предварительной термообработке в течение 30 минут. Значение $\langle c \rangle(0)$, равное c_0 , принято за 1.

Результаты указанных экспериментов свидетельствуют, что с течением времени средняя концентрация не снижается до нуля; напротив, существует предел

$$c_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle c \rangle(t). \quad (2.6)$$

Например, табл. 1 показывает, что за последние 24 часа эксперимента $\langle c \rangle$ не изменилась.

Время от начала опыта, ч	$\langle c \rangle$
0.0	1.0000
0.5	0.9512
1.0	0.7024
2.0	0.6829
3.0	0.6585
4.0	0.6098
5.0	0.5463
24.0	0.3854
48.0	0.2780
96.0	0.1951
168.0	0.0976
192.0	0.0585
216.0	0.0585

Таблица 1: Зависимость средней концентрации ЛВ в пленке хитозан–амикацин от времени

Объяснением этого явления может служить то, что коэффициент диффузии не остается постоянным, а с течением времени падает до нуля. При этом скорость выделения вещества с поверхности пленки также становится нулевой, а значит, часть лекарства остается внутри пластыря, как это и следует из (2.6). Для описания зависимости D от времени примем гипотезу

$$D(t) = D_0 e^{-t/t_0}, \quad (2.7)$$

где D_0 и t_0 – неизвестные константы. Именно эти величины и будут служить решением обратной задачи.

3. Определение искомых параметров на основе аналитического решения прямой задачи диффузии

Общий подход к решению поставленной задачи был ранее апробирован в [6].

Поскольку параллелепипед (2.1) симметричен относительно всех координатных плоскостей, функция $c(t, x, y, z)$ четна по каждой из пространственных координат. Принимая во внимание это соображение, уравнение (2.2) с условиями (2.3) и (2.4) легко решить с помощью разделения переменных [7]:

$$c(t, x, y, z) = 8c_0 g(t, l_x, x) g(t, l_y, y) g(t, l_z, z). \quad (3.1)$$

Здесь

$$g(t, l, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Lambda_n} \exp \left[-\frac{\Lambda_n^2}{l^2} D_0 t_0 \left(1 - e^{-t/t_0} \right) \right] \cos \left(\Lambda_n \frac{\xi}{l} \right); \quad (3.2)$$

числа Λ_n задаются формулой

$$\Lambda_n = \frac{\pi}{2} + \pi n.$$

Средняя концентрация ЛВ, найденная подстановкой (3.1) и (3.2) в (2.5), равна

$$\langle c \rangle(t) = 8c_0 f(t, l_x) f(t, l_y) f(t, l_z), \quad (3.3)$$

где

$$f(t, l) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l g(t, l, \xi) d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_n^2} \exp \left[-\frac{\Lambda_n^2}{l^2} D_0 t_0 (1 - e^{-t/t_0}) \right]. \quad (3.4)$$

Легко показать, что в случае произвольной зависимости D от времени t достаточно в формулах (3.2) и (3.4) заменить показатель экспоненты на

$$-\frac{\Lambda_n^2}{l^2} \int_0^t D(s) ds.$$

Понятно также, что при конкретных вычислениях бесконечные пределы суммирования в этих формулах следует заменить достаточно большими, но конечными пределами.

Зная общие выражения для средней концентрации, параметры D_0 и t_0 можно найти следующим образом.

В (3.3) производится переход $t \rightarrow \infty$. Значение функции $f(\infty, l)$ зависит от произведения $K_0 = D_0 t_0$, что позволяет подставить выражение $8c_0 f(\infty, l_x) f(\infty, l_y) f(\infty, l_z)$ в (2.6), приравнять его к c_∞ и приближенно решить полученное нелинейное уравнение относительно K_0 . В качестве c_∞ при этом берется измеренное значение $\langle c \rangle$, соответствующее наибольшему значению времени $t_{\max}$, достигнутому в ходе опыта.

После того, как величина K_0 найдена, можно выразить, например, D_0 через t_0 , после чего функции вида (3.4) будут зависеть лишь от одного из неизвестных параметров. Для его вычисления достаточно применить метод наименьших квадратов к функции (3.3) для набора исходных данных того же вида, что продемонстрирован в табл. 1.

Изложенный алгоритм был реализован в специализированном пакете Mathematica [8]. Вычисления были проделаны для 11 пленок, которые отличаются содержащимся в них лекарственным веществом (амикацин или цефазолин), мольной долей ЛВ, а также временем предварительной термообработки t_{therm} . Для удобства вычислений данные были обезразмерены: координаты – на толщину пленки (т.е. считалось, что $2l_x = 1$), время – на величину $t_{\max}$. Как уже было отмечено ранее, начальная концентрация c_0 лекарственного вещества в пленке была принята за 1.

Отдельно остановимся на определении верхних конечных пределов суммирования при вычислении функций вида (3.4). Пусть N_x , N_y и N_z – искомые пределы суммирования в выражениях для $f(t, l_x)$, $f(t, l_y)$ и $f(t, l_z)$ соответственно. Логично предположить, что наименьшие слагаемые в этих выражениях должны иметь одинаковый порядок. Тогда, учитывая соотношение

$$\frac{l_y}{l_x} = \frac{l_z}{l_x} = L,$$

получим, что $N_y = N_z = L N_x$. Остается определить N_x . Предположим, что это число достаточно велико, а $\exp(-t/t_0) \ll 1$ (расчеты показывают, что $t_0 \ll 1$, а значит, эта гипотеза оправдана). Принимая во внимания известную зависимость Λ_n от индекса n , оценим остаточный член R_x ряда (3.4):

$$R_x = \sum_{n=N_x+1}^{\infty} \frac{1}{\Lambda_n^2} \exp \left[-\frac{\Lambda_n^2}{l_x^2} D_0 t_0 (1 - e^{-t/t_0}) \right] \leq \int_{N_x}^{\infty} \frac{1}{(\pi x)^2} \exp[-M(\pi x)^2] dx \approx \frac{\exp(-M\pi^2 N_x^2)}{2M\pi^4 N_x^3}.$$

Здесь $M = D_0 t_0 / l_x^2$. Пусть $N_x = 50$, тогда при $M > 0.001$ величина $R_x < 8 \cdot 10^{-16}$, что является вполне удовлетворительной точностью. Результаты расчетов свидетельствуют, что ограничение $M > 0.001$ выполняется для всех изученных хитозановых пленок. Следовательно, значение $N_x = 50$ и соответствующие ему пределы $N_y = N_z = 2500$ достаточны для обеспечения приемлемой точности.

4. Численная проверка решения

Чтобы проверить результат, полученный вышеописанным методом, диффузия ЛВ из пленки, описанной в табл. 1, была смоделирована в конечно-элементном пакете ANSYS [9]. Для этой пленки безразмерные значения D_0 и t_0 составили 1.14592 и 0.228243, а размерные – $1.47366 \cdot 10^{-14}$ м²/с и 177481.76 с (49.3 ч), соответственно.

Была создана геометрическая модель пленки (тела) в натуральную величину: $5 \times 5 \times 0.1$ мм. Для вычислений использовался тип анализа *Transient Thermal*, где роль концентрации c играла температура тела T . Данный выбор обусловлен аналогией между уравнениями диффузии и теплопроводности. Роль D в последнем уравнении играет отношение $\kappa/(\alpha\rho)$, где κ – теплопроводность, α – удельная теплоемкость, ρ – плотность материала. В память системы были введены α и ρ , численно равные 1, и κ , численно равная размерному значению D_0 . В соответствии с условием $c_0 = 1$, начальная температура тела считалась равной 1°C , поверхность тела поддерживалась при нулевой температуре.

Общая идея состояла в том, чтобы вычислить средние значения T в контрольные моменты времени и сравнить их с экспериментальными и расчетными значениями $\langle c \rangle$.

При проведении вычислений и анализе их результатов возникли следующие трудности:

1. При выбранном типе анализа система не позволяет описать характеристики материала, явно зависящие от времени. Тем самым, невозможно непосредственно использовать в расчетах выражение (2.7).
2. В документации пакета не удалось найти упоминания о вычислении среднего по объему значения величины в *Transient Thermal*-анализе. ANSYS позволяет выгрузить в таблицу Excel значения, найденные в каждом узле расчетной сетки. Но эта сетка формируется из элементов, содержащих узлы как в вершинах, так и в центрах ребер (например, SOLID90). Поэтому приближенно найти $\langle T \rangle$, вычислив среднее арифметическое значений величины в узлах, не представляется возможным.

Первая из упомянутых проблем была решена с помощью замены переменной. Положим

$$\tau(t) = t_0 \left(1 - e^{-t/t_0} \right),$$

так что $\tau(0) = 0$, тогда уравнение (2.2) приводится к виду

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} = \text{div}(D_0 \cdot \text{grad } c),$$

где D_0 уже не зависит от времени. Начальные и граничные условия при этом не меняются. При более общем характере зависимости $D(t)$ можно применить замену

$$\tau(t) = \int_0^t D(s) ds.$$

Теперь величина c должна вычисляться при τ , отвечающих контрольным значениям t .

Для преодоления второй трудности использовался такой инструмент, как вычисление величины (в данном случае температуры или концентрации) вдоль отрезка некоторой линии. Результат этого расчета также можно выгрузить в файл XLS. Проблемы усреднения при этом не возникает, поскольку вычисленные значения запоминаются не в узлах сетки, а в специально выбранных точках, лежащих на указанной линии.

Более конкретно, значения c (или T) усреднялись по отрезку, лежащему на оси абсцисс: $|x| \leq l_x$, $y = z = 0$. Обозначим через c_x функцию, описывающую распределение ЛВ на этом отрезке. Заменяя переменную t на τ , получим

$$\langle c_x \rangle(\tau) = \frac{1}{2l_x} \int_{-l_x}^{l_x} c(t(\tau), x, 0, 0) dx = f_\tau(\tau, l_x) g_\tau(\tau, l_y, 0) g_\tau(\tau, l_z, 0).$$

Здесь

$$g_\tau(\tau, l, \xi) = g(t(\tau), l, \xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\Lambda_n} \exp\left(-\frac{\Lambda_n^2}{l^2} D_0 \tau\right) \cos\left(\Lambda_n \frac{\xi}{l}\right),$$

Аналогично, $f_\tau(\tau, l) = f(t(\tau), l)$. Сравнивая эти выражения с (3.3)–(3.4), найдем

$$\langle c \rangle(t(\tau)) = \langle c_x \rangle(\tau) \frac{f_\tau(\tau, l_y) f_\tau(\tau, l_z)}{g_\tau(\tau, l_y, 0) g_\tau(\tau, l_z, 0)}. \quad (4.1)$$

Как было сказано ранее, множитель $\langle c_x \rangle(\tau)$ в правой части (4.1) находится непосредственно по результатам расчетов в ANSYS. Следующий множитель (дробь) есть поправочный коэффициент, который можно вычислить, например, в Mathematica. Он позволяет связать результаты приближенных вычислений с данными аналитических расчетов, произведенных при уже известных D_0 и t_0 . Тем самым, (4.1) может использоваться для проверки точности нахождения указанных параметров.

Расчеты в ANSYS были проведены на вычислительном кластере факультета математики и информационных технологий МГУ им. Н. П. Огарева. Для сокращения количества узлов сетки в расчетах рассматривалась лишь восьмая часть (первый октант) исходной пленки, для которой x, y, z неотрицательны. На вновь образованных границах $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, вследствие симметрии пленки, ставились условия нулевого потока тепла (или вещества). Была сгенерирована равномерная гексагональная сетка с шагами $\Delta x = \Delta y = \Delta z = l_x/10$, шаг по переменной τ составил 180 с.

В итоге сумма квадратов отклонений величины (3.3) от (4.1) в контрольные моменты времени оказалась равной $2.17 \cdot 10^{-6}$. Суммы квадратов отклонений двух указанных величин от концентраций ЛВ, измеренных в ходе опыта, составили 0.0786215 и 0.0800051. Эти данные показывают хорошее согласование результатов численных и аналитических расчетов, а значит, доказывают корректность применяемого аналитического подхода.

5. Сравнение результатов решения для трехмерной и одномерной пленок

Интересно выяснить, как учет геометрии пленки влияет на значения параметров D_0 и t_0 в формуле (2.7). Для этого наряду с расчетами, основанными на формулах (3.3)–(3.4), были проведены расчеты для одномерных пленок, у которых функция $\langle c \rangle$ не зависит от y и z . Такие пленки описываются неравенством $|x| \leq l_x$; соответствующая математическая модель была исследована в [6].

В таблицах 2 и 3 приведены безразмерные значения искомых величин, вычисленные для одномерных (1D) и трехмерных (3D) пленок на основе одних и тех же опытных значений $\langle c \rangle$. Величина Q^2 представляет собой сумму квадратов отклонений вычисленных значений средней концентрации (при известных D_0 и t_0) от измеренных.

Сравнение позволяет сделать следующие выводы.

Доля ЛВ	t_{therm} , мин	t_{max} , ч	D_0 , 1D	t_0 , 1D	Q^2 , 1D	D_0 , 3D	t_0 , 3D	Q^2 , 3D
0.01:1	30	216	1.20373	0.22121	0.08140	1.14592	0.22824	0.07862
0.01:1	60	216	0.89026	0.24097	0.09884	0.84889	0.24772	0.09559
0.01:1	120	240	1.17585	0.14750	0.06564	1.11727	0.15183	0.06359
0.05:1	30	216	1.66008	0.08759	0.05274	1.56585	0.09064	0.05132
0.1:1	0	216	1.29869	0.14047	0.13624	1.23332	0.14475	0.13190
0.1:1	30	288	1.57970	0.06363	0.08439	1.48540	0.06573	0.08303

Таблица 2: Результаты расчетов для пленок, содержащих ЛВ амикацин

Доля ЛВ	t_{therm} , мин	t_{max} , ч	D_0 , 1D	t_0 , 1D	Q^2 , 1D	D_0 , 3D	t_0 , 3D	Q^2 , 3D
0.01:1	30	192	17.0795	0.01893	0.03776	16.45050	0.01934	0.03818
0.01:1	60	192	10.9500	0.02312	0.02515	10.54080	0.02357	0.02431
0.01:1	120	192	14.4662	0.01466	0.07152	13.87940	0.01497	0.07013
0.05:1	30	192	13.0866	0.02147	0.05740	12.56880	0.02197	0.05632
0.1:1	30	192	8.16273	0.02716	0.09400	7.82319	0.02779	0.09154

Таблица 3: Результаты расчетов для пленок, содержащих ЛВ цефазолин

Во-первых, переход от одномерной задачи к трехмерной ведет к уменьшению параметра D_0 на 4 – 6% и к увеличению t_0 примерно на 3%. Такое изменение D_0 легко объяснимо. Поскольку коэффициент диффузии “отвечает” за скорость протекания вещества через единицу площади, то D_0 характеризует данную скорость в начальный момент времени, когда ЛВ распределено по объему пластыря равномерно. В этот момент скорость диффузии ЛВ через всю поверхность пленки пропорциональна ее площади. Учет диффузии через узкие боковые грани параллелепипеда (2.1) ведет к увеличению этой площади с $2l_y l_z = 50$ мм² до $2(l_x l_y + l_x l_z + l_y l_z) = 52$ мм², т.е. на 4%. В связи с тем, что наборы экспериментальных значений $\langle c \rangle(t)$, на основании которых вычисляются D_0 и t_0 , одинаковы для одномерной и трехмерной задач, суммарная скорость диффузии должна оставаться неизменной. Поэтому увеличение площади поверхности автоматически должно вести к уменьшению коэффициента диффузии.

Во-вторых, переход от одномерной постановки задачи к трехмерной ведет к весьма незначительному уменьшению величины Q^2 , т.е. оценки D_0 и t_0 , полученные для разных геометрий задачи, примерно одинаково точны. Указанный факт объясняется тем, что одни и те же наборы экспериментальных данных применялись для нахождения неизвестных величин в двух *разных* задачах: о диффузии, происходящей в одном направлении (вдоль оси x) или в трех взаимно перпендикулярных направлениях. В данном случае вопрос заключается не в том, какое решение более точно, а в том, какая задача более точно сформулирована. В этом смысле модель диффузии в трех направлениях представляется более адекватной: решение (3.1)–(3.4) не содержит никаких ограничений и дополнительных предположений касательно размеров пленки.

6. Заключение

В статье исследована диффузия ЛВ из трехмерной пленки (пластыря) с коэффициентом диффузии D , зависящим от времени t , и получено аналитическое решение прямой задачи диффузии. На его основе предложен способ определения параметров зависимости $D(t)$, использующий метод наименьших квадратов, а также информацию о поведении

средней концентрации ЛВ при $t \rightarrow \infty$. Этим способом определены искомые параметры хитозановых пленок, пропитанных веществами на основе амикацина и цефазолина.

Было проведено две серии вычислений. В одной из них учитывалось, что концентрация ЛВ зависит от трех пространственных переменных, а диффузия вещества в окружающую среду происходит как с двух широких граней, так и с узких торцов пластыря. В другой серии предполагалось, что ЛВ распределено лишь по толщине пластыря, а его торцы фактически считались изолированными. По итогам расчетов первой серии скорость выделения вещества с единицы площади оказалась несколько ниже, чем в расчетах второй серии. Этот факт в значительной степени компенсируется тем обстоятельством, что в первой серии вычислений увеличивается площадь поверхности, с которой происходит выделение ЛВ. Отклонения результатов обработки математической модели от опытных данных в двух указанных сериях практически не отличаются друг от друга. Отсюда следует, что выбор той или иной геометрии задачи при моделировании диффузии не оказывает прямого влияния на погрешность.

В статье рассмотрены также проблемы численного моделирования процесса диффузии в конечно-элементном пакете ANSYS. К таким проблемам относятся невозможность непосредственного задания характеристик материала, зависящих от времени, и трудности осреднения результатов расчета по объему пленки. Предложены способы преодоления этих трудностей. Итоги вычислений в данном пакете подтверждают корректность результатов, полученных при решении обратной задачи диффузии описанным в статье методом.

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Особенности сорбции паров воды хитозановыми лекарственными пленками”, *Журнал прикладной химии*, **86**:10 (2013), 1583–1590.
2. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Особенности транспортных свойств лекарственных хитозановых пленок”, *Высокомолекулярные соединения. Серия А*, **56**:3 (2014), 282–288.
3. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Транспортные свойства пленок хитозан – амикацин”, *Химическая физика*, **33**:8 (2014), 76–84.
4. Карамутдинова Г. Р., Губайдуллин И. М., Коледина К. Ф., Кулиш Е. И., Ильчибаева А. К., “Математическое описание процесса диффузии в пленке хитозана”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:4 (2015), 87–95.
5. Губайдуллин И. М., Жалнин Р. В., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф., Шуршина А. С., “Применение разрывного метода Галеркина для решения обратной задачи диффузии лекарственных веществ из хитозановых пленок”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:2 (2016), 94–105.
6. Сыромясов А. О., “Решение обратной задачи одномерной диффузии лекарственного вещества из хитозановой пленки”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **18**:1 (2016), 108–117.
7. Crank J., *The mathematics of diffusion*, 2nd ed., Clarendon Press, Oxford, 1975, 414 с.

8. *Официальный сайт компании Wolfram Research*, <http://www.wolfram.com/>.
9. *ANSYS Customer Portal*, https://support.ansys.com/AnsysCustomerPortal/en_us.

Calculation of medicine diffusion coefficient out of three-dimensional chitosan film

© A. O. Syromyasov³, A. S. Shurshina⁴

Abstract. The diffusion coefficient of medicine out of chitosan film with finite dimensions is calculated. To fit the experimental data it is assumed that the diffusion coefficient is exponentially decreasing function of time. Analytical solution of direct problem is obtained by variables separation. Based on it, unknown values describing diffusion are found by least-squares method. The calculated fit is tested numerically by using ANSYS package. The comparison between diffusion coefficients for one-dimensional and three-dimensional films is made. It is shown that for three-dimensional film diffusion coefficient decreases compared with one-dimensional film, but the quality of fit stays almost unchanged for films with different numbers of dimensions.

Key Words: diffusion, inverse problem, analytical solution, chitosan, three-dimensional film, least-squares method

³ Associate professor, Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University, Saransk, syall@yandex.ru

⁴ Senior teacher, Department of High-Molecular Compounds and General Chemical Technology, Bashkir State University, Ufa, anzhela_murzagil@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

УДК 519.865.5, 519.254

Математическая модель оценки производственных фондов малого предпринимательства

© В. К. Горбунов¹, А. Г. Львов²

Аннотация. Производственные фонды малого предпринимательства (МП) не имеют формального определения и не являются показателем отчётности. Предлагается определение стоимости таких фондов в рамках метода построения «капитальных» производственных функций (ПФ) по данным о производственных инвестициях (показатель отчётности МП), затратах других факторов и выпуске продукции (В.К. Горбунов и А.Г. Львов, 2012). В этом методе в эконометрическую систему оценивания параметров ПФ вводится уравнение динамики «эффективных фондов» на промежутке наблюдения объекта. Начальное значение эффективных фондов является оцениваемым параметром вместе с параметрами используемой ПФ. Задача одновременной оценки этих параметров является плохо обусловленной (некорректно поставленной). Её регуляризация обеспечивается введением дополнительной связи на начальное и конечное значения эффективных фондов. Приводится пример оценки производственных фондов МП Приволжского федерального округа.

Ключевые слова: производственные функции, динамика производственных фондов, эффективные фонды, малое предпринимательство, оценивание параметров, плохая обусловленность, регуляризация

1. Введение

Производственные фонды являются одним из основных факторов экономического развития страны, её регионов и отраслей. Количественный показатель разнотипных производственных фондов, находящихся на балансе предприятий, кроме малых предприятий³, выражается их стоимостью и отражается экономической статистикой. Для малого предпринимательства (МП) в качестве производственных фондов часто используются помещения, машины и оборудование личного пользования, поэтому показатель «производственные фонды» здесь не является показателем отчётности и контроля, но производственные инвестиции частных предпринимателей учитываются и поощряются налоговой политикой. Таким образом, возникает проблема косвенной оценки стоимости производственных фондов МП как специфического сектора экономики. Важность этой проблемы определяется существенной и непрерывно возрастающей долей этого сектора в экономике многих стран, в том числе и в России. Однако нам не известны методики оценок стоимости производственных фондов МП, отражаемые в научной и учебной литературе.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-06-00372.

¹ Профессор кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; vkgorbunov@mail.ru

² Доцент кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; aglvov@mail.ru

³ В соответствии с законодательством РФ [3] к малым предприятиям относятся индивидуальные предприниматели и предприятия численностью до ста человек с предельной годовой выручкой 800 млн. руб. (до 1.08.2016 – 400 млн. руб.).

Следует отметить, что балансовая стоимость производственных фондов в остальных секторах экономики обычно плохо представляет реальный производственный потенциал из-за известных сложностей стоимостной оценки различных компонент фондов, совпадающих по формальным характеристикам, но имеющих различные сроки эксплуатации и фактические технические характеристики. Кроме того, в экономике, ориентирующейся на изменчивый рыночный спрос, часто не все балансовые фонды работают в полной мере. Это особенно актуально для России после прошедшей в 1990-е годы деиндустриализации [1], [2].

Эффективность оценки реального производственного потенциала может быть повышена на основе анализа производственных инвестиций. Этот показатель отражается в отчётности всех предприятий, в том числе относящихся и к сектору МП. Производственные инвестиции формируют производственные фонды и могут использоваться для косвенной оценки последних. Такая оценка оказывается возможной в рамках метода производственных функции (ПФ), отражающего рациональность (предполагаемую в экономической теории) использования производственных факторов для выпуска продукции в соответствии с рыночным спросом [4], [5], [6], [7]. Эта возможность была реализована в работах [8], [9], [10].

Производственные функции определяют зависимость *валового выпуска* моделируемого объекта от основных производственных факторов, к которым, как правило, относятся производственные фонды, называемые в экономической теории *капиталом*, и *труд*, как это было сделано в указанной пионерской работе американских исследователей Чарлза Кобба и Пола Дугласа⁴. Однако отмеченная выше проблема оценки стоимости производственных фондов, тем более фондов, реально участвующих в производстве продукции, часто делает предположение рациональности использования *балансовых фондов* не соответствующим реальности. Эти трудности стимулировали формальную (без изменения спецификации ПФ) замену некоторыми исследователями фактора «капитал», представляющего запас производственных фондов, на показатель производственных инвестиций, имеющий смысл потока [11], [12]. Соответствующие производственные функции называются *инвестиционными*. Замена показателя запаса капитала на поток инвестиций оправдывается тем, что инвестиции, в отличие от балансовых фондов, определяются текущей рыночной конъюнктурой и, по мере освоения, реализуются в виде новых фондов, реально производящих продукцию. К недостаткам такой замены относится то, что при обнулении любого фактора стандартной ПФ её значение становится нулём. Соответственно, при отсутствии инвестиций на некотором периоде продукция, согласно модели ПФ, не выпускается, несмотря на ненулевой запас капитала⁵.

В работе Воскобойникова И.Б. [1] в целях более адекватного представления производственного потенциала использовано понятие *эффективных основных фондов*, представляющих ту часть балансовых фондов, которые реально участвуют в выпуске продукции. Метод автора оценки динамики эффективных фондов основан на предположении о постоянстве срока службы оборудования на исследуемом интервале и использовании оценок ожидаемых сроков службы. Такие оценки могут быть лишь весьма условными. Соответственно, они будут субъективными.

В наших работах [8], [9] предложен метод построения «капитальных» ПФ по информации о производственных инвестициях вместо информации о балансовых фондах. При

⁴ Производственная функция в [4] определена для индексов данных показателей обрабатывающих отраслей (manufacturing) США относительно начального состояния периода наблюдений 1899-1922 гг.

⁵ В работе [13] также анализируется некорректное применение в некоторых российских публикациях метода «пространственной регрессии», вместо регрессии по временным рядам, для построения универсальной инвестиционной ПФ (Кобба-Дугласа) сектора МП абстрактного региона России.

этом на периоде наблюдения реконструируется динамика не балансовых фондов, а фондов, объясняющих в рамках теории ПФ реальный выпуск, наблюдаемый на промежутке идентификации. Такие фонды также можно называть эффективными, но они определяются на более объективной основе. Это было продемонстрировано на реальных данных экономики России.

Усложнение содержательной проблемы математического моделирования производства с помощью производственной функции, основной аргумент которой – капитал – не наблюдается непосредственно, а реконструируется, усложняет и задачу идентификации модели. Здесь одновременно с оценкой параметров используемой капитальной ПФ также оценивается начальное значение стоимости эффективных фондов. Соответствующая задача метода наименьших квадратов (МНК) одновременного (комплексного) оценивания расширенного набора параметров в общем случае является плохо обусловленной (некорректно поставленной) задачей нелинейного программирования. Она требует использования эффективных методов оптимизации, а также регуляризации на основе дополнительной содержательной (экспертной) информации. В [8], [9] был предложен специальный вариант известного итеративного *метода продолжения* [14] (*Continuation Method* [15]) для решения систем нелинейных уравнений.

Возможность определения и количественной оценки эффективных фондов по информации о производственных инвестициях в рамках математической модели [8] создаёт предпосылки введения показателя «эффективные производственные фонд» (ЭПФ) для всей экономики страны или региона, а также её отраслей, включая малое предпринимательство. В работе [10] эта модель и вычислительная технология получили дальнейшее развитие. В уравнение динамики фондов введён дополнительно *коэффициент реализуемости инвестиций*, представляющий долю реального использования выделенных производственных инвестиций (после коррупционного присвоения части инвестиций). В качестве дополнительного средства преодоления вычислительной сложности задач МНК был использован переход к *индексным* ПФ с последующим восстановлением параметров функций в абсолютных формах (относительно абсолютных значений переменных), описанный в [7]. Новая технология макроэкономического анализа была апробирована на данных двух регионов – Приволжского и Уральского федеральных округов с использованием нескольких классов двухфакторных ПФ. В качестве второго фактора были рассмотрены альтернативно труд и потребление энергии.

Распространение понятия ЭПФ и метода оценки этого экономического показателя на малое предпринимательство позволяет использовать метод ПФ для анализа этого сектора в традиционном варианте, когда в качестве основного фактора используются не производственные инвестиции, учитываемые официальной статистикой, а накапливаемая стоимость ЭПФ. Этому посвящена данная статья.

Из зарубежных исследований нам известна близкая в алгоритмическом отношении работа М. Doms [16], в которой для построения ПФ по данным об инвестициях (с одновременной оценкой коэффициентов амортизации) применён панельный МНК для группы сталелитейных заводов, использующих одинаковую технологию. Недавняя монография S.T. Naskman [17], охватывающая широкий круг экономико-математического анализа реальных производственных проблем методом ПФ, работ по оценке эффективного капитала не отражает.

Далее изложено развитие метода комплексной оценки параметров «капитальной» ПФ одновременно с оценкой динамики эффективных фондов, заключающееся во введении дополнительного условия смешанного типа на начальное и конечное значения оцениваемых ЭПФ, а также результаты его применения для отрасли консолидированного малого предпринимательства Приволжского федерального округа (ПФО).

2. Производственные функции в абсолютной и индексной формах

Производственные функции являются математическими моделями типа *чёрного ящика* [7] достаточно крупных производственных объектов (фирма, отрасль, регион). Таким объектом может быть *совокупность малых предприятий* некоторого территориального образования. Производственные функции описывают сложный объект упрощённо на основе выделения его наиболее существенных (для конкретного исследования) показателей затрат, имеющих количественные меры, и установления конкретной функциональной связи, которая, по предположению, существует между затратами и выпуском.

