

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 18, № 3



2016

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н. П. ОГАРЁВА

Журнал Средневолжского математического общества

ТОМ 18, № 3

Издается с декабря 1998 года

Выходит четыре раза в год

Главный редактор

В. Ф. Тишкин

Институт прикладной математики

им. М. В. Келдыша РАН

Заместитель главного редактора

Н. Д. Кузьмичев

Национальный исследовательский

Мордовский государственный

университет им. Н. П. Огарёва

Ответственный секретарь

П. А. Шаманаев

Национальный исследовательский

Мордовский государственный

университет им. Н. П. Огарёва

Редакционная коллегия

А. С. Андреев

Ш. А. Алимов

А. М. Ахтямов

Ш. А. Аюпов

И. В. Бойков

П. А. Вельмисов

В. К. Горбунов

В. З. Гринес

Ю. Н. Дерюгин

А. П. Жабко

В. И. Жегалов

Т. Ш. Кальменов

А. М. Камачкин

Е. Б. Кузнецов

В. Н. Кризский

Б. В. Логинов

Anca Veronica Ion

С. И. Мартынов

П. П. Матус

О. В. Починка

В. П. Радченко

И. П. Рязанцева

М. С. Салахитдинов

С. И. Спивак

М. Т. Терехин

Редакционный совет

Н. Д. Морозкин

Башкирский государственный

университет

П. В. Сенин

Национальный исследовательский

Мордовский государственный

университет им. Н. П. Огарева

Л. А. Сухарев

Средне-Волжское

математическое общество

Н. Г. Ярушкина

Ульяновский государственный

технический университет

САРАНСК

2016

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва».

Издатель: Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Территория распространения: зарубежные страны, Российская Федерация.

Язык: русский.

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректурa: Язовцева О. С.

Перевод: Сыромясов А. О.

Адрес учредителя, издателя и редакции: 430005, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

Тел.: (8342) 27-02-56

E-mail для статей: journal@svmo.ru

Web: <http://journal.svmo.ru>

© Оформление. Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», 2016

Дата выхода в свет 29.12.2016. Цена свободная.

Подписано в печать 01.12.2016. Формат 70x108 1/16. Объем 10 усл. печ.л.

Тираж 100 экз. Заказ № 1680.

Типография Издательства Мордовского университета

430005, г. Саранск, ул. Советская, 24

Содержание

ОТ РЕДАКЦИИ	6
-------------------	---

МАТЕМАТИКА

А. С. Андреев, О. А. Перегудова, С. Ю. Раков

Уравнения Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора	8
1. Введение	8
2. Предельные свойства решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра	9
3. Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости	11
4. Решение задачи о стабилизации программного положения голономной механической системы при помощи ПИ-регулятора	13
5. Решение задачи о стабилизации программного положения двухзвенного манипулятора с тремя степенями свободы	15

Д. В. Грибанов, Д. С. Малышев

Сложность некоторых задач на графах с ограниченными минорами их матриц ограничений	19
1. Введение	19
2. Некоторые классические задачи на графах и их БЛП-постановки	21
3. Некоторые обозначения и определения	22
4. Задача о независимом множестве	23
4.1. Некоторое включение	23
4.2. Теорема Рида	24
4.3. Основной результат этого раздела	25
5. Задача о вершинном доминирующем множестве	26
5.1. Вспомогательные результаты	26
5.2. Основной результат этого раздела	28
6. Задача о реберном доминирующем множестве	29
6.1. Кликовая ширина графов и ее значение	29
6.2. Основной результат этого раздела	29
7. Благодарности	30

Н. В. Ковалев

Прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы	32
1. Прямое разложение и аналитичность неавтономных интегралов по малому параметру	32
2. Построение неавтономных интегралов в переменных действие-угол	34
3. Критерий существования замкнутых орбит	35
4. Некоторый класс уравнения Льенара	36

В. Е. Круглов, О. В. Починка

Графовый критерий топологической эквивалентности Ω -устойчивых потоков на поверхностях	41
1. Введение	41
2. Ориентированный граф Ω -устойчивого потока	42
3. Оснащение ориентированного графа	43
4. Формулировка результатов	46

А. Ю. Майоров

О дестабилизации положения равновесия, вызванной линейными и квадратичными силами вязкого трения	49
1. Введение	49
2. Постановка задачи	49
3. Исследование системы с одной степенью свободы	51
4. Нормализация уравнений движения	52
5. Исследование усредненной системы в специальном случае функции Рэлея	55
6. Выводы	58

П. А. Шаманаев, Б. В. Логинов

О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущением в виде малого линейного слагаемого с запаздывающим аргументом	61
1. Постановка задачи	61
2. Разрешающая система Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве	62
3. Решения разрешающей системы и ветвление периодических решений	67

Т. К. Юлдашев, А. В. Багрова

Нелокальная задача для смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка в трехмерной области	70
1. Постановка задачи	70
2. Поиск частных решений	71
3. Определение коэффициентов Фурье (2.9)	72
4. Существование решения	75

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

А. В. Анкилов, П. А. Вельмисов

Исследование устойчивости вязкоупругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании	80
1. Введение	80
2. Математическая модель	81
3. Исследование устойчивости	82
4. Заключение	89

М. С. Дерябина, С. И. Мартынов

Построение периодического решения уравнений движения вязкой жидкости с заданным градиентом давления 91

1. Введение 91
2. Постановка задачи 91
3. Общее решение задачи для произвольной ячейки 93
4. Результаты 96

Р. В. Жалнин, Е. Е. Пескова, О. А. Стадниченко, В. Ф. Тишкин

Математическое моделирование динамики многокомпонентного газа с использованием WENO схем на примере пиролиза этана . . 98

1. Введение 98
2. Математическая модель и алгоритм дискретизации 99
3. Модель химической реакции пиролиза этана 101
4. Параллельный вычислительный алгоритм 101
5. Вычислительный эксперимент 102
6. Заключение 105

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

А. С. Андреев, Е. А. Кудашова

Моделирование управляемых механических систем с цифровым управлением 107

1. Введение 107
2. Постановка задачи о стабилизации программного движения 108
3. Решение задачи о стабилизации с непрерывным законом управления 109
4. Решение задачи о стабилизации с дискретным законом управления 110

Л. Ф. Ахмадуллина, Л. В. Еникеева, А. В. Новичкова, И. М. Губайдуллин, П. В. Снытников, Д. И. Потемкин

Математическое моделирование процесса низкотемпературной паровой конверсии пропана в присутствии метана на никелевом катализаторе 117

1. Введение 117
2. Математическая модель реакции 119
3. Результаты и обсуждение 122
4. Заключение 125

А. В. Багаев, Е. Н. Пелиновский

Конфигурация канала переменного сечения, допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане 127

1. Введение 127
2. Трансформация волнового уравнения к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами 128
3. Ограниченные решения уравнения (2.8) 129
- 3.1. Общий вид решения уравнения (2.8) 129

3.2. Исследование решений уравнения (2.8) на ограниченность	130
---	-----

С. Н. Коледин, К. Ф. Коледина

Оптимальное управление и чувствительность оптимума в задачах химической кинетики	137
1. Введение	137
2. Задача оптимального управления в химической кинетике	137
3. Чувствительность оптимального решения в задачах химической кинетики	142

А. А. Мазитов, А. Г. Осипова, И. В. Ахметов, И. М. Губайдуллин

Решение обратной задачи химической кинетики на примере реакции синтеза бензилиденбензиламина	145
1. Введение	145
2. Математическая модель процесса реакции синтеза бензилиденбензиламина	146
3. Численные методы решения прямой и обратной задач химической кинетики для процесса синтеза бензилиденбензиламина	147
3.1. Решение прямой задачи методом Розенброка	147
3.2. Решение обратной задачи методом покоординатного спуска	149
4. Структура и задачи ИВАС	149
5. Заключение	151

С. И. Спивак, О. Г. Кантор, Д. С. Юнусова

Идентификация и информативность моделей количественного анализа многокомпонентных смесей	153
1. Введение	153
2. Постановка задачи	154
3. Описание концептуального подхода	155
4. Модель определения погрешности экспериментальных данных	156
5. Модель определения концентраций компонент смеси и анализ ее информативности	157
6. Апробация подхода	159
7. Заключение	161

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

Владимир Фёдорович Тишкин – поздравление с избранием членом-корреспондентом РАН	164
---	-----

Иван Иванович Чучаев (к семидесятилетию со дня рождения)	165
--	-----

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»	167
Правила верстки рукописей в системе LaTeX	169
Алфавитный указатель	171

ОТ РЕДАКЦИИ

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Рубрики журнала:

- математика;
- прикладная математика и механика;
- математическое моделирование и информатика.

Журнал «Журнал Средневолжского математического общества» входит в международную реферативную базу данных Zentralblatt MATH (zbMATH), а статьи опубликованные в нем приравниваются к публикациям в изданиях, входящих в Перечень ВАК (заключение президиума ВАК от 29 мая 2015 г. № 15/348).

Журнал включен в библиографическую базу данных научных публикаций российских учёных - РИНЦ. Адрес доступа на информационной платформе eLIBRARY.RU: http://elibrary.ru/title_about.asp?id=32209.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

МАТЕМАТИКА

УДК 62.51

Уравнения Вольтерра в моделировании нелинейного интегрального регулятора

© А. С. Андреев¹, О. А. Перегудова², С. Ю. Раков³

Аннотация. В статье исследуется проблема построения нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных регуляторов для управляемых голономных механических систем. Предложен подход, основанный на анализе свойств асимптотической устойчивости и неустойчивости решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. Определены предельные свойства решений таких уравнений. Доказана теорема, являющаяся развитием принципа инвариантности на нелинейные интегро-дифференциальные уравнения типа Вольтерра. С использованием метода функционалов Ляпунова доказаны теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости решений таких уравнений. Отличие полученных теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости от классических состоит в применении функционалов Ляпунова со знакопостоянной производной. При этом для установления свойства притяжения к нулю анализируется положительное предельное множество решений интегро-дифференциальных уравнений. Дано решение задачи о построении нелинейного интегрального регулятора для голономной механической системы с n степенями свободы, обеспечивающего стабилизацию заданного программного положения. В качестве приложения решена задача о стабилизации программного положения пространственного двухзвенного манипулятора путем построения нелинейного интегрального регулятора. Представлены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Вольтерра, положительное предельное множество, голономная механическая система, стабилизация, нелинейный интегральный регулятор, функционал Ляпунова.

1. Введение

Большинство известных стратегий управления механическими системами получено в предположении, что доступными для измерения являются как координаты, так и скорости управляемого объекта. При этом на практике установка тахометров часто бывает неоправдана из-за дороговизны, а также в связи с тем, что сигналы, получаемые с этих устройств, являются зашумленными. Поэтому проблема построения регуляторов для механических систем без измерения скоростей является актуальной. Один из подходов к решению этой проблемы состоит в использовании динамических компенсаторов (см. напр. [1]–[3]). Отметим, что результаты, полученные в работах [1]–[3], применимы лишь для ограниченного класса механических систем и основаны на использовании принципа инвариантности Ла-Салля и теоремы Барбашина-Красовского об асимптотической устойчивости автономной системы с построением знакопостоянной функции Ляпунова.

¹ Декан факультета математики, информационных и авиационных технологий, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; andreevas@sv.ulsu.ru

² Профессор кафедры информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; peregudovaoa@gmail.com

³ М.н.с. Управления научных исследований, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; rakov.stanislav@gmail.com

Применение динамических компенсаторов по сути является включением в регулятор интегральных слагаемых. Используя представление интегральных членов в структуре управляющих сигналов как регуляторов с неограниченным последствием [4]–[6], движение механических систем с такими типами регуляторов можно моделировать интегро-дифференциальными уравнениями типа Вольтерра.

В работе [7] дано развитие метода функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости неавтономных функционально-дифференциальных уравнений типа Вольтерра. На этой основе разработаны методики построения ПИ- и ПИД-регуляторов в задачах управления механическими системами.

В работе [8] предложен закон управления, осуществляющий стабилизацию заданного программного движения двухзвенного манипулятора в виде пропорционально-интегральной зависимости для случая, когда основание манипулятора совершает заданное нестационарное движение. При этом задача стабилизации программного движения решена для линеаризованной модели манипулятора.

В работе [9] решена задача о стабилизации программного движения двухзвенного манипулятора без измерения скоростей. Представлена методика синтеза кусочно-непрерывного нелинейного управления на основе построения наблюдателя и применения метода вектор-функций Ляпунова.

Целью настоящей работы является разработка нелинейных законов управления для широкого класса голономных механических систем без измерения скоростей на основе нелинейных интегральных регуляторов.

Результаты настоящей статьи делятся на две части. Первая часть состоит в установлении предельных свойств решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений вида Вольтерра с получением новых теорем об асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе применения функционала Ляпунова со знакопостоянной производной. Во вторую часть вошли результаты по стабилизации программных положений голономных механических систем путем построения интегральных регуляторов с неограниченным последствием на основе обратной связи с непрерывным измерением координат объекта. Структура регулятора включает две составляющие: первая имеет форму потенциальных сил, компенсирующих действие внешних потенциальных сил в выбранном положении, другая – форму интегрального регулятора с неограниченным последствием, действие которого обеспечивает диссипацию. На примере двухзвенного манипулятора с тремя степенями свободы проведено численное моделирование, подтверждающее полученные теоретические результаты.

2. Предельные свойства решений нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Вольтерра

Рассмотрим нелинейное интегро-дифференциальное уравнение типа Вольтерра

$$\dot{x} = f(x(t)) + \int_0^t g(s-t, x(t), x(s)) ds, \quad (2.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n$ — n -мерное линейное действительное пространство с нормой $\|x\|$; f, g — функции, определенные и непрерывные соответственно в областях $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^- \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$, $\mathbb{R}^- = (-\infty, 0]$, при этом функция f удовлетворяет условию Липшица

$$\|f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})\| \leq L_1 \|x^{(2)} - x^{(1)}\|, \quad L_1 = L_1(K_1) \quad (2.2)$$

для каждого компактного множества $K_1 \subset \mathcal{D}$, а функция g — следующим условиям: для каждого компактного множества $K_2 \subset \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ выполняются неравенства

$$\|g(t, x, y)\| \leq g_1(\tau, K_2) \quad \forall (t, x, y) \in \mathbb{R}^- \times K_2, \quad \int_{-\infty}^0 g_1(\tau, K_2) d\tau < +\infty, \quad (2.3)$$

$$\|g(\tau, x^{(2)}, y^{(2)}) - g(\tau, x^{(1)}, y^{(1)})\| \leq L_{21}\|x^{(2)} - x^{(1)}\| + L_{22}\|y^{(2)} - y^{(1)}\|, \quad L_{2j} = L_{2j}(K_2). \quad (2.4)$$

При условиях (2.2)–(2.4) для каждой начальной точки $x_0 \in \mathcal{D}$ существует единственное решение $x = x(t, x_0)$ ($x(0, x_0) = x_0$) уравнения (2.1), определенное на интервале $[0, \alpha)$, при этом $x(t, x_0) \rightarrow \partial\mathcal{D}$ при $t \rightarrow \alpha - 0$.

Пусть $x = x(t, x_0)$ есть некоторое решение (2.1), определенное и ограниченное некоторым компактом $K \subset \mathcal{D}$ при $t \geq 0$. Определим классическим образом положительную предельную точку $p \in \mathcal{D}$ и соответствующее положительное предельное множество $\omega^+(x_0)$

$$p = \lim_{t_k \rightarrow +\infty} x(t_k, x_0), \quad \omega(x_0) = \{p \in \mathcal{D} : x(t_k, x_0) \rightarrow p, t_k \rightarrow +\infty\}.$$

В дополнение к (2.1) можно ввести уравнение Вольтерра с бесконечным запаздыванием

$$\dot{x} = f(x(t)) + \int_{-\infty}^t g(s - t, x(t), x(s)) ds, \quad (2.5)$$

существование которого следует из условия (2.3).

Т е о р е м а 2.1. Пусть $x = x(t, x_0)$ есть некоторое решение (2.1), определенное компактом $K \subset \mathcal{D}$ при всех $t \geq 0$. Тогда для каждой предельной точки $p \in \omega^+(x_0)$ существует решение $x = x(t)$, $t \in \mathbb{R}$, уравнения (2.5), такое что $x(0) = p$, $\{x(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \omega^+(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $p \in \omega^+(x_0)$ есть некоторая точка, определяемая последовательностью $t_k \rightarrow +\infty$

$$\lim_{t_k \rightarrow +\infty} x(t_k, x_0) = p.$$

Несложно найти, что для фиксированного $T_1 = t_1/2$ последовательность функций $x_k(t) = x(t_k + t, x_0)$, $t \in [-T_1, T_1]$, равномерно ограничена, равностепенно непрерывна. Отсюда найдется последовательность $x_{k_l}(t)$ и функция $x = x^*(t)$, такие что $x_{k_l}(t) \rightarrow x^*(t)$ при $t \in [-T_1, T_1]$. Выбирая из $\{x_{k_l}(t)\}$ подпоследовательность $\{x_{k_{lm}}(t)\}$, сходящуюся равномерно при $t \in [-T_2, T_1]$, $T_2 = t_{k_l}/2$, к $x^{**}(t)$ и продолжая этот процесс далее, найдем подпоследовательности $t_m^* \rightarrow +\infty$ и $T_m^* \rightarrow +\infty$ и функцию $x = \phi(t)$, такие что подпоследовательность $\{x^{(m)}(t) = x(t_m^* + t, x_0)\}$ сходится к $x = \phi(t)$ равномерно по $t \in [-T_m^*, T_m^*]$ при фиксированном T_m^* . В силу того, что $x(t, x_0)$ есть решение (2.1) последовательно имеем

$$x(t, x_0) = x_0 + \int_0^t f(x(\tau, x_0)) d\tau + \int_0^t \left(\int_0^\tau g(s - \tau, x(\tau, x_0), x(s, x_0)) ds \right) d\tau,$$

$$x^{(m)}(t) = x(t_m) + \int_{t_m^*}^{t_m^*+t} f(x(\tau, x_0)) d\tau + \int_{t_m^*}^{t_m^*+t} \left(\int_0^\tau g(s-\tau, x(\tau, x_0), x(s, x_0)) ds \right) d\tau,$$

$$x^{(m)}(t) = x(t_m^*) + \int_0^t f(x_m(\tau)) d\tau + \int_0^t \left(\int_{-t_m}^\tau g(s-\tau, x_m(t), x_m(s)) ds \right) d\tau.$$

Отсюда, учитывая условия (2.2), в пределе при $m \rightarrow +\infty$ получим

$$\phi(t) = p + \int_0^t f(\phi(\tau)) d\tau + \int_0^t \left(\int_{-\infty}^\tau g(s-\tau, \phi(\tau), \phi(s)) ds \right) d\tau.$$

Таким образом, функция $x = \phi(t)$ является решением (2.5), при этом по построению $\phi(0) = p, \{\phi(t), t \in \mathbb{R}\} \subset \omega^+(x_0)$.

Доказательство закончено.

3. Теоремы об асимптотической устойчивости и неустойчивости

Пусть для уравнения (2.1) можно найти функционал Ляпунова вида

$$V(x_t) = V_1(x(t)) + \int_0^t V_2(s-t, x(t), x(s)) ds, \quad (x_t = x(s), 0 \leq s \leq t), \quad (3.1)$$

где V_1 и V_2 есть некоторые неотрицательные скалярные функции, определенные и непрерывные в областях $\mathcal{D}$ и $\mathbb{R}^- \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Предположим существование верхней правосторонней производной функционала (3.1) в силу (2.1)

$$\dot{V}^+(x_t) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{V(x_{t+h}) - V(x_t)}{h},$$

имеющей следующую оценку

$$\dot{V}^+(x_t) \leq -W(x_t), \quad W(x_t) = W_1(x(t)) + \int_0^t W_2(s-t, x(t), x(s)) ds, \quad (3.2)$$

где $W_1(x)$ и $W_2(\tau, x, y)$ есть некоторые неотрицательные функции, определенные и непрерывные в областях $\mathcal{D}$ и $\mathbb{R}^- \times \mathcal{D} \times \mathcal{D}$ и удовлетворяющие в этих областях условиям вида (2.2), (2.3) и (2.4).

Отсюда, в частности, для непрерывной функции $x: \mathbb{R} \rightarrow K, K \subset \mathcal{D}$ – компакт, следует существование

$$\int_{-\infty}^t W_2(s-t, x(t), x(s)) ds.$$

Т е о р е м а 3.1. *Предположим, что для уравнения (2.1) можно найти функционал $V = V(x_t)$, верхняя правосторонняя производная которого удовлетворяет неравенству (3.2). Тогда для каждого ограниченного компактом $K \subset \mathcal{D}$ решения $x = x(t, x_0)$ уравнения (2.1) множество $\omega^+(x_0)$ состоит из решений уравнения (2.1), удовлетворяющих равенствам*

$$W_1(x(t)) = 0, \quad W_2(s - t, x(t), x(s)) = 0, \quad t \geq s.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для решения $x = x(t, x_0)$ в силу условия (3.2) функция $V(x_t(x_0))$ ($x_t(x_0) = x(s, x_0)_t$, $0 \leq s \leq t$) является монотонно убывающей, и значит существует

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x_t) = V^* \geq 0. \quad (3.3)$$

Из неравенства (3.1) также для каждого $T > 0$ находим

$$V(x_{t+T}) - V(x_{t-T}) \leq - \int_{t-T}^{t+T} W_1(x(\tau)) d\tau - \int_{t-T}^{t+T} \left(\int_0^\tau W_2(s - \tau, x(\tau), x(s)) ds \right) d\tau.$$

Пусть $\omega^+(x_0)$ есть положительное предельное множество, а $p \in \omega^+(x_0)$ есть положительная предельная точка, определяемая последовательностью $t_k \rightarrow +\infty, x(t_k, x_0) \rightarrow p$. Как и в теореме 2.1., найдем решение $x = \phi(t)$ уравнения (2.5), проходящее через точку p , $\phi(0) = p$. Соответственно для построенных в теореме 2.1. последовательностей $t_m^* \rightarrow +\infty$ и $T_m^* \rightarrow +\infty$ имеем

$$\begin{aligned} & V(x_t^{(m)}) \Big|_{t=t_m^*+T_m^*} - V(x_t^{(m)}) \Big|_{t=t_m^*-T_m^*} \leq \\ & \leq - \int_{-T_m^*}^{T_m^*} W_1(x^{(m)}(\tau)) d\tau - \int_{-T_m^*}^{T_m^*} \left(\int_{-t_m^*}^\tau W_2(s - \tau, x^{(m)}(\tau), x^{(m)}(s)) ds \right) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, переходя к пределу при $m \rightarrow +\infty$ и учитывая (3.3), для всех $t \in \mathbb{R}$ получим

$$W_1(\phi(\tau)) = 0, \quad \int_{-\infty}^\tau W_2(s - \tau, \phi(\tau), \phi(s)) ds = 0,$$

и соответственно $W_2(s - \tau, \phi(\tau), \phi(s)) = 0, \tau \geq 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Теорема 3.1. представляет собой теорему принципа инвариантности для уравнения (2.1).

Положим, что в уравнении (2.1) $f(0) = 0, g(\tau, 0, 0) = 0$, и значит, уравнение (2.1) имеет нулевое решение $x(t, 0) = 0$.

Из теоремы 3.1. несложно вывести следующие достаточные условия асимптотической устойчивости и неустойчивости решения, в которых через $a: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ обозначена функция типа Хана.

Т е о р е м а 3.2. *Предположим, что для уравнения (2.1) можно найти функционал вида (3.1) с функцией $V_1(x) \geq a(\|x\|)$, верхняя правосторонняя производная которого удовлетворяет неравенству (3.2). При этом отсутствуют решения $x = \phi(t)$ уравнения (2.5), удовлетворяющие при всех $t \in \mathbb{R}$ равенствам*

$$W_1(t, \phi(t)) = 0; \quad W_2(s - t, \phi(t), \phi(s)) = 0, \quad s \leq t,$$

кроме нулевого $\phi(t) = 0$. Тогда решение $x=0$ уравнения (2.1) асимптотически устойчиво.

Т е о р е м а 3.3. *Предположим, что для уравнения (2.1) можно найти функционал вида (3.1) с функцией $V_1(x)$, принимающей в любой достаточно малой окрестности $x = 0$ отрицательные значения, и верхней правосторонней производной, удовлетворяющей неравенству (3.2). При этом отсутствуют решения $x = \phi(t)$ уравнения, удовлетворяющие соотношениям*

$$V_1(\phi(t)) < 0, \quad W_1(\phi(t)) = 0, \quad W_2(s-t, \phi(t), \phi(s)).$$

Тогда решение $x = 0$ уравнения (2.1) неустойчиво.

Доказательства теорем 3.2. и 3.3. выводятся непосредственно из теоремы 3.1.

4. Решение задачи о стабилизации программного положения голономной механической системы при помощи ПИ-регулятора

Рассмотрим управляемую механическую систему с n степенями свободы и соответственно обобщенными координатами, описываемыми уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = - \frac{d\Pi}{dq} + Q(q, \dot{q}) + U, \quad (4.1)$$

где $T = \dot{q}' A(q) \dot{q} / 2$ – кинетическая энергия системы с инерционной матрицей $A(q)$, $\dot{q} = dq/dt$, $Q(q, \dot{q})$ – вектор обобщенных диссипативных и гироскопических сил, $Q(q_i, 0) = 0$, $Q' \dot{q} \leq 0$, $\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энергия, U – обобщенная управляющая сила, $()'$ – операция транспонирования. Полагаем, что функции, входящие в (4.1), определены и непрерывны при всех $q \in \mathbb{R}^n$, ограничения на управление U не накладываются.

Уравнения (4.1), разрешенные относительно $\ddot{q}$, представим в виде:

$$\frac{dq}{dt} = \dot{q}, \quad \frac{d\dot{q}}{dt} = A^{-1}(q) \left(C(q, \dot{q}) \dot{q} + Q(q, \dot{q}) - \frac{d\Pi}{dq} + U \right).$$

При этом коэффициенты матрицы $C = (c_{jk})$ инерционных сил определяются равенством

$$c_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} \right) \dot{q}_i; \quad j, k = 1, \dots, n.$$

Рассмотрим задачу о стабилизации программного положения равновесия

$$\dot{q} = 0, \quad q = q_0 = \text{const}. \quad (4.2)$$

Покажем, что эта задача решается посредством интегрального регулятора вида

$$U = - \frac{d\Pi_u(q)}{dq} - \left(\frac{df}{dq} \right)' \int_0^t P(\nu - t) (f(q(t)) - f(q(\nu))) d\nu, \quad (4.3)$$

где $\Pi_u \in \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ есть некоторая непрерывно дифференцируемая функция, $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ есть некоторая неотрицательная матричная функция с производной $\frac{dP(s)}{ds} \geq 0$, $x' \frac{dP(s)}{ds} x \geq \alpha(s) \|x\|^2$, $\alpha(s) > 0$, $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ есть некоторая дифференцируемая функция, имеющая

в любой ограниченной области $\{q \in \mathbb{R}^m : \|q\| \leq \mu = \text{const}\}$ конечное число прообразов $f(c)$, или, иначе, конечное число решений уравнения $f(q) = c$.

Сделаем замену $x = q - q^0$, $y = q'$. Тогда уравнения движения (4.1) с управлением (4.3) примут следующий вид (2.1)

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t),$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = A_1^{-1}(x(t)) (C_1(x(t), y(t)) y(t) + Q_1(x(t), y(t)) - \quad (4.4)$$

$$-\frac{d\Pi_1(x(t))}{dt} \left(\frac{df_1(x(t))}{dx} \right)' \int_0^t P(\nu - t) (f(x(t)) - f(x(\nu))) d\nu \Bigg), \quad (4.5)$$

где индексом "1" обозначены функции, полученные из соответствующих функций, входящих в (4.2) и (4.3), в результате указанной замены переменных.

Введем функционал

$$V = \frac{1}{2} y'(t) A_1(x(t)) y(t) + \Pi_1(x(t)) + \\ + \frac{1}{2} \int_0^t (f(x(t)) - f(x(\nu)))' P(\nu - t) (f(x(t)) - f(x(\nu))) d\nu.$$

Для производной этого функционала в силу уравнений (4.5)

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \int_0^t (f_1(x(t)) - f_1(x(\nu)))' \frac{dP(\nu - t)}{ds} (f_1(x(t)) - f_1(x(\nu))) d\nu \leq 0.$$

Таким образом, производная удовлетворяет равенству вида. Соответственно теоремам 3.1.-3.3. несложно вывести следующие результаты.

Т е о р е м а 4.1. *Предположим, что управление (4.3) таково, что функция $\Pi_1(x)$ является определенно-положительной, при этом в некоторой области $\{0 < \|x\| < \Delta\}$ выполнено неравенство $\frac{d\Pi_1}{dx} > 0$. Тогда это управление обеспечивает стабилизацию программного положения (4.2). При этом, каждое $S S$ движение системы неограниченно приближается при $t \rightarrow +\infty$ к множеству движений $\{\dot{x}(t) = 0, \frac{d\Pi_1(x(t))}{dx} = 0\}$.*

Т е о р е м а 4.2. *Предположим, что управление (4.3) таково, что функция $\Pi_1(x)$ принимает в любой достаточно малой окрестности $x = 0$ отрицательные значения, при этом $\|\frac{d\Pi_1}{dx}\| > 0$ в области $\{0 < \|x\| < \Delta, \Pi_1(x) < 0\}$. Тогда управление (4.3) является дестабилизирующим.*

Теоремы 4.1. и 4.2. представляют собой основу для построения как линейных интегральных регуляторов (пропорционально-интегральных), так и нелинейных, в решении задач о стабилизации программных положений равновесия голономных механических систем в нелинейной постановке.

5. Решение задачи о стабилизации программного положения двухзвенного манипулятора с тремя степенями свободы

Рассмотрим задачу о стабилизации программного положения двухзвенного манипулятора с тремя степенями свободы [10]. Выберем в качестве обобщенных координат q_1 , q_2 и q_3 углы поворота в трех цилиндрических шарнирах манипулятора: угол поворота q_1 колонки вокруг вертикальной оси, угол q_2 поворота первого звена длиной l_2 и массой m_2 и угол q_3 поворота второго звена длиной l_3 и массой m_3 [10]. Полагаем, что на систему действуют только силы тяжести, выражаемые потенциальной энергией

$$\Pi(q_2, q_3) = \mu_2 \sin q_2 + \mu_3 \sin(q_2 + q_3),$$

где $\mu_2 = gl_2(m_3 + 0.5m_2)$, $\mu_3 = 0.5gl_3m_3$.

Для задачи стабилизации программного положения $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_{20}$, $q_3 = q_{30}$ манипулятора найден нелинейный интегральный регулятор вида

$$\begin{aligned} Q_1 &= -\lambda_1 \sin(q_1(t) - q_1^0) - \cos q_1(t) \int_{t-h(t)}^t p_1(\nu - t)(\sin q_1(t) - \sin q_1(\nu))d\nu, \\ Q_2 &= \mu_2 \cos q_2^0 \cos(q_2(t) - q_2^0) + \mu_3 \cos(q_2^0 + q_3^0) \cos(q_2(t) + q_3(t) - q_2^0 - q_3^0) - \\ &\quad - \lambda_2 \sin(q_2(t) - q_2^0) - \cos q_2(t) \int_{t-h(t)}^t p_2(\nu - t)(\sin q_2(t) - \sin q_2(\nu))d\nu, \\ Q_3 &= \mu_3 \cos(q_2^0 + q_3^0) \cos(q_2(t) + q_3(t) - q_2^0 - q_3^0) - \lambda_3 \sin(q_3(t) - q_3^0) - \\ &\quad - \cos q_3(t) \int_{t-h(t)}^t p_3(\nu - t)(\sin q_3(t) - \sin q_3(\nu))d\nu, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 - \mu_2 - \mu_3 \geq \rho_1 > 0$, $\lambda_3 - \mu_3 \geq \rho_2 > 0$, $\rho_1 \rho_2 > \mu_3^2$.

Численное моделирование проводилось в системе MathCad при следующих значениях параметров манипулятора

$$m_2 = m_3 = 20 \text{ кг}, l_2 = l_3 = 1 \text{ м}.$$

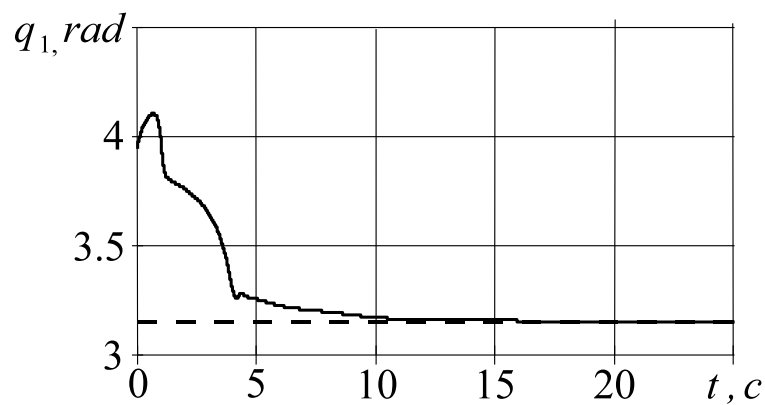
Были выбраны следующие значения программной позиции

$$q_1^0 = \pi \text{ рад}, q_2^0 = \frac{\pi}{3} \text{ рад}, q_3^0 = \frac{\pi}{4} \text{ рад}.$$

Найдены следующие значения параметров управления (5.1)

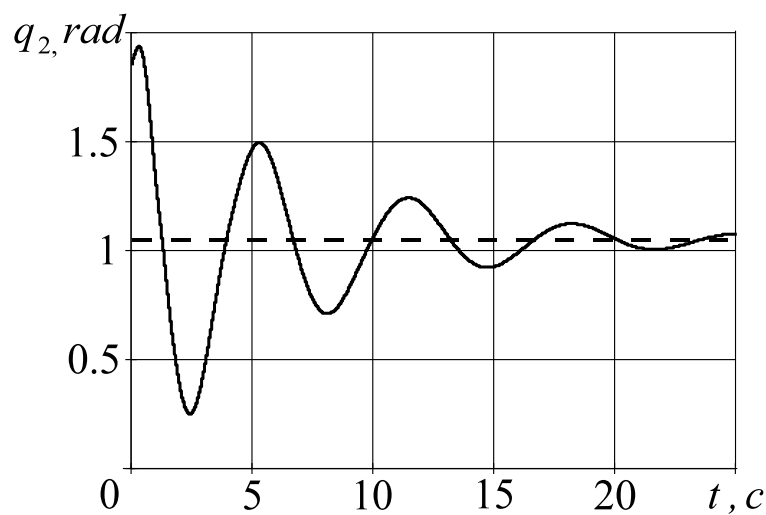
$$\lambda_1 = 10, \lambda_2 = 500, \lambda_3 = 200, p_i(\nu - t) = e^{k(\nu - t) + 8} \quad (i = 1, 2, 3), \quad k = 10.$$

На рисунках 5.1 – 5.3 показаны результаты моделирования на временном интервале $0 \leq t \leq 25$ с. Сплошной линией показаны графики действительного движения, а штриховой – значения соответствующей программной позиции. Видно, что при начальных отклонениях от программной позиции, равных 0,8 рад, происходит стабилизация данного положения.



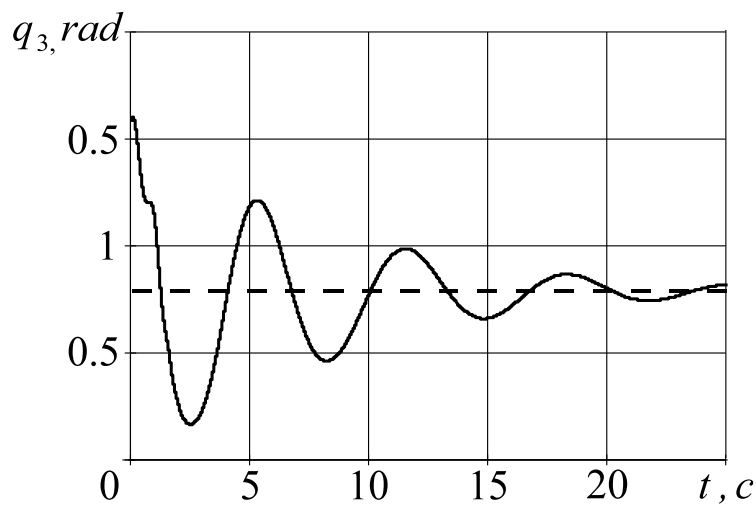
Р и с у н о к 5.1

График зависимости угловой координаты колонки от времени.



Р и с у н о к 5.2

График зависимости угловой координаты первого звена манипулятора от времени.



Р и с у н о к 5.3

График зависимости угловой координаты второго звена манипулятора от времени.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-08482, № 15-01-08599).

Дата поступления 01.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. H. Berghuis, H. Nijmeijer, "Global regulation of robots using only position measurements", *Systems and Contr. Letters*, **21** (1993), 289-293.
2. Бурков И.В., "Стабилизация натуральной механической системы без измерения её скоростей с приложением к управлению твёрдым телом", *Прикладная математика и механика*, **62**:6 (1998), 923-933.
3. Burkov I.V., "Stabilization of position of uniform motion of mechanical systems via bounded control and without velocity measurements", 3-rd IEEE Multi-conference on Systems and Control. (St. Petersburg), 2009, 400-405.
4. И. М. Ананьевский, В. Б. Колмановский, "О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием", *Автоматика и телемеханика*, 1989, № 9, 34-42.
5. А. С. Андреев, *Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений: монография*, Изд-во Ул-ГУ, Ульяновск, 2005, 328 с.
6. А. С. Андреев, "Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений", *Автоматика и телемеханика*, 2009, № 9, 4-55.
7. А. С. Андреев, В. В. Благодатнов, А. Р. Кильметова, "Уравнения Вольтерра в моделировании ПИ- и ПИД-регуляторов", *Научно-технический вестник Поволжья*, 2013, № 1, 84-90.
8. А. С. Андреев, С. Ю. Раков, "Об управлении двухзвенным роботом-манипулятором на основе ПИ-регулятора", *Автоматизация процессов управления*, 2015, № 3(41), 69-72.
9. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, "Синтез управления двухзвенным манипулятором без измерения скоростей", *Автоматизация процессов управления*, 2015, № 4(42), 81-89.
10. Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин, *Методы управления нелинейными механическими системами*, Физматлит, М., 2006, 326 с.

On Modeling a nonlinear integral regulator on the base of the Volterra equations

© A. S. Andreev⁴, O. A. Peregodova⁵, S. Yu. Rakov⁶

Abstract. Synthesis of discrete-time control which solves the problem of stabilization of holonomic mechanical systems' program motion is considered. Such systems are described by Lagrange equations of the second kind. Digital control signals are used in computer-containing control systems for continuous processes. Development of models for such controlled processes leads to investigation of continuous-discrete systems with state described by a continuous function and discrete control functions. This paper proposes an approach for constructing of controller taking into account non-linearity of the system and non-stationarity of program motion. By means of Lyapunov vector function and the comparison system sufficient conditions of given program motion's stabilization are obtained. A feature of the article is in solving of the problem by use of Lyapunov vector function with components that explicitly depend on time, and are nonlinear with respect to the generalized coordinates. It allows to solve the stabilization problem in general having the possibility to select the most suitable control parameters for each particular system.

Key Words: stabilization, control, discrete-time control, synthesis of control for mechanical systems, Lyapunov vector-function, comparison systems, nonstationary nonlinear dynamical systems

⁴ Dean of Faculty of Mathematics and Information and Aviation Technology, Prof., D.Sc., Head of Information Security and Control Theory Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; andreevas@sv.ulsu.ru

⁵ Professor of Information Security and Control Theory Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; peregodovaoa@gmail.com

⁶ Junior Researcher of Scientific Research Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; rakov.stanislav@gmail.com

УДК 519.17

Сложность некоторых задач на графах с ограниченными минорами их матриц ограничений

© Д. В. Грибанов¹, Д. С. Малышев²

Аннотация. В статье рассматриваются естественные постановки задач о независимом множестве, о вершинном и о реберном доминирующем множестве как задач целочисленного линейного программирования. Для любого фиксированного C в статье доказывается полиномиальная разрешимость обеих задач о доминирующем множестве в классе графов, у которых все миноры матриц смежности вершин или ребер не превосходят C по абсолютному значению. В статье также доказывается подобный результат для задачи о независимом множестве и класса графов, который задается ограничением абсолютных значений всех миноров матриц, полученных пополнением транспонированных матриц инцидентности векторами из одних единиц.

Ключевые слова: булево линейное программирование, задача о независимом множестве, задача о доминирующем множестве, матричный минор, полиномиальный алгоритм

1. Введение

Прямая задача линейного программирования (ПЗЛП для краткости) — задача поиска решения, максимизирующего заданную линейную функцию с целыми коэффициентами на заданном полиэдре с целочисленной матрицей ограничений и целочисленным вектором правой части. Иными словами, для заданных $A \in \mathbb{Z}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{Z}^m$, $c \in \mathbb{Z}^n$, ПЗЛП состоит в том, чтобы решить следующую *прямую линейную программу* (кратко, п.л.п.):

$$\begin{aligned} \max \quad & c^T x \\ & Ax \leq b, \\ & x \geq 0_n, \end{aligned}$$

где 0_n — вектор с n компонентами, каждая из которых является нулем, x — вектор из n переменных, значения которых нужно определить. *Прямая целочисленная линейная программа* (п.ц.л.п.) — п.л.п., в которой наложено требование целочисленности на значения всех переменных. В *прямой булевой линейной программе* (п.б.л.п.) каждый элемент входных данных A, b, c принадлежит множеству $\{0, 1\}$ и для каждой переменной наложено требование принадлежности этому множеству. Заданная п.ц.л.п. (п.б.л.п.) является экземпляром массовой *прямой задачи целочисленного (булева) линейного программирования* (кратко, ПЗЦЛП и ПЗБЛП).

Двойственная линейная программа (кратко, д.л.п.) для п.л.п., записанной выше, это программа:

$$\begin{aligned} \min \quad & b^T y \\ & A^T y \geq c, \\ & y \geq 0_m. \end{aligned}$$

¹ Ассистент кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики, Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского, dimitry.gribanov@gmail.com

² Профессор кафедры прикладной математики и информатики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Н. Новгород; dsmalyshev@rambler.ru

Различие между *двойственными целочисленными (булевыми) линейными программами* (кратко, д.ц.л.п. и д.б.л.п.) и д.л.п. такое же, как и в случае прямых программ, т.е. накладывается ограничение целочисленности (булевости) на все входные данные и переменные. Массовая *двойственная задача целочисленного (булева) линейного программирования* (кратко, ДЗЦЛП и ДЗБЛП) состоит в том, чтобы решить заданную д.ц.л.п. (д.б.л.п.).

Существует несколько полиномиальных алгоритмов для решения ПЗЛП и ДЗЛП — алгоритмы Л. Хачияна [9], Н. Кармаркара [8], Ю. Нестерова (см. [11] и [12]). К сожалению, ПЗБЛП и ДЗБЛП являются NP-трудными, т.к. некоторые NP-трудные задачи могут быть сформулированы через п.б.л.п. и д.б.л.п. Тем самым, существование полиномиальных алгоритмов для решения ПЗБЛП и ДЗБЛП маловероятно. Поэтому вызывает интерес поиск случаев полиномиальной разрешимости ПЗБЛП и ДЗБЛП.

Напомним, что целочисленная матрица называется *вполне унимодулярной*, если каждый ее минор равен либо $+1$, либо -1 , либо 0 . Хорошо известно, что все оптимальные решения любой п.л.п. или д.л.п. с вполне унимодулярной матрицей ограничений являются целочисленными. Следовательно, для любой п.л.п. и соответствующей ей п.ц.л.п. с вполне унимодулярной матрицей ограничений множества оптимальных решений совпадают. Поэтому любой полиномиальный алгоритм для решения ПЗЛП и ДЗЛП (например, алгоритмы из [8],[9],[11],[12]) также решает ПЗЦЛП и ДЗЦЛП с вполне унимодулярными матрицами ограничений. Следующим естественным шагом является рассмотрение *бимодулярного случая*, т.е. матриц ограничений, модуль каждого минора которых принадлежит множеству $\{0, 1, 2\}$. Также было бы интересным исследовать сложность ПЗЦЛП и ДЗЦЛП с матрицами ограничений, имеющими ограниченные по абсолютному значению миноры. Имеется предположение (до сих пор не доказанное), что для любого фиксированного s ПЗЦЛП и ДЗЦЛП решаются за полиномиальное время в классе линейных программ, любой минор матриц ограничений которых не превосходит s по абсолютному значению [14]. Существуют (см. [14]) варианты этой гипотезы, в которых рассматриваются расширенные матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$ и $(\mathbf{A} \ \mathbf{b})$.

К сожалению, в настоящее время накоплено совсем немного результатов о сложности ПЗЦЛП и ДЗЦЛП для классов линейных программ с ограниченными минорами. Так, сложностные статусы ПЗЦЛП и ДЗЦЛП с бимодулярными матрицами ограничений до сих пор не известны. Шаг навстречу выяснению сложности в бимодулярном случае был сделан в работе [15]. Именно, было доказано, что если ранг бимодулярной $m \times n$ матрицы $\mathbf{A}$ равен n и каждая $n \times n$ подматрица $\mathbf{A}$ невырождена, то соответствующая п.ц.л.п. может быть решена за полиномиальное время. В работе [3] было доказано, что ПЗЦЛП решается за полиномиальное время для матриц ограничений, в которых все детерминанты квадратных подматриц максимального размера лежат между 1 и любой наперед заданной константой. В [1] было доказано, что если $\mathbf{A}$ — булева матрица, имеющая не более чем 2 единицы в каждой строке, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ — булевы вектора, и абсолютные значения всех миноров матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{A} \end{pmatrix}$ не превосходят C' , то соответствующая п.б.л.п. может быть решена за полиномиальное время для любого фиксированного C' . Этот результат имеет графовую природу, т.к. линейная программа для задачи о независимом множестве (задачи поиска в графе множества попарно несмежных вершин наибольшей мощности) для заданного графа G имеет транспонированную матрицу инцидентности $\mathbf{I}^T(G)$ графа G в качестве матрицы ограничений.

Мы рассматриваем естественные постановки задач о независимом множестве, о вершинном и о реберном доминирующем множестве как задач целочисленного линейного

программирования и доказываем полиномиальную разрешимость этих задач для классов графов, имеющих ограниченные по абсолютному значению миноры (расширенных) матриц ограничений.

2. Некоторые классические задачи на графах и их БЛП-постановки

Независимое множество в графе — любое подмножество его попарно несмежных вершин. Размер независимого множества с наибольшим количеством вершин графа G называется *числом независимости* G и обозначается через $\alpha(G)$. *Задача о независимом множестве* (кратко, ЗНМ) для заданных графа G и числа k состоит в том, чтобы проверить, выполняется ли неравенство $\alpha(G) \geq k$ или нет. Это классическая NP-полная задача на графах.

Для заданного графа G с n вершинами и m ребрами, ЗНМ может быть сформулирована в виде следующей п.б.л.п.:

$$\begin{aligned} \max \quad & \mathbf{j}_n^T \mathbf{x} \\ \mathbf{I}^T(G) \mathbf{x} \leq & \mathbf{j}_m, \\ \mathbf{x} \in & \{0, 1\}^n, \end{aligned}$$

где $\mathbf{j}_k$ — вектор с k компонентами, каждая из которых является единицей. Действительно, переменная x_v — индикатор того, что соответствующая вершина v принадлежит оптимальному решению ЗНМ. Неравенство $x_v + x_u \leq 1$ гарантирует, что смежные вершины u и v одновременно не принадлежат никакому допустимому решению программы, т.е. что любое допустимое решение является независимым множеством.

Пусть $\mathcal{ISP}(c)$ — множество всех графов G таких, что абсолютные значения всех миноров матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_n^T \\ \mathbf{I}^T(G) \end{pmatrix}$ не превосходят c . В этой работе мы показываем, что для любого фиксированного c ЗНМ может быть решена для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ за полиномиальное время. Этот результат был впервые получен в работе [1], но наше доказательство более простое и компактное.

Вершинным доминирующим множеством графа G называется подмножество $D \subseteq V(G)$ такое, что любой элемент множества $V(G) \setminus D$ имеет соседа в D . Размер доминирующего множества с наименьшим числом вершин графа G называется *вершинным числом доминирования* графа G и обозначается через $\gamma(G)$. *Задача о вершинном доминирующем множестве* (кратко, ЗВДМ) состоит для заданных графа G и числа k в том, чтобы проверить, выполняется ли неравенство $\gamma(G) \leq k$ или нет. *Задача о реберном доминирующем множестве* (кратко, ЗРДМ) определяется аналогичным образом. ЗВДМ и ЗРДМ являются классическими NP-полными задачами на графах.

Для заданного графа G с n вершинами и m ребрами, ЗВДМ и ЗРДМ могут быть сформулированы в виде следующих д.б.л.п.:

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{j}_n^T \mathbf{y} & \min \quad & \mathbf{j}_m^T \mathbf{y} \\ (\mathbf{A}_v(G) + \mathbf{I}_n) \mathbf{y} \geq & \mathbf{j}_n, & (\mathbf{A}_e(G) + \mathbf{I}_m) \mathbf{y} \geq & \mathbf{j}_m, \\ \mathbf{y} \in & \{0, 1\}^n & \mathbf{y} \in & \{0, 1\}^m, \end{aligned}$$

где $\mathbf{A}_v(G)$ и $\mathbf{A}_e(G)$ — матрицы смежности вершин и ребер графа G , соответственно, а $\mathbf{I}_k$ — единичная матрица размера k . Убедимся в том, что первая программа действительно

задает ЗВДМ для графа G . Переменная y_v является индикатором того, что соответствующая вершина v принадлежит некоторому оптимальному решению ЗВДМ для графа G . Неравенство $x_v + \sum_{u \in N(v)} x_u \geq 1$, где $N(v)$ — окрестность вершины v , гарантирует, что множество $\{v\} \cup N(v)$ содержит элемент любого допустимого решения, т.е. что любое допустимое решение является доминирующим множеством.

Пусть $\mathcal{VDSP}(c)$ и $\mathcal{EDSP}(c)$ — множества всех графов G таких, что абсолютные значения всех миноров матриц $\mathbf{A}_v(G) + \mathbf{I}_n$ и $\mathbf{A}_e(G) + \mathbf{I}_m$ не превосходят c , соответственно. В этой работе мы показываем, что для любого фиксированного c ЗВДМ может быть решена для графов из $\mathcal{VDSP}(c)$ за полиномиальное время. Также мы показываем, что для любого фиксированного c ЗРДМ может быть решена для графов из $\mathcal{EDSP}(c)$ за полиномиальное время.

3. Некоторые обозначения и определения

Граф H называется *подграфом* графа G , если H получается из G удалением вершин и ребер (удаление вершины предполагает удаление всех инцидентных ей ребер). Граф H называется *порожденным подграфом* графа G , если H может быть получен из G удалением вершин.

Класс графов называется *наследственным*, если он замкнут относительно удаления вершин. Хорошо известно, что любой наследственный класс $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{Y}$ своих *запрещенных порожденных подграфов*, т.е. графов, минимальных (относительно удаления вершин) не принадлежащих $\mathcal{X}$. При этом принята запись $\mathcal{X} = \text{Free}(\mathcal{Y})$. *Сильно наследственный* класс графов — наследственный класс, замкнутый еще и относительно удаления ребер. Любой сильно наследственный класс графов $\mathcal{X}$ может быть задан множеством $\mathcal{Y}$ своих запрещенных подграфов. При этом принята запись $\mathcal{X} = \text{Free}_s(\mathcal{Y})$.