Далее рассматриваются стационарные двухфакторные капитальные ПФ различных параметрических классов

$$Y = F(K, L; w), \quad (2.1)$$

где валовой выпуск моделируемого производственного объекта Y за отчётную единицу времени (обычно год) определяется уровнем использования эффективных фондов (эффективного капитала) K и труда L и переменная $w = (w_1, \dots, w_p)$ представляет вектор параметров соответствующего класса ПФ, выбираемый из некоторого множества $W \subseteq \mathbb{R}^p$ пространства параметров данного класса функций. Основные переменные (Y, K, L) по смыслу производственной функции (2.1) неотрицательные.

Инвестиционные ПФ, используемые некоторыми авторами, в частности, для математического моделирования малого предпринимательства [12], [13], отличаются от капитальных (2.1) простой заменой капитальной переменной K на переменную инвестиций I . Такие функции лучше отражают рыночную конъюнктуру, чем капитальные (2.1), если последние используют в качестве K балансовые фонды, но они не могут решить рассматриваемую здесь задачу оценки производственных фондов МП.

При рассмотрении теоретических вопросов зависимость ПФ от параметров не выделяется: $Y = F(K, L)$. В записи (2.1) предполагается, что основные переменные (Y, K, L) имеют размерности: валовой выпуск Y и фонды K измеряются стоимостью и затраты труда L – стоимостью, временем или численностью. Производственные функции (2.1) с содержательно измеренными переменными будем называть ПФ в *абсолютной форме*.

В соответствии с современными представлениями о рациональности производства, производственная функция $F(K, L)$ должна быть монотонно *возрастающей и квазивогнутой*⁶ в некоторой *экономической области* пространства факторов $\{K \geq 0, L \geq 0\}$. Внутренняя структура этих функций не существенна и может, в частности, содержать трансцендентные операции относительно их аргументов⁷.

Переменные функциональной связи (2.1), представляющей реальный объект, обычно имеют различный числовой порядок, и это усложняет стандартную задачу МНК оценивания параметров функции, так как минимизируемый функционал имеет обычно овражную форму. В [7] отмечена целесообразность перехода к *индексным* ПФ для преодоления этой проблемы с последующим восстановлением параметров функций в абсолютных формах (относительно абсолютных значений переменных). При этом индексами соответствующих показателей называются отношения значений переменных (Y, K, L) к их базовым вели-

⁶ Квазивогнутость функции $F(K, L)$ означает, что верхние множества $\{K \geq 0, L \geq 0 : F(K, L) \geq c\}$ уровней c выпуклые.

⁷ В экономико-математической литературе спорадически появляются работы, подвергающие метод ПФ критике с точки зрения эвристической теории размерностей, применяемой в технических науках и физике. При этом практически все ПФ в абсолютной форме, начиная с функции Кобба-Дугласа, приведенной ниже, объявляются нелегитимными. Надуманность этой проблемы для метода ПФ и теории потребительского спроса, использующей функции полезности с подобными свойствами и смыслом инструмента аппроксимации содержательных зависимостей, аргументирована в [7].

чинам (Y_0, K_0, L_0) :

$$v = \frac{Y}{Y_0}, \quad \kappa = \frac{K}{K_0}, \quad \lambda = \frac{L}{L_0}. \quad (2.2)$$

Индексная функция $F(\kappa, \lambda; \omega)$ связана с абсолютной функцией $F(K, L; w)$ равенством

$$F(K, L; w) = Y_0 F(\kappa, \lambda; \omega). \quad (2.3)$$

Связь параметров абсолютной и индексной форм w и ω устанавливается структурным анализом равенства (2.3) для конкретных классов функций [7].

Производственная функция в абсолютной форме $F(K, L)$ позволяет вычислять принципиально наблюдаемые характеристики производства [5],[7]: *средние эффективности факторов* Y/K и Y/L , *предельные эффективности* $\partial F(K, L)/\partial K$ и $\partial F(K, L)/\partial L$, *их отношения – факторные эластичности*

$$\epsilon_K = \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} : \frac{Y}{K} \equiv \frac{\partial \ln F(K, L)}{\partial \ln K}, \quad \epsilon_L = \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} : \frac{Y}{L} \equiv \frac{\partial \ln F(K, L)}{\partial \ln L}. \quad (2.4)$$

Сумма факторных эластичностей $\mu_{KL} = \epsilon_K + \epsilon_L$ является *эластичностью производства по масштабу*.

Факторные эластичности как и эффективности факторов, представляют количественные характеристики зависимости выпуска от затрат соответствующих факторов. Однако эластичности не зависят от масштабирования единиц измерения факторов и выпуска и являются относительными безразмерными характеристиками. На языке процентов факторные эластичности показывают, на сколько процентов (примерно) увеличится выпуск, если использование соответствующего фактора возрастёт на 1%. Эластичность производства показывает, что при росте всех факторов на 1% выпуск возрастёт примерно на μ_{KL} %.

Производственная функция также позволяет вычислять более глубокие характеристики процесса замещения факторов, при котором сохраняется уровень выпуска:

- *предельную норму замещения (ПНЗ) труда капиталом*

$$S_{LK}(K, L) \equiv \frac{\partial F(K, L)}{\partial L} : \frac{\partial F(K, L)}{\partial K} = -\frac{dK}{dL}, \quad (2.5)$$

- *эластичность замещения труда капиталом*

$$\sigma_{LK}(K, L) = \frac{d(K/L)}{K/L} : \frac{dS_{LK}}{S_{LK}} = \frac{d \ln(K/L)}{d \ln S_{LK}}, \quad F(K, L) = \text{const}. \quad (2.6)$$

Величина ПНЗ (2.5) представляет предельный коэффициент замещения затрат труда капиталом при условии сохранения уровня выпуска. Математически ПНЗ равна тангенсу угла наклона касательной, проведённой в данной точке (K, L) , к соответствующей изокванте функции $F(\cdot)$. Эта величина зависит от единиц измерения факторов (K, L) и выпуска Y . Эластичность замещения (2.6) представляет, аналогично факторным эластичностям (2.4), относительную безразмерную характеристику связи фондовооружённости K/L с предельной нормой замещения S_{LK} , показывая (примерно), на сколько процентов изменится фондовооружённость при изменении ПНЗ на 1%.

Неявными характеристиками ПФ, которые могут дополнить анализ соответствия функции реальному процессу, являются функции *факторного спроса, предложения, прибыли и издержек*, определяемые задачами рационального производства – максимизации прибыли или минимизации издержек [5],[17].

Далее, ввиду сложности задачи комплексной оценки (динамики эффективных фондов и параметров производственной функции), рассматриваемой в следующем разделе, используются только два наиболее простых класса нелинейных капитальных ПФ (2.1): простейший класс – функции Кобба-Дугласа (КД)

$$AK^\alpha L^\beta \quad (2.7)$$

с положительными параметрами $w = (A, \alpha, \beta) > 0$, и его обобщение – класс функций

$$A(\nu K^{-\rho} + (1 - \nu)L^{-\rho})^{-\mu/\rho} \quad (2.8)$$

с параметрами $w = (A, \nu, \rho, \mu)$. Эти параметры должны удовлетворять условиям $(A, \mu) > 0$, $-1 \leq \rho \neq 0$, $0 < \nu < 1$. Приведенные ограничения на параметры функций (2.7) и (2.8) обеспечивают их возрастание и квазивогнутость во всем неотрицательном ортанте аргументов (K, L) .

Рассмотрим функцию Кобба-Дугласа (2.7). Эта функция положительно однородная степени $\mu = \alpha + \beta$, и эта степень представляет также эластичность производства относительно масштаба затрат. Известно [5], что степени α и β представляют факторные эластичности производства (2.3), и эластичность замещения (2.5) $\sigma = 1$. Все эти параметры постоянны для моделируемого объекта относительно режимов его работы, определяемых переменными затрат факторов (K, L) , что, конечно, является упрощением реальности, неявно заложенным в структуру данной ПФ.

Функция (2.8) положительно однородная степени μ и эта степень, как и в случае функции КД, представляет эластичность производства. Здесь факторные эластичности (2.4) уже не постоянные, и эластичность замещения равна $\sigma = 1/(1 + \rho)$. Эластичность замещения принимает любые положительные значения при изменении параметра ρ . Постоянство эластичности замещения σ относительно аргументов (K, L) дало название этому классу – функции постоянной эластичности замещения (ПЭЗ). В пределе $\rho \rightarrow 0$ функция ПЭЗ (2.7) переходит в функцию КД (2.6).

Функции КД (2.7), ПЭЗ (2.8) в индексной форме $F(\kappa, \lambda; \omega)$ и их параметры, отличающиеся от параметров соответствующих абсолютных функций $F(K, L; w)$, определяются следующими равенствами. Функция КД:

$$v = a\kappa^\alpha \lambda^\beta, \quad A = \frac{Y_0 a}{K_0^\alpha L_0^\beta}. \quad (2.9)$$

Функция ПЭЗ:

$$v = a(\nu' \kappa^{-\rho} + (1 - \nu') \lambda^{-\rho})^{-\mu/\rho}, \quad (2.10)$$

$$A = \frac{Y_0 a}{(\nu' K_0^\rho + (1 - \nu') L_0^\rho)^{\mu/\rho}}, \quad \nu = \frac{\nu' K_0^\rho}{\nu' K_0^\rho + (1 - \nu') L_0^\rho}.$$

Переход к индексным функциям (2.9) и (2.10) используется далее как метод улучшения вычислительных свойств задачи реконструкции эффективных фондов с одновременным построением производственной функции МП.

3. Задача построения ПФ МП с реконструкцией эффективных фондов

Статистика деятельности малого предпринимательства регионов [3] содержит данные о выпуске Y_t , о производственных инвестициях I_t и о затратах труда L_t :

$$\{Y_t, I_t, L_t : t = \overline{0, T}\}. \quad (3.1)$$

Как и при любых наблюдениях (измерениях) реальных объектов, эти данные приближённые.

Метод построения капитальных функций (2.1) по данным (3.1) предложен в [8]. Он основан на использовании уравнения динамики производственного капитала K , отражающего процесс накопления (освоения инвестиций) и амортизацию фондов. Процесс накопления в общем случае учитывается введением временного лага, но для малого предпринимательства инвестиции обычно расходуются на закупку оборудования и строительство простых объектов. Поэтому лагом здесь можно пренебречь и описать динамику накопления фондов с *нормой амортизации* m уравнением

$$K_t = (1 - m) K_{t-1} + I_t, \quad t = \overline{1, T}. \quad (3.2)$$

Для определения величин $\{K_1, \dots, K_T\}$ согласно (3.2) следует задать начальное значение эффективного капитала K_0 . Норма амортизации m обычно задаётся для отраслей и всей экономики. Таким образом, динамика капитала определяется, кроме известных на промежутке наблюдения значений формальных инвестиций $\{I_0, \dots, I_T\}$ и нормы амортизации m , также неизвестным начальным капиталом K_0 .

Определение динамики капитала (3.2) позволяет использовать капитальную ПФ некоторого параметрического класса как модель производства, представленного статистикой (3.1). Параметры такой модели w должны оцениваться вместе с начальным капиталом K_0 из условия достаточно хорошего согласования расчётных значений выпуска $F(K_t, L_t; w)$ с приближённо заданными значениями Y_t :

$$Y_t \simeq F(K_t, L_t; w). \quad (3.3)$$

Таким образом, соотношения (3.2) и (3.3) являются математической моделью формирования ЭПФ с дискретным временем. Идентификация такой модели сводится к оценке параметров этой модели

$$z = (w_1, \dots, w_p, K_0),$$

удовлетворяющих ограничениям

$$w \in W, \quad K_0 > 0, \quad (3.4)$$

где множество W соответствует ограничениям на параметры выбранного класса функций (2.1).

Основным методом решения задач идентификации математического моделирования является метод наименьших квадратов. Для модели (3.2), (3.3) оценка параметров $\hat{z}$ определяется как точка минимума функции квадратичной невязки системы приближённых равенств статистических и расчётных значения выпусков (3.3):

$$\phi(z) = \sum_{t=0}^T [Y_t - F(K_t, L_t; w)]^2 \quad (3.5)$$

при условиях (3.2) и (3.4). Далее эту задачу будем называть задачей *комплексного оценивания экономической динамики*.

Наш опыт решения задач минимизации функции (3.5) при условиях вида (3.2) и (3.4) показал типичную плохую обусловленность относительно искомого начального значения капитала K_0 . Для данных о российской [8] и региональных [10] экономик этот параметр

допускал некоторую экспертную оценку, которая позволяла стабилизировать (регуляризовать) задачу минимизации относительно его значений. В случае малого предпринимательства никаких данных относительно производственных фондов нет. Здесь регуляризация описанной задачи достигается наложением следующего условия на искомое начальное значение K_0 и вычисляемое конечное значение K_T производственных фондов.

Будем считать, что на рассматриваемом периоде известен темп изменения фондовооружённости труда и этот темп на данном этапе будем считать постоянным. Обозначим его c . Это значит, что

$$\frac{K_T}{L_T} = c^T \frac{K_0}{L_0}. \quad (3.6)$$

Величина темпа изменения фондовооружённости труда существенно проще для измерений и экспертных оценок. Таким образом, описанная выше задача содержательно и структурно усложняется наложением условия (3.6). Но это формальное усложнение легко учитывается при реализации данного варианта МНК для модели комплексной оценки эффективных фондов и производственной функции исследуемого объекта, в данном случае – консолидированного малого предпринимательства региона.

Поставленная задача минимизации функционала (3.5) при условиях (3.2), (3.4) и (3.6) с целью улучшения её вычислимости преобразуется к индексной форме относительно переменных (2.2). При этом уравнение динамики (3.2) следует разделить на начальное значение K_0 и ввести переменную (ι – *iota*)

$$\iota_t = \frac{I_t}{K_0}. \quad (3.7)$$

Уравнение динамики в индексной форме:

$$\kappa_t = (1 - m) \kappa_{t-1} + \iota_t, \quad t = \overline{1, T}. \quad (3.8)$$

Индексная задача комплексной оценки заключается в минимизации функционала

$$\psi(z') = \sum_{t=1}^T [v_t - F(\kappa_t, \lambda_t; \omega)], \quad (3.9)$$

по переменным минимизации $z' = (\omega_1, \dots, \omega_p, K_0)$ при условиях (3.4), скорректированных с учётом перехода к параметрам ω , динамическим условиям (3.8) и индексным вариантом терминального условия (3.6) – условием

$$\kappa_T = c^T \lambda_T. \quad (3.10)$$

Основные переменные индексной задачи комплексного оценивания параметров z' , т.е. переменные (2.2), принимают значения порядка единицы. Это существенно снижает эффекты овражности функционала (3.9), что облегчает вычислительный процесс поиска его минимума при данных условиях.

Задачи МНК обычно рассматриваются в рамках регрессионного анализа, относящегося к прикладной математической статистике. При этом ошибки данных считаются случайными величинами. Это предполагает знание функций распределений этих ошибок, причём независимыми и, обычно, нормально распределёнными. Такие предпосылки позволяют вводить и вычислять некоторые критерии качества регрессии, определяемой выбранными функциональными связями между переменными величинами модели. Для построения производственных функций и других проблем экономико-математического моделирования

эти предпосылки обычно не выполняются, так как экономическая динамика, представляющая производство, обычно уникальна и не допускает повторяемых экспериментов, на основе которых в других областях (техника, финансовые рынки) может быть выявлена статистическая закономерность ошибок. Однако эти недостатки компенсируются содержательностью развитых экономических моделей. В нашем случае теория производственных функций представляет обоснованный набор математических свойств этих функций и их содержательных характеристик, перечисленных выше (возрастание и квазивогнутость, эластичности). Это позволяет рассматривать задачу комплексной оценки эффективных фондов и производственной функции как задачу сглаживания производственной функции (2.1), неявно заданной таблицей данных (3.1), с заданными свойствами.

4. Пример построения ПФ МП с реконструкцией эффективных фондов

Описанная задача *комплексного оценивания экономической динамики* решалась для экономики МП ПФО с использованием официальных данных 2005–2014 г. из статистических сборников «Малое и среднее предпринимательство в России» (за 2006–2014 гг.), «Регионы России. Социально-экономические показатели» (2011 г., 2015 г.), «Российский статистический ежегодник» (2015 г.). Норма амортизации m для уравнения динамики фондов (3.2), как и в работе [10], определялась на уровне 0.055. Для задания темпа изменения фондовооруженности труда (3.6) дополнительно использовались данные по труду за 2004 год. Все расчеты реализованы с помощью системы компьютерной математики «Mathematica».

В таблице 1 представлены исходные (статистические) и приведенные к ценам 2014 года стоимостные данные моделирования совокупности субъектов МП – юридических лиц⁸. Исходными данными являются: Y_t^s – оборот МП (млрд. руб.); i_t^Y – индекс величины валового регионального продукта (ВРП) (в процентах к предыдущему году); I_t^s – инвестиции в основной капитал МП в фактически действовавших ценах (млрд. руб.); i_t^I – индекс объема инвестиций в основной капитал (в процентах к предыдущему году); L_t – средняя численность работников МП (тыс. чел.). Стоимостные данные по обороту и инвестициям приведены к ценам 2014 года по индексам ($i_t^Y \cdot i_t^I$).

Таблица 1. Исходные и приведенные (стоимостные) данные

Год	Y_t^s	i_t^Y	I_t^s	i_t^I	L_t	Y_t	I_t	Y_t/L_t
2005	1 522.1	104.5	24.1	114.7	1 664.6	3 445.4	104.7	2.070
2006	1 849.4	107.9	38.4	114.7	1 843.2	3 717.6	120.1	2.017
2007	2 336.1	109.1	61.7	126.1	1 992.9	4 055.9	151.4	2.035
2008	3 067.5	105.2	124.3	107.9	2 405.0	4 266.8	163.4	1.774
2009	2 760.5	92.5	90.0	83.5	2 305.6	3 946.8	136.4	1.712
2010	3 070.8	105.5	111.7	108.1	2 340.0	4 163.8	147.5	1.779
2011	3 649.2	106.8	110.0	110.1	2 441.1	4 447.0	162.4	1.822
2012	4 228.8	104.1	134.8	109.5	2 502.6	4 629.3	177.8	1.850
2013	4 631.2	102.4	166.7	106.9	2 481.5	4 740.4	190.1	1.910
2014	4 835.2	102.0	188.0	98.9	2 489.7	4 835.2	188.0	1.942
Отношения данных 2014/2005:					1.496	1.403	1.796	0.938

⁸ Без учета фермерских хозяйств и индивидуальных предпринимателей.

Затраты труда в 2004 году (в формуле (3.6) это величина L_0) составили 1 635.9 тысяч человек.

Задача комплексной оценки параметров $z = (w_1, \dots, w_p, K_0)$, представленная в предыдущем разделе, решалась в индексной форме (3.7)-(3.10) относительно переменных (2.2). Это существенно облегчило вычислительные проблемы решения существенно нелинейной проблемы, но не решило их полностью. При переходе от функции КД (2.9) к ПЭЗ (2.10) неустойчивость относительно искомых параметров повышается в связи с увеличением степени свободы. Вместо трёх параметров функции (2.9) $\omega = (a, \alpha, \beta)$ имеем 4 параметра $\omega = (a, \nu', \rho, \mu)$. При этом вычислительные эксперименты выявили особую сложность стабилизации параметра ρ , определяющего эластичность замещения $\sigma = 1/(1 + \rho)$. На данном этапе пока не найден способ гибкой стабилизации проблемного параметра ρ , поэтому была решена серия задач минимизации функционала $\psi(z')$ при фиксированных значениях ρ .

В таблице 2 представлены значения оценок параметров функций КД и ПЭЗ при значении $\rho = -0.3$, определяющем эластичность замещения труда капиталом $\sigma = 1.43$.

Таблица 2. Результаты комплексной оценки параметров $z' = (\omega_1, \dots, \omega_p, K_0)$

c	КД		ПЭЗ ($\rho = -0.3$)	
1	K_0	1301.4	K_0	1301.4
	a	1.0093	a	1.0093
	α	0.565	ν'	0.721
	β	0.223	μ	0.788
	$\psi(z')$	0.01180	$\psi(z')$	0.01179
1.05	K_0	649.6	K_0	649.6
	a	0.9862	a	0.9868
	α	0.320	ν'	0.670
	β	0.136	μ	0.459
	$\psi(z')$	0.01290	$\psi(z')$	0.01281

Динамика восстановленных эффективных производственных фондов МП ПФО для значений темпа изменения фондовооружённости труда $c = 1$ и 1.05 показана в таблице 3. Ввиду совпадения значения оценок начальных фондов K_0 для обеих функций (и несущественного улучшения функционала) значения эффективных фондов совпали для обеих функций.

Таблица 3. Реконструкция эффективных фондов

Год	$c = 1$		$c = 1.05$	
	K_t	Y_t/K_t	K_t	Y_t/K_t
2005	1 334.52	2.582	718.59	4.795
2006	1 381.22	2.692	799.17	4.652
2007	1 456.66	2.784	906.61	4.474
2008	1 539.94	2.771	1 020.15	4.182
2009	1 591.64	2.480	1 100.44	3.587
2010	1 651.60	2.521	1 187.42	3.507
2011	1 723.16	2.581	1 284.51	3.462
2012	1 806.19	2.563	1 391.66	3.326
2013	1 896.95	2.499	1 505.22	3.149
2014	1 980.62	2.441	1 610.43	3.002
2014/2005	1.484	0.946	2.241	0.626

Однако несущественное относительно эффективных фондов улучшение функционала МНК $\psi(z')$ при переходе к функции ПЭЗ позволило получить более содержательные, нестационарные оценки факторных эластичностей ε_K , ε_L и, соответственно, их суммы – эластичности производства μ . Для функции КД эти эластичности постоянные и равны соответствующим степеням функции (2.9). Эти результаты представлены в таблице 4.

Таблица 2. Факторные эластичности и эластичность производства

с	Эластичности	КД	ПЭЗ	
			2005	2014
1	ε_K	0.565	0.583	0.568
	ε_L	0.223	0.224	0.218
	μ	0.788	0.807	0.786
1.05	ε_K	0.320	0.317	0.321
	ε_L	0.136	0.151	0.135
	μ	0.456	0.468	0.456

Приведенные результаты демонстрируют, по нашему мнению, актуальность и перспективность развития математического моделирования экономических процессов и систем. При этом актуально развитие и специальных методов регуляризации задач идентификации таких моделей, а также методов оптимизации соответствующих классов задач нелинейной условной минимизации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И.Б. Воскобойников, “О корректировке динамики основных фондов в российской экономике”, *Экономический журнал ВШЭ*, 2004, № 1, 3–20.
2. В.А. Бессонов, И.Б. Воскобойников, “О динамике основных фондов и инвестиций в российской переходной экономике”, *Экономический журнал ВШЭ*, 2006, № 2, 193–228.
3. *Малое и среднее предпринимательство в России*, 2015: Стат. сб., ред. А.Л. Кевеш, Росстат, М., 2015, 96 с.
4. C.W. Cobb, P.H. Douglas, “A theory of production”, *The American Economic Review*, 18:1 (1928), 139–165.
5. Г.Б. Клейнер, *Производственные функции: теория, методы, применение*, Финансы и статистика, М., 1986, 239 с.
6. В.К. Горбунов, А.Г. Львов, “Построение трёхфакторной производственной функции с переменной эластичностью замещения”, *Труды Средневолжского математического общества*, 11:1 (2009), 91–100.
7. В.К. Горбунов, “О размерностной проблеме в экономике: производственная функция как псевдо-чёрный ящик”, *Журнал экономической теории*, 2014, № 1, 199–2012.
8. В.К. Горбунов, А.Г. Львов, “Построение производственных функций по данным об инвестициях”, *Экономика и матем. методы*, 2012, № 2, 95–107.

9. А. Г. Львов, *Развитие методов построения производственных функций*, автореферат дисс. ... канд. экон. наук: 08.00.13, УГТАУ, Уфа, 2012.
10. В. К. Горбунов, В. П. Крылов, "Оценка эффективности основного капитала предприятий методом производственных функций", *Экономика региона*, 2015, № 3, 334–347.
11. В. А. Бессонов, "Проблемы построения производственных функций в российской переходной экономике", *Анализ динамики российской переходной экономики*, ред. В. А. Бессонов, С. В. Цухло, ИЭПП, М., 2002, 5–89.
12. Ян. Сюань, *Факторы и стратегии развития малого промышленного бизнеса (на примере России и Китая)*, автореферат дисс. ... канд. экон. наук: 08.00.05, ЦЭМИ РАН, М., 2007.
13. В. К. Горбунов, В. Г. Деревенский, "Производственные функции малого предпринимательства регионов России: о методе пространственной регрессии", *Вестник Московского университета. Сер. 21. Управление (государство и общество)*, 2015, № 1, 94–109.
14. Дж. Ортега, В. Рейнболдт, *Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными*, Мир, М., 1975, 558 с.
15. J. Nocedal, S. Wright, *Numerical Optimization (Springer Series in Operations Research and Financial Engineering)*, Springer, Berlin, 2006, 664 pp.
16. M. Doms, "Estimating capital efficiency schedules within production functions", *Economic Inquiry*, **34**:1 (1996), 78–92.
17. S. T. Hackman, *Production Economics: Integrating the Microeconomic and Engineering Perspectives*, Springer, Berlin, 2008, 520 pp.

Дата поступления 30.11.2016

Mathematical model of estimation of production funds of small business

© V. K. Gorgunov⁹, A. G. Lvov¹⁰

Abstract. Production funds of small business (SB) have no formal definition and are not a reporting indicator. We offer the determination of cost of such funds within the method of creation of «capital» production functions (PF) via data about production investments (an indicator of the reporting of SB), expenses of other factors and levels of production which we offered earlier (V. K. Gorbunov and A.G. Lvov, 2012). In this method the equation of «effective funds» dynamics on the interval of object observation is included into econometric system of PF parameters' estimation. An initial value of effective funds is the estimated parameter as well as parameters of used PF. The problem of simultaneous estimation of these parameters is ill-conditioned one. Its regularization is provided by introduction of additional relation between initial and final values of effective funds. The example of an estimation of SB production funds in Volga Federal District is presented.

Key Words: production functions, dynamics of production funds, effective funds, small business, parameter estimation, ill-conditionality, regularization

⁹ Professor of Department of Economic-mathematical Methods and Information Technology, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vkgorbunov@mail.ru

¹⁰ Associate professor of Department of Economic-mathematical Methods and Information Technology, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; aglvov@mail.ru

УДК 517.95

Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями

© А. В. Калинин¹ А. А. Тюхтина²

Аннотация. Изучаются краевые задачи для периодических по времени решений системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении. Рассматривается случай неоднородных сред, содержащих проводящие, непроводящие и слабопроводящие включения. Исследуется асимптотическая связь решений задач с непроводящими и слабопроводящими включениями.

Ключевые слова: система уравнений Максвелла, квазистационарное магнитное приближение, периодические решения, неоднородные среды, граничные условия электрического и магнитного типа, непроводящие и слабопроводящие включения.

1. Введение

Широкий класс современных технологических проблем приводит к изучению математических задач для квазистационарных электромагнитных полей в физически неоднородных средах [1], [2]. Квазистационарное магнитное приближение для системы уравнений Максвелла используется при проектировании различных электромагнитных устройств [3]–[7] и при решении актуальных задач современной медицины [8].

Актуальность построения и обоснования эффективных численных алгоритмов для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении обуславливает многообразие современных публикаций, посвященных, в частности, изучению вопросов корректности различных постановок задач (см. [2], [9], [10] и библиографию в них).

Доказательство теорем существования и единственности и исследование свойств поставленных краевых и начально-краевых задач опирается на неравенства, связывающие нормы вектор-функции, её ротора и дивергенции [11]–[14]. При рассмотрении неоднородных физических сред могут быть эффективно использованы оценки не для норм, а для скалярных произведений векторных полей. В настоящей работе рассматриваются неравенства для скалярных произведений векторных полей, обобщающие полученные в [11]–[15] оценки.

Типичной в прикладных задачах является ситуация, когда рассматриваемые области содержат проводящие и непроводящие материалы [2]. С целью преодоления при численном решении задач алгоритмических усложнений, связанных с различным описанием полей в проводящих и непроводящих областях [16], в [17], [18] был исследован подход, заключающийся в замене непроводящих областей слабопроводящими с последующим предельным переходом. В настоящей работе этот метод обосновывается для периодических по времени решений краевых задач для системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении в области, состоящей из проводника с непроводящими включениями, окруженного слоем изолятора.

¹ Доцент кафедры математической физики и оптимального управления, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; avk@mm.unn.ru

² Доцент кафедры математического моделирования экономических процессов, Национальный исследовательский Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; kalinmm@yandex.ru

2. Постановка задач и основные результаты

Для описания периодических по времени решений системы уравнений Максвелла в квазистационарном магнитном приближении используется следующая система уравнений [2]:

$$\operatorname{rot} \vec{H}(\vec{x}) = \vec{J}(\vec{x}), \quad (2.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B}(\vec{x}) = 0, \quad (2.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E}(\vec{x}) = -i\omega \vec{B}(\vec{x}), \quad (2.3)$$

$$\operatorname{div} \vec{D}(\vec{x}) = \rho(\vec{x}), \quad (2.4)$$

где $\vec{H}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{D}, \vec{J}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ и $\rho: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^1$ – неизвестные функции, $\vec{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Реальные физические поля определяются в этом случае как $\operatorname{Re}[\vec{H}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $\operatorname{Re}[\vec{B}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $\operatorname{Re}[\vec{E}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $\operatorname{Re}[\vec{D}(\vec{x})e^{i\omega t}(\vec{x})]$, $\operatorname{Re}[\vec{J}(\vec{x})e^{i\omega t}]$, $\operatorname{Re}[\rho(\vec{x})e^{i\omega t}] = \operatorname{div}(\operatorname{Re}[\vec{D}e^{i\omega t}])$.