Для любого c классы $\mathcal{ISP}(c)$ и $\mathcal{EDSP}(c)$ являются сильно наследственными. Для любого c класс $\mathcal{VDSP}(c)$ является наследственным.

Граф называется *двудольным*, если множество его вершин можно разбить на не более чем два независимых множества.

Граф смежности ребер графа G называется *реберным* к G .

Мы будем использовать следующие обозначения для матриц:

1. $\mathbf{J}_n$ — матрица порядка n , состоящая из одних единиц,
2. $\mathbf{O}_n$ — матрица порядка n , состоящая из одних нулей,
3. $\mathbf{I}_n$ — единичная матрица порядка n ,
4. $\mathbf{j}_n$ — вектор с n компонентами, состоящий из одних единиц,
5. $\mathbf{o}_n$ — вектор с n компонентами, состоящий из одних нулей,
6. $\mathbf{A}^T$ — матрица, транспонированная к $\mathbf{A}$,
7. $\mathbf{I}(G)$ — матрица инцидентности графа G ,
8. $\mathbf{A}_v(G)$ — матрица смежности вершин графа G ,
9. $\mathbf{A}_e(G)$ — матрица смежности ребер графа G .

Мы также будем использовать следующие обозначения:

1. $K_{p,q}$ — полный двудольный граф с p вершинами в первой доле и q вершинами во второй доле,
2. $K'_{1,p}$ — граф, полученный из графа $K_{1,p}$ подразбиением каждого его ребра,
3. K_n — полный граф с n вершинами,
4. O_n — пустой граф с n вершинами,
5. A_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_i v_j \mid i \neq j\} \cup \{v_1 u_1, v_2 u_2, \dots, v_n u_n\}$,
6. B_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_n, u_1, \dots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_i v_j \mid i \neq j\} \cup \{u_i u_j \mid i \neq j\} \cup \{v_1 u_1, v_2 u_2, \dots, v_n u_n\}$,
7. Pal_n — граф с множеством вершин $\{v_1, \dots, v_{2n+1}, u_1, \dots, u_n\}$ и множеством ребер $\{v_i v_{i+1} \mid 1 \leq i \leq 2n\} \cup \{v_{2i} u_i \mid 1 \leq i \leq n\}$,
8. kG — дизъюнктное объединение k копий графа G ,
9. для графа G и подмножества $V' \subseteq V(G)$, $G[V']$ — подграф G , порожденный подмножеством V' , $G \setminus V'$ — результат удаления из G всех вершин подмножества V' ,
10. $N(x)$ — окрестность вершины x , $N[x] \triangleq N(x) \cup \{x\}$.

4. Задача о независимом множестве

4.1. Некоторое включение

Л е м м а 4.1. Для любого $c \geq 2$ справедливо включение $\mathcal{ISP}(c) \subseteq \text{Free}_s(\{Pal_c\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\mathbf{M}(k, a)$ — матрица, полученная из матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^T \\ \mathbf{I}^T(Pal_k) \end{pmatrix}$ изменением 1 на a в элементе, соответствующем вершине u_1 в первой строке. Рассмотрим подматрицу матрицы $\mathbf{M}(k, a)$, порожденную столбцами, соответствующими вершинам v_1, v_2, v_3, u_1 , а также первой строкой и строками, соответствующими ребрам $v_1 v_2, v_2 v_3, v_2 u_1$. Эта матрица $\mathbf{M}'$ имеет вид $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, где первый ее столбец

соответствует вершине u_1 , $(i+1)$ -ый столбец соответствует вершине v_i для любого $1 \leq i \leq 3$, вторая, третья и четвертая строки соответствуют ребрам $u_1 v_2, v_1 v_2, v_2 v_3$, соответственно. Следующая диаграмма показывает последовательность элементарных операций со строками и столбцами матрицы $\mathbf{M}'$:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \\
\begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a & 1+a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1+a \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица $\mathbf{M}(k, a)$ элементарными преобразованиями приводится к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{o}_{3k-2}^T \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{o}_{3k-2}^T \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{o}_{3k-2}^T \\ \mathbf{o}_{3k-2} & \mathbf{o}_{3k-2} & \mathbf{o}_{3k-2} & \mathbf{M}(k-1, a+1) \end{pmatrix}$. Следовательно, $|\det(\mathbf{M}(k, a))| = |\det(\mathbf{M}(k-1, a+1))|$, т.е. $|\det(\mathbf{M}(k, a))| = |\det(\mathbf{M}(1, a+k-1))|$. Очевидно, что $\det(\mathbf{M}(1, a)) = -1-a$. Следовательно, $|\det(\mathbf{M}(k, a))| = |a+k|$. Т.к. $\mathbf{M}(k, 1) = \begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^T \\ \mathbf{I}^T(Pal_k) \end{pmatrix}$, то $|\det \begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^T \\ \mathbf{I}^T(Pal_k) \end{pmatrix}| = k+1$.

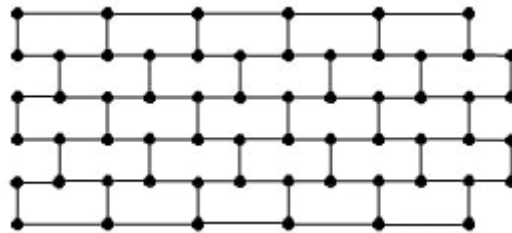
Матрица $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{3k+1}^T \\ \mathbf{I}^T(Pal_k) \end{pmatrix}$ является расширенной матрицей ограничений ЗНМ для графа Pal_k . Следовательно, $\mathcal{ISP}(c)$ не содержит графа Pal_c . Напомним, что класс $\mathcal{ISP}(c)$ является сильно наследственным. Следовательно, включение $\mathcal{ISP}(c) \subseteq Free_s(\{Pal_c\})$ имеет место.

Доказательство закончено.

4.2. Теорема Рида

Покрытие нечетных циклов графа G — подмножество $X \subseteq V(G)$ такое, что граф $G \setminus X$ является двудольным.

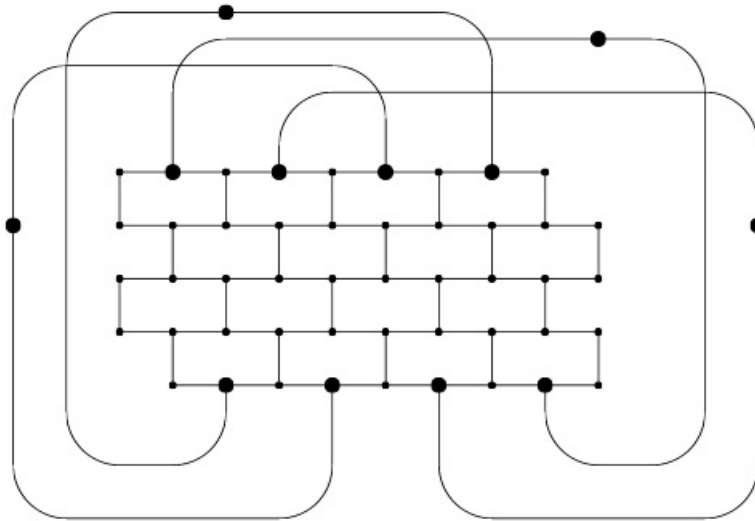
Элементарной стеной высоты h называется граф, состоящий из h уровней, каждый из которых состоит из h «кирпичей», где под «кирпичом» понимается простой цикл длины шесть, если уровень не является верхним и нижним, иначе это простой цикл длины пять. Элементарная стена высоты 5 изображена на следующем рисунке.



Р и с у н о к 4.1

Элементарная стена высоты 5

Стена Эшера высоты h может быть получена из элементарной стены высоты h следующим образом. Пусть $(v_1, \dots, v_{h+1})$ и $(u_1, \dots, u_{h+1})$ — верхний и нижний пути элементарной стены высоты h , соответственно. Мы заменяем каждое ребро (v_i, v_{i+1}) на простой путь (v_i, w'_i, v_{i+1}) и каждое ребро (u_i, u_{i+1}) на простой путь (u_i, w''_i, u_{i+1}) . Далее, для каждого i мы добавляем ребро (w'_i, w''_{h+1-i}) и подразбиваем его. Стена Эшера высоты 4 изображена на следующем рисунке.



Р и с у н о к 4.2
Стена Эшера высоты 4

Б. Рид доказал следующий результат в работе [13].

Т е о р е м а 4.1. Для любых k и h существует такое число $t(k, h)$, что если G — граф, не содержащий k непересекающихся по вершинам нечетных циклов и не содержащий стены Эшера высоты h в качестве подграфа, то G содержит покрытие нечетных циклов, имеющее не более $t(k, h)$ элементов.

4.3. Основной результат этого раздела

Т е о р е м а 4.2. Для любого фиксированного c ЗНМ для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — произвольный граф из $\mathcal{ISP}(c)$ и $c^* \triangleq \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Если G содержит c^* непересекающихся по вершинам нечетных циклов, то матрица $\mathbf{I}(G)$ содержит подматрицу, имеющую c^* блоков, определитель каждого из которых равен 2 по абсолютной величине. Следовательно, данная матрица содержит минор, абсолютное значение которого равно 2^{c^*} , что больше, чем c . Поэтому G не содержит c^* непересекающихся по вершинам нечетных циклов.

Очевидно, граф Pal_c является порожденным подграфом стены Эшера высоты c . По Лемме 4.1 и Теореме 4.1 граф G имеет покрытие нечетных циклов X мощности не более $t(c^*, c)$. Это покрытие может быть найдено за полиномиальное время, поскольку можно за полиномиальное время проверить, является ли заданный граф двудольным или нет. Ясно, что $\alpha(G) = \max_{X' \subseteq X, X' \text{ — независимое множество}} (|X'| + \alpha(G \setminus (X \cup \bigcup_{v \in X'} N(v))))$ и что для любого подмножества X' множества X подграф $G \setminus (X \cup \bigcup_{v \in X'} N(v))$ является двудольным. ЗНМ может быть решена для двудольных графов за полиномиальное время [16]. Следовательно, для любого фиксированного c ЗНМ для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ полиномиально сводится к ЗНМ для двудольных графов. Поэтому для любого фиксированного c ЗНМ для графов из $\mathcal{ISP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5. Задача о вершинном доминирующем множестве

5.1. Вспомогательные результаты

Л е м м а 5.1. Пусть c — некоторое натуральное число и $c^* \triangleq \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Тогда справедливо включение $\mathcal{VDSP}(c) \subseteq \text{Free}(\{K_{1,c+2}, A_{c+2}, B_{c+1}, c^*K_{1,3}, c^*A_3\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица ограничений $\mathbf{A}_v(K_{1,c+2}) + \mathbf{I}_{c+3}$ ЗВДМ для графа $K_{1,c+2}$ совпадает с матрицей $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{j}_{c+2}^T \\ \mathbf{j}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \end{pmatrix}$ с точностью до перестановок строк и столбцов.

Ее определитель равен $-c-1$, т.к. она может быть приведена к матрице $\begin{pmatrix} -c-1 & \mathbf{o}_{c+2}^T \\ \mathbf{o}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+1} \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями строк и столбцов. Матрица ограничений ЗВДМ для графа $c^*K_{1,3}$ является блочной матрицей, имеющей c^* блоков, каждый из которых имеет определитель, равный -2 . Следовательно, определитель всей матрицы равен $(-2)^{c^*}$, что по абсолютному значению больше, чем c . Следовательно, $K_{1,c+2} \notin \mathcal{VDSP}(c)$ и $c^*K_{1,3} \notin \mathcal{VDSP}(c)$. Т.к. $\mathcal{VDSP}(c)$ является наследственным, то имеет место включение $\mathcal{VDSP}(c) \subseteq \text{Free}(\{K_{1,c+2}, c^*K_{1,3}\})$.

Нетрудно видеть, что ЗВДМ для графов A_{c+2} и B_{c+1} имеет матрицы ограничений $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \\ \mathbf{I}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+1} & \mathbf{I}_{c+1} \\ \mathbf{I}_{c+1} & \mathbf{J}_{c+1} \end{pmatrix}$, соответственно. Первая матрица может быть приведена к матрице $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+2} - \mathbf{I}_{c+2} & \mathbf{O}_{c+2} \\ \mathbf{O}_{c+2} & \mathbf{I}_{c+2} \end{pmatrix}$ элементарными преобразованиями строк и столбцов. Матрица $\mathbf{J}_{c+2} - \mathbf{I}_{c+2}$ является циркулянтном, чей определитель равен $\prod_{j=0}^{c+1} p(w_j)$, где

$p(x) \triangleq x + x^2 + \dots + x^{c+1}$ и $w_j \triangleq e^{2\pi i \cdot \frac{j}{c+2}}$ [7]. Ясно, что $p(w_0) = c+1$ и $p(x) = x + x^2 + \dots + x^{c+1} = \frac{x^{c+2}-1}{x-1} - 1$ для любого вещественного числа $x \neq 1$. Следовательно, $p(w_j) = -1$ для любого $j \in \overline{1, c+1}$. Поэтому $|\det(\mathbf{J}_{c+2} - \mathbf{I}_{c+2})| = c+1$. Таким образом, графы A_{c+2} и c^*A_3 не принадлежат классу $\mathcal{VDSP}(c)$, т.е. $\mathcal{VDSP}(c) \subseteq \text{Free}(\{A_{c+2}, c^*A_3\})$.

Подматрица матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{J}_{c+1} & \mathbf{I}_{c+1} \\ \mathbf{I}_{c+1} & \mathbf{J}_{c+1} \end{pmatrix}$, порожденная первыми $c+2$ строками и последними $c+2$ столбцами, является матрицей $\begin{pmatrix} \mathbf{j}_{c+1} & \mathbf{I}_{c+1} \\ 0 & \mathbf{j}_{c+1}^T \end{pmatrix}$. Абсолютное значение ее определителя равно $c+1$. Поэтому $\mathcal{VDSP}(c) \subseteq \text{Free}(\{B_{c+1}\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Через $R(a, b)$ мы обозначаем соответствующее число Рамсея, т.е. наименьшее число n такое, что любой граф с n вершинами содержит либо K_a , либо O_b в качестве порожденного подграфа.

Л е м м а 5.2. Пусть $G \in \mathcal{VDSP}(c)$ и D — произвольное его минимальное доминирующее множество. Тогда $G[D] \in \text{Free}(\{K_{R(c+1, c+2)}\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что $G[D]$ содержит полный подграф с $k \geq R(c+1, c+2)$ вершинами. Пусть вершины $v_1, \dots, v_k$ порождают этот полный подграф. Поскольку D — минимальное доминирующее множество графа G , то для любого $i \in \overline{1, k}$ существует вершина $u_i \in N(v_i) \setminus \bigcup_{j=1, j \neq i}^k N(v_j)$. По теореме Рамсея порожденный

подграф $G[\{u_1, \dots, u_k\}]$ графа G содержит либо K_{c+1} , либо O_{c+2} в качестве порожденного подграфа. Следовательно, G содержит либо A_{c+2} , либо B_{c+1} в качестве порожденного подграфа. Мы получаем противоречие с предыдущей леммой. Следовательно, наше первоначальное предположение было неверным.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Л е м м а 5.3. Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{VDSP}(c)$, r — произвольная вершина G , $V_k(r)$ — множество всех вершин графа G , расположенных на расстоянии k от вершины r . Существует функция $f_c(\cdot) : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что для любого k выполнено неравенство $\alpha(G[V_k(r)]) \leq f_c(k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По Лемме 5.1 можно положить $f_c(0) = 1$ и $f_c(1) = c+1$. Пусть $k \geq 2$. Предположим, что $f_c(0), f_c(1), \dots, f_c(k-1)$ уже определены. Определим $f_c(k)$. Пусть S_k — независимое множество графа $G[V_k(r)]$ с наибольшим количеством вершин. Пусть D_{k-1} — подмножество множества $\bigcup_{x \in S_k} N(x) \cap V_{k-1}(r)$, доминирующее S_k и имеющее минимальное количество вершин. По Лемме 5.1 ни одна из вершин множества D_{k-1} не может быть смежна с $c+2$ вершинами множества S_k . Следовательно, $|D_{k-1}| \geq \frac{|S_k|}{c+1}$ по принципу Дирихле. Т.к. класс $\mathcal{VDSP}(c)$ является наследственным и $G \in \mathcal{VDSP}(c)$, то порожденный подграф $G[D_{k-1} \cup S_k]$ графа G принадлежит классу $\mathcal{VDSP}(c)$. По нашему предположению $G[D_{k-1}] \in \text{Free}(\{O_{f_c(k-1)+1}\})$. По Лемме 5.2 $G[D_{k-1}] \in \text{Free}(\{K_{R(c+1, c+2)}\})$. Следовательно, по теореме Рамсея $|D_{k-1}| \leq R(R(c+1, c+2), f_c(k-1) + 1)$. Поэтому $|S_k| \leq (c+1)R(R(c+1, c+2), f_c(k-1) + 1)$. Тем самым, мы можем положить $f_c(k) = (c+1)R(R(c+1, c+2), f_c(k-1) + 1) + 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

$(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка графа G — произвольное множество $\{G_1, G_2, \dots, G_s\}$ графов такое, что:

1. для любого i граф G_i является порожденным подграфом графа G , изоморфным либо $K_{1,3}$, либо A_3 ,
2. для любых различных i и j множества вершин графов G_i и G_j не пересекаются и не существует двух смежных вершин $u \in G_i$ и $v \in G_j$.

$(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка называется *оптимальной*, если она содержит максимально возможное количество элементов. По Лемме 5.1 любая $(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка любого графа из $\mathcal{VDSP}(c)$ имеет не более $\lceil \log_2(c) \rceil$ элементов, каждый из которых изоморфен $K_{1,3}$, и не более $\lceil \log_2(c) \rceil$ элементов, каждый из которых изоморфен A_3 . Следовательно, некоторая оптимальная $(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка любого графа из $\mathcal{VDSP}(c)$ может быть найдена за полиномиальное время, т.к. она может быть найдена перечислением всех подмножеств его вершин, имеющих не более $(4+6)\lceil \log_2(c) \rceil$ элементов.

Пусть G — произвольный связный граф из $\mathcal{VDSP}(c)$ и $P \triangleq \{G_1, \dots, G_s\}$ — некоторая оптимальная его $(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка. Пусть $N_d(P) \triangleq \{x \in V(G) \mid \exists i \in \overline{1, s} \exists y \in V(G_i) \text{ такая, что расстояние между } x \text{ и } y \text{ не превосходит } d\}$. Пусть $\mathfrak{D}_G \triangleq \{D^* \mid D^* \text{ — подмножество множества } N_2(P), \text{ доминирующее } N_1(P)\}$. Для любого элемента $D^* \in \mathfrak{D}_G$ мы удалим каждую вершину G , доминируемую множеством D^* (D^* доминирует каждую вершину D^*). Полученный граф обозначим через $G(D^*)$.

Л е м м а 5.4. Для любого элемента $D^* \in \mathfrak{D}_G$ граф $G(D^*)$ принадлежит классу $\text{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$. Если D — доминирующее множество графа G с наименьшим количеством вершин, то выполнено неравенство $\gamma(G) \geq \gamma(G(D \cap N_2(P))) + |D \cap N_2(P)|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ясно, что $V(G(D^*)) \cap N_1(P) = \emptyset$ по определению графа $G(D^*)$. Отсюда и из оптимальности упаковки P следует, что граф $G(D^*)$ не может содержать ни $K_{1,3}$, ни A_3 в качестве порожденного подграфа. Другими словами, $G(D^*) \in \text{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$.

Пусть $\tilde{D} \triangleq D \cap N_2(P)$ и $D' \triangleq D \setminus \tilde{D}$. Ясно, что $\tilde{D} \in \mathfrak{D}_G$. Покажем, что существует доминирующее множество графа $G(\tilde{D})$, имеющее не более $|D'|$ элементов. Это очевидно, если $D' \subseteq V(G(\tilde{D}))$. Предположим, что существует вершина $x \in D' \setminus V(G(\tilde{D}))$. Заметим, что $x \notin N_2(P)$. По построению графа $G(\tilde{D})$ существует вершина $y \in \tilde{D}$ такая, что $xy \in E(G)$. Ясно, что $y \in N_2(P) \setminus N_1(P)$. Т.к. D — доминирующее множество графа G с минимальным количеством вершин, то существует вершина $z \in N(x) \setminus \bigcup_{v \in D, v \neq x} N[v]$.

Следовательно, z не доминируется множеством $\tilde{D}$. Поэтому вершина z принадлежит графу $G(\tilde{D})$. Множество $N(x) \cap V(G(\tilde{D}))$ порождает полный граф. Действительно, если оно содержит две несмежные вершины v и u , то $N(y) \cap \{v, u\} = \emptyset$ и вершины x, y, v, u порождают подграф $K_{1,3}$. Это невозможно, т.к. упаковка P является оптимальной. Поэтому множество $(D' \setminus \{x\}) \cup \{z\}$ доминирует $V(G(\tilde{D}))$. Таким образом, существует доминирующее множество D'' графа $G(\tilde{D})$, содержащее не более $|D'|$ вершин. Множество $\tilde{D} \cup D''$ является доминирующим множеством графа G . Более того, $|\tilde{D} \cup D''| = |\tilde{D}| + |D''| \leq |\tilde{D}| + |D'| = |D| = \gamma(G)$. Т.к. $\gamma(G(\tilde{D})) \leq |D''|$, то выполнено неравенство $\gamma(G) \geq \gamma(G(\tilde{D})) + |\tilde{D}|$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5.2. Основной результат этого раздела

Т е о р е м а 5.1. Для любого фиксированного c ЗВДМ для графов из $\mathcal{VDSP}(c)$ решается за полиномиальное время.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть G — произвольный граф из класса $\mathcal{VDSP}(c)$. Некоторая его оптимальная $(K_{1,3}, A_3)$ -упаковка P может быть вычислена за полиномиальное время. Пусть D_{opt} — доминирующее множество графа G , имеющее минимальное количество вершин. По Леммам 5.2 и 5.3 существует функция $g(\cdot) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такая, что мощность множества $D_{opt} \cap N_2(P)$ не превосходит значения функции $g(\cdot)$ в точке c . Пусть $\mathfrak{D}_G^* \triangleq \{D \in \mathfrak{D}_G \mid |D| \leq g(c)\}$. Следовательно, множество $\mathfrak{D}_G^*$ может быть вычислено за полиномиальное время. Пусть $D \in \mathfrak{D}_G^*$. Объединение множества D и любого доминирующего множества графа $G(D)$ с минимальным количеством вершин является доминирующим множеством графа G . Следовательно, выполнено неравенство $\gamma(G) \leq |D| + \gamma(G(D))$. Отсюда и второй части Леммы 5.4 выполнено соотношение $\gamma(G) = \min_{D \in \mathfrak{D}_G^*} (\gamma(G(D)) + |D|)$. Т.к. $\mathfrak{D}_G^* \subseteq \mathfrak{D}_G$, то по первой части Леммы 5.4 граф $G(D)$ принадлежит классу $\text{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$ для любого $D \in \mathfrak{D}_G^*$. ЗВДМ может быть решена за полиномиальное время для графов из класса $\text{Free}(\{K_{1,3}, A_3\})$ [5]. Поэтому для любого фиксированного c ЗВДМ для графов из класса $\mathcal{VDSP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

6. Задача о реберном доминирующем множестве

6.1. Кликовая ширина графов и ее значение

Кликовая ширина — важный параметр графов. Это объясняется тем фактом, что многие задачи на графах могут быть решены за полиномиальное время в любом классе графов с ограниченной кликовой шириной (см., например, [6]). Более точно, для любого фиксированного числа C многие NP-полные задачи на графах становятся полиномиально разрешимыми во множестве всех графов, каждый из которых имеет кликовую ширину не более чем C . В частности, это верно для задач о независимом множестве и о вершинном доминирующем множестве [6].

Класс $\mathcal{S}$ — множество всех лесов, имеющих не более чем 3 листа в каждой из компонент связности. Следующий результат является достаточным условием ограниченности кликовой ширины в сильно наследственных классах графов. Он доказан в работе [4].

Л е м м а 6.1. *Если $\mathcal{X}$ — сильно наследственный класс графов и $\mathcal{S} \not\subseteq \mathcal{X}$, то существует константа $C(\mathcal{X})$ такая, что кликовая ширина любого графа из $\mathcal{X}$ не превосходит $C(\mathcal{X})$.*

Для любых c и p , $pK'_{1,3} \in \mathcal{S}$ и $\mathcal{EDSP}(c)$ являются сильно наследственными классами. Следовательно, по предыдущей и следующей леммам кликовая ширина всех графов из $\mathcal{EDSP}(c)$ ограничена для любого c .

Л е м м а 6.2. *Пусть c — произвольное натуральное число и $c^* \triangleq \lceil \log_2(c) \rceil + 1$. Тогда справедливо включение $\mathcal{EDSP}(c) \subseteq \text{Free}_s(\{c^*K'_{1,3}\})$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Матрица ограничений $\mathbf{A}_e(K'_{1,3}) + \mathbf{I}_6$ ЗРДМ для графа $K'_{1,3}$ совпадает (с точностью до перестановок строк и столбцов) с матрицей $\mathbf{M} \triangleq$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \text{ Нетрудно видеть, что } \det(\mathbf{M}) = -2. \text{ Следовательно, никакой граф}$$

из $\mathcal{EDSP}(c)$ не может содержать c^* непересекающихся по вершинам копий графа $K'_{1,3}$, иначе $\mathbf{M}$ содержит минор $(-2)^{c^*}$, причем $2^{c^*} > c$. Поэтому $\mathcal{EDSP}(c) \subseteq \text{Free}_s(\{c^*K'_{1,3}\})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

6.2. Основной результат этого раздела

Т е о р е м а 6.1. *Для любого фиксированного c ЗРДМ для графов из $\mathcal{EDSP}(c)$ может быть решена за полиномиальное время.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что ЗРДМ полиномиально разрешима в любом классе графов с ограниченной кликовой шириной [10]. Отсюда и из лемм 6.1 и 6.2 следует, что для любого фиксированного c ЗРДМ может быть решена для графов из $\mathcal{EDSP}(c)$ за полиномиальное время.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

7. Благодарности

Эта публикация подготовлена при частичной финансовой поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований, проекты 16-31-60008-мол-а-дк, 15-01-06249-а, 16-31-00109-мол-а; гранта Президента РФ МК-4819.2016.1; лаборатории ЛАТАС НИУ ВШЭ.

Дата поступления 09.08.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. E. Alekseev, D. V. Zakharova, “Independent sets in the graphs with bounded minors of the extended incidence matrix”, *Journal of Applied and Industrial Mathematics*, **5**:1 (2011), 14–18.
2. S. Arnborg, A. Proskurowski, “Linear time algorithms for NP-hard problems restricted to partial k -trees”, *Discrete Applied Mathematics*, **23**:1 (1989), 11–24.
3. S. Artmann, F. Eisenbrand, C. Glanzer, T. Oertel, S. Vempala, R. Weismantel, “A note on non-degenerate integer programs with small sub-determinants”, *arxiv:1603.09595v1*.
4. R. Boliac, V. Lozin, “On the clique-width of graphs in hereditary classes”, *Lecture Notes in Computer Science*, **2518** (2002), 44–54.
5. A. Brandstädt, F. F. Dragan, “On linear and circular structure of (claw, net)-free graphs”, *Discrete Applied Mathematics*, **129**:2–3 (2003), 285–303.
6. B. Courcelle, J. Makowsky, U. Rotics, “Linear time solvable optimization problems on graphs of bounded clique-width”, *Theory of Computing Systems*, **33**:2 (2000), 125–150.
7. R. M. Gray, “Toeplitz and circulant matrices: a review”, *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, **2**:3 (2006), 155–239.
8. N. Karmarkar, “A new polynomial time algorithm for linear programming”, *Combinatorica*, **4**:4 (1984), 373–395.
9. L. G. Khachiyan, “Polynomial algorithms in linear programming”, *USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics*, **20**:1 (1980), 53–72.
10. D. Kobler, U. Rotics, “Edge dominating set and colorings on graphs with fixed clique-width”, *Discrete Applied Mathematics*, **126**:2–3 (2003), 197–221.
11. Y. E. Nesterov, A. S. Nemirovsky, *Interior point polynomial methods in convex programming*, SIAM, 1994.
12. P. M. Pardalos, C. G. Han, Y. Ye, “Interior point algorithms for solving nonlinear optimization problems”, *COAL Newsletter*, **19** (1991), 45–54.
13. B. Reed, “Mangoes and Blueberries”, *Combinatorica*, **19**:2 (1999), 267–296.
14. V. N. Shevchenko, *Qualitative topics in integer linear*, AMS, 1997.
15. S. I. Veselov, A. J. Chirkov, “Integer program with bimodular matrix”, *Discrete Optimization*, **6**:2 (2009), 220–222.

16. S.H. Whitesides, “A method for solving certain graph recognition and optimization problems, with applications to perfect graphs.”, *Annals of Discrete Mathematics*, **88** (1984), 281–297.

The complexity of some graph problems with bounded minors of their constraint matrices

© D. V. Griбанov³, D. S. Malyshev⁴

Abstract. The article considers natural formulations of the independent set problem, vertex and edge dominating set problems as integer linear programming problems. For every fixed C , authors prove polynomial-time solvability of both dominating set problems in a class of graphs, for which all minors of the vertex and edge adjacency matrices are at most C in the absolute value. The paper also includes a similar result for the independent set problem and for a class of graphs, which is defined by bounding of absolute values of all matrix minors obtained by augmenting of transposed incidence matrices by all-ones vectors.

Key Words: boolean linear programming, independent set problem, dominating set problem, matrix minor, polynomial-time algorithm

³ Assistant lecturer of Department of Algebra, Geometry and Discrete Mathematics, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; dimitry.gribanov@gmail.com

⁴ Professor of Department of Applied Mathematics and Informatics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; dsmalyshev@rambler.ru

УДК 517.928, 531.01

Прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем с одной степенью свободы

© Н. В. Ковалев ¹

Аннотация. Рассматриваются стационарные квазиконсервативные системы с одной степенью свободы с гамильтоновой невозмущенной системой. Исследуется прямое разложение неавтономных интегралов квазиконсервативных систем, обсуждается их аналитичность по малому параметру. Предложен метод построения семейства неавтономных интегралов квазиконсервативных систем в переменных действие-угол. Сформулирован и доказан критерий существования замкнутых орбит в терминах неавтономных интегралов. Критерий существования замкнутых орбит применен для оценки количества предельных циклов одного класса уравнений Льенара.

Ключевые слова: квазиконсервативная система, неавтономный интеграл, периодические решения, предельные циклы, переменные действие-угол, разложение по малому параметру

1. Прямое разложение и аналитичность неавтономных интегралов по малому параметру

Рассматривается квазиконсервативная система с одной степенью свободы. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \\ \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots \end{cases}, \quad (1.1)$$

где $H = H(x, y)$ — функция Гамильтона невозмущенной системы, x — координата, y — импульс, ϵ — малый параметр, а $f_k = f_k(x, y)$ и $g_k = g_k(x, y)$ — произвольные гладкие функции.

Неавтономным интегралом системы (1.1) называется функция $I = I(x, y, t)$, сохраняющая постоянное значение вдоль любого решения $x(t)$, $y(t)$ этой системы. Неавтономные интегралы системы (1.1) возникают однопараметрическими семействами. Действительно, если $I = I(x, y, t)$ — неавтономный интеграл, то $I = I(x, y, t + h)$ для произвольного фиксированного h — также неавтономный интеграл.

В настоящей работе будет построено семейство неавтономных интегралов $I = I(x, y, t)$ системы (1.1) в виде прямого разложения [1] по малому параметру ϵ :

$$I = I_0 + \epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2 + \dots \quad (1.2)$$

Так как система (1.1) при $\epsilon = 0$ допускает автономный интеграл $H = \text{const}$. Можно положить $I_0 = H$.

Из определения неавтономного интеграла следует

$$\frac{dI}{dt} = \frac{dH}{dt} + \epsilon \frac{dI_1}{dt} + \epsilon^2 \frac{dI_2}{dt} + \dots = 0, \quad (1.3)$$

где

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial y} \dot{y};$$

¹ Аспирант кафедры дифференциальных уравнений, Московский Авиационный Институт (Национальный Исследовательский Университет), г. Москва; nick.kvlyv@gmail.com

$$\frac{dI_k}{dt} = \frac{\partial I_k}{\partial t} + \frac{\partial I_k}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial I_k}{\partial y} \dot{y}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Подставляем $\dot{x}$ и $\dot{y}$ из системы (1.1) в (1.3):

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial x} \left[\frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \right] + \frac{\partial H}{\partial y} \left[-\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots \right] + \\ &+ \epsilon \frac{\partial I_1}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial I_1}{\partial x} \left[\frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \right] + \epsilon \frac{\partial I_1}{\partial y} \left[-\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots \right] + \\ &+ \epsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial x} \left[\frac{\partial H}{\partial y} + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots \right] + \epsilon^2 \frac{\partial I_2}{\partial y} \left[-\frac{\partial H}{\partial x} + \epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots \right] + \dots = 0. \end{aligned}$$

Раскроем скобки и сгруппируем слагаемые по степеням параметра ϵ . Имеем уравнения

$$\epsilon^k : \quad \frac{\partial I_k}{\partial t} + \{I_k, H\} = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.4)$$

где

$$\{I_k, H\} = \frac{\partial I_k}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} - \frac{\partial I_k}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial x}, \quad F_k = -\frac{\partial H}{\partial x} f_k - \frac{\partial H}{\partial y} g_k - \sum_{n=1}^{k-1} \left[\frac{\partial I_n}{\partial x} f_{k-n} - \frac{\partial I_n}{\partial y} g_{k-n} \right].$$

Конструкция в фигурных скобках называется скобкой Пуассона. (1.4) — линейные неоднородные уравнения в частных производных 1-ого порядка. Коэффициенты разложения (1.2) неавтономного интеграла есть частные решения уравнений (1.4).

Для интегрирования уравнений (1.4) необходимо найти три независимых интеграла системы характеристик

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\frac{\partial H}{\partial y}} = \frac{dy}{-\frac{\partial H}{\partial x}} = \frac{dI_k}{F_k}. \quad (1.5)$$

Один из этих интегралов — гамильтониан $H = H(x, y)$. Если (x_0, y_0) — регулярная точка невырожденной системы, то система (1.5) допускает два явно зависящих от времени интеграла $K = K(x, y, t)$, $L = L(x, y, t)$. Независимость понимается в том смысле, что матрица Якоби

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial K}{\partial t} & \frac{\partial K}{\partial x} & \frac{\partial K}{\partial y} \\ \frac{\partial L}{\partial t} & \frac{\partial L}{\partial x} & \frac{\partial L}{\partial y} \end{pmatrix}$$

имеет максимальный ранг в окрестности точки (x_0, y_0, t_0) , где t_0 — произвольный фиксированный начальный момент времени. Здесь же отметим, что построение интегралов L и K связано не только с квадратурами, но и с обращением функций. В таком виде метод неэффективен.

Очевидно, что если произвольно выбирать решение уравнений (1.4), то ряд (1.2) будет расходиться. В этом случае будем говорить о формальном неавтономном интеграле системы (1.1). Однако, если получить неавтономный интеграл системы (1.1) как решение некоторой задачи Коши для уравнения (1.3), то он будет аналитическим по ϵ . Коэффициенты разложения (1.2) аналитического интеграла можно найти, решая соответствующие задачи Коши для уравнений (1.4). Единственное решение задачи Коши вида

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dt} &\equiv \frac{\partial I}{\partial t} + \{I, H\} + f(x, y, \epsilon) \frac{\partial I}{\partial x} + g(x, y, \epsilon) \frac{\partial I}{\partial y} = 0, \\ I|_{t=0} &= \phi(x, y, \epsilon) \end{aligned} \quad (1.6)$$

аналитично по ϵ , если аналитичны ряды $f(x, y, \epsilon) = \epsilon f_1(x, y) + \dots$, $g(x, y, \epsilon) = \epsilon g_1(x, y) + \dots$ и $\phi(x, y, \epsilon) = \phi_0(x, y) + \epsilon \phi_1(x, y) + \dots$. Точнее, если ряды f , g и ϕ равномерно аналитичны по ϵ в окрестности точки (x_0, y_0) , то существует окрестность точки $(x_0, y_0, 0)$, в которой решение задачи (1.6) равномерно ϵ -аналитично [2]. Этот результат развивает классическую теорему Пуанкаре об аналитичности решения дифференциального уравнения по малому параметру [3].

2. Построение неавтономных интегралов в переменных действие-угол

В системе (1.1) сделаем каноническую замену переменных

$$\begin{cases} x = X(r, \varphi) \\ y = Y(r, \varphi) \end{cases}, \quad (2.1)$$

где r — действие, φ — угол. В новых переменных система (1.1) примет вид

$$\begin{cases} \dot{r} = \frac{\partial X}{\partial \varphi} [\epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots] - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} [\epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots] \\ \dot{\varphi} = \omega(r) + \frac{\partial Y}{\partial r} [\epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2 + \dots] - \frac{\partial X}{\partial r} [\epsilon g_1 + \epsilon^2 g_2 + \dots] \end{cases}, \quad (2.2)$$

где $H = H(r)$ — функция Гамильтона невозмущённой системы, $\omega(r) = \frac{\partial H}{\partial r}$, а $f_k = f_k(r, \varphi)$ и $g_k = g_k(r, \varphi)$ — произвольные гладкие функции.

Как и в пункте 1, будем искать неавтономный интеграл системы (2.2) в виде прямого разложения по степеням параметра ϵ :

$$I = H + \epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2 + \dots \quad (2.3)$$

В переменных действие-угол уравнение (1.4) примет вид

$$\epsilon^k : \quad \frac{\partial I_k}{\partial t} + \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} \omega(r) = F_k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2.4)$$

где

$$F_k = -\omega(r) \left[\frac{\partial X}{\partial \varphi} g_k - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} f_k \right] - \sum_{n=1}^{k-1} \left(\frac{\partial I_n}{\partial r} \left[\frac{\partial X}{\partial \varphi} g_{k-n} - \frac{\partial Y}{\partial \varphi} f_{k-n} \right] - \frac{\partial I_n}{\partial \varphi} \left[\frac{\partial Y}{\partial r} f_{k-n} - \frac{\partial X}{\partial r} g_{k-n} \right] \right).$$

Решениями уравнений (2.4) являются коэффициенты разложения (2.3). Характеристическая система уравнений (2.4)

$$\frac{dt}{1} = \frac{dr}{0} = \frac{d\varphi}{\omega(r)} = \frac{dI_k}{F_k} \quad (2.5)$$

допускает три независимых интеграла:

$$r = r_0,$$

$$\varphi - \omega(r)t = \varphi_0,$$

$$I_k - \int F_k(r_0, \varphi_0 + \omega(r)t, t) dt = c_k,$$

где r_0, φ_0, c_k – константы. Тогда решения уравнений (2.4):

$$I_k = \Phi \left(r, \varphi - \omega(r)t, \int F_k(r_0, \varphi_0 + \omega(r)t, t) dt \right).$$

Обратите внимание, что решениями однородных уравнений

$$\epsilon^k : \quad \frac{\partial I_k}{\partial t} + \frac{\partial I_k}{\partial \varphi} \omega(r) = 0, \quad k = 1, 2, \dots,$$

являются произвольные гладкие функции $I_k = S_k(t\omega(r) - \varphi, r)$. Таким образом, переход к переменным действие-угол даёт эффективный метод для построения семейства неавтономных интегралов системы (1.1).

3. Критерий существования замкнутых орбит

Если система (1.1) допускает периодическое решение $x = x(t), y = y(t)$, то для любого t выполняется следующее соотношение:

$$I(x(t), y(t), t) = I(x(t+T), y(t+T), t+T) = I(x(t), y(t), t+T),$$

где I – неавтономный интеграл системы (1.1), а T – период решения.

Если решение $r(t), \varphi(t)$ системы (2.2) соответствует периодическому решению $x(t), y(t)$ системы (1.1), и при однократном обходе орбиты угол изменяется на 2π , то для любого t выполняется следующее соотношение:

$$I(r(t), \varphi(t), t) = I(r(t+T), \varphi(t+T), t+T) = I(r(t), \varphi(t) + 2\pi, t+T),$$

где I – неавтономный интеграл системы (2.2), а T – период решения.

Т е о р е м а 3.1. Пусть $I(x(t), y(t), t), J(x(t), y(t), t)$ – независимые неавтономные интегралы системы (2.2). Тогда если выполняется

$$\begin{cases} I(R, \varphi_0, 0) = I(R, \varphi_0 + 2\pi, T) \\ J(R, \varphi_0, 0) = J(R, \varphi_0 + 2\pi, T) \end{cases}, \quad (3.1)$$

то $r = R, \varphi = \varphi_0$ – начальные условия решения $r(t), \varphi(t)$ системы (2.2), которое соответствует периодическому решению $x(t), y(t)$ системы (1.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о. По теореме о неявной функции, система

$$\begin{cases} I(r(t), \varphi(t), t) = C_1 = const \\ J(r(t), \varphi(t), t) = C_2 = const \end{cases},$$

имеет единственное решение $r = r(t), \varphi = \varphi(t)$ в окрестности точки $(R, \varphi_0, 0)$.

Преобразование

$$\begin{cases} \varphi \mapsto \varphi + 2\pi \\ t \mapsto t + T \end{cases} \quad (3.2)$$

является симметрией для уравнений системы (2.2), так как они автономны и 2π -периодичны по φ . В силу равенств (3.1) преобразование (3.2) переводит траекторию решения $r(t)$, $\varphi(t)$, $r(0) = R$, $\varphi(0) = \varphi_0$ в себя. Тогда очевидно

$$\begin{cases} r(t) = r(t+T) \\ \varphi(t+T) = \varphi(t) + 2\pi \end{cases}, \quad (3.3)$$

а соответствующее решение $x(t)$, $y(t)$ системы (1.1) T -периодично.
Доказательство закончено.

Будем искать R и T в виде разложения по малому параметру ϵ :

$$R = R_0 + \epsilon R_1 + \epsilon^2 R_2 + \dots, \quad T = T_0 + \epsilon T_1 + \epsilon^2 T_2 + \dots. \quad (3.4)$$

Подставляем R и T из (3.4) в (3.1). Группируя (3.1) по степеням ϵ получаем системы для определения неизвестных коэффициентов разложений (3.4).

Заметим, что для определения разложений (3.4) до порядка ϵ^k включительно, необходимо знать разложения интегралов I и J до порядка ϵ^{k+1} включительно.

Кроме начальных условий замкнутого решения, теорема 3.1. позволяет также оценить количество замкнутых орбит. Покажем это на примере одного класса уравнений Льенара.

4. Некоторый класс уравнения Льенара

Рассмотрим уравнение [4]

$$\ddot{x} + \epsilon P(x)\dot{x} + x = 0, \quad (4.1)$$

где

$$P(x) = \sum_{n=0}^N a_n x^n,$$

a_n — коэффициенты полинома $P(x)$.

Найдём семейство неавтономных интегралов уравнения (4.1) в виде разложения (2.3) до порядка ϵ^2 включительно.

Перейдём от уравнения (4.1) к системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - \epsilon y P(x) \end{cases} \quad (4.2)$$

с функцией Гамильтона невозмущённой системы $H = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

Перейдём к переменным действие-угол, сделав замену

$$\begin{cases} x = \sqrt{2r} \sin(\varphi) \\ y = \sqrt{2r} \cos(\varphi) \end{cases}. \quad (4.3)$$

Получаем систему

$$\begin{cases} \dot{r} = -\epsilon 2r \cos^2(\varphi) P(\sqrt{2r} \sin(\varphi)) \\ \dot{\varphi} = 1 + \epsilon \sin(\varphi) \cos(\varphi) P(\sqrt{2r} \sin(\varphi)) \end{cases} \quad (4.4)$$

с функцией Гамильтона невозмущённой системы $H = r$.

Пользуясь формулами (2.4), (2.5) и удерживая только члены до порядка малости ϵ^2 включительно, получаем уравнения для определения первых двух неизвестных коэффициентов разложения (2.3):

$$\frac{\partial I_1}{\partial t} + \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} = 2r \cos^2(\varphi) P(\sqrt{2r} \sin(\varphi)),$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial t} + \frac{\partial I_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial I_1}{\partial r} 2r \cos^2(\varphi) P(\sqrt{2r} \sin(\varphi)) - \frac{\partial I_1}{\partial \varphi} \sin(\varphi) \cos(\varphi) P(\sqrt{2r} \sin(\varphi)).$$

Решая эти уравнения по порядку, получаем

$$I_1 = \sum_{n=0}^N a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q_1^{(n)}(\varphi) + S_1(t - \varphi, r),$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^N \left[a_n^2 (2r)^{n+1} \left((n+2) Q_2^{(n)}(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi) \cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right) + \right. \\ \left. + a_n (2r)^{\frac{n}{2}} \left(2r \frac{\partial S_1}{\partial r} Q_1^{(n)}(\varphi) - \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} \frac{\sin^{n+2}(\varphi)}{n+2} \right) \right] + S_2(t - \varphi, r),$$

где

$$Q_1^{(n)}(\varphi) = \int \cos^2(\varphi) \sin^n(\varphi) d\varphi,$$

$$Q_2^{(n)}(\varphi) = \int Q_1^{(n)}(\varphi) \cos^2(\varphi) \sin^n(\varphi) d\varphi.$$

Функции $Q_1^{(n)}(\varphi)$ и $Q_2^{(n)}(\varphi)$ представим в явном виде:

$$Q_1^{(n)}(\varphi) = \cos(\varphi) \sum_{m=0}^{n+1} b_m^{(n)} \sin^m(\varphi) + b^{(n)} \varphi,$$

$$Q_2^{(n)}(\varphi) = \sum_{m=0}^{n+1} \left[\xi_m^{(n)} \sin^{n+m+1}(\varphi) \cos^2(\varphi) + \psi_m^{(n)} \sin^{n+m+1}(\varphi) + \right. \\ \left. + d_m^{(n)} \sin^{m+1}(\varphi) + c_m^{(n)} \varphi \sin^m(\varphi) \cos(\varphi) \right] + c^{(n)} \varphi^2,$$

где коэффициенты определяются рекуррентными соотношениями

$$\xi_m^{(n)} = \frac{b_m^{(n)}}{n+m+3}; \quad \psi_m^{(n)} = \frac{2b_m^{(n)}}{(n+m+3)(n+m+1)};$$

$$b_{n+1}^{(n)} = \frac{1}{n+2}; \quad b_n^{(n)} = 0; \quad b_{n-1}^{(n)} = -\frac{1}{n} b_{n+1}^{(n)};$$

$$c_{n+1}^{(n)} = \frac{b^{(n)}}{n+2}; \quad c_n^{(n)} = 0; \quad c_{n-1}^{(n)} = -\frac{1}{n} c_{n+1}^{(n)};$$

$$d_{n+1}^{(n)} = -\frac{b^{(n)}}{(n+2)^2}; \quad d_n^{(n)} = 0; \quad d_{n-1}^{(n)} = -\frac{n+2}{n^2} d_{n+1}^{(n)};$$

$$\left. \begin{aligned} b_{m-1}^{(n)} &= \frac{m+1}{m} b_{m+1}^{(n)}, & b_m^{(n)} &= 0 \\ c_{m-1}^{(n)} &= \frac{m+1}{m} c_{m+1}^{(n)}, & c_m^{(n)} &= 0 \\ d_{m-1}^{(n)} &= \frac{(m+1)(m+2)}{m^2} d_{m+1}^{(n)}, & d_m^{(n)} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad m = n-2, n-4, \dots;$$

$$b^{(n)} = -\frac{1}{2} b_1^{(n)}; \quad c^{(n)} = -\frac{1}{4} c_1^{(n)}.$$

Заметим, что если n чётное, то $b_0^{(n)} = 0$, $c_0^{(n)} = 0$, $d_0^{(n)} = 0$, $\xi_0^{(n)} = 0$, $\psi_0^{(n)} = 0$, $b^{(n)} \neq 0$, $c^{(n)} \neq 0$, $b^{(n)} \neq 0$, $c^{(n)} \neq 0$, в другом случае $b_0^{(n)} \neq 0$, $c_0^{(n)} \neq 0$, $d_0^{(n)} \neq 0$, $\xi_0^{(n)} \neq 0$, $\psi_0^{(n)} \neq 0$, $b^{(n)} = 0$, $c^{(n)} = 0$, $d^{(n)} = 0$.

Теперь, когда мы определили семейство неавтономных интегралов уравнения (4.1) в виде разложения (2.3) до порядка ϵ^2 включительно, проверим, существуют ли у уравнения (4.1) периодические решения, и если существуют, то сколько их. Для этого определим два независимых интеграла I и J .

$$I = H + \epsilon I_1 + \epsilon^2 I_2 + \dots, \quad (4.5)$$

где

$$S_1 = S_2 = 0, \quad I_1 = \sum_{n=0}^N a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q_1^{(n)}(\varphi),$$

$$I_2 = \sum_{n=0}^N a_n^2 (2r)^{n+1} \left((n+2) Q_2^{(n)}(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi) \cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right).$$

$$J = H + \epsilon J_1 + \epsilon^2 J_2 + \dots, \quad (4.6)$$

где

$$S_1 = t - \varphi, \quad S_2 = 0, \quad J_1 = \sum_{n=0}^N a_n (2r)^{\frac{n+2}{2}} Q_1^{(n)}(\varphi) + t - \varphi,$$

$$J_2 = \sum_{n=0}^N \left[a_n^2 (2r)^{n+1} \left((n+2) Q_2^{(n)}(\varphi) + \frac{\sin^{2n+2}(\varphi) \cos^2(\varphi)}{2n+4} - \frac{\sin^{2n+2}(\varphi)}{(n+2)(2n+2)} \right) + \right.$$

$$\left. + a_n (2r)^{\frac{n}{2}} \frac{\sin^{n+2}(\varphi)}{n+2} \right].$$

Учитывая

$$Q_1^{(n)}(2\pi) - Q_1^{(n)}(0) = 2\pi b^{(n)}, \quad Q_2^{(n)}(2\pi) - Q_2^{(n)}(0) = 2\pi(2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}),$$

запишем систему (3.1) для уравнения (4.1):

$$\begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n (2R)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + \epsilon \sum_{n=0}^N a_n^2 (2R)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0 \\ \sum_{n=0}^N a_n (2R)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + T - 2\pi + \epsilon \sum_{n=0}^N a_n^2 (2R)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0 \end{cases}.$$

Подставим вместо R и T их разложения (3.4) и рассмотрим отдельно члены при различных степенях параметра ϵ .

$$\epsilon^0 : \begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} = 0 \\ \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n+2}{2}} b^{(n)} + T_0 - 2\pi = 0 \end{cases} . \quad (4.7)$$

$$\epsilon^1 : \begin{cases} \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2) R_1 b^{(n)} + \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0 \\ \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2) R_1 b^{(n)} + T_1 + \sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)}) = 0 \end{cases} . \quad (4.8)$$

Из системы (4.7) видно, что количество возможных корней R_0 первого уравнения принадлежит отрезку $\left[0; \left[\frac{N+2}{2}\right]\right]$. Так как один из этих возможных корней всегда нулевой, ко-

личество возможных предельных циклов уравнения (4.1) принадлежит отрезку $\left[0; \left[\frac{N}{2}\right]\right]$.

Если в полиноме $P(x)$ ненулевыми являются только коэффициенты при нечётных степенях x , то уравнение (4.1) имеет континуальное семейство периодических решений, а предельных циклов не существует. Решения систем (4.7) и (4.8):

$$\begin{cases} R_0 = R_0 \\ T_0 = 2\pi \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} R_1 = \frac{\sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{n+1} (n+2) (2\pi c^{(n)} + c_0^{(n)})}{\sum_{n=0}^N a_n (2R_0)^{\frac{n}{2}} (n+2) b^{(n)}} \\ T_1 = 0 \end{cases} .$$

Таким образом мы определили для уравнения (4.1) семейство неавтономных интегралов в виде разложения (2.3) до порядка ϵ^2 включительно, R и T в виде разложений (3.4) до порядка ϵ включительно и оценили количество предельных циклов.

Дата поступления 13.07.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Х. Найфэ, *Методы возмущений*, Мир, М., 1976, 456 с.
2. L. Bobisud, "On The Single First-Order Partial Differential Equation With A Small Parameter", *SIAM Review*, **8**, 1966, 479—493.
3. А. Пуанкаре, *Избранные труды в трёх томах*. Т. 1: *Новые методы небесной механики*, Наука, М., 1971, 772 с.

4. A. Lienard, “Etudes des oscillations entretenues”, *Revue generale de l'Electricite*, **23**, 1928, 901—912, 946—954.

Straightforward expansion of non-autonomous integrals for quasi-conservative systems with one degree of freedom

© N. V. Kovalev²

Abstract. Quasi-conservative stationary systems with one degree of freedom are considered. Straightforward expansion of non-autonomous integrals for quasi-conservative systems is studied and analyticity of such integrals by small parameter is discussed. Method for constructing a set of non-autonomous integrals for quasi-conservative systems in action-angle variables is proposed. Criterion of closed orbits' existence is obtained in terms of non-autonomous integrals. This criterion is used to estimate the number of limit cycles for one class of Lienard's equation.

Key Words: quasiconservative system, nonautonomous integral, periodic solutions, limit cycles, action-angle variables, small-parameter expansion

² Postgraduate student of the Differential Equations Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow; nick.kvlv@gmail.com

УДК 517.9

Графовый критерий топологической эквивалентности Ω -устойчивых потоков на поверхностях

© В.Е. Круглов¹, О.В. Починка²

Аннотация. Изучение динамики потока на поверхностях путем разбиения фазового пространства на ячейки с одинаковым предельным поведением траекторий внутри ячейки восходит к классическим работам А. А. Андропова, Л. С. Понтрягина, Е. А. Леонтович, А. Г. Майера. Типы ячеек (которых конечное число) и их примыкание друг к другу полностью определяют класс топологической эквивалентности потока с конечным числом особых траекторий. Если в каждой ячейке грубого потока без периодических орбит выбрать по одной траектории, то ячейки распадаются на, так называемые, треугольные области, которые имеют один единственный тип. Комбинаторное описание такого разбиения приводит к трехцветному графу А. А. Ошемкова и В. В. Шарко, вершины которого соответствуют треугольным областям, а ребра — связывающим их сепаратрисам. Ими доказано, что два таких потока топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их трехцветные графы изоморфны. В той же работе дана полная топологическая классификация потоков Морса-Смейла на языке атомов и молекул. В настоящей работе динамика Ω -устойчивых потоков на поверхностях дана с помощью особых ориентированных графов с использованием четырехцветных графов.

Ключевые слова: многоцветный граф, топологический инвариант, Ω -устойчивый поток

1. Введение

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях состоит в выделении на несущем многообразии областей с предсказуемым поведением траекторий — *ячеек*. Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А. А. Андропова и Л. С. Понтрягина [1] 1937 года, в которой они рассмотрели систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x), \quad (*)$$

где $v(x)$ — C^1 -векторное поле, заданное в круге на плоскости, граница которого является кривой без контакта, и нашли критерий грубости системы (*).

В работах Е. А. Леонтович-Андроповой и А. Г. Майера [5], [6] рассматривался более общий класс динамических систем, и их классификация также была основана на идеях о выделении множества специальных траекторий, относительное положение которых (схема Леонтович-Майера) полностью определяет качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории. Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения — незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была доказана А. Г. Майером [7] в 1939 году. В 1971 в работе [10] М. Пейшото обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков, опять-таки изучив все допустимые ячейки для них и введя комбинаторный инвариант — *ориентированный граф*, обобщающий схему Леонтович-Майера. В 1976 году Д. Нейманом и Т. О'Брайеном [8] на произвольных поверхностях были рассмотрены так называемые *регулярные потоки* — потоки

¹ Студент ННГУ им. Н. И. Лобачевского; kruglovslava21@mail.ru

² Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ-НН; olga-pochinka@yandex.ru

без нетривиальных периодических траекторий, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков — *орбитальный комплекс*, который представляет из себя пространство орбит потока, оснащенное некоторой дополнительной информацией. В 1998 году А. А. Ошемков и В. В. Шарко [9] ввели новый инвариант для потоков Морса на поверхностях — *трехцветный граф*, и описали алгоритм распознавания изоморфности таких графов, который, однако, не является *эффективным*, то есть время его работы не ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. В той же работе они получили полную топологическую классификацию потоков Морса-Смейла на поверхностях в терминах атомов и молекул, введенных в работе А. Т. Фоменко [2].

В настоящей работе рассматривается класс G , состоящий из Ω -устойчивых потоков ϕ^t на поверхностях S . Каждому потоку из класса G ставится в соответствие ориентированный граф с вершинами четырех цветов, соответствующих областям, на которые поверхность S делится граничными окружностями окрестностей предельных циклов; каждое ребро графа соответствует общей границе этих областей и ориентировано в соответствии с положительным направлением движения по траекториям, пересекающим эту границу. Вершинам, соответствующим областям без особых траекторий, присвоен *вес*, характеризующий поведение траекторий в этих областях; для описания областей, содержащих седловые точки, соответствующие этим областям вершины оснащаются *четырёхцветным графом*. Устанавливается, что изоморфность оснащенных графов является критерием топологической эквивалентности Ω -устойчивых потоков.

2. Ориентированный граф Ω -устойчивого потока

Из критерия Ω -устойчивости [11] следует, что потоки класса G имеют неблуждающее множество, состоящее из конечного числа гиперболических неподвижных точек и замкнутых траекторий и не имеют *циклов*, то есть наборов неподвижных точек

$$x_1, \dots, x_k, x_{k+1} = x_1$$

со свойством

$$W_{x_i}^s \cap W_{x_{i+1}}^u \neq \emptyset, i = 1, \dots, k.$$

При этом в классе G системы могут быть как структурно устойчивыми, так и нет, а определяется это отсутствием или наличием *связок* — сепаратрис, идущих из седла в седло. Условие Ω -устойчивости влечет тот факт, что связки потока из класса G не образуют замкнутых кривых.

Если поток $\phi^t \in G$ не имеет ни седловых неподвижных точек, ни предельных циклов, то он имеет в точности две неподвижные точки: источник и сток, все такие потоки топологически эквивалентны. Поэтому везде далее мы будем предполагать, что поток $\phi^t \in G$ имеет либо хотя бы одну седловую точку, либо хотя бы один предельный цикл.

Согласно [1], любой предельный цикл потока $\phi^t \in G$ имеет окрестность, гомеоморфную кольцу либо плёнке Мёбиуса, с границей, трансверсальной траекториям потока ϕ^t , не содержащей других циклов и неподвижных точек. Выберем вокруг каждого предельного цикла потока ϕ^t такую окрестность. Будем обозначать элементы множества граничных окружностей этих окрестностей как $R_i, i = \overline{1, l}$. Набор всех R_i для данного ϕ^t назовём *разрезающим набором*, а его элементы — *разрезающими окружностями*.

Положим $\hat{S} = S \setminus \bigcup_{i=1}^l R_i$. Компоненту связности множества $\hat{S}$ назовём *элементарной областью*. Элементарные области очевидно могут быть четырех типов:

- 1) Область типа $\mathcal{S}$, содержащая единственный предельный цикл и не содержащая неподвижных точек;
- 2) Область типа $\mathcal{A}$, содержащая единственный источник или единственный сток и не содержащая предельных циклов и других неподвижных точек;
- 3) Область типа $\mathcal{M}$, содержащая хотя бы одну седловую неподвижную точку и не содержащая предельных циклов.
- 4) Область типа $\mathcal{E}$, не содержащая особых траекторий.

О п р е д е л е н и е 2.1. Ориентированный граф Υ_{ϕ^t} назовем графом потока $\phi^t \in G$, если

- (1) вершины графа взаимно однозначно соответствуют элементарным областям и, соответственно, раскрашены в один из четырёх цветов $\mathcal{S}$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{E}$ или $\mathcal{M}$;
- (2) ребра графа взаимно однозначно соответствуют разрезающим окружностям, и каждое ребро соединяет те вершины, которым соответствуют области, имеющие общей соответствующую этому ребру разрезающую окружность; ориентация на ребре соответствует положительному направлению движения траекторий, пересекающих окружность.

При этом из структуры потока ϕ^t и структуры разрезающего набора следует, что

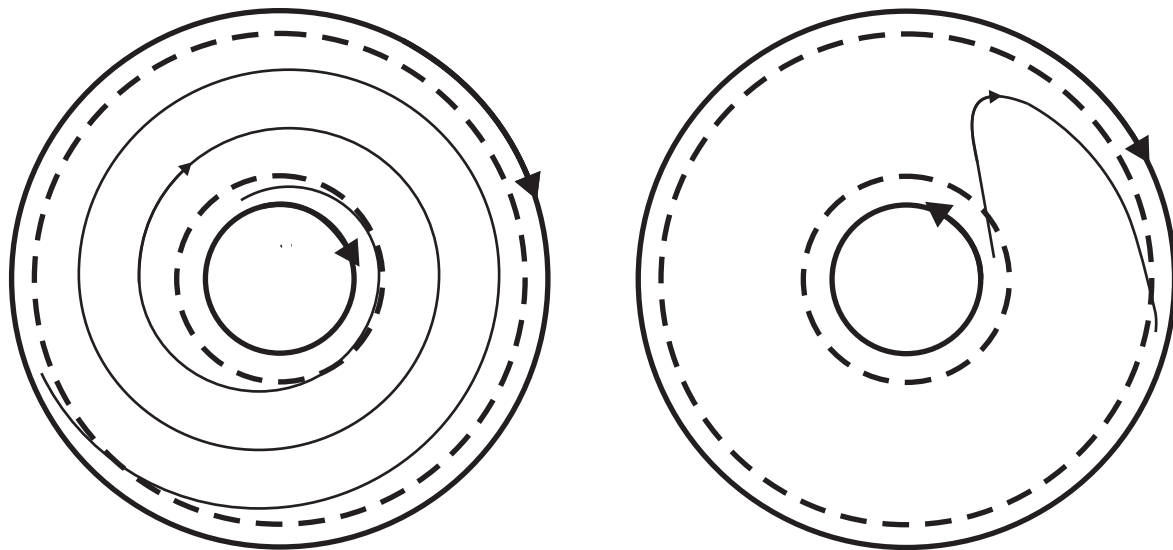
- 1) $\mathcal{M}$ -вершина может быть соединена только с $\mathcal{S}$ -вершинами, причём единственным ребром с каждой из этих вершин;
- 2) $\mathcal{E}$ -вершина может быть инцидентна только двум рёбрам, которые соединяют её с двумя различными $\mathcal{S}$ -вершинами, причём одно из этих рёбер входит в $\mathcal{E}$ -вершину, другое выходит;
- 3) $\mathcal{A}$ -вершина может быть соединена только с $\mathcal{S}$ -вершиной, причём единственным ребром;
- 4) $\mathcal{S}$ -вершина имеет степень либо 1, либо 2, причём если её степень 2, то оба ребра либо входят в вершину, либо выходят из неё.

Разумеется, изоморфности ориентированных графов недостаточно в общем случае для эквивалентности рассматриваемых потоков. Однако, оснатив ориентированный граф Υ_{ϕ^t} дополнительной информацией, мы получим оснащенный граф $\Upsilon_{\phi^t}^*$, класс изоморфности которого уже есть полный топологический инвариант для Ω -устойчивых потоков.

3. Оснащение ориентированного графа

Потоки в областях, соответствующих вершине типа $\mathcal{A}$, бывают из двух классов эквивалентности (бассейн стока или бассейн источника), и на графе это видно по направлению ребра, которому инцидентна эта вершина. Потоки в областях, соответствующих вершине типа $\mathcal{S}$, бывают из четырёх классов эквивалентности (кольцо с устойчивым предельным циклом, кольцо с неустойчивым, плёнка Мёбиуса с устойчивым, плёнка Мёбиуса с неустойчивым предельным циклом), на графе это видно по направлениям рёбер и количеству рёбер, которым инцидентна эта вершина. Потоки в областях, соответствующих вершине типа $\mathcal{E}$, бывают из двух классов эквивалентности, соответствующих согласованной и несогласованной ориентации предельных для траекторий $\mathcal{E}$ -области циклов (см. рисунок 3.1). Однако структура $\mathcal{E}$ -области не определяется ориентированным графом, поэтому соответствующей ей вершине мы будем приписать вес «+» в согласованном случае и вес «-» — в не согласованном. Потоки же в $\mathcal{M}$ -областях могут быть из счётного числа классов, и это не определяется ориентированным графом, поэтому для описания

топологической структуры потока в этих областях мы будем оснащать соответствующую им вершину *четырёхцветным графом*.



Р и с у н о к 3.1

Случаи согласованной (слева) и не согласованной (справа) ориентации циклов, предельных для траекторий некоторой $\mathcal{E}$ -области. Жирным нарисованы предельные циклы, пунктиром – разрезающие окружности

Более детально.

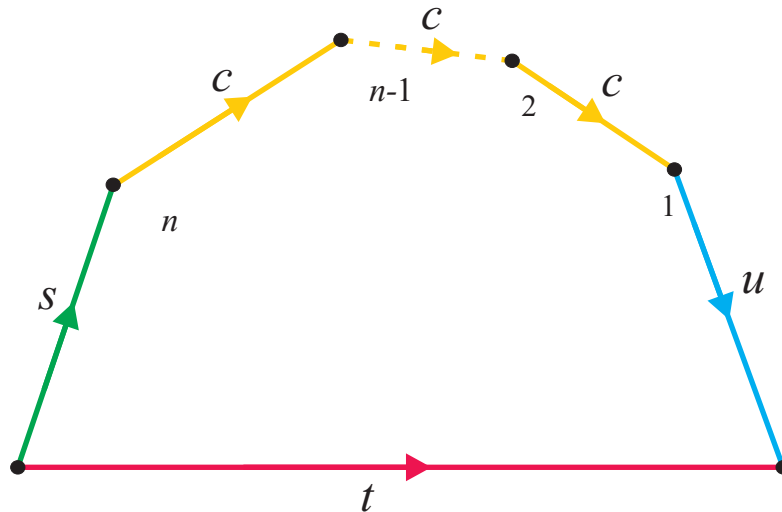
Рассмотрим некоторую $\mathcal{M}$ -область; это либо многообразие с краем, либо вся поверхность S . Продолжим поток $\varphi^t|_{\mathcal{M}}$ до Ω -устойчивого потока $f^t|_M$, где M – замкнутая поверхность такая, что $M \setminus \mathcal{M}$ состоит из конечного числа дисков, на каждом из которых f^t имеет в точности одну неблуждающую точку – сток или источник.

Обозначим через $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$ множество всех стоков, сёдел, источников потока f^t соответственно. По определению области $\mathcal{M}$ поток f^t имеет хотя бы одну седловую точку. Положим

$$\tilde{M} = M \setminus (\Omega_{f^t}^0 \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^s \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^u \cup \Omega_{f^t}^2).$$

Компонента связности множества $\tilde{M}$ называется *ячейкой*. Согласно работе [4], в границу каждой ячейки J входит единственный источник α и единственный сток ω , а вся ячейка является объединением траекторий, идущих из α в ω . Выберем одну траекторию θ_J в каждой ячейке J и будем называть её *t-кривой*. Положим

$$\mathcal{T} = \bigcup_{J \in \tilde{S}} \theta_J, \quad \bar{M} = \tilde{M} \setminus \mathcal{T}.$$

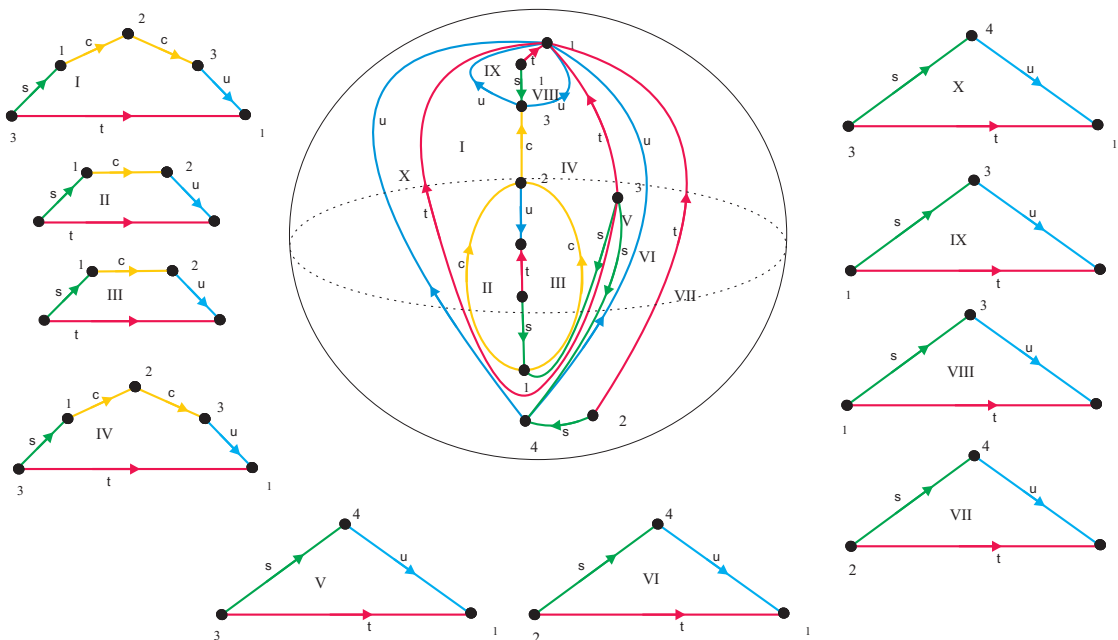


Р и с у н о к 3.2

Многоугольная область

Будем называть s -кривыми сепаратрисы, соединяющие сёдла (связки), u -кривыми – неустойчивые седловые сепаратрисы, имеющие в замыкании сток, s -кривыми – устойчивые седловые сепаратрисы, имеющие в замыкании источник. Будем закрашивать на рисунках t -кривые красным цветом, c -кривые – жёлтым цветом, u -кривые – синим цветом, а s -кривые – зелёным. Из работы [4] следует, что любая компонента связности Δ множества M (мы называем её *многоугольной областью*) гомеоморфна открытому диску и её граница состоит из одной t -кривой, одной u -кривой, одной s -кривой и конечного (возможно пустого) множества c -кривых (см. Рис. 3.2).

На рисунке 3.3 изображён поток f^t для некоторого $\phi^t \in G$ и все его многоугольные области.



Р и с у н о к 3.3

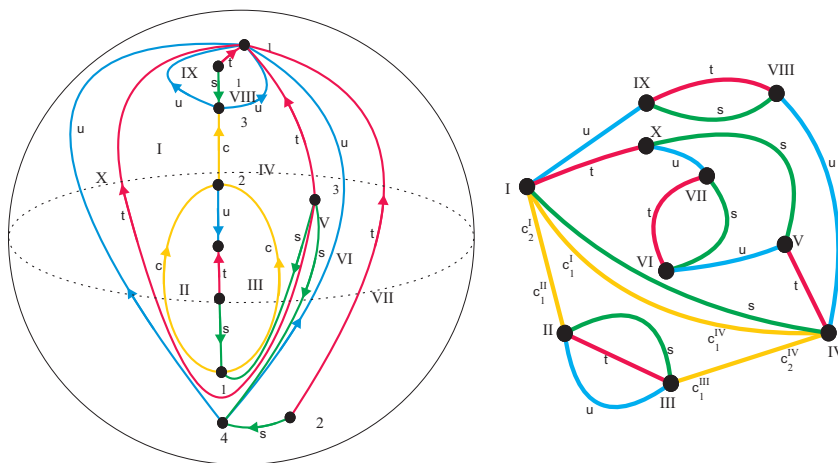
Пример потока f^t для некоторого $\phi^t \in G$ (сверху в центре) и его многоугольные области

Обозначим через Δ_{f^t} множество всех многоугольных областей потока f^t . Поставим в соответствие потоку f^t граф $\Gamma_{\mathcal{M}}$ следующим образом (см. для примера рисунок 3.4):

1) вершины графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$ взаимно однозначно соответствуют многоугольным областям множества Δ_{f^t} ;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s , t , u или c , если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую s -, t -, u - или c -кривую, что устанавливает взаимно однозначное соответствие между ребрами графа и s -, t -, u - и c -кривыми;

3) при наличии более чем одного c -ребра, выходящего из некоторой вершины графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$, c -рёбра считаются упорядоченными согласно порядку появления c -кривых при обходе границы соответствующей области.



Р и с у н о к 3.4

Пример потока f^t для некоторого $\phi^t \in G$ и его четырёхцветный граф

Назовём st -циклом (tu -циклом) цикл графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$, состоящий только из рёбер цветов s и t (t и u).

Два четырёхцветных графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$ и $\Gamma_{\mathcal{M}'}$, соответствующие $\phi^t|_{\mathcal{M}}$ и $\phi^{t'}|_{\mathcal{M}'}$ соответственно, назовём *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение ψ вершин и рёбер одного графа соответственно в вершины и рёбра другого графа с сохранением цветности всех рёбер и нумерации c -рёбер.

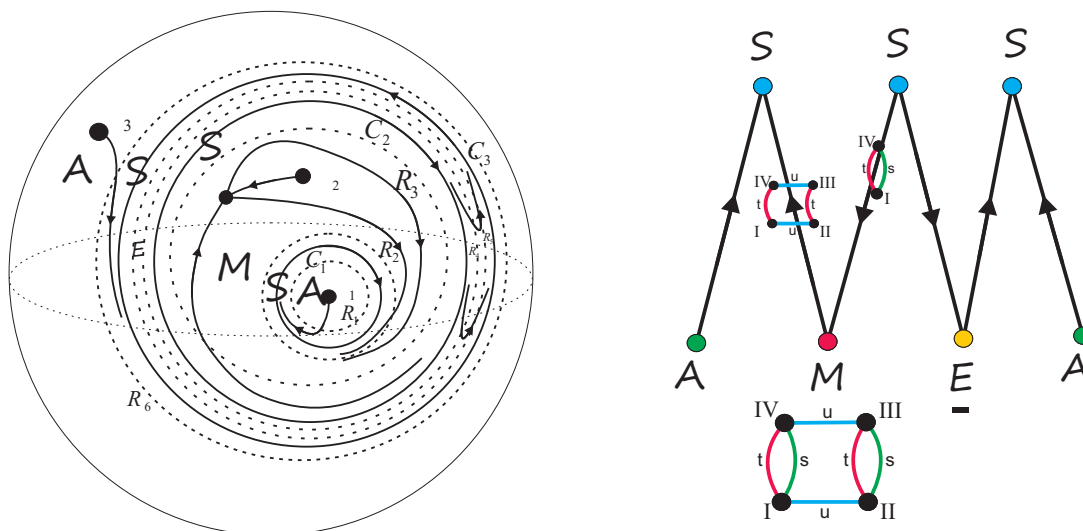
Справедлива следующая теорема, непосредственно следующая из [3].

Т е о р е м а 3.1. Графы $\Gamma_{\mathcal{M}}$ и $\Gamma_{\mathcal{M}'}$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\phi^t|_{\mathcal{M}}$ и $\phi^{t'}|_{\mathcal{M}'}$ топологически эквивалентны.

4. Формулировка результатов

О п р е д е л е н и е 4.1. Оснащённым графом $\Upsilon_{\phi^t}^*$ потока $\phi^t \in G$ называется его ориентированный граф Υ_{ϕ^t} , дополненный следующими данными:

- (1) каждой $\mathcal{E}$ -вершине приписан вес «+» или «-»;
- (2) каждой $\mathcal{M}$ -вершине приписан четырёхцветный граф $\Gamma_{\mathcal{M}}$;
- (3) каждому ребру $(\mathcal{M}, \mathcal{S})$ ($(\mathcal{S}, \mathcal{M})$) приписан tu -цикл (st -цикл) $P_{\mathcal{M}, \mathcal{S}}$ графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$, рёбра которого соответствуют цветным кривым потока f^t , пересекающим граничную окружность окрестности устойчивого (неустойчивого) предельного цикла (см. рисунок 4.1).



Р и с у н о к 4.1

Поток ϕ^t и граф $\Upsilon_{\phi^t}^*$. Через $\alpha_i, i = \overline{1,3}$ обозначены источники, через σ – седло, через $C_i, i = \overline{1,3}$ – предельные циклы, через $R_i, i = \overline{1,6}$ и пунктиром – граничные окружности элементарных областей

О п р е д е л е н и е 4.2. Два графа $\Upsilon_{\phi^t}^*$ и $\Upsilon_{\phi^{t'}}^*$ назовём изоморфными, если существует взаимно однозначное соответствие ξ ребер и вершин графа $\Upsilon_{\phi^t}^*$ ребрам и вершинам графа $\Upsilon_{\phi^{t'}}^*$ такое, что:

- 1) ξ сохраняет цветность вершин, направление рёбер и веса $\mathcal{E}$ -вершин;
- 2) для вершин M и $\xi(M)$ существует изоморфизм ψ графов $\Gamma_M, \Gamma_{\xi(M)}$ такой, что $\psi(P_{M,S}) = P_{\xi(M),\xi(S)}$.

Т е о р е м а 4.1. Потoki ϕ^t и $\phi^{t'}$ из класса G топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их оснащенные графы $\Upsilon_{\phi^t}^*$ и $\Upsilon_{\phi^{t'}}^*$ изоморфны.

Благодарности: Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект № 98 «Топологические методы в динамике») и Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-03689-а, 16-51-10005-Ко_а).

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., “Грубые системы”, *Доклады Академии наук СССР*, **14:5** (1937), 247-250.
2. Болсинов А. В., Матвеев С. В., Фоменко А. Т., “Топологическая классификация интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Список систем малой сложности”, *УМН*, **45:2**(272) (1990), 49-77.
3. Круглов В. Е., Малышев Д. С., Починка О. В., “Графовый критерий топологической эквивалентности Ω -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях и эффективный алгоритм для его применения”, *Журнал СВМО*, **18:2** (2016), 47-58.

4. Круглов В. Е., Митрякова Т. М., Починка О. В., “О типах ячеек Омега-устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях”, *Динамические системы*, **5(33)**:1-2 (2015), 43-49.
5. Леонтович Е. А., Майер А. Г., “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР*, **14**:5 (1937), 251-257.
6. Леонтович Е. А., Майер А. Г., “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557-560.
7. Майер А. Г., “Грубые преобразования окружности”, *Уч. Зап. ГГУ. Горький, публикации. ГГУ*, **12** (1939), 215-229.
8. Neumann D., O'Brien T., “Global structure of continuous flows on 2-manifolds”, *J. Diff. Eq.*, **22**:1 (1976), 89-110.
9. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93-140.
10. Peixoto M., *On the classification of flows on two manifolds*, Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ. of Bahia, Salvador, Brasil, 1971.
11. Pugh C., Shub M., “ Ω -stability for flows”, *Inven. Math.*, **11** (1970), 150-158.

Graph topological equivalence criterion for Ω -stable flows on surfaces

© V. E. Kruglov³, O. V. Pochinka⁴

Abstract. Study of flow dynamics on surfaces by dividing a phase space into cells with the same limit behavior of trajectories within the cell goes back to the classical works of A. A. Andronov, L. S. Pontryagin, E. A. Leontovich and A. G. Mayer. Types of cells (which are finite in number) and their adjacency to each other fully determine the class of topological equivalence of a flow with finite number of singular trajectories. If we select one trajectory in each cell of the rough stream without periodic orbits, the cells break up into so-called triangular regions which have the same single type. Combinatorial description of such a partition leads to three-colored graph of A. A. Oshemkov and V. V. Sharko; the vertices of that graph correspond to the triangular areas and edges correspond to separatrices that link them. These scientists demonstrated that two such flows are topologically equivalent if and only if their three-colored graphs are isomorphic. In the same paper they gave full topological classification of the Morse-Smale flows in terms of atoms and molecules. In present paper the dynamics of Ω -stable flows on surfaces is described with help of special oriented graphs and four-colored graphs.

Key Words: multicolored graph, topological invariant, Ω -stable flow

³ Student of Lobachevsky State University, Nizhni Novgorod; kruglovlava21@mail.ru

⁴ Professor of Department of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru

УДК 531.01

О дестабилизации положения равновесия, вызванной линейными и квадратичными силами вязкого трения

© А. Ю. Майоров¹

Аннотация. Рассматриваются голономные системы с двумя степенями свободы под действием потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил. Построена и усреднена нормальная форма уравнений движения, если частоты малых линейных колебаний не находятся в резонансе. В частном случае, когда квадратичные силы трения действуют независимо вдоль осей главных координат, усредненная система исследована полностью. Найден единственный стационарный режим усредненных уравнений, исследована его устойчивость.

Сделан вывод о существовании предельного инвариантного тора неконсервативной системы при устойчивом стационарном режиме усреднённой системы. Получены достаточные условия слабой неустойчивости дестабилизированного положения равновесия.

Ключевые слова: эффект Циглера, неконсервативная позиционная сила, линейные диссипативные силы, квадратичные диссипативные силы, функция Рэлея, метод нормализации Хори-Кэмила, инвариантный тор

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте (национальном исследовательском университете)

1. Введение

Задача исследования движения механических систем, в частности, твердых тел, в сопротивляющейся среде давно заинтересовала специалистов. С развитием авиации вопрос о влиянии сил сопротивления на движение тел в среде стал особенно актуальным. Первые работы в этой области принадлежат Ньютону, Стоксу, Циолковскому, Жуковскому и другим классикам.

Современная постановка задачи о движении тел в среде предполагает учет динамики самой среды, т.е. рассмотрение уравнений Навье-Стокса. Однако данный подход сопряжен с большими теоретическими и вычислительными сложностями. Поэтому большинство авторов рассматривают упрощенную постановку, например, учитывают только эффект присоединенных масс и вязкое сопротивление [1, 2]. В работах [3, 4, 5] разработаны и исследованы более сложные задачи.

В настоящей работе рассматриваются неконсервативные механические системы с двумя степенями свободы. Исследуется влияние потенциальных, неконсервативных позиционных, линейных и квадратичных диссипативных сил на устойчивость положения равновесия. Предполагается, что диссипативные силы задаются функцией Рэлея.

2. Постановка задачи

Рассмотрим голономные склерономные механические системы, подверженные действию потенциальных, неконсервативных позиционных и диссипативных сил, линейных и

¹ Аспирант кафедры дифференциальных уравнений, Московский Авиационный институт (Национальный исследовательский университет), г. Москва; ylam123@gmail.com

квадратичных по обобщённым скоростям. Уравнения Лагранжа второго рода, описывающие движения таких систем, имеют вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\nabla \Pi - \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \dot{q}} + Q_i \quad (2.1)$$

Здесь $q = (q_1, q_2)^T$ – вектор обобщённых координат, $T = \frac{1}{2}(A(q)\dot{q}, \dot{q})$ – кинетическая энергия системы, $A(q) = (a_{ij}(q))_{i,j=1}^2$ – матрица кинетической энергии, $\Pi = \Pi(q)$ – потенциальная энергия консервативных сил, $Q = (Q_1, Q_2)^T$, $Q_j = Q_j(q)$ ($j = 1, 2$) – вектор неконсервативных позиционных обобщённых сил, Φ, Ψ – диссипативные функции Рэлея, квадратичные и кубические по обобщённым скоростям соответственно. Выражения для диссипативных функций имеют вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\epsilon}{2}(\bar{B}\dot{q}, \dot{q}), \\ \Psi &= \frac{\delta}{3}F(|\dot{q}|) = \frac{\delta}{3}(d_{30}|\dot{q}_1|^3 + d_{21}|\dot{q}_1|^2|\dot{q}_2| + d_{12}|\dot{q}_1||\dot{q}_2|^2 + d_{03}|\dot{q}_2|^3), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где ϵ, δ – положительные малые параметры, $\bar{B}$ – симметрическая положительно определенная матрица, d_{ij} , ($i+j=3$) – положительные параметры. Будем считать, что малые параметры ϵ и δ связаны степенным соотношением $\delta = \epsilon^\beta$ для некоторого $\beta > 0$. Предполагается, что система (2.1) имеет изолированное положение равновесия $q = 0, \dot{q} = 0$.

При определённых условиях линейные диссипативные силы, сколь угодно малые по величине, могут дестабилизировать положение равновесия, устойчивое в их отсутствие. В ряде работ данный феномен, впервые обнаруженный в [6], называется эффектом Циглера [8-11]. Цель настоящей статьи – изучение движений системы в окрестности дестабилизированного положения равновесия в условиях эффекта Циглера и при наличии квадратичных диссипативных сил.

Уравнения (2.1) можно записать в явном виде следующим образом [12]:

$$\ddot{q}_j + (\Gamma^{(j)}\dot{q}, \dot{q}) = \left(\alpha_j, -\nabla \Pi + Q_j - \epsilon \bar{B}\dot{q} - \frac{\delta}{3}D_{(j)}(|\dot{q}|) \right), \quad j = 1, 2. \quad (2.3)$$

Здесь $\alpha^{(j)}$ – j -й столбец матрицы $A(q)^{-1}$ ($j = 1, 2$), $\Gamma^{(j)}$ – симметрическая матрица, элементы которой суть символы Кристоффеля второго рода матрицы $A(q)$:

$$\Gamma_{kl}^{(j)} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^2 \alpha_{sj} \left(\frac{\partial a_{ks}}{\partial q_l} + \frac{\partial a_{sl}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{lk}}{\partial q_s} \right).$$

Выражения для однородных функций второй степени $D_{(1)}$ и $D_{(2)}$ имеют вид:

$$\begin{aligned} D_{(1)} &= \frac{\partial \Psi_1}{\partial \dot{q}_1} = 3d_{30}\dot{q}_1|\dot{q}_1| + 2d_{21}\dot{q}_1|\dot{q}_2| + d_{12}|\dot{q}_2|^2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_1), \\ D_{(2)} &= \frac{\partial \Psi_2}{\partial \dot{q}_2} = 3d_{03}\dot{q}_2|\dot{q}_2| + 2d_{12}\dot{q}_2|\dot{q}_1| + d_{21}|\dot{q}_1|^2 \operatorname{sgn}(\dot{q}_2). \end{aligned}$$

Разложим матрицу кинетической энергии и позиционные силы по степеням координат:

$$A(q) = \bar{A} + A^{(1)}q_1 + A^{(2)}q_2 + \bar{o}(|q|), \quad -\nabla \Pi + Q(q) = \bar{C}q + Q^{(2)}(q) + \bar{o}(|q|^2) \quad (2.4)$$

Вектор $Q^{(2)}(q)$ состоит из квадратичных по координатам форм. Умножением на матрицу $\bar{A}$ уравнения (2.3) преобразуется к виду

$$\bar{A}\ddot{q} + \epsilon\bar{B}\dot{q} + \bar{C}q + \bar{F}^{(2)}(q, \dot{q}) + \epsilon\bar{G}^{(2)}(q, \dot{q}) + \frac{\delta}{3}D^{(2)} + \dots = 0 \quad (2.5)$$

$D^{(2)} = (D_1, D_2)^T$, выражение для $F^{(2)}$ и $G^{(2)}$ имеют вид

$$\bar{F}^{(2)} = -Q^{(2)} + (A^{(1)}q_1 + A^{(2)}q_2)\bar{A}^{-1}\bar{C}q + \tilde{F}^{(2)}$$

$$G^{(2)} = -(A^{(1)}q_1 + A^{(2)}q_2)\bar{A}^{-1}\bar{B}\dot{q},$$

где вектор $\tilde{F}^{(2)}$ состоит из некоторых квадратичных форм по обобщенным скоростям, выражения для которых опускаем.

3. Исследование системы с одной степенью свободы

В данном параграфе исследуется движение системы (2.1) для одной степени свободы, чтобы апробировать методы решения задачи, представленные в статье. Имеем уравнение движения

$$\ddot{Q} + \Omega^2 Q + B\dot{Q} + A\dot{Q}|\dot{Q}| = 0. \quad (3.1)$$

Обезразмерим уравнение (3.1) и введем малый параметр ϵ за счет относительной малости параметров A и B . $Q = q \cdot Q_*$, $T = t \cdot T_*$, $\Omega = \sigma \cdot \Omega_*$, $A = \epsilon \cdot a \cdot A_*$, $B = \epsilon \cdot b \cdot B_*$, где $T_* = \Omega_*^{-1}$, $B_* = T_*^{-1}$, $A_* = Q_*^{-1}$.

Обезразмеренное уравнение движения имеет вид

$$\ddot{q} + \sigma^2 q + \epsilon\dot{q}(b + a|\dot{q}|) = 0. \quad (3.2)$$

Будем исследовать уравнение (3.2) с помощью метода усреднения [13, 14]. Заметим, что результаты исследования похожих механических систем методом усреднения хорошо известны и подробно описаны, например, в [15]. Поэтому далее укажем только основные выводы и результаты применения метода усреднения к исследуемой системе.

С помощью замены переменных $q = \rho \cos(\varphi)$, $q_1 = \dot{q} = -\rho \sin(\varphi)$ уравнение движения преобразуется к стандартному по Боголюбову виду. Усредненные уравнения имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \epsilon R(\rho) \\ \dot{\varphi} = 1 - \epsilon \Phi(\rho). \end{cases} \quad (3.3)$$

Выражения для $R(\rho)$ и $\Phi(\rho)$ опускаем.

Найдем корни первого уравнения системы (3.3): $\rho_1^* = 0, \rho_2^* = -\frac{3b\pi}{8a\sigma}$.

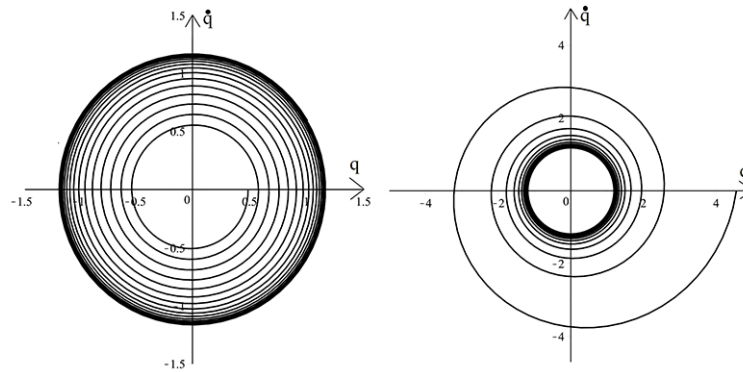
Линеаризованные уравнения движения в окрестности $\rho = \rho_2^*$ имеют вид

$$\dot{u} = \epsilon \frac{1}{2\sigma} b u. \quad (3.4)$$

Анализируя уравнение (3.4), заключаем, что стационарный режим ρ_2^* асимптотически устойчив при $b < 0$ и неустойчив при $b > 0$. Таким образом, когда на систему действуют линейные и квадратичные силы трения, тривиальное положение равновесия асимптотически устойчиво и глобально притягивает. Если же в системе действуют линейные

ускоряющие и квадратичные силы трения, то положение равновесия неустойчиво. Примеры механических систем с одной степенью свободы, подверженных действию ускоряющих сил, малоизвестны.

Рассмотрим фазовые кривые усредненных уравнений (3.4) на плоскости переменных $q, \dot{q}$. В случае, когда стационарный режим $\rho^* = \rho_2^*$ асимптотически устойчив ($b < 0$), существует орбитально устойчивый предельный цикл, притягивающий все траектории фазовой плоскости, кроме положения равновесия (рис. 3.1).



Р и с у н о к 3.1

Предельный цикл и траектории, которые притягиваются к нему

Итак, совместное действие линейных ускоряющих сил и квадратичных сил трения дестабилизирует положение равновесия и порождает автоколебательный режим.

4. Нормализация уравнений движения

Сделаем масштабирующую замену в системе (2.5) по формулам

$$q = \epsilon^\alpha q', \quad \dot{q} = \epsilon^\alpha \dot{q}', \quad \text{где } \alpha > 0.$$

Предположим, что параметры линейных и квадратичных сил вязкого трения связаны между собой степенным отношением $\delta = \epsilon^\beta$. В этом случае система (2.5) преобразуется в квазилинейную систему вида

$$\bar{A}\ddot{q}' + \epsilon\bar{B}\dot{q}' + \bar{C}q' + \epsilon^\alpha\bar{F}^{(2)} + \epsilon^{\alpha+1}\bar{G}^{(2)} + \epsilon^{\alpha+\beta}\frac{1}{3}D^{(2)} + \dots = 0. \quad (4.1)$$

Положим $\beta = 1 - \alpha$ и $\alpha = \frac{1}{2}$. Отбрасывая в уравнении (4.1) все члены порядка ϵ и выше, получим систему вида

$$\bar{A}\ddot{q}' + \epsilon\bar{B}\dot{q}' + \bar{C}q' + \epsilon^{\frac{1}{2}}\bar{F}^{(2)} + \frac{\epsilon}{3}D^{(2)} + \dots = 0. \quad (4.2)$$

Порождающая система

$$\bar{A}\ddot{q}' + \bar{C}q' = 0$$

обратима, поэтому устойчивость тривиального положения равновесия возможна только в критическом случае, когда характеристическое уравнение имеет чисто мнимые корни.

Пусть уравнение частот

$$\det(-\omega^2\bar{A} + \bar{C}) = 0$$

имеет положительные простые корни ω_1, ω_2 , которые не находятся в резонансе. Приведем систему (4.2) к главным координатам с помощью неособенного линейного преобразования $q' = Sx$, где $S = \{s_{ij}\}_{i,j=1}^2$. Отбросим члены порядка выше ϵ и перейдем к укороченной системе

$$\ddot{x} + \Omega^2 x + \epsilon B \dot{x} + \epsilon^{\frac{1}{2}} F^{(2)} + \frac{\epsilon}{3} D^{(2)} = 0, \quad \Omega^2 = \text{diag}\{\omega_1^2, \omega_1^2\}, \quad B = S^{-1} \bar{B} S. \quad (4.3)$$

Функция $F^{(2)}$ имеет структуру аналогичную $\bar{F}$:

$$F^{(2)} = (F_1, F_2)^T, \quad F = (P^{(j)}x, x) + (R^{(j)}\dot{x}, \dot{x}), \quad j = 1, 2.$$

а симметричные матрицы $\tilde{R}^{(j)}$ имеют вид

$$\tilde{R}^{(1)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{11}^{(2)} \\ a_{11}^{(2)} & 2a_{12}^{(1)} - a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}, \quad \tilde{R}^{(2)} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2a_{12}^{(1)} - a_{11}^{(2)} & a_{22}^{(1)} \\ a_{22}^{(1)} & a_{22}^{(2)} \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

Кратко изложим метод Хори-Кэмила (более подробно он описан в [16] или в оригинальной статье Кэмила [17]). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = f_k(x, t; \epsilon), \quad k = 1, \dots, n, \quad x = (x_1, \dots, x_n)^T. \quad (4.5)$$

Функции f_k содержат малый параметр ϵ и представляются в виде:

$$f_k(x, t; \epsilon) = f_{k,0}(x, t) + \epsilon f_{k,1}(x, t) + \frac{\epsilon^2}{2!} f_{k,2}(x, t) + \dots \quad (4.6)$$

Ищем замену переменных $x \mapsto y$, представляемую в виде рядов

$$x_k = y_k + \epsilon y_k^{(1)}(y, t) + \frac{\epsilon^2}{2!} y_k^{(2)}(y, t) + \dots \quad (4.7)$$

В результате такой замены система (4.3) преобразуется в систему

$$\frac{dy_k}{dt} = g_k(y, t; \epsilon) = g_{k,0}(y, t) + \epsilon g_{k,1}(y, t) + \frac{\epsilon^2}{2!} g_{k,2}(y, t) + \dots \quad (4.8)$$

Производящую векторную функцию $W(y, t; \epsilon) = (W_1, \dots, W_n)^T$, с помощью которой определяется вид нашей замены переменных, задаём в виде

$$W_k(y, t; \epsilon) = W_{k,1}(y, t) + \epsilon W_{k,2}(y, t) + \dots \quad (4.9)$$

Нулевое приближение : полагаем

$$g_{k,0} = f_{k,0} = f_k^{(0)}, \quad y_k^{(0)} = y_k. \quad (4.10)$$

Первое приближение : задаем

$$y_k^{(1)} = W_{k,1}, \quad f_k^{(1)} = f_{k,1}(y, t) + \text{grad} f_{k,0} \cdot W. \quad (4.11)$$

(градиент берется по y). Составляем уравнение

$$g_{k,1} + \frac{\partial y_k^{(1)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k^{(1)}}{\partial y_j} g_{j,0} = f_k^{(1)}(y, t). \quad (4.12)$$

Зная структуру функции $g_{k,1}$, получим n линейных дифференциальных уравнений в частных производных для определения функций $W_{k,1}$. Решая эти уравнения, определяем $y_k^{(1)}$ и $f_k^{(1)}$ по формуле (4.9).

Второе приближение : задаем

$$\begin{aligned} y_{k1}^{(1)} &= W_{k,2}, \quad y_k^2 = y_{k1}^{(1)} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k^{(1)}}{\partial y_j} W_{j,1}, \\ f_{k1}^{(1)} &= f_{k,2}(y, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{k,1}(y, t)}{\partial y_j} W_{j,1} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_{k,0}(y, t)}{\partial y_j} W_{j,2}, \\ f_k^{(2)} &= f_{k1}^{(1)}(y, t) + \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_k^{(1)}(y, t)}{\partial y_j} W_{j,1}. \end{aligned}$$

Для определения $W_{k,2}$ составляем уравнения

$$g_{k,2} + \frac{\partial y_k^{(2)}}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k^{(2)}}{\partial y_j} g_{j,0} + 2 \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_k^{(1)}}{\partial y_j} g_{j,1} = f_k^{(2)}(y, t). \quad (4.13)$$

Подставляя сюда требуемый вид функции $g_{k,2}$, решаем эти уравнения, находим $W_{k,2}$. Далее переходим к следующему шагу, вычисляя $y_k^{(2)}$ и $f_k^{(2)}$.

Пусть z — фазовый вектор системы (4.2). Следуя методу Хори-Кэмила, описанному выше, рассмотрим близкую к тождественной замену переменных $z \mapsto \xi$ вида

$$z = \xi + \sqrt{\epsilon} \xi^{(1)}(\xi) + \frac{\epsilon}{2} \xi^{(2)}(\xi),$$

с производящей векторной функции $W(\xi; \epsilon) = W^{(1)}(\xi) + \sqrt{\epsilon} W^{(2)}(\xi)$. Отсутствие резонансов позволяет уничтожить квадратичные члены $F^{(2)}$ в системе (4.2). В методе Хори-Кэмила $\xi^{(1)} = W^{(1)}$. Для определения векторной функции $W^{(1)}$ имеем систему

$$\begin{aligned} \left(\text{grad} W_1^{(1)}, P\xi \right) &= W_3^{(1)}, \quad \left(\text{grad} W_2^{(1)}, P\xi \right) = W_4^{(1)}, \\ \left(\text{grad} W_3^{(1)}, P\xi \right) &= -F_1^{(2)} - \omega_1^2 W_1^{(1)}, \\ \left(\text{grad} W_4^{(1)}, P\xi \right) &= -F_2^{(2)} - \omega_2^2 W_2^{(1)}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где мы обозначили

$$P = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Omega^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Частное решение системы (4.14) ищем среди векторных квадратичных форм $W_k^{(1)}(\xi) = (W_k^{(1)} \xi, \xi)$ ($k = 1, \dots, 4$). Обозначим $F_j^{(2)} = (F_j^{(2)} \xi, \xi)$ ($j = 1, 2$) и перепишем систему (4.14) следующим образом:

$$\begin{aligned} (2W_1^{(1)} \xi, P\xi) &= (W_3^{(1)} \xi, \xi), \quad (2W_2^{(1)} \xi, P\xi) = (W_4^{(1)} \xi, \xi), \\ (2W_3^{(1)} \xi, P\xi) &= - (F_1^{(2)} \xi, \xi) - \omega_1^2 (W_1^{(1)} \xi, \xi), \\ (2W_4^{(1)} \xi, P\xi) &= - (F_2^{(2)} \xi, \xi) - \omega_2^2 (W_2^{(1)} \xi, \xi). \end{aligned}$$

По определению матрицы $W_k^{(1)}$ симметрические. Введем вспомогательные несимметрические матрицы $\widetilde{W}_k^{(1)}$, симметрическая часть которых — искомые матрицы $W_k^{(1)}$. Между ними существуют соотношения $\widetilde{W}_3^{(1)} = 2P^T \widetilde{W}_1^{(1)}$, $\widetilde{W}_4^{(1)} = 2P^T \widetilde{W}_2^{(1)}$, а $\widetilde{W}_1^{(1)}$, $\widetilde{W}_2^{(1)}$ — решения матричных уравнений

$$\begin{aligned} (4(P^T)^2 + \omega_1^2 I) \widetilde{W}_1^{(1)} &= -F_1^{(2)}, \\ (4(P^T)^2 + \omega_2^2 I) \widetilde{W}_2^{(1)} &= -F_2^{(2)}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Матрицы $4(P^T)^2 + \omega_1^2 I$, $4(P^T)^2 + \omega_2^2 I$ невырожденные, т.к. $\omega_1 \neq 2\omega_2$, $\omega_2 \neq 2\omega_1$. Следовательно, система (4.14) имеет единственное решение среди квадратичных форм, и мы нашли коэффициент $W^{(1)}$ производящей векторной функции. Явные выражения для коэффициентов форм $W_k^{(1)}$ опускаем.

Нормализация системы (4.2) уничтожила квадратичный член $\sqrt{\epsilon}F^{(2)}$. Получилась система, которую можно представить в виде

$$\ddot{y} = -\Omega^2 y + \epsilon(B\dot{y} + D(\dot{y}, |\dot{y}|) + N^{(3)}(y, \dot{y})), \quad (4.16)$$

где $N^{(3)}(y, \dot{y})$ — форма третьей степени относительно координат и скоростей, а D — однородная векторная функция второго порядка.