В работе предполагается, что $\omega \geq 0$. При $\omega = 0$ уравнения (2.1)–(2.4) образуют стационарную систему уравнений Максвелла, в которой $\vec{H}, \vec{B}, \vec{E}, \vec{D}, \vec{J}$ и ρ – действительные функции.

В линейных средах справедливы материальные соотношения

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad \vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} + \vec{J}^{\text{ст}}, \quad (2.5)$$

где μ – тензор магнитной проницаемости среды, ϵ – тензор диэлектрической проницаемости, σ – тензор проводимости, $\vec{J}^{\text{ст}}$ – плотность тока источников.

В работе предполагается, что Ω – открытая ограниченная область, гомеоморфная шару, с липшицевой границей Γ , $\vec{\nu}(\vec{x})$ – единичный вектор внешней нормали в точке $\vec{x} \in \partial\Omega$. Для функций $\vec{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{C}^3$ через $\vec{u}_\nu$, $\vec{u}_\tau$ обозначаются соответственно нормальная и касательная компоненты функции на границе области.

Система (2.1)–(2.5) рассматривается при двух вариантах краевых условий – условиях магнитного типа

$$\vec{H}_\tau(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad (2.6)$$

и условиях электрического типа

$$\vec{E}_\tau(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \vec{B}_\nu(\vec{x}) = \vec{0}, \quad \vec{x} \in \Gamma. \quad (2.7)$$

Пусть $\Omega_1, \Omega_{0,j}$, $j = 1, \dots, k$ – гомеоморфные шару области с липшицевыми границами Γ_1 и $\Gamma_{0,j}$ соответственно, такие, что $\bar{\Omega}_1 \subset \Omega$, $\bar{\Omega}_{0,j} \subset \Omega_1$, $\bar{\Omega}_{0,j} \cap \bar{\Omega}_{0,s} = \emptyset$ при $j \neq s$. Обозначим $\Omega_0 = \cup_{j=1}^k \Omega_{0,j}$. Предполагается, что подобласть $\Omega_C = \Omega_1 \setminus \bar{\Omega}_0$ занята проводником, $\Omega \setminus \bar{\Omega}_1, \Omega_0$ – непроводящим материалом. Положим $\Omega_I = \Omega \setminus \bar{\Omega}_C = (\Omega \setminus \bar{\Omega}_1) \cup \Omega_0$. Через $\vec{\nu}_C(\vec{x})$, $\vec{\nu}_I(\vec{x})$ обозначаются единичные вектора внешней нормали в точке $\vec{x} \in \partial\Omega_C$ и $\vec{x} \in \partial\Omega_I$ соответственно, $\vec{\nu}_C(\vec{x}) + \vec{\nu}_I(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Для функций $\vec{u}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$, $u: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^1$ через $\vec{u}_C$, u_C обозначаются их сужения на область Ω_C , через $\vec{u}_I$, u_I – сужения на Ω_I .

Предполагается, что $\vec{J}^{\text{ст}}: \Omega \rightarrow \mathbb{C}^3$ – заданная суммируемая с квадратом функция, μ, ϵ – самосопряженные непрерывные линейные операторы из $\{L_2(\Omega)\}^3$ в $\{L_2(\Omega)\}^3$, удовлетворяющие условиям

$$\epsilon_1 \|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq (\epsilon \vec{u}, \vec{u})_{2,\Omega} \leq \epsilon_2 \|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2, \quad \mu_1 \|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2 \leq (\mu \vec{u}, \vec{u})_{2,\Omega} \leq \mu_2 \|\vec{u}\|_{2,\Omega}^2,$$

$\sigma = \sigma(\vec{x})$ – симметричная 3×3 матрица измеримых функций $\Omega \rightarrow \mathbb{R}^1$, удовлетворяющая условиям

$$\sigma_{ij}(\vec{x}) = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad \text{при почти всех } \vec{x} \in \Omega_I,$$

$$\sigma_1 |\vec{\xi}|^2 \leq (\sigma(\vec{x}) \vec{\xi}, \vec{\xi}) \leq \sigma_2 |\vec{\xi}|^2 \text{ при почти всех } \vec{x} \in \Omega_C \text{ и всех } \vec{\xi} \in \mathbb{R}^3,$$

где $\mu_i, \sigma_i, \varepsilon_i, (i = 1, 2)$ – заданные положительные числа, через $\|\cdot\|_{2,\Omega}$ и $(\cdot, \cdot)_{2,\Omega}$ обозначаются норма и скалярное произведение в $\{L_2(\Omega)\}^3$.

В работе рассматриваются обобщённые решения краевых задач, для которых все равенства должны выполняться в смысле теории распределений, а граничные условия – в смысле теории следов [14], [19].

Определяются следующие гильбертовы пространства вектор-функций с соответствующими скалярными произведениями [14], [19]:

$$H(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div} \vec{u} \in L_2(\Omega)\}, \quad K(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{div} \vec{u} = 0\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\operatorname{div}, \Omega} = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\operatorname{div} \vec{u} \operatorname{div} \vec{v}) d\vec{x},$$

$$H(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot} \vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3\}, \quad K(\operatorname{rot}; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \operatorname{rot} \vec{u} = \vec{0}\},$$

$$(\vec{u}, \vec{v})_{\operatorname{rot}, \Omega} = \int_{\Omega} (\vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x}.$$

Через $H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $H_0(\operatorname{div}; \Omega)$ обозначается замыкание множества пробных вектор-функций $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$ в $H(\operatorname{rot}; \Omega)$ и $H(\operatorname{div}; \Omega)$ соответственно, $K_0(\operatorname{div}; \Omega) = K(\operatorname{div}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{div}; \Omega)$, $K_0(\operatorname{rot}; \Omega) = K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$.

Обобщённая постановка краевых задач основана на следующих утверждениях [14].

Т е о р е м а 2.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – липшицева область. Отображение $\vec{u} \mapsto \vec{u} \cdot \vec{\nu}$, определенное на $\{\mathcal{D}(\bar{G})\}^3$, может быть продолжено до линейного непрерывного оператора $\gamma_{\nu} : H(\operatorname{div}; G) \rightarrow H^{-1/2}(\partial G)$. Для всех $\vec{u} \in H(\operatorname{div}; G)$ и $w \in H^1(G)$ верна следующая формула Грина:

$$\langle \gamma_{\nu} \vec{u}, w \rangle = \int_G (\vec{u} \cdot \operatorname{grad} \bar{w}) d\vec{x} + \int_G w \operatorname{div} \vec{u} d\vec{x}.$$

Ядро оператора γ_{ν} совпадает с $H_0(\operatorname{div}; G)$, $\|\gamma_{\nu}\| = 1$.

Л е м м а 2.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – липшицева область. Функция $\vec{u} \in H(\operatorname{rot}; G)$ лежит в классе $H_0(\operatorname{rot}; G)$ тогда и только тогда, когда при всех $\vec{v} \in H(\operatorname{rot}; G)$

$$\int_G (\operatorname{rot} \vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} = \int_G (\operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{u}) d\vec{x}.$$

Решением задачи (2.1)–(2.6) называются удовлетворяющие равенствам (2.1), (2.3)–(2.5) функции $\vec{H} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\vec{B} \in K(\operatorname{div}; \Omega)$, $\vec{J} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega)$, $\vec{E} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\vec{D} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\rho \in H^{-1}(\Omega)$.

Решением задачи (2.1)–(2.5), (2.7) называются удовлетворяющие равенствам (2.1), (2.3) – (2.5) функции $\vec{H} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\vec{B} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega)$, $\vec{J} \in K(\operatorname{div}; \Omega)$, $\vec{E} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\vec{D} \in \{L_2(\Omega)\}^3$, $\rho \in H^{-1}(\Omega)$.

Заметим, что при $\omega > 0$ условие $\vec{B}_{\nu}(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma$ в (2.7) вытекает из равенства (2.3) и условия $\vec{E}_{\tau}(\vec{x}) = \vec{0}$, $\vec{x} \in \Gamma$.

В работе используются также следующие гильбертовы пространства:

$$K(\operatorname{div} \mu; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \mu \vec{u} \in K(\operatorname{div}; \Omega)\},$$

$$K_0(\operatorname{div} \mu; \Omega) = \{\vec{u} \in \{L_2(\Omega)\}^3 : \mu \vec{u} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega)\},$$

$$V^1(\mu; \Omega) = H_0(\operatorname{rot}; \Omega) \cap K(\operatorname{div} \mu; \Omega), \quad V^2(\mu; \Omega) = H(\operatorname{rot}; \Omega) \cap K_0(\operatorname{div} \mu; \Omega),$$

$$V_0^j(\mu; \Omega) = \{\vec{u} \in V^j(\mu; \Omega) : \text{rot} \vec{u}_I = \vec{0}\}, \quad j = 1, 2, \quad (\vec{u}, \vec{v})_V = (\vec{u}, \vec{v})_{\text{rot}, \Omega}.$$

Используя (2.2), (2.5), получаем задачу определения функций $\vec{H} \in V^1(\mu; \Omega)$, $\vec{E} \in H(\text{rot}; \Omega)$ или $\vec{H} \in V^2(\mu; \Omega)$, $\vec{E} \in H_0(\text{rot}; \Omega)$ таких, что

$$\text{rot} \vec{H} = \sigma \vec{E} + \vec{J}^{\text{ct}}, \quad \text{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}. \quad (2.8)$$

Предполагается, что функция $\vec{J}^{\text{ct}}$ удовлетворяет в задаче (2.1)–(2.6) условиям

$$\text{div} \vec{J}_I^{\text{ct}} = 0, \quad \gamma_\nu(\vec{J}_I^{\text{ct}})(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad (2.9)$$

а в случае задачи (2.1)–(2.5), (2.7) – условиям

$$\text{div} \vec{J}_I^{\text{ct}} = 0, \quad \langle \gamma_\nu(\vec{J}_I^{\text{ct}}), 1 \rangle_\Gamma = 0. \quad (2.10)$$

Используя лемму 2.1. получаем, что задачи (2.8) сводятся к задачам определения функций $\vec{H} \in V^j(\mu; \Omega)$ таких, что

$$\text{rot} \vec{H}_I = \vec{J}_I^{\text{ct}} \quad (2.11)$$

и для всех $\vec{v} \in V_0^j(\mu; \Omega)$ справедливо равенство

$$i\omega \int_\Omega (\mu \vec{H} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \text{rot} \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \vec{J}_C^{\text{ct}} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x}. \quad (2.12)$$

Пусть $\vec{H}$ – решение задачи (2.11), (2.12). Для однозначного определения функции $\vec{E}$ во всей области Ω предположим, что неизвестная функция $\vec{E}$ должна удовлетворять в задаче (2.1)–(2.6) дополнительным условиям

$$\text{div}(\epsilon \vec{E})_I = \rho_0, \quad \gamma_\nu(\epsilon \vec{E})(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad (2.13)$$

а в задаче (2.1)–(2.5), (2.7) – условиям

$$\text{div}(\epsilon \vec{E})_I = \rho_0, \quad \vec{E}_\tau(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad \langle \gamma_\nu(\epsilon \vec{E}), 1 \rangle_{\Gamma_1} = Q, \quad (2.14)$$

где $\rho_0 \in L_2(\Omega_I)$ – заданная функция, например, $\rho_0 \equiv 0$ [2], Q – заданная константа.

Если $\omega = 0$, задача (2.1)–(2.6) может рассматриваться также при условиях (2.14).

В работе доказываются следующие утверждения:

Т е о р е м а 2.2. *Каждая из задач (2.11), (2.12) имеет единственное решение.*

Т е о р е м а 2.3. *Задачи (2.1)–(2.6), (2.13) и (2.1)–(2.5), (2.7), (2.14) имеют единственные решения. При $\omega = 0$ существует единственное решение задачи (2.1)–(2.6), (2.14).*

Пусть $\lambda > 0$. Определим тензор σ_λ соотношением

$$\sigma_\lambda(\vec{x}) = \begin{cases} \sigma(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_C, \\ \lambda I, & \vec{x} \in \Omega_I, \end{cases}$$

где I – единичная матрица.

Рассмотрим задачи (2.8), в которых тензор σ заменён на σ_λ :

$$\text{rot} \vec{H}_\lambda = \sigma_\lambda \vec{E}_\lambda + \vec{J}^{\text{ct}}, \quad \text{rot} \vec{E}_\lambda = -i\omega \mu \vec{H}_\lambda. \quad (2.15)$$

Т е о р е м а 2.4. Система (2.15) имеет единственное решение $\vec{H}_\lambda \in V^1(\mu; \Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H(\text{rot}; \Omega)$ и единственное решение $\vec{H}_\lambda \in V^2(\mu; \Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H_0(\text{rot}; \Omega)$.

Т е о р е м а 2.5. При $\lambda \rightarrow 0$ решение $\vec{H}_\lambda \in V^j(\mu; \Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H(\text{rot}; \Omega)$ ($j = 1, 2$) системы (2.15) стремится к решению $\vec{H} \in V^j(\mu; \Omega)$, $\vec{E} \in H(\text{rot}; \Omega)$ системы (2.8) по норме пространства $H(\text{rot}; \Omega)$. При $\lambda < 1$ справедливы оценки

$$\|\vec{H}_\lambda - \vec{H}\|_{\text{rot}, \Omega} \leq C\sqrt{\lambda}\|\vec{J}^{cm}\|_{2, \Omega}, \quad \|\vec{E}_\lambda - \vec{E}\|_{\text{rot}} \leq C\sqrt{\lambda}\|\vec{J}^{cm}\|_{2, \Omega},$$

где постоянная $C > 0$ не зависит от λ .

3. Предварительные утверждения

Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – открытая ограниченная односвязная область с липшицевой границей Γ , $\vec{\nu}(\vec{x})$ – единичный вектор внешней нормали в точке $\vec{x} \in \Gamma$. Справедливы следующие утверждения [14], [20].

Л е м м а 3.1. Для любой функции $\vec{u} \in K(\text{rot}; G)$ найдется функция $p \in H^1(G)$ такая, что $\vec{u} = \text{grad} p$. Если при этом $\vec{u} \in H_0(\text{rot}; G)$, то можно взять $p \in H_0^1(G)$.

Л е м м а 3.2. (неравенство Пуанкаре). Найдётся такая постоянная $T(G) > 0$, зависящая только от области G , что для всех $p \in H^1(G)$

$$\int_G p^2 d\vec{x} \leq T(G) \left(\int_G (\text{grad} p)^2 d\vec{x} + \left| \int_G p d\vec{x} \right|^2 \right).$$

Л е м м а 3.3. (неравенство Фридрикса) Пусть $\Gamma_1 \subset \Gamma$, $\text{mes}(\Gamma_1) > 0$. Найдётся такая постоянная $A(G, \Gamma_1) > 0$, зависящая только от G и Γ_1 , что для всех $p \in H^1(G)$

$$\int_G p^2 d\vec{x} \leq A(G, \Gamma_1) \left(\int_G (\text{grad} p)^2 d\vec{x} + \left| \int_{\Gamma_1} p d\gamma \right|^2 \right). \quad (3.1)$$

Л е м м а 3.4. Пусть $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$ удовлетворяет условию $\langle f, 1 \rangle = 0$. Тогда найдётся функция $\vec{u} \in K(\text{div}; G)$ такая, что $\gamma_\nu \vec{u} = f$ и $\|\vec{u}\|_{2, G} \leq C_\nu \|f\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$, где константа $C_\nu > 0$ зависит только от области G .

Пусть $B \subset \mathbb{R}^3$ – некоторый открытый шар такой, что $\bar{G} \subset B$. Из доказанных в [15] оценок вытекают следующие неравенства.

Л е м м а 3.5. Существует такая постоянная $C_1(B) > 0$ зависящая только от области B , что для всех $\vec{u} \in H_0(\text{rot}; B)$, $\vec{v} \in H(\text{div}; B)$

$$|(\vec{u}, \vec{v})_{2, B}| \leq C_1(B) (\|\vec{u}\|_{2, B} \|\text{div} \vec{v}\|_{2, B} + \|\vec{v}\|_{2, B} \|\text{rot} \vec{u}\|_{2, B}), \quad (3.2)$$

для всех $\vec{u} \in H(\text{rot}; B)$, $\vec{v} \in H_0(\text{div}; B)$

$$|(\vec{u}, \vec{v})_{2, B}| \leq C_1(B) (\|\vec{u}\|_{2, B} \|\text{div} \vec{v}\|_{2, B} + \|\vec{v}\|_{2, B} \|\text{rot} \vec{u}\|_{2, B} + \|\text{rot} \vec{u}\|_{2, B} \|\text{div} \vec{v}\|_{2, B}). \quad (3.3)$$

Далее предполагается, что липшицева область G гомеоморфна шару. Справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 3.6. *Существует линейный ограниченный оператор продолжения $E_{div} : H(\operatorname{div}; G) \rightarrow H(\operatorname{div}; B)$, удовлетворяющий условию*

$$\operatorname{div} E_{div}(\vec{u})(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in B \setminus \bar{G}, \quad \vec{u} \in H(\operatorname{div}; G).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{u} \in H(\operatorname{div}; G)$. Согласно теореме 2.1. $\gamma_\nu \vec{u} \in H^{-1/2}(\Gamma)$, $\|\gamma_\nu \vec{u}\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \leq \|\vec{u}\|_{div, G}$. Через $\vec{\nu}_e$ обозначается вектор внешней по отношению к области $B \setminus \bar{G}$ нормали к границе $\Gamma \cup \partial B$, $\vec{\nu}_e(\vec{x}) = -\vec{\nu}(\vec{x})$ при $\vec{x} \in \Gamma$. Существует единственное решение $p \in H^1(B \setminus \bar{G})$ задачи Неймана

$$\Delta p(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in B \setminus \bar{G},$$

$$\frac{\partial p}{\partial \nu_e}(\vec{x}) = -\gamma_\nu \vec{u}(\vec{x}), \quad x \in \Gamma, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu_e}(\vec{x}) = \operatorname{const} = \langle \gamma_\nu \vec{u}, \operatorname{mes}^{-1}(\partial B) \rangle, \quad \vec{x} \in \partial B,$$

удовлетворяющее условию $\int_{B \setminus \bar{G}} p(\vec{x}) d\vec{x} = 0$ [14]. При этом справедливо неравенство

$$\|\operatorname{grad} p\|_{2, B \setminus \bar{G}} \leq \|\gamma_0\| (T(B \setminus \bar{G}) + 1)^{1/2} \|\partial p / \partial \nu_e\|_{H^{-1/2}(\Gamma \cup \partial B)},$$

где $T(B \setminus \bar{G})$ – константа из неравенства Пуанкаре, $\gamma_0 : H^1(B \setminus \bar{G}) \rightarrow H^{1/2}(\partial B \cup \Gamma)$ – оператор следа. Таким образом, $\|\operatorname{grad} p\|_{2, B \setminus \bar{G}} \leq C \|\vec{u}\|_{div, G}$, где постоянная $C > 0$ зависит только от G и B . Положим

$$E_{div}(\vec{u})(\vec{x}) = \begin{cases} \vec{u}(\vec{x}), & \vec{x} \in G, \\ \operatorname{grad} p(\vec{x}), & \vec{x} \in B \setminus \bar{G}. \end{cases}$$

По построению $E_{div}(\vec{u}) \in H(\operatorname{div}; G)$,

$$\|E_{div}(\vec{u})\|_{2, B}^2 = \|\vec{u}\|_{2, G}^2 + \|\operatorname{grad} p\|_{2, B \setminus \bar{G}}^2 \leq (1 + C^2) \|\vec{u}\|_{div, G}^2.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 3.7. *Существует линейный ограниченный оператор продолжения $E_{rot} : H(\operatorname{rot}; G) \rightarrow H(\operatorname{rot}; B)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{u} \in H(\operatorname{rot}; G)$. Тогда $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{u} \in K(\operatorname{div}; G)$. Применяя лемму 3.6., определяем функцию $E_{div}(\vec{F}) = \vec{F}^* \in K(\operatorname{div}; B)$, причём $\|\vec{F}^*\|_{2, B} \leq \|E_{div}\| \|\vec{F}\|_{2, G}$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма найдётся единственная функция $\vec{u}^* \in H(\operatorname{rot}; B) \cap K_0(\operatorname{div}; B)$, при всех $\vec{v} \in H(\operatorname{rot}; B) \cap K_0(\operatorname{div}; B)$ удовлетворяющая равенству

$$\int_B (\operatorname{rot} \vec{u}^* \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \int_B (\vec{F}^* \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x}.$$

Можно показать [15], что из этого равенства вытекает, что $\operatorname{rot} \vec{u}^* = \vec{F}^*$ и при этом, согласно оценке (3.3),

$$\|\vec{u}^*\|_{rot, B} \leq (1 + C_1^2(B))^{1/2} \|\vec{F}^*\|_{2, B}.$$

Таким образом, построен линейный ограниченный оператор, ставящий в соответствие функции $\vec{F} = \operatorname{rot} \vec{u} \in K(\operatorname{div}; G)$ функцию $\vec{u}^* \in H(\operatorname{rot}; B)$ такую, что

$$\operatorname{rot} \vec{u}^*(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G. \quad (3.4)$$

Обозначим построенный оператор через $E^* : K(\operatorname{div}; G) \rightarrow H(\operatorname{rot}; B)$. В соответствии с (3.4) можно записать

$$\operatorname{rot} E^*(\operatorname{rot} \vec{u})(\vec{x}) = \operatorname{rot} \vec{u}(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G.$$

Очевидно, $\|E^*\| \leq (1 + C_1^2(B))^{1/2} \|E_{div}\|$. Из леммы 3.1. следует, что для некоторого $q \in H^1(G)$, удовлетворяющего условию $\int_G q(\vec{x}) d\vec{x} = 0$, выполнено

$$\vec{u}(\vec{x}) - E^*(\operatorname{rot} \vec{u})(\vec{x}) = \operatorname{grad} q(\vec{x}), \quad \vec{x} \in G.$$

Определим $q^* \in H^1(B)$ как

$$q^*(\vec{x}) = \begin{cases} q(\vec{x}), & \vec{x} \in G, \\ \tilde{q}(\vec{x}), & \vec{x} \in B \setminus G, \end{cases}$$

где $\tilde{q}$ – решение задачи

$$\Delta \tilde{q}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in B \setminus \bar{G}, \quad \tilde{q}(\vec{x}) = q(\vec{x}), \quad \vec{x} \in \Gamma, \quad \tilde{q}(\vec{x}) = 0, \quad \vec{x} \in \partial B.$$

Тогда, согласно теореме 2.1.,

$$\begin{aligned} \|\operatorname{grad} \tilde{q}\|_{2, B \setminus \bar{G}} &\leq \|\gamma_0\| (T(G) + 1)^{1/2} \|\operatorname{grad} q\|_{2, G} \leq \|\gamma_0\| (T(G) + 1)^{1/2} (\|\vec{u}\|_{2, G} + \|E^*(\operatorname{rot} \vec{u})\|_{2, G}) \leq \\ &\leq \|\gamma_0\| (T^2(G) + 1)^{1/2} (1 + (1 + C_1^2(B))^{1/2} \|E_{div}\|) \|\vec{u}\|_{\operatorname{rot}, G}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\|\operatorname{grad} q^*\|_{2, G}^2 = \|\operatorname{grad} q\|_{2, G}^2 + \|\operatorname{grad} \tilde{q}\|_{2, B \setminus \bar{G}}^2 \leq C(G, B) \|\vec{u}\|_{\operatorname{rot}, G}^2,$$

где $C(G, B) = (1 + (1 + C_1^2(B)) \|E_{div}\|^2) (1 + 2\|\gamma_0\|^2 (T(G) + 1))$. Положив

$$E_{\operatorname{rot}}(\vec{u}) = E^*(\operatorname{rot} \vec{u}) + \operatorname{grad} q^*(\vec{x}),$$

получим утверждение леммы, $\|E_{\operatorname{rot}}\| \leq (1 + C_1^2(B))^{1/2} \|E_{div}\| + C^{1/2}(G, B)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Из лемм 3.5.–3.7. вытекает следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.1. Пусть $G \subset \mathbb{R}^3$ – открытое ограниченное множество с липшицевой границей, гомеоморфное шару. Существует постоянная $C(G) > 0$, зависящая только от области G такая, что неравенство

$$|(\vec{u}, \vec{v})_{2, G}| \leq C(G) (\|\vec{u}\|_{2, G} \|\operatorname{div} \vec{v}\|_{2, G} + \|\vec{v}\|_{2, G} \|\operatorname{rot} \vec{u}\|_{2, G} + \|\operatorname{rot} \vec{u}\|_{2, G} \|\operatorname{div} \vec{v}\|_{2, G}) \quad (3.5)$$

выполняется для любых $\vec{u} \in H_0(\operatorname{rot}; G)$, $\vec{v} \in H(\operatorname{div}; G)$, а также для любых $\vec{u} \in H(\operatorname{rot}; G)$, $\vec{v} \in H_0(\operatorname{div}; G)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{u} \in H_0(\operatorname{rot}; G)$, $\vec{v} \in H(\operatorname{div}; G)$. Функцию $\vec{u}$ продолжим нулём до функции из $H_0(\operatorname{rot}; B)$. Положим $\vec{v}^* = E_{div}(\vec{v})$. Применяя неравенство (3.2), получим

$$|(\vec{u}, \vec{v}^*)_{2, B}| \leq C_1(B) (\|\vec{u}\|_{2, B} \|\operatorname{div} \vec{v}^*\|_{2, B} + \|\vec{v}^*\|_{2, B} \|\operatorname{rot} \vec{u}\|_{2, B}).$$

Учитывая, что в левой части неравенства можно перейти к интегрированию по области G , $\|\vec{u}\|_{2, B} = \|\vec{u}\|_{2, G}$, $\|\operatorname{rot} \vec{u}\|_{2, B} = \|\operatorname{rot} \vec{u}\|_{2, G}$, получаем

$$\begin{aligned} |(\vec{u}, \vec{v})_{2, G}| &\leq C_1(B) (\|\vec{u}\|_{2, G} \|\operatorname{div} \vec{v}^*\|_{2, B} + \|\vec{v}^*\|_{2, B} \|\operatorname{rot} \vec{u}\|_{2, G}) \leq \\ &\leq C_1(B) (\|\vec{u}\|_{2, G} \|\operatorname{div} \vec{v}\|_{2, G} + \|E_{div}\| (\|\vec{v}\|_{2, G} + \|\operatorname{div} \vec{v}\|_{2, G}) \|\operatorname{rot} \vec{u}\|_{2, G}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо неравенство (3.5), где в качестве $C(G)$ можно взять $C(G) = C_1(B) \max\{1, \|E_{div}\|\}$.

Пусть $\vec{u} \in H(\text{rot}; G)$, $\vec{v} \in H_0(\text{div}; G)$. Функцию $\vec{v}$ продолжаем нулём до функции из $H_0(\text{div}; B)$. Положим $\vec{u}^* = E_{rot}(\vec{u})$. Применяя неравенство (3.3), получим

$$|(\vec{u}^*, \vec{v})_{2,B}| \leq C_1(B) (\|\vec{u}^*\|_{2,B} \|\text{div} \vec{v}\|_{2,B} + \|\vec{v}\|_{2,B} \|\text{rot} \vec{u}^*\|_{2,B} + \|\text{div} \vec{v}\|_{2,B} \|\text{rot} \vec{u}^*\|_{2,B}).$$

Учитывая, что в левой части неравенства можно перейти к интегрированию по области G , $\|\vec{v}\|_{2,B} = \|\vec{v}\|_{2,G}$, $\|\text{div} \vec{v}\|_{2,B} = \|\text{div} \vec{v}\|_{2,G}$, получаем

$$\begin{aligned} |(\vec{u}, \vec{v})_{2,G}| &\leq C_1(B) (\|\vec{u}^*\|_{2,B} \|\text{div} \vec{v}\|_{2,G} + \|\vec{v}\|_{2,G} \|\text{rot} \vec{u}^*\|_{2,B} + \|\text{div} \vec{v}\|_{2,G} \|\text{rot} \vec{u}^*\|_{2,B}) \leq \\ &\leq C_1(B) (\|E_{rot}\| \|\vec{u}\|_{\text{rot},G} \|\text{div} \vec{v}\|_{2,G} + \|E_{div}\| \|\text{rot} \vec{u}\|_{2,G} \|\vec{v}\|_{\text{div},G}). \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо неравенство (3.5), где в качестве $C(G)$ можно взять $C(G) = C_1(B)(\|E_{div}\| + \|E_{rot}\|)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Пусть $\eta : \{L_2(G)\}^3 \rightarrow \{L_2(G)\}^3$ – непрерывный линейный самосопряженный оператор такой, что при некоторых $\eta_1, \eta_2 > 0$

$$\eta_1 \|\vec{u}\|_{2,G}^2 \leq (\eta \vec{u}, \vec{u})_{2,G} \leq \eta_2 \|\vec{u}\|_{2,G}^2$$

для всех $\vec{u} \in \{L_2(G)\}^3$. Обозначим через $\{L_2(\eta; G)\}^3$ пространство $\{L_2(G)\}^3$, снабженное скалярным произведением $(\vec{u}, \vec{v})_\eta = (\eta \vec{u}, \vec{v})_{2,G}$. Справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 3.8. *Ортогональное дополнение к $K(\text{div} \eta; G)$ в $\{L_2(\eta; G)\}^3$ совпадает с подпространством $K_0(\text{rot}; G)$.*

Л е м м а 3.9. *Ортогональное дополнение к $K_0(\text{div} \eta; G)$ в $\{L_2(\eta; G)\}^3$ совпадает с подпространством $K(\text{rot}; G)$.*

Предположим, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ удовлетворяет условиям, сформулированным при постановке краевых задач.

Л е м м а 3.10. *Пусть $K_{0,I}(\text{div}; \Omega_I) = \{\vec{w} \in K(\text{div}; \Omega_I) : \langle \gamma_\nu \vec{w}, 1 \rangle_\Gamma = 0\}$. Существует линейный непрерывный оператор продолжения $E_{div}^C : K_{0,I}(\text{div}; \Omega_I) \rightarrow K(\text{div}; \Omega)$. Если при этом $\vec{w}_\nu(\vec{x}) = 0$, $\vec{x} \in \Gamma$, то $E_{div}^C \vec{w} \in K_0(\text{div}; \Omega)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\vec{w} \in K_{0,I}(\text{div}; \Omega_I)$. Тогда $\langle \gamma_{\nu_I} \vec{w}, 1 \rangle_{\Gamma_j} = 0$, $j = 0, 1$. Существует единственное решение $p \in H^1(\Omega_C)$ задачи Неймана

$$\Delta p(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Omega_C, \frac{\partial p(\vec{x})}{\partial \nu_C} = -\gamma_{\nu_I} \vec{w}(\vec{x}), \vec{x} \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1,$$

такое, что $\int_{\Omega_C} p d\vec{x} = 0$. Для любой функции $q \in H^1(\Omega_C)$

$$\int_{\Omega_C} (\text{grad} p \cdot \text{grad} q) d\vec{x} = -\langle \gamma_{\nu_I} \vec{w}, \gamma_0 q \rangle.$$

Поэтому

$$\|\text{grad} p\|_{2,\Omega_C} \leq C \|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I},$$

где $C = \|\gamma_0\|(1 + T(\Omega_C))^{1/2}$, $\gamma_0 : H^1(\Omega_C) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma_0 \cup \Gamma_1)$ – оператор следа.

Определим функцию $\vec{v} \in K(\operatorname{div}; \Omega)$ соотношением

$$\vec{v}(\vec{x}) = \begin{cases} \operatorname{grad} p(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_C, \\ \vec{w}(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_I. \end{cases}$$

Положим $E_{div}^C \vec{w} = \vec{v}$,

$$\|E_{div}^C \vec{w}\| = \|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq \sqrt{C^2 + 1} \|\vec{w}\|_{2,\Omega_I}.$$

Доказательство закончено.

Л е м м а 3.11. *Найдётся такая постоянная $T(\Omega_C, \Omega_I) > 0$, зависящая только от областей Ω_C, Ω_I , что для всех функций $\vec{w} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, удовлетворяющих условиям $\vec{w}_I \in K_{0,I}(\operatorname{div}; \Omega_I)$ и таких, что либо $\vec{w}_\nu(\vec{x}) = 0$, либо $\vec{w}_\tau(\vec{x}) = 0$ при $\vec{x} \in \Gamma$, справедливо неравенство*

$$\|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I} \leq T(\Omega_C, \Omega_I) (\|\vec{w}_C\|_{2,\Omega_C} + \|\operatorname{rot} \vec{w}\|_{2,\Omega}). \quad (3.6)$$

Доказательство. Пусть $\vec{w}$ удовлетворяет условиям леммы. Положим, в соответствии с леммой 3.10., $\vec{v} = E_{div}^C \vec{w}_I \in K(\operatorname{div}; \Omega)$. При этом, по условию, либо $\vec{w} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, либо $\vec{v} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega)$.

Применяя к функциям $\vec{v}, \vec{w}$ неравенство (3.5), получаем

$$(\vec{w}, \vec{v})_{2,\Omega} = (\vec{v}_C, \vec{w}_C)_{2,\Omega_C} + \|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I}^2 \leq C(\Omega) \|\vec{v}\|_{2,\Omega} \|\operatorname{rot} \vec{w}\|_{2,\Omega} \leq C(\Omega) \|E_{div}^C\| \|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I} \|\operatorname{rot} \vec{w}\|_{2,\Omega},$$

$$\|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I}^2 \leq C(\Omega) \|E_{div}^C\| \|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I} \|\operatorname{rot} \vec{w}\|_{2,\Omega} + \|E_{div}^C\| \|\vec{w}_I\|_{2,\Omega_I} \|\vec{w}_C\|_{2,\Omega}.$$

Таким образом, справедливо неравенство (3.6), где можно взять

$$T(\Omega_C, \Omega_I) = (C(\Omega) + 1) \|E_{div}^C\|$$

Доказательство закончено.

4. Доказательство основных результатов

Доказательство теоремы 2.2.

Пусть $\vec{v} \in V^j(\mu; \Omega)$. Применяя неравенство (3.5) к функциям $\vec{v} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\mu \vec{v} \in K(\operatorname{div}; \Omega)$ или $\vec{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\mu \vec{v} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega)$, получаем

$$\|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|\operatorname{rot} \vec{v}\|_{2,\Omega}, \quad (4.1)$$

где $C_1 = \mu_2 \mu_1^{-1} C(\Omega)$. В частности, если $\vec{v} \in V_0^j(\mu; \Omega)$, $\|\vec{v}\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|\operatorname{rot} \vec{v}\|_{2,\Omega_C}$.

Согласно лемме 3.10., найдётся функция $\vec{J}_1 \in K_0(\operatorname{div}; \Omega)$ (соответственно, $\vec{J}_1 \in K(\operatorname{div}; \Omega)$) такая, что $\vec{J}_{1I} = \vec{J}_I^{\operatorname{ct}}$.

Согласно лемме Лакса-Мильграма, возможность применения которой вытекает из неравенства (4.1), найдётся единственная функция $\vec{H}_1 \in V^j(\mu; \Omega)$, при всех $\vec{v} \in V^j(\mu; \Omega)$ удовлетворяющая равенству

$$\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{H}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \int_{\Omega} (\vec{J}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x}.$$

Из лемм 3.8., 3.9. следует, что равенство справедливо для всех $\vec{v} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ или $\vec{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ соответственно, поэтому $\operatorname{rot} \vec{H}_1 - \vec{J}_1 \in K(\operatorname{rot}; \Omega) \cap K_0(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{0}\}$ или $\operatorname{rot} \vec{H}_1 - \vec{J}_1 \in K_0(\operatorname{rot}; \Omega) \cap K(\operatorname{div}; \Omega) = \{\vec{0}\}$, то есть $\operatorname{rot} \vec{H}_1 = \vec{J}_1$.

Будем искать решение $\vec{H} \in V^j(\mu; \Omega)$ задачи (2.11), (2.12) в виде $\vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_1$. Тогда $\vec{H}_0 \in V_0^j(\mu; \Omega)$ и при всех $\vec{v} \in V_0^j(\mu; \Omega)$ удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H}_0 \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{H}_0 \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \\ = \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \vec{J}^{\text{ct}} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x} - \int_{\Omega} (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{H}_1 \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x} - i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H}_1 \cdot \vec{v}) d\vec{x}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из (4.1) вытекает, что билинейная форма $a(\vec{u}, \vec{v}) = i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{u} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x}$ коэрцитивна на $V_0^j(\mu; \Omega)$. Следовательно, задача (4.2) имеет единственное решение.

Предположим, $\vec{h} \in V^j(\mu; \Omega)$ – разность двух решений задачи (2.11), (2.12). Тогда $\vec{h} \in V_0^j(\mu; \Omega)$ и для всех $\vec{v} \in V_0^j(\mu; \Omega)$

$$i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{h} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega_C} (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{h} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x} = 0.$$

Отсюда следует, что $\vec{h} = 0$ и единственность решения установлена.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.3.

Пусть $\vec{H} \in V^j(\mu; \Omega)$, $j = 1, 2$ – решение задачи (2.11), (2.12). Положим $\vec{E}^c = \sigma^{-1}(\operatorname{rot} \vec{H} - \vec{J}^{\text{ct}})$. Рассмотрим произвольную функцию $\vec{w} \in \{\mathcal{D}(\Omega_C)\}^3$. Продолжая её нулём в Ω_I , получаем функцию из $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Согласно леммам 3.8., 3.9., $\vec{w} = \vec{v} + \operatorname{grad} \phi$, где либо $\operatorname{div} \mu \vec{v} = 0$, $\phi \in H_0^1(\Omega)$, либо $\mu \vec{v} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega)$, $\phi \in H^1(\Omega)$ при $j = 1, 2$ соответственно. Так как $\operatorname{rot} \vec{w} = \operatorname{rot} \vec{v}$, $\vec{v} \in V_0^j(\mu; \Omega)$. Таким образом,

$$\int_{\Omega_C} (\vec{E}^c \cdot \operatorname{rot} \vec{w}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H} \cdot \vec{v}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega_C} (\mu \vec{H} \cdot \vec{w}) d\vec{x},$$

следовательно, $\operatorname{rot} \vec{E}^c = -i\omega \mu \vec{H}$.

В случае задачи (2.1)–(2.6), (2.13) нужно найти функцию $\vec{E} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ такую, что

$$\vec{E}_C = \vec{E}^c, \operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}, \operatorname{div} \varepsilon \vec{E}_I = \rho_0, \gamma_{\nu} \varepsilon \vec{E}(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Gamma. \quad (4.3)$$

Согласно лемме Лакса-Мильграма, возможность применения которой вытекает из неравенства (3.5), существует единственная функция $\vec{e} \in K_0(\operatorname{div} \varepsilon; \Omega) \cap H(\operatorname{rot}; \Omega)$, при всех $\vec{v} \in K_0(\operatorname{div} \varepsilon; \Omega) \cap H(\operatorname{rot}; \Omega)$ удовлетворяющая равенству

$$\int_{\Omega} (\operatorname{rot} \vec{e} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}) d\vec{x}.$$

Ввиду леммы 3.9. это равенство справедливо для всех $\vec{v} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$, следовательно, согласно лемме 2.1. $\operatorname{rot} \vec{e} + i\omega \mu \vec{H} \in K_0(\operatorname{rot}; \Omega) \cap K(\operatorname{div}; \Omega)$. Таким образом, $\operatorname{rot} \vec{e} = -i\omega \mu \vec{H}$.

Согласно лемме 3.1. $\vec{E}^c - \vec{e}_C = \operatorname{grad} p_c$, $p_c \in H^1(\Omega_C)$, $\int_{\Omega_C} p_c d\vec{x} = 0$.

Пусть $p_0 \in H^1(\Omega_0)$, $p_1 \in H^1(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$ – решения задач Дирихле

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p_0(\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega_0, p_0(\vec{x}) = p_c(\vec{x}), \vec{x} \in \Gamma_0, \quad (4.4)$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} p_1(\vec{x}) = \rho_0(\vec{x}), \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1, p_1(\vec{x}) = p_c(\vec{x}), \vec{x} \in \Gamma_1, p_1(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Gamma. \quad (4.5)$$

Пусть, далее,

$$H_1 = \{q \in H^1(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1) : q(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Gamma_1\},$$

функция $p_2 \in H_1$ при всех $q \in H_1$ удовлетворяет равенству

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} (\epsilon \operatorname{grad} p_2 \cdot \operatorname{grad} \bar{q}) d\vec{x} = -\langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon \operatorname{grad} p_1), q \rangle_{\Gamma}.$$

Функцию $\psi \in H^1(\Omega)$ определим выражением

$$\psi(\vec{x}) = \begin{cases} p_c(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_C, \\ p_0(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_0, \\ p_1(\vec{x}) + p_2(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1. \end{cases}$$

Тогда функция $\vec{E} = \vec{e} + \operatorname{grad} \psi$ – решение задачи (4.3).

Если $\vec{u}$ – разность двух решений задачи (4.3), то $\vec{u} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$, $\vec{u}_C = 0$, $\operatorname{div} \epsilon \vec{u}_I = 0$, $\gamma_{\nu}(\epsilon \vec{u}) = 0$. Согласно лемме 3.10., найдётся функция $\vec{v} \in K_0(\operatorname{div}; \Omega)$ такая, что $\vec{v}_I = \epsilon \vec{u}_I$. Тогда

$$0 = (\vec{u}, \vec{v})_{2,\Omega} = (\epsilon \vec{u}_I, \vec{u}_I)_{2,\Omega_I},$$

то есть $\vec{u}_I = 0$ и, следовательно, $\vec{u} = 0$.

Рассмотрим теперь задачу (2.1)–(2.5), (2.7), (2.14) и, при $\omega = 0$, задачу (2.1)–(2.6), (2.14). Функция $\vec{E} \in H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ должна удовлетворять условиям

$$\vec{E}_C = \vec{E}^c, \operatorname{rot} \vec{E} = -i\omega \mu \vec{H}, \operatorname{div} \epsilon \vec{E}_I = \rho_0, \langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon \vec{E}), 1 \rangle_{\Gamma_1} = Q. \quad (4.6)$$

Определим функцию $\vec{e} \in K(\operatorname{div} \epsilon; \Omega) \cap H_0(\operatorname{rot}; \Omega)$ такую, что $\operatorname{rot} \vec{e} = -i\omega \mu \vec{H}$, $\vec{E}^c - \vec{e}_C = \operatorname{grad} p_c + \alpha$, где $p_c \in H^1(\Omega_C)$, $\int_{\Omega_C} p_c d\vec{x} = 0$, α – произвольная константа.

Пусть $p_0 \in H^1(\Omega_0)$, $p_1 \in H^1(\Omega \setminus \bar{\Omega}_1)$ – решения задач (4.4), (4.5). Положим $Q_1 = Q - \langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon \operatorname{grad} p_1), 1 \rangle_{\Gamma_1}$, $\phi_1 \in H_0^1(\Omega)$ определим выражением

$$\phi_1(\vec{x}) = \begin{cases} p_c(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_C, \\ p_0(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega_0, \\ p_1(\vec{x}), & \vec{x} \in \Omega \setminus \bar{\Omega}_1 \end{cases}$$

Обозначим

$$H_2 = \{\psi \in H_0^1(\Omega) : \psi(\vec{x}) = \text{const}, \vec{x} \in \Omega_1\}$$

– гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(\psi, \xi)_{H_2} = \int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} (\operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \xi) d\vec{x}.$$

Рассмотрим задачу определения функции $\phi_2 \in H_2$, при всех $\psi \in H_2$ удовлетворяющей равенству

$$\int_{\Omega \setminus \bar{\Omega}_1} (\epsilon \operatorname{grad} \phi_2 \cdot \operatorname{grad} \psi) d\vec{x} = \psi_1 Q_1, \quad (4.7)$$

где $\psi_1 = \psi(\vec{x})$, $\vec{x} \in \Omega_1$. Согласно неравенству Фридрихса (3.1), $\psi_1^2 \operatorname{mes}(\Omega_1) \leq A(\Omega, \Gamma) \|\psi\|_{H_2}^2$ для всех $\psi \in H_2$, линейный функционал $l : H_2 \rightarrow R^1$, $l(\psi) = Q_1 \psi_1$ – непрерывный. Таким образом, задача (4.7) имеет единственное решение. Из (4.7) следует, что

$$\operatorname{div} \epsilon \operatorname{grad} \phi_2(\vec{x}) = 0, \vec{x} \in \Omega_I, \langle \gamma_{\nu}(\epsilon \operatorname{grad} \phi_2), 1 \rangle_{\Gamma} = Q_1.$$

Следовательно, $\vec{E} = \vec{e} + \operatorname{grad}(\phi_1 + \phi_2)$ – решение задачи (4.6).

Пусть $\vec{u} \in H_0(\text{rot}; \Omega) \cap K(\text{rot}; \Omega)$ – разность двух решений задачи (4.6), тогда $\vec{u}_C = 0$. Так как $\langle \gamma_{\nu_I}(\epsilon \vec{u}), 1 \rangle_{\Gamma_j} = 0$, $j = 0, 1$, согласно лемме 3.4. найдётся функция $\vec{v} \in K(\text{div}; \Omega)$ такая, что $\vec{v}_I = \epsilon \vec{u}_I$. Таким образом, $0 = (\vec{v}, \vec{u})_{2,\Omega} = (\epsilon \vec{u}_I, \vec{u}_I)_{2,\Omega_I}$, $\vec{u}_I = 0$.

Пусть теперь $\vec{H} \in V^1(\mu; \Omega)$, $\vec{E} \in H(\text{rot}; \Omega)$ – решение системы (2.8). Положим $\vec{B} = \mu \vec{H} \in K(\text{div}; \Omega)$, $\vec{J} = \text{rot} \vec{H} \in K(\text{div}; \Omega)$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E} \in \{L_2(\Omega)\}^3$. Очевидно, выполнены соотношения (2.1), (2.3), (2.5). Пользуясь соотношением (2.4), определим функционал $\rho \in H^{-1}(\Omega)$. Таким образом, найдено решение задачи (2.1) – (2.6). Решение задачи (2.1)–(2.5), (2.7) строится аналогично. Единственность решения задач вытекает из единственности определения $\vec{H}$ и $\vec{E}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.4.

Задачи (2.15) сводятся к задачам поиска функций $\vec{H}_\lambda \in V^j(\mu; \Omega)$, $j = 1, 2$, при всех $\vec{v} \in V^j(\sigma_\lambda; \Omega)$ удовлетворяющим равенству

$$i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H} \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\sigma_\lambda^{-1} \text{rot} \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \int_{\Omega} (\sigma_\lambda^{-1} \vec{J}^{\text{ct}} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x}. \quad (4.8)$$

Из леммы Лакса-Мильграма вытекает, что задача (4.8) имеет единственное решение. Положим $\vec{E}_\lambda = \sigma_\lambda^{-1}(\text{rot} \vec{H}_\lambda - \vec{J}^{\text{ct}})$. Пусть $\vec{\psi} \in \{\mathcal{D}(\Omega)\}^3$. Согласно леммам 3.8., 3.9. $\vec{\psi} = \vec{v} + \text{grad} \phi$, где либо $\mu \vec{v} \in K(\text{div}; \Omega)$, $\phi \in H_0^1(\Omega)$, либо $\mu \vec{v} \in K_0(\text{div}; \Omega)$, $\phi \in H^1(\Omega)$. Поскольку $\text{rot} \vec{\psi} = \text{rot} \vec{v}$, $\vec{v} \in V^j(\mu; \Omega)$. Получаем

$$\int_{\Omega} (\vec{E}_\lambda \cdot \text{rot} \vec{\psi}) d\vec{x} = \int_{\Omega} (\sigma_\lambda^{-1}(\text{rot} \vec{H}_\lambda - \vec{J}^{\text{ct}}) \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H} \cdot \vec{v}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega} (\mu \vec{H} \cdot \vec{\psi}) d\vec{x},$$

то есть $\vec{H}$, $\vec{E}$ – решение (2.15).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 2.5.

Пусть $\vec{H}_\lambda \in V^1(\mu; \Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H(\text{rot}; \Omega)$ – решение системы (2.15). Случай, когда $\vec{H}_\lambda \in V^2(\mu; \Omega)$, $\vec{E}_\lambda \in H_0(\text{rot}; \Omega)$, рассматривается аналогично. Из (2.15) вытекает, что $\vec{E}_\lambda$ удовлетворяет условиям леммы 3.11.,

$$\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega} \leq (T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)^{1/2} (\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} + \|\text{rot} \vec{E}\|_{2,\Omega}).$$

Пусть $\omega > 0$. Тогда для всех $\vec{v} \in H(\text{rot}; \Omega)$

$$i\omega \int_{\Omega} (\sigma_\lambda \vec{E}_\lambda \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\mu^{-1} \text{rot} \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = -i\omega \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{v}) d\vec{x}. \quad (4.9)$$

Положив в (4.9) $\vec{v} = \vec{E}_\lambda$, получаем

$$\sigma_1 \|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C}^2 + \lambda \|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_I}^2 + (\omega \mu_2)^{-1} \|\text{rot} \vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega}^2 \leq (2T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 2)^{1/2} \|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega} (\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} + \|\text{rot} \vec{E}\|_{2,\Omega}),$$

$$\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} + \|\text{rot} \vec{E}\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_1 = 2(2T(\Omega_C, \Omega_I) + 2)^{1/2} \max\{\sigma_1^{-1}, \omega \mu_2\}$.

Обозначим $\vec{E}_1 = \vec{E}_{\lambda_1}$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_{\lambda_2}$ при произвольных $\lambda_1, \lambda_2 > 0$. Из равенств (4.9) вытекает, что для всех $\vec{v} \in H(\text{rot}; \Omega)$

$$\begin{aligned} i\omega \int_{\Omega_C} (\sigma(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{v}) d\vec{x} + i\omega \lambda_2 \int_{\Omega_I} ((\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{v}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\mu^{-1} \text{rot}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \text{rot} \vec{v}) d\vec{x} = \\ = i\omega(\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega_I} (\vec{E}_1 \cdot \vec{v}) d\vec{x}. \end{aligned}$$

Положив $\vec{v} = \vec{E}_2 - \vec{E}_1$, получаем

$$\begin{aligned} \omega\sigma_1\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_C}^2 + \omega\lambda_2\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}^2 + \mu_2^{-1}\|\operatorname{rot}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\|_{2,\Omega}^2 &\leq \\ &\leq \sqrt{2}\omega|\lambda_1 - \lambda_2|\|\vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}, \\ \omega\sigma_1\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_C}^2 + \frac{1}{2}\omega\lambda_2\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}^2 + \mu_2^{-1}\|\operatorname{rot}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\|_{2,\Omega}^2 &\leq \\ &\leq \omega\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}{\lambda_2}\|\vec{E}_1\|_{2,\Omega_I}^2 \leq \omega\frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}{\lambda_2}C_1^2T^2(\Omega_C, \Omega_I)\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega}^2. \end{aligned}$$

Пусть, без ограничения общности, $\lambda_2 > \lambda_1$. Тогда

$$\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega}^2 \leq (2T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)(\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega_C}^2 + \|\operatorname{rot}(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\|_{2,\Omega}^2) \leq C_2^2|\lambda_1 - \lambda_2|\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega}^2,$$

где $C_2^2 = (2T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)C_1^2T^2(\Omega_C, \Omega_I)\max\{\sigma_1^{-1}, \mu_2\omega\}$.

Пусть теперь $\omega = 0$. Из (2.15) следует, что $\vec{E}_\lambda \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$. Используя лемму 2.1. получаем, что для всех $\vec{g} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$

$$0 = \int_{\Omega_C} (\sigma \vec{E}_\lambda \cdot \vec{g}) d\vec{x} + \lambda \int_{\Omega_I} (\vec{E}_\lambda \cdot \vec{g}) d\vec{x} + \int_{\Omega} (\vec{J}^{\text{ct}} \cdot \vec{g}) d\vec{x}. \quad (4.10)$$

Отсюда вытекает, что

$$\|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_C} \leq \sigma_1^{-1}(T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)^{1/2}\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega}, \quad \|\vec{E}_\lambda\|_{2,\Omega_I} \leq C_3\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_3 = T(\Omega_C, \Omega_I)\sigma_1^{-1}(T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)^{1/2}$.

Для $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и $\vec{E}_1 = \vec{E}_{\lambda_1}$, $\vec{E}_2 = \vec{E}_{\lambda_2}$ из (4.10) получаем

$$\int_{\Omega_C} (\sigma(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{g}) d\vec{x} + \lambda_2 \int_{\Omega_I} ((\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{g}) d\vec{x} = (\lambda_1 - \lambda_2) \int_{\Omega_I} (\vec{E}_1 \cdot \vec{g}) d\vec{x}$$

при любой функции $\vec{g} \in K(\operatorname{rot}; \Omega)$. Следовательно,

$$\sigma_1 \int_{\Omega_C} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)^2 d\vec{x} + \frac{\lambda_2}{2} \int_{\Omega_I} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)^2 d\vec{x} \leq \frac{|\lambda_1 - \lambda_2|^2}{2\lambda_2} \int_{\Omega_I} (\vec{E}_1)^2 d\vec{x}.$$

Пусть $\lambda_1 < \lambda_2$. Тогда

$$\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega} = \|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega} \leq C_4\sqrt{\lambda_2 - \lambda_1}\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_4 = ((T^2(\Omega_C, \Omega_I) + 1)/(2\sigma_1))^{1/2}C_3$.

Из (2.15) и оценки (3.5) следует, что

$$\|\operatorname{rot}(\vec{H}_{\lambda_2} - \vec{H}_{\lambda_1})\|_{2,\Omega} \leq \max\{\lambda_2, \sigma_2\}\|\vec{E}_2 - \vec{E}_1\|_{2,\Omega} + |\lambda_2 - \lambda_1|\|\vec{E}_1\|_{2,\Omega_I},$$

то есть при $\lambda_2, \lambda_1 \leq 1$ получаем, используя оценку (3.5):

$$\|\vec{H}_{\lambda_2} - \vec{H}_{\lambda_1}\|_{\operatorname{rot}, \Omega} \leq C_5\sqrt{|\lambda_2 - \lambda_1|}\|\vec{J}^{\text{ct}}\|_{2,\Omega},$$

где $C_5 = (C^2(\Omega)\mu_2^2\mu_1^{-2} + 1)^{1/2}(\max\{1, \sigma_2\}C_2 + C_1T(\Omega_C, \Omega_I))$, если $\omega > 0$ и

$C_5 = (C^2(\Omega)\mu_2^2\mu_1^{-2} + 1)^{1/2}(\max\{1, \sigma_2\}C_4 + C_3)$ при $\omega = 0$.

Таким образом, $\vec{H}_\lambda$, $\vec{E}_\lambda$ стремятся при $\lambda \rightarrow 0$ в $H(\operatorname{rot}; \Omega)$ к некоторым $\vec{h} \in V^1(\mu; \Omega)$, $\vec{e} \in H(\operatorname{rot}; \Omega)$ соответственно. Переходя к пределу при $\lambda \rightarrow 0$ в (2.15) получаем, что $\vec{h} = \vec{H}$, $\vec{e} = \vec{E}$ – решение системы (2.8).

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках базовой части (код проекта 2664) и проектной части (код проекта 1727) государственного задания в 2014-2016 гг., а также поддержана грантом в рамках соглашения от 27 августа 2013 г. № 02.В.49.21.0003 между Минобрнауки РФ и ННГУ им. Н.И. Лобачевского.

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. П. Галанин, Ю. П. Попов, *Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах*, Наука, Физматлит, М., 1995, 316 с.
2. A. Alonso Rodriguez, A. Valli, *Eddy current approximation of Maxwell equations*, Springer-Verlag Italia, Milano, 2010.
3. J. D. Lavers, “State of the art of numerical modeling for induction processes”, *COMPEL*, **27** (2008), 335–349.
4. A. Bermudes, R. Rodriguez, P. Salgado, “FEM for 3D eddy current problems in bounded domains subject to realistic boundary conditions. An application to metallurgical electrodes”, *Arch. Comput. Methods Engrg.*, **12** (2005), 67–114.
5. R. Y. Tang, S. H. Wang, Y. Li, X. L. Wang, X. Cui, “Transient simulation of power transformers using 3-D finite element model coupled to electric circuit equations”, *IEEE Trans. Magn.*, **36** (2000), 1417–1420.
6. M. T. Thompson, “Eddy current magnetic levitation. Models and experiments”, *IEEE Potentials*, **19** (2000), 40–44.
7. B. A. Auld, J. C. Moulder, “Review of advances in quantitative eddy current nondestructive evaluation”, *J. Nondestr. Eval.*, **18** (1999), 3–36.
8. S. Baillet, J. C. Mosher, R. M. Leahy, “Electromagnetic brain mapping”, *IEEE Signal Process. Magaz.*, **18** (2001), 14–30.
9. Ж.-Л. Кулон, Ж.-К. Сабоннадьер, *САПР в электротехнике*, Мир, М., 1988, 208 с.
10. A. Bossavit, *Computational electromagnetism. Variational formulations, complementarity, edge elements*, Academic Press, Boston, 1998.
11. H. Weyl, “The method of orthogonal projection in potential theory”, *Duke Math. J.*, **7** (1940), 411–444.
12. Э. Б. Быховский, Н. В. Смирнов, “Об ортогональном разложении пространства вектор-функций, квадратично суммируемых по заданной области, и операторах векторного анализа”, *Труды МИАН СССР*, **59** (1960), 5–36.
13. Г. Дюво, Ж.-Л. Лионс, *Неравенства в механике и физике*, Наука, М., 1980, 384 с.
14. V. Girault, P. Raviart P., *Finite element methods for Navier–Stokes equations*, Springer-Verlag, N.Y., 1986.
15. А. В. Калинин, А. А. Калинкина, “Lp - оценки векторных полей”, *Известия Вузов. Математика*, 2004, № 3, 26–35.
16. Z. Chen, Q. Du, J. Zou, “Finite element methods with matching and nonmatching meshes for Maxwell equations with discontinuous coefficients”, *SIAM J. Numer. Anal.*, **37**:5 (2000), 1642–1570.