5. Исследование усредненной системы в специальном случае функции Рэлея

С помощью замены переменных

$$y = \rho_1 e_1 \cos(\phi_1) + \rho_2 e_2 \cos(\phi_2), \quad \dot{y} = -\omega_1 \rho_1 e_1 \sin(\phi_1) - \omega_2 \rho_2 e_2 \sin(\phi_2), \quad (5.1)$$

$$e_1 = (1, 0)^T, \quad e_2 = (0, 1)^T, \quad \rho_1 > 0, \rho_2 > 0,$$

система (4.16) преобразуется к двухчастотной системе вида

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= -\frac{\epsilon}{\omega_1} f_1 \sin(\phi_1) \\ \dot{\rho}_2 &= -\frac{\epsilon}{\omega_2} f_2 \sin(\phi_2) \\ \dot{\phi}_1 &= \omega_1 - \frac{\epsilon}{\omega_1 \rho_1} f_1 \cos(\phi_1) \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 - \frac{\epsilon}{\omega_2 \rho_2} f_2 \cos(\phi_2) \end{aligned} \right., \quad (5.2)$$

$$(f_1, f_2)^T = B\dot{\rho} \sin(\phi) + D^{(2)} + N^{(3)},$$

где $(f_1, f_2)^T = B\dot{\rho}\sin(\phi) + D^{(2)} + N^{(3)}$, а выражения для $D^{(2)}$ теперь имеют вид:

$$\begin{aligned} D_1 = & 2|s_{21}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2)|\sin(\phi_1)s_{11}d_{21}\rho_1\omega_1 + \\ & + 3|s_{11}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2)|\sin(\phi_1)s_{11}d_{30}\rho_1\omega_1 + \\ & + 2|s_{21}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2)|\sin(\phi_2)s_{12}d_{21}\rho_2\omega_2 + \\ & + 3|s_{11}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2)|\sin(\phi_2)s_{12}d_{30}\rho_2\omega_2 + \\ & + \operatorname{sgn}(s_{11}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2))|s_{21}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2)|^2 d_{12}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} D_2 = & 2|s_{11}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2)|\sin(\phi_1)s_{21}d_{12}\rho_1\omega_1 + \\ & + 3|s_{21}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2)|\sin(\phi_1)s_{21}d_{03}\rho_1\omega_1 + \\ & + 2|s_{11}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2)|\sin(\phi_2)s_{22}d_{12}\rho_2\omega_2 + \\ & + 3|s_{21}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2)|\sin(\phi_2)s_{22}d_{03}\rho_2\omega_2 + \\ & + \operatorname{sgn}(s_{21}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{22}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2))|s_{11}\omega_1\rho_1\sin(\phi_1) + s_{12}\omega_2\rho_2\sin(\phi_2)|^2 d_{21}, \end{aligned}$$

где s_{ij} — элементы матрицы S перехода к главным координатам.

Усредним первые два уравнения системы (5.2) по быстрым переменным ϕ_j в отсутствие резонанса. Усредненные уравнения для медленных переменных имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = -\epsilon b_{11}\rho_1 - \epsilon \frac{1}{\omega_1} (2cd_{21}F(a, b) + 3cd_{30}F(c, d) + \\ \quad + 2ad_{21}G(a, b) + 3ad_{30}G(c, d) + d_{12}H(c, d, a, b)) \\ \dot{\rho}_2 = -\epsilon b_{22}\rho_2 - \epsilon \frac{1}{\omega_2} (3bd_{03}F(a, b) + 2bd_{12}F(c, d) + \\ \quad + 3ad_{03}G(a, b) + 2ad_{12}G(c, d) + d_{21}H(a, b, c, d)) \end{cases}, \quad (5.4)$$

где

$$\begin{aligned} F(a, b) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |a\sin(\phi_1) + b\sin(\phi_2)| \sin^2(\phi_1) d\phi_1 d\phi_2, \\ G(a, b) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |a\sin(\phi_1) + b\sin(\phi_2)| \sin(\phi_1) \sin(\phi_2) d\phi_1 d\phi_2, \\ H(c, d, a, b) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{sgn}(c\sin(\phi_1) + d\sin(\phi_2)) |a\sin(\phi_1) + b\sin(\phi_2)|^2 \sin(\phi_1) d\phi_1 d\phi_2, \end{aligned}$$

и также введены обозначения

$$a = s_{21}\omega_1\rho_1, \quad b = s_{22}\omega_2\rho_2, \quad c = s_{11}\omega_1\rho_1, \quad d = s_{12}\omega_2\rho_2.$$

Выражения для $F(c, d)$ и $G(c, d)$ аналогичные.

К сожалению, получить в явном виде выражения для функций F, G и H не удалось. Поэтому исследовать систему (4.6) на данном этапе работы затруднительно. Однако, в одном специальном, но важном случае, который мы приводим ниже, удаётся исследовать динамику усреднённой системы до конца.

Пусть квадратичные диссипативные силы действуют независимо вдоль осей главных координат, т.е. диссипативная функция Рэлея имеет вид:

$$\Psi = \frac{\delta}{3} d_{30} |\dot{q}_1|^3 + \frac{\delta}{3} d_{03} |\dot{q}_2|^3$$

Тогда выражения для функций F, G, H можно представить в явном виде без квадратур, а уравнения для медленных переменных усреднённой системы имеют вид

$$\begin{cases} \dot{\rho}_1 = -\epsilon \left(\frac{1}{2} b_{11} \rho_1 + \frac{4 d_{30} \rho_1^2 \omega_1}{3 \pi} \right) \\ \dot{\rho}_2 = -\epsilon \left(\frac{1}{2} b_{22} \rho_2 + \frac{4 d_{03} \rho_2^2 \omega_2}{3 \pi} \right). \end{cases} \quad (5.5)$$

Полученная усредненная система имеет четыре особые точки

$$\begin{aligned} \rho_1^* &= \rho_2^* = 0; \\ \rho_1^* &= -\frac{3 \pi b_{11}}{8 d_{30} \omega_1}, \quad \rho_2^* = 0; \\ \rho_1^* &= 0, \quad \rho_2^* = -\frac{3 \pi b_{22}}{8 d_{03} \omega_{12}}; \\ \rho_1^* &= -\frac{3 \pi b_{11}}{8 d_{30} \omega_1}, \quad \rho_2^* = -\frac{3 \pi b_{22}}{8 d_{03} \omega_{12}}. \end{aligned}$$

Наибольший интерес представляет последняя особая точка. Составим уравнения возмущенного движения, для чего введем возмущения по формуле $u_i = \rho_i - \rho_i^*$.

При подстановке этой замены в уравнение (5.5) и отбрасывании членов выше первого порядка малости по переменной u имеем следующие уравнения возмущенного движения

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = \frac{\epsilon}{2} b_{11} u_1 \\ \dot{u}_2 = \frac{\epsilon}{2} b_{22} u_2 \end{cases}. \quad (5.6)$$

Можно сделать вывод о том, что особая точка асимптотически устойчива, если $b_{11} > 0$ и $b_{22} > 0$, и неустойчива, если $b_{11} b_{22} < 0$ [6, 11] или $b_{11} < 0, b_{22} < 0$.

В нашей системе неравенства $b_{11} < 0, b_{22} < 0$ не могут быть одновременно выполненными. Тем не менее, рассмотрим проекцию фазового портрета на двумерное конфигурационное пространство y_1, y_2 .

Выражения для быстрых переменных $\phi_i (i = 1, 2)$ имеют вид

$$\phi_1 = \omega_1 t + \phi_1^0, \quad \phi_2 = \omega_2 t + \phi_2^0,$$

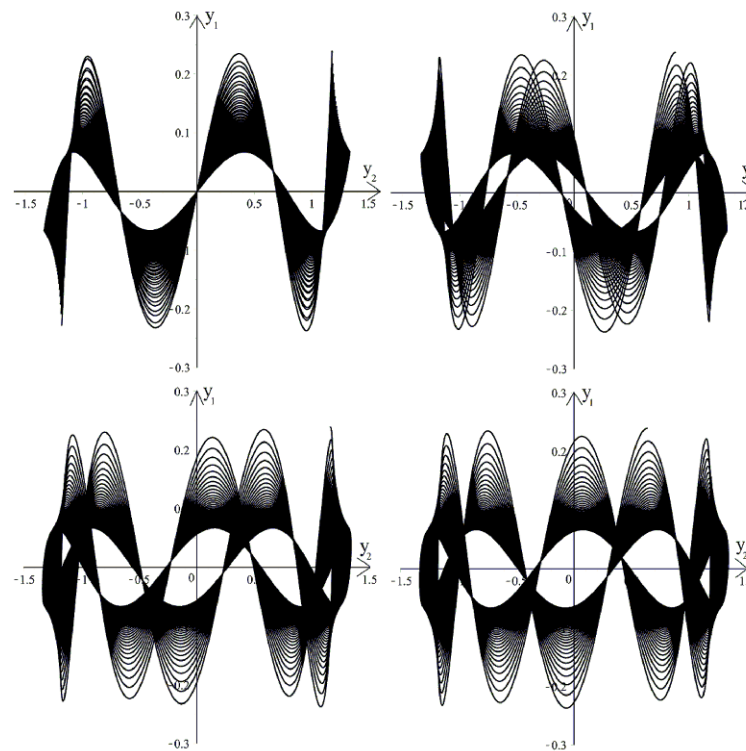
и согласно замене (5.1), фазовые переменные $y_i (i = 1, 2)$ представляются в виде

$$\begin{cases} y_1 = \rho_1^* \cos(\phi_1) \\ y_2 = \rho_2^* \cos(\phi_2) \\ \dot{y}_1 = -\omega_1 \rho_1^* \sin(\phi_1) \\ \dot{y}_2 = -\omega_2 \rho_2^* \sin(\phi_2) \end{cases}. \quad (5.7)$$

Без ограничения общности считаем, что $\phi_2^0 = 0$. Тогда проекция фазовой кривой на конфигурационное пространство представляет собой незамкнутую кривую Лиссажу

$$\begin{cases} y_1 = \rho_1^* \cos(\omega_1 t + \phi_1^0) \\ y_2 = \rho_2^* \cos(\omega_2 t) \end{cases}. \quad (5.8)$$

Каждая траектория получается выбором начального угла ϕ_1^0 и всюду плотна на инвариантном торе. Последний образуется семейством траекторий (5.7) в фазовом пространстве системы (рис. 5.1). Инвариантный тор существует, если $b_{11} \neq 0$, и $b_{22} \neq 0$.



Р и с у н о к 5.1

Проекция фазовых кривых на конфигурационное пространство

6. Выводы

В работе методом Хори-Кэмила нормализованы уравнения движения механической системы с двумя степенями свободы, подверженной действию потенциальных, неконсервативных позиционных сил, линейных и квадратичных диссипативных сил.

Получены усредненные уравнения движения для общей функции Рэлея квадратичных диссипативных сил.

Для специального случая функции Рэлея, когда квадратичные диссипативные силы действуют вдоль осей главных координат, усредненная система исследована полностью. Получены достаточные условия существования инвариантного тора.

Дата поступления 30.07.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов С. П., “Движение падающей пластины в жидкости: конечномерные модели и феномены сложной нелинейной динамики”, *Нелинейная динамика*, **11:1** (2015), 3–49.
2. Козлов В. В., “К задаче о падении тяжелого твердого тела в сопротивляющейся среде”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. Матем. Механ.*, 1990, № 1, 79–86.

3. Шамолин М. В., “Задача о движении тела в сопротивляющейся среде с учётом зависимости момента силы сопротивления от угловой скорости”, *Мат. моделирование*, **24**:10 (2012), 109–132.
4. Черноусько Ф. Л., Болотник Н. Н., “Мобильные роботы, управляемые движением внутренних тел”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **16**:5 (2010), 213–222.
5. Черноусько Ф. Л., “Оптимальное перемещение многосвязной системы в среде с сопротивлением”, *Тр. ИММ УрО РАН*, **17**:2 (2011), 240–255.
6. Ziegler H., “Die Stabilitätskriterien der Elastomechanik”, *Ing. Arch.*, **20**:1 (1952), 49–56.
7. Циглер Г., *Основы теории устойчивости конструкций*, Мир, М., 1971, 192 с.
8. Байков А. Е., Красильников П. С., “Об эффекте Циглера в неконсервативной механической системе”, *ПММ*, **74**:1 (2010), 74–88.
9. Майоров А. Ю., Байков А. Ю., “Об устойчивости положения равновесия дискретной модели заправочного шланга под действием реактивной силы”, *Нелинейная динамика*, **11**:1 (2015), 127–146.
10. Красильников П. С., Амелин Р. Н., “Об эффекте дестабилизации равновесия неконсервативной системы с тремя степенями свободы”, *Вестник МАИ*, **20**:4 (2013), 191–197.
11. Байков А. Е., “Предельный цикл в неконсервативной системе при резонансе 1:2”, *ПММ*, **75**:3 (2011), 384–395.
12. Лурье А. И., *Аналитическая механика*, Физматгиз, М., 1961, 824 с.
13. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, Наука, М., 1974, 407 с.
14. Красильников П. С., *Прикладные методы исследования нелинейных колебаний*, Ижевск : Институт компьютерных исследований, М., 2015, 528 с.
15. B. van der Pol., “On relaxation oscillations”, *Philos. Mag.*, **2** (1926), 978–992.
16. Маркеев А. П., *Точки либрации в небесной механике и космодинамике*, Наука, М., 1978, 312 с.
17. A. A. Kamel, “Perturbation Method in the Theory of Nonlinear Oscillations”, *Celestial Mechanics*, **3** (1970), 90–106.
18. Найфэ А. Х., *Методы возмущений*, Мир, М., 1976, 454 с.
19. Меркин А. Р., *Введение в теорию устойчивости движения*, Наука, М., 1976, 319 с.
20. Блехман И. И., *Вибрационная механика*, Физматлит, М., 1994, 400 с.

About destabilization of equilibrium point is caused by linear and quadratic forces of viscous friction.

© A. Y. Mayorov²

Abstract. Holonomic systems with two degrees of freedom are considered. It is supposed that potential forces, non-conservative positional forces, linear and quadratic dissipative forces act in these systems. The normal form of equations of motion is obtained and averaged in non-resonance case. In particular case when quadratic friction forces act independently along main coordinate axes, averaged system is completely investigated. Unique stationary mode of averaged system is obtained and stability of that mode is investigated. Conditions for the existence of an invariant torus and weak instability of equilibrium position are obtained.

Key Words: Zigler's effect, non-conservative positional force, linear dissipative force, quadratic dissipative force, Raileigh's function, normalization method of Hori-Kamel, invariant torus

² Postgraduate student of the Differential Equations Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow; ylam123@gmail.com

УДК 517.929.5

О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущением в виде малого линейного слагаемого с запаздывающим аргументом

© П. А. Шаманаев¹, Б. В. Логинов²

Аннотация. В банаховом пространстве методами теории ветвления доказано существование и единственность периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с вырожденным или тождественным оператором при производной и возмущением в виде малого линейного слагаемого с запаздывающим аргументом. В статье показано, что периодическое решение имеет полюс в точке $\varepsilon = 0$, а при значении $\varepsilon = 0$ переходит в $2n$ -параметрическое семейство периодических решений. Результат получен с помощью применения теории обобщенных жордановых наборов, сводящей исходную задачу к исследованию разрешающей системы Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве. При этом разрешающая система представляет собой неоднородную систему линейных алгебраических уравнений, которая при $\varepsilon \neq 0$ имеет единственное решение, а при значении $\varepsilon = 0$ переходит в $2n$ -параметрическое семейство решений.

Ключевые слова: ветвление периодических решений, дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом, обобщенные жордановы наборы, разрешающая система Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве.

1. Постановка задачи

В банаховых пространствах E_1 , E_2 , где $E_1 \subset E_2 \subset H$, H – гильбертово пространство рассматривается дифференциальное уравнение

$$A \frac{dx}{dt} = (B_0 - \varepsilon B(\tau))x - f(t), \quad B(\tau)x \equiv B_1 x(t - \tau), \quad (1.1)$$

где $x \in E_1$, A , B_0 и B_1 – плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, A – вырожденный или тождественный оператор, $f \in E_2$, $f(t + \omega) = f(t)$, $\omega > 0$, ε – малый вещественный параметр. Предполагается, что операторы A и B_0 не имеют общих нуль-элементов, а также условия: $A: E_1 \supset D_A \rightarrow E_2$, $B_0: E_1 \supset D_{B_0} \rightarrow E_2$, $D_{B_0} \subset D_A$ и A подчинен B_0 , то есть $\|Ax\|_{E_2} \leq \|B_0x\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на D_{B_0} , или $D_A \subset D_{B_0}$ и B_0 подчинен A , то есть $\|B_0x\|_{E_2} \leq \|Ax\|_{E_2} + \|x\|_{E_1}$ на D_A , что позволяет свести обсуждение к ограниченным операторам [1], [3–5].

Пусть $\sigma_A^0(B_0)$ – A -спектр оператора B_0 , лежащий на мнимой оси и состоящий из конечного числа ненулевых точек $\pm i\alpha_m$, $\alpha_m = k_m \alpha$, $\alpha = \frac{2\pi}{\omega}$, $m = \overline{1, r}$, где k_m – натуральные числа. Пусть далее n_m – геометрическая кратность каждого числа из пары $\pm i\alpha_m$, соответствующих A -собственным элементам $u_{mj} = u_{mj}^{(1)} \pm iu_{mj}^{(2)}$, то есть $B_0 u_{mj} = i\alpha_m A u_{mj}$; $B_0 \bar{u}_{mj} = -i\alpha_m A \bar{u}_{mj}$, $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1, r}$; и $v_{mj} = v_{mj}^{(1)} + iv_{mj}^{(2)}$, $\bar{v}_{mj} = v_{mj}^{(1)} - iv_{mj}^{(2)}$ являются A^* -собственными элементами сопряженного оператора B_0^* , то есть $B_0^* v_{mj} = -i\alpha_m A^* v_{mj}$, $B_0^* \bar{v}_{mj} = -i\alpha_m A^* \bar{v}_{mj}$, $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1, r}$.

¹ Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

² Профессор кафедры "Высшая математика", Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru

Тогда для каждого числа из пары $\pm i\alpha_m$ существует соответствующее количество n_m ω -периодических решений линейного однородного дифференциального уравнения

$$A \frac{dy}{dt} = B_0 y \quad (1.2)$$

в форме $\varphi_{mj} = u_{mj} e^{i\alpha_m t}$, $\bar{\varphi}_{mj} = \bar{u}_{mj} e^{-i\alpha_m t}$, $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1, r}$.

Таким образом, уравнение (1.2) имеет $2n$, $n = n_1 + \dots + n_r$, ω -периодических решений φ_{mj} , $\bar{\varphi}_{mj}$, $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1, r}$. Аналогично, сопряженное уравнение к уравнению (1.2) имеет $2n$ ω -периодических решений $\psi_{mj} = v_{mj} e^{i\alpha_m t}$, $\bar{\psi}_{mj} = \bar{v}_{mj} e^{-i\alpha_m t}$, $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1, r}$.

Ставится задача [1]: при достаточно малых вещественных ε отыскать ω -периодические решения $x(t, \varepsilon)$ уравнения (1.1), удовлетворяющие условию $x(t, 0) = z(t)$, где $z(t)$ — ω -периодические решения уравнения

$$A \frac{dz}{dt} = B_0 z - f(t). \quad (1.3)$$

Так как период решений φ_{mj} , $\bar{\varphi}_{mj}$ линейного однородного дифференциального уравнения (1.2) совпадает с периодом $f(t)$ и равен ω , то рассматриваемые условия соответствуют резонансному случаю для уравнения (1.3) [6].

2. Разрешающая система Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве

Для решения поставленной задачи представим уравнение (1.1) в операторной форме

$$\mathcal{B}_0 x = f(t) + \varepsilon B(\tau)x, \quad \mathcal{B}_0 x \equiv B_0 x(t) - A \frac{dx}{dt}, \quad (2.1)$$

и применим методы теории ветвления построения обобщенных жордановых наборов, приводящие к исследованию разрешающих систем Ляпунова-Шмидта в корневом подпространстве [2], [3-5], [10-13].

Здесь операторы $\mathcal{B}_0$ и B_1 отображают пространство $\mathcal{X}$ ω -периодических дифференцируемых по t функций со значениями в $\mathcal{E}_1 = E_1 + iE_1$ в пространство $\mathcal{Z}$ ω -периодических по t функций со значениями в $\mathcal{E}_2 = E_2 + iE_2$. Тогда значение функционала $e(t) \in \mathcal{X}^*(\in \mathcal{Z}^*)$ на элементе $x(t) \in \mathcal{X}(\in \mathcal{Z})$ дается равенством

$$\ll x, e \gg = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \langle x(t), e(t) \rangle dt, \quad x \in \mathcal{X}, \quad e \in \mathcal{X}^* \quad (x \in \mathcal{Z}, \quad e \in \mathcal{Z}^*).$$

Для дальнейших рассуждений перенумеруем элементы φ_{mj} , $\bar{\varphi}_{mj}$ (ψ_{mj} , $\bar{\psi}_{mj}$), $j = \overline{1, n_m}$, $m = \overline{1, r}$ в порядке увеличения чисел m и j одним индексом k , $k = \overline{1, n}$. Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathcal{B}_0) &= \text{span}\{\varphi_k^{(1)} = u_k e^{i\alpha_k t}, \quad \bar{\varphi}_k^{(1)} = \bar{u}_k e^{-i\alpha_k t}, \quad k = \overline{1, n}\}, \\ \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*) &= \text{span}\{\psi_k^{(1)} = v_k e^{i\alpha_k t}, \quad \bar{\psi}_k^{(1)} = \bar{v}_k e^{-i\alpha_k t}, \quad k = \overline{1, n}\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Не ограничивая общности будем предполагать справедливость неравенства

$$p_1 = \dots = p_\sigma > p_{\sigma+1} \geq p_{\sigma+2} \geq \dots \geq p_n. \quad (2.3)$$

Перепишем невозмущенное уравнение, соответствующее (1.3) в операторной форме:

$$\mathcal{B}_0 x = f(t), \quad (2.4)$$

Потребуем, чтобы уравнение (2.4) было разрешимо. Для этого, согласно работе [1] необходимо и достаточно, чтобы

$$\ll f, \psi_k^{(1)} \gg = 0, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

О п р е д е л е н и е 2.1. [1] Элементы $\varphi_k^{(1)} \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$ ($\psi_s^{(1)} \in \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$) формируют полный B_1 - (B_1^* -)жорданов набор (обобщенный жорданов набор $\equiv$ ОЖН) оператора $\mathcal{B}_0$ ($\mathcal{B}_0^*$), если

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 \varphi_k^{(1)} = 0, \quad \mathcal{B}_0 \varphi_k^{(j)} = B_1 \varphi_k^{(j-1)}, \quad \det \left[\ll B_1 \varphi_k^{(p_k)}, \psi_s^{(1)} \gg \right] \neq 0, \\ \left(\mathcal{B}_0^* \psi_s^{(1)} = 0, \quad \mathcal{B}_0^* \psi_s^{(l)} = B_1^* \psi_s^{(l-1)}, \quad \det \left[\ll B_1^* \psi_s^{(p_s)}, \varphi_k^{(1)} \gg \right] \neq 0 \right), \\ j = \overline{2, p_k}, \quad l = \overline{2, p_s}, \quad k, s = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Обобщенные жордановы цепочки $\varphi_k^{(j)}$, $j = \overline{1, p_k}$ ($\psi_s^{(l)}$, $l = \overline{1, p_s}$) длины p_k (p_s) единственно определяются для $p_k > 1$ ($p_s > 1$) с помощью следующих условий

$$\begin{aligned} \ll \varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(1)} \gg = \delta_{ks}, \quad \ll \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(1)} \gg = 0, \quad j = \overline{2, p_k}, \\ \left(\ll z_k^{(1)}, \psi_s^{(1)} \gg = \delta_{ks}, \quad \ll z_k^{(1)}, \psi_s^{(l)} \gg = 0, \quad l = \overline{2, p_s} \right), \\ k, s = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $\{\gamma_s^{(1)}\} \in E_1^*$, $\{z_k^{(1)}\} \in E_2$.

Согласно лемме [7-9] соответствующие системы $\{\varphi_k^{(j)}, j = \overline{1, p_k}\}$ и $\{\psi_s^{(l)}, l = \overline{1, p_s}\}$ элементов B_1 - и B_1^* -жордановых наборов операторов $\mathcal{B}_0$ и $\mathcal{B}_0^*$ могут быть выбраны так, что будут выполняться условия биортогональности

$$\begin{aligned} \ll \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \gg = \delta_{ks} \delta_{jl}, \quad \ll z_k^{(j)}, \psi_s^{(l)} \gg = \delta_{ks} \delta_{jl}, \\ \gamma_s^{(l)} = B_1^* \psi_s^{(p_s+1-l)}, \quad z_k^{(j)} = B_1 \varphi_k^{(p_k+1-j)}, \\ j = \overline{1, p_k}, \quad l = \overline{1, p_s}, \quad k, s = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

З а м е ч а н и е 2.1. Корневое число как сумма всех длин жордановых цепочек равна $2K$, где $K = p_1 + \dots + p_n$. Элементы $\varphi_k^{(j)}$, $\bar{\varphi}_k^{(j)}$, $j = \overline{1, p_k}$ и $z_k^{(j)}$, $\bar{z}_k^{(j)}$, $j = \overline{1, p_k}$ формируют базисы корневых подпространств $E_1^{2K} = \text{span}\{\varphi_k^{(j)}, \bar{\varphi}_k^{(j)}, j = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, n}\}$ и $E_2^{2K} = \text{span}\{z_k^{(j)}, \bar{z}_k^{(j)}, j = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, n}\}$.

Вводя регуляризатор Шмидта

$$\tilde{\mathcal{B}}_0 = \mathcal{B}_0 + \sum_{k=1}^n \ll \cdot, \gamma_k^{(1)} \gg z_k^{(1)} + \sum_{k=1}^n \ll \cdot, \bar{\gamma}_k^{(1)} \gg \bar{z}_k^{(1)}, \quad (2.9)$$

записываем уравнение (2.1) в виде системы

$$\begin{cases} \tilde{B}_0 x = \varepsilon B(\tau) x + \sum_{k=1}^n (\xi_{k1} z_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1} \bar{z}_k^{(1)}) + f, \\ \xi_{sl} = \ll x, \gamma_s^{(l)} \gg, \quad \bar{\xi}_{sl} = \ll x, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg, \quad l = \overline{1, p_s}, \quad s = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.10)$$

Решение системы (2.10) будем искать в виде [3]-[4]

$$x = w + v, \quad v = \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) \in E_1^{2K}. \quad (2.11)$$

Подставляя выражение (2.6) в первое уравнение системы (2.10) и выражая w , при достаточно малых ε получим

$$\begin{aligned} w = & - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \varepsilon \Gamma_0 B(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1} \varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1} \bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\ & + \Gamma_0 [I - \varepsilon B_1 \Gamma_0]^{-1} f. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Подставляя выражение (2.6) во второе и третье уравнение системы (2.10) и учитывая условия биортогональности (2.8), приведем разрешающую систему к виду

$$\begin{cases} - \ll w, \gamma_s^{(l)} \gg = 0, \quad l = \overline{1, p_s}, \\ - \ll w, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = 0, \quad s = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Подставляя выражение (2.12) для w в разрешающую систему (2.13), получим

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} \xi_{kj} \ll \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \gg - \sum_{k=1}^n \xi_{k1} \ll \varepsilon \Gamma_0 B(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} \varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)} \gg = \\ = \ll \Gamma_0 [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} f, \gamma_s^{(l)} \gg, \quad l = \overline{1, p_s}, s = \overline{1, n}, \\ \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} \bar{\xi}_{kj} \ll \bar{\varphi}_k^{(j)}, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg - \sum_{k=1}^n \bar{\xi}_{k1} \ll \varepsilon \Gamma_0 B(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} \bar{\varphi}_k^{(1)}, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = \\ = \ll \Gamma_0 [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} f, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg, \quad l = \overline{1, p_s}, s = \overline{1, n}. \end{cases} \quad (2.14)$$

С учётом равенств $\Gamma_0^* \gamma_s^{(1)} = \psi_s^{(1)}$, $\Gamma_0^* \bar{\gamma}_s^{(1)} = \bar{\psi}_s^{(1)}$, $\Gamma_0^* \gamma_s^{(l)} = \psi_s^{(p_s+2-l)}$, $\Gamma_0^* \bar{\gamma}_s^{(l)} = \bar{\psi}_s^{(p_s+2-l)}$ ($l = \overline{2, p_s}$), получим

$$\begin{aligned} & \ll \varepsilon \Gamma_0 B(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} \varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(1)} \gg = \ll \varphi_k^{(1)}, \varepsilon B^*(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \psi_s^{(1)} \gg, \\ & \ll \varepsilon \Gamma_0 B(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} \varphi_k^{(1)}, \gamma_s^{(l)} \gg = \ll \varphi_k^{(1)}, \varepsilon B^*(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \psi_s^{(p_s+2-l)} \gg, \\ & \ll \varepsilon \Gamma_0 B(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} \bar{\varphi}_k^{(1)}, \bar{\gamma}_s^{(1)} \gg = \ll \bar{\gamma}_s^{(1)}, \varepsilon B^*(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \bar{\psi}_s^{(1)} \gg, \\ & \ll \varepsilon \Gamma_0 B(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} \bar{\varphi}_k^{(1)}, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = \ll \bar{\gamma}_s^{(l)}, \varepsilon B^*(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \bar{\psi}_s^{(p_s+2-l)} \gg, \end{aligned} \quad (2.15)$$

аналогично, правая часть разрешающей системы (2.14) примет вид

$$\begin{aligned} & \ll \Gamma_0 [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} f, \gamma_s^{(1)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon \Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \psi_s^{(1)} \gg, \\ & \ll \Gamma_0 [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} f, \gamma_s^{(l)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon \Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \psi_s^{(p_s+2-l)} \gg, \\ & \ll \Gamma_0 [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} f, \bar{\gamma}_s^{(1)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon \Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \bar{\psi}_s^{(1)} \gg, \\ & \ll \Gamma_0 [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} f, \bar{\gamma}_s^{(l)} \gg = \ll f, [I - \varepsilon \Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \bar{\psi}_s^{(p_s+2-l)} \gg. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Так как справедливы равенства $(\Gamma_0^* B_1^*)^l \psi_s^{(1)} = \psi_s^{(r_s+1)}$, где r_s – остаток от деления l на p_s , то

$$[\Gamma_0^* B^*(\tau)]^j \psi_k^{(1)} = e^{-i\alpha_k j \tau} \psi_k^{(r_k+1)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

Учитывая равенства (2.17), при достаточно малых ε находим

$$\begin{aligned} [I - \varepsilon \Gamma_0^* B^*(\tau)]^{-1} \psi_s^{(1)} &= \frac{1}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s}} h_{s1}, \\ h_{s1} &= \psi_s^{(1)} + \varepsilon e^{-i\alpha_s \tau} \psi_s^{(2)} + \dots + (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s-1} \psi_s^{(p_s)}, \\ [I - \varepsilon \Gamma_0^* B^*(\tau)]^{-1} \psi_s^{(p_s+2-l)} &= \frac{1}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s}} h_{sl}, \\ h_{sl} &= \psi_s^{(p_s+2-l)} + \varepsilon e^{-i\alpha_s \tau} \psi_s^{(p_s+3-l)} + \dots + (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{l-2} \psi_s^{(p_s)} + (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{l-1} \psi_s^{(1)} + \dots \\ &\quad \dots + (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s-1} \psi_s^{(p_s+1-l)}, \quad l = \overline{2, p_s}, \quad s = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Учитывая выражения (2.18) и условия биортогональности (2.8), вычислим

$$\begin{aligned} \ll \varphi_k^{(1)}, \varepsilon B^*(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \psi_s^{(1)} \gg &= \frac{(\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s}}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s}} \delta_{ks}, \\ \ll \varphi_k^{(1)}, \varepsilon B^*(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0^* B(\tau)^*]^{-1} \psi_s^{(p_s+2-l)} \gg &= \frac{(\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{l-1}}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s}} \delta_{ks}, \\ l &= \overline{2, p_s}, \quad s = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Тогда, с учётом (2.15)-(2.19), разрешающая система (2.14) примет вид

$$\begin{cases} \bar{\beta}_s \xi_{s1} &= - \ll f, h_{s1} \gg, \quad l = 1, \\ -\bar{\theta}_{sl} \xi_{s1} + \xi_{sl} &= \ll f, \theta_{s1} h_{sl} \gg, \quad l = \overline{2, p_s}, \\ \beta_s \bar{\xi}_{s1} &= - \ll f, \bar{h}_{s1} \gg, \quad l = 1, \\ -\theta_{sl} \bar{\xi}_{s1} + \bar{\xi}_{sl} &= \ll f, \theta_{s1} \bar{h}_{sl} \gg, \quad l = \overline{2, p_s}, \\ s &= \overline{1, n}, \end{cases} \quad (2.20)$$

где

$$\beta_s = (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s}, \quad \beta_{sl} = (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{l-1}, \quad \theta_{sl} = \frac{1}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_s \tau})^{p_s}} \beta_{sl}. \quad (2.21)$$

Выделим вещественные и мнимые части коэффициентов ξ_{sl} и $\bar{\xi}_{sl}$

$$\xi_{sl} = \xi_{sl}^{(1)} + i \xi_{sl}^{(2)}, \quad \bar{\xi}_{sl} = \xi_{sl}^{(1)} - i \xi_{sl}^{(2)},$$

и подставим в систему (2.20).

При фиксированных s и l сложим первое и третье, второе и четвертое уравнения системы (2.20) соответственно и возьмем получившиеся уравнения в качестве первой системы. Аналогично, при фиксированных s и l вычтем из первого уравнения третье, а из второго — четвертое уравнение системы (2.20), и возьмем получившиеся уравнения в качестве второй системы. Тогда получим систему линейных алгебраических уравнений с

вещественными коэффициентами

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \beta_s \xi_{s1}^{(1)} + Im \beta_s \xi_{s1}^{(2)} = - \ll f, Re h_{s1} \gg, \quad l = 1, \\ -Re \theta_{sl} \xi_{s1}^{(1)} - Im \theta_{sl} \xi_{s1}^{(2)} + \xi_{sl}^{(1)} = \ll f, Re \theta_{s1} h_{sl} \gg, \quad l = \overline{2, p_s}, \\ -Im \beta_s \xi_{s1}^{(1)} + Re \beta_s \xi_{s1}^{(2)} = \ll f, Im h_{s1} \gg, \quad l = 1, \\ Im \theta_{sl} \xi_{s1}^{(1)} - Re \theta_{sl} \xi_{s1}^{(2)} + \xi_{sl}^{(2)} = - \ll f, Im \theta_{s1} h_{sl} \gg, \quad l = \overline{2, p_s}, \\ s = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Поменяем порядок следования уравнений в системе следующим образом

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \beta_s \xi_{s1}^{(1)} + Im \beta_s \xi_{s1}^{(2)} = - \ll f, Re h_{s1} \gg, \\ -Im \beta_s \xi_{s1}^{(1)} + Re \beta_s \xi_{s1}^{(2)} = \ll f, Im h_{s1} \gg, \\ l = 1, \quad s = \overline{1, n}, \\ -Re \theta_{sl} \xi_{s1}^{(1)} - Im \theta_{sl} \xi_{s1}^{(2)} + \xi_{sl}^{(1)} = \ll f, Re \theta_{s1} h_{sl} \gg, \\ Im \theta_{sl} \xi_{s1}^{(1)} - Re \theta_{sl} \xi_{s1}^{(2)} + \xi_{sl}^{(2)} = - \ll f, Im \theta_{s1} h_{sl} \gg, \\ l = \overline{2, p_s}, \quad s = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (2.23)$$

Система (2.23) может быть записана в матричной форме

$$D\xi = g, \quad (2.24)$$

здесь $D \equiv [d_{sl,kj}]$ - $(K \times K)$ -матрица, $K = p_1 + p_2 + \dots + p_n$, $(l = \overline{1, p_s}, s = \overline{1, n}; j = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, n})$,

$$\begin{aligned} \xi &= colon(\xi_{11}^{(1)}, \xi_{11}^{(2)}, \dots, \xi_{n1}^{(1)}, \xi_{n1}^{(2)}, \dots, \xi_{\sigma p_\sigma}^{(1)}, \xi_{\sigma p_\sigma}^{(2)}), \quad g = colon(g_{11}^{(1)}, g_{11}^{(2)}, \dots, g_{n1}^{(1)}, g_{n1}^{(2)}, \dots, g_{np_n}^{(1)}, g_{np_n}^{(2)}), \\ g_{s1}^{(1)} &= - \ll f, Re h_{s1} \gg, \quad g_{s1}^{(2)} = \ll f, Im h_{s1} \gg, \quad l = 1, \quad s = \overline{1, n}, \\ g_{sl}^{(1)} &= \ll f, Re \theta_{s1} h_{sl} \gg, \quad g_{sl}^{(2)} = - \ll f, Im \theta_{s1} h_{sl} \gg, \quad l = \overline{2, p_s}, \quad s = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Матрица D имеет блочно-диагональную структуру

$$D = \begin{pmatrix} D^{(1)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ D^{(2)} & I & 0 & \dots & 0 \\ D^{(3)} & 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D^{(p_1)} & 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

$$D^{(1)} = \begin{pmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{pmatrix}, \quad D_s = \begin{pmatrix} Re \beta_s & Im \beta_s \\ -Im \beta_s & Re \beta_s \end{pmatrix}, \quad s = \overline{1, n}, \quad (2.26)$$

$$D^{(l)} = \begin{pmatrix} D_{1l} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_{2l} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & D_{nl} \end{pmatrix}, \quad l = \overline{2, p_n}, \quad (2.27)$$

$$D^{(l)} = \begin{pmatrix} D_{1l} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & D_{\nu l} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad l = \overline{p_n + 1, p_1}, \quad (2.28)$$

$$D_{sl} = \begin{pmatrix} -Re \theta_{sl} & -Im \theta_{sl} \\ Im \theta_{sl} & -Re \theta_{sl} \end{pmatrix}, \quad l = \overline{2, p_1}, \quad s = \overline{1, \nu}. \quad (2.29)$$

Индекс s в формуле (2.29) принимает только те значения, для которых длина жордановой цепочки p_s больше или равна l .

3. Решения разрешающей системы и ветвление периодических решений

При $\varepsilon \neq 0$ определитель матрицы D отличен от нуля и, следовательно, система (2.24) имеет единственное решение. Учитывая (2.18), из системы (2.22), находим

$$\begin{aligned} \xi_{s1}^{(1)} &= -\frac{1}{\varepsilon^{2p_s}} [Re \beta_s \ll f, Re h_{s1} \gg + Im \beta_s \ll f, Im h_{s1} \gg], \\ \xi_{s1}^{(2)} &= \frac{1}{\varepsilon^{2p_s}} [-Im \beta_s \ll f, Re h_{s1} \gg + Re \beta_s \ll f, Im h_{s1} \gg], \\ s &= \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Так как справедливы равенства $(\Gamma_0 B_1)^j \varphi_k^{(1)} = \varphi_k^{(r_k+1)}$, $(\Gamma_0 B_1)^j \bar{\varphi}_k^{(1)} = \bar{\varphi}_k^{(r_k+1)}$, где r_k – остаток от деления j на p_k , то

$$\begin{aligned} [\Gamma_0 B(\tau)]^j \varphi_k^{(1)} &= e^{-i\alpha_k j \tau} \varphi_k^{(r_k+1)}, \\ [\Gamma_0 B(\tau)]^j \bar{\varphi}_k^{(1)} &= e^{-i\alpha_k j \tau} \bar{\varphi}_k^{(r_k+1)}, \\ j &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (3.2)$$

Учитывая равенства (3.2), при достаточно малых ε находим

$$\begin{aligned} \varepsilon \Gamma_0 B(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} \varphi_k^{(1)} &= \frac{1}{1 - (\varepsilon e^{-i\alpha_k \tau})^{p_k}} \left(\varepsilon e^{-i\alpha_k \tau} \varphi_k^{(2)} + (\varepsilon e^{-i\alpha_k \tau})^2 \varphi_k^{(3)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (\varepsilon e^{-i\alpha_k \tau})^{p_k-1} \varphi_k^{(p_k)} + (\varepsilon e^{-i\alpha_k \tau})^{p_k} \varphi_k^{(1)} \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon \Gamma_0 B(\tau) [I - \varepsilon \Gamma_0 B(\tau)]^{-1} \bar{\varphi}_k^{(1)} &= \frac{1}{1 - (\varepsilon e^{i\alpha_k \tau})^{p_k}} \left(\varepsilon e^{i\alpha_k \tau} \bar{\varphi}_k^{(2)} + (\varepsilon e^{i\alpha_k \tau})^2 \bar{\varphi}_k^{(3)} + \dots \right. \\ &\quad \left. \dots + (\varepsilon e^{i\alpha_k \tau})^{p_k-1} \bar{\varphi}_k^{(p_k)} + (\varepsilon e^{i\alpha_k \tau})^{p_k} \bar{\varphi}_k^{(1)} \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Таким образом, учитывая (2.11), (2.12), (3.3) и (3.4), получим, что уравнение (1.1) имеет единственное вещественное ω -периодическое решение, представимое в виде

$$\begin{aligned} x(t, \varepsilon) &= \sum_{k=1}^n \left[\theta_{k1} \xi_{k1} \varphi_k^{(1)} + \bar{\theta}_{k1} \bar{\xi}_{k1} \bar{\varphi}_k^{(1)} \right] + [I - \varepsilon \Gamma_0 B_1]^{-1} \Gamma_0 f(t) + \\ &\quad + \sum_{k=1}^n \left[\left(\theta_{k2} \xi_{k1} \varphi_k^{(2)} + \bar{\theta}_{k2} \bar{\xi}_{k1} \bar{\varphi}_k^{(2)} \right) + \dots + \left(\theta_{kp_k} \xi_{k1} \varphi_k^{(p_k)} + \bar{\theta}_{kp_k} \bar{\xi}_{k1} \bar{\varphi}_k^{(p_k)} \right) \right], \end{aligned} \quad (3.5)$$

где вещественные и мнимые части ξ_{k1} , $\bar{\xi}_{k1}$ вычисляются по формуле (3.1). С учетом формул (2.21) для θ_{sl} получаем, что решение $x(t, \varepsilon)$ в точке $\varepsilon = 0$ имеет полюс, порядок которого не превышает длины p_1 жордановой цепочки $\{\varphi_1^{(j)}\}$, $j = \overline{1, p_1}$.

При $\varepsilon = 0$ ранг матрицы D равен $K - 2n$, и следовательно, для существования решений системы (2.24) необходимо и достаточно, что бы ранг расширенной матрицы $(D|g)$ так же был равен $K - 2n$. Так как при $\varepsilon = 0$ в силу разрешимости уравнения (1.3) $\ll f, \psi_s^{(1)} \gg = 0$ и $h_{s1} = \psi_s^{(1)}$, то справедливо условие

$$g_{s1}^{(1)} \equiv - \ll f, \operatorname{Re} h_{s1} \gg = 0, \quad g_{s1}^{(2)} \equiv \ll f, \operatorname{Im} h_{s1} \gg = 0, \quad (3.6)$$

которое и обеспечивает совместность системы (2.24).

Следовательно, при $\varepsilon = 0$ из системы (2.24) находим $\xi_{k1}^{(1)} = c_k^{(1)}$, $\xi_{k1}^{(2)} = c_k^{(2)}$, где $c_k^{(1)}$, $c_k^{(2)}$ – произвольные вещественные числа. Учитывая, что при $\varepsilon = 0$ уравнения (1.1) и (1.3) совпадают, а, следовательно, и их решения так же совпадают, находим, что их ω – периодические решения представимы в виде

$$x(t, 0) = z(t) \equiv \sum_{k=1}^n [c_k^{(1)} \varphi_k^{(1)} + c_k^{(2)} \bar{\varphi}_k^{(1)}] + \Gamma_0 f(t). \quad (3.7)$$

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке грантов РФФИ № 15-01-08599, № 15-41-02455р_поволжье_а.

Дата поступления 25.10.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвления решений нелинейных уравнений*, "Наука", М., 1969, 528 с.
2. Треногин В. А., "Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии. Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений.", *СОАН СССР*, "Наука", Новосибирск, 1988, 133-140.
3. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., "Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора", *Журнал Средневолжского математического общества*, **15:3** (2013), 100-107.
4. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., "Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной", *Журнал Средневолжского математического общества*, **16:4** (2014), 33-40.
5. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., "О ветвлении периодических решений линейных неоднородных дифференциальных уравнений с возмущением в виде малого линейного слагаемого", *Журнал Средневолжского математического общества*, **18:3** (2016), 45-53.
6. Малкин И. Г., *Некоторые задачи теории нелинейных колебаний*, Едиториал УРСС, М., 2004, 496 с.

7. Логинов Б.В., Русак Ю.Б., "Обобщенная жорданова структура в теории ветвления", *"Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными"*, сб. н. работ, ред. М. С. Салахитдинов, Изд-во "Фан" АН Узб.ССР, Ташкент, 1978, 133-148.
8. Русак Ю.Б., *Обобщенная жорданова структура в теории ветвления*, дис. ... канд. физ.-мат. наук, Инст. математики им. В. М. Романовского АН Узб.ССР. Ташкент, 1979, 126 с.
9. Русак Ю.Б., "Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и сопряженной к ней", *Известия Акад. Наук Узб.ССР, физ-мат.*, 1978, № 2, 15-19.
10. Loginov B.V., Rousak Yu. B., "Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions", *Nonlinear Analysis: TMA*, **17**:3 (1991), 219-232.
11. Loginov B.V., "Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation", *Nonlinear Analysis: TMA*, **28**:12 (1997), 2035-2047.
12. Loginov B.V., Kim-Tyan L.R., Rousak Yu.B., "On the stability of periodic solutions for differential equations with a Fredholm operator at the highest derivative", *Nonlinear analysis*, **67**:5 (2007), 1570-1585.
13. Коноплева И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б., "Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифуркационных задачах", *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки.*, 2009, 115-124.

The branching of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with a the perturbation in the form of small linear term with delay

© P. A. Shamanaev³ B. V. Loginov⁴

Abstract. In a Banach space by branching theory methods existence and uniqueness of periodic solutions of inhomogeneous linear differential equations with degenerate or identity operator in the derivative and a perturbation in the form of small linear term with delay is proved. The article shows that the periodic solution has a pole at the point $\varepsilon = 0$, and if $\varepsilon = 0$ it goes to $2n$ -parameter set of periodic solutions. The result is obtained by applying the theory of generalized Jordan sets, that reduces the original problem to the investigation of the Lyapunov-Schmidt resolution system in the root subspace. This resolution system is a non-homogeneous system of linear algebraic equations, which at $\varepsilon \neq 0$ has a unique solution, and at a value of $\varepsilon = 0$ goes to $2n$ -parameter family of solutions.

Key Words: branching of periodic solution, differential equations with delay, generalized Jordan sets, Lyapunov-Schmidt resolution system in the root subspace.

³ Associate Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, National Research Ogarev Mordovia State University; Saransk; korspa@yandex.ru.

⁴ Professor of "Higher Mathematics" Department, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru

УДК 517.968

Нелокальная задача для смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка в трехмерной области

© Т. К. Юлдашев¹ А. В. Багрова²

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости и построения решения нелокальной смешанной задачи для трехмерного однородного смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка. Использован спектральный метод, основанный на разделении переменных. Установлен критерий однозначной разрешимости поставленной задачи и доказана соответствующая теорема.

Ключевые слова: уравнение смешанного типа, уравнение четвертого порядка, трехмерная область, интегральные условия, однозначная разрешимость

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению смешанных, краевых и обратных задач для уравнений в частных производных. Теория смешанных и краевых задач, в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений.

Изучение многих задач газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводит к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков. С точки зрения физических приложений представляют большой интерес дифференциальные уравнения четвертого порядка (см., например, [1]–[6]). Исследованию дифференциальных уравнений четвертого порядка посвящено большое количество публикаций многих математиков, в частности работы автора [7]–[10].

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме [11]–[13].

Задачи, где меняется тип дифференциального уравнения в рассматриваемой области, имеют важные приложения (см. [14]–[16]). Дифференциальные уравнения смешанного типа изучались в работах многих авторов, в частности, в [17]–[26].

В настоящей работе изучается однозначная разрешимость нелокальной смешанной задачи для трехмерного смешанного дифференциального уравнения четвертого порядка. Итак, в трехмерной области $\Omega = \{(t, x, y) \mid -\alpha < t < \beta, 0 < x, y < l\}$ рассматривается смешанное уравнение вида

$$\Im U \equiv U_{tt} - (U_{ttxx} + U_{ttyy}) + (\operatorname{sgn} t)(U_{xx} + U_{yy}) = 0, \quad (1.1)$$

где α , β и l — заданные положительные действительные числа.

¹ Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursun.k.yuldashev@gmail.com

² Студентка инженерно-экономического института, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева, г. Красноярск, nastyabagrova96@gmail.com

Задача. Найти в трехмерной области Ω функцию $U(t, x, y)$, удовлетворяющую условиям

$$U(t, x, y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega \cup \{x = 0\} \cup \{x = l\} \cup \{y = 0\} \cup \{y = l\}) \cap C^2(\Omega_+ \cup \Omega_-), \quad (1.2)$$

$$\Im U(t, x, y) \equiv 0, \quad (t, x, y) \in (\Omega_+ \cup \Omega_-), \quad (1.3)$$

$$U(t, 0, y) = U(t, l, y) = U(t, x, 0) = U(t, x, l) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta, \quad (1.4)$$

$$\int_0^\beta U(t, x, y) t dt = \varphi(x, y), \quad \int_{-\alpha}^0 U(t, x, y) t dt = \psi(x, y), \quad 0 \leq x, y \leq l, \quad (1.5)$$

где $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ — заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0, y) = \varphi(l, y) = \psi(0, y) = \psi(l, y) = 0$, $\varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = \psi(x, 0) = \psi(x, l) = 0$, $\Omega_- = \{(t, x, y) | -\alpha < t < 0, 0 < x, y < l\}$, $\Omega_+ = \{(t, x, y) | 0 < t < \beta, 0 < x, y < l\}$.

Отметим, что в двумерном случае уравнение (1.1) при других граничных условиях рассмотрено в [25].

2. Поиск частных решений

Нетривиальные частные решения уравнения (1.1) в области Ω будем искать в виде $U(t, x, y) = T(t) V(x, y)$. Тогда из уравнения (1.1) получаем

$$T''(t) V(x, y) - T''(t) V_{xx}(x, y) - T''(t) V_{yy}(x, y) = -(\operatorname{sgn} t) \left(T(t) V_{xx}(x, y) + T(t) V_{yy}(x, y) \right).$$

Здесь почленно разделим на $-(\operatorname{sgn} t) T(t) V(x, y)$:

$$-\frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn} t) T(t)} + \frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn} t) T(t)} \left(\frac{V_{xx}(x, y)}{V(x, y)} + \frac{V_{yy}(x, y)}{V(x, y)} \right) = \frac{V_{xx}(x, y)}{V(x, y)} + \frac{V_{yy}(x, y)}{V(x, y)}.$$

В последнем равенстве положим, что

$$\frac{V_{xx}(x, y)}{V(x, y)} + \frac{V_{yy}(x, y)}{V(x, y)} = -\mu^2, \quad -\frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn} t) T(t)} + \frac{T''(t)}{(\operatorname{sgn} t) T(t)} \left(\frac{V_{xx}(x, y)}{V(x, y)} + \frac{V_{yy}(x, y)}{V(x, y)} \right) = -\mu^2,$$

где $-\mu^2$ — постоянная разделения, $0 < \mu$.