17. А. В. Калинин, С. Ф. Морозов, “Стационарные электромагнитные поля в неоднородных средах с непроводящими и слабопроводящими включениями”, *Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского. Математическое моделирование и оптимальное управление*, 1999, № 1(20), 48–62.
18. А. В. Калинин, А. А. Тюхтина, “Асимптотическое поведение решений некоторых краевых задач для эллиптических уравнений”, *Вестник ННГУ им. Н.И. Лобачевского*, 2010, № 2, 117–123.
19. М. Cessenat, *Mathematical methods in electromagnetism: linear theory and applications*, World Scientific, 1996.
20. Х. Гаевский, К. Грёгер, К. Захариас, *Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения*, Мир, М., 1978, 336 с.

Quasistationary electromagnetic fields in inhomogeneous media with non-conductive and low conductive inclusions

© А. В. Kalinin³, А. А. Tiukhtina⁴

Abstract. Boundary value problems for the time-periodic solutions of quasi-stationary magnetic approximation for Maxwell equations are studied. The case of inhomogeneous media containing a conducting, non-conducting and low-conducting inclusions is considered. The asymptotic connection of the solutions of problems with non-conducting and low-conducting inclusions is investigated.

Key Words: Maxwell equations, quasistationary magnetic approximation, periodic solutions, inhomogeneous media, electric and magnetic boundary conditions, non-conducting and low-conducting inclusions

³ Associate Professor of Mathematical Physics and Optimal Control Department, Institute of Informational Technology, Mathematics and Mechanics, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; avk@mm.unn.ru

⁴ Associate Professor of Mathematical Modelling of Economical Processes Department, Institute of Economics and Entrepreneurship, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; kalinmm@yandex.ru

УДК 519.65; 538.945

Математическое моделирование температурной зависимости второго критического поля тонких плёнок нитрида ниобия

© Н. Д. Кузьмичев¹ М. А. Васютин² Е. А. Лапшина³ Д. А. Шилкин⁴

Аннотация. В рамках теории WHH (Werthamer, Helfand, Hohenberg) выполнено математическое моделирование зависимости второго критического поля от температуры $H_{c2}(T)$ сверхпроводников для разных значений параметра Маки и параметра спин-орбитального рассеяния. Исследованы температурные зависимости перехода в сверхпроводящее состояние тонких плёнок нитрида ниобия (NbN) по первой гармонике напряжения в постоянных магнитных полях до 8 Т. С помощью аппроксимации экспериментальной зависимости второго критического поля плёнок NbN от температуры теоретической зависимостью $H_{c2}(T)$ найден параметр Маки, учитывающий влияние спинового парамагнетизма в данном материале. Из транспортных и оптических измерений из наших и других работ оценены важнейшие параметры сверхпроводника NbN, согласующиеся с данными настоящей работы.

Ключевые слова: теория WHH, второе критическое поле, нитрид ниобия, спиновой парамагнетизм, длина когерентности Гинзбурга-Ландау, параметр Маки, параметр спин-орбитального рассеяния, параметр Иоффе-Регеля.

1. Введение

В последнее время возрос интерес к нитриду ниобия (NbN) в связи с возможностью его применения в качестве болометра, позволяющего детектировать отдельные фотоны (см., например, [1]), радиочастотного резонатора [2] и материала для сверхпроводящих магнитов [3]. Простая технология изготовления, химическая и радиационная устойчивость, механическая прочность и высокое второе критическое поле при нулевой температуре ($H_{c2}(0) > 20T$ для плёнок с $T_c > 15K$) [4,5] делают NbN привлекательным для практических целей. Фундаментальные исследования NbN также актуальны. Например, вблизи квантовой критической точки энергия вихревого кора связана с энергетической щелью, а не со сверхтекучей плотностью [6]. В нитриде ниобия концентрация электронов проводимости мала [7], как и концентрация носителей в $YBa_2Cu_3O_{7-x}(YBCO)$. Длина когерентности и глубина проникновения магнитного поля в NbN также близки к их значениям в $YBCO$ (для NbN - $\xi = 5nm$, $\lambda = 200nm$ [8]; для $YBCO$ $\xi_{ab} = 3.1nm$, $\lambda_c = 180nm$ [9]). Поэтому изучение плёнок NbN может помочь в понимании механизма разрушения сверхпроводимости током, магнитным полем и тепловыми вихрями вблизи температуры перехода в сверхпроводящее состояние T_c в $YBCO$ [10-13]. Большой интерес вызывает и обнаруженный недавно в NbN обратный спиновой эффект Холла [14], наблюдавшийся при температурах $T < T_c$. Это явление важно как для понимания физики сверхпроводимости

¹ Профессор, зав. кафедрой общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; kuzmichevnd@yandex.ru

² Доцент кафедры общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; vasyutinm@mail.ru

³ Доцент кафедры общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; e.lapshina2010@yandex.ru

⁴ Аспирант кафедры общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; dwi8hi@outlook.com

в NbN, так и для перспектив его использования в спинтронике. Исследование температурной зависимости второго критического поля $H_{c2}(T)$ пленочных образцов NbN предоставляет возможность определить практически значимые параметры: $H_{c2}(0)$, степень влияния спинового парамагнетизма Паули на сверхпроводящее состояние, оценить время релаксации, скорость Ферми, длину свободного пробега, длину когерентности Гинзбурга-Ландау и плотность состояний на уровне Ферми.

2. Математическая модель зависимости $H_{c2}(T)$

Как известно, на величину второго критического поля влияют спиновой парамагнетизм Паули и спин-орбитальное взаимодействие электронов. Спиновой парамагнетизм снижает поле $H_{c2}(0)$, в то время как спин-орбитальное взаимодействие препятствует его уменьшению. В теории WHH (Werthamer, Helfand, Hohenberg) [15] учитываются спиновые эффекты при решении уравнений Горькова для верхнего критического магнитного поля массивного сверхпроводника 2-го рода. В модели WHH в неявном виде было получено уравнение, связывающее температуру T и второе критическое поле H_{c2} сверхпроводника (размерности сохранены):

$$\ln\left(\frac{1}{t}\right) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{|2\nu+1|} - \left[|2\nu+1| + \frac{h}{t} + \frac{(\alpha h/t)^2}{|2\nu+1| + (h + \lambda_{so})/t} \right]^{-1} \right\}, \quad (2.1)$$

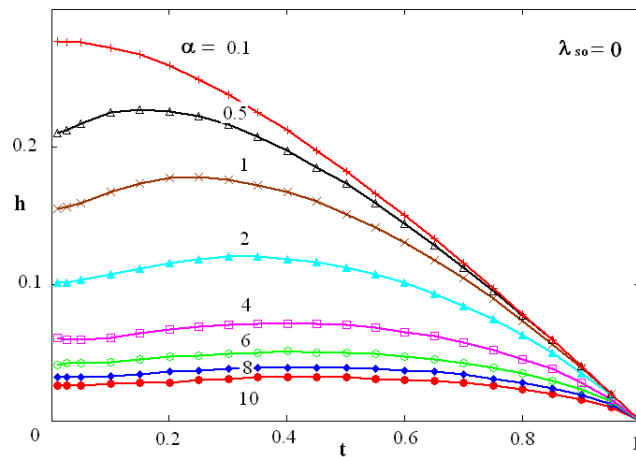
где $h = 2eH_{c2}(v_F^2\tau/(6\pi T_c))$ – безразмерный параметр, пропорциональный напряжённости магнитного поля H_{c2} , $t = T/T_c$ – безразмерная температура, e – заряд электрона, v_F – скорость Ферми, τ – время релаксации, $\alpha = 3/(2mv_F^2\tau)$ – параметр, учитывающий спиновой парамагнетизм Паули (параметр Маки [16]), m – масса свободного электрона, $\lambda_{so} = 1/(3\pi T_c\tau_2)$ – параметр спин-орбитального рассеяния, τ_2 – время релаксации при спин-орбитальном рассеянии. Здесь время τ и τ_2 выражены в обратных энергетических единицах.

Решая уравнение (2.1), можно определить зависимость $h(t)$ т.е. второго критического поля от температуры $H_{c2}(T)$ при разных значениях параметров α и λ_{so} .

Решение неявного уравнения WHH (2.1) было выполнено в системе MathCad методом дихотомии и с помощью встроенной функции root. Оба метода дали одинаковый результат. В место уравнения (2.1) решалось приближенное уравнение:

$$\ln t + \sum_{n=-M}^M \left\{ \frac{1}{|2n+1|} - \left[|2n+1| + \frac{h}{t} + \frac{(\alpha h/t)^2}{|2n+1| + (h + \lambda_{so})/t} \right]^{-1} \right\} = 0. \quad (2.2)$$

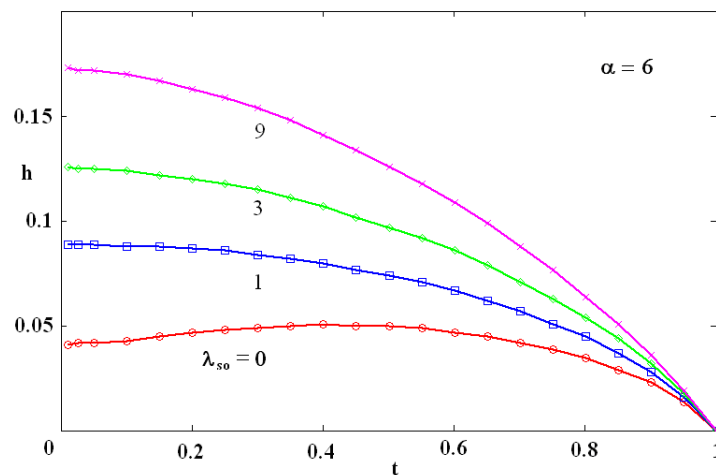
Корни уравнения (2.2) $h(t)$ для заданных величин параметров α , λ_{so} при фиксированных значениях безразмерной температуры $t \in (0, 1]$ находились с точностью $\delta = 0.0001$. При $M \geq 10000$ корни уравнения $h(t)$ изменялись в пределах точности δ . Результаты приведены на рис. 2.1. На рис. 2.1 показана зависимость безразмерного параметра h (безразмерного второго критического поля H_{c2}) от безразмерной температуры t для нескольких значений параметра α при $\lambda_{so} = 0$. Из рисунка видно, что с ростом α зависимости $h(t)$ располагаются ниже, т.е. спиновой парамагнетизм подавляет сверхпроводимость.



Р и с у н о к 2.1

Зависимость безразмерного второго критического поля h от безразмерной температуры $t = T/T_c$ для нескольких значений параметра Маки α при параметре спин-орбитального рассеяния равном $\lambda_{so} = 0$

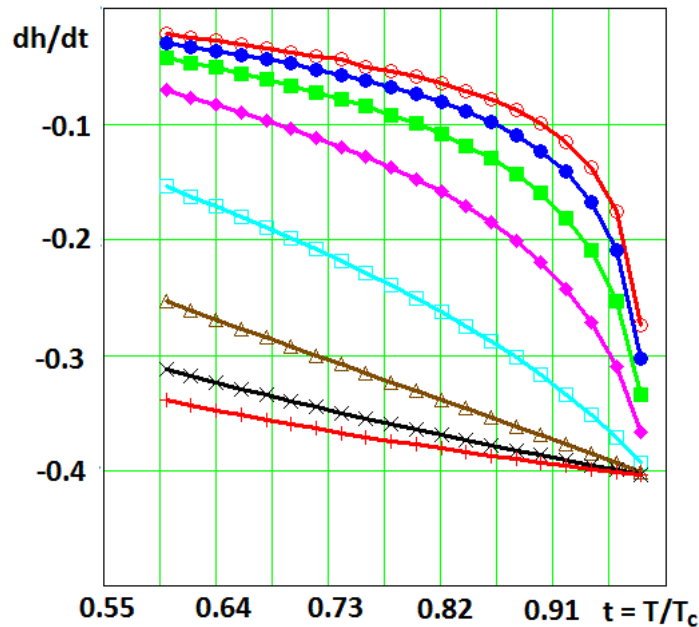
На рисунке 2.2 показана зависимость безразмерного параметра h (безразмерного второго критического поля H_{c2}) от безразмерной температуры t для нескольких значений параметра λ_{so} при $\alpha = 6$. Значение $\alpha = 6$ выбрано вследствие доводов, приведенных ниже, следующих из экспериментальных результатов по измерению зависимости $H_{c2}(T)$ для нитрида ниобия. Из рисунка 2.2 следует, что в отличие от результатов для α , приведенных на рис. 2.1, рост параметра λ_{so} , наоборот, приводит к росту $H_{c2}(T)$.



Р и с у н о к 2.2

Зависимость безразмерного параметра h (безразмерного второго критического поля H_{c2}) от безразмерной температуры t для нескольких значений параметра λ_{so} при $\alpha = 6$

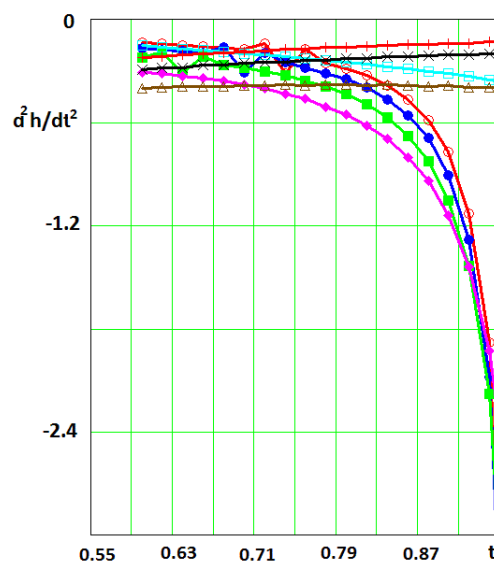
На рисунке 2.3 приведена температурная зависимость производной dH_{c2}/dT в безразмерных единицах, т.е. dh/dt . Производная получена в результате численного дифференцирования данных, приведенных на рис. 2.1, которые были получены с более мелким шагом и с большей точностью.



Р и с у н о к 2.3

Температурная зависимость производной безразмерного второго критического поля от температуры dh/dt . Параметры: $\alpha = 10$ (○), 8(●), 6(■), 4(◇), 2(□), 1(△), 0.5(×), 0.1(+) и $\lambda_{so} = 0$

Из рисунка 2.3 видно, что зависимость dh/dt при изменении α от 1 до 2 меняет степень выпуклости. Значит, на этом промежутке значений α зависимость dh/dt от t имеет линейную зависимость, т.е. $dh/dt \sim a+bt$. Вследствие указанного замечания вторая производная должна быть постоянной, т.е. $d^2h/dt^2 = const = a$. На рис. 2.4 это хорошо показано. Из рис. 2.4 видно, что при $\alpha = 2$ функция d^2h/dt^2 медленно уменьшается, а для $\alpha = 1$ медленно растет. Значит при $\alpha \approx 1.5$ вторая производная не зависит от t т.е. $d^2h/dt^2 = const$. Более точный расчет приводит к $\alpha \approx 1.56$. Таким образом, из уравнения (1) следует, что для $\alpha < 2$ при $\lambda_{so} = 0$ зависимость $H_{c2}(T)$ переходит от кубической к квадратичной и, при $\alpha \approx 1.56$, снова становится кубической.



Р и с у н о к 2.4

Температурная зависимость второй производной безразмерного второго критического поля от температуры d^2h/dt^2 . Параметры: $\alpha = 10(\circ)$, $8(\bullet)$, $6(\blacksquare)$, $4(\diamond)$, $2(\square)$, $1(\triangle)$, $0.5(\times)$, $0.1(+)$ и $\lambda_{so} = 0$

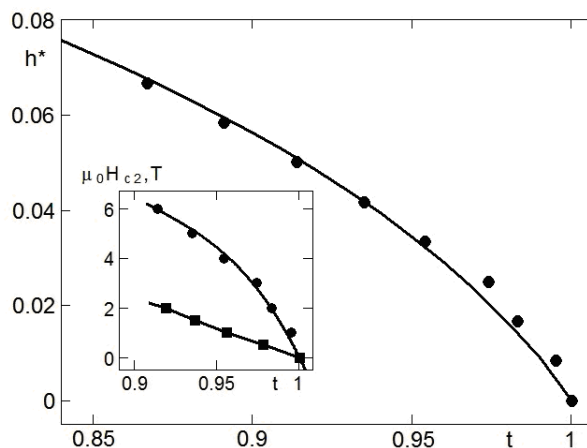
3. Эксперимент и обработка результатов

Плѐнки NbN , изучаемые в данной статье, довольно сильно отличаются от исследованных ранее образцов прежде всего, сочетанием высокой температуры перехода в сверхпроводящее состояние T_c и высоким удельным сопротивлением в нормальном состоянии ρ_n . Изучались плѐнки толщиной $d = 400nm$, напыленные на подложку из полированного плавленого кварца методом реактивного катодного распыления [17]. Структура плѐнок – столбчатая. Кристаллическая структура – $B1$. Характерный размер столбчатых гранул – $100nm$. Формирование столбиков происходило, в основном, перпендикулярно плоскости подложки. Постоянная решѐтки $a = 4.39\text{\AA}$. Длина образцов плѐнок – $9.0mm$. Ширина – $4.5mm$. Исследования проводились стандартным четырёхконтактным методом при амплитуде переменного тока $0.21mA$ на частоте $1kHz$. Величина T_c образцов менялась в пределах температур $16.2 - 16.5K$. Ширина перехода составляла примерно $0.1K$. Удельное сопротивление в нормальном состоянии вблизи перехода составляло $\sim 1000 \mu\Omega cm$. Отношение сопротивления образцов при комнатной температуре к сопротивлению в нормальном состоянии при температуре, близкой к T_c , $R_{295}/R_{18} \approx 0.93$.

Для экспериментов использовалась безжидкостная криомагнитная система $8TCryoFree - 404$, позволяющая охлаждать образцы до $6K$ в постоянном магнитном поле с индукцией до $8T$. Температурные измерения проводились с помощью контроллера $LakeShore335$. Датчик температуры – $Cernox CX-1050$. Погрешность при измерении температуры не превышала $0.01K$.

На рис. 2.5 показана температурная зависимость экспериментального и теоретического приведѐнного второго критического поля h^* . Экспериментальные значения h^* находились по формуле [15]: $h^* = H_{c2}/(-dH_{c2}/dt)_{t=1}$, где $t = T/T_c$ – приведѐнная температура, $(dH_{c2}/dt)_{t=1}$ – производная H_{c2} по t при $T = T_c$. Для нахождения производной в точке $t = 1$ экспериментальная температурная зависимость $H_{c2}(t)$ аппроксимировалась теоретической зависимостью, полученной из уравнения (1) (см. рис. 2.1 и 2.2).

По сравнению с результатами, например, работы [18] ($(-dH_{c2}/dt)_{t=1} = 120T$, $(-dH_{c2}/dT)_{T=T_c} = 7.28T/K$) полученное значение, $(-dH_{c2}/dt)_{t=1} \sim 21.6T$ является более высоким. Такое отличие может быть связано с разной толщиной и структурой плѐнок.



Р и с у н о к 3.1

Зависимость приведённого второго критического магнитного поля от приведённой температуры (точки – эксперимент, сплошная линия – теория WHH). На вставке приведена температурная зависимость второго критического магнитного поля (точки), аппроксимированная полиномом третьей степени (сплошная линия), и (для сравнения) температурная зависимость второго критического магнитного поля (квадратики), взятая из работы [19]

Температура перехода T_c находилась посередине скачка (10 - 90 процентов от величины напряжения в нормальном состоянии вблизи перехода). Теоретические значения h^* находились по формуле [15]: $h^* \equiv h/(-dh/dt)_{t=1} = (\pi^2/4)h$. Наилучшее согласие экспериментальной и теоретической зависимостей $h^*(T)$ достигается при значении параметров: $\alpha = 6.00$, $\lambda_{so} = 0$ (рис. 2.5). При этом верхнее критическое магнитное поле $H_{c2}(0) = 13.7 T$.

4. Обсуждение

Значение параметра α можно оценить, по крайней мере, двумя разными методами: по величине удельного сопротивления в нормальном состоянии ρ_n и по значению производной $(dH_{c2}/dT)_{T=T_c}$.

В первом случае:

$$\alpha = 2.35\rho_n\gamma, \quad (4.1)$$

где γ - коэффициент электронной теплоёмкости. Используя значения размеров исследуемого образца, сопротивления на постоянном токе $R = 12\Omega$, величину $\gamma = 2.1 \cdot 10^3 \text{ erg}/(\text{cm}^3 \cdot K^2)$ [19, 20] и, полагая расстояние между потенциальными контактами $b = 0.2 \pm 0.05 \text{ cm}$, получим значения $\rho_n = 1080 \pm 270 \mu\Omega \cdot \text{cm}$ и, соответственно, $\alpha = 5.3 \pm 1.3$. Полученное α близко к экспериментальному ($\alpha = 6.00$).

Во втором случае:

$$\alpha = 5.322 \cdot 10^{-5} (-dH_{c2}/dT)_{T=T_c}. \quad (4.2)$$

Подставляя значение экспериментальной производной нашего образца ($7.28 \cdot 10^4 \text{ Oe}/K$), получим $\alpha \approx 3.9$. Заниженное значение полученной величины α обусловлено её «усреднением» по всем экспериментальным точкам при подгонке полиномом третьей степени (см. п.2 и рис.2.4, вставка на рис. 2.5) производной $(-dH_{c2}/dT)_{T=T_c}$, входящей в (3). При приближении к T_c значение производной увеличивается в 1,5 – 2 раза. Корректное определение значения $(-dH_{c2}/dT)_{T=T_c}$ из экспериментальных данных затруднительно.

Кроме этого, параметр спинового парамагнетизма α (и другие параметры сверхпроводящего состояния) может быть найден из оптических исследований [7]. Используя значения плазменной частоты ω_p и частоты релаксации ν , полученные на подобных образцах в работе [7], получим удельное сопротивление (в системе СИ): $\rho_n = 1/(\omega_p^2 \tau \epsilon_0)$, где $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$ – электрическая постоянная. Принимая $\omega_p^2 = 0.72 \cdot 10^{30} \text{ s}^{-2}$ и $t = 12.95 \cdot 10^{-15} \text{ s}$, получим $\rho_n = 1200 \pm 75 \mu\Omega \cdot \text{cm}$. Подставляя это значение в формулу (2), определяем $a = 5.9 \pm 0.4$. Эта величина практически совпадает с экспериментальным значением.

Оценка верхнего критического поля также может быть сделана двумя способами. Без учёта спинового парамагнетизма ($\alpha = 0$): 1) $H_{c2}^*(0) \approx 0.69(dH_{c2}/dt)_{t=1}$ и 2) $H_{c2}^*(0) \approx 3.1\rho_n\gamma T_c$. Для ненулевого значения параметра Маки: $H_{c2}(0) = H_{c2}^*(0)(1 + \alpha^2)^{-1/2}$. При этом в первом случае ($\alpha = 6$) $\mu_0 H_{c2}(0) = 13.6 \pm 1 T$, во втором – $\mu_0 H_{c2}(0) = 19 \pm 5 T$, что в пределах ошибок согласуется с теорией WHH.

В работе [18] плёнки NbN демонстрируют отсутствие спинового парамагнетизма Паули ($\alpha = 0$), что должно приводить к значительному увеличению верхнего критического

поля. Тем не менее, полученное авторами значение $H_{c2}(0) = 14.6T$ на подобном образце близко к оценкам $H_{c2}(0)$ наших образцов, что связано с небольшим значением наклона $H_{c2}(T)_{T=T_c}$ (вставка на рис.2.5). Невысокое значение $(dH_{c2}/dt)_{t=1}$ связано с высокой концентрацией электронов проводимости, обуславливающей, по-видимому, сильное электрон-электронное отталкивание.

Оценивая параметр Иоффе-Регеля [21] через значение α ($k_F l = 3\pi/\alpha$), полученное в нашей работе, приходим к $k_F l = 1.57$, что соответствует “грязному” пределу.

Длина когерентности Гинзбурга-Ландау, оцененная по формуле $\xi_{GL}(0) = [\Phi_0/(2\pi H_{c2}(0))]^{1/2}$ при значении $H_{c2}(0)$, полученном в нашей работе, даёт величину $49A$, что совпадает с литературными данными [8].

Плотность состояний на уровне Ферми, найденная по формуле [18]: $N(0) = \pi H_{c2}(0)/(0,69T_c 4ek_B \rho_n)$, имеет величину $\sim 5.7 \cdot 10^{27} \text{ states}/(m^3 \cdot eV)$.

Во многих работах [5,8,14,18] зависимость $H_{c2}(T)$ хорошо аппроксимируется линейной зависимостью от T до температур $0,6 - 0,7T_c$. При этом наклон аппроксимирующей прямой (производная H_{c2} по T) в несколько раз меньше наклона прямой, полученной в настоящей работе. Влияние парамагнитного эффекта (подавление H_{c2} , выражающееся в загибе кривой) начинается в нашей работе уже в полях $3 - -4T$, тогда как в упомянутых статьях парамагнитный эффект вообще не проявляется или проявляется в полях, больших $10T$.

Причиной такой разницы свойств плёнок одинакового состава является большая разница удельного сопротивления образцов NbN. В свою очередь, большое удельное сопротивление наших образцов нитрида ниобия вызвано низкой концентрацией электронов проводимости.

Концентрацию электронов проводимости N_e в образцах, подобных нашим плёнкам, можно получить из работы [22]. Приведённые в ней экспериментальные зависимости постоянной Холла от удельного сопротивления (для образца с параметром Иоффе-Регеля $k_F l = 1.68$) позволяют определить значение N_e , соответствующее определённому ρ_n . Для удельного сопротивления $\rho_n = 1200 \mu\Omega \cdot cm$ концентрация $N_e = 3,48 \times 10^{22} e/cm^3$. Т.е. в $5 - -6$ раз меньше, чем в образце с близким значением $T_c = 16,1K$ [19], и удельным сопротивлением, меньшим тоже в $5 - -6$ раз. Параметр Маки для данного образца $\alpha \approx 5.6$.

Модуль волнового вектора Ферми можно найти из концентрации носителей: $k_F \approx 1.01 \times 10^8 cm^{-1}$. Тогда длина свободного пробега (с учётом значения параметра Иоффе-Регеля) $l \approx 1.66A$.

5. Заключение

Таким образом, математическое моделирование температурной зависимости второго критического поля тонких плёнок NbN, экспериментально исследованных в данной работе, показало, что вклад в сверхпроводимость NbN определяется, в основном, эффектом спинового парамагнетизма Паули с параметром Маки $\alpha = 6.00$. Данный параметр, определённый из транспортных, магнитных и оптических измерений, имеет близкие значения, что подтверждает сильный спиновый парамагнетизм. Параметр Иоффе-Регеля изученных образцов соответствует “грязному” пределу. Зависимость $H_{c2}(T)$ NbN находится в согласии с теорией WHH.

Дата поступления 01.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Kamlapure, M. Mondal, M. Chand, A. Mishra, J. Jesudasan, V. Bagwe, L. Benfatto, V. Tripathi, and P. Raychaudhuri, “Measurement of magnetic penetration depth and superconducting energy gap in very thin epitaxial NbN films”, *Appl. Phys. Lett.*, **96** (2010).
2. W. Weingarten, *Part. Accel*, **53** (1996), 199.
3. R. T. Kampwirth, D. W. Capone, K. E. Gray, and A. Vicens., “Application of NbN films to the development of very high field superconducting magnets”, *Magnetics, IEEE Transactions on*, **21** (1985), 459.
4. R. Gavaler, M. A. Janocko, A. Patterson, and C. K. Jones, “Very high critical current and field characteristics of niobium nitride thin films”, *J. Appl. Phys*, **42** (1971), 54.
5. J. Jesudasan, M. Mondal, M. Chand, A. Kamlapure, S. Kumar, G. Saraswat, V. C. Bagwe, V. Tripathi, and P. Raychaudhuri, “Upper critical field and coherence length of homogenously disordered epitaxial 3-dimensional NbN films”, *AIP Conf. Proc.*, **1349** (2011), 923.
6. J. Yong and T. R. Lemberger, L. Benfatto, K. Ilin and M. Siegel, “Robustness of the Berezinskii-Kosterlitz-Thouless transition in ultrathin NbN films near the superconductor-insulator transition”, *Phys. Rev. B*, **87** (2013), 184505.
7. Н.Д. Кузьмичев, Г.П. Мотулевич, “Определение электронных характеристик нитрида ниобия оптическим методом”, *ЖЭТФ*, **84** (1983), 2316.
8. R. Jha, A. Kumar and V.P.S. Awana, “Fabrication of DC sputtered NbN thick film with high upper critical field of above 400 kOe”, *AIP Conf. Proc.*, **1447** (2012), 867.
9. Ю.М. Ципенюк, *Физические основы сверхпроводимости*, М.: Изд-во МФТИ, 2003.
10. М.А. Васютин, А.И. Головашкин, Н.Д. Кузьмичев, “Нелинейность вольт-амперных характеристик монокристаллов и переход Березинского-Костерлица-Таулеса”, *ФТТ*, **48** (2006), 2128.
11. N.D. Kuzmichev, M.A. Vasyutin, A.I. Golovashkin, “YBCO single crystals I–V characteristics nonlinearity and Nelson–Kosterlitz jump”, *Physica C*, **460-462** (2007), 849.
12. М.А. Васютин, А.И. Головашкин, Н.Д. Кузьмичев, “Новый экспериментальный критерий перехода Березинского-Костерлица-Таулеса”, *КСФ*, **9** (2008), 48.
13. Д.А. Балаев, С.В. Семенов, М.И. Петров, “Доминирующее влияние эффекта сжатия магнитного потока в межгранульной среде гранулярного ВТСП на процессы диссипации во внешнем магнитном поле”, *ФТТ*, **55** (2013), 2305.
14. T. Wakamura, H. Akaike, Y. Omori, Y. Niimi, S. Takahashi, A. Fujimaki, S. Maekawa, Y. Otani, “Quasiparticle-mediated spin Hall effect in a superconductor”, *Nature Mater*, **14** (2015), 675.

15. N.R. Werthamer, E. Helfand, and P.C. Hohenberg, "Temperature and Purity Dependence of the Superconducting Critical Field, Hc2. III. Electron Spin and Spin-Orbit Effects", *Phys. Rev.*, **147** (1966), 295.
16. K. Maki, *Physics*, **1** (1964), 127.
17. Е.А. Антонова, В.А. Сухов, "О связи между структурой и электрофизическими свойствами пленок нитрида ниобия", *ФНТ*, **7** (1981), 1002.
18. S.P. Chockalingam, M. Chand, J. Jesudasan, V. Tripathi, and P. Raychaudhuri, "Superconducting properties and Hall effect of epitaxial NbN thin films", *Phys. Rev. B*, **77** (2008), 214503.
19. R.R. Hake, "Upper-critical-field limits for bulk type-II superconductors", *Appl. Phys. Lett.*, **10** (1967), 189.
20. T.H. Geballe, B.T. Matthias, J.P. Remeika, A.M. Clogston, V.B. Compton, J.P. Maita, and H.J. Williams, *Physics*, **2** (1966), 293.
21. A.F. Ioffe and A.R. Regel, "Non-crystalline, amorphous, and liquid electronic semiconductors", *Prog. Semicond.*, **4** (1960), 237.
22. M. Chand, A. Mishra, Y.M. Xiong, A. Kamlapure, S.P. Chockalingam, J. Jesudasan, V. Bagwe, M. Mondal, P.W. Adams, V. Tripathi, and P. Raychaudhuri, "Temperature dependence of resistivity and Hall coefficient in strongly disordered NbN thin films", *Phys. Rev. B*, **80** (2009), 134514.

Mathematical modeling of temperature dependence of the second critical field of thin films of niobium nitride

© N. D. Kuzmichev ⁵ M. A. Vasyutin ⁶ E. A. Lapshina ⁷ D. A. Shilkin ⁸

Abstract. Temperature dependence of the second critical field $H_{c2}(T)$ for superconductors due to different values of Maki parameter and of spin-orbit scattering parameter is modeled mathematically within the framework of WHH-theory (Werthamer, Helfand, Hohenberg). Temperature dependencies of superconducting transition for the first harmonic of voltage of thin niobium nitride (NbN) films are investigated in dc magnetic fields up to 8 T. By approximating experimental temperature dependence of the upper critical field of NbN films by theoretical dependence $H_{c2}(T)$ Maki parameter is obtained, that takes into account the spin paramagnetism effect in this material. From transport and optical measurements done in this and other studies the most important parameters of NbN superconductor are evaluated that are consistent with the data of present work.

Key Words: WHH theory, second critical field, niobium nitride, spin paramagnetism, Ginsburg–Landau coherence length, Maki parameter, spin-orbit scattering parameter, Ioffe–Regel parameter

⁵ Professor, Head of General Scientific Disciplines Department, Ruzaevka Engineering Institute (branch), Ogarev Mordovia State University, Saransk; kuzmichevnd@yandex.ru

⁶ Associate professor of General Scientific Disciplines Department, Ruzaevka Engineering Institute (branch), Ogarev Mordovia State University, Saransk; vasyutinm@mail.ru

⁷ Associate professor of General Scientific Disciplines Department, Ruzaevka Engineering Institute (branch), Ogarev Mordovia State University, Saransk; e.lapshina2010@yandex.ru

⁸ Postgraduate student of General Scientific Disciplines Department, Ruzaevka Engineering Institute (branch), Ogarev Mordovia State University, Saransk; dwi8hi@outlook.com

УДК 004.75:549.67

Расчет материального баланса для кристаллизации цеолитов и математическое моделирование ионного обмена на них

© Г. И. Сахибгареева¹, О. С. Травкина², О. Ю. Кирьянова³,
Р. З. Куватова⁴, И. М. Губайдуллин⁵

Аннотация. В данной статье приводятся основные предпосылки создания информационно-аналитической системы расчета материального баланса для кристаллизации цеолитов. Данное приложение позволяет хранить информацию о проведенных экспериментах, проводить подготовительную работу по планированию синтеза. Кроме того, возможна обработка данных процесса ионного обмена на цеолитах в формате отдельного приложения. Данная программа используется для описания закономерностей поведения цеолитов при различных технических режимах.

Ключевые слова: цеолиты, ионный обмен, системы управления базами данных, информационно-вычислительная аналитическая система, материальный баланс

1. Введение

В лаборатории приготовления катализаторов Института нефтехимии и катализа РАН накоплены большие массивы данных, получаемые в ходе экспериментов по определению оптимального состава реакционной смеси на основе расчета материального баланса для кристаллизации цеолитов, изучения влияния природы и количества вводимых в цеолиты различных катионов металлов путем ионного обмена при различных начальных параметрах. Фактически неоднократно решается задача оптимизации, в результате решения которой накапливаются данные об оптимальных условиях проведения натурального эксперимента. Кроме того, аналитически определяются специфичные особенности процесса ионного обмена.

Применение математического аппарата и информационных технологий при подготовке эффективных катализаторов необходимо для оптимизации работы с экспериментальной базой по следующим причинам:

1. Рост экспериментальных данных требует эффективного и компактного хранения информации с контролируемым к ней доступом;
2. Предварительная автоматизированная обработка данных позволит получить наиболее оптимальные условия проведения реакции, тем самым сократив человеческие трудозатраты и расход материалов, применяемых в эксперименте;

¹ Студент, Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа; Sahibgareeva.gulfina@yandex.ru

² Научный сотрудник лаборатории приготовления катализаторов, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; simchanka@mail.ru

³ Аспирант лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; olga.kiryanova27@gmail.com

⁴ Аспирант лаборатории приготовления катализаторов, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; kuvatova2010@mail.ru

⁵ Старший научный сотрудник лаборатории математической химии Института нефтехимии и катализа РАН, профессор кафедры технологии нефти и газа Уфимского государственного нефтяного технического университета, г. Уфа; irekmars@mail.ru

3. Необходимо целостное хранение данных натурных и вычислительных экспериментов;

4. Проводимые подготовительные расчеты имеют однотипный, рутинный характер. Поэтому проведение автоматического расчета позволит ускорить и оптимизировать непосредственный натурный эксперимент.

Все выше перечисленные задачи могут быть реализованы в виде информационно-вычислительных аналитических систем (ИВАС). Поэтому для процесса получения эффективных катализаторов с использованием ионного обмена реализована ИВАС «обмен ионов» (ИВАС ОИ) [1]. Данная система включает в себя специализированную базу данных для удобного хранения экспериментальных данных методы обработки информации в виде математического описания и, методики проведения вычислений.

2. Задача определения материального баланса

Согласно закону сохранения массы количество исходных реагентов, взятых для производства материала, должно быть равно количеству полученных продуктов, которые, в свою очередь, включают готовый продукт и побочные продукты. На практике масса полученных продуктов всегда меньше массы исходных реагентов, поскольку каждое производство сопровождается материальными потерями различного происхождения (несовершенство технологического процесса, физические потери и др.).

Материальный баланс – это соотношение между количествами исходных материалов полученного готового продукта и отходами производства, материальными потерями [2]. Материальный баланс может быть составлен как в отношении всего технологического процесса, так и в отношении каждой отдельной стадии или производственной операции. Он может охватывать все материалы (суммарный баланс) или каждый отдельный компонент.

Материальный баланс имеет большое практическое значение, так как в нем отражается качество технологического процесса. На основании уравнения материального баланса рассчитывают выход, трату, расходные коэффициенты и расходные нормы.

В рассматриваемом случае потребовалось рассчитать химический состав маточного раствора и твердой фазы, количество исходных реагентов и выход продукта, получаемого после синтеза [3].

Для расчетов необходимы следующие данные:

- Химическая формула цеолита (стехиометрические коэффициенты компонентов):

$$Y_1Na_2O \cdot Y_2K_2O \cdot Al_2O_3 \cdot Y_3SiO_2$$

- Состав реакционной смеси (стехиометрические коэффициенты компонентов)

$$X_1Na_2O \cdot X_2K_2O \cdot Al_2O_3 \cdot X_3SiO_2 \cdot X_4H_2O$$

- Состав силиката (значения концентрации химических веществ, входящих в силикат)

$C'_{(Na_2O)}$ - концентрация Na_2O в силикате, г/л;

$C'_{(SiO_2)}$ - концентрация SiO_2 в силикате, г/л;

$C'_{(H_2O)}$ - концентрация H_2O в силикате, г/л;

- Состав алюмината (значения концентрации химических веществ, входящих в алюминат)

$C'''_{(Na_2O)}$ - концентрация Na_2O в алюминате, г/л;

$C'_{(Al_2O_3)}$ - концентрация Al_2O_3 в алюминате, г/л;

$C'''_{(H_2O)}$ - концентрация H_2O в алюминате, г/л;

- Дополнительный источник кремния (потери при прокаливании, процентное содержание оксида кремния)

ППП – потери при прокаливании, %;

$\omega(SiO_2)$ – массовая доля SiO_2 в источнике кремния, %;

$\omega(Na_2O)$ – массовая доля Na_2O в источнике кремния, %;

• $V(PC)$ – объем реакционной смеси, мл;

• W – масса продукта, которая должна получиться после синтеза, г.

Задачу можно разделить на 3 этапа, которые представлены ниже.

2.1. Расчет необходимого количества веществ, участвующих в реакции

Расчет для объема смеси с содержанием 100 мл алюмината (V'):

$$m(Al_2O_3) = C_{Al_2O_3} \cdot \frac{V'}{1000},$$

$$m''(Na_2O) = C''_{Na_2O} \cdot \frac{V'}{1000},$$

$$m''(H_2O) = C''_{H_2O} \cdot \frac{V'}{1000},$$

$$n(Al_2O_3) = \frac{m(Al_2O_3)}{M(Al_2O_3)},$$

$$n(Na_2O) = \frac{m(Na_2O)}{M(Na_2O)},$$

$$n(H_2O) = \frac{m(H_2O)}{M(H_2O)},$$

где

$n(Al_2O_3)$ – количество вещества Al_2O_3 в алюминате;

$n(Na_2O)$ – количество вещества Na_2O в алюминате;

$n(H_2O)$ – количество вещества H_2O в алюминате.

Расчет количества вещества для реакционной смеси:

$$n(Na_2O) = X_1 \cdot n(Al_2O_3),$$

$$n(K_2O) = X_2 \cdot n(Al_2O_3),$$

$$n(SiO_2) = X_3 \cdot n(Al_2O_3),$$

$$n(H_2O) = X_4 \cdot n(Al_2O_3),$$

где

$n(X_i)$ – количество соответствующего вещества в реакционной смеси;

$M(X_i)$ – молекулярная масса соответствующего вещества;

Расчет массы Na_2O :

$$a = n(Na_2O) - n^2(Na_2O) - \frac{\omega(Na_2O) \cdot m(SiO_2)}{M(Na_2O)},$$

$$m(Na_2O) = M(Na_2O) \cdot a.$$

Расчет объема силиката, мл:

$$V'' = \frac{m(Na_2O) \cdot 1000}{C'_{Na_2O}}.$$

Расчет массы SiO_2 , г:

$$m(SiO_2) = M(SiO_2) \cdot \frac{n(SiO_2) - (C(SiO_2) \cdot V'')}{1000 \cdot M(SiO_2)},$$

$$C = \frac{m(SiO_2) \cdot 100}{\omega(SiO_2)}.$$

Расчет массы KOH , г:

$$m(KOH) = n(K_2O) \cdot 2M(KOH),$$

$$n'''(H_2O) = \frac{C - m(SiO_2)}{M(H_2O)}.$$

2.2. Расчет кристаллообразующих компонентов (в пересчете на оксиды) до кристаллизации

$$m(Al_2O_3) = \frac{V' \cdot C_{Al_2O_3}}{1000},$$

$$\Sigma m(SiO_2) = \frac{C \cdot \omega(SiO_2)}{100} + \frac{C(SiO_2) \cdot V''}{1000},$$

$$\Sigma m(Na_2O) = \frac{C''(Na_2O) \cdot V'}{1000} + \frac{C'(Na_2O) \cdot V''}{1000} + m(NaOH) \cdot \chi(Na_2O),$$

$$\Sigma m(K_2O) = m(KOH) \cdot \chi(K_2O),$$

$$\Sigma m(H_2O) = \frac{C''(H_2O) \cdot V'}{1000} + \frac{C'(H_2O) \cdot V''}{1000} + (c - m(SiO_2)) +$$

$$+ (m(NaOH) - m(NaOH) \cdot \chi(Na_2O)) + (m(KOH) - m(KOH) \cdot \chi(K_2O)) + V(H_2O),$$

где

$\chi(K_2O)$ - мольная доля K_2O в растворе;

$\chi(Na_2O)$ - мольная доля Na_2O в растворе.

Расчет массы твердой фазы до синтеза проводится по следующей формуле:

$$S = m(Al_2O_3) + \Sigma m(SiO_2) + \Sigma m(Na_2O) + \Sigma m(K_2O).$$

2.3. Теоретический расчет химического состава маточного раствора и твердой фазы

Для маточного раствора:

$$m_1''(SiO_2) = m(SiO_2) - m'(SiO_2),$$

$$p_1(SiO_2) = \frac{m'(SiO_2) \cdot 1000}{\Sigma m(H_2O)},$$

$$m_2''(Na_2O) = \Sigma m(Na_2O) - m'(Na_2O),$$

$$p_2(Na_2O) = \frac{m''(Na_2O) \cdot 1000}{\Sigma m(H_2O)},$$

$$m_3''(K_2O) = \Sigma m(K_2O) - m'(K_2O),$$

$$p_3(K_2O) = \frac{m''(K_2O) \cdot 1000}{\Sigma m(H_2O)},$$

где

$m_1''(SiO_2)$ - масса SiO_2 в маточном растворе, г;

$p_1(SiO_2)$ - концентрация SiO_2 в маточном растворе, г/л;

$m_2''(Na_2O)$ - масса Na_2O в маточном растворе, г;

$p_2(Na_2O)$ - концентрация Na_2O в маточном растворе, г/л;

$m_3''(K_2O)$ - масса K_2O в маточном растворе, г;

$p_3(K_2O)$ - концентрация K_2O в маточном растворе, г/л.

Масса компонентов в маточном растворе вычисляется следующим образом:

$$Q = m''(SiO_2) + m''(Na_2O) + m''(K_2O).$$

Для твердой фазы:

$$m_1'(SiO_2) = \frac{m(SiO_2) \cdot Y_3}{X_4},$$

$$\omega_1(SiO_2) = \frac{m_1'(SiO_2) \cdot 100}{q},$$

$$m_2'(Na_2O) = \frac{m(Na_2O) \cdot Y_1}{X_2},$$

$$\omega_2(Na_2O) = \frac{m_2'(Na_2O) \cdot 100}{q},$$

$$m_3'(K_2O) = \frac{m(K_2O) \cdot Y_2}{X_3},$$

$$\omega_3(K_2O) = \frac{m_3'(K_2O) \cdot 100}{q},$$

где

$m_1'(SiO_2)$ - масса SiO_2 в маточном растворе, г;

$\omega_1(SiO_2)$ - массовая доля SiO_2 в твердой фазе, %;

$m_2'(Na_2O)$ - масса Na_2O в маточном растворе, г;

$\omega_2(Na_2O)$ - массовая доля Na_2O в твердой фазе, %;

$m_3'(K_2O)$ - масса K_2O в маточном растворе, г;

$\omega_3(K_2O)$ - массовая доля K_2O в твердой фазе, %.

Масса компонентов твердой фазы определяется как

$$q = S - Q,$$

где q - теоретическая масса твердой фазы, г.

Выход продукта (масса твердой фазы цеолита):

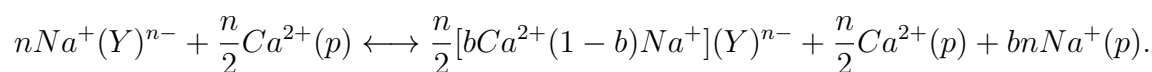
$$\frac{W}{q} \cdot 100\%.$$

3. Постановка задачи

В Институте нефтехимии и катализа РАН совместно с ОАО «Салаватнефтеоргсинтез» разработан способ прямого синтеза высокомолекулярных цеолитов типа Y, позволяющий получать образцы цеолитов в натриевой форме [4], [5]. Но закономерности ионного обмена и синтеза H-форм высокомолекулярных феожазитов со степенью обмена Na^+ на H^+ выше 98% в них не изучены.

Экспериментальные исследования ионного обмена проводились на цеолите NaY в изотермическом стеклянном реакторе периодического действия при интенсивном перемешивании реакционной смеси с помощью стеклянной мешалки. В ходе кинетических экспериментов исследовано влияние температуры, концентрации Ca^{2+} в растворе и продолжительности обмена на скорость удаления Na^+ из цеолита. Также анализировалась степень обмена Na^+ на Ca^{2+} .

В общем виде процесс ионного обмена можно описать схемой реакции:



Математическое описание процесса ионного обмена представляется в виде системы обыкновенных нелинейных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = b \cdot s \cdot (y_1 - x_1) + k \cdot c_1 \cdot y_2, \\ \frac{dy_1}{dt} = b \cdot s \cdot (x_1 - y_1) + k \cdot c_1 \cdot y_2, \\ \frac{dy_2}{dt} = b \cdot s \cdot (y_1 - x_1) - k \cdot c_1 \cdot y_2, \\ \frac{dc_1}{dt} = -k \cdot c_1 \cdot y_2, \\ \frac{dc_2}{dt} = k \cdot c_1 \cdot y_2, \end{cases} \quad (3.1)$$

где x_1 – концентрация Na в растворе (г/мл), x_2 – концентрация металла в растворе (г/мл), y_1 – концентрация Na в макропорах (г/мл), y_2 – концентрация металла в макропорах (г/мл), c_1 – концентрации Na в цеолите (% мас), c_2 – концентрации металла в цеолите (% мас), b – степень массообмена (%), s – удельная поверхность зерна в цеолите (m^2/g), k – константа скорости реакции (c^{-1}).

Начальные данные: $x_1(0)$, $x_2(0)$, $y_1(0)$, $y_2(0)$, $c_1(0)$, $c_2(0)$ – концентрации веществ в начальный момент времени. Таким образом возникает задача – решить прямую задачу для данной системы. Полученные уравнения адекватно описывают результаты эксперимента и могут в дальнейшем использоваться для определения показателей процесса ионного обмена в зависимости от его условий без проведения новых экспериментальных исследований.

Представленные выше алгоритмы позволяют анализировать и принимать решение по созданию эффективных катализаторов. Кроме того, данные алгоритмы являются частью единой системы, которая позволяет хранить всю рабочую информацию о проведенных вычислительных и натурных экспериментах.

4. Описание информационно-аналитической системы

Основной предпосылкой разработки системы, использующей базу данных, является стремление объединить все обрабатываемые в лабораториях данные в единое целое и обеспечение к ним контролируемого доступа. Применение технологий баз данных позволяет хранить, структурировать и извлекать информацию оптимальным для пользователя (в данном случае химика-экспериментатора) образом. Также это даёт возможность быстрого

сравнительного анализа различных наборов экспериментальных данных. Для обеспечения этих функций применяются специализированные средства - системы управления базами данных (СУБД).

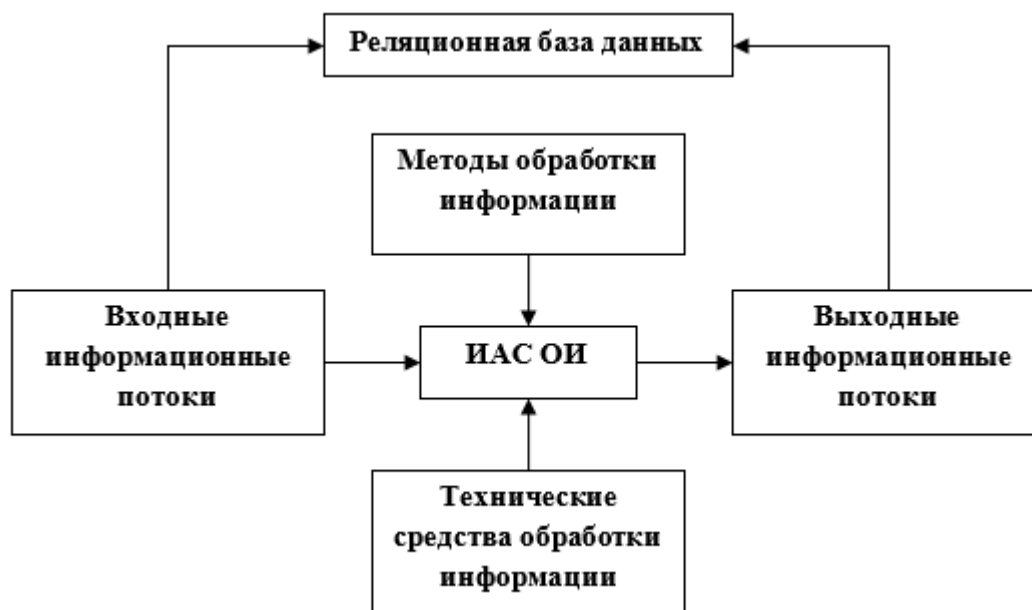
Создание ИВАС с постоянно растущей базой данных экспериментов, включающей методы обработки экспериментальных данных, позволит экспериментатору планировать и проводить целенаправленный эксперимент по синтезу образца цеолита, зная оптимальный состав реакционной смеси, который обеспечит максимальный выход продукта. После этого дальнейшие расчеты позволят провести целенаправленный эксперимент ионного обмена цеолита с определенной (заданной) степенью обмена.

Разработка ИВАС ОИ велась в процессе обработки данных по расчету материального баланса для кристаллизации и экспериментальных данных по ионному обмену на катионах Ca^{2+} .

Накопленные экспериментальные данные позволили приступить к формированию базы данных по исследованию цеолитов и разработке приложения для описания закономерностей поведения данных веществ при различных технических режимах. В качестве основы была выбрана объектно-реляционная модель базы данных, она является более удобной и простой в применении, так как информацию о реакциях химики-экспериментаторы Института нефтехимии и катализа РАН предоставляют в виде таблиц[6].

В процессе работы были обработаны наборы экспериментальных данных для различных цеолитов и типов металла.

Таким образом, при анализе экспериментальных данных предлагается использовать ИВАС, структура которой приведена на рис. 4.1 [7], [8].



Р и с у н о к 4.1

Структура информационно-вычислительной аналитической системы «обмен ионов»

Ниже представлено более подробное описание каждого элемента ИВАС.

К входным информационным потокам относятся:

- состав реакционной смеси, химическая формула цеолита;
- концентрации веществ, входящих в силикат и алюминат;
- масса продукта, которая должна получиться после синтеза;
- условия проведения эксперимента: тип раствора, режим протекания процесса, температура, объем реакционной смеси;

- валентность и атомарная масса металла, участвующего в реакции;
- концентрации веществ в начальный момент времени;
- концентрации веществ в фиксированные моменты времени (на основе замеров, проведенных во время эксперимента);

К методам обработки информации относятся:

- алгоритм обработки данных по расчету материального баланса;
- алгоритм обработки экспериментальных данных ионного обмена;

К выходным информационным потокам относятся:

- необходимое количество исходных реагентов для кристаллизации цеолитов;
- состав маточного раствора и твердой фазы;
- максимально возможный выход продукта;
- расчетные значения концентраций всех веществ, участвующих в реакции в любой момент времени;
- графики изменения концентраций веществ, участвующих в обмене;
- график изменения степени обмена.

К техническим средствам обработки информации относятся:

- экспериментальная установка (для химиков-экспериментаторов);
- вычислительные системы: персональный компьютер (для математиков, программистов).

5. Выводы

В результате проведенной исследовательской работы была разработана информационно-вычислительная аналитическая система, предназначенная для обработки экспериментов по расчету материального баланса для цеолитов и ионному обмену на них, позволяющая установить особенности натурального эксперимента. Разработана реляционная база данных для хранения и обработки информации по экспериментам в составе ИВАС ОИ.

В процессе работы были обработаны наборы экспериментальных данных для различных цеолитов и типов металла. Такая обработка данных дает возможность экспериментатору планировать и проводить целенаправленный эксперимент с известным оптимальным составом реакционной смеси. Программа позволяет рассчитать количество исходных реагентов и максимальный выход продукта, получаемого после синтеза. Также возможно получить более точные параметры по синтезу образца цеолита с определенной (заданной) степенью обмена.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, Р. Р. Сафин, "Автоматизированная система структурной и параметрической идентификации кинетических моделей химических реакций с участием металлоорганических соединений на основе базы данных кинетических исследований", *Системы управления и информационные технологии*, **58:4** (2014), 10–16.
2. В. С. Бесков, *Общая химическая технология: Учебник для вузов.*, ИКЦ Академкнига, М., 2005, 452 с.

3. О. Ю. Забейворота, К. К. Горшунова, И. И. Кирьянов, Б. И. Кутепов, И. М. Губайдуллин, “Программа расчета химического состава маточного раствора и твердой фазы "ZEOLITEPC-14" для Института нефтехимии и катализа РАН”, *Хроники объединенного фонда электронных ресурсов Наука и образование.*, **1:3** (58) (2014), 44.
4. М. Л. Павлов, О. С. Травкина, Б. И. Кутепов, И. Н. Павлова, Р. А. Басимова, А. Н. Хазипова, “Способ получения высокомолекулярного фозажита без связующих веществ.”, 2010, № RUS 2456238.
5. М. Л. Павлов, Р. А. Басимова, Б. И. Кутепов, У. М. Джемилев, О. С. Травкина, С. И. Мячин, А. В. Прокопенко, “Способ получения гранулированного без связующего цеолита типа NaY высокой фазовой частоты.”, 2009, № RUS 2412903.
6. И. М. Губайдуллин, Л. В. Сайфуллина, М. Р. Еникеев, “Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики: учеб. пособие Уфа”, *Изв. вузов. Математика.*, 2011, 90.
7. И. М. Губайдуллин, С. И. Спивак, “Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики”, *Системы управления и информационные технологии.*, 2008, № 1.1(31), 150–153.
8. И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, С. И. Спивак, “Последовательно-параллельное определение кинетических параметров”, *Журнал Средневолжского математического общества.*, **11:2** (2009), 14–25.

Дата поступления 12.08.2016

Calculation of the material balance for crystallization of zeolites and mathematical modelling of ion exchange

© G. I. Sakhibgareeva ⁶, O. S. Travkina ⁷, O. U. Kiryanova ⁸, R. Z. Kuvatova ⁹, I. M. Gubaidullin ¹⁰

Abstract. The main prerequisites for development of information and data processing system for calculation of material balance for zeolites' crystallization are listed. This software allows to store information about experiments and to make preliminary calculations for synthesis. Moreover, the calculation of ion exchange on zeolites is also allowed in the designed information and data processing system. This application is used for the description of zeolites' behavior at different technical modes.

Key Words: zeolites, ion exchange, database management system, information and data processing system, material balance

⁶ Student, Ufa State Technological Petroleum University, Ufa, Sahibgareeva.gulfina@yandex.ru

⁷ Researcher, Laboratory of catalyst preparation, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences, Ufa, simchanka@mail.ru

⁸ Postgraduate student, Laboratory of mathematical chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences, Ufa, olga.kiryanova27@gmail.com

⁹ Postgraduate student, Laboratory of catalyst preparation, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences, Ufa, kuvatova2010@mail.ru

¹⁰ Senior Researcher of Mathematical Chemistry Laboratory, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences, Ufa; professor of Petroleum and Gas Technology Department, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa; irekmars@mail.ru

УДК 517.9

Исследование устойчивости некоторого решения системы кинетических уравнений химической реакции

© О. С. Язовцева¹, Т. Ф. Мамедова², И. М. Губайдуллин³

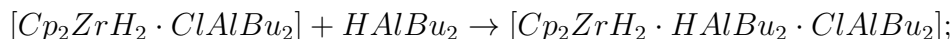
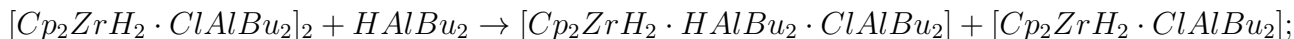
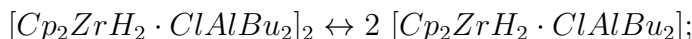
Аннотация. В статье рассматривается математическая модель химической реакции гидроалюминирования олефинов. Исследуется асимптотическая устойчивость ненулевого положения равновесия данной системы. Подход основан на использовании метода сравнения Е.В. Воскресенского и покомпонентно асимптотической эквивалентности по Брауеру исследуемой системы и некоторой линейной системы. Показано, что положение равновесия асимптотически неустойчиво по отдельным компонентам.