Отсюда с учетом граничных условий (1.4) получаем

$$V_{xx}(x, y) + V_{yy}(x, y) + \mu^2 V(x, y) = 0, \quad 0 < x, y < l, \quad (2.1)$$

$$V(0, y) = V(l, y) = V(x, 0) = V(x, l) = 0, \quad (2.2)$$

$$T''(t) - \lambda^2 T(t) = 0, \quad 0 < t < \beta, \quad (2.3)$$

$$T''(t) + \lambda^2 T(t) = 0, \quad -\alpha < t < 0, \quad (2.4)$$

где $\lambda^2 = \frac{\mu^2}{1 + \mu^2}$.

Спектральная задача (2.1) и (2.2) имеет решение

$$V_{n,m}(x, y) = X_n(x) Y_m(y), \quad (2.5)$$

где $X_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x$, $Y_m(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} y$, $n, m = 1, 2, \dots$; $\mu_{n,m} = \frac{\pi(n+m)}{l}$.

Тогда общие решения дифференциальных уравнений (2.3) и (2.4) имеют вид

$$T_{n,m}(t) = \begin{cases} a_{n,m}e^{\lambda_{n,m}t} + b_{n,m}e^{-\lambda_{n,m}t}, & t > 0, \\ c_{n,m}\cos\lambda_{n,m}t + d_{n,m}\sin\lambda_{n,m}t, & t < 0, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, $c_{n,m}$, $d_{n,m}$ — произвольные постоянные, $\lambda_{n,m} = \sqrt{\frac{\mu_{n,m}^2}{1 + \mu_{n,m}^2}}$.

Поскольку решения $U_{n,m}(t, x) = T_{n,m}(t) X_n(x) Y_m(y)$ должны удовлетворять условию (1.2), то постоянные $a_{n,m}$, $b_{n,m}$, $c_{n,m}$, $d_{n,m}$ подберем так, чтобы выполнялись условия

$$T_{n,m}(0+0) = T_{n,m}(0-0), \quad T'_{n,m}(0+0) = T'_{n,m}(0-0). \quad (2.7)$$

Из (2.6) с учетом условий (2.7) получаем, что $c_{n,m} = a_{n,m} + b_{n,m}$ и $d_{n,m} = a_{n,m} - b_{n,m}$. Тогда функции (2.6) принимают вид

$$T_{n,m}(t) = \begin{cases} c_{n,m}\operatorname{ch}\lambda_{n,m}t + d_{n,m}\operatorname{sh}\lambda_{n,m}t, & t > 0, \\ c_{n,m}\cos\lambda_{n,m}t + d_{n,m}\sin\lambda_{n,m}t, & t < 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

С учетом функций (2.5) решение задачи (1.2)–(1.5) в трехмерной области Ω , согласно методу Фурье разделения переменных, представим в виде

$$U(t, x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y,$$

где

$$u_{n,m}(t) = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U(t, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy, \quad n, m = 1, 2, \dots \quad (2.9)$$

3. Определение коэффициентов Фурье (2.9)

Покажем, что функции (2.9) удовлетворяют уравнениям (2.3), (2.4) в соответствующих интервалах и условию (2.7). Дифференцируя по t равенства (2.9) два раза и учитывая уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} u''_{n,m}(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U_{tt}(t, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttxx} + U_{ttsy} - U_{xx} - U_{yy}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttxx} - U_{xx}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy + \\ &+ \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttsy} - U_{yy}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy, \quad t > 0, \\ u''_{n,m}(t) &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U_{tt}(t, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\ &= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttxx} + U_{ttsy} + U_{xx} + U_{yy}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$= \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttxx} + U_{xx}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy + \\ + \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l (U_{ttyy} + U_{yy}) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy, \quad t < 0. \quad (3.2)$$

Интегрируя два раза по частям по x в первых интегралах в правых частях (3.1) и (3.2), затем интегрируя два раза по частям по y во вторых интегралах в правых частях (3.1) и (3.2), с учетом условий (1.4) получаем следующие уравнения

$$u''_{n,m}(t) - \lambda_{n,m}^2 u_{n,m}(t) = 0, \quad t > 0, \quad (3.3)$$

$$u''_{n,m}(t) + \lambda_{n,m}^2 u_{n,m}(t) = 0, \quad t < 0, \quad (3.4)$$

где $\lambda_{n,m}^2 = \frac{\mu_{n,m}^2}{1 + \mu_{n,m}^2}$, $\mu_{n,m} = \frac{\pi(n+m)}{l}$.

Дифференциальные уравнения (3.3) и (3.4) при $\lambda = \lambda_{n,m}$ совпадают соответственно с уравнениями (2.3) и (2.4). Далее с учетом условий (1.2) из (2.9) получаем

$$u_{n,m}(0+0) = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U(0+0, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\ = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U(0-0, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = u_{n,m}(0-0). \quad (3.5)$$

Дифференцируя функции (2.9) один раз по t , в силу условий (1.2) имеем

$$u'_{n,m}(0+0) = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U_t(0+0, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\ = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l U_t(0-0, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = u'_{n,m}(0-0). \quad (3.6)$$

Условия (3.5) и (3.6) совпадают с условиями (2.7). Тогда для задачи (3.3)–(3.6) аналогично формуле (2.8) имеем

$$u_{n,m}(t) = \begin{cases} c_{n,m} \operatorname{ch} \lambda_{n,m} t + d_{n,m} \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t, & t > 0, \\ c_{n,m} \cos \lambda_{n,m} t + d_{n,m} \sin \lambda_{n,m} t, & t < 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

Для нахождения постоянных $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$ воспользуемся интегральными условиями (1.5) и формулой (2.9)

$$\int_0^\beta u_{n,m}(t) t dt = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \int_0^\beta U(t, x, y) t dt \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\ = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \varphi(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \varphi_{n,m}, \quad (3.8)$$

$$\int_{-\alpha}^0 u_{n,m}(t) t dt = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \int_{-\alpha}^0 U(t, x, y) t dt \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \\ = \frac{2}{l} \int_0^l \int_0^l \psi(x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = \psi_{n,m}. \quad (3.9)$$

При $t > 0$ из (3.7) и (3.8) получаем

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m} = \int_0^\beta u_{n,m}(t) t dt = \int_0^\beta (c_{n,m} \operatorname{ch} \lambda_{n,m} t + d_{n,m} \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t) t dt = c_{n,m} \left[\frac{\beta}{\lambda_{n,m}} \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda_{n,m}^2} (\operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta - 1) \right] + d_{n,m} \left[\frac{\beta}{\lambda_{n,m}} \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta - \frac{1}{\lambda_{n,m}^2} \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

При $t < 0$ из (3.7) и (3.9) получаем

$$\begin{aligned} \psi_{n,m} = \int_{-\alpha}^0 u_{n,m}(t) t dt = \int_{-\alpha}^0 (c_{n,m} \cos \lambda_{n,m} t + d_{n,m} \sin \lambda_{n,m} t) t dt = c_{n,m} \left[-\frac{\alpha}{\lambda_{n,m}} \sin \lambda_{n,m} \alpha - \right. \\ \left. - \frac{1}{\lambda_{n,m}^2} (\cos \lambda_{n,m} \alpha - 1) \right] + d_{n,m} \left[-\frac{\alpha}{\lambda_{n,m}} \cos \lambda_{n,m} \alpha + \frac{1}{\lambda_{n,m}^2} \sin \lambda_{n,m} \alpha \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Из (3.10) и (3.11) получаем систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов $c_{n,m}$ и $d_{n,m}$:

$$\begin{cases} c_{n,m} \left[1 + \lambda_{n,m} \beta \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta - \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta \right] + \\ + d_{n,m} \left[\lambda_{n,m} \beta \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta - \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta \right] = \lambda_{n,m}^2 \varphi_{n,m}, \\ c_{n,m} \left[1 - \lambda_{n,m} \alpha \sin \lambda_{n,m} \alpha - \cos \lambda_{n,m} \alpha \right] + \\ + d_{n,m} \left[-\lambda_{n,m} \alpha \cos \lambda_{n,m} \alpha + \sin \lambda_{n,m} \alpha \right] = \lambda_{n,m}^2 \psi_{n,m}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Система однозначно разрешима, если ее определитель не обращается в нуль при любых $0 < \alpha$ и $0 < \beta$:

$$\begin{aligned} \Delta_{n,m}(\alpha, \beta) = A_{n,m} \left[-\lambda_{n,m} \alpha \cos \lambda_{n,m} \alpha + \sin \lambda_{n,m} \alpha \right] - \\ - B_{n,m} \left[1 - \lambda_{n,m} \alpha \sin \lambda_{n,m} \alpha - \cos \lambda_{n,m} \alpha \right] \neq 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $A_{n,m} = 1 + \lambda_{n,m} \beta \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta - \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta$, $B_{n,m} = \lambda_{n,m} \beta \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta - \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta$. Так как $0 < \lambda_{n,m} < 1$ и $0 < \beta < \infty$, то $|A_{n,m}| < \infty$, $|B_{n,m}| < \infty$.

Пусть выполняется условие (3.13). Тогда из (3.12) находим

$$\begin{aligned} c_{n,m} = \frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha, \beta)} \left[\varphi_{n,m} (-\lambda_{n,m} \alpha \cos \lambda_{n,m} \alpha + \sin \lambda_{n,m} \alpha) - \psi_{n,m} B_{n,m} \right], \\ d_{n,m} = \frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha, \beta)} \left[\varphi_{n,m} (\lambda_{n,m} \alpha \sin \lambda_{n,m} \alpha + \cos \lambda_{n,m} \alpha - 1) + \psi_{n,m} A_{n,m} \right]. \end{aligned}$$

Подставляя эти коэффициенты в формулы (3.12), получим

$$\begin{aligned} u_{n,m}(t) = \frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha, \beta)} \left\{ \varphi_{n,m} \left[\lambda_{n,m} \alpha (-\operatorname{ch} \lambda_{n,m} t \cos \lambda_{n,m} \alpha + \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t \sin \lambda_{n,m} \alpha) + \right. \right. \\ \left. + (\operatorname{ch} \lambda_{n,m} t \sin \lambda_{n,m} \alpha + \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t \cos \lambda_{n,m} \alpha) - \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t \right] + \\ \left. + \psi_{n,m} \left[-\lambda_{n,m} \beta \operatorname{ch} \lambda_{n,m} (t - \beta) - \operatorname{sh} \lambda_{n,m} (t - \beta) + \operatorname{sh} \lambda_{n,m} t \right] \right\}, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (3.14)$$

$$u_{n,m}(t) = \frac{\lambda_{n,m}^2}{\Delta_{n,m}(\alpha, \beta)} \left\{ \varphi_{n,m} \left[-\lambda_{n,m} \alpha \cos \lambda_{n,m}(t - \alpha) + \sin \lambda_{n,m}(t + \alpha) - \sin \lambda_{n,m} t \right] + \right. \\ \left. + \psi_{n,m} \left[\lambda_{n,m} \beta (\sin \lambda_{n,m} t \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta) - \cos \lambda_{n,m} t \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta \right] + \right. \\ \left. + (\cos \lambda_{n,m} t \operatorname{sh} \lambda_{n,m} \beta - \sin \lambda_{n,m} t \operatorname{ch} \lambda_{n,m} \beta) + \sin \lambda_{n,m} t \right\}, \quad t < 0. \quad (3.15)$$

Теперь предположим, что $\varphi(x, y) \equiv 0$, $\psi(x, y) \equiv 0$. Тогда $\varphi_{n,m} = 0$, $\psi_{n,m} = 0$ и из формул (2.9), (3.14) и (3.15) следует, что

$$\int_0^l \int_0^l U(t, x, y) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y dx dy = 0, \quad n, m = 1, 2, \dots$$

Отсюда, в силу полноты систем собственных функций $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi n}{l} x \right\}$, $\left\{ \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\pi m}{l} y \right\}$ в $L_2[0, l]$, заключаем, что $U(t, x, y) \equiv 0$ для всех $x, y \in [0, l]$ и $t \in [-\alpha, \beta]$.

4. Существование решения

Рассмотрим случай, когда нарушается условие (3.13). Пусть $\Delta_{n,m}(\alpha, \beta) = 0$ при некоторых значениях α . Это условие эквивалентно равенству

$$(B_{n,m} - A_{n,m} \lambda_{n,m} \alpha) \cos \lambda_{n,m} \alpha + (B_{n,m} + A_{n,m} \lambda_{n,m} \alpha) \sin \lambda_{n,m} \alpha = B_{n,m},$$

где $0 < \lambda_{n,m} = \sqrt{\frac{\mu_{n,m}^2}{1 + \mu_{n,m}^2}} < 1$, $\mu_{n,m} = \frac{\pi(n+m)}{l}$, $\lambda_{n,m} \rightarrow 1$ при $n, m \rightarrow \infty$.

Последнее уравнение записываем в следующем виде

$$\cos(\lambda_{n,m} \alpha - \theta_{n,m}) = \frac{B_{n,m}}{\sqrt{(1 + \lambda_{n,m}^2 \alpha^2)(A_{n,m}^2 + B_{n,m}^2)}},$$

где $\theta_{n,m} = \arcsin \frac{A_{n,m} + B_{n,m} \lambda_{n,m} \alpha}{\sqrt{(1 + \lambda_{n,m}^2 \alpha^2)(A_{n,m}^2 + B_{n,m}^2)}}$. Данное уравнение имеет две серии решений:

$$\alpha_k = \frac{\theta_{n,m}}{\lambda_{n,m}} \pm \frac{\xi_{n,m}}{\lambda_{n,m}} + \frac{2\pi k}{\lambda_{n,m}}, \quad k \in N,$$

где $\xi_{n,m} = \arccos \frac{B_{n,m}}{\sqrt{(1 + \lambda_{n,m}^2 \alpha^2)(A_{n,m}^2 + B_{n,m}^2)}}$, N — множество натуральных чисел.

Другие значения α , для которых условие (3.13) выполняется, называются регулярными.

Итак, для регулярных значений α имеют место формулы (3.14), (3.15). Поэтому при выполнении условия (3.13) с учетом частных решений (2.5), (3.14), (3.15) решение задачи (1.2)–(1.5) в трехмерной области Ω можно представить в виде ряда

$$U(t, x, y) = \frac{2}{l} \sum_{n,m=1}^{\infty} u_{n,m}(t) \sin \frac{\pi n}{l} x \sin \frac{\pi m}{l} y. \quad (4.1)$$

Покажем, что при определенных условиях относительно функций $\varphi(x, y)$ и $\psi(x, y)$ сумма $U(t, x, y)$ ряда (4.1) удовлетворяет условиям (1.2).

Так как $0 < \lambda_{n,m} < 1$, то для любых n и m справедливы оценки

$$|u_{n,m}(t)| \leq C_1(|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|), \quad (4.2)$$

$$|u'_{n,m}(t)| \leq C_2(|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|), \quad (4.3)$$

$$|u''_{n,m}(t)| \leq C_3(|\varphi_{n,m}| + |\psi_{n,m}|), \quad (4.4)$$

где $0 < C_i = \text{const}$, $i = \overline{1, 3}$.

Действительно, так как $0 < \lambda_{n,m} < 1$, $\lambda_{n,m} \rightarrow 1$ при $n, m \rightarrow \infty$, то для регулярных значений α на основании формул (3.14) и (3.15) найдем

$$|u_{n,m}(t)| \leq \begin{cases} \frac{1}{C_0} [|\varphi_{n,m}|(\alpha + 2)e^\beta + |\psi_{n,m}|e^\beta], & t > 0, \\ \frac{1}{C_0} [|\varphi_{n,m}|(\alpha + 1) + |\psi_{n,m}|((\beta + 1)e^\beta + 1)], & t < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.2), где $C_0 = |\Delta_{n,m}(\alpha, \beta)| > 0$, $C_1 = \frac{1}{C_0} \max \{(\alpha + 2)e^\beta; (\beta + 1)e^\beta + 1\}$.

Дифференцируя выражения (3.14), (3.15), получаем

$$|u'_{n,m}(t)| \leq \begin{cases} \frac{1}{C_0} [|\varphi_{n,m}|(\alpha + 1)e^\beta + |\psi_{n,m}|(1 + e^\beta)], & t > 0, \\ \frac{1}{C_0} [|\varphi_{n,m}|(\alpha + 1) + |\psi_{n,m}|(1 + (1 + \beta)e^\beta)], & t < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.3), где $C_2 = \frac{1}{C_0} \max \{(\alpha + 1)e^\beta; 1 + (1 + \beta)e^\beta\}$.

Дифференцируя выражения (3.14), (3.15) два раза, получаем

$$|u''_{n,m}(t)| \leq \begin{cases} \frac{1}{C_0} [|\varphi_{n,m}|(\alpha + 2)e^\beta + |\psi_{n,m}|e^\beta], & t > 0, \\ \frac{1}{C_0} [2|\varphi_{n,m}|\alpha + |\psi_{n,m}|(1 + (1 + \beta)e^\beta)], & t < 0. \end{cases}$$

Отсюда следует оценка (4.4), где $C_3 = \frac{1}{C_0} \max \{(\alpha + 2)e^\beta; 1 + (1 + \beta)e^\beta\}$.

Условия А. Пусть функции $\varphi(x, y) \in C^3([0; l] \times [0; l])$, $\psi(x, y) \in C^3([0; l] \times [0; l])$ на сегменте $[0; l]$ имеют кусочно-непрерывные производные четвертого порядка и $\varphi(0, y) = \varphi(l, y) = \psi(0, y) = \psi(l, y) = 0$, $\varphi(x, 0) = \varphi(x, l) = \psi(x, 0) = \psi(x, l) = 0$, $\varphi_{xx}(0, y) = \varphi_{xx}(l, y) = \psi_{xx}(0, y) = \psi_{xx}(l, y) = 0$, $\varphi_{yy}(x, 0) = \varphi_{yy}(x, l) = \psi_{yy}(x, 0) = \psi_{yy}(x, l) = 0$.

Пусть выполняются условия А. Тогда справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \varphi_{n,m} &= -\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{p_{n,m}}{n^4}, \quad \varphi_{n,m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{p_{n,m}}{m^4}, \\ \psi_{n,m} &= -\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{q_{n,m}}{n^4}, \quad \psi_{n,m} = -\left(\frac{l}{\pi}\right)^4 \frac{q_{n,m}}{m^4} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\sum_{n,m=1}^{\infty} p_{n,m}^2 &\leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l [\varphi_{xxxx}(x, y)]^2 dx dy, \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} p_{n,m}^2 &\leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l [\varphi_{yyyy}(x, y)]^2 dx dy, \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{n,m}^2 &\leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l [\psi_{xxxx}(x, y)]^2 dx dy, \\ \sum_{n,m=1}^{\infty} q_{n,m}^2 &\leq \frac{4}{l^2} \int_0^l \int_0^l [\psi_{yyyy}(x, y)]^2 dx dy.\end{aligned}$$

С помощью этих оценок нетрудно убедиться, что ряд (4.1) равномерно сходится в области Ω .

Таким образом доказано, что справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 4.1. Пусть выполняются условия А. Тогда задача (1.2)–(1.5) однозначно разрешима в области Ω , если выполняется условие (3.13).

Дата поступления 21.10.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р., “О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне”, *Журн. СВМО*, **12:3** (2010), 37 – 42.
2. Турбин М. В., “Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 246 – 257.
3. Шабров С. А., “Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 1, 232 – 250.
4. Шабров С. А., “Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 168 – 179.
5. Уизем Дж., *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977, 622 с.
6. Benney D. J., Luke J. C., “Interactions of permanent waves of finite amplitude”, *Journ. Math. Phys.*, **43** (1964), 309 – 313.
7. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, 2011, № 10 (227), 40 – 48.
8. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора и нелинейное отражающее отклонение”, *Вестник ТомГУ. Математика и Механика*, **14:2** (2011), 59 – 69.

9. Юлдашев Т.К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14:2** (2012), 137 – 142.
10. Юлдашев Т.К., “Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 180 – 189.
11. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А., “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделирование*, **12:1** (2000), 94 – 103.
12. Иванчов Н.И., “Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием”, *Дифференц. уравнения*, **40:4** (2004), 547 – 564.
13. Пулькина Л. С., “Нелокальная задача для гиперболического уравнения с интегральными условиями 1 рода с ядрами, зависящими от времени”, *Изв. вузов. Математика*, 2012, № 10, 32 – 44.
14. Гельфанд И.М., “Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений”, *УМН*, **14:3** (1959), 3 – 19.
15. Франкль Ф.И., *Избранные труды в газовой динамике*, Наука, М., 1973, 711 с.
16. Уфлянд Я.С., “К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях”, *Инженерно-физический журнал*, **7:1** (1964), 89 – 92.
17. Апаков Ю.П., “Трехмерный аналог задачи Трикоми для парабологиперболического уравнения”, *Сиб. журн. индустр. математики*, **14:2** (2011), 34 – 44.
18. Джураев Т.Д., Сопуев А., Мамажанов М., *Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа*, Фан, Ташкент, 1986, 220 с.
19. Моисеев Е.И., “О разрешимости одной нелокальной краевой задачи”, *Дифференц. уравнения*, **37:11** (2001), 1565 – 1567.
20. Репин О. А., “Аналог задачи Нахушева для уравнения Бицадзе-Лыкова”, *Дифференц. уравнения*, **38:10** (2002), 1412 – 1417.
21. Сабитов К.Б., *К теории уравнений смешанного типа*, Физматлит, М., 2014, 301 с.
22. Сабитова Ю.К., “Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии”, *Математические заметки*, **98:3** (2015), 393 – 406.
23. Салахитдинов М.С., Уринов А.К., *Краевые задачи для уравнений смешанного типа со спектральным параметром*, Фан, Ташкент, 1997, 165 с.
24. Юлдашев Т.К., “О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15:3** (2013), 158 – 163.
25. Юлдашев Т.К., “Об одном смешанном дифференциальном уравнении четвертого порядка”, *Известия ИМИ УдГУ*, **47:1** (2016), 119 – 128.

26. Юлдашев Т.К., “Смешанное дифференциальное уравнение типа Буссинеска”, *Вестник ВолГУ. Серия 1: Математика. Физика*, **33**:2 (2016), 13 – 26.

Nonlocal problem for a mixed type fourth order differential equation in three dimensional domain

© Т. К. Yuldashev³ А. V. Bagrova⁴

Abstract. This article considers solvability of nonlocal mixed-value problem for a three-dimensional homogeneous mixed-type fourth-order differential equation. Solution construction for such equation is examined, too. Spectral method based on separation of variables is used in the article. The criterion of one-value solvability of the problem considered is installed. Under this criterion one-valued solvability of the problem is proved.

Key Words: mixed-type differential equation, fourth-order equation, three-dimensional domain, integral conditions, one-valued solvability

³ Associate professor of Higher Mathematics Department, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursun.k.yuldashev@gmail.com

⁴ Student of Institute of Engineering and Economy, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, nastyabagrova96@gmail.com

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 533.6.013.4

Исследование устойчивости вязкоупругого элемента конструкции при сверхзвуковом обтекании© А. В. Анкилов¹, П. А. Вельмисов²

Аннотация. Исследуется устойчивость деформируемого элемента конструкции в виде пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа. Учитывается старение материала, т.е. изменение его физико-механических свойств с течением времени. Применяется модель стареющего вязкоупругого тела, согласно которой напряжение в любой точке тела зависит от предыстории деформирования материала в данной точке, а связь между напряжением и деформацией подчиняется уравнению Вольтерра-Фойхта. Аэродинамическое давление на пластину определяется согласно «поршневой» теории А.А. Ильюшина. На основе построенного функционала получены достаточные условия устойчивости решений интегродифференциального уравнения с частными производными, описывающего динамику пластины.

Ключевые слова: аэроупругость, математическое моделирование, динамическая устойчивость, пластина, сверхзвуковой поток газа, дифференциальное уравнение, функционал

1. Введение

При проектировании конструкций, приборов, устройств, аппаратов, систем и т. д. различного назначения, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости деформируемых (упругих, вязкоупругих) элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

В настоящее время механика деформируемого твердого тела, механика жидкости и газа и аэрогидроупругость представляют собой хорошо развитые разделы механики сплошной среды. Много исследований посвящено динамике, устойчивости и флаттеру пластин и оболочек, находящихся в потоке жидкости или газа (среди последних в качестве примера отметим как российские [1, 4, 8], так и зарубежные [6, 7, 9] исследования). Большинство работ посвящено исследованию флаттера пластин и оболочек в сверхзвуковом потоке.

Существенным фактором, влияющим на прочностные характеристики деформируемых тел, является старение материала (изменение его физико-механических свойств с течением времени). Хорошо разработанной является модель стареющего вязкоупругого тела, согласно которой напряжение в любой точке тела зависит от предыстории деформирования материала в данной точке, а связь между напряжением и деформацией подчиняется уравнению Вольтерра-Фойхта. В статье авторами впервые на основе модели вязкоупругого тела аналитически исследуется устойчивость деформируемого элемента конструкции в

¹ Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru

² Заведующий кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru

виде пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа. Работа является продолжением исследований устойчивости деформируемых пластин, находящихся в потоке газа или жидкости. В частности, в работах [2], [3] проведено исследование динамики и устойчивости упругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа без учета старения материала.

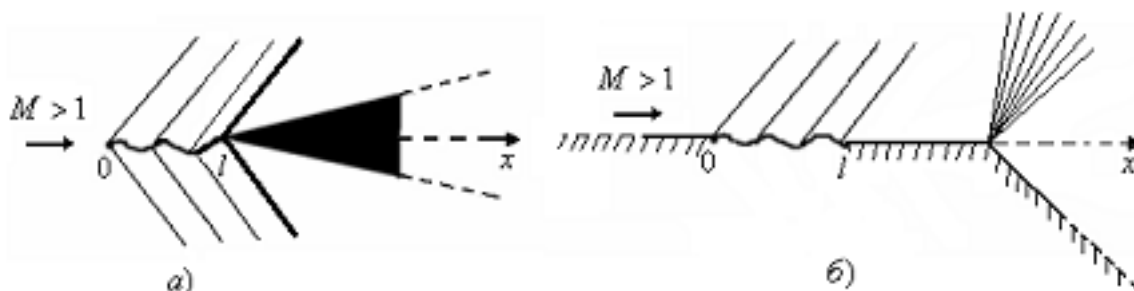
Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Аэродинамическое давление на пластину определяется согласно «поршневой» теории А.А. Ильюшина. На основе построения функционала, соответствующего дифференциальному уравнению в частных производных, описывающему поперечные колебания пластины-полосы, получены достаточные условия устойчивости решений этого уравнения.

2. Математическая модель

Рассмотрим модельное уравнение, описывающее поперечные колебания вязкоупругой пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком газа (рис. 2.1):

$$M\ddot{w}(x,t) + D \left(w''''(x,t) - \int_0^t R_1(s,t)w''''(x,s)ds \right) + \beta_0 \left(w(x,t) - \int_0^t R_2(s,t)w(x,s)ds \right) + N(t)w'' + \beta_1\dot{w}(x,t) + \beta_2\dot{w}''''(x,t) + \alpha(\dot{w}(x,t) + Vw'(x,t)) = 0, \quad x \in (0,l). \quad (2.1)$$

Здесь x – продольная координата, t – время; $M = h\rho_p$ – погонная масса пластины; h – толщина пластины; E , ρ_p – модуль упругости и линейная плотность пластины; $N(t)$ – сжимающее ($N > 0$) или растягивающее ($N < 0$) продольное усилие; $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ – изгибная жесткость пластины; ν – коэффициент Пуассона; β_2, β_1 – коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости слоя обжатия; $R_1(s,t)$, $R_2(s,t)$ – ядра релаксации, характеризующие вязкоупругие свойства материала пластины и его слоя обжатия; $\alpha = \alpha_0\rho_0a_0 = \text{const} > 0$, где ρ_0, a_0 – плотность газа и скорость звука в однородном невозмущенном потоке ($\alpha_0 = 1$ при одностороннем обтекании, $\alpha_0 = 2$ при двустороннем обтекании); V – скорость набегающего однородного потока; штрих обозначает производную по координате x , точка – производную по времени t .



Р и с у н о к 2.1

Примеры обтекания конструкций с упругим элементом сверхзвуковым потоком газа: а) двустороннее обтекание рассекателя с образованием ударной волны; б) одностороннее обтекание защитного экрана с образованием волны разрежения

Сжимающая ($N > 0$) или растягивающая ($N < 0$) пластину сила N может зависеть от времени. Например, при изменении теплового воздействия на пластину с течением

времени $N(t)$ имеет вид:

$$N(t) = N_0 + N_T(t), \quad N_T(t) = -\frac{T_0(t)}{1-\nu}, \quad T_0(t) = E\alpha_T \int_{-h/2}^{h/2} T(z, t) dz, \quad (2.2)$$

где α_T – температурный коэффициент линейного расширения, $T(z, t)$ – закон изменения температуры по толщине пластины, N_0 – постоянная составляющая усилия, созданная при закреплении пластины.

Функция $w(x, t) \in C^{4,2} \{[0, l] \times R^+\}$, определяющая прогиб пластины, принадлежит множеству четырежды непрерывно-дифференцируемых функций по переменной x на отрезке $[0, l]$ и дважды непрерывно-дифференцируемых по переменной t при $t \geq 0$ и принимает действительные значения.

Аэродинамическая нагрузка определяется выражением $F = \alpha(\dot{w} + Vw')$, справедливым при достаточно больших скоростях сверхзвукового потока V . Выражение для F получено с помощью решения соответствующей линейной нестационарной аэродинамической задачи на основе преобразования Лапласа при больших числах Маха $M = V/a_0$ (что согласуется с гипотезой плоских сечений Ильюшина А.А.).

Пусть концы пластины закреплены либо шарнирно, либо жестко, т.е. граничные условия имеют вид:

- 1) жесткое защемление обоих концов

$$w(0, t) = w'(0, t) = w(l, t) = w'(l, t) = 0; \quad (2.3)$$

- 2) шарнирное опирание левого конца и жесткое защемление правого

$$w(0, t) = w''(0, t) = w(l, t) = w'(l, t) = 0; \quad (2.4)$$

- 3) жесткое защемление левого конца и шарнирное опирание правого

$$w(0, t) = w'(0, t) = w(l, t) = w''(l, t) = 0; \quad (2.5)$$

- 4) шарнирное опирание обоих концов

$$w(0, t) = w''(0, t) = w(l, t) = w''(l, t) = 0. \quad (2.6)$$

Зададим также начальные условия:

$$w(x, 0) = f_1(x), \quad \dot{w}(x, 0) = f_2(x), \quad (2.7)$$

которые должны быть согласованы с граничными условиями. Согласно определению функции $w(x, t)$: $f_1(x), f_2(x) \in C^4[0, l]$. Норма в пространстве $C^4[0, l]$ определяется равенством $\|f\| = \sup_{0 \leq m \leq 4} \max_{x \in [0, l]} \left| \frac{\partial^m f(x)}{\partial x^m} \right|$.

Таким образом, сформулированы начально-краевые задачи: а) (2.1), (2.3), (2.7); б) (2.1), (2.4), (2.7); в) (2.1), (2.5), (2.7); г) (2.1), (2.6), (2.7) для определения неизвестной функции $w(x, t)$.

3. Исследование устойчивости

О п р е д е л е н и е 3.1. Решение начально-краевой задачи для неизвестной функции $w(x, t) \in C^{4,2} \{[0, l] \times R^+\}$ называется устойчивым по отношению к возмущениям начальных данных, если для любого сколь угодно малого положительного числа

$\varepsilon > 0$ найдутся числа $\delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0$, $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$, такие, что для любых функций $f_1(x)$, $f_2(x) \in C^4[0, l]$, удовлетворяющих краевым условиям и условиям малости по норме: $\|f_1(x)\| < \delta_1$, $\|f_2(x)\| < \delta_2$, будет выполнено неравенство $|w(x, t)| < \varepsilon$, $x \in [0, l]$ для любого момента времени $t > 0$.

Аналогично можно дать определения об устойчивости любой частной производной от функции $w(x, t)$ по отношению к возмущениям начальных данных.

О п р е д е л е н и е 3.2. Функционалом в пространстве $C^{4,2}\{[0, l] \times R^+\}$ называется всякий закон, согласно которому любой функции $w(x, t) \in C^{4,2}\{[0, l] \times R^+\}$ сопоставляется функция $\Phi(t) \equiv \Phi(w) \in C^2\{R^+\}$.

О п р е д е л е н и е 3.3. Дифференциальным оператором полиномиального вида будем называть следующее дифференциальное выражение:

$$F^{n,s}(g, x, t) = G(D^{0,0}g(x, t), D^{1,0}g(x, t), D^{0,1}g(x, t), \dots, D^{n,s}g(x, t)), \quad x \in [0, l], \quad t \geq 0;$$

где $D^{i,j}g(x, t) = \frac{\partial^{i+j}g(x, t)}{\partial x^i \partial t^j}$, а функция $G(x_1, x_2, \dots)$ – полином, все мономы которого не ниже второго порядка, с ограниченными коэффициентами, зависящими от x, t . Все коэффициенты полинома непрерывно дифференцируемы по времени t .

Л е м м а 3.1. Если можно построить функционал $\Phi(t)$, такой что $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ и для любого момента времени найдется положительно определенная нижняя оценка этого функционала

$$\Phi(t) \leq \Phi_1(t) = \int_0^l F_1^{4,2}(w, x, t) dx, \quad (3.1)$$

и найдется верхняя оценка начального значения этого функционала

$$\Phi(0) \leq \Phi_2(0) = \int_0^l F_2^{4,2}(w, x, 0) dx, \quad (3.2)$$

где $w(x, t) \in C^{4,2}\{[0, l] \times R^+\}$ – решение начально-краевой задачи, то функция $w(x, t)$ и(или) ее производные, входящие в положительно определенный полином под знаком интеграла в выражении для $\Phi_1(t)$, устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя неравенство $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ от 0 до t , согласно (3.1), (3.2) получим

$$0 \leq \Phi_1(t) \leq \Phi(t) \leq \Phi(0) \leq \Phi_2(0). \quad (3.3)$$

Из неравенства $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(0)$ в (3.3), где $\Phi_2(0)$ имеет вид (3.2), получим, что из малости по норме функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, согласно определению 3 следует малость функционала $\Phi_1(t)$. Неравенство $\Phi_1(t) \geq 0$ в (3.3), где $\Phi_1(t)$ имеет вид (3.1), означает, что, используя интегральные неравенства, в оценке функционала $\Phi_1(t)$ можно выделить один или несколько положительно определенных полиномов (остальные будут положительно определенными). И, следовательно, используя метод Лагранжа, можно получить оценку функционала снизу интегралом от каждой функции в четной степени, входящих в полином, умноженным на ненулевую ограниченную величину. Из малости функционала $\Phi_1(t)$ получим малость этих интегралов, а, следовательно, и малость самих функций. Тогда, согласно определению 3.1 эти функции будут устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных.

Доказательство закончено.

Получим условия устойчивости начально-краевых задач (2.1), (2.3), (2.7); (2.1), (2.4), (2.7); (2.1), (2.5), (2.7); (2.1), (2.6), (2.7) по отношению к возмущениям начальных данных.

Введем обозначение

$$R_i(s, t) = \frac{\partial^2 Q_i}{\partial s \partial t}(s, t) \quad (i = 1, 2). \quad (3.4)$$

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \int_0^l \left(M\dot{w}^2 + 2\theta M w \dot{w} + \left(D \left(1 - \frac{\partial Q_1}{\partial t}(t, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2 \theta \right) w''^2 + \right. \\ & + \left(\beta_0 \left(1 - \frac{\partial Q_2}{\partial t}(t, t) - \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_1 \theta + \rho \theta \alpha \right) w^2 - N(t) w'^2 + \\ & + D \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) (w''(x, t) - w''(x, s))^2 ds + \beta_0 \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) (w(x, t) - w(x, s))^2 ds - \\ & \left. - D\theta \int_0^t \frac{\partial Q_1}{\partial s}(s, t) w''^2(x, s) ds - \beta_0 \theta \int_0^t \frac{\partial Q_2}{\partial s}(s, t) w^2(x, s) ds \right) dx, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $\theta > 0$ – некоторый постоянный положительный параметр.

Из физических соображений в дальнейшем считаем, что выполняются условия

$$M > 0, \quad D > 0, \quad \beta_0 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad \beta_2 \geq 0. \quad (3.6)$$

Пусть выполняются условия

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_i}{\partial t}(t, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2}(0, t) \leq 0, \quad \frac{\partial Q_i}{\partial s}(s, t) \leq 0, \\ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial s \partial t}(s, t) \geq 0, \quad \frac{\partial^3 Q_i}{\partial s \partial t^2}(s, t) \leq 0, \quad 1 + \frac{\partial Q_i}{\partial t}(0, \infty) > 0, \\ \frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2}(t, t) - \frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2}(0, t) + \frac{\partial^2 Q_i}{\partial s \partial t}(t, t) \geq 0, \quad 2 + \frac{\partial Q_i}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_i}{\partial s}(t, t) \geq 0 \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Например, этим условиям удовлетворяют ядра вида $Q_i(s, t) = -a_i(t + e^{s-t})$, где $a_i \in (0, 1]$ – некоторые положительные параметры.

Найдем производную от $\Phi(t)$ по t :

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \int_0^l \left(M\dot{w}\ddot{w} + \theta M\dot{w}^2 + \theta M w \ddot{w} + \frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 Q_1}{\partial t^2}(0, t) - \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(t, t) - \frac{\partial^2 Q_1}{\partial t^2}(t, t) \right) w''^2 + \right. \\ & + \left(D \left(1 - \frac{\partial Q_1}{\partial t}(t, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2 \theta \right) w'' \dot{w} + \frac{\beta_0}{2} \left(\frac{\partial^2 Q_2}{\partial t^2}(0, t) - \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(t, t) - \frac{\partial^2 Q_2}{\partial t^2}(t, t) \right) \times \\ & \times w^2 + \left(\beta_0 \left(1 - \frac{\partial Q_2}{\partial t}(t, t) - \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_1 \theta + \rho \theta \alpha \right) w \dot{w} - \frac{1}{2} \dot{N}(t) w'^2 - N(t) w' \dot{w} + \\ & + \frac{D}{2} \int_0^t \frac{\partial^3 Q_1}{\partial s \partial t^2}(s, t) (w''(x, t) - w''(x, s))^2 ds + D \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) \dot{w}''(x, t) (w''(x, t) - w''(x, s)) ds + \\ & + \beta_0 \int_0^t \frac{\partial^3 Q_2}{\partial s \partial t^2}(s, t) (w(x, t) - w(x, s))^2 ds + \beta_0 \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) \dot{w}(x, t) (w(x, t) - w(x, s)) ds - \\ & \left. - \frac{D\theta}{2} \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) w''^2(x, t) - \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) w''^2(x, s) ds - \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$-\frac{\beta_0\theta}{2}\frac{\partial Q_2}{\partial s}(t,t)w^2(x,t)-\frac{\beta_0\theta}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 Q_2}{\partial s\partial t}(s,t)w^2(x,s)ds\Big)dx.$$

Для функции $w(x,t)$, удовлетворяющей уравнению (2.1), с учетом условий (3.7) получим оценку

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t) \leq & 2\int_0^l\left(\dot{w}\left(-D\left(w''''-\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''''(x,s)ds\right)-\beta_0\left(w-\int_0^t\frac{\partial^2 Q_2}{\partial s\partial t}(s,t)w(x,s)ds\right)-\right.\right. \\ & \left.-N(t)w''-\beta_1\dot{w}(x,t)-\beta_2\dot{w}''''(x,t)-\alpha(\dot{w}(x,t)+Vw'(x,t))\right)+\theta M\dot{w}^2+ \\ & +\theta w\left(-D\left(w''''-\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''''(x,s)ds\right)-N(t)w''-\beta_0\left(w-\int_0^t\frac{\partial^2 Q_2}{\partial s\partial t}(s,t)w(x,s)ds\right)-\right. \\ & \left.-\beta_1\dot{w}(x,t)-\beta_2\dot{w}''''(x,t)-\alpha(\dot{w}(x,t)+Vw'(x,t))\right)+(D+\beta_2\theta)w''\dot{w}'+ \\ & +(\beta_0+\beta_1\theta+\rho\theta\alpha)w\dot{w}-\frac{1}{2}\dot{N}(t)w'^2-N(t)w'\dot{w}-D\dot{w}''(x,t)\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''(x,s)ds- \\ & -\beta_0\dot{w}(x,t)\int_0^t\frac{\partial^2 Q_2}{\partial s\partial t}(s,t)w(x,s)ds-\frac{D\theta}{2}\frac{\partial Q_1}{\partial s}(t,t)w''^2(x,t)-\frac{D\theta}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''^2(x,s)ds- \\ & \left.-\frac{\beta_0\theta}{2}\frac{\partial Q_2}{\partial s}(t,t)w^2(x,t)-\frac{\beta_0\theta}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 Q_2}{\partial s\partial t}(s,t)w^2(x,s)ds\right)dx.\end{aligned}\quad (3.9)$$

Интегрируя по частям с учетом граничных условий (2.3)–(2.6), будем иметь

$$\begin{aligned}\int_0^l\dot{w}\left(w''''+\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''''(x,s)ds\right)dx &= \int_0^l\dot{w}''\left(w''+\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''(x,s)ds\right)dx, \\ \int_0^l\dot{w}w''dx &= -\int_0^l\dot{w}'w'dx, \quad \int_0^l\dot{w}w''''dx = \int_0^l\dot{w}''^2dx, \quad \int_0^lww''dx = -\int_0^lw'^2dx, \\ \int_0^lww''''dx &= \int_0^lw''\dot{w}''dx, \quad \int_0^lww'dx = 0, \\ \int_0^lw\left(w''''+\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''''(x,s)ds\right)dx &= \int_0^lw''\left(w''+\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''(x,s)ds\right)dx.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Подставляя (3.10) в (3.9), получим

$$\begin{aligned}\dot{\Phi}(t) \leq & -2\int_0^l\left((\beta_1+\alpha-\theta M)\dot{w}^2+\alpha V\dot{w}w'+\beta_2\dot{w}''^2+D\theta w''^2+\beta_0\theta w^2+ \right. \\ & +\left(\frac{\dot{N}(t)}{2}-N(t)\theta\right)w'^2-D\theta w''\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''(x,s)ds-\beta_0\theta w\int_0^t\frac{\partial^2 Q_2}{\partial s\partial t}(s,t)w(x,s)ds+ \\ & +\frac{D\theta}{2}\frac{\partial Q_1}{\partial s}(t,t)w''^2(x,t)+\frac{D\theta}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''^2(x,s)ds+ \\ & \left.+\frac{\beta_0\theta}{2}\frac{\partial Q_2}{\partial s}(t,t)w^2(x,t)+\frac{\beta_0\theta}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 Q_2}{\partial s\partial t}(s,t)w^2(x,s)ds\right)dx.\end{aligned}\quad (3.11)$$

Оценим последние группы слагаемых в оценке (3.11)

$$-D\theta w''\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''(x,s)ds+\frac{D\theta}{2}\frac{\partial Q_1}{\partial s}(t,t)w''^2(x,t)+\frac{D\theta}{2}\int_0^t\frac{\partial^2 Q_1}{\partial s\partial t}(s,t)w''^2(x,s)ds=$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) (w''(x, t) - w''(x, s))^2 ds - \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) w''^2(x, t) ds + \\
&\quad + \frac{D\theta}{2} \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) w''^2(x, t) = \frac{D\theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_1}{\partial s \partial t}(s, t) (w''(x, t) - w''(x, s))^2 ds + \\
&\quad + \frac{D\theta}{2} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) w''^2(x, t) \geq \frac{D\theta}{2} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) w''^2(x, t), \\
&- \beta_0 \theta w \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) w(x, s) ds + \frac{\beta_0 \theta}{2} \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t) w^2(x, t) + \frac{\beta_0 \theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) w^2(x, s) ds = \\
&= \frac{\beta_0 \theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) (w(x, t) - w(x, s))^2 ds - \frac{\beta_0 \theta}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 Q_2}{\partial s \partial t}(s, t) w^2(x, t) ds + \\
&\quad + \frac{\beta_0 \theta}{2} \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t) w^2(x, t) \geq \frac{\beta_0 \theta}{2} \left(\frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t) \right) w^2(x, t).
\end{aligned}$$

Подставляя эти неравенства в (3.11), получим

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t) \leq & -2 \int_0^l \left((\beta_1 + \alpha - \theta M) \dot{w}^2 + \alpha V \dot{w} w' + \frac{D\theta}{2} \left(2 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) w''^2 + \right. \\
& \left. + \beta_2 \dot{w}^2 + \frac{\beta_0 \theta}{2} \left(2 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t) \right) w^2 + \left(\frac{\dot{N}(t)}{2} - N(t)\theta \right) w'^2 \right) dx. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Воспользуемся неравенствами Релея [5]:

$$\begin{aligned}
\int_0^l w''^2(x, t) dx &\geq \lambda_1 \int_0^l w'^2(x, t) dx, \quad \int_0^l w''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_0^l w^2(x, t) dx, \\
\int_0^l \dot{w}''^2(x, t) dx &\geq \mu_1 \int_0^l \dot{w}^2(x, t) dx, \quad \int_0^l w'^2(x, t) dx \geq \eta_1 \int_0^l w^2(x, t) dx, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

где λ_1 , μ_1 , η_1 – наименьшие собственные значения краевых задач для уравнений $\psi'''' = -\lambda\psi''$, $\psi'''' = \mu\psi$, $\psi'' = -\eta\psi$, $x \in (0, l)$ с краевыми условиями (2.3)–(2.6).

Учитывая (3.13), из (3.12) получим

$$\begin{aligned}
\dot{\Phi}(t) \leq & -2 \int_0^l \left\{ \alpha V \dot{w} w' + \left(\frac{\lambda_1 D\theta}{2} \left(2 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) + \frac{\dot{N}(t)}{2} - N(t)\theta \right) w'^2 + \right. \\
& \left. + [\beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1 \beta_2] \dot{w}^2 + \frac{\beta_0 \theta}{2} \left(2 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_2}{\partial s}(t, t) \right) w^2 \right\} dx. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Согласно неравенствам (3.6), (3.7) квадратичная форма относительно w под знаком интеграла в (3.14) будет положительно полуопределена, а квадратичная форма относительно $\dot{w}, w'$ с матрицей

$$\begin{pmatrix} 2(\beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1 \beta_2) & \alpha V \\ \alpha V & \lambda_1 D\theta \left(2 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) + \dot{N}(t) - 2N(t)\theta \end{pmatrix}$$

согласно критерию положительной полуопределенности будет положительно полуопределенной, если выполняются условия:

$$\beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1 \beta_2 > 0, \quad (3.15)$$

$$2(\beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1\beta_2) \left(\lambda_1 D\theta \left(2 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right) + \dot{N}(t) - 2N(t)\theta \right) - \alpha^2 V^2 \geq 0.$$

Таким образом, с учетом (3.15) из (3.14) окончательно получим оценку производной

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0 \Rightarrow \Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (3.16)$$

Используя неравенство $2w_0\dot{w}_0 \leq w_0^2 + \dot{w}_0^2$, оценим начальное значение функционала

$$\begin{aligned} \Phi(0) = \int_0^l \left(M\dot{w}_0^2 + 2\theta M w_0 \dot{w}_0 + (D + \beta_2\theta) w_0''^2 + (\beta_0 + \beta_1\theta + \rho\theta\alpha) w_0'^2 - \right. \\ \left. - N(0) w_0'^2 \right) dx \leq \Phi_2(0) = \int_0^l \left(M(1 + \theta) \dot{w}_0^2 + (D + \beta_2\theta) w_0''^2 + \right. \\ \left. + (\beta_0 + \beta_1\theta + \rho\theta\alpha + \theta M) w_0'^2 - N(0) w_0'^2 \right) dx, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $w_0 = w(x, 0)$, $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$, $w_0' = w'(x, 0)$, $w_0'' = w''(x, 0)$.

Пусть выполняется неравенство

$$\lambda_1 \left(D \left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2\theta \right) - N(t) \geq 0, \quad (3.18)$$

тогда, используя неравенства (3.13) и условия (3.6), (3.7), оценим функционал (3.5) следующим образом

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + 2M\theta w\dot{w} + \left(\beta_0 \left(1 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_1\theta + \alpha\theta \right) w^2 + \right. \\ \left. + \left[\lambda_1 \left(D \left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2\theta \right) - N(t) \right] w'^2 \right\} dx \geq \Phi_1(t) = \int_0^l \left\{ M\dot{w}^2 + 2M\theta w\dot{w} + \right. \\ \left. + \left(\beta_0 \left(1 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_1\theta + \alpha\theta + \eta_1 \left[\lambda_1 \left(D \left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2\theta \right) - N(t) \right] \right) w^2 \right\} dx. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Квадратичная форма относительно w , $\dot{w}$ под знаком интеграла в (3.19) согласно критерию Сильвестра будет положительно определенной, если выполняется условие

$$\beta_0 \left(1 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_1\theta + \alpha\theta + \eta_1 \left[\lambda_1 \left(D \left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right) + \beta_2\theta \right) - N(t) \right] > M\theta^2. \quad (3.20)$$

Тогда $\Phi(t) \geq \Phi_1(t) \geq 0$.

Таким образом, получена система неравенств (3.6), (3.7), (3.15), (3.18), (3.20).

Введем обозначения

$$D_1(t) = D \left(1 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) \right), \quad \beta_{01}(t) = \beta_0 \left(1 + \frac{\partial Q_2}{\partial t}(0, t) \right), \quad (3.21)$$

$$D_2(t) = \frac{D}{2} \left(2 + \frac{\partial Q_1}{\partial t}(0, t) + \frac{\partial Q_1}{\partial s}(t, t) \right).$$

Рассмотрим систему (3.15), (3.18), (3.20):

$$\begin{cases} \beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1\beta_2 > 0, & \lambda_1 (D_1(t) + \beta_2\theta) - N(t) \geq 0, \\ 2(\beta_1 + \alpha - M\theta + \mu_1\beta_2) \left(2\lambda_1\theta D_2(t) + \dot{N}(t) - 2N(t)\theta \right) - \alpha^2 V^2 \geq 0, \\ \beta_{01}(t) + \beta_1\theta + \alpha\theta + \eta_1 [\lambda_1 (D_1(t) + \beta_2\theta) - N(t)] > M\theta^2. \end{cases} \quad (3.22)$$

Дальнейшая задача – проанализировать систему неравенств (3.22) и определить значения параметра θ . Для этого разрешим каждое неравенство системы относительно θ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta > 0, \quad \lambda_1 D_1(t) - N(t) > 0, \quad \lambda_1 D_2(t) - N(t) > 0, \\ 2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t) > 2\alpha V \sqrt{M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}, \\ \theta < \frac{\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2}{M}, \\ \theta \geq \frac{2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) - M\dot{N}(t)}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} - \\ - \frac{\sqrt{\left(2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t)\right)^2 - 4M\alpha^2 V^2(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}, \\ \theta \leq \frac{2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) - M\dot{N}(t)}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} + \\ + \frac{\sqrt{\left(2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t)\right)^2 - 4M\alpha^2 V^2(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}, \\ \theta \geq -\frac{\beta_2}{D_1(t)}, \\ \theta \geq -\frac{\lambda_1 D_1(t) - N(t)}{\lambda_1 \beta_2}, \\ \theta < \frac{\beta_1 + \alpha + \eta_1 \lambda_1 \beta_2 + \sqrt{(\beta_1 + \alpha + \eta_1 \lambda_1 \beta_2)^2 + 4M(\eta_1 \lambda_1 D_1(t) - \eta_1 N(t) + \beta_{01}(t))}}{2M}. \end{array} \right. \quad (3.23)$$

Последние три неравенства выполняются в силу остальных неравенств системы (3.23), поэтому, исключая из системы параметр θ , окончательно получим условия устойчивости:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 D_1(t) - N(t) > 0, \quad \lambda_1 D_2(t) - N(t) > 0, \\ 2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t) > 2\alpha V \sqrt{M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}, \\ \max \left(0, \frac{2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) - M\dot{N}(t)}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} - \right. \\ \left. - \frac{\sqrt{\left(2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t)\right)^2 - 4M\alpha^2 V^2(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} \right) < \\ < \min \left(\frac{\beta_1 + \alpha \rho + \mu_1 \beta_2}{M}, \frac{2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) - M\dot{N}(t)}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} + \right. \\ \left. + \frac{\sqrt{\left(2(\beta_1 + \alpha + \mu_1 \beta_2)(\lambda_1 D_2(t) - N(t)) + M\dot{N}(t)\right)^2 - 4M\alpha^2 V^2(\lambda_1 D_2(t) - N(t))}}{4M(\lambda_1 D_2(t) - N(t))} \right). \end{array} \right. \quad (3.24)$$

Так как при условиях (3.6), (3.7), (3.24) функционал (3.5) удовлетворяет условиям леммы 3.1, т.е. $\dot{\Phi}(t) \leq 0$ согласно (3.16), $\Phi(t) \geq \Phi_1(t) \geq 0$ согласно (3.19), $\Phi(0) \leq \Phi_2(0)$ согласно (3.17), то в соответствии с леммой 3.1 решение $w(x, t)$ и производная $\dot{w}(x, t)$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных условий. Таким образом, доказана следующая теорема.