Ключевые слова: математическое моделирование, реакция гидроалюминирования олефинов, покомпонентно асимптотическая эквивалентность по Брауеру, асимптотическая устойчивость по части переменных, метод сравнения

1. Постановка задачи

Математическое моделирование в химических технологиях часто приводит к работе с нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями. Поскольку поиск аналитического решения чаще всего затруднен, актуальность приобретает вопрос о качественном исследовании моделей химическо-технологических процессов.

Рассмотрим систему кинетических уравнений химической реакции гидроалюминирования олефинов, которая протекает по следующей схеме [1]:



Обозначим концентрации веществ $[Cp_2ZrH_2 \cdot ClAlBu_2]_2$, $[Cp_2ZrH_2 \cdot ClAlBu_2]$, $HAlBu_2$, $[Cp_2ZrH_2 \cdot HAlBu_2 \cdot ClAlBu_2]$ через v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , соответственно.

Составим математическую модель, соответствующую выбранной части реакции [2]:

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -k_1v_1 + k_2v_2^2 - k_3v_1v_3; \\ \frac{dv_2}{dt} = 2k_1v_1 - 2k_2v_2^2 + k_3v_1v_3 - k_4v_2v_3; \\ \frac{dv_3}{dt} = -k_3v_1v_3 - k_4v_2v_3; \\ \frac{dv_4}{dt} = k_3v_1v_3 + k_4v_2v_3. \end{cases} \quad (1.1)$$

Так как концентрации веществ являются неотрицательными и ограниченными величинами, то решения системы (1.1) будем рассматривать на множестве $0 \leq v_i \leq 1, i = \overline{1, 4}$ при всех $t \geq 0$.

¹ Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», г. Саранск; kurinaos@gmail.com

² Профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, ФГБОУ ВО «МГУ им. Н. П. Огарёва», г. Саранск; mamedovatf@yandex.ru

³ Старший научный сотрудник лаборатории математической химии Института нефтехимии и катализа РАН, профессор кафедры технологии нефти и газа Уфимского государственного нефтяного технического университета, г. Уфа; irekmars@mail.ru

Практическое значение имеет исследование асимптотической устойчивости по части переменных некоторого нетривиального положения равновесия v^* , соответствующего положению химического равновесия системы (1.1).

Математическая модель представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений вида (1.1), в которой матрица линейного приближения является вырожденной. Следовательно, для исследования подобной системы на устойчивость не подходит первый метод Ляпунова, так как поведение первого линейного приближения системы неизвестно [3]. Для исследования поведения решений системы вида (1.1) применим метод сравнения Е.В. Воскресенского [4]–[7].

2. Исследование асимптотической устойчивости положения равновесия по части переменных методом сравнения Е.В. Воскресенского

Метод сравнения Е.В. Воскресенского позволяет проводить анализ устойчивости по части переменных нелинейных систем в условиях неприменимости первого метода Ляпунова (ввиду критического случая) и сложности применения второго метода Ляпунова (ввиду практической сложности построения функции Ляпунова для многомерных систем).

Запишем систему (1.1) в виде

$$\frac{dv}{dt} = Av + g(v), \quad (2.1)$$

где $v = colon(v_1, v_2, v_3, v_4)$,

$$A = \begin{pmatrix} -k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2)$$

$$g(v) = \begin{cases} k_2 v_2^2 & - & k_3 v_1 v_3; \\ 2k_2 v_2^2 & + & k_3 v_1 v_3 & - & k_4 v_2 v_3; \\ & - & k_3 v_1 v_3 & - & k_4 v_2 v_3; \\ & & k_3 v_1 v_3 & + & k_4 v_2 v_3. \end{cases} \quad (2.3)$$

Положение химического равновесия v^* найдем как решение уравнения

$$Av + g(v) = 0. \quad (2.4)$$

Для исследования устойчивости нетривиального положения равновесия v^* , сделаем в системе (2.1) замену $v = x + v^*$, получим:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(x), \quad (2.5)$$

где

$$f(x) = Av^* + g(x + v^*) =$$

$$= Av^* + \begin{pmatrix} k_2(x_2 + v_2^*)^2 - k_3(x_1 + v_1^*)(x_3 + v_3^*) \\ -2k_2(x_2 + v_2^*)^2 + k_3(x_1 + v_1^*)(x_3 + v_3^*) - k_4(x_2 + v_2^*)(x_3 + v_3^*) \\ -k_3(x_1 + v_1^*)(x_3 + v_3^*) - k_4(x_2 + v_2^*)(x_3 + v_3^*) \\ k_3(x_1 + v_1^*)(x_3 + v_3^*) + k_4(x_2 + v_2^*)(x_3 + v_3^*) \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Так как $f(0) \equiv 0$, то система (2.5) имеет тривиальное решение $x \equiv 0$. Исследуем тривиальное решение системы (2.5) на асимптотическую устойчивость по части переменных.

Представим систему (2.6) в виде:

$$\frac{dx}{dt} = (A + M)x + h(x), \quad (2.7)$$

где $h(x) = f(x) - Mx$,

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Так как в окрестности положения равновесия v^* решения системы (2.1) ограничены, то функция $h(x)$ на решениях системы (2.1) так же является ограниченной.

В качестве системы сравнения выберем систему

$$\frac{dy}{dt} = (A + M)y, \quad (2.9)$$

Для системы (2.7) проверим выполнение условий теоремы 1.6.5 из работы [5].

Фундаментальная матрица $Y(t)$ и обратная к ней для системы сравнения (2.9) имеют вид

$$Y(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \frac{e^{-k_1 t}(k_1+1)}{k_1} & 0 & 0 & 0 \\ e^{-k_1 t} & e^t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}, \quad Y^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2e^{-k_1 t}kl}{k_1+1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2k_1 e^{-t}}{k_1+1} & e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Определим эталонные функции сравнения $\mu_i(t)$ и $m_i(t)$ из неравенств вида

$$\mu_i(t) \geq \max_j |y_{ij}(t)|, \quad m_i(t) \geq \max_{j \in M_0} \{\max |y_{ij}(t)|, \mu_i(t)\}, \quad t \geq 0, \quad i \in M_0 = \{2, 3, 4\}.$$

Получим

$$\mu_i(t) = c_i e^t, \quad m_i(t) = d_i e^t, \quad i \in M_0,$$

где c_i , d_i – вещественные константы.

Проверим сходимость интегралов вида

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{t_0}^t \sum_{j \in N, k \in B} |y_{ik}(t) y^{jk}(s)| \lambda_j(c_0 m(s)) ds + \\ &+ \int_t^{+\infty} \sum_{j \in N, k \in M} |y_{ik}(t) y^{jk}(s)| \lambda_j(c_0 m(s)) ds, \quad i \in M_0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

здесь $B = N \setminus M$, $M = M_0$.

В качестве мажорант выберем функции

$$\lambda_j(z_2, z_3, z_4) = C + D(z_2^{0,5} + z_3^{0,5} + z_4^{0,5}), \quad j = \overline{1, n},$$

где C , D – вещественные константы.

Тогда

$$|h_j(x)| \leq \lambda_j(z_2, z_3, z_4) \quad \text{при всех } t \geq 0, \quad z_i = |x_i|, \quad i \in M_0.$$

Следовательно, для интегралов (2.8) справедливы оценки

$$I_i \leq de^{-0.5t} < +\infty, \quad t \geq 0, \quad i \in M_0,$$

где d – вещественная константа.

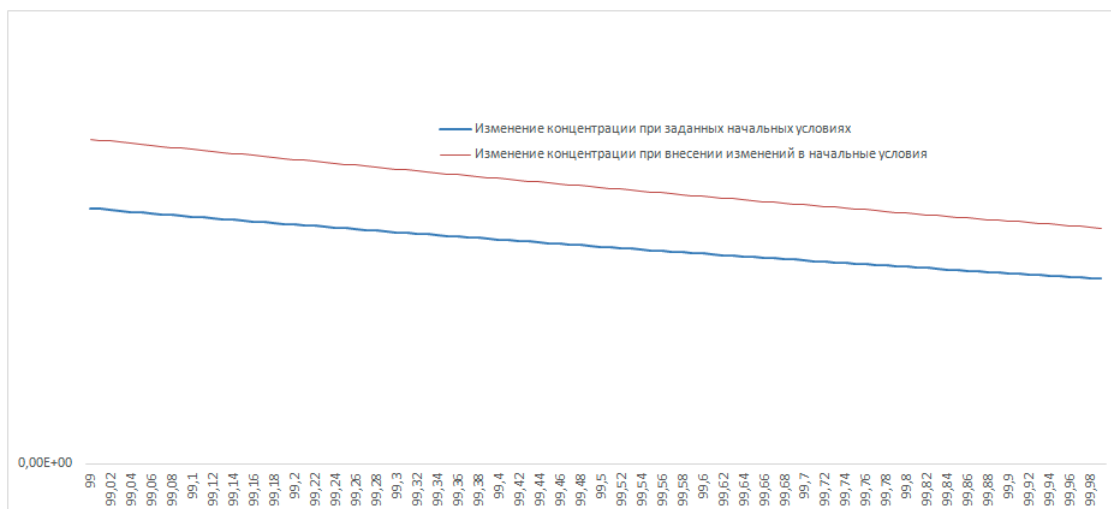
Так как условия теоремы 1.6.5 из работы [5] выполнены и решения системы (2.9) неустойчивы по y_2 , y_3 и y_4 , то поведение решений системы (2.7) покомпонентно асимптотически эквивалентно по Брауеру поведению решений системы (2.9) и тривиальное решение (2.7) является неустойчивым по переменным x_2 , x_3 и x_4 . Следовательно, положение равновесия v^* системы (2.1) асимптотически неустойчиво по переменным v_2 , v_3 , v_4 .

3. Численное моделирование изменения концентраций веществ

Для численного моделирования концентраций веществ системы (1.1) использована модификация Мерсона метода Рунге-Кутты [8], [9]. Для выбранной реакции константы скоростей химических реакций в системе (1.1) принимают значение:

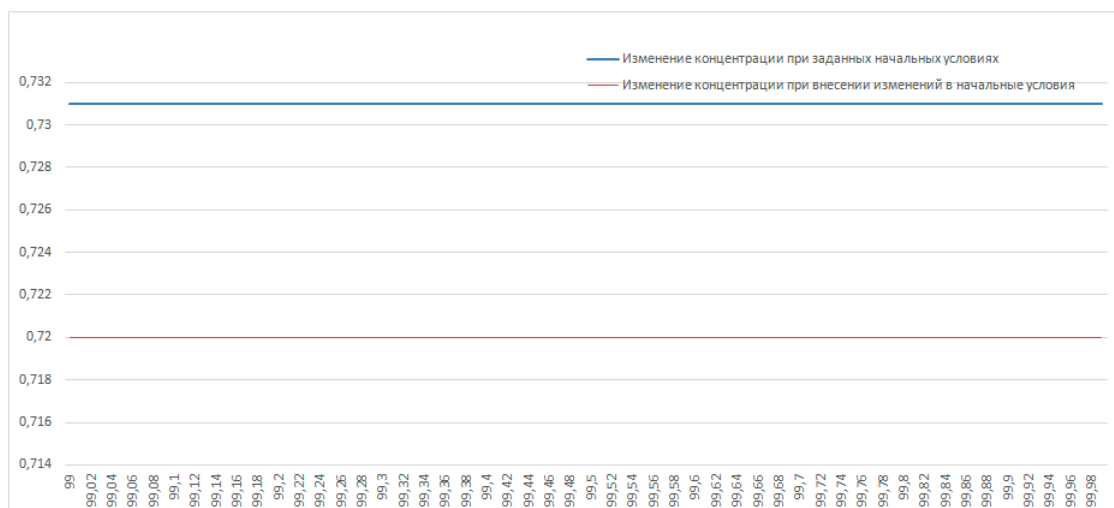
$$k_1 = 0.2, \quad k_2 = 0.17, \quad k_3 = 3.5, \quad k_4 = 0.7.$$

На графике приведены результаты численного моделирования концентраций веществ $[Cp_2ZrH_2 \cdot ClAlBu_2]$, $[HAlBu_2]$ и $[Cp_2ZrH_2 \cdot HAlBu_2 \cdot ClAlBu_2]$ при начальных данных $v(0) = (0.086, 0, 0.903, 0.011)$ и $\tilde{v}(0) = (0.09, 0, 0.9, 0.01)$.



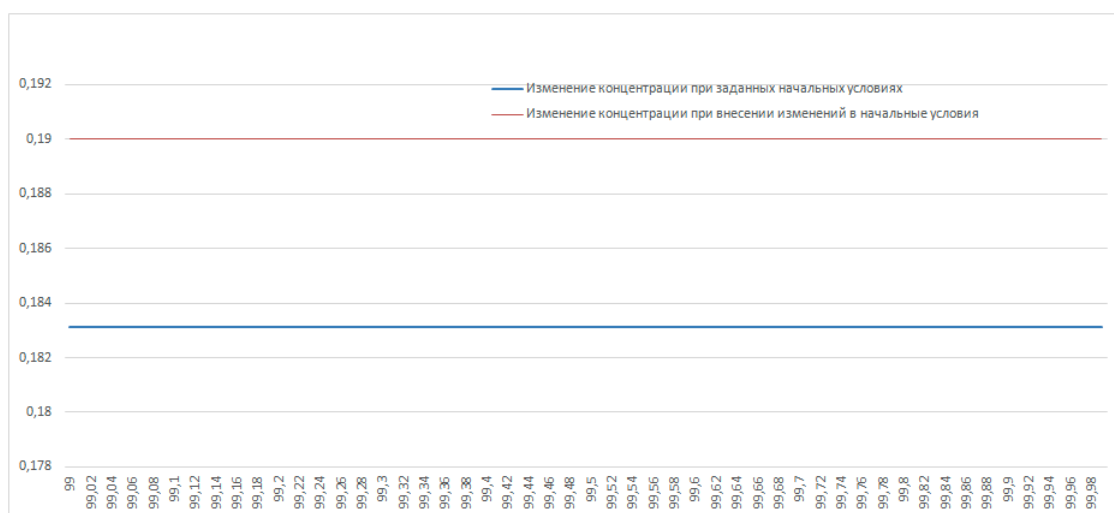
Р и с у н о к 3.1

Численное значение v_2 – концентрации вещества $[Cp_2ZrH_2 \cdot ClAlBu_2]$



Р и с у н о к 3.2

Численное значение v_3 — концентрации вещества $[HAlBu_2]$



Р и с у н о к 3.3

Численное значение v_4 — концентрации вещества $[Cp_2ZrH_2 \cdot HAlBu_2 \cdot ClAlBu_2]$

Как видно из графиков решений $v_2(t)$, $v_3(t)$, $v_4(t)$ при внесении малых изменений в начальных условиях асимптотически не приближаются друг к другу, то можно сделать вывод о неустойчивости исследуемых решений.

4. Заключение

Численный эксперимент подтверждает результаты, полученные с помощью метода Е.В. Воскресенского, об асимптотической неустойчивости положения равновесия системы кинетических уравнений химической реакции.

Качественное исследование на устойчивость нетривиального решения системы кинетических уравнений химической реакции гидроалюминирования олефинов согласуется с полученными практическими результатами.

Из отсутствия асимптотической устойчивости по части переменных, соответствующих определенным продуктам реакции, следует значительное влияние колебаний начальных концентраций реагента на выход целевого продукта. Таким образом, даже незначительный технологический сбой в подаче исходных материалов может привести к значительным отклонениям выхода продукта реакции от ожидаемого.

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Коледина К. Ф., Губайдуллин И. М., “Определение кинетических параметров частной реакции гидроалюминирования олефинов диизобутилалюминийхлоридом ($\text{ClAlBu}_2\text{i}_2$) в каталитических условиях”, *Вестник Башкирск. ун-та.*, 2008, № 3(1).
2. Сайфуллина Л. Ф., Губайдуллин И. М., Еникеев М. Р., *Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики.*, Учебное пособие, РИО БашГУ, Уфа, 2011.
3. Ляпунов А. М., *Общая задача об устойчивости движения*, М.: Л. 5 Гостехиздат, 1950, 471 с.
4. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Саранск: Изд-во Сарат. Ун-та, 1990, 224 с.
5. Воскресенский Е. В., *Асимптотические методы: теория и приложения*, Саранск: СВМО, 2000, 300 с.
6. Мамедова Т. Ф., Ляпина А. А., “Алгоритм исследования моделей нелинейной динамики”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки.*, 2013, № 3(27), 48-57.
7. Мамедова Т. Ф., Егорова Д. К., Десяев Е. В., “Анализ устойчивости математической модели Лукаса по части переменных”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17:3** (2015), 30-36.
8. Augustine S. Chai, “Modified Merson’s integration algorithm which saves two evaluations at each step”, *SIMULATION*, **22:3** (1974), 90-92.
9. Тихонова М. В., Губайдуллин И. М., Спивак С. И., “Численное решение прямой кинетической задачи методами Розенброка и Мишельсена для жестких систем дифференциальных уравнений”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **12:2** (2010), 26-33.

Investigation of the stability of a nontrivial solution of the system of kinetic equations of chemical reaction

© O. S. Yazovtseva⁴, T. F. Mamedova⁵, I. M. Gubaidullin⁶

Abstract. The article deals with a mathematical model of olefins' hydroaluminizing chemical reaction. The authors investigate asymptotic stability of non-zero equilibrium position of the system. The approach is based on the comparison method of E.V. Voskresensky and on Brower component-wise asymptotic equivalence of examined system and some linear system. It is shown that the equilibrium position is asymptotically stable in the first component and unstable with respect to the rest of the components.

Key Words: mathematical modeling, reaction of hydroaluminizing olefins, Brower component-wise asymptotic equivalence, asymptotic stability with respect to some variables, comparison method

⁴ Postgraduate student of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovia State University, Saransk; kurinaos@gmail.com

⁵ Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Saransk; mamedovatf@yandex.ru

⁶ Senior Researcher of Mathematical Chemistry Laboratory, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences, Ufa; professor of Petroleum and Gas Technology Department, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa; irekmars@mail.ru

УДК 544.42

Моделирование различных режимов поведения конверсии мономера в процессах радикальной полимеризации диенов

© М. С. Янбеков¹, Э. Р. Гиззатова², С. И. Спивак³

Аннотация. В статье методами и средствами математического моделирования описаны кинетические особенности полимеризационного процесса. Рассмотрены два подхода к моделированию полимеризационных процессов – статический и кинетический. В результате анализа математических моделей удастся качественно проследить ход процесса, выявить чувствительность его отдельных реагентов к изменению условий протекания процессов и функциональные соотношения, характеризующие ряд параметров самого процесса. В работе представлена математическая модель для процесса радикальной полимеризации диенов в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С учетом распределенности констант скоростей обрыва во времени, система становится жесткой, поэтому для поиска ее решения использован подход, позволяющий получать временные интервалы устойчивого решения системы, конверсионную зависимость в различные моменты времени и определять кинетические особенности механизма процесса радикальной полимеризации диенов.

Ключевые слова: радикальная полимеризация, кинетика, конверсия мономера, интерполяция, обратная кинетическая задача

1. Введение

Описание кинетических особенностей полимеризационного процесса может вестись методами и средствами математического моделирования. Целесообразность подхода обусловлена тем, что математические модели, описывающие полимеризационные процессы, позволяют выделить все кинетические закономерности, связывающие компоненты друг с другом. При этом в результате анализа математических моделей удастся качественно проследить ход процесса, выявить чувствительность его отдельных реагентов к изменению условий протекания процессов и функциональные соотношения, характеризующие ряд параметров самого процесса. В литературе [2] принято выделять два подхода к моделированию полимеризационных процессов – статистический [5],[10] и кинетический [5],[9]. Основной составляющей первого из них является вероятность, понимаемая как вероятность наступления отдельной реакции каждой элементарной стадии. Составление и решение задач определения кинетических параметров полимеризации методами статистического моделирования проведено в работах [7], [11]. Использование метода Монте-Карло [5],[8] получают расчетные кривые, удовлетворительно описывающие экспериментальные данные, однако, наряду с простотой применения метода, его основным недостатком является невозможность учета всех компонент (молекул) исходной смеси реагентов, что снижает точность получаемых данных.

Другой подход кинетический – позволяет корректнее оценивать поведение реагентов в ходе процесса, поскольку в кинетических уравнениях изначально заложены принципы

¹ Аспирант кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; miratyanbekov@mail.ru

² Доцент кафедры математического моделирования СФ БашГУ, г. Стерлитамак; makella@rambler.ru

³ Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; semen.spivak@mail.ru

изменения концентраций реагентов и, соответственно, изменения скоростей процесса. Выстраивая кинетическую модель [2], переходят от реально существующего объекта к его математическому аналогу, чаще всего представляющего собой систему дифференциальных уравнений вида [5],[9]:

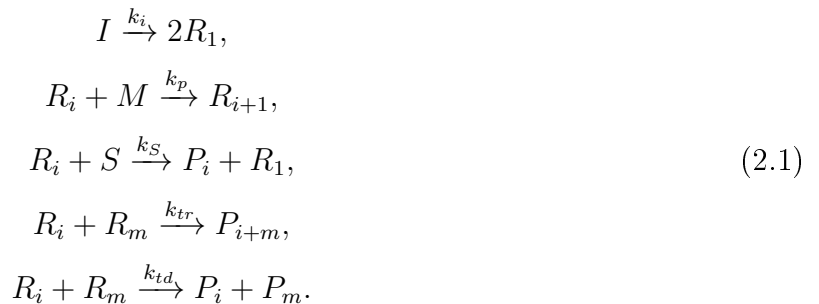
$$\frac{dx}{dt} = f(t, X, K)$$

где t – время полимеризации, X – вектор концентраций всех возможных реагентов системы; K – вектор констант скоростей всех элементарных стадий процесса.

Полученная система дифференциальных уравнений наряду с выписанными начальными условиями представляет собой математическую модель процесса, для которой можно поставить прямые и обратные кинетические задачи.

2. Методы

Процессы радикальной полимеризации также можно описывать системами обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Для кинетической схемы, записанной ниже:



Система дифференциальных уравнений, выписанная согласно законам химической кинетики, будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -k_i I, \\ \frac{dC_a}{dt} &= 2fk_i I - k_{tr}(C_a)^2 - k_{td}(C_a)^2, \\ \frac{dM}{dt} &= -k_p M C_a, \\ \frac{dS}{dt} &= -k_S S C_a, \\ \frac{dR_1}{dt} &= 2fk_i I - k_p M R_1 + k_S S (C_a - R_1) - k_{tr} R_1 C_a - k_{td} R_1 C_a, \\ \frac{dP_1}{dt} &= k_S S R_1 + k_{td} R_1 C_a, \\ \frac{dR_i}{dt} &= k_p M (R_{i-1} - R_i) - k_S S R_i - k_{tr} R_i C_a - k_{td} R_i C_a, i \geq 2, \\ \frac{dP_i}{dt} &= k_S S R_i + k_{tr} \sum_{Z=1}^{i-1} R_Z R_{i-Z} + k_{td} C_a R_i, i \geq 2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Начальные данные для системы следующие:

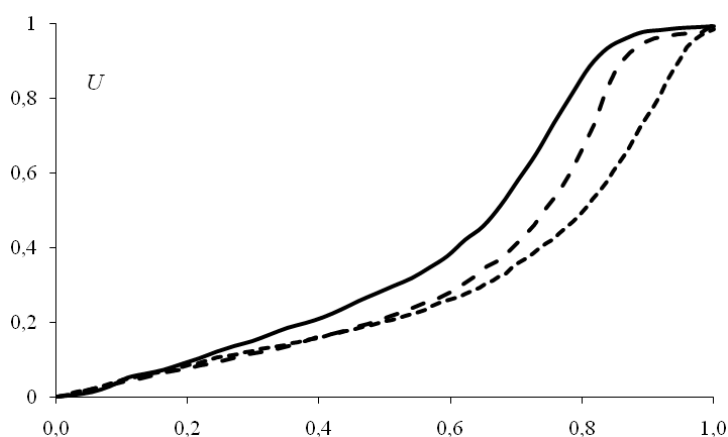
$$I^{(0)} = I(0), M^{(0)} = M(0), S^{(0)} = S(0), C_a^{(0)} = C_a(0), R_i^{(0)} = P_i^{(0)} = 0, i \geq 1. \quad (2.3)$$

Как видно по системе (2.2), она бесконечна, поскольку предполагается, что процесс идет до полного исчерпания мономера, что может означать образование полимерных цепей достаточно большой длины.

Полученная математическая модель (2.2) для кинетической схемы (2.1) позволяет поставить задачу определения ее решения на основании начальных данных (2.3). Иначе говоря, определить решение прямой кинетической задачи, при условии, что все значения кинетических констант скоростей процесса являются известными величинами. Однако, последнее не всегда возможно в силу того, что процедура определения эмпирическим путем значений констант скоростей допускает наличие погрешностей, к тому же часть констант являются невозстанавливаемыми из эксперимента значениями.

Таким образом, возникает обратная кинетическая задача поиска значений констант скоростей, с которыми бы удовлетворительно описывались экспериментально получаемые кривые по конверсии, средним молекулярным массам и молекулярно-массовому распределению.

Надо заметить, что процессы радикальной полимеризации отличаются от других процессов полимеризаций тем, что наблюдается падение скоростей квадратичных обрывов, вызываемое уменьшением значений соответствующих констант скоростей реакций [9]. Наиболее ярко выражено такое поведение констант в характере изменения конверсии мономера, где появляется эффект, называемый автокатализом и проявляемый как резкий скачок расхода мономера (рис. 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Различные виды кривых конверсионных зависимостей мономера в радикальной полимеризации, соотнесенные к абсолютному времени

Поскольку решение обратной кинетической задачи заключается в определении полного набора значений констант скоростей реакций, то появляется возможность апробирования полученных значений для прогнозирования поведения других, неизученных ранее процессов. Отметим, что востребованность получения прогнозных результатов достаточно высока, поскольку трудоемкость решения задачи воспроизведения самого процесса посредством имитационного моделирования в ходе вычислительного эксперимента на порядки ниже трудоемкости реального проведения полимеризационного процесса. Поэтому, исследователи зачастую находят теоретические значения констант скоростей реакций и лишь затем путем решения прямых кинетических задач проводят сравнение эмпирических и теоретических кривых и определяют достоверность полученных значений констант скоростей.

Поиск констант при решении обратных задач нетривиален, поскольку область поиска не ограничена, да и количество экспериментальных данных, на которые можно было

бы опираться при поиске, гораздо меньше количества искомых величин. Поэтому при постановке кинетических задач стараются задать такие условия существования решения, которые бы либо давали его однозначность, либо определяли доверительный интервал с высоким уровнем надежности.

3. Результаты

В настоящей работе постановка обратной кинетической задачи велась для процесса полимеризации метилметакрилата (ММА) на иницирующей системе азоизобутиронитрил (АИБН). Кинетическая схема процесса аналогична (2.1), однако здесь роль агента-передатчика играет мономер, поэтому система дифференциальных уравнений (2.2) меняется на систему (3.1) с начальными данными (3.2):

$$\begin{aligned}\frac{dI}{dt} &= -k_i I, \\ \frac{dC_a}{dt} &= 2fk_i I - k_{tr}(C_a)^2 - k_{td}(C_a)^2, \\ \frac{dM}{dt} &= -(k_p + k_m)MC_a, \\ \frac{dR_1}{dt} &= 2fk_i I - k_p MR_1 + k_m M(C_a - R_1) - k_{tr}R_1 C_a - k_{td}R_1 C_a, \\ \frac{dP_1}{dt} &= k_m MR_1 + k_{td}R_1 C_a, \\ \frac{dR_i}{dt} &= k_p M(R_{i-1} - R_i) - k_m MR_i - k_{tr}R_i C_a - k_{td}R_i C_a, i \geq 2, \\ \frac{dP_i}{dt} &= k_m MR_i + k_{tr} \sum_{Z=1}^{i-1} R_Z R_{i-Z} + k_{td}C_a R_i, i \geq 2,\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$I^{(0)} = I(0), M^{(0)} = M(0), S^{(0)} = S(0), C_a^{(0)} = C_a(0), R_i^{(0)} = P_i^{(0)} = 0, i \geq 1.\tag{3.2}$$

Полимеризационная система достаточно хорошо изучена и представлена в литературе [4] значениями кинетических констант скоростей стадий иницирования, роста цепи, передачи цепи на мономер и константами стадий бимолекулярного обрыва. Последние отмечены лишь начальными значениями, иначе говоря «стартовыми».

Радикальная полимеризация характеризуется тем, что ход процесса позволяет выделить два режима работы, последовательно сменяющих друг друга: стационарный и нестационарный, что отмечено на рис. 3.1.

Математически стационарность режима означает постоянство концентрации активных центров, то есть при любом

$$t \in [t_0, t_{max}], C_a(t) = const.$$

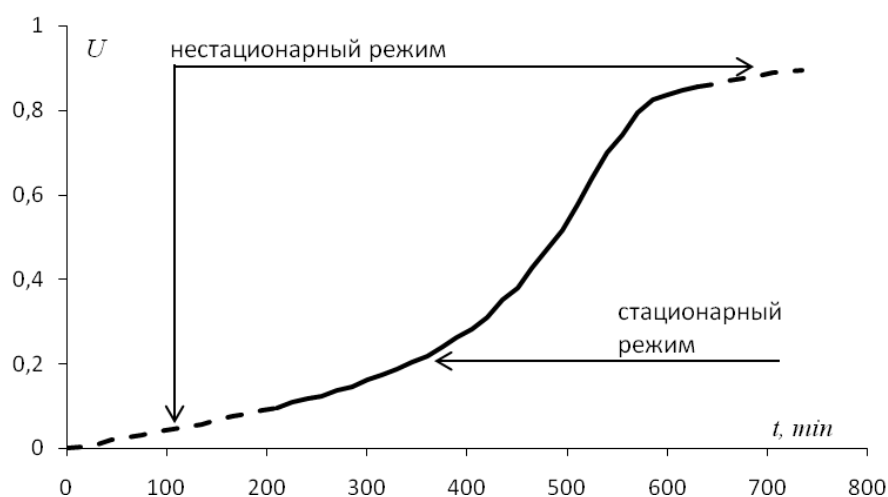
Следовательно, с учетом последнего, второе уравнение системы (3.1) будет иметь вид:

$$0 = 2fk_i I - k_{tr}(C_a)^2 - k_{td}(C_a)^2,\tag{3.3}$$

что совпадает с требуемым равенством [8]:

$$w_i = w_0,\tag{3.4}$$

где $w_i = 2fk_iI$, $w_0 = (k_{tr} + k_{td})(C_a)^2$.



Р и с у н о к 3.1

Смена работы стационарного и нестационарного режимов на конверсионной кривой в радикальной полимеризации ММА при $T=323K$ на иницирующей системе АИБН ($I_0 = 0,003$ моль/л)

Фактически (3.3) можно не учитывать при решении системы дифференциальных уравнений, в силу постоянства концентраций активных центров, при этом сама размерность системы (3.1) будет уменьшена. Однако (3.3) нельзя игнорировать, так как оно является равенством, контролирующим материальный баланс системы.

Проследить за сменой режимов можно, решая систему, полученную из трех первых дифференциальных уравнений системы (3.1):

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -k_iI, \\ \frac{dC_a}{dt} &= 2fk_iI - k_{tr}(C_a)^2 - k_{td}(C_a)^2, \\ \frac{dM}{dt} &= -(k_p + k_m)MC_a, \end{aligned} \quad (3.5)$$

с начальными данными

$$I^{(0)} = I(0), M^{(0)} = M(0), S^{(0)} = S(0), C_a^{(0)} = C_a(0).$$

Однако, при постоянных значениях констант скоростей стадий рекомбинации и диспропорционирования система выдает неверные с физико-химической точки зрения результаты, поэтому необходимо переопределение констант в каждый момент времени. Согласно [1], закон их изменения может быть подчинен зависимости:

$$k^* = k \cdot \exp(-c_1U - c_2U^2 - c_3U^3). \quad (3.6)$$

Дальнейшие вычисления показали, что этот закон можно дополнить уточняющим коэффициентом, увеличивающим коэффициент корреляции между экспериментальными и теоретическими данными [8]:

$$k^* = k \cdot \exp(-c_0 - c_1U - c_2U^2 - c_3U^3). \quad (3.7)$$

Каждый коэффициент кривой (3.7) является линейно независимым параметром от температуры:

$$c_i = a_i + b_i \cdot T \quad (3.8)$$

Таблица найденных параметров представлена ниже.

По таблице 4 видно, что с изменением начальной концентрации инициатора меняется и вид линейных зависимостей (3.8), хотя предполагается, что выражения (3.8) не зависят от нее. Но, в данном случае, получать усредненные значения коэффициентов необязательно, поскольку именно представленные соотношения позволяют повысить точность описания экспериментальных кривых по конверсии.

С полученными зависимостями для констант скоростей обрыва и значениями констант скоростей остальных стадий кинетической схемы (2.1) решалась прямая кинетическая задача описания конверсионных кривых по системе (3.5).

4. Обсуждение

В данном полимеризационном процессе, характеризующимся быстро падающими скоростями обрывов, система дифференциальных уравнений (3.5) становится жесткой и для ее решения можно использовать подход [3], заключающийся в определении уровня значимости каждого слагаемого в момент времени.

В рассмотрение вводятся матрица скоростей:

$$F(t) = \left(\frac{c_i(t)}{t} | w_j(t) \right), t \in [0, \infty), \quad (4.1)$$

где C_i - концентрация i -ого вещества, $1 \leq i \leq n$; w_j - скорость j -ой реакции, $1 \leq j \leq m$ и матрица значимости:

$$F * (t) = (\lambda_i(t)) F(t), \quad (4.2)$$

$$\lambda_i(t) = \frac{1}{\max |F_{ij}(t)|}, \quad (4.3)$$

$$j \leq m + 1.$$

Суть алгоритма по указанному подходу следующая [3]:

1) на каждом шаге по времени определяется доля значимости каждого слагаемого уравнения системы (3.5);

2) если уровень значимости слагаемого больше заданного, то оно остается в системе, если меньше, оно из системы исключается.

Выполняя алгоритм, мы наблюдаем динамическое изменение структуры системы дифференциальных уравнений (3.5), благодаря чему появляются интервалы устойчивого решения системы.

Так, для следующих исходных данных: $T=343\text{K}$, $I(0)=0,001$ моль/л, $M(0)=9,8$ моль/л.

Таблица 4: зависимости коэффициентов кубического полинома в выражении (3.7).

$I(0)$, моль/л	c_0	c_1	c_2	c_3
0,001	$19,42+0,05T$	$320,83-0,93T$	$-818,63+2,49T$	$524,98-1,61T$
0,003	$5,98-0,02T$	$10,01-0,01T$	$276,43-0,77T$	$-405,56+1,16T$

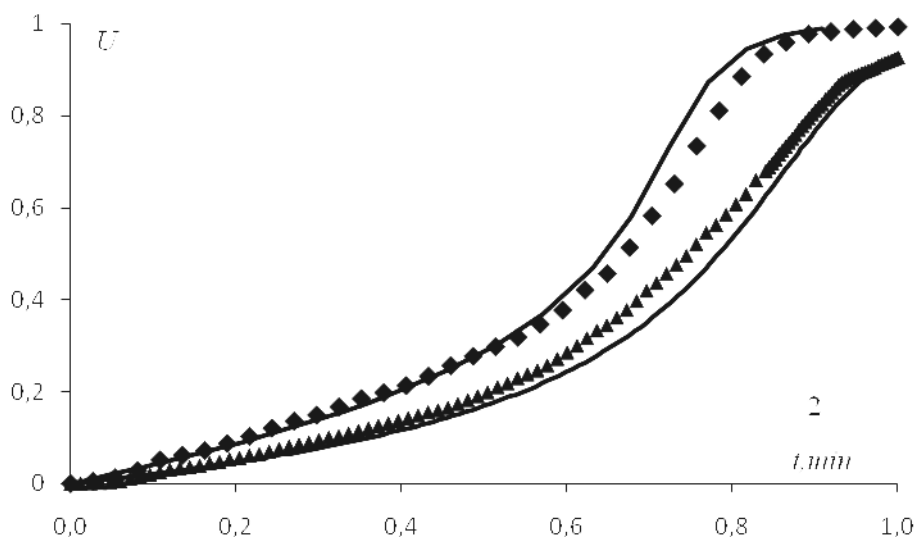
На первом, начальном интервале длительностью в 8 минут ищется решение всей системы (3.5).

Второй интервал (8; 215) предполагает решение всей системы дифференциальных уравнений (3.5), но при условии, что на нем наблюдается стационарный режим: $w_i = w_0$, тогда система (3.5) сводится к системе (4.4):

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= -k_i I, \\ \frac{dM}{dt} &= -MC_a(k_p + k_m), \\ 0 &= k_i I - (k_{tr} + k_{td})C_a^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Последний временной интервал (215; 275) показывает, что вновь наблюдается значительное изменение концентрации активных центров, поэтому система дифференциальных уравнений (3.5) решается полностью.

Используя соотношения, приведенные в таблице 4 и подставляя их в выражения (3.7), построены зависимости изменения конверсии во времени, представленные на рис. 4.1. По рисунку видно, что расчетные кривые описывают характерные изменения конверсионных кривых. Отметим, что при расчетном описании конверсионных кривых при глубоких степенях превращения появляется «плато», свидетельствующее о значительном исчерпании мономера и резком снижении скорости процесса полимеризации.



Р и с у н о к 4.1

Кривые $U(t)$ при разных концентрациях инициатора I и температуры T : 1) $I=0,001$ моль/л, $T = 323K$; 2) $I=0,003$ моль/л, $T = 343K$; квадраты и треугольники – экспериментальные данные, сплошные линии – расчетные кривые

5. Заключение

Таким образом, в работе представлена математическая модель для процесса радикальной полимеризации диенов в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений. С учетом распределенности констант скоростей обрыва во времени, система становится жесткой, поэтому для поиска ее решения использован подход, позволяющий получать временные интервалы устойчивого решения системы, конверсионную зависимость в различные моменты времени и определять кинетические особенности механизма процесса радикальной полимеризации диенов.

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. Hui, A. Hamielec, "Thermal polymerization of styrene at high conversions and temperatures. An experimental study", *Journal of Applied Polymer Science*, **16** (1972), 749–769.
2. С. Л. Подвальный, *Моделирование промышленных процессов полимеризации*, Химия, М., 1979, 256 с.
3. А. В. Тропин, С. И. Масленников, С. И. Спивак, "Новый подход к решению нелинейных систем дифференциальных уравнений химической кинетики", *Кинетика и катализ*, **5** (1995), 658–664.
4. J. Brandrup, E. H. Immergut, E. A. Grulke, *Polymer handbook*, A wiley interscience publication, 4, 1999, 2317 pp.
5. Т. С. Усманов, И. К. Гатауллин, С. М. Усманов, С. И. Спивак, Ю. Б. Монаков, "О решении обратной задачи формирования молекулярно-массовых распределений при ионно-координационной полимеризации", *Доклады АН. Т. 385*, **3**, 2002, 368–371.
6. Т. С. Усманов, Э. Р. Максютлова, И. К. Гатауллин, С. И. Спивак, С. М. Усманов, Ю. Б. Монаков, "Обратная кинетическая задача ионно-координационной полимеризации диенов", *Высокомолек. соед.* Т. 45, **2**, 2003, 181–187.
7. Т. А. Михайлова, Э. Н. Мифтахов, И. Ш. Насыров, С. А. Мустафина, "Моделирование синтеза бутадие-стирольного сополимера методом Монте-Карло", *Вестник Башкирского университета*. Т. 20, **1**, 2015, 73–77.
8. Т. А. Михайлова, И. В. Григорьев, С. А. Мустафина, "Исследование синтеза бутадие-стирольного сополимера на основе метода Монте-Карло с учетом распределения по времени пребывания", *Фундаментальные исследования*, **5(3)**, 2015, 517–520.
9. Э. Р. Гиззатова, С. И. Спивак, С. В. Колесов, "Математическое моделирование кинетической неоднородности констант бимолекулярного обрыва радикальной полимеризации", *Системы управления и информационные технологии*, **1.1(59)**, 2015, 126–129.
10. В. М. Янборисов, А. А. Султанова, С. В. Колесов, "Инверсный алгоритм моделирования радикальной полимеризации методом Монте-Карло", *Математическое моделирование*. Т. 28, **5**, 2016, 3–15.
11. А. А. Султанова, В. М. Янборисов, С. В. Колесов, А. К. Фризен, "Кинетические параметры реакций при полимеризации метилметакрилата в присутствии азобисизобутиронитрила и ферроцена", *Вестник Башкирского университета*. Т. 21, **2**, 2016, 41–48.

Simulation of different modes of behavior monomer conversion in radical polymerization processes diene

© M. S. Yanbekov⁴, E. R. Gizzatova⁵, S. I. Spivak⁶

Abstract. In the article kinetic features of the polymerization process are described by the methods and means of mathematical modeling. Two approaches to modeling of polymerization processes, static and kinetic, are discussed. As a result of mathematical models' analysis it is possible to trace the course of the process qualitatively, to identify the sensitivity of the individual reagents to changing of process conditions. Functional relationships that characterize the number of parameters of the process are obtained, too. Mathematical model for the radical polymerization of dienes is presented in the form of a system of ordinary differential equations. Due to the termination rate constants' distribution in time, the system is stiff. So to solve it we use the approach allowing to obtain the intervals of solution stability, the conversion dependence at different moments and to determine the kinetics of diene's radical polymerization mechanism.

Key Words: radical polymerization, kinetics, monomer conversion, interpolation, inverse kinetic problem

⁴ Postgraduate student of Mathematical Modelling Department, Bashkir State University, Ufa; miratyanbekov@mail.ru

⁵ DSc, associate professor of Mathematical Modelling Department in Sterlitamak branch of Bashkir State University, Sterlitamak; makella@rambler.ru

⁶ DSc, professor, head of Mathematical Modelling Department, Bashkir State University, Ufa; semen.spivak@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ВЯЧЕСЛАВ ЗИГМУНДОВИЧ ГРИНЕС
(К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

13 декабря 2016 года исполняется семьдесят лет признанному специалисту в области теории динамических систем, профессору, доктору физико-математических наук Вячеславу Зигмундовичу Гринесу.

Детство Вячеслава Зигмундовича прошло в городе Муроме Владимирской области, где он окончил среднюю школу № 13. В 1964 году он поступил на радиофизический факультет Горьковского (сейчас Нижегородского) государственного университета (ННГУ) им. Н.И. Лобачевского. После первого курса В.З. Гринес перевелся на факультет вычислительной математики и кибернетики (ВМК), начал посещать семинары отдела дифференциальных уравнений НИИ ПМК, который возглавляла Е.А. Леонтович-Андропова. В 1969 году с отличием окончил университет (руководителем дипломной работы был Л.П. Шильников) и был приглашен на работу в этот отдел, состоявший в основном из недавно закончивших университет молодых математиков. Атмосферу сотрудничества и научного энтузиазма, царившую там в те годы, Вячеслав Зигмундович и по сей день воссоздает в процессе общения с коллегами и учениками. Его научным руководителем в отделе стал С.Х. Арансон, с которым они начали решать задачу классификации транзитивных потоков на замкнутых ориентируемых поверхностях отрицательной кривизны. За 70 лет до этого аналогичная задача была решена А. Пуанкаре для транзитивных потоков без состояний равновесия, заданных на двумерном торе – замкнутой ориентируемой поверхности нулевой кривизны. Проблема классификации транзитивных потоков на поверхностях отрицательной кривизны имеет принципиальную трудность, поскольку потоки на таких поверхностях всегда обладают состояниями равновесия.

В 1973 году С.Х. Арансон и В.З. Гринес опубликовали работу, в которой было получено необходимое и достаточное условие топологической эквивалентности транзитивных потоков на замкнутой ориентируемой гиперболической поверхности. Этот результат принес авторам известность и стал основой развития нового метода исследования потоков на поверхностях и, что более важно, диффеоморфизмов, слоений и ламинаций на поверхностях. Развитие полученных результатов и методов привело в дальнейшем к установлению (совместно с С.Х. Арансоном и Е.В. Жужомой) глубоких взаимосвязей между свойствами траекторий потоков на поверхностях и точками абсолюта плоскости Лобачевского. Это стало значительным вкладом в теорию Аносова-Вейля, посвященную исследованию взаимоотношений между асимптотическим поведением траекторий потоков (или слоев слоений) и асимптотическим поведением соответствующих геодезических. Использование плоскости Лобачевского в решении проблем топологической классификации было индуцировано Д.В. Аносовым, который в 1966 году обратил внимание на предположение А.



Вейля (1935 г.) о полезности изучения асимптотического поведения на универсальном накрытии прообразов полутраекторий потоков на поверхностях отрицательной кривизны. В дальнейшем Д.В. Аносов проявлял постоянное внимание к результатам, полученным В.З. Гринесом, его коллегами и учениками. Практически все эти результаты докладывались либо в математическом институте им. В.А. Стеклова, либо в МГУ им. М.В. Ломоносова на семинарах, руководимых Д.В. Аносовым.

В 70-е годы XX века в теории динамических систем полным ходом шел процесс, который позже получил название «гиперболической революции». В центре внимания были динамические системы с гиперболической структурой на неблуждающем множестве. Особый интерес вызывали «хаотические» системы с бесконечным множеством седловых периодических орбит. В.З. Гринес развил метод классификации транзитивных потоков и с его помощью решил задачу топологической классификации ориентируемых одномерных аттракторов диффеоморфизмов на замкнутых поверхностях, вернувшись к тематике, предложенной ему ранее Л.П. Шильниковым. Полученные результаты вместе с топологической классификацией транзитивных потоков составили содержание кандидатской диссертации В.З. Гринеса (руководитель С.Х. Арансон), защищенной в 1975 году. Далее его научные интересы были связаны с исследованием структурно устойчивых динамических систем с регулярной и хаотической динамикой.

В 1977 году В.З. Гринес начал работать на кафедре высшей математики и теоретической механики Горьковского сельскохозяйственного института (ГСХИ) (ныне Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия (НГСХА)), и с 1994 по 2013 был заведующим этой кафедрой. В 2013 – 2015 гг. он работал на кафедре численного и функционального анализа ННГУ в должности профессора, а с 2015 года по настоящее время является старшим научным сотрудником и профессором НИУ ВШЭ.

В восьмидесятые и девяностые годы прошлого века В.З. Гринесом при участии его учеников А.Н. Безденежных и Х.Х. Калай (в то время сотрудников кафедры высшей математики и теоретической механики ГСХИ) были получены условия топологической сопряженности градиентно-подобных и структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с нетривиальными нульмерными и одномерными предельными множествами без пар сопряженных точек, а также диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий. Эти результаты легли в основу его докторской диссертации «Топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов на поверхностях» (1977), из которой, в частности, с учетом результатов Р.В. Плыкина и А.Ю. Жирова, следует топологическая классификация произвольных одномерных аттракторов таких диффеоморфизмов, а также результаты, связывающие динамику диффеоморфизмов на аттракторах и теорию Нильсена-Терстона.

Характерной чертой, выделяющей работы В.З. Гринеса, является сочетание топологических методов и результатов с методами собственно теории динамических систем. Именно такой подход позволил ему (в сотрудничестве с коллегами и учениками) получить ряд фундаментальных результатов по теории динамических систем. В 2000 году в совместной работе В.З. Гринеса и Х. Бонатти был обнаружен новый топологический инвариант для структурно устойчивых диффеоморфизмов с регулярной динамикой (диффеоморфизмов Морса-Смейла) на замкнутых ориентируемых трехмерных многообразиях, описывающий вложение (вообще говоря, дикое) инвариантных многообразий седловых периодических точек в несущее многообразие. Развитие методов этой работы в серии дальнейших совместных публикаций с Х. Бонатти, В.С. Медведевым, Э. Пеку и О.В. Починкой привело к получению полной топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях. Этот результат составил основное содержание докторской диссертации О.В. Починки (2011 г.), научным консультантом которой был В.З. Гринес. Параллельно

в кандидатской диссертации Т.М. Митряковой, защищенной под руководством Вячеслава Зигмундовича, были получены результаты по топологической классификации негрубых систем на поверхностях с конечным гиперболическим неблуждающим множеством и с конечным числом модулей топологической сопряженности.

В 2007 – 2012 гг. В.З. Гринес, О.В. Починка и Ф. Лауденбах применили развитые топологические методы к решению проблемы существования энергетической функции Ляпунова (функции Морса-Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с множеством периодических точек данного каскада) для трехмерных каскадов Морса-Смейла. В это же время В.З. Гринес, О.В. Починка и Е.Я. Гуревич решили проблему Палиса об отыскании условий вложения каскада Морса-Смейла на 3-многообразии в топологический поток.

Начиная с 2004 года и по настоящее время В.З. Гринес уделяет большое внимание изучению диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности выше трех. В частности, в кандидатской диссертации Е.Я. Гуревич, защищенной под его руководством в 2009 году, получена топологическая классификация таких диффеоморфизмов при условии отсутствия гетероклинических пересечений на n -мерной сфере. В совместных работах с Е.Я. Гуревич, В.С. Жужомой и В.С. Медведевым изучена топология ориентируемых многообразий, допускающих диффеоморфизмы Морса-Смейла без гетероклинических пересечений.

С 2002 года по настоящее время В.З. Гринес продолжает заниматься исследованием структурно устойчивых диффеоморфизмов с хаотической динамикой на 3-многообразиях. Им совместно с Е.В. Жужомой, В.С. Медведевым, О.В. Починкой и Ю.А. Левченко получена топологическая классификация таких диффеоморфизмов в двух важных случаях: 1) в предположении, что неблуждающие множества диффеоморфизмов содержат двумерный растягивающийся аттрактор; 2) неблуждающие множества диффеоморфизмов целиком состоят из двумерных предельных множеств. В частности, было установлено, что в первом случае единственным замкнутым трехмерным многообразием, допускающим такой диффеоморфизм, является трехмерный тор, а во втором случае получена топологическая классификация всех многообразий, допускающих такие диффеоморфизмы.

Совсем недавно В.З. Гринесом совместно О.В. Починкой и С. ван Стрином найдена топологическая классификация омега-устойчивых систем на поверхностях с одномерными аттракторами и репеллерами и конечным числом модулей устойчивости.

Обнаруженные в работах В.З. Гринеса совместно с Е.Я. Гуревич, Е.В. Жужомой, О.В. Починкой, Х. Бонатти и Э. Пеку глубокие взаимосвязи между трёхмерными системами с регулярной динамикой и топологией несущего многообразия нашли применение в изучении топологии магнитных полей в короне Солнца и, в частности, для обнаружения так называемых сепараторов (2015).

В 2011 году была опубликована монография В.З. Гринеса и О.В. Починки «Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три», переработанный в соавторстве с Т.В. Медведевым вариант которой опубликован издательством «Шпрингер» в 2016 году.

В.З. Гринес — член редколлегии журналов «Журнал Средневолжского математического общества» и «Динамические системы». Он регулярно участвует (как исполнитель или руководитель) в исследованиях в рамках престижных грантов — таких, как грант Президента России ведущим научным школам, гранты РФФИ, РНФ, ИНТАС, Фонда Сороса, гранты CNRS (Франция), связанные с совместной научной деятельностью с университетами Дижона, Нанта, Рена. В настоящий момент он участник совместного гранта РФФИ и Королевского математического общества (Великобритания). В.З. Гринес — член диссертационных советов Нижегородского и Владимирского государственных университетов, член

экспертного совета РФФИ, он активный член Нижегородского математического общества со дня его основания. Вячеслав Зигмундович много времени и энергии посвящает подготовке научных кадров. В разные годы он читает лекции по курсам «Современные проблемы непрерывной математики», «История и методология математики», «Топологическая классификация структурно устойчивых систем в размерностях 2 и 3», «Математический анализ», ведет семинар «Введение в динамические системы», является одним из руководителей семинара по топологическим методам в динамике. Под его руководством защищены шесть кандидатских диссертаций, в том числе четыре из них — за последние годы (О.В. Починка, 2004; Е.Я. Гуревич, 2009; Т.М. Митрякова, 2011; Ю.А. Левченко, 2014).

Вячеслав Зигмундович на протяжении многих лет сотрудничает с математическими школами Национального исследовательского Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва, регулярно участвует в научных семинарах, руководит кандидатскими, магистерскими и дипломными работами. Он является активным участником научных конференций по дифференциальным уравнениям и школ-семинаров по математическому моделированию, регулярно проводимых Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва, Средне-Волжским математическим обществом и Институтом прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук.

Сложно переоценить творческую работу В.З. Гринеса в качестве члена редколлегии журнала «Журнал Средневолжского математического общества», издаваемого ФГБОУ ВО «МГУ им. Н.П. Огарёва» и Средне-Волжским математическим обществом.

Свой юбилей Вячеслав Зигмундович встречает в полном расцвете творческих сил. От всей души желаем ему крепкого здоровья, новых научных достижений, ярких учеников, а также здоровья, счастья и успехов его жене, детям и внукам!

Гонченко С. В., Жужсома Е. В., Гуревич Е. Я.,

Лерман Л. М., Полотовский Г. М., Починка О. В.,

Тишкин В. Ф., Чучаев И. И., Сухарев Л. А.,

Шаманаев П. А., Жалнин Р. В., Мамедова Т. Ф.

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Объем рукописи не должен превышать 12 страниц для научной статьи и 20 страниц для обзорной статьи.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX. Компиляцию статьи необходимо производить с помощью MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте — <http://www.miktex.org>.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы:

- коды УДК;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО, e-mail, должность и место работы (официальное название организации);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи;
- список литературы.

Если статья на русском языке, то название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова необходимо так же предоставить и на английском языке. Если статья написана на английском языке, то отдельно представляются коды УДК, название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова на русском языке.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

- не включать несущественные детали;

- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

На английском языке приводится авторское резюме (аннотация), которое является кратким резюме большей по объему работы, имеющей научный характер.

Объем аннотации должен быть в среднем от 100 до 250 слов.

Раздел Ключевые слова должен содержать от 5 до 15 слов и четко указывать на основное содержание статьи. Не следует приводить в качестве ключевых слов общие понятия, так как поиск по ключевому слову не приведет читателя к нахождению интересующей его информации. Однако данное слово может входить в значимое словосочетание.

Авторам необходимо придерживаться следующей структуры статей:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье.

- материалы и методы решения задачи и принятые допущения.

- результаты – основное содержание статьи.

- обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.

- заключение – выводы и рекомендации.

Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB (см. Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTeX). Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье. В оригинальных статьях допускается до 20, в обзорных – до 60 источников.

Подробные Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTeX содержатся на сайте журнала по адресу <http://journal.svmo.ru/page/rules>.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе $\TeX$ (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например, `\input{voskresensky.tex}`

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

`\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}`

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

`\headerEn{название статьи}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}`

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defn**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т. д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и

`\pctog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , $\mathcal{D}_i$ в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\mathcal{D}}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение **thebibliography**. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле `amsbib.pdf`. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл `svmbib.sty` (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\RBibitem{метка для ссылки на источник}`.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в преамбуле).

Внимание! Новые правила. Следом за списком цитируемой литературы в формате AMSBIB должен быть список литературы в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008. Данный ГОСТ можно найти на сайте журнала <http://www.journal.svmo.ru/files>. Эта часть статьи должна быть закомментирована. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

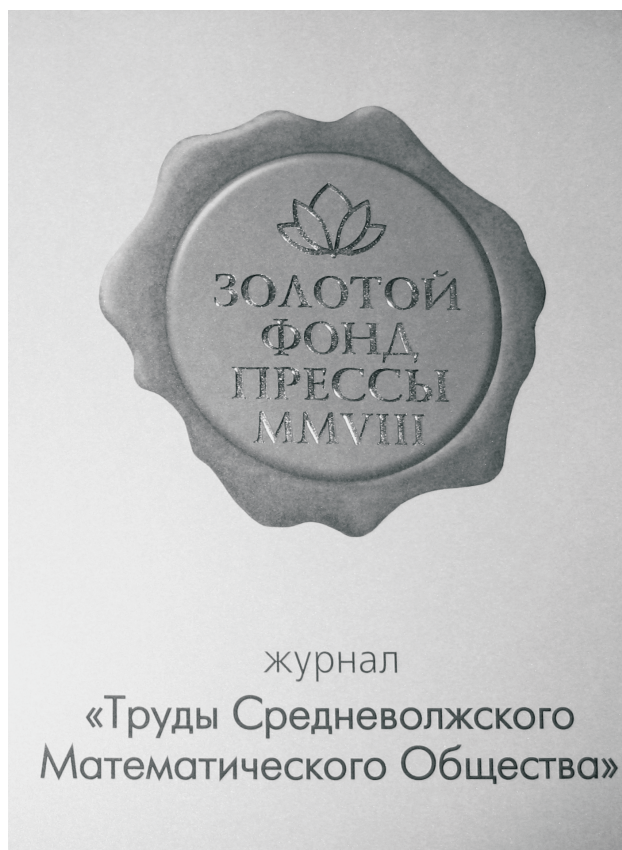
Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Андреев А. С.	8	Мамедова Т. Ф.	152
Васютин М. А.	134	Нагорных Е. В.	41
Вельмисов П. А.	89	Нагорных С. Н.	41
Гиззатова Э. Р.	159	Перегудова О. А.	46
Гладун А. В.	89	Радионова М. В.	52
Гонченко А. С.	17	Сафонов К. А.	34
Горбунов В. К.	107	Сахибгареева Г. И.	143
Гринес В. З.	168	Симонов П. М.	64
Губайдуллин И. М.	143, 152	Спивак С. И.	159
Гуревич Е. Я.	30	Сыромясов А. О.	98
Калинин А. В.	119	Тахтенкова Л. С.	8
Кириянова О. Ю.	143	Травкина О. С.	143
Козлов А. Д.	17	Тюхтина А. А.	119
Куватова Р. З.	143	Чистяков А. В.	64
Кузьмичев Н. Д.	134	Чичагов В. В.	52
Лапшина Е. А.	134	Шабадиков К. Х.	76
Львов А. Г.	107	Шилкин Д. А.	134
Макаров Д. С.	46	Шуршина А. С.	98
Малкин М. И.	34	Юлдашев Т. К.	76
Малышев Д. С.	30	Язовцева О. С.	152

Янбеков М. С. 159

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.

Для заметок

Для заметок

Для заметок