Т е о р е м а 3.1. Если функция $w(x, t)$ удовлетворяет краевым условиям (2.3)–(2.6) и выполняются условия (3.6), (3.7), (3.24), то решение $w(x, t)$ уравнения (2.1) и производная $\dot{w}(x, t)$ устойчивы по отношению к возмущениям начальных данных.

4. Заключение

На основе предложенной математической модели колебаний вязкоупругого элемента конструкции в виде пластины-полосы при обтекании ее сверхзвуковым потоком идеального газа проведено исследование устойчивости этой пластины. Модель описывается интегродифференциальным уравнением с частными производными для неизвестной функции прогиба пластины. С помощью построенного функционала получены достаточные условия устойчивости решений этого уравнения. Полученные условия устойчивости накладывают ограничения на погонную массу пластины, изгибную жесткость пластины, сжимающее (растягивающее) пластину усилие, скорость невозмущенного однородного потока, а также на коэффициенты внутреннего и внешнего демпфирования, коэффициент жесткости слоя обжатия и ядра релаксации, характеризующие вязкоупругие свойства материала пластины и слоя обжатия. Эти условия явно содержат основные параметры механической системы, и в таком виде они наиболее приспособлены для решения задач оптимизации, автоматического управления, автоматизированного проектирования.

Работа выполнена в рамках государственного задания № 2014/232 Минобрнауки России и при поддержке грантов РФФИ № 15-01-08599 и № 15-41-02455-р-поволжье-а.

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин С.Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 247 с.
2. Анкилов А.В., Вельмисов П. А., “Устойчивость решений одного класса нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных в аэроупругости”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **11:2** (2009), 35–42.
3. Анкилов А.В., Вельмисов П. А., *Динамика и устойчивость упругих пластин при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 220 с.
4. Кийко И. А., Показеев В. В., “К постановке задачи о колебаниях и устойчивости полосы в сверхзвуковом потоке газа”, *Механика жидкости и газа*, 2009, № 1, 159–166.
5. Коллатц А., *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 504 с.
6. Aulisa E., Ibragimov A., Kaya-Cekin E.Y., “Fluid structure interaction problem with changing thickness beam and slightly compressible fluid”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S* **7**, 2014, № 6, 1133–1148.
7. Kounadis A.N., “Flutter instability and other singularity phenomena in symmetric systems via combination of mass distribution and weak damping”, *Internat. J. Non-Linear Mech.*, **42:1** (2007), 24–35.
8. Vedeneev V.V., “Effect of damping on flutter of simply supported and clamped panels at low supersonic speeds”, *Journal of Fluids and Structures*, **40** (2013), 366–372.
9. Willems S., Gulhan A. and Esser B., “Shock induced fluid-structure interaction on a flexible wall in supersonic turbulent flow”, *Progress in Flight Physics*, 2013, № 5, 285–308.

Investigation of stability of viscoelastic element of construction in supersonic flow

© A. V. Ankilov³, P. A. Velmisov⁴

Abstract. The stability of deformable element in the form of a plate in the supersonic flow of ideal gas is investigated. Material aging, i.e. change of its physico-mechanical properties in the course of time, is taken into account. The model of aging viscoelastic body is applied where tension at any point depends on background of material's deformation in this point, and connection between tension and deformation is described by Volterra-Feucht's equation. Aerodynamic pressure upon a plate is defined according to the "piston" theory of A.A. Ilyushin. Based on the functional established in the paper the sufficient conditions for stability of the solution of partial integro-differential equation describing the plate dynamics are obtained.

Key Words: aeroelasticity, mathematical modeling, dynamical stability, plate, supersonic gas flow, differential equation, functional

³ Associate professor of Higher Mathematics Department, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru

⁴ Head of Higher Mathematics Department, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru

УДК 532.529:541.182

Построение периодического решения уравнений движения вязкой жидкости с заданным градиентом давления

© М. С. Дерябина¹, С. И. Мартынов²

Аннотация. Рассматривается проблема построения периодического решения уравнений течения вязкой жидкости в неограниченной области при заданном градиенте давления в классе кусочно-гладких функций для скорости течения. Получено приближенное решение задачи.

Ключевые слова: вязкая жидкость, периодическое решение, кусочно-гладкая функция

1. Введение

Моделирование течения вязкой жидкости в пористой среде является одной из актуальных проблем механики жидкости. Это связано как с математической сложностью самой задачи, так и с чрезвычайно широкой областью возможных приложений результатов моделирования. Например, в таких областях, как извлечение нефти из пласта, создание пористых материалов с заданными свойствами, бытовых и промышленных фильтров для очистки воды и других жидкостей. Одна из основных проблем при моделировании связана с учетом гидродинамического взаимодействия жидкости с частицами пористой среды. В работе [1] построено периодическое всюду конечное решение уравнений Стокса для бесконечной решетки. Скорость жидкости в этом решении представляется в виде постоянной или линейной функции координат. Соответственно давление представляется в виде линейной или постоянной функции. Первую задачу (с постоянной скоростью в потоке) можно рассматривать с двух точек зрения. Если задана скорость, то можно найти градиент давления, и, наоборот, зная градиент давления, можно найти скорость. Однако в этом случае при рассмотренном в работе [1] виде решения с постоянной составляющей скорости возникает особенность при малых значениях параметра, характеризующего расстояние между частицами. В работе [2] сделано предположение, что наличие этой особенности связано с видом решения для скорости потока жидкости. То есть в этом случае решение должно представляться нелинейным профилем скорости, который вблизи частиц приближенно можно заменить течением с квадратичной по координатам функцией. Для этого случая было найдено приближенное решение и проведены оценки коэффициента фильтрации. Однако вопрос, как построить периодическое всюду конечное решение, соответствующее этому случаю, оставался открытым.

В настоящей работе рассматривается метод построения такого решения.

2. Постановка задачи

Рассматривается течение несжимаемой жидкости с вязкостью η в неограниченной области с заданным градиентом давления ∇p_0 . Выберем систему координат так, что одна из осей, например, ось X , будет направлена в противоположном направлении, чем градиент давления. Соответственно, оси Y и Z направлены перпендикулярно градиенту. Будем

¹ Югорский государственный университет, г. Ханты-Мансийск; deryabinams@mail.ru

² Профессор Югорского государственного университета, г. Ханты-Мансийск; martynovsi@mail.ru

рассматривать двумерный случай, когда все искомые величины зависят от двух координат: X и Y . Как известно [3], имеется точное решение уравнений Навье-Стокса для случая течения вязкой жидкости по каналам различного сечения. Для течения жидкости между двумя плоскостями выражение для скорости имеет вид:

$$u_x = -|\nabla p_0| \frac{h^2 - y^2}{2\eta}, \quad (2.1)$$

здесь u_x – скорость жидкости вдоль оси OX ; $2h$ – расстояние между плоскостями; x, y – координаты точки, в которой находится скорость. Приведенное решение соответствует ламинарному течению жидкости. Максимальная скорость в поперечном сечении пропорциональна h^2 и достигается при $y = 0$. С увеличением размеров поперечного сечения максимальная скорость растет. Однако, начиная с определенного значения максимальной скорости, течение, соответствующее данному решению, не реализуется в жидкости. Это можно пояснить следующим образом. Из уравнения неразрывности следует, что составляющая скорости жидкости u_y имеет порядок

$$u_y = u_x \frac{h}{L}.$$

Здесь L – характерный масштаб течения по оси OX . При малых значениях h величина поперечной составляющей скорости мала и ей можно пренебречь. С увеличением поперечного размера h растет и поперечная составляющая скорости. Это означает, что должно реализовываться другое течение. Соответственно и решение уравнений гидродинамики должно быть не таким, как (1). В классической гидродинамике жидкости это называется переходом от ламинарного течения к турбулентному. Согласно теории турбулентного течения в жидкости происходят флуктуации, которые приводят к появлению поперечной составляющей скорости. Флуктуации могут быть крупномасштабные и мелкомасштабные. Поскольку целью работы является построение периодического решения, пригодного в дальнейшем для моделирования фильтрации жидкости, то будем рассматривать такие масштабы течения, для которого возможно использовать приближение Стокса

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad \eta \nabla^2 \mathbf{u} = \nabla p. \quad (2.2)$$

В работе [4] для решения этой задачи о течении жидкости через периодическую систему частиц предлагалось рассматривать каналы треугольного сечения, в которых реализуется течение, соответствующее решению (1) для подобных каналов. Однако такое решение не дает непрерывности напряжений на границах каналов. Чтобы построить искомое решение, разобьем всю область, занимаемую жидкостью, на прямоугольные участки размерами $2L$ и $2h$ по осям X и Y соответственно. Выберем произвольную ячейку и поместим начало координат в центре такой ячейки. Необходимо найти такое решение уравнений (2), чтобы в соседних ячейках оно периодически повторялось. То есть составляющие скорости должны удовлетворять условиям

$$\begin{aligned} u_x(x, h) &= u_x(x, -h), & u_x(-L, y) &= u_x(L, y), \\ u_y(x, h) &= u_y(x, -h), & u_y(-L, y) &= u_x(L, y). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Кроме того, на границах ячейки должны выполняться условия непрерывности нормальных и касательных напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{xy} n_y|_{y=-h} &= \sigma_{xy} n_y|_{y=h}, & \sigma_{yy} n_y|_{y=-h} &= \sigma_{yy} n_y|_{y=h}, \\ \sigma_{yx} n_x|_{x=-L} &= \sigma_{yx} n_x|_{x=L}, & \sigma_{xx} n_x|_{x=-L} - \sigma_{xx} n_x|_{x=L} &= |\nabla p_0| 2L. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь σ_{xy} , σ_{xx} , σ_{yy} – компоненты тензора полных напряжений в жидкости [3]. Последнее условие в (2.4) означает, что вдоль оси OX имеется перепад давления с заданным градиентом ∇p_0 .

3. Общее решение задачи для произвольной ячейки

Систему уравнений (2.2) в произвольной ячейке запишем в виде

$$\begin{aligned}\eta \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p_0}{\partial x} &= 0, \\ \eta \left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} \right) &= 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Фактически полагаем, что течение в ячейке не меняет заданного градиента давления. Как известно из гидродинамики, вихревые течения не меняют распределение давления в жидкости. Следовательно, течение в ячейке должно быть вихревым. Решение системы (3.1) будем искать в виде

$$u_x(x, y) = -|\nabla p_0| \frac{h^2 - y^2}{2\eta} + v(x, y), \quad u_y(x, y) = w(x, y).$$

Для функций $v(x, y)$ и $w(x, y)$ получаем уравнения

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} &= 0, \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

Решение системы (3.2) будем искать в виде

$$v(x, y) = \psi(x)\zeta(y), \quad w(x, y) = f(x)\varphi(y).$$

Из первого уравнения системы (3.1) получаем равенство

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \frac{1}{\psi(x)} + \frac{d^2\zeta(y)}{dy^2} \frac{1}{\zeta(y)} = 0.$$

Первый вариант комбинации функций.

Полагаем, что имеем равенства

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \frac{1}{\psi(x)} = -k^2, \quad \frac{d^2\zeta(y)}{dy^2} \frac{1}{\zeta(y)} = k^2.\tag{3.3}$$

Здесь $k = 2\pi/\lambda$, а λ – некий параметр, имеющий размерность длины. Решение уравнений (3.3) имеет вид

$$\psi(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx), \quad \zeta(y) = C \exp(-ky) + D \exp(ky).$$

Из третьего уравнения системы (3.1) получим соотношения

$$\frac{d\psi(x)}{dx} \zeta(y) + f(x) \frac{d\varphi(y)}{dy} = 0.$$

Будем считать, что

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = f(x), \quad \zeta(y) = -\frac{d\varphi(y)}{dy}.$$

Интегрируя последние соотношения, получаем равенства

$$f(x) = -Ak \cos(kx) + Bk \sin(kx), \quad \varphi(y) = (C \exp(-ky) - D \exp(ky))/k.$$

Таким образом имеем выражения для скорости жидкости

$$\begin{aligned} v(x, y) &= (A \cos(kx) + B \sin(kx))(C \exp(-ky) + D \exp(ky)), \\ w(x, y) &= (-A \cos(kx) + B \sin(kx))(C \exp(-ky) - D \exp(ky)). \end{aligned}$$

Легко проверить, что выражение для $w(x, y)$ удовлетворяет второму уравнению системы (3.1).

Из условия непрерывности скорости $v(x, y)$ на границах ячейки следует, что $B = 0$, $D = C$. То есть получаем

$$\begin{aligned} v(x, y) &= AC \cos(kx)(\exp(-ky) + \exp(ky)), \\ w(x, y) &= -AC \cos(kx)(\exp(-ky) - \exp(ky)). \end{aligned}$$

Однако, составляющая скорости $w(x, y)$ и нормальные напряжения $\sigma_{xx}n_x$ в этом случае не удовлетворяют условиям непрерывности (2.3 и 2.4). Для того, чтобы удовлетворить этим условиям, рассмотрим еще один вариант комбинации функций, определяющих решение.

Второй вариант комбинации функций.

Полагаем, что в этом случае имеем равенства

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \frac{1}{\psi(x)} = k^2, \quad \frac{d^2\zeta(y)}{dy^2} \frac{1}{\zeta(y)} = -k^2.$$

Повторяя вычисления, приведенные выше для первого варианта, получим, что составляющие скорости в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} v(x, y) &= (A_1 \cos(ky) + B_1 \sin(ky))(C_1 \exp(-kx) + D_1 \exp(kx)), \\ w(x, y) &= (-A_1 \cos(ky) + B_1 \sin(ky))(C_1 \exp(-kx) - D_1 \exp(kx)). \end{aligned}$$

Аналогично первому варианту из условия непрерывности скорости $v(x, y)$ на границах ячейки следует, что $B_1 = 0$, $D_1 = C_1$. То есть

$$\begin{aligned} v(x, y) &= A_1 C_1 \cos(ky)(\exp(-kx) + \exp(kx)), \\ w(x, y) &= -A_1 C_1 \cos(ky)(\exp(-kx) - \exp(kx)). \end{aligned}$$

Объединяя решения двух рассмотренных вариантов комбинаций функций, получаем окончательно выражения для составляющих скорости

$$\begin{aligned} v(x, y) &= AC \cos(kx)(\exp(-ky) + \exp(ky)) + A_1 C_1 \cos(ky)(\exp(-kx) + \exp(kx)), \\ w(x, y) &= -AC \cos(kx)(\exp(-ky) - \exp(ky)) - A_1 C_1 \cos(ky)(\exp(-kx) - \exp(kx)). \end{aligned}$$

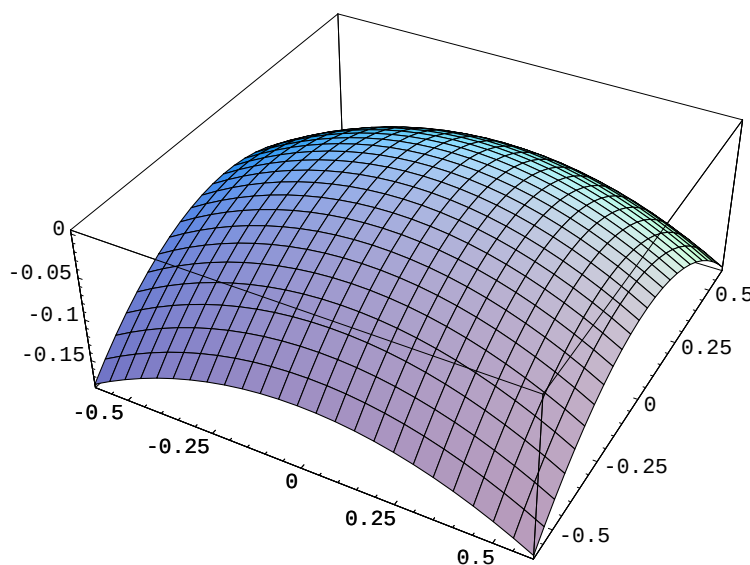
Подставляя найденные соотношения в выражения для скорости $w(x, y)$ и считая, что $kx \ll 1$, $ky \ll 1$ (это всегда можно сделать соответствующим выбором размеров ячейки L и h) получим следующее приближение с точностью до квадратов малых величин включительно

$$w(x, y) = -2(AC + A_1 C_1)kykx.$$

Для того, чтобы составляющая скорости была непрерывна на границах ячейки полагаем, что $A_1 C_1 = -AC$. Тогда последнее условие в (2.4) выполняется с той же точностью, что и для $w(x, y)$, а из первого условия (2.4) получим

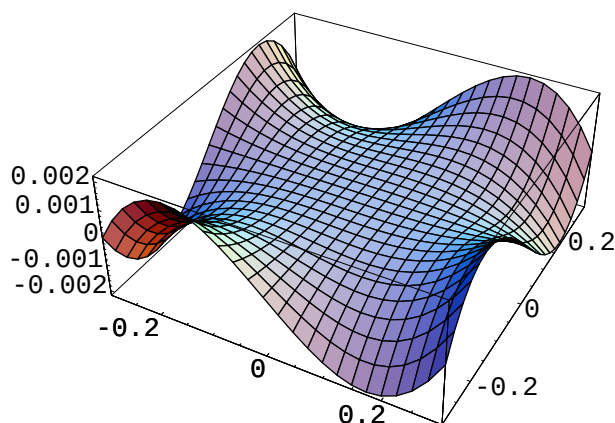
$$AC = -\frac{1}{4k^2\eta} |\nabla p_0|.$$

Профили составляющих скорости в ячейке показаны на рис.1 и рис. 2.



Р и с у н о к 3.1

Профиль скорости v в ячейке



Р и с у н о к 3.2

Профиль скорости w в ячейке

4. Результаты

Как видно из рисунков, хотя скорость зависит от координат не по квадратичному закону, вблизи центра ячейки ее профиль близок к параболическому, что и было получено в работе [2]. В соседних ячейках имеется такое же распределение скорости и удовлетворяет условиям непрерывности скорости, касательных и нормальных напряжений на границе ячеек. Таким образом, невозмущенное течение вязкой жидкости представляет собой периодическое движение с заданным градиентом давления. Используя это решение можно рассчитать течение жидкости с заданным градиентом давления через бесконечную периодическую решетку частиц, помещенных в центр ячейки.

Следует отметить, что полученные выражения для составляющих скорости течения жидкости содержат параметры k и h . Вопрос об определении средних значений этих параметров и получении осредненных выражений для скорости течения требует дальнейшего рассмотрения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-007-р_урал_а)

Дата поступления 29.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С. И. Мартынов, А. О. Сыромясов, "Вязкость суспензии с кубической решеткой сфер в сдвиговом потоке", *Изв. РАН. МЖГ.*, 2005, № 4, 3–14.
2. С. И. Мартынов, "Движение вязкой жидкости через периодическую решетку сфер", *Изв. РАН. МЖГ.*, 2002, № 6, 48 - 54.
3. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика*, Наука, М., 1986, 736 с.
4. М. С. Дерябина, С. И. Мартынов, "Моделирование фильтрации вязкой жидкости с заданным градиентом давления", *Укр. мат. журн.*, **45**:12 (1993), 1595–1600.

Construction of periodic solutions equations of motion of a viscous fluid with a predetermined pressure gradient

© M. S. Deryabina³, S. I. Martynov⁴

Abstract. The problem of constructing a periodic solution for the equations of viscous flow in unbounded domain for a given pressure gradient in the class of piecewise smooth functions for the flow velocity is considered. An approximate solution of the problem is obtained.

Key Words: viscous fluid, periodic solution, piecewise smooth function

³ Ugra State University, Khanty-Mansiysk; deryabinams@mail.ru

⁴ Professor of Ugra State University, Khanty-Mansiysk; martynovsi@mail.ru

УДК 519.63

Математическое моделирование динамики многокомпонентного газа с использованием WENO схем на примере пиролиза этана

© Р. В. Жалнин¹, Е. Е. Пескова², О. А. Стадниченко³, В. Ф. Тишкин⁴

Аннотация. В настоящей работе построена схема высокого порядка точности для моделирования ламинарного течения многокомпонентной смеси. Данная смесь представляет собой вязкий теплопроводный газ, в котором происходит химическая реакция пиролиза этана. Разработан и реализован параллельный вычислительный алгоритм с использованием технологии MPI. С целью верификации построенной схемы разработана программа для нахождения газодинамических параметров и концентраций веществ реакции пиролиза этана в замкнутом реакторе. Проведены расчеты течения газовой смеси в проточном металлическом реакторе с внешним обогревом реакционной зоны. Найдены распределения температуры, плотности и массовых концентраций реагентов в продольном разрезе реактора.

Ключевые слова: WENO схема, высокий порядок точности, технология MPI, пиролиз этана.

1. Введение

На сегодняшний день ведущим способом получения низших олефинов является термический пиролиз углеводородов. В Институте катализа имени Г.К. Борескова проводятся работы по созданию установок [1-3], использующих технологии пиролиза алканов в условиях интенсивных физических воздействий. Для детального изучения процессов пиролиза при различных условиях протекания реакции актуальной является задача математического моделирования таких процессов, которая позволит избежать пристрелочных этапов создания сложных и дорогостоящих установок. При построении разностных схем для выбранной математической модели необходимо использовать численные алгоритмы высокого порядка точности, чтобы получить результаты, наиболее точно описывающие исследуемый процесс. Также необходимо использовать технологии параллельных вычислений, так как при решении реальных задач приходится работать с большими областями данных. В данной статье проведено математическое моделирование пиролиза этана в реакторе с внешним обогревом реакционной зоны [3] с использованием схем высокого порядка точности [4]. Для сокращения времени расчетов был построен и реализован параллельный вычислительный алгоритм на основе технологии MPI.

¹ Заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; zhrv@mrsu.ru

² Преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; peskovaee@apppmath.mrsu.ru

³ Научный сотрудник, Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск; zasypoa@catalysis.ru

⁴ Член-корр. РАН, заместитель директора по научной работе, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша, г. Москва; v.f.tishkin@mail.ru

2. Математическая модель и алгоритм дискретизации

Математическая модель течения многокомпонентного реагирующего газа в реакторе представляет собой систему уравнений, включающую уравнение неразрывности, уравнения сохранения импульса и энергии, уравнения неразрывности для каждой компоненты газовой смеси [5], которая подробно описана в работе [6].

В векторном виде данные уравнения, с учетом расщепления потоков на конвективные и диффузионные составляющие, можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial (F^{(1)}(U) - H^{(1)}(U))}{\partial x} + \frac{\partial (F^{(2)}(U) - H^{(2)}(U))}{\partial y} = Q. \quad (2.1)$$

Здесь

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho Y_i \\ \rho u \\ \rho v \\ E \end{pmatrix}, \quad F^{(1)}(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u Y_i \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (E + p)u \end{pmatrix}, \quad F^{(2)}(U) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v Y_i \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (E + p)v \end{pmatrix},$$

$$H^{(1)}(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ J_{ix} \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v + q_x \end{pmatrix}, \quad H^{(2)}(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ J_{iy} \\ \tau_{yx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{yx}u + \tau_{yy}v + q_y \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_i \\ 0 \\ 0 \\ S_h \end{pmatrix},$$

$$J_{ix} = \rho D_{mi} \frac{\partial Y_i}{\partial x}, \quad J_{iy} = \rho D_{mi} \frac{\partial Y_i}{\partial y},$$

$$q_x = \lambda \frac{\partial T}{\partial x} + \sum_{j=1}^M h_j \rho D_{mj} \frac{\partial Y_j}{\partial x}, \quad q_y = \lambda \frac{\partial T}{\partial y} + \sum_{j=1}^M h_j \rho D_{mj} \frac{\partial Y_j}{\partial y},$$

$$\tau_{xx} = \mu \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right), \quad \tau_{yy} = \mu \left(2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right),$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad i = 1, 2, \dots, M.$$

Здесь ρ – плотность, u, v – компоненты вектора скорости, Y_i – массовая концентрация i -ой компоненты, p – давление, $E = \rho \left(\epsilon + \frac{u^2 + v^2}{2} \right)$ – удельная полная энергия, T – температура, Q_i – скорость образования или расхода i -ой компоненты, J_{ix}, J_{iy} – компоненты вектора диффузионного потока i -ого вещества, q_x, q_y – компоненты вектора потока тепла для смеси, D_{mi} – коэффициент диффузии i -ой компоненты, h_i – энтальпия i -ой компоненты, λ – коэффициент теплопроводности смеси, μ – коэффициент динамической вязкости, S_h – нагрев или охлаждение в результате химической реакции.

Для построения дискретной модели используем равномерную сетку. Газодинамические параметры рассматриваем как интегральные средние в ячейках сетки.

Для аппроксимации системы уравнений (2.1) используем консервативную нелинейную дифференциально-разностную схему вида:

$$\begin{aligned} \frac{dU_{ij}}{dt} + \frac{\tilde{F}_{i+1/2j}^{(1)} - \tilde{F}_{i-1/2j}^{(1)}}{h_x} + \frac{\tilde{F}_{ij+1/2}^{(2)} - \tilde{F}_{ij-1/2}^{(2)}}{h_x} - \\ - \left(\frac{\tilde{H}_{i+1/2j}^{(1)} - \tilde{H}_{i-1/2j}^{(1)}}{h_x} + \frac{\tilde{H}_{ij+1/2}^{(2)} - \tilde{H}_{ij-1/2}^{(2)}}{h_x} \right) = Q_{ij} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $\tilde{F}_{i+1/2j}^{(1)}, \tilde{F}_{ij+1/2}^{(2)}$ – конвективные потоки, которые рассчитываются по схеме Лакса-Фридрикса-Русанова [7, 8]:

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{i+1/2j}^{(1)} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{F}^{(1)}(U_{i+1/2j}^r) + \tilde{F}^{(1)}(U_{i+1/2j}^l) - \alpha_1 (U_{i+1/2j}^r - U_{i+1/2j}^l) \right), \\ \tilde{F}_{ij+1/2}^{(2)} &= \frac{1}{2} \left(\tilde{F}^{(2)}(U_{ij+1/2}^r) + \tilde{F}^{(2)}(U_{ij+1/2}^l) - \alpha_2 (U_{ij+1/2}^r - U_{ij+1/2}^l) \right), \\ \alpha_1 &= \max \left(|u_{ij}| + \sqrt{\frac{\gamma p_{ij}}{\rho_{ij}}}, |u_{i+1j}| + \sqrt{\frac{\gamma p_{i+1j}}{\rho_{i+1j}}} \right), \\ \alpha_2 &= \max \left(|v_{ij}| + \sqrt{\frac{\gamma p_{ij}}{\rho_{ij}}}, |v_{ij+1}| + \sqrt{\frac{\gamma p_{ij+1}}{\rho_{ij+1}}} \right), \end{aligned}$$

$\tilde{H}_{i+1/2j}^{(1)}, \tilde{H}_{ij+1/2}^{(2)}$ – диффузионные и тепловые потоки, которые рассчитываются по схеме с центральными разностями, $\tilde{Q}_{ij}$ – среднее по ячейке значение источникового члена.

Для нахождения значений вектора переменных U слева и справа от границы между i и $i+1$ ячейками $U_{i+1/2j}^r, U_{i+1/2j}^l$, используем WENO схему пятого порядка точности, описанную в работе [4, 9].

Введем вектор примитивных переменных [10] $q = q(U) = (\rho, u, v, p)$. С помощью WENO алгоритма проведем его интерполяцию на границе между ячейками, а затем пересчитаем значение искомого вектора $U_{i+1/2j}^r = U(q_{i+1/2j}^r)$.

Интерполяцию на границе между ячейками проводим следующим образом [4]:

$$q_{i+1/2j} = \sum_{l=0}^{K-1} \omega_l q_{i+1/2j}^{(l)}. \quad (2.3)$$

Здесь $q_{i+1/2j}^{(l)} = \sum_{j=0}^{K-1} c_{lj} q_{i-l+j}$, $l = 0, \dots, K-1$ – значение на грани, полученное на шаблоне $S_l^{(i)} = \{x_{i-l}, \dots, x_i, \dots, x_{i-l+K-1}\}$, ω_l – весовые коэффициенты, удовлетворяющие условиям:

$$\omega_l = \frac{\alpha_l}{\sum_{s=0}^{K-1} \alpha_s}, \alpha_l = \frac{d_l}{(\epsilon + \beta)^2}, l = 0, \dots, K-1.$$

Введение малой величины ϵ исключает случай обращения знаменателя в ноль, β_l – индикатор гладкости [4], d_l – коэффициенты полученные при интерполяции значения на границе ячейки на расширенном шаблоне $S_*^{(i)} = \{x_{i-K+1}, \dots, x_i, \dots, x_{i+K-1}\}$.

Для получения схемы пятого порядка точности полагаем $K = 3$, значения величин c_{lj}, d_l, β_l приведены в работе [4].

Дискретизация по времени выполняется по схеме Рунге-Кутты:

$$\begin{aligned} U^* &= U^n + \Delta t \cdot L(U^n), \\ U^{**} &= \frac{3}{4}U^n + \frac{1}{4}U^* + \frac{1}{4}\Delta t \cdot L(U^*), \\ U^{n+1} &= \frac{1}{3}U^n + \frac{2}{3}U^{**} + \frac{2}{3}\Delta t \cdot L(U^{**}). \end{aligned}$$

Шаг по времени выбирается, исходя из условий устойчивости [4, 5].

3. Модель химической реакции пиролиза этана

В таблице 1 представлена схема брутто-реакции пиролиза этана, предэкспоненциальный множитель A_i и энергия активации E_i для каждой элементарной стадии [11].

№	Стадия	$A_i, \frac{1}{c}$ или $\frac{\text{л}}{\text{моль} \cdot \text{с}}$	E_i
1	$C_2H_6 \rightarrow C_2H_4 + H_2$	1.08E+16	2.5E+5
2	$2C_2H_6 \rightarrow C_2H_4 + 2CH_4$	3.16E+16	2.7E+5

Таблица 1: Схема и кинетические параметры механизма брутто-реакции пиролиза этана

№	Стадия реакции	Скорость стадии
1	$B_1 \rightarrow B_2 + B_3$	$w_1 = A_1 e^{\left(\frac{-E_1}{RT}\right)} \cdot \left(\frac{\rho Y_1}{M_{w_1}}\right)$
2	$2B_1 \rightarrow B_2 + 2B_4$	$w_2 = A_2 e^{\left(\frac{-E_2}{RT}\right)} \cdot \left(\frac{\rho Y_1}{M_{w_1}}\right)^2$

Таблица 2: Кинетические уравнения для элементарных стадий реакции

Последовательность химических превращений и кинетические уравнения элементарных стадий приведены в таблице 2, где $B_1 = [C_2H_6]$, $B_2 = [C_2H_4]$, $B_3 = [H_2]$, $B_4 = [CH_4]$.

Скорость образования или расхода каждой компоненты в ходе реакции рассчитываются по закону действующих масс:

$$\begin{aligned} Q_1 &= M_{w_1} \cdot (-1 \cdot w_1 - 2 \cdot w_2), \\ Q_2 &= M_{w_2} \cdot (1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2), \\ Q_3 &= M_{w_3} \cdot (1 \cdot w_1), \\ Q_4 &= M_{w_4} \cdot (2 \cdot w_2). \end{aligned}$$

Коэффициенты для расчета удельной теплоемкости веществ C_p , параметры Леннарда-Джонса σ_i , $\left(\frac{\epsilon}{k_b}\right)_i$, необходимые для расчета коэффициента диффузии приведены в работе [3].

4. Параллельный вычислительный алгоритм

Параллельный вычислительный алгоритм построен на основе технологии для систем с распределенной памятью MPI (Message Passing Interface). Распараллеливание основано на геометрической декомпозиции расчетной области и распределении полученных подобластей по соответствующим процессорам или ядрам процессора. Алгоритм работы программного комплекса условно можно описать следующим образом.

При запуске программы происходит чтение начальных данных из файла и декомпозиция расчетной области (модуль *startup()*). Далее на каждом вычислительном узле происходит формирование массивов данных. В массивы записываются начальные условия для каждой области и формируются фиктивные ячейки для реализации граничных условий и межпроцессорных обменов.

На каждом шаге по времени запускается подпрограмма вычисления граничных условий *bnd_cond()*, которая записывает данные в фиктивные ячейки, если они являются

граничными в исходной области. Для заполнения фиктивных ячеек, расположенных на границе между процессорами, запускается подпрограмма *exch_bnd_cond()*, которая выполняет межпроцессорный обмен данными. Затем реализуется численный алгоритм расчета газодинамических величин. Расчеты ведутся, пока не будет достигнуто заданное время.

Через определенное число шагов выполняется подпрограмма *save_vtk()*, которая записывает результаты в файл в формате VTK для дальнейшей обработки и визуализации. Используются XML-форматы (PVTU и VTU) для параллельного вывода результатов независимо каждым процессором.

5. Вычислительный эксперимент

На рисунке 1 представлена упрощенная схема металлического реактора, разработанного в Институте катализа имени Г. К. Борескова [1-3].

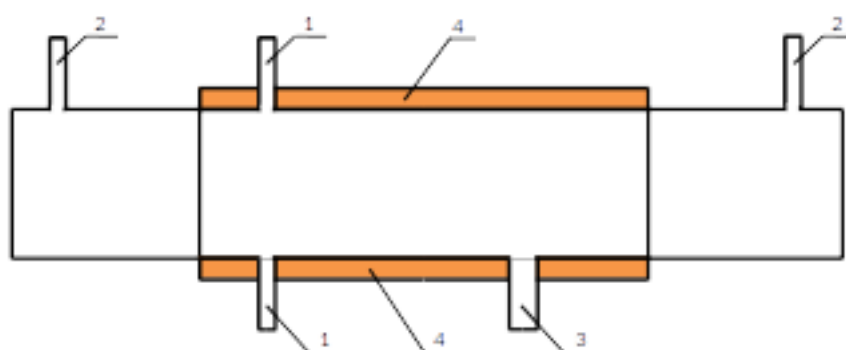


Рис. 1: Схема реактора. 1) вводы для подачи газовой смеси, диаметр – 4 мм; 2) вводы для подачи защитного газа метана CH_4 , диаметр – 4 мм; 3) выход газовой смеси, диаметр – 6 мм; 4) внешний нагреватель.

Общая длина реактора 220 мм, диаметр 21 мм, длина нагревательных элементов 70 мм.

Моделирование замкнутого реактора. Для верификации численного алгоритма предполагается, что реактор замкнут и нагрет до температуры 950 К. В начальный момент времени область заполнена этаном, давление в области $p = 101325$ Па.

На рисунках 2 – 3 приведены графики изменения концентраций исходного продукта этана и целевого продукта пиролиза – этилена – во времени. Степень конверсии этана к моменту установления при указанных температурах составляет около 42%, что близко к наблюдаемым в экспериментах значениям конверсии – около 40%.

Моделирование проточного реактора. В начальный момент времени реактор заполнен метаном, температура $T = 300$ К. Через вводы (1) подается этан, температура $T = 600$ К. Через вводы (2) подается защитный газ метан, $T = 300$ К. Температура нагревательных элементов (4) $T = 1033$ К. Выход продуктов пиролиза осуществляется через выход (3).

В результате нагрева стенок температура этана становится достаточной для переработки газа в продукты реакции. Вследствие течения газа и химических реакций происходит перераспределение компонентов смеси по всему объему реактора. На рисунке 4 приведены распределения массовых долей компонент смеси. В буферных зонах преимущественно присутствует метан, наибольшая концентрация продуктов пиролиза наблюдается в правой части реакционной зоны, что объясняется движением продуктов в этом направлении и их накоплением. Поток метана, находящиеся в буферных зонах, не успевают охладить

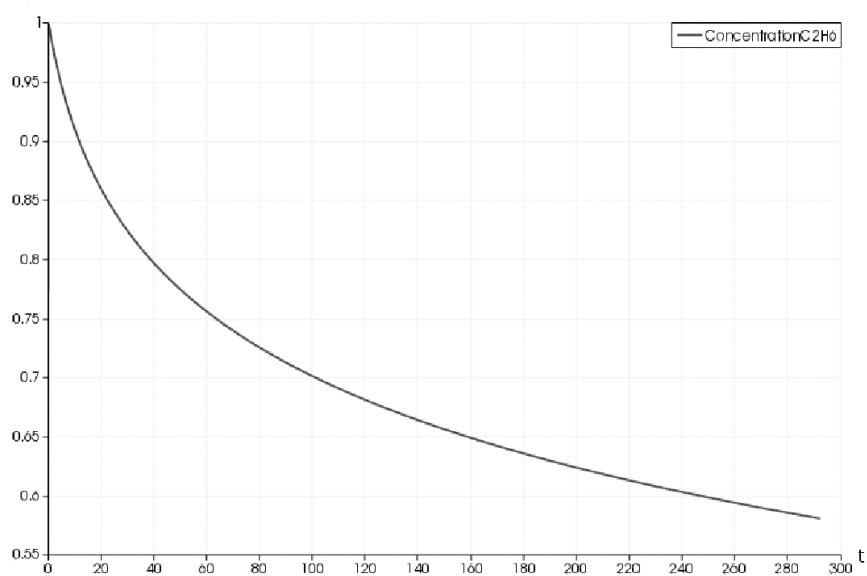


Рис. 2: Изменение концентрации этана

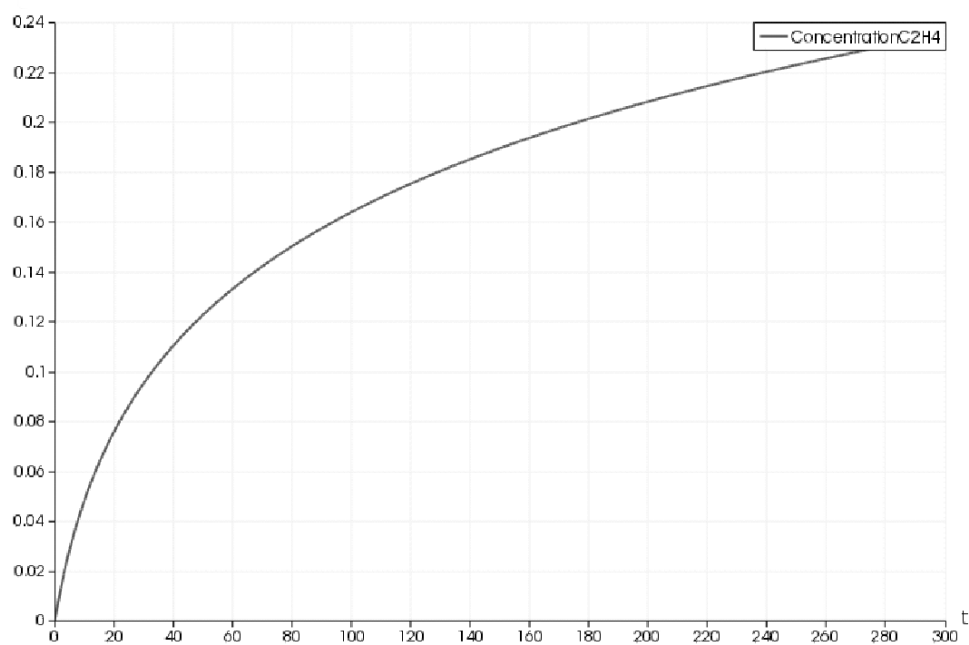


Рис. 3: Изменение концентрации этилена

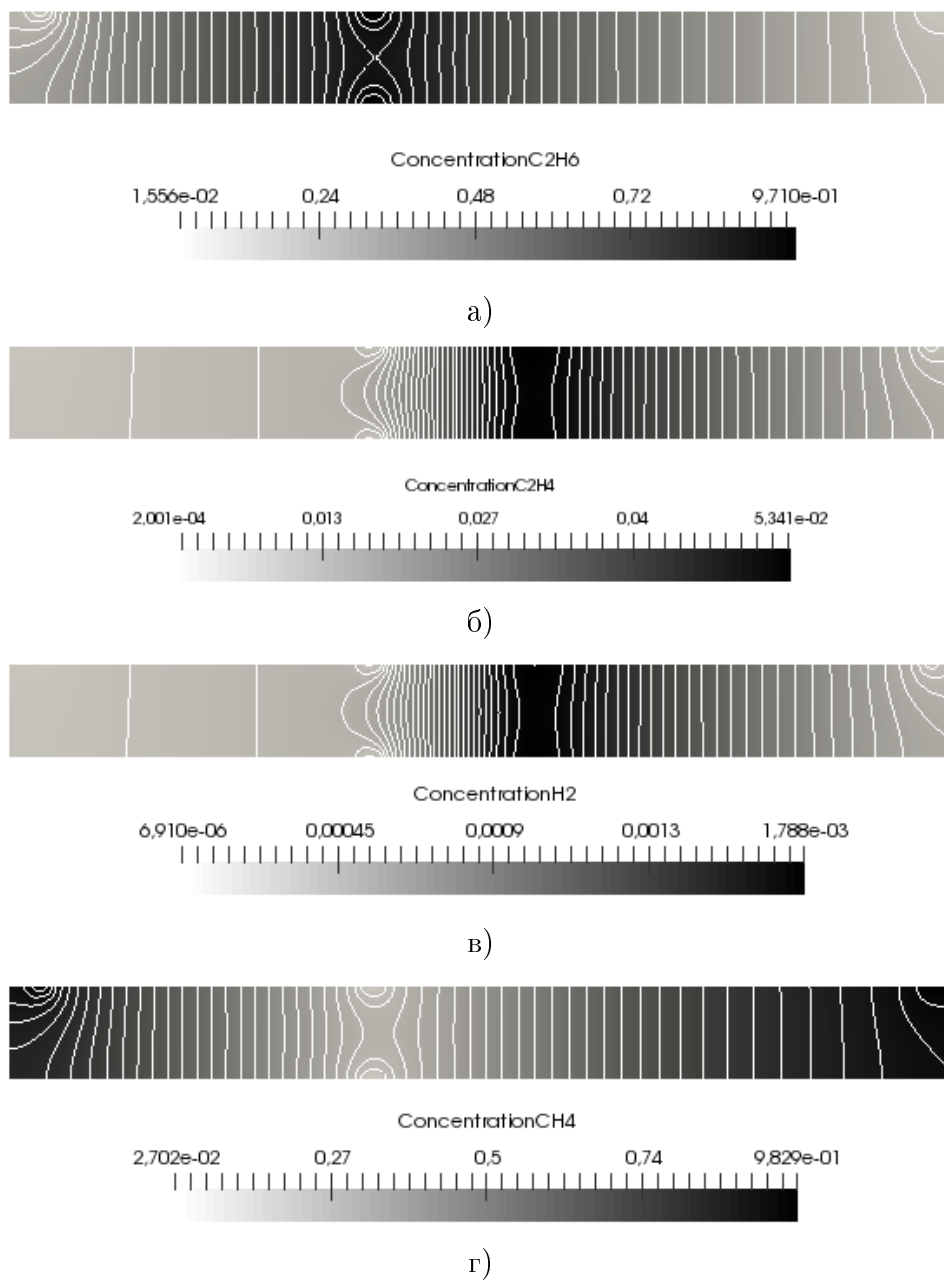
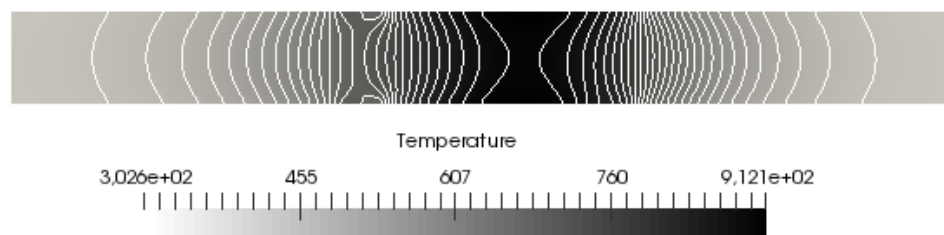
Рис. 4: Распределение и изолинии массовых долей C_2H_6 (а), C_2H_4 (б), H_2 (в), CH_4 (г)

Рис. 5: Распределение и изолинии температуры

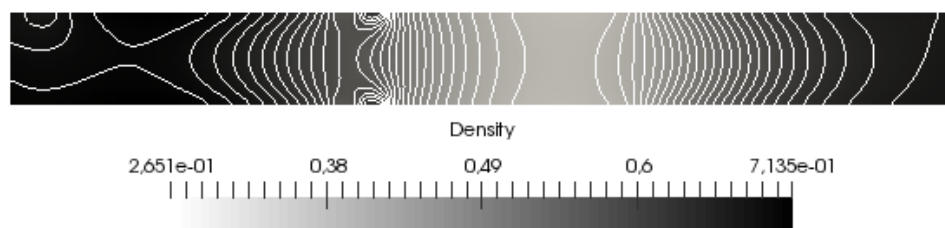


Рис. 6: Распределение и изолинии плотности

смесь в реакционной зоне, которая оснащена нагревательными элементами. На рисунке 5 изображено распределение температуры в продольном сечении реактора. Наибольшее значение равно 912 K, что ниже значения граничного условия. Это объясняется тем, что реакция пиролиза этана является эндотермической и проходит условиях интенсивного поглощения энергии. Это приводит к снижению температуры газа в зонах переработки этана в продукты реакций. Максимальная температура наблюдается в пристеночных областях реакционной зоны (рисунок 5), за счет чего в этих областях химическая реакция происходит наиболее активно. Это подтверждают графики распределения водорода и этилена (рисунок 4 в и б), которые являются продуктами реакции. Большая концентрация метана вблизи торцевых стенок (рисунок 4 г) объясняется постоянным вводом защитного газа в эту область. Наибольшая плотность наблюдается на входах защитного и исходного газа, а также в областях буферных зон (рисунок 6). Такое распределение связано с тем, что газ по своим характеристикам близок к идеальному. В то же время в данном проточном реакторе давление равно атмосферному. Поэтому нагрев газа приводит к его разрежению.

6. Заключение

В работе построен вычислительный алгоритм на основе WENO-схемы пятого порядка точности для моделирования течения многокомпонентного газа с учетом химических реакций. Предложенная методика реализована в параллельном программном комплексе, разработанном с использованием технологии MPI. Выполнено моделирование процесса пиролиза этана в замкнутом и проточном реакторе в двумерной постановке. Результаты расчетов показали, что изменения концентраций веществ и поведение газодинамических параметров соответствуют основным физико-химическим законам. Однако для детального сопоставления расчетных и экспериментальных данных требуется уточнение геометрии реактора и кинетической схемы химической реакции.

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. V. N. Snytnikov, T. I. Mishchenko, Vl. N. Snytnikov, S. E. Malykhin, V. I. Avdeev, V. N. Parmon, "Autocatalytic gas-phase dehydrogenation of ethane", *Research on Chemical Intermediates*, **38** (2012), 1133 – 1147.
2. O. A. Stadnichenko, V. N. Snytnikov, Vl. N. Snytnikov, N. S. Masyuk, "Mathematical modeling of ethane pyrolysis in a flow reactor with allowance for laser radiation effects", *Chemical Engineering Research and Design*, **109** (2016), 405–413.

3. О. А. Стадниченко, В. Н. Снытников, Вл. Н. Снытников, “Математическое моделирование потоков многокомпонентного газа с энергоемкими химическими процессами на примере пиролиза этана”, *Вычислительные методы и программирование*, **15** (2014), 658-668.
4. C.-W. Shu, “Essentially non-oscillatory and weighted essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws”, *ICASE Report 97-65*, 1997.
5. Э. Оран, Дж. Борис, *Численное моделирование реагирующих потоков*, Мир, М., 1990, 664 с.
6. И. М. Губайдуллин, Е. Е. Пескова, О. С. Язовцева, “Математическая модель динамики многокомпонентного газа на примере брутто-реакции пиролиза этана”, *Огарев-online*, **20** (2016), <http://journal.mrsu.ru/arts/matematicheskaya-model-dinamiki-mnogokomponentnogo-gaza-na-primere-brutto-reakcii-piroliza-etana>.
7. В. В. Русанов, “Расчет взаимодействия нестационарных ударных волн с препятствиями”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **1:2** (1961), 267 – 279.
8. P. D. Lax, “Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation”, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **7:1** (1954), 159 – 193.
9. Р. В. Жалнин, Н. В. Змитренко, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Тишкин, “Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности”, *Математическое моделирование*, **19:10** (2007), 61 – 66.
10. В. Ф. Тишкин, В. В. Никишин, И. В. Попов, А. П. Фаворский, “Разностные схемы трехмерной газовой динамики для задачи о развитии неустойчивости Рихтмайера–Мешкова”, *Математическое моделирование*, **7:5** (1995), 15 – 25.
11. Мухина Т.Н., Барабанов Н.Л., Бабаш С.Е. и др., *Пиролиз углеводородного сырья*, Химия, М., 1987, 240 с.

Using WENO schemes in mathematical modeling of gas mixture’s dynamics by the example of ethane pyrolysis

© R. V. Zhalnin⁵, E. E. Peskova⁶, O. A. Stadnichenko⁷, V. F. Tishkin⁸

Abstract. In this paper scheme with high order of precision is established for modeling of mixture’s laminar flow. This mixture is viscous heat-conducting gas where ethane pyrolysis reaction proceeds. Parallel computational algorithm using MPI technology is developed. To verify the scheme software is developed for calculation of reagent concentrations and gas-dynamic parameters for ethane pyrolysis in a closed reactor. Calculations are made for the gas flow in a metallic flow reactor with external heating of reaction zone. In reactor’s longitudinal section distributions of temperature, density and mass concentrations of reagents are found.

Key Words: WENO scheme, high order of accuracy, MPI technology, ethane pyrolysis

⁵ Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk; zhrv@mrsu.ru

⁶ Assistant Lecturer at Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, National Research Ogarev Mordovia State University, Saransk; peskovaee@appmath.mrsu.ru

⁷ Researcher at Borekov Institute of Catalysis, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk State University, Novosibirsk; zasypoa@catalysis.ru

⁸ Corresponding Member of Russian Academy of Sciences, Deputy director of Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow; v.f.tishkin@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

УДК 51-7;681.51

Моделирование управляемых механических систем с цифровым управлением

© А. С. Андреев¹, Е. А. Кудашова²

Аннотация. В статье исследуется проблема синтеза дискретного ступенчатого управления, решающего задачу о стабилизации программных движений голономных механических систем. Такие системы описываются уравнениями Лагранжа второго рода. Дискретные управляющие сигналы используются в системах управления непрерывными процессами, содержащих компьютеры. Разработка соответствующих моделей таких управляемых процессов приводит к необходимости изучения непрерывно-дискретных систем, в которых состояние описывается непрерывной функцией, а управление строится на основе дискретных функций. В статье предложен подход в построении управления, учитывающий нелинейность системы и нестационарность программного движения. С помощью построения вектор-функции Ляпунова и системы сравнения получены достаточные условия стабилизации заданного программного движения. Особенностью решения данной задачи является применение вектор-функции Ляпунова, с компонентами, зависящими явно от времени, нелинейными относительно обобщенных координат. Это позволило решить задачу стабилизации в общем виде с возможностью подбора наиболее подходящих параметров управления для каждой конкретной системы.

Ключевые слова: стабилизация, управление, дискретное управление, синтез управления механическими системами, вектор-функции Ляпунова, системы сравнения, нестационарные нелинейные динамические системы.

1. Введение

Проблема построения дискретных законов управления механическими системами, функционирующими в непрерывном времени, является актуальной в связи с широким использованием компьютерных технологий. В настоящее время сформировалось три основных направления в исследовании данной проблемы. Первое направление (см. напр. [1], [2], [3]) состоит в дискретной аппроксимации всей системы с последующим построением дискретного управления для данной приближенной модели. Данный подход не позволяет учесть поведение системы в промежутках между моментами дискретизации, что приводит к неточности в решении задачи управления. Второе направление [4] связано с построением непрерывных законов управления для непрерывных моделей систем с последующей их дискретизацией. Такой подход дает достаточно точное решение задачи лишь для малых значений периода дискретизации. Оба этих направления позволяют решить задачу стабилизации движения механической системы в практическом смысле, когда отклонения от программного движения с ростом времени становятся малыми, но не сходятся к нулю.

¹ Декан факультета математики, информационных и авиационных технологий, профессор, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информационной безопасности и теории управления, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; andreevas@sv.ulsu.ru

² Программист кафедры информационной безопасности и теории управления факультета математики, информационных и авиационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; katherine.kudashova@yandex.ru

Третье направление состоит в построении дискретных законов управления для непрерывных моделей систем без аппроксимации. Такой подход позволяет получить более точное решение задачи стабилизации по сравнению с предыдущими.

В настоящей работе на основе метода векторных функций Ляпунова построены непрерывный и дискретный законы управления для голономной механической системы с n степенями свободы. Задача стабилизации нестационарного программного движения системы решена в нелинейной постановке без перехода к упрощенной дискретной линейной модели.

2. Постановка задачи о стабилизации программного движения

Рассматривается управляемая механическая система, положение которой определяется n обобщенными координатами $q_1, q_2, \dots, q_n$, а движение описывается уравнениями Лагранжа [5]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U, \quad (2.1)$$

где $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)' \in \mathbb{R}^n$ есть вектор координат, $T = 1/2 \dot{q}' A(q) \dot{q}$ — кинетическая энергия системы, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ является положительно-определенной и непрерывно дифференцируемой матрицей, $Q = Q(t, q, \dot{q})$ — вектор обобщенных неуправляемых сил, $U \in \mathbb{R}^n$ — вектор управления. Здесь и далее $(\cdot)'$ — операция транспонирования, $\|q\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \dots + q_n^2}$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, величины, входящие в (2.1), определяются и непрерывны, для простоты, по всем $(t, q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Уравнения (2.1) можно представить в виде

$$A(q)\ddot{q} = \{\dot{q}' C(q) \dot{q}\} + Q + U, \quad (2.2)$$

где $\{\dot{q}' C(q) \dot{q}\}$ — набор n квадратичных форм с совокупностью n симметричных матриц $C = (C_{(1)}, C_{(2)}, \dots, C_{(n)})'$,

$$C_{(k)} = (c_{ij(k)}), \quad c_{ij(k)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} \right).$$

Пусть $X = \{(q^{(0)}(t)) : [t_0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n\}$ есть заданное множество программных движений, ограниченных областью

$$G_0 = \{(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{3n} : \|q\| \leq g_0 = \text{const} > 0, \quad \|\dot{q}\| \leq g_1 = \text{const} > 0, \\ \|\ddot{q}\| \leq g_2 = \text{const} > 0\}.$$

Пусть $(q^{(0)}, \dot{q}^{(0)}) \in X$ есть движение, осуществляемое посредством программного управления $U = U^{(0)}(t)$ так, что выполнено тождество

$$A^{(0)}(t)\ddot{q}^{(0)}(t) - (\{\dot{q}^{(0)}(t)\}' C^{(0)}(t) \dot{q}^{(0)}(t)\} + Q^{(0)}(t) + U^{(0)}(t)) \equiv 0, \quad (2.3)$$

где $A^{(0)}(t) = A(q^{(0)}(t))$, $C^{(0)}(t) = C(q^{(0)}(t))$, $Q^{(0)}(t) = Q(t, q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$.

Введем: возмущение $x = q - q^{(0)}(t)$, управляющее воздействие $U^{(1)} = U - U^{(0)}(t)$. Согласно (2.2), уравнения возмущенного движения могут быть записаны в виде

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = \{\dot{x}' C^{(1)}(t, x) \dot{x}\} + Q^{(1)}(t, x) + Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) + U^{(1)}, \quad (2.4)$$

где $A^{(1)}(t, x) = A(q^{(0)}(t) + x)$, $C^{(1)}(t, x) = C(q^{(0)}(t) + x)$, $Q^{(1)}(t, x) = (A^{(0)}(t) - A^{(1)}(t, x))\ddot{q}^{(0)}(t) + \{(\dot{q}^{(0)}(t))'(C^{(1)}(t, x) - C^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t)\} + Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t)) - Q(t, q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$, $Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) = Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x}) - Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t)) + \{(\dot{q}^{(0)}(t))'C^{(1)}(t, x)\dot{x}\} + \{\dot{x}'C^{(1)}(t, x)\dot{q}^{(0)}(t)\}$.

Заметив, что $Q^{(1)}(t, 0) \equiv 0$, $Q^{(2)}(t, x, 0) \equiv 0$, допустим, что в соответствии с наложенными связями и действующими силами имеют место следующие представления соответствующих сил в (2.4)

$$Q^{(1)}(t, x) = F(t, x)\dot{x}, \quad \{\dot{x}'C^{(1)}(t, x)\dot{x}\} + Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) = D(t, x, \dot{x})\dot{x}. \quad (2.5)$$

Следуя [6] и [7], рассмотрим задачу о стабилизации невозмущенного движения $x = \dot{x} = 0$ системы (2.4) управляющим воздействием вида

$$U^{(1)}(t, x, \dot{x}) = -B(t)\dot{x} - P(t)x, \quad (2.6)$$

где $B, P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ есть матрицы коэффициентов усиления в структуре обратной связи, подлежащие определению.

3. Решение задачи о стабилизации с непрерывным законом управления

Следуя подходу, предложенному в работах [6] и [7], уравнения движения (2.4) запишем в виде

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = F(t, x)x + D(t, x, \dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x} - P(t)x. \quad (3.1)$$

Подбор матрицы коэффициентов усиления B и P проведем на основе векторной функции Ляпунова

$$V = (V_1, V_2)', \quad V_1 = \|x\|, \quad V_2 = \sqrt{(\dot{x} + Sx)'A^{(1)}(t, x)(\dot{x} + Sx)}, \quad (3.2)$$

где матрица $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $S = const$, подлежит определению, при этом исходные уравнения для нее примем

$$det S \neq 0 \quad x'(S' + S)x \geq 2s_0\|x\|^2, \quad s_0 = const > 0. \quad (3.3)$$

Пусть в области $\mathbb{R}^+ \times G_1$, $G_1 = \{(x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^{2n} : \|x\| \leq \varepsilon, \|\dot{x}\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_1^2\|\dot{x}\|^2 &\leq \dot{x}'A^{(1)}\dot{x} \leq \lambda_2^2\|\dot{x}\|^2, \\ (\dot{x} + Sx)' \left(\frac{1}{2} \frac{dA^{(1)}}{dt} + D - B + A^{(1)}S \right) (\dot{x} + Sx) &\leq -\mu_1\|\dot{x} + Sx\|^2, \\ (\dot{x} + Sx)'(F - P - (D - B + A^{(1)}S)S)x &\leq \mu_2\|\dot{x} + Sx\|\|x\|, \end{aligned} \quad (3.4)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ – положительные постоянные, удовлетворяющие неравенству

$$s_0\lambda_1^2\mu_1 - \mu_2\lambda_2^2 > 0 \quad (3.5)$$

При этих соотношениях вектор-функция V является определенно положительной, допускающей бесконечно малый высший предел, для её производных в силу (2.4) имеют место следующие оценки

$$\begin{aligned} 2V_1\dot{V}_1 &= 2x'\dot{x} = 2x'(\dot{x} + Sx - Sx) = -x'Sx + 2x'(\dot{x} + Sx) \leq \\ &\leq -2s_0\|x\|^2 + 2\|x\|\|\dot{x} + Sx\| \leq -2s_0V_1^2 + \frac{2}{\lambda_1}V_1V_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2V_2\dot{V}_2 &= (\dot{x} + Sx)' \frac{dA^{(1)}}{dt} (\dot{x} + Sx) + 2(\dot{x} + Sx)' A^{(1)} (\ddot{x} + S\dot{x}) = \\
&= (\dot{x} + Sx)' \frac{dA^{(1)}}{dt} (\dot{x} + Sx) + 2(\dot{x} + Sx)' ((D - B + A^{(1)}S)\dot{x} + (F - P)x) = \\
&= (\dot{x} + Sx)' \left(\frac{dA^{(1)}}{dt} + 2(D - B + A^{(1)}S) \right) (\dot{x} + Sx) + \\
&+ 2(\dot{x} + Sx)' (F - P - (D - B + A^{(1)}S)S)x \leq \\
&\leq -2\mu_1 \|\dot{x} + Sx\|^2 + 2\mu_2 \|\dot{x} + Sx\| \|x\| \leq -2\frac{\mu_1}{\lambda_2^2} V_2^2 + 2\mu_2 \frac{1}{\lambda_1} V_2 V_1.
\end{aligned}$$

Таким образом, при наличии соотношений (3.3) для вектор-функции V имеем следующую систему сравнения

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -s_0 u_1 + \frac{1}{\lambda_1} u_2, \\ \dot{u}_2 = \frac{\mu_2}{\lambda_1} u_1 - \frac{\mu_1}{\lambda_2^2} u_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Нулевое движение системы (3.6) в силу неравенства (3.5) является равномерно асимптотически устойчивым, и даже экспоненциально. Следовательно, при выполнении условий (3.3) – (3.5) управляющее воздействие (2.6) решает задачу о стабилизации программного движения $(q^0(t), \dot{q}^0(t))$.

При этом заметим, что форма управления (2.6) и условий (3.3) – (3.5) обеспечивает робастный характер управления.

4. Решение задачи о стабилизации с дискретным законом управления

Перейдем к задаче о стабилизации движения $\dot{x} = x = 0$ системы (2.4) управляющим воздействием дискретного типа

$$\begin{aligned} U^1[t, x, \dot{x}] &= -B(t)\dot{x}(t - T_n) - P(t)x(t - T_n), \\ \dot{x}(t - T_n) &\equiv \dot{x}(T_n), \quad x(t - T_n) \equiv x(T_n) \quad T_n \leq t \leq T_{n+1}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Уравнения движения (2.4) с учетом соотношений (2.5) будут иметь следующий вид

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = F(t, x)\ddot{x} + D(t, x, \dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x}(t - T_n) - P(t)x(t - T_n). \quad (4.2)$$

С точностью до T^2 при $t \in [T_n, T_{n+1})$ введем представления

$$\dot{x}(t - T_n) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)(t - T_n), \quad x(t - T_n) = x(t) - \dot{x}(t)(t - T_n).$$

В первом представлении заменим $\ddot{x}$ значением

$$\ddot{x} = A^{-1}(t, x) (F(t, x)x + D(t, x, \dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x} - P(t)x) \Big|_{\substack{x = x(t) \\ \dot{x} = \dot{x}(t)}}.$$

С точностью до T^2 на каждом интервале $[T_n, T_{n+1})$ движения системы могут быть описаны уравнениями

$$\begin{aligned} A^{(1)}(t, x)\ddot{x} &= (D(t, x, \dot{x}) + (t - T_n)B(t)A^{-1}(t, x)D(t, x, \dot{x}) - B(t) - \\ &- (t - T_n)B(t)A^{-1}(t, x)B(t) + (t - T_n)P(t))\dot{x} + \\ &+ (F - P(t)) + (t - T_n)B(t)A^{-1}(t, x)(F - P(t))x. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Полученные уравнения имеют структуру, аналогичную структуре системы уравнений (2.6). Устойчивость её положения $\dot{x} = x = 0$ может быть найдена посредством функции (3.1) в виде соотношений (2.6) и (3.3).

При этом для достаточно малых T матрицы, входящие в (4.3) достаточно мало отличаются от матриц, входящих в (2.6). Отсюда возникает следующий подход к построению управляющего воздействия (4.1).

В качестве начальной модельной системы берется система (2.6). Для нее при соответствующем подборе матрицы S находятся, согласно условиям (3.3), коэффициенты усиления управляющего воздействия (2.5). Усилением этих условий вида $\mu_1 = \mu'_1 + \varepsilon$, $\mu_2 = \mu'_2 + \varepsilon$ достигается выполнение условий асимптотической устойчивости положения $\dot{x} = x = 0$ системы (4.3) при малых $T > 0$.

Проанализируем процесс стабилизации заданного программного движения при помощи импульсного управляющего воздействия. Для этого проведем замену $y = x$, $z = \dot{x}$.

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = (A^{(1)})^{-1} (F\dot{z} + Dz - B\dot{z}(t - T_n) - Px(t - T_n)).$$

Полагая

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{y(T_{n+1}) - y(T_n)}{T} = \frac{y[n+1] - y[n]}{T}, \\ \dot{z} &= \frac{z(T_{n+1}) - z(T_n)}{T} = \frac{z[n+1] - z[n]}{T}. \end{aligned}$$

получим дискретную модель вида

$$\begin{aligned} y[n+1] &= y[n] + Tz[n], \\ z[n+1] &= z[n] + (A^{(1)}[n])^{-1} ((D[n] - B[n])z[n] + (F[n] - P[n])y[n])T. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Исследование устойчивости положения равновесия $y = z = 0$ этой системы можно провести на основе векторной функции $V = V(n)$, аналогичной функции (3.2) для системы (3.1)

$$\begin{aligned} V &= (V_1, V_2)', \quad V_1(n) = \|y[n]\|, \\ V_2(n) &= \sqrt{(z[n] + Sy[n])' A^{(1)}[n] (z[n] + Sy[n])}. \end{aligned}$$

где подлежащая определению матрица $S = \text{const}$ удовлетворяет условию (3.3).

Находим с точностью до T^2

$$\begin{aligned} V_1^2(n+1) &= \|y[n+1]\|^2 = (y[n] + Tz[n])'(y[n] + Tz[n]) = \\ &= ((E - TS)y[n] + T(z[n] + Sy[n]))'((E - TS)y[n] + T(z[n] + Sy[n])) \approx \\ &\approx y'[n](E - T(S + S'))y[n] + 2Ty'[n](z[n] + Sy[n]) \leq \\ &\leq (1 - 2s_0T)\|y[n]\|^2 + 2T\|y[n]\|\|z[n] + Sy[n]\| \leq \\ &\leq (1 - 2s_0T)V_1^2(n) + 2T\frac{1}{\lambda_1}V_1(n)V_2(n). \end{aligned}$$

Также имеем

$$\begin{aligned} V_2^2(n+1) &= (z[n+1] + Sy[n+1])' A^{(1)}[n+1] (z[n+1] + Sy[n+1]) = \\ &= (z[n+1] + Sy[n+1])' (A^{(1)}[n+1] - A^{(1)}[n]) (z[n+1] + Sy[n+1]) + \\ &+ (z[n+1] + Sy[n+1])' A^{(1)}[n] (z[n+1] + Sy[n+1]). \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в этом равенстве с точностью до T^2 получаем оценку

$$\begin{aligned}
 & (z[n+1] + Sy[n+1])' A^{(1)}[n] (z[n+1] + Sy[n+1]) = \\
 & = (z[n] + Sy[n] + T(S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n]))(z[n] + Sy[n]) + \\
 & + ((A^{(1)}[n])^{-1}(F[n] - P[n]) - (S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n]))S)y[n])' \cdot \\
 & \cdot A^{(1)}[n] (z[n] + Sy[n] + T(S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n])) - \\
 & - (S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n]))S)y[n]) \approx \\
 & \approx (z[n] + Sy[n])'(A^{(1)}[n] + T(A^{(1)}[n]S + (D[n] - B[n]))) \cdot \\
 & \cdot (z[n] + Sy[n]) + 2T(z[n] + Sy[n])'(F[n] - P[n] - \\
 & - (A^{(1)}[n]S + D[n] - B[n])S)y[n].
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Воспользуемся соотношением $A^{(1)}[n+1] - A^{(1)}[n] \approx \frac{dA^{(1)}}{dt}[n]T$.

Допустим, что для малых $\|z\|$ и $\|y\|$ выполнены соотношения вида (3.4)

$$\lambda_1^2 \|z\|^2 \leq z' A^{(1)}[n] z \leq \lambda_2^2 \|z\|^2$$

$$\begin{aligned}
 & (z + Sy)' \left(\frac{dA^{(1)}}{dt}[n] + D[n] + D'[n] - B[n] - B'[n] + \right. \\
 & \left. + A^{(1)}[n]S + S' A^{(1)}[n] \right) (z + Sy) \leq -2\mu_1 \|z + Sy\|^2
 \end{aligned}$$

$$(z + Sy)(F[n] - P[n] - (D[n] - B[n] + A^{(1)}[n]S)S)y \leq \mu_2 \|z + Sy\| \|y\|.$$

Тогда для оценки (4.5) получаем следующее неравенство

$$V_2^2(n+1) \leq V_2^2(n) - \frac{2\mu_1 T}{\lambda_2^2} V_2^2(n) + 2\mu_2 \frac{T}{\lambda_1} V_1(n) V_2(n).$$

Таким образом, для векторной функции V имеем следующую систему неравенств

$$\begin{cases} V_1(n+1) \leq (1 - 2s_0 T) V_1(n) + 2T V_2(n), \\ V_2(n+1) \leq \frac{2T\mu_2}{\lambda_1} V_1(n) + (1 - \frac{2\mu_1 T}{\lambda_2^2}) V_2(n). \end{cases}$$

Соответствующая система сравнения

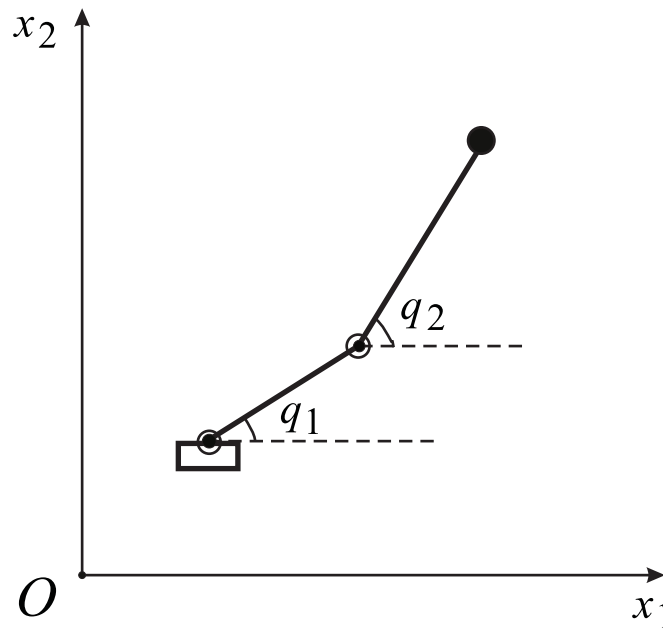
$$\begin{cases} u_1(n+1) \leq (1 - 2s_0 T) u_1(n) + 2T u_2(n), \\ u_2(n+1) \leq \frac{2T\mu_2}{\lambda_1} u_1(n) + (1 - \frac{2\mu_1 T}{\lambda_2^2}) u_2(n), \end{cases}$$

будет экспоненциально устойчива, если выполнено неравенство

$$s_0 \lambda_1^2 \mu_1 - \mu_2 \lambda_2^2 > 0.$$

Таким образом, получим, что с точностью до T^2 условия асимптотической устойчивости системы (4.4), полученной из системы (4.3) дискретизацией, совпадают с условиями устойчивости (3.4) модельной системы (3.1).

В качестве применения теоретических результатов рассмотрим задачу построения дискретного управления двухзвенным манипулятором на подвижном основании [8], модель которого представлена на рисунке 4.1.



Р и с у н о к 4.1

Двухзвенный манипулятор на подвижном основании

В рассматриваемой нами модели первое звено связано с подвижным основанием при помощи шарнира. Груз перемещается манипулятором при помощи схвата, укрепленного на конце второго звена. Звенья манипулятора связываются шарниром, а оси шарниров параллельны друг другу. Будем полагать, что звенья манипулятора есть однородные стержни, а линейные размеры схвата и груза много меньше, чем длины звеньев манипулятора, следовательно, перемещаемый груз и схват примем за материальную точку.

Исследуя транспортные движения манипулятора, будем считать, что манипулятор совершает действия в горизонтальной плоскости или в невесомости, т.е. в отсутствии силы тяжести, причем основание движется поступательно.

Пусть положение центра масс основания в инерциальной системе координат описывается функциями $x_1(t)$ и $x_2(t)$. В качестве обобщенных координат системы q_1, q_2 выберем шарнирные углы звеньев, образуемые с осью Ox_2 .

Управление манипулятором происходит при помощи двух независимых приводов D_1, D_2 , которые находятся в шарнирах. Главные моменты сил относительно осей шарниров, создаваемые приводами D_1, D_2 и приложенные к звеньям, соответственно равны U_1, U_2 . Действие других сил, за исключением реакции основания, учитывать не будем.

Введем следующие обозначения: m_0 — масса платформы, m_1, m_2 — массы звеньев, l_1, l_2 — длины звеньев, m_3 — масса груза.

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2} (a_{11}^0 \dot{q}_1^2 + 2a_{12}^0 \dot{q}_1 \dot{q}_2 + a_{22}^0 \dot{q}_2^2) + b_1 \dot{q}_1 + b_2 \dot{q}_2 + \frac{1}{2} M (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2),$$

где $a_{11}^0 = (\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3) l_1^2$, $a_{12}^0 = a_{21}^0 \cos(q_1 - q_2)$, $a_{12}^0 = (\frac{m_2}{2} + m_3) l_1 l_2$, $a_{22}^0 = (\frac{m_2}{3} + m_3) l_2^2$, $M = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$, $b_1 = b_1^0 (\dot{x}_2(t) \cos(q_1) - \dot{x}_1(t) \sin(q_1))$, $b_1^0 = (\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3) l_1$, $b_2 = b_2^0 (\dot{x}_2(t) \cos(q_2) - \dot{x}_1(t) \sin(q_2))$, $b_2^0 = (\frac{m_2}{2} + m_3) l_2$.

Уравнения движения под действием управляющих моментов, отнесенных к q_1 и q_2 , будут иметь следующий матричный вид

$$A(q) \ddot{q} + C(q, \dot{q}) + W(t, q) = U, \quad U' = (U_1, U_2), \quad (4.6)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 \cos(q_1 - q_2) \\ a_{12}^0 \cos(q_1 - q_2) & a_{22}^0 \end{pmatrix}, \quad C(q) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^0 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_2 \\ -a_{12}^0 \sin(q_1 - q_2) \dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$W(t, q) = \begin{pmatrix} -b_1^0(\ddot{x}_1(t) \sin(q_1) - \ddot{x}_2(t) \cos(q_1)) \\ -b_2^0(\ddot{x}_1(t) \sin(q_2) - \ddot{x}_2(t) \cos(q_2)) \end{pmatrix}.$$

Пусть $q^0(t) = (q_1^0(t), q_2^0(t))$ — программное движение, создаваемое управляющим моментом

$$U_0(t) = A(q^0(t))\ddot{q}^0(t) + C(q^0(t), \dot{q}^0(t))\dot{q}^0(t) + W(t, q^0(t)).$$

Положим $x = q - q^0(t)$, $U = U_0(t) + U_1$, где x — возмущение, U_1 — управляющее воздействие, создаваемое обратной связью.

Уравнения возмущенного движения в линейном приближении будут иметь следующий вид

$$A^0(t)\ddot{x} = D^0(t)\dot{x} + F^0(t)x + U_1, \quad A^0(t) = A(q^0(t)), \quad D(t) = -2C(q^0(t), \dot{q}^0(t)),$$

где

$$F^0(t) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

$$f_{11} = a_{12}^0(\ddot{q}_2^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) - (\dot{q}_2^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t))) + b_{10}(\ddot{x}_1(t) \cos(q_1^0(t)) + \ddot{x}_2(t) \sin(q_1^0(t))),$$

$$f_{12} = -a_{12}^0(\ddot{q}_2^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) - (\dot{q}_2^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t))),$$

$$f_{21} = a_{12}^0(\ddot{q}_1^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) + (\dot{q}_1^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t))),$$

$$f_{22} = -a_{12}^0(\ddot{q}_1^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) - (\dot{q}_1^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t))) + b_{10}(\ddot{x}_1(t) \cos(q_2^0(t)) + \ddot{x}_2(t) \sin(q_2^0(t))).$$

В соответствии с условиями (3.4) может быть найдено управляющее воздействие вида (3.2), стабилизирующее положение $x_1 = x_2 = 0$ системы (4.6).

Движение $(q_1^0(t), q_2^0(t))$ может быть также стабилизируемо соответствующим управлением вида (4.1).

Предположим, что движение основания манипулятора может быть описано следующим законом:

$$x_1(t) = \cos(2t) \text{ м}, \quad x_2(t) = \sin(2t) \text{ м}.$$

Программное движение манипулятора зададим как:

$$q_1^0(t) = 1,1 \sin(1,2t + 1) \text{ рад}, \quad \dot{q}_1^0(t) = 1,32 \cos(1,2t + 1) \text{ рад/с},$$

$$q_2^0(t) = 1,3 \sin(1,6t + 1,9) \text{ рад}, \quad \dot{q}_2^0(t) = 2,08 \sin(1,6t + 1,9) \text{ рад/с},$$

с начальными отклонениями:

$$q_1(0) = 0 \text{ рад}, \quad q_2(0) = 0,5 \text{ рад}, \quad \dot{q}_1(0) = 0 \text{ рад/с}, \quad \dot{q}_2(0) = 0 \text{ рад/с}.$$

Задав следующие параметры системы

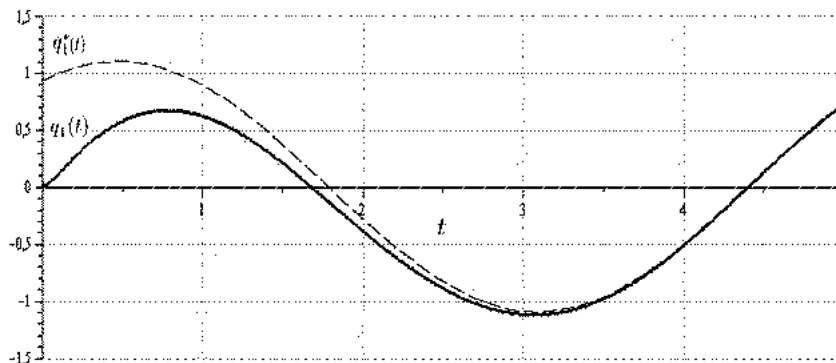
$$m_1 = 20 \text{ кг}, \quad m_2 = 10 \text{ кг}, \quad m_3 = 5 \text{ кг}, \quad l_1 = 0,8 \text{ м}, \quad l_2 = 0,5 \text{ м},$$

получим значения параметров управления для такого движения

$$k_1 = 319,407, \quad k_2 = 114,987, \quad k_1^0 = 170,478, \quad k_2^0 = 61,372,$$

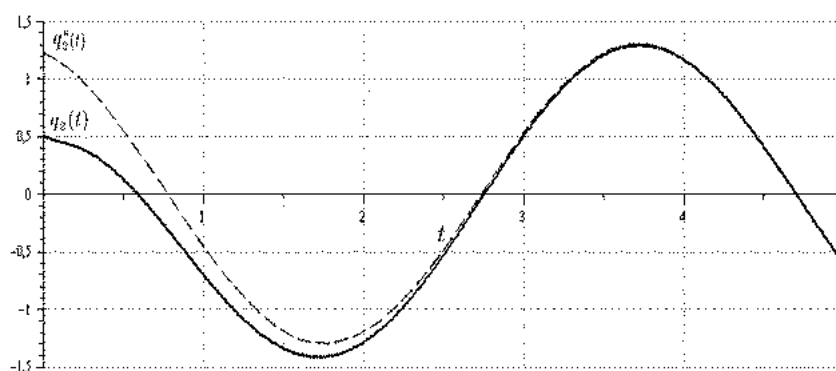
где k_1^0, k_2^0 — значения параметров управления, найденные при нулевом отклонении. Числа k_1^0, k_2^0 имеют смысл нижних граней параметров k_1, k_2 , т.е. параметры k_1, k_2 можно представить в виде $k_1 = k_1^0 + \eta_1, k_2 = k_2^0 + \eta_2$, где η_1, η_2 — положительные постоянные, зависящие от выбора начальных отклонений.

Результаты численного моделирования поведения системы представлены на рисунках 4.2, 4.3. При проведении моделирования шаг дискретизации Δ_c для системы выбран равным шагу дискретизации Δ_y управления ($\Delta_c = \Delta_y = 0.01$). Непрерывная кривая – стабилизируемая компонента, штриховая кривая – соответствующая компонента программного движения. Время моделирования $t_{\max} = 5$.



Р и с у н о к 4.2

График зависимости угловой координаты первого звена от времени.



Р и с у н о к 4.3

График зависимости угловой координаты второго звена от времени.

Результаты, полученные в работе являются дополнением результатов [9] и [10]. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-01-08482).

Дата поступления 01.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. Nesic, A. Teel, and P. Kokotovic, "Sufficient conditions for stabilization of sampled-data nonlinear systems via discrete-time approximations", *Syst. Contr. Lett.*, **38** (1999), 259–270.
2. D. Laila, *Design and analysis of nonlinear sampled-data control systems*, PhD thesis, University of Melbourne, 2003.

3. D. Nesic, and A. Teel, “A framework for stabilization of nonlinear sampled-data systems based on their approximate discrete-time models”, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **49** (2004), 1103–1122.
4. D. Laila, D. Nesic, and A. Teel, “Open and closed loop dissipation inequalities under sampling and controller emulation”, *Europ. J. Contr.*, 2002, № 8, 109–125.
5. А. П. Маркеев, *Теоретическая механика*, ЧеРо, М., 1999, 569 с.
6. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, “О стабилизации программных движений голономной механической системы”, XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014 (Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН), 2014, 1840–1843.
7. А. С. Андреев, О. А. Перегудова, “О стабилизации программных движений голономной механической системы”, *Автоматика и телемеханика*, 2016, № 3, 66–80.
8. Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин, *Методы управления нелинейными механическими системами*, Физматлит, М., 2006, 326 с.
9. А. С. Андреев, Е. А. Кудашова, О. А. Перегудова, “О моделировании цифрового регулятора на основе прямого метода Ляпунова”, *Научно-технический вестник Поволжья*, 2015, № 6, 113–115.
10. О. А. Перегудова, Е. А. Кудашова, “Метод векторных функций Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости разностных систем”, *Научно-технический вестник Поволжья*, 2015, № 1, 118–120.

On Modeling the controlled mechanical systems with digital controllers

© A. S. Andreev³, E. A. Kudashova⁴

Abstract. Synthesis of discrete-time control which solves the problem of stabilization of holonomic mechanical systems' program motion is considered. Such systems are described by Lagrange equations of the second kind. Digital control signals are used in computer-containing control systems for continuous processes. Development of models for such controlled processes leads to investigation of continuous-discrete systems with state described by a continuous function and discrete control functions. This paper proposes an approach for constructing of controller taking into account non-linearity of the system and non-stationarity of program motion. By means of Lyapunov vector function and the comparison system sufficient conditions of given program motion's stabilization are obtained. A feature of the article is in solving of the problem by use of Lyapunov vector function with components that explicitly depend on time, and are nonlinear with respect to the generalized coordinates. It allows to solve the stabilization problem in general having the possibility to select the most suitable control parameters for each particular system.

Key Words: stabilization, control, discrete-time control, synthesis of control for mechanical systems, Lyapunov vector-function, comparison systems, nonstationary nonlinear dynamical systems

³ Dean of Faculty of Mathematics and Information and Aviation Technology, Prof., D.Sc., Head of Information Security and Control Theory Department, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; andreevas@sv.ulsu.ru

⁴ Programmer of Information Security and Control Theory Department, Faculty of Mathematics, Information and Aviation Technology, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; katherine.kudashova@yandex.ru

УДК 519.688:004.9:665.612.2

Математическое моделирование процесса низкотемпературной паровой конверсии пропана в присутствии метана на никелевом катализаторе

© Л. Ф. Ахмадуллина¹, Л. В. Еникеева², А. В. Новичкова³,
И. М. Губайдуллин⁴, П. В. Снытников⁵, Д. И. Потемкин⁶

Аннотация. В настоящей работе формализована математическая модель процесса мягкого парового риформинга (МПР) попутного нефтяного газа на примере МПР модельной метан-пропановой смеси. На основе кинетических схем превращений построены математические модели реакций. Показано, что полученная система дифференциальных уравнений является жесткой по части компонентов. Для решения прямой кинетической задачи предложен метод, использующий одноитерационную формулу Розенброка 3-ого порядка. В статье были получены зависимости концентраций реагирующих веществ в зависимости от длины реактора при конкретной температуре и от массива температур. Результат показал, что выбранный метод позволяет эффективно находить решение системы дифференциальных уравнений, жесткой по части компонентов.

Ключевые слова: математическое моделирование, кинетика химических реакций, попутный нефтяной газ, низкотемпературная паровая конверсия, мягкий паровой риформинг, катализ, метод Розенброка

1. Введение

В настоящее время в России остро стоит вопрос о переработке попутных нефтяных газов (ПНГ), которые представляют собой важный ресурс для синтеза ценных химических продуктов и использования их в энергетических целях. Попутные нефтяные газы – это многокомпонентные газовые смеси, выделяемые из нефти в процессе первичной сепарации на месторождениях. Состав ПНГ может широко меняться в зависимости от способа добычи, качества и состава добываемой нефти, а также других факторов. Зачастую ПНГ содержит (в об. %) 50-70 метана, 5-10 этана, 5-15 ШФЛУ (широкая фракция легких C_{3+} -углеводородов), 1-10 азота, 1-10 углекислого газа.

Основным методом переработки ПНГ является его разделение на фракции на крупных газоперерабатывающих комплексах. Это наиболее рентабельный метод, позволяющий

¹ Студент факультета автоматизации производственных процессов, Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа; odnasvete_2014@mail.ru

² Аспирант лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; leniza.enikeeva@gmail.com

³ Доцент кафедры информатики и информационно-коммуникационных технологий, Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа; stacy-pm25@mail.ru

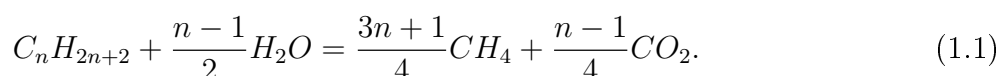
⁴ Старший научный сотрудник лаборатории математической химии Института нефтехимии и катализа РАН, профессор кафедры технологии нефти и газа Уфимского государственного нефтяного технического университета, г. Уфа; irekmars@mail.ru

⁵ Заведующий лабораторией энергосберегающих каталитических процессов, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск; старший научный сотрудник лаборатории каталитических процессов в топливных элементах, институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, г. Новосибирск; pvsnyat@catalysis.ru

⁶ Научный сотрудник лаборатории энергосберегающих каталитических процессов, Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск; научный сотрудник лаборатории каталитических процессов в топливных элементах, институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, г. Новосибирск; potema@catalysis.ru

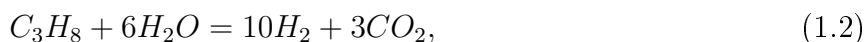
получать высокую добавочную стоимость продуктов переработки. Однако, он экономически оправдан только для крупных месторождений, где можно применять традиционные технологии. Непосредственное использование на месторождениях в основном относится к тем газам, транспортировка которых до ГПЗ и НПЗ оказывается нерентабельной – газ стабилизации, попутный нефтяной газ с малodeбитных, труднодоступных и низконапорных месторождений. Именно такой газ из-за трудностей с последующей переработкой в первую очередь подвергается сжиганию в факелах. Это связано как с недостаточно развитой инфраструктурой по его транспортировке, так и отсутствием достаточно простых и экономически оправданных технологий утилизации ПНГ в местах нефтедобычи.

Поэтому задача разработки альтернативных способов переработки ПНГ непосредственно на промыслах является актуальной. Одним из таких способов является мягкий паровой риформинг или низкотемпературная паровая конверсия (НПК) легких углеводородов ([1–3]), в результате которой происходит расщепление молекул C_{2+} углеводородов и обогащение газовой смеси метаном:



Это позволяет обеспечить безопасный транспорт получаемой газовой смеси по газопроводам за счет снижения температуры точки росы смеси и значительно улучшить топливные характеристики ПНГ при использовании их в газопоршневых двигателях внутреннего сгорания и газовых турбинах для генерации электроэнергии непосредственно на промыслах.

Ранее была показана принципиальная возможность проведения мягкого парового риформинга легких углеводородов на никелевых катализаторах на примере модельной метан-пропановой смеси и реальном ПНГ во время проведения пилотных испытаний на нефтепромысле [1] и предложена двустадийная макрокинетическая модель протекания процесса, включающая реакции паровой конверсии пропана и метанирования CO_2 [2]:



Были предложены следующие выражения для скоростей реакций паровой конверсии пропана (W_{ref}) и метанирования CO_2 (W_{met}):

$$W_{ref} = 7.9 \cdot 10^{10} \cdot \exp\left(-\frac{112000}{RT}\right) \cdot C_{C_3H_8} \left[\frac{\text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}\right], \quad (1.4)$$

$$W_{ref} = 6.3 \cdot 10^5 \cdot \exp\left(-\frac{50000}{RT}\right) \cdot C_{H_2} \cdot \left(1 - \frac{P_{CH_4} \cdot (P_{H_2O})^2}{K_{eq} \cdot P_{CO_2} \cdot (P_{H_2})^4}\right) \left[\frac{\text{моль}}{\text{м}^3 \cdot \text{с}}\right], \quad (1.5)$$

где K_{eq} – константа равновесия реакции метанирования CO_2 ; $C_{C_3H_8}$, C_{H_2} – концентрации пропана и водорода, моль $\cdot$ м $^{-3}$; P_{CH_4} , P_{CO_2} , P_{H_2O} и P_{H_2} – парциальные давления CH_4 , CO_2 , H_2O и H_2 , соответственно, атм; R – универсальная газовая постоянная, 8.31 Дж $\cdot$ моль $^{-1} \cdot$ К $^{-1}$; T – температура, К.

В работах [1], [2] были описаны физико-химические основы МПР ПНГ и найдены кинетические параметры процесса МПР модельной метан-пропановой смеси, однако не поднимались вопросы формализации математической модели и определения оптимального численного метода, что в конечном счете необходимо для решения оптимизационной задачи с целью повышения эффективности процесса.

Таким образом, статья посвящена формализации математической модели процесса МПР ПНГ на примере МПР модельной метан - пропановой смеси, исследованию модели на жесткость и выбору численного метода для решения прямой кинетической задачи.

2. Математическая модель реакции

Для удобства проводимых дальнейших вычислений примем следующие обозначения:

- X_1 – концентрация пропана C_3H_8 , (моль/м³);
 X_2 – концентрация воды H_2O , (моль/м³);
 X_3 – концентрация углекислого газа CO_2 , (моль/м³);
 X_4 – концентрация водорода H_2 , (моль/м³);
 X_5 – концентрация метана CH_4 , (моль/м³).

Для реакций (1.2)–(1.3) стехиометрическая и атомарная матрицы имеют вид:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -1 & -2n & n & 3n+1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} C & H & O \\ n & 2n+2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Произведение стехиометрической матрицы на атомарную дает нулевую матрицу, следовательно, закон сохранения массы выполняется:

$$\Gamma * A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

В качестве формул, выражающих зависимость скоростей реакций от температуры, были приняты следующие выражения [1], [2], [3]:

$$W_1 = k_1 \cdot \exp\left(\frac{-E_1}{R \cdot T}\right) \cdot X_1, \quad (2.1)$$

$$W_2 = k_2 \cdot \exp\left(\frac{-E_2}{R \cdot T}\right) \cdot X_4 \cdot \left(1 - \frac{P_{CH_4} \cdot P_{H_2O}^2}{K_{eq} \cdot P_{CO_2} \cdot P_{H_2}^4}\right), \quad (2.2)$$

где введены следующие обозначения [2]:

- W_1, W_2 – скорость реакций, [моль/(с · м³)];
 $\lg(k_1) = 10.9, \lg(k_2) = 5.8$ – предэкспоненциальные множители реакций, [с⁻¹];
 $E_1 = 112, E_2 = 50$ – энергии активации реакций, [кДж/моль];
 $R = 8.31$ – универсальная газовая постоянная, [Дж/(моль · К)];
 X_1, X_4 – концентрации пропана C_3H_8 и водорода H_2 соответственно, [моль/м³];
 P_i – парциальные давления i-го газового компонента, [атм];
 $K_{eq}(T)$ – термодинамическая константа равновесия реакции (2.2), [атм⁻²].

Термодинамическая константа равновесия реакции K_{eq} определяется через нижеследующую формулу [4]:

$K_{eq} = \exp \frac{-\Delta G}{R \cdot T}$, где ΔG – энергия Гиббса реакции, [Дж]. В свою очередь эта величина определяется через такие функции состояния системы как энтропия и энтальпия:

$\Delta G = \Delta H - T \cdot \Delta S$, где ΔH – энтальпия реакции, [Дж/моль]; ΔS – энтропия реакции, [Дж/(моль · К)].

Для того, чтобы облегчить сравнение энтальпий/энтропий различных веществ, используют понятие стандартного состояния. Под этим понятием понимается то состояние, которое достигается при давлении, равном 10^5 Па, и при температуре, равной 298 К. Энтальпию/энтропию реакции между двумя веществами, находящимися в стандартном состоянии, обозначают как ΔH_T^0 и ΔS_T^0 соответственно.

Стандартная энтальпия химической реакции ΔH_T^0 равна разности стандартных энтальпий образования продуктов реакции и реагентов с учетом стехиометрии реакций:

$$\Delta H_T^0 = \sum_j v_j \cdot H_T^0(B_j) - \sum_i v_i \cdot H_T^0(A_i).$$

Стандартная энтропия химической реакции ΔS_T^0 определяется аналогичным образом:

$$\Delta S_T^0 = \sum_j v_j \cdot S_T^0(B_j) - \sum_i v_i \cdot S_T^0(A_i).$$

Большинство термодинамических данных приводятся в справочниках для температуры, равной 298 К. Для расчета величины изменения энтропии/энтальпии при других температурах используют уравнение Кирхгофа:

$$\Delta S_{T_2} = \Delta S_T^0 + \int_{T_0}^{T_2} \Delta C_p(T) dT,$$

$$\Delta H_{T_2} = \Delta H_T^0 + \int_{T_0}^{T_2} \Delta C_p(T) dT,$$

где ΔC_p – разность изобарных теплоемкостей продуктов реакции и исходных веществ.

Если разность $T_2 - T_0$ невелика, то можно принять, что ΔC_p является постоянной величиной. В противном случае нужно использовать температурную зависимость $\Delta C_p(T)$ [4]. В зависимости от вида реагирующих веществ изобарную теплоемкость можно определить двумя способами:

$$C_p = a + bT + cT^2, \quad (2.3)$$

$$C_p = a + bT + \frac{c'}{T^2}, \quad (2.4)$$

где a , b – уникальные коэффициенты для участвующих в реакции веществ (значения устанавливаются эмпирически и являются справочными данными [5]).

В зависимости от вида реагирующего вещества выбирается та или иная формула: если это вода, углекислый газ или водород, то выбирается вторая формула, где третий коэффициент обозначен как c' . Первая формула справедлива для углеводородных соединений. В нашем случае эта формула будет применяться только по отношению к метану.

Таким образом, определим энтропию для метана. Разделив выражение (2.3) на T , а затем, проинтегрировав его и подставив получившееся в определяющее ΔS_{T_2} выражение, получим:

$$\Delta S_{T_2} = \Delta S_{T_0} + a \cdot (\log T_2 - \log T_0) + b \cdot (T_2 - T_0) + c/2 \cdot (T_2^2 - T_0^2).$$

Разделив выражение (2.4) на T , а затем проинтегрировав его и подставив получившееся в определяющее выражение ΔS_{T_2} , получим выражение для энтропии для остальных реагирующих веществ:

$$\Delta S_{T_2} = \Delta S_{T_0} + a \cdot (\log T_2 - \log T_0) + b \cdot (T_2 - T_0) - c'/2 \cdot (1/T_2^2 - 1/T_0^2).$$

Изменение энтальпии можно определить так же, проинтегрировав выражение для температурной зависимости изобарной теплоемкости (уже без предварительного деления на T):

а) для метана:

$$\Delta H = \Delta H_{T_0} + \int_{T_0}^{T_2} C_p(T) dT = \int_{T_0}^{T_2} (a + bT + cT^2) dT = \Delta H_{T_0} + a(T_2 - T_0) + b/2(T_2^2 - T_0^2) + c/3(T_2^3 - T_0^3);$$

б) для остальных реагирующих веществ:

$$\Delta H = \Delta H_{T_0} + \int_{T_0}^{T_2} C_p(T) dT = \int_{T_0}^{T_2} (a + bT + c'/T^2) dT = \Delta H_{T_0} + a \log(T_2 - T_0) + b/2(T_2^2 - T_0^2) - c'(1/T_2^2 - 1/T_0^2).$$

Таким образом, согласно закону Гесса, тепловой эффект химической реакции, протекающей при постоянном давлении, как в нашем случае, не зависит от пути реакции, а определяется только состоянием реагентов и продуктов реакции.

Далее получим систему дифференциальных уравнений, описывающую изменения концентраций в ходе реакций в зависимости от температуры. Для этого умножим транспонированную стехиометрическую матрицу на вектор скоростей:

$$\Gamma^T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -2n & 2 \\ n & -1 \\ 3n+1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \end{pmatrix} = \begin{cases} dX_1/dt = -W_1, \\ dX_2/dt = -2nW_1 + 2W_2, \\ dX_3/dt = nW_1 - W_2, \\ dX_4/dt = (3n+1)W_1 - 4W_2, \\ dX_5/dt = W_2 \end{cases}.$$

Далее составим уравнение материального баланса [2]:

$G \frac{\partial y_i}{\partial l} = (\nu_i^1 W_1 + \nu_i^2 W_2) \cdot m_i$, где G – скорость массового потока смеси, [кг/(м²·с)]; y_i – концентрации реагирующих веществ, [моль/м³]; l – длина реактора, [м]; ν_i^1, ν_i^2 – стехиометрические коэффициенты первой и второй реакций. В соответствии с ранее приведенной схемой реакции для пропана эти коэффициенты образуют следующие одномерные массивы:

$$\nu_i^1 = (-1, -6, 3, 10, 0);$$

$$\nu_i^2 = (0, 2, -1, -4, 1);$$

W_1, W_2 – скорости реакций, [моль/(с·м³)]; m_i – молярная масса, кг/моль.

В соответствии с участвующими в обеих реакциях веществами, m_i представляет собой одномерный массив со следующими элементами:

$$m_i = (0.044, 0.018, 0.002, 0.016).$$

В качестве начальных условий были приняты следующие данные: $l = 0$, при этом $0 \leq l \leq L$ (длина всего реактора $L = 0.02$ м), $y_i = y_{i0} = (0.17, 0.49, 0, 0, 0.34)$, где $i \in C_3H_8, H_2O, CO_2, H_2, CH_4$.

Теперь можно сформулировать прямую задачу: она состоит в выявлении зависимости концентрации реагирующих веществ при определенной температуре от длины реактора при таких известных кинетических параметрах реакции, как энергия активации и предэкспоненциальный множитель. Также считаются известными начальные концентрации реагирующих веществ. Иначе говоря, необходимо получить зависимость концентрации реагирующих веществ от температуры, а затем при каждой температуре – зависимость концентрации реагирующих веществ от длины реактора.

Для решения прямой задачи сначала необходимо было выбрать алгоритм для решения получившейся системы дифференциальных уравнений. В задачах химической кинетики

существуют жесткие [6],[7] и нежесткие системы уравнений, для решения которых используются совершенно различные методы, необходимо было определить, к какой категории относится наша система.

В литературе можно встретить определение задачи Коши, которое позволяет подтвердить жесткость системы ОДУ, соответствующей математическому описанию химической реакции, без выполнения анализа устойчивости численного метода [8].

Таким образом, еще одной решаемой проблемой является численное решение задачи Коши для системы ОДУ и выбор соответствующего численного метода.

3. Результаты и обсуждение

Перейдем непосредственно к самим расчетам. Для вычисления матрицы Якоби в качестве исходных данных системы возьмем начальные концентрации реагентов и температуру реактора, равную $T = 195^\circ \text{C}$. Получим следующие собственные числа этой матрицы:

$$\lambda_1 = -3.2127 \cdot 10^3; \lambda_2 = 0; \lambda_3 = -0.0062 \cdot 10^3; \lambda_4 = 0; \lambda_5 = 0.$$

Некоторые собственные числа этой матрицы являются отрицательными, остальные равны нулю, следовательно, система дифференциальных уравнений является жесткой по части компонентов. Однако, результаты, выданные явными методами, показывают характерную «разболтку» решения, что говорит о неустойчивости алгоритма. Поэтому для решения системы ОДУ будем применять алгоритмы, предназначенные для решения жестких систем. Для того чтобы решить жесткую систему дифференциальных уравнений, нужно осознанно подойти к выбору метода, так как он должен обладать достаточной эффективностью. В данной работе для решения системы был выбран метод Розенброка 3-ого порядка точности. Метод основан на приведении жестких дифференциальных уравнений типа

$$\frac{\partial y}{\partial t} = f(y, t)$$

к разностной форме типа:

$$E - a \cdot \Delta \cdot B - b \cdot \Delta^2 \cdot B^2 \frac{y_{n+1} - y_n}{\Delta} = f(y_n + c \cdot \Delta \cdot f(y_n)), \quad (3.1)$$

где $B = \frac{\partial f(y_n)}{\partial y}$ – матрица частных производных (матрица Якоби), Δ – шаг интегрирования; a, b, c – некоторые (априори неизвестные) параметры.

Если осуществить разложение решения в ряд Тейлора в точке y_i и подставить его в разностную форму, то после несложных преобразований можно вычислить конкретные значения параметров a, b, c , которые обращают уравнение в верное равенство. Достигается это равенство при следующих значениях параметров: $a = 1.077; b = -0.372, c = -0.577$ [9].

Таким образом, алгоритм Розенброка основан на двух основных действиях, выполняемых на каждом шаге интегрирования: вычисляется матрица производных в точке y_i , а следующая точка y_{i+1} находится из матричного уравнения (3.1) с вышеуказанными коэффициентами.

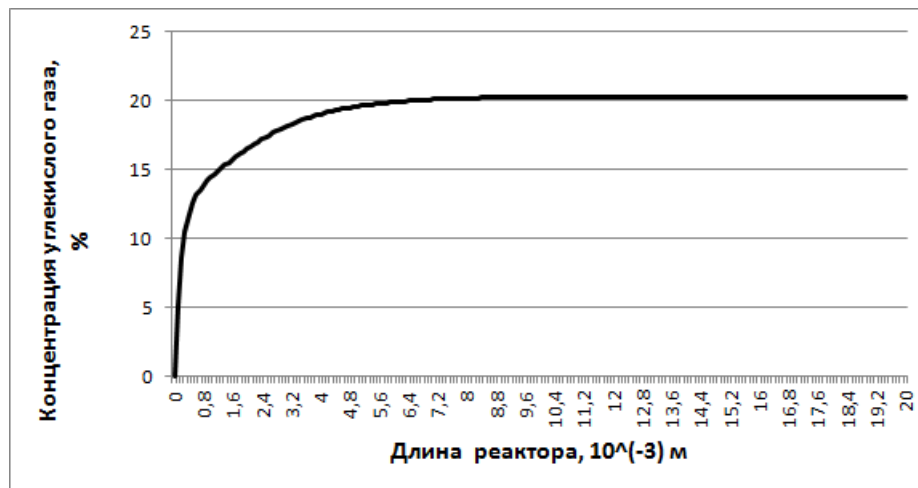
Этот метод был успешно использован для решения задач химической кинетики в работах [10], [11].

Были получены решения для различных температур (Т) и длин реактора (L), которые были сопоставлены с экспериментальными и расчетными данными из работы [2]. Было получено хорошее согласование. В качестве примера приведены значения выходных

концентраций (об.%) в момент времени, соответствующий температуре 325°C и длине реактора 0,02 м, т.е. данные действительны в момент окончания эксперимента:

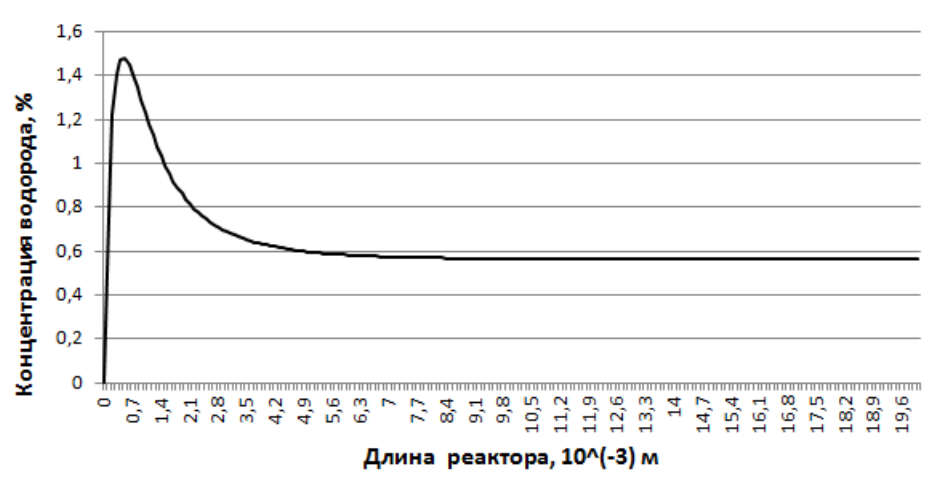
$$y_1 = 2.32 \cdot 10^{-4}; y_2 = 2.39 \cdot 10^1; y_3 = 2.03 \cdot 10^1; y_4 = 5.6 \cdot 10^{-1}; y_5 = 5.52 \cdot 10^1.$$

Данные представлены в процентах. Если построить зависимости концентраций реагирующих веществ по длине реактора, получим следующие графики (см. рис. 3.1-3.5):



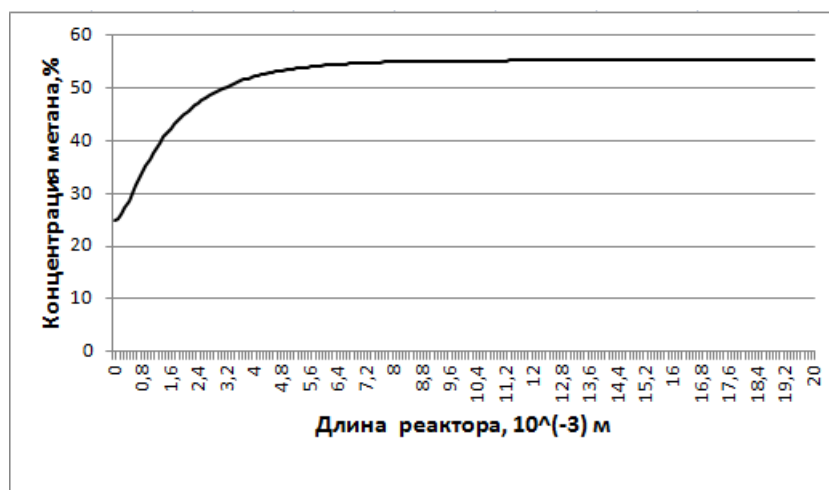
Р и с у н о к 3.1

Зависимость концентрации углекислого газа от координаты по длине реактора



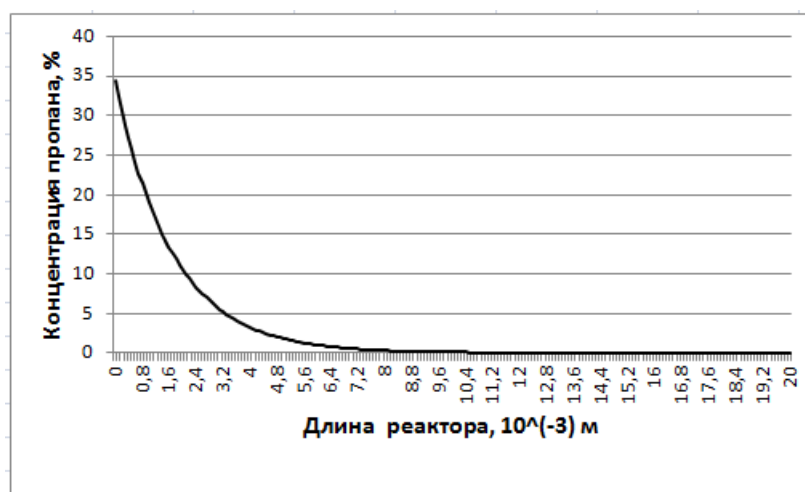
Р и с у н о к 3.2

Зависимость концентрации водорода от координаты по длине реактора



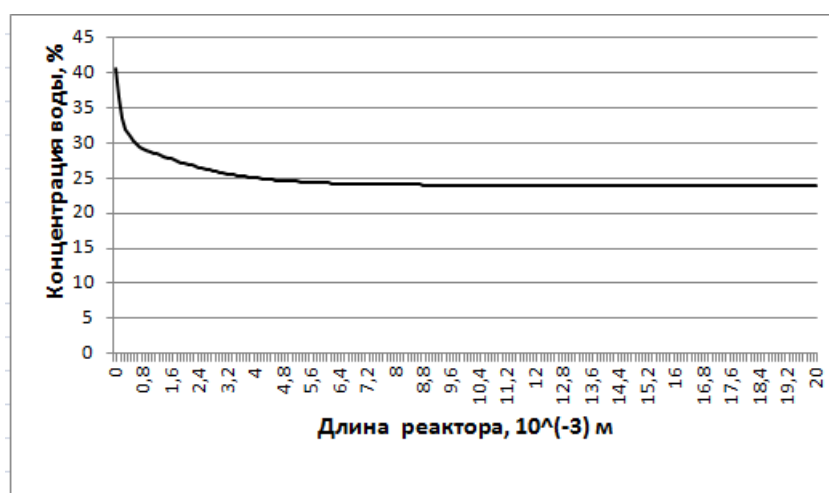
Р и с у н о к 3.3

Зависимость концентрации метана от координаты по длине реактора



Р и с у н о к 3.4

Зависимость концентрации пропана от координаты по длине реактора



Р и с у н о к 3.5

Зависимость концентрации воды от координаты по длине реактора

Как видно из графиков, концентрации пропана и воды уменьшаются по мере увеличения длины реактора, что вполне естественно для исходных реагентов, а концентрация метана, наоборот, сначала увеличивается и далее, при длине реактора, равной примерно 4,8 мм, перестает расти, в то время как концентрация водорода при длине реактора в 0,7 мм достигает своего наивысшего значения, а затем постепенно идет на убыль и при длине реактора примерно 11,9 мм устанавливается в конечное состояние, не подвергаясь далее значительным колебаниям.

4. Заключение

Таким образом, в данной работе была формализована математическая модель процесса мягкого парового риформинга (МПР) попутного нефтяного газа на примере МПР модельной метан-пропановой смеси. В результате исследования системы на жесткость оказалось, что полученная система дифференциальных уравнений является жесткой по части компонентов. Для ее решения был успешно применен метод Розенброка 3-ого порядка точности. Посредством математического моделирования была решена прямая задача химической кинетики. В результате были выявлены зависимости концентрации реагирующих веществ в зависимости от длины реактора при конкретной температуре и от массива температур для двух экспериментов; в статье представлены графики соответствующих выявленных зависимостей.

В дальнейшем планируется построить кинетическую модель на основе решения обратной задачи химической кинетики. Для нахождения кинетических параметров реакции (E_1 , E_2 , k_1 , k_2) предстоит решить задачу глобальной оптимизации – минимизировать среднеквадратичное отклонение экспериментальных данных от расчетных выходных концентраций реагирующих веществ в зависимости от температуры.

Дата поступления 08.08.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. М. М. Zyryanova, P. V. Snytnikov, Yu. I. Amosov, V. D. Belyaev, V. V. Kireenkov, N. A. Kuzin, M. V. Vernikovskaya, V. A. Kirillov, V. A. Sobyanin, "Upgrading of associated petroleum gas into methane-rich gas for power plant feeding applications. Technological and economic benefits", *Fuel*, **108** (2013), 282–291.
2. М. М. Zyryanova, P. V. Snytnikov, A. B. Shigarov, V. D. Belyaev, V. A. Kirillov, V. A. Sobyanin, "Low temperature catalytic steam reforming of propane- methane mixture into methane-rich gas: experiment and macrokinetic modeling", *Fuel*, **135** (2014), 76–82.
3. Н. Т. Мешенко, В. В. Веселов, Ф. С. Шуб, М. И. Темкин, "Кинетика низкотемпературной паровой конверсии этана на никелевом катализаторе", *Кинетика и катализ*, **18:4** (1977), 962–967.
4. М. Х. Карапетьянц, *Введение в теорию химических процессов*, Высшая школа, М., 1981, 333 с.
5. А. А. Равдель, А. М. Пономарева, *Краткий справочник физико-химических величин. Издание десятое, испр. и дополн.*, «Иван Федоров», СПб., 2003, 240 с.

6. L. Shampine, S. Thompson, *Stiff systems*, Scholarpedia, 2007, 2855 с.
7. Ernst Hairer, Gerhard Wanner, "Stiff differential equations solved by Radau methods", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **111**:1-2 (1999), 93–111.
8. Дж. Уатт, Дж. Холл, *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1979, 312 с.
9. Д.В. Кирьянов, Е.Н. Кирьянова, *Вычислительная физика*, Полибук Мультимедиа, М., 2006, 352 с.
10. А. В. Новичкова, Ю. О. Бобренёва, И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, "Информационные системы моделирования реакционной способности алкенов в реакции гидроалюминирования олефинов триизобутилалюминием", *Электротехнические и информационные комплексы и системы*, **10**:3 (2014), 55–61.
11. А. В. Новичкова, Ю. О. Бобренёва, И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, "Информационный комплекс построения кинетической модели реакции гидроалюминирования олефинов триизобутилалюминием", *Электротехнические и информационные комплексы и системы*, **10**:4 (2014), 58–63.

Mathematical modeling of the low-temperature steam reforming of propane in the presence of methane over Ni-based catalyst

© L. F. Akhmadullina⁷, L. V. Enikeeva⁸, A. V. Novichkova⁹, I. M. Gubaydullin¹⁰, P. V. Snytnikov¹¹, D. I. Potemkin¹²

Abstract. In this paper the mathematical model of the low-temperature steam reforming (LSR) of associated petroleum gas was formalized basing on the example of the LSR of model methane-propane mixture. On the basis of kinetic transformations' schemes mathematical models of reactions were obtained. It was shown that the resulting differential equations system is stiff on the part of its components. To solve the direct kinetic problem we proposed a single-iteration Rosenbrock method of the 3th order. In the paper reactants' concentration dependence on the reactor length at the certain temperature and on the array of temperatures were obtained. It was shown that differential equations' systems that are stiff on the part of their components can be effectively solved by the method chosen.

Key Words: mathematical modeling, kinetics of chemical reactions, associated petroleum gas, low-temperature steam reforming, soft steam reforming, catalysis, Rosenbrock method

⁷ Student of Automation of Production Processes Faculty, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa; odnasvete_2014@mail.ru

⁸ Postgraduate student of Mathematical Chemistry Laboratory, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences, Ufa; leniza.enikeeva@gmail.com

⁹ Associate professor of Computer Science and Communication Technology Department, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa; stacy-pm25@mail.ru

¹⁰ Senior Researcher of Mathematical Chemistry Laboratory, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences, Ufa; professor of Petroleum and Gas Technology Department, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa; irekmars@mail.ru

¹¹ Head of the Laboratory of Energy-efficient Catalytic Processes, Novosibirsk State University, Novosibirsk; Senior researcher of the Laboratory of Catalytic Processes in Fuel Cells, Boreskov Institute of Catalysis, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk; pvsnyt@catalysis.ru

¹² Researcher of the Laboratory of Energy-efficient Catalytic Processes, Novosibirsk State University, Novosibirsk; Researcher of the Laboratory of Catalytic Processes in Fuel Cells, Boreskov Institute of Catalysis, Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk; potema@catalysis.ru

УДК 517.9

Конфигурация канала переменного сечения, допускающая безотражательное распространение внутренних волн в океане

© А. В. Багаев¹, Е. Н. Пелиновский²

Аннотация. Обсуждается математическая задача, связанная с нахождением конфигурации каналов переменного сечения, допускающих так называемое безотражательное распространение внутренних волн в океане на далекие расстояния. Задача сводится к нахождению ограниченных на всей числовой оси решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, содержащего две неизвестные функции. Показано, что такие решения существуют и найден их явный вид.

Ключевые слова: волновое уравнение с переменными коэффициентами, уравнение Клейн-Гордона, бегущие волны в неоднородной среде, стратифицированная жидкость

1. Введение

Как известно, в неоднородной среде волны теряют свою энергию при распространении в силу эффектов отражения, рассеяния и дифракции. Если среда неоднородна в поперечном сечении к направлению распространения, то возможно так называемое волноводное распространение, и энергия волны может передаваться на большие расстояния. Математическим эквивалентом такого процесса является существование решений в виде $f(x - ct, y, z)$, перемещающихся вдоль оси x с постоянной скоростью c — так называемые бегущие волны. Их нахождение в нелинейных средах является нетривиальной задачей, на которой мы не будем здесь останавливаться. В то же время считалось, что в неоднородной по трассе среде бегущих волн не существует, поскольку есть отражение от неоднородностей. Это правило справедливо в общем случае, однако из него имеются исключения, если параметры среды меняются специальным образом — см. примеры в различных физических средах ([1]–[9]). Во всех рассмотренных примерах получены сингулярные безотражательные конфигурации параметров среды, которые годятся только в конечной области, а не на всей числовой оси. Настоящая работа посвящена поиску безотражательных конфигураций каналов переменного сечения, в котором находится несжимаемая двухслойная жидкость в поле тяжести. Основной упор будет сделан на анализе конфигураций, которые остаются конечными на всей числовой оси, из чего следует, что в таких каналах волны могут распространяться на большие расстояния без потери энергии. Математически такая задача ставится следующим образом: возможно ли найти решения типа $f(x - ct)$ волнового уравнения с переменными коэффициентами?

¹ Доцент кафедры «Прикладная математика», Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; a.v.bagaev@gmail.com

² Профессор кафедры «Прикладная математика», Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; профессор кафедры информационных систем и технологий, Национальный исследовательский университет — Высшая школа экономики, г. Нижний Новгород; pelinovsky@gmail.com

2. Трансформация волнового уравнения к уравнению Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

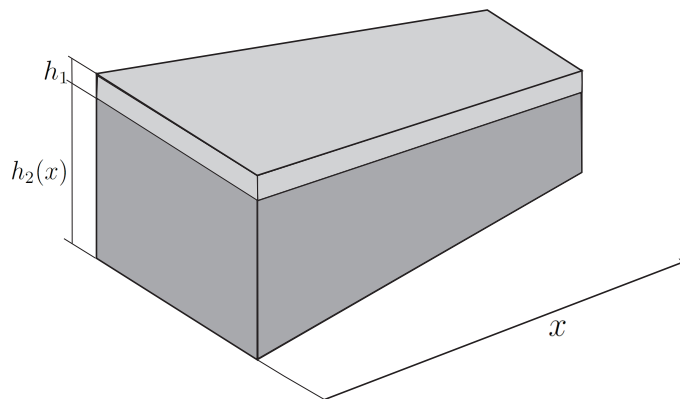
Волновые движения малой амплитуды в двухслойной несжимаемой идеальной жидкости описываются волновым уравнением ([10])

$$B(x) \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(B(x) c^2(x) \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) = 0, \quad (2.1)$$

где

$$c^2(x) = g' \frac{h_1 h_2(x)}{h_1 + h_2(x)}. \quad (2.2)$$

Здесь η — смещение поверхности раздела жидкостей разной плотности, h_1 и $h_2(x)$ — глубины верхнего и нижнего слоев, $B(x)$ — ширина канала, и $g' = g(\rho_2 - \rho_1)/\rho_1$ — редуцированное значение ускорения свободного падения, $\rho_1 < \rho_2$ — плотности верхнего и нижнего слоев. Геометрия задачи показана на рис. 2.1.



Р и с у н о к 2.1

Получение решений волнового уравнения с переменными коэффициентами основано на трансформационной технике, описанной в ([11], [12], [4]). Для этого представим решение уравнения (2.1) как

$$\eta(t, x) = A(x) \Phi(t, \tau), \quad (2.3)$$

где новые переменные имеют смысл амплитуды $A(x)$ и фазы — времени распространения волны $\tau(x)$. Тогда уравнение (2.1) сводится к уравнению типа Клейна–Гордона с переменными коэффициентами для новой неизвестной функции $\Phi(t, \tau)$

$$AB \left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \left(\frac{d\tau}{dx} \right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} \right] - \left[Bc^2 \frac{dA}{dx} \frac{d\tau}{dx} + \frac{d}{dx} \left(c^2 AB \frac{d\tau}{dx} \right) \right] \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \frac{d}{dx} \left(c^2 \frac{dA}{dx} B \right) \Phi = 0. \quad (2.4)$$

Уравнение (2.4) содержит переменные коэффициенты, как и исходное волновое уравнение (2.1). Найдем условия, когда коэффициенты уравнения (2.4) станут постоянными. Первое из них вытекает из структуры волнового оператора (даламбериана) в первых квадратных скобках и приводит к определению фазы

$$\tau(x) = \int \frac{dx}{c(x)}, \quad (2.5)$$

где мы для определенности взяли знак плюс. Такого рода выражение для фазы (эйконала) известно для волн в плавно неоднородной среде, здесь же оно получается в весьма общем виде. Вторая скобка в (2.4) обязана быть равной нулю, чтобы решения не нарастали в пространстве на одном из концов

$$A(x) = \frac{const}{\sqrt{c(x)B(x)}}. \quad (2.6)$$

Наконец, коэффициент перед последним членом в (2.4) должен быть пропорциональным AB , чтобы уравнение Клейна–Гордона имело постоянные коэффициенты. Это приводит к уравнению

$$\frac{d}{dx} \left[c^2 B \frac{dA}{dx} \right] = -pAB, \quad (2.7)$$

где p — произвольная константа. Удобно исключить амплитуду A с помощью формулы (2.6), тогда уравнение (2.7) становится замкнутым уравнением, описывающим изменение глубины и ширины канала в безотражательном случае

$$\frac{d}{dx} \left[\sqrt{\frac{c(x)}{B(x)}} \frac{d}{dx} (c(x)B(x)) \right] = 2p \sqrt{\frac{B(x)}{c(x)}}. \quad (2.8)$$

В результате уравнение (2.4) становится уравнением Клейна–Гордона с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \tau^2} + p\Phi = 0. \quad (2.9)$$

Уравнение Клейна–Гордона (2.9) очень хорошо изучено в математической физике и в теории поля, для него легко поставить и решить задачу Коши. Здесь мы сосредоточимся на изучении характеристик безотражательного канала, описываемых уравнением (2.8).

3. Ограниченные решения уравнения (2.8)

Уравнение (2.8) было получено в [9], там же были получены частные решения этого уравнения. Все частные решения оказывались сингулярными (когда c или B обращались в нуль), либо уходящими в бесконечность на больших расстояниях. В сингулярном случае канал оказывался ограниченным, а в другом случае нарушалась применимость волнового уравнения (2.1), в котором глубина канала должна быть малой по сравнению с длиной волны. Тем самым, уравнение (2.9) работало только на ограниченном интервале τ и на концах надо было использовать те или иные граничные условия (которые не всегда легко сформулировать, например, когда волна выходит на берег) либо сшивать безотражательную конфигурацию с другой. Поэтому поставим следующую задачу: найти общий вид решения уравнения (2.8), а также условий, при которых решения заданы на всей числовой оси и всюду ограничены:

$$0 < c(x) \leq c_1, 0 < B(x) \leq B_1, \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

3.1. Общий вид решения уравнения (2.8)

Пусть $c = c(x)$, $B = B(x)$ — решение уравнения (2.8). Умножим (2.8) на $\sqrt{\frac{c(x)}{B(x)}}$ и положим

$$\begin{cases} u = c(x)/B(x), \\ v = \frac{d}{dx}(c(x)B(x)). \end{cases} \quad (3.2)$$

Тогда

$$\sqrt{u} \frac{d}{dx}(v\sqrt{u}) = 2p,$$

откуда получаем линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$2uv' + u'v = 4p. \quad (3.3)$$

Зафиксируем в (3.3) функцию $u = u(x)$ и найдем $v = v(x)$. Интегрируя (3.3), получим

$$v(x) = \frac{2p \int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.4)$$

Принимая во внимание (3.2), имеем

$$\begin{cases} cB = \int v dx = \int \frac{2p \int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}} dx, \\ \frac{c}{B} = u, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} c^2 = u \int v dx = u \int \frac{2p \int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}} dx, \\ B^2 = \frac{c^2}{u^2} = \frac{1}{u} \int \frac{2p \int \frac{dx}{\sqrt{u}} + \alpha}{\sqrt{u}} dx. \end{cases} \quad (3.5)$$

Обозначим $F(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{u(x)}}$, тогда $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{u(x)}}$ и $u(x) = 1/F'^2(x)$. Следовательно,

$$c^2 = \frac{1}{F'^2} \int \frac{2pF + \alpha}{\sqrt{u}} dx = \frac{1}{F'^2} \int (2pF + \alpha) dF = \frac{pF^2 + \alpha F + \beta}{F'^2},$$

$$B^2 = F'^2(pF^2 + \alpha F + \beta),$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Таким образом, решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}}{|F'(x)|}, \\ B(x) = |F'(x)| \sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}, \end{cases} \quad (3.6)$$

где $F = F(x)$ — произвольная дифференцируемая функция, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3.2. Исследование решений уравнения (2.8) на ограниченность

Будем искать среди решений уравнения (2.8) решения, удовлетворяющие условию (3.1). Рассмотрим сначала простейший **случай** $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \alpha = \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}$. Тогда (3.6) будет иметь вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{|F'(x)|} = \frac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)}, \\ B(x) = \sqrt{\beta}|F'(x)| = \sqrt{\beta}\Psi(x), \end{cases}$$

где $\Psi(x) = |F'(x)|$. Система неравенств

$$\begin{cases} 0 < \frac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)} \leq c_1, \\ 0 < \sqrt{\beta}\Psi(x) \leq B_1, \end{cases}$$

имеет решение

$$0 < \frac{\sqrt{\beta}}{c_1} \leq \Psi(x) \leq \frac{B_1}{\sqrt{\beta}} \quad (3.7)$$

при условии $c_1 B_1 \geq \beta > 0$; в противном случае решений нет.

Таким образом, в случае $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \alpha = \mathbf{0}, \beta \neq \mathbf{0}$ ограниченное решение имеет вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)}, \\ B(x) = \sqrt{\beta}\Psi(x), \end{cases} \quad (3.8)$$

где $\Psi(x)$ — любая дифференцируемая функция, удовлетворяющая условию (3.7) и $c_1 B_1 \geq \beta > 0$.

Пусть теперь $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \alpha \neq \mathbf{0}$. Тогда (3.6) будет иметь вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{\alpha F(x) + \beta}}{|F'(x)|} = \frac{\sqrt{\alpha \Psi(x)}}{|\Psi'(x)|}, \\ B(x) = |F'(x)|\sqrt{\alpha F(x) + \beta} = |\Psi'(x)|\sqrt{\alpha \Psi(x)}, \end{cases}$$

где $\Psi(x) = F(x) + \frac{\beta}{\alpha}$.

Исследуем ограниченность решений в этом случае. Для этого рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\alpha \Psi(x)}}{|\Psi'(x)|} \leq c_1, \\ |\Psi'(x)|\sqrt{\alpha \Psi(x)} \leq B_1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{\alpha \Psi(x)}}{|\Psi'(x)|} = c_1 \quad (3.10)$$

являются две функции

$$\Psi_+(x) = \frac{\alpha}{4} \left(\frac{x}{c_1} + a \right)^2, \quad \Psi_-(x) = \frac{\alpha}{4} \left(-\frac{x}{c_1} + a \right)^2, \quad (3.11)$$

где $a \in \mathbb{R}$. Для того, чтобы получить решения первого неравенства системы (3.9), рассмотрим a в (3.11) как функцию $a = a(x)$. После подстановки $\Psi_+(x)$ в первое неравенство системы (3.9) будем иметь

$$\frac{1}{\left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right|} \leq c_1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a'(x) \geq 0, \\ a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}. \end{cases} \quad (3.12)$$

Итак, $\Psi_+(x) = \frac{\alpha}{4} \left(\frac{x}{c_1} + a(x) \right)^2$ — решение первого неравенства системы (3.9), где $a(x)$ — функция, удовлетворяющая условию $a'(x) \geq 0$ или $a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}$. Подставив найденное $\Psi_+(x)$ во второе неравенство (3.9), получим:

$$\frac{\alpha^2}{4} \left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right| \left(\frac{x}{c_1} + a(x) \right)^2 \leq B_1. \quad (3.13)$$

При условиях (3.12) на функцию $a(x)$ левая часть неравенства (3.13) является неограниченной функцией на $\mathbb{R}$ и, следовательно, $\Psi_+(x)$ не является решением системы (3.9).

Аналогичные рассуждения проводятся для функции $\Psi_-(x)$.

Таким образом, при $\mathbf{p} = \mathbf{0}, \alpha \neq \mathbf{0}, \beta > \mathbf{0}$ нет решений, удовлетворяющих условию (3.1).

Пусть $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$. Выделим полный квадрат под корнем в (3.6)

$$pF^2 + \alpha F + \beta = p \left(F + \frac{\alpha}{2p} \right)^2 + \beta - \frac{\alpha^2}{4p} = p\Psi^2 + \gamma,$$

где $\Psi = F + \frac{\alpha}{2p}$, $\gamma = \beta - \frac{\alpha^2}{4p}$. Тогда (3.6) запишется в виде

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}}{|\Psi'(x)|}, \\ B(x) = |\Psi'(x)|\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}. \end{cases} \quad (3.14)$$

Исследуем ограниченность полученных решений. Для этого рассмотрим систему дифференциальных неравенств

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}}{|\Psi'(x)|} \leq c_1, \\ |\Psi'(x)|\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma} \leq B_1. \end{cases} \quad (3.15)$$

Необходимо рассмотреть 4 случая: **(1)** $p > 0, \gamma > 0$; **(2)** $p > 0, \gamma = 0$; **(3)** $p > 0, \gamma < 0$; **(4)** $p < 0, \gamma > 0$.

Случай 1 ($\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$). Решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{p\Psi^2(x) + \gamma}}{|\Psi'(x)|} = c_1 \quad (3.16)$$

являются две функции

$$\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \left(\frac{x}{c_1} + a \right), \quad \Psi_-(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \left(-\frac{x}{c_1} + a \right), \quad (3.17)$$

где $a \in \mathbb{R}$. Для того, чтобы получить решения первого неравенства системы (3.15), рассмотрим a в (3.17) как функцию $a(x)$. После подстановки $\Psi_+(x)$ в первое неравенство системы (3.15) будем иметь (3.12). Итак, $\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{p}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \left(\frac{x}{c_1} + a(x) \right)$ — решение первого неравенства системы (3.15) при условии, что функция $a(x)$ удовлетворяет неравенству $a'(x) \geq 0$ или $a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}$. Подставив найденное $\Psi_+(x)$ во второе неравенство (3.15), получим:

$$\gamma \left| \frac{1}{c_1} + a' \right| \operatorname{ch}^2 \sqrt{p} \left(\frac{x}{c_1} + a \right) \leq B_1. \quad (3.18)$$

При условиях (3.12) на функцию $a(x)$ левая часть неравенства (3.18) является неограниченной функцией на $\mathbb{R}$ и, следовательно, $\Psi_+(x)$ не является решением системы (3.15).

Аналогичные рассуждения проводятся для функции $\Psi_-(x)$.

Таким образом, при $\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$ нет решений, удовлетворяющих условию (3.1).

Аналогично доказывается, что **Случай 2** ($\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma = \mathbf{0}$) и **Случай 3** ($\mathbf{p} > \mathbf{0}, \gamma < \mathbf{0}$) не дают решений, удовлетворяющих условию (3.1).

Случай 4 ($\mathbf{p} < \mathbf{0}, \gamma > \mathbf{0}$). Положим $q = -p > 0$. В этом случае система (3.15) примет вид

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(x)|} \leq c_1, \\ |\Psi'(x)|\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} \leq B_1. \end{cases} \quad (3.19)$$

Решениями уравнения

$$\frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(x)|} = c_1 \quad (3.20)$$

являются две функции

$$\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin \sqrt{q} \left(\frac{x}{c_1} + a \right), \quad \Psi_-(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin \sqrt{q} \left(-\frac{x}{c_1} + a \right), \quad (3.21)$$

где $a \in \mathbb{R}$. Для того, чтобы получить решения первого неравенства системы (3.19), рассмотрим a в (3.21) как функцию $a(x)$. После подстановки $\Psi_+(x)$ в первое неравенство системы (3.19) будем иметь (3.12). Итак, $\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin \sqrt{q} \left(\frac{x}{c_1} + a(x) \right)$ — решение первого неравенства системы (3.19) при условии, что функция $a = a(x)$ удовлетворяет неравенству $a'(x) \geq 0$ или $a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}$. Подставив найденное $\Psi_+(x)$ во второе неравенство (3.19), получим:

$$\gamma \left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right| \cos^2 \sqrt{q} \left(\frac{x}{c_1} + a(x) \right) \leq \gamma \left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right| \leq B_1. \quad (3.22)$$

Неравенство $\left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right| \leq \frac{B_1}{\gamma}$ запишем в виде $-\frac{B_1}{\gamma} - \frac{1}{c_1} \leq a'(x) \leq \frac{B_1}{\gamma} - \frac{1}{c_1}$. С учетом условий (3.12) будем иметь два ограничения на функцию $a = a(x)$:

$$\begin{cases} 0 \leq a'(x) \leq \frac{B_1}{\gamma} - \frac{1}{c_1}, \\ -\frac{B_1}{\gamma} - \frac{1}{c_1} \leq a'(x) \leq -\frac{2}{c_1}. \end{cases} \quad (3.23)$$

При этом предполагается, что константа интегрирования γ такова, что $c_1 B_1 \geq \gamma$; в противном случае решений нет.

Итак, $\Psi_+(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin \sqrt{q} \left(\frac{x}{c_1} + a \right)$, где функция $a = a(x)$ удовлетворяет одному из неравенств (3.23) и $c_1 B_1 \geq \gamma$, является решением системы неравенств (3.19).

Аналогичные рассуждения можно провести для функции $\Psi_-(x) = \sqrt{\frac{\gamma}{q}} \sin \sqrt{q} \left(-\frac{x}{c_1} + a(x) \right)$, при этом, по существу, обе функции $\Psi_+(x)$ и $\Psi_-(x)$ дают одно ограниченное решение уравнения (2.8)

$$\begin{cases} c(x) = \frac{1}{\left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right|} \leq c_1, \\ B(x) = \gamma \left| \frac{1}{c_1} + a'(x) \right| \cos^2 \sqrt{-p} \left(\frac{x}{c_1} + a(x) \right) \leq B_1, \end{cases} \quad (3.24)$$

где функция $a = a(x)$ удовлетворяет одному из неравенств (3.23) и $c_1 B_1 \geq \gamma = \beta - \frac{\alpha^2}{4p} > 0$.

З а м е ч а н и е 3.1. В силу условий (3.23) на функцию $a = a(x)$ существуют такие значения x_0 , что $\cos \sqrt{-p} \left(\frac{x_0}{c_1} + a(x_0) \right) = 0$ и, следовательно, $B(x_0) = 0$. Кроме того, при этом $B'(x_0) = 0$, то есть график функции $B(x)$ касается оси Ox .

Получим другое решение системы (3.19), решив сначала второе неравенство этой системы. Найдем решения уравнения

$$|\Psi'(x)| \sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} = B_1. \quad (3.25)$$

Обозначим

$$\Theta(\Psi) = \int \sqrt{\gamma - q\Psi^2} d\Psi = \frac{\gamma}{2\sqrt{q}} \left(\sqrt{\frac{q}{\gamma}} \Psi \sqrt{1 - \frac{q}{\gamma} \Psi^2} + \arcsin \sqrt{\frac{q}{\gamma}} \Psi \right).$$

Тогда решение уравнения (3.25) можно записать в виде

$$\Theta(\Psi) = \pm B_1 x + b,$$

где $b \in \mathbb{R}$. Поскольку $\Theta'(\Psi) = \sqrt{\gamma - q\Psi^2} \geq 0$, то функция $\Theta(\Psi)$, заданная на отрезке $\left[-\sqrt{\frac{\gamma}{q}}, \sqrt{\frac{\gamma}{q}}\right]$, монотонна и, следовательно, для нее существует обратная функция $\Psi = \Psi(\Theta)$, определенная на отрезке $\left[-\frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}, \frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}\right]$. Таким образом, решение уравнения (3.25) имеет вид

$$\Psi = \Psi(\pm B_1 x + b).$$

Сначала будем искать решения неравенств (3.19) в виде $\Psi = \Psi(B_1 x + b)$. Пусть теперь $b = b(x)$. Подставив решение $\Psi = \Psi(B_1 x + b)$ во второе неравенство (3.19), получим

$$\begin{aligned} |\Psi'(x)| \sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} &= |\Psi'(\Theta)| |B_1 + b'(x)| \sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} = \\ &= \frac{|B_1 + b'(x)| \sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{\Theta'(\Psi)} \leq |B_1 + b'(x)| \leq B_1. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Следовательно, $-2B_1 \leq b'(x) \leq 0$. Подставив решение $\Psi = \Psi(B_1 x + b)$ в первое неравенство (3.19), получим

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(x)|} &= \frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)}}{|\Psi'(\Theta)| |B_1 + b'(x)|} = \frac{\sqrt{\gamma - q\Psi^2(x)} |\Theta'(\Psi)|}{|B_1 + b'(x)|} = \\ &= \frac{\gamma - q\Psi^2(x)}{|B_1 + b'(x)|} \leq \frac{\gamma}{|B_1 + b'(x)|} \leq c_1, \end{aligned} \quad (3.27)$$

откуда

$$|B_1 + b'(x)| \geq \frac{\gamma}{c_1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} b'(x) \geq \frac{\gamma}{c_1} - B_1, \\ b'(x) \leq -\frac{\gamma}{c_1} - B_1. \end{cases} \quad (3.28)$$

С учетом неравенства $-2B_1 \leq b'(x) \leq 0$ будем иметь следующие ограничения на $b = b(x)$:

$$\begin{cases} \frac{\gamma}{c_1} - B_1 \leq b'(x) \leq 0, \\ -2B_1 \leq b'(x) \leq -\frac{\gamma}{c_1} - B_1, \end{cases} \quad (3.29)$$

при условии $c_1 B_1 \geq \gamma$; в противном случае решений нет.

Положим $\chi(\Theta) = \gamma - q\Psi^2(\Theta)$. Функция $\chi(\Theta)$ определена на отрезке $\left[-\frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}, \frac{\pi\gamma}{4\sqrt{q}}\right]$. Продолжим эту функцию на всю числовую ось периодически с периодом $\frac{\pi\gamma}{2\sqrt{q}}$ и обозначим ее также через $\chi(\Theta)$. В этих обозначениях ограниченное решение уравнения (2.8) можно записать следующим образом

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\chi(B_1 x + b(x))}{|B_1 + b'(x)|} \leq c_1, \\ B(x) = |B_1 + b'(x)| \leq B_1, \end{cases} \quad (3.30)$$

где $b = b(x)$ — дифференцируемая функция, удовлетворяющая одному из условий (3.29) и $c_1 B_1 \geq \gamma$.

Аналогично можно рассмотреть случай $\Psi = \Psi(-B_1 x + b)$. По существу он дает решение того же вида (3.30).

З а м е ч а н и е 3.2. В силу условий (3.29), наложенных на функцию $b = b(x)$, существуют такие значения x_0 , что $\chi(B_1 x_0 + b) = 0$, и, следовательно, $c(x_0) = 0$.

З а м е ч а н и е 3.3. В силу замечаний 3.1. и 3.2. ограниченные решения, задаваемые формулами (3.24) и (3.30), являются сингулярными.

Результаты работы можно сформулировать в виде следующих утверждений.

Т е о р е м а 3.1. Любое решение уравнения (2.8) имеет вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}}{|F'(x)|}, \\ B(x) = |F'(x)|\sqrt{pF^2(x) + \alpha F(x) + \beta}, \end{cases}$$

где $F = F(x)$ — произвольная дифференцируемая функция, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Т е о р е м а 3.2. Ограниченные решения уравнения (2.8), заданные на всей числовой оси и не обращающиеся в ноль (несингулярные), существуют только при $p = 0$ и имеют вид

$$\begin{cases} c(x) = \frac{\sqrt{\beta}}{\Psi(x)} \leq c_1, \\ B(x) = \sqrt{\beta}\Psi(x) \leq B_1, \end{cases}$$

где $\Psi(x)$ — любая дифференцируемая функция, $\beta \in \mathbb{R}$, удовлетворяющие условиям

$$0 < \frac{\sqrt{\beta}}{c_1} \leq \Psi(x) \leq \frac{B_1}{\sqrt{\beta}}, \quad c_1 B_1 \geq \beta > 0.$$

Благодарности. Авторы выражают благодарность проф. И.П. Рязанцевой за полезное обсуждение работы и ценные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ НШ-6637.2016.5, а также гранта РФФИ 16-02-00167.

Дата поступления 25.10.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. Б. Шварцбург, “Дисперсия электромагнитных волн в слоистых и нестационарных средах (точно решаемые модели)”, *Успехи физ. наук*, **170**:12 (2000), 1297–1324.
2. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, T. Soomere, “Long surface wave dynamics along a convex bottom”, *J. Geophysical Research – Oceans*, **114** (2009), C07006.
3. I. Didenkulova, E. Pelinovsky, “Non-dispersive traveling waves in strongly inhomogeneous water channels”, *Physics Letters A*, **373**:42 (2009), 3883–3887.

4. R. Grimshaw, D. Pelinovsky, E. Pelinovsky, “Homogenization of the variable-speed wave equation”, *Wave Motion*, **47**:12 (2010), 496–507.
5. Е. Н. Пелиновский, Т. Г. Талипова, “Безотражательное распространение волн в сильно неоднородных средах”, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, 2010, № 3, 4–13.
6. Н. С. Петрухин, Е. Н. Пелиновский, Е. К. Бацына, “Безотражательные волны в атмосфере Земли”, *Письма в ЖЭТФ*, **93**:10 (2011), 625–628.
7. Н. С. Петрухин, Е. Н. Пелиновский, Е. К. Бацына, “Безотражательное распространение акустических волн в атмосфере Солнца”, *Письма в Астрономический Журнал*, **38**:6 (2012), 439–445.
8. M. S. Ruderman, E. Pelinovsky, N. S. Petrukhin, T. Talipova, “Non-reflective propagation of kink waves in solar magnetic tubes”, *Solar Physics*, **286** (2013), 417–426.
9. Т. Г. Талипова, Е. Н. Пелиновский, О. Е. Куркина, Е. А. Рувинская, А. Р. Гиниятуллин, А. А. Наумов, “Безотражательное распространение внутренних волн в канале переменного сечения и глубины”, *Фундаментальная и прикладная гидрофизика*, **6**:3 (2013), 46–53.
10. В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков, *Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости*, СО РАН, Новосибирск, 2000, 419 с.
11. G. Bluman, “On mapping linear partial differential equations to constant coefficient equations”, *SIAM J. Appl. Math.*, **43** (1983), 1259–1273.
12. E. Varley, B. Seymour, “A method for obtaining exact solutions to partial differential equations with variable coefficients”, *Stud. Appl. Math.*, **78** (1988), 183–225.

The configuration of the variable cross-section channel allowed reflectionless propagation of internal waves in the ocean

© A. V. Bagaev³, E. N. Pelinovsky⁴

Abstract. Mathematical problem discussed in the paper is about determination of configuration of variable-cross-section channels that allow so-called reflectionless propagation of internal waves in the ocean. The problem is reduced to searching for bounded solutions of ordinary second-order differential equation with two unknown functions. It is shown that such solutions exist, and they are obtained in explicit form.

Key Words: variable-coefficient wave equation, Klein–Gordon equation, travelling waves in heterogeneous media, stratified fluid

³ Associate professor of Applied Mathematics Department, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod; a.v.bagaev@gmail.com

⁴ Professor of Applied Mathematics Department, Nizhny Novgorod State Technical University n.a. R.E. Alekseev, Professor of Information Systems Department, Nizhny Novgorod Branch of National Research University – Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; pelinovsky@gmail.com

УДК 544.431:519.876.5

Оптимальное управление и чувствительность оптимума в задачах химической кинетики

© С. Н. Коледин¹, К. Ф. Коледина²

Аннотация. В работе рассмотрена задача оптимального управления химическими реакциями на основе кинетической модели с использованием показателей экономической эффективности процесса в качестве критериев оптимизации - производительность, прибыль и рентабельность. Кинетическая модель, построенная на основе закона действующих масс, является фундаментальным знанием о химическом процессе. Объектом исследования работы является каталитическая реакция спиртов с диметилкарбонатом. В качестве управляющих параметров рассмотрены температура и начальные значения концентраций катализатора, которые для конкретной реакции имеют ограничения по некоторым физико-химическим условиям. Так как заранее неизвестны конечные концентрации веществ, то задача является задачей со свободным правым концом. Рассмотрена оценка чувствительности оптимального режима к изменению управляющих воздействий.

Ключевые слова: кинетическая модель, оптимальное управление, экономическая оценка, чувствительность оптимального решения

1. Введение

Разработка химических реакторов методом математического моделирования основана на всестороннем изучении и познании технологического процесса. На начальном этапе необходим структурный (системный) анализ объекта (реакции) с выделением ключевых веществ, предположением о схеме протекания реакции и т.д. Результатом исследования задачи химической кинетики (ЗХК) является кинетическая модель реакции, включающая в себя кинетические уравнения, закономерность изменения концентраций веществ во времени, значения кинетических параметров, физико-химические выводы по реакции [1]. Кинетическая модель, выписанная на основе закона действующих масс, является фундаментальным знанием о химическом процессе. На основе кинетической модели и критерия оптимизации возможна постановка задачи оптимального управления, определение самых лучших в некотором смысле условий, не принимая во внимание возможность их реализации [2]. Прежде чем перейти к вопросам реализации оптимального режима необходимо оценить чувствительность оптимального решения к изменению управляющих воздействий. И только затем, с учетом дополнительных данных, возможно проектирование самого реактора, с возвратом и уточнением предыдущих уровней.

2. Задача оптимального управления в химической кинетике

Уравнения химической кинетики описываются системой (2.1) [3].

$$\frac{dx_i}{dt} = \phi_i(\nu, k_j, x_i(t), u(t)), i = 1 \dots I, j = 1 \dots J \quad (2.1)$$

¹ Аспирант лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН; koledinsrg@gmail.com

² Научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, доцент кафедры информатики и ИКТ Уфимского государственного нефтяного технического университета; koledinakamila@mail.ru

с начальными условиями: при $t=0$, $x_i(0) = x_i^0$; где t - время, мин; ν - матрица стехиометрических коэффициентов; J - количество стадий, $x_i(t)$ - концентрации веществ участвующих в реакции, моль/л; I - количество веществ; k_j - константы скоростей стадий (приведенные), 1/мин, $u(t) = (u^1(t), u^2(t), \dots, u^r(t)) \in U$ - допустимые управления.

Так для каталитической реакции спиртов с диметилкарбонатом (кинетическая модель и значения кинетических параметров $k_j, j = 1 \dots 7$ приведены в работе [7]) система (2.1) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -k_1 * x_3(t) * x_1(t) - k_4 * x_1(t) * x_{12}(t) - k_5 * x_1(t) * x_{12}(t) - \\ - k_6 * x_1(t) * x_{11}(t), \\ \frac{dx_2}{dt} = -k_2 * x_2(t) * x_{10}(t) - (k_3 * x_2(t) * x_{10}(t) - k_8 * x_9(t) * x_{12}(t)), \\ \frac{dx_3}{dt} = -k_1 * x_3(t) * x_1(t), \\ \frac{dx_4}{dt} = k_6 * x_1(t) * x_{11}(t) + k_4 * x_1(t) * x_{12}(t), \\ \frac{dx_5}{dt} = k_5 * x_1(t) * x_{12}(t), \\ \frac{dx_6}{dt} = k_2 * x_2(t) * x_{10}(t) + k_4 * x_1(t) * x_{12}(t), \\ \frac{dx_7}{dt} = k_7 * x_8(t) * x_9(t), \\ \frac{dx_8}{dt} = k_4 * x_1(t) * x_{12}(t) + k_5 * x_1(t) * x_{12}(t) + k_6 * x_1(t) * x_{11}(t) - \\ - k_7 * x_8(t) * x_9(t), \\ \frac{dx_9}{dt} = k_2 * x_2(t) * x_{10}(t) + k_3 * x_2(t) * x_{10}(t) - k_8 * x_9(t) * x_{12}(t) - \\ - k_7 * x_8(t) * x_9(t), \\ \frac{dx_{10}}{dt} = k_1 * x_3(t) * x_1(t) - k_2 * x_2(t) * x_{10}(t) - (k_3 * x_2(t) * x_{10}(t) - \\ - k_8 * x_9(t) * x_{12}(t)) + k_7 * x_8(t) * x_9(t), \\ \frac{dx_{11}}{dt} = k_2 * x_2(t) * x_{10}(t) - k_6 * x_1(t) * x_{11}(t), \\ \frac{dx_{12}}{dt} = k_3 * x_2(t) * x_{10}(t) - k_8 * x_9(t) * x_{12}(t) - k_4 * x_1(t) * x_{12}(t) - \\ - k_5 * x_1(t) * x_{12}(t), \\ \frac{dx_{13}}{dt} = 4 * k_1 * x_3(t) * x_1(t), \\ \frac{dx_{14}}{dt} = k_1 * x_3(t) * x_1(t) \end{array} \right. \quad (2.2)$$

с начальными условиями: при $t=0$, $x_i(0) = x_i^0$, $i=1,2,3$; $x_i(0) = 0$, $i=4, \dots, 14$. Где x_1 , x_2 , x_3 - концентрации исходных реагентов (гексанол $C_6H_{13}OH$, диметилкарбонат $(MeO)_2CO$, октакобальтокарбонил $Co_2(CO)_8$), x_4 ($C_6H_{13}OMe$), x_5 ($C_6H_{13}CO_2Me$) - концентрации целевых продуктов.

Где

$$k_j = k_j^0 * \exp\left(\frac{-Ea_j}{RT}\right), \quad (2.3)$$

где k_j^0 - предэкспоненциальный множитель, Ea_j - энергия активации (ккал/моль), R - универсальная газовая постоянная (0,002 ккал/(моль*К)), T - температура, К.

Тогда (2.1) (и, соответственно, (2.2)) в постановке задачи оптимального управления является моделью объекта управления. Управлением в ЗХК может быть температура, выбор катализатора, концентрация катализатора, давление и т.д. В рассматриваемой задаче в качестве управления рассмотрим температуру, которая, для конкретной реакции имеет ограничения по некоторым физико-химическим условиям [4]. Тогда задача определяет условный экстремум по управлению.

Обычно функционалом качества управления в ЗХК является максимум выхода продукта [5]. Однако, в работе [6] отмечается, что наиболее общей постановкой оптимальной

задачи служит выражение критерия оптимальности в виде некоторой экономической оценки. Такой оценкой в ЗХК может быть интегральное значение некоторого экономического критерия (рентабельность, прибыль, производительность) [7] (2.4).

$$I = \frac{1}{t_1} \int_0^{t_1} R(\eta_i, x_i(t, u), \mu) dt; \quad (2.4)$$

где R - функция оптимизации, η_i - веса веществ, μ - дополнительные затраты, t_1 - время окончания процесса.

Тогда задача определения оптимальных управлений может быть сформулирована следующим образом [8].

Среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, найти управление, которое переводит фазовую точку из заранее заданного положения $x_i^0 = x_i(t_0)$ в некоторое положение $x_i^1 = x_i(t_1) \in [0; \sum_{i=1 \dots I} x_i^0]$, и при этом придает функционалу (2.4) наибольшее значение.

Здесь, $x_i(t)$ - решения уравнения (2.1) или (2.2), с начальными условиями $x_i(t_0) = x_i^0$ при заданном управлении $u = u(t)$. Так как заранее неизвестны конечные концентрации веществ, то задача является задачей со свободным правым концом.

Тогда, возможно применение принципа максимума для задачи (2.1), (2.4).

Так, для оптимизации химических реакций, проводимых в лабораторных условиях, в качестве критериев оптимизации возможно использование следующих показателей экономической эффективности процесса:

1) Производительность – объем выпускаемой продукции в единицу времени. Оценку достижения максимальных значений производительности можно проводить и по изменению конверсии исходного реагента в случае, когда количество полученного продукта прямо пропорционально конверсии рассматриваемого вещества [7]. Тогда оптимальные значения времени, конверсии и соответствующие значения производительности определяются по формуле (2.5).

$$R : B = N * C_{x_i}^0 * \xi_{x_i}(t, u) * M_{x_i} \quad (2.5)$$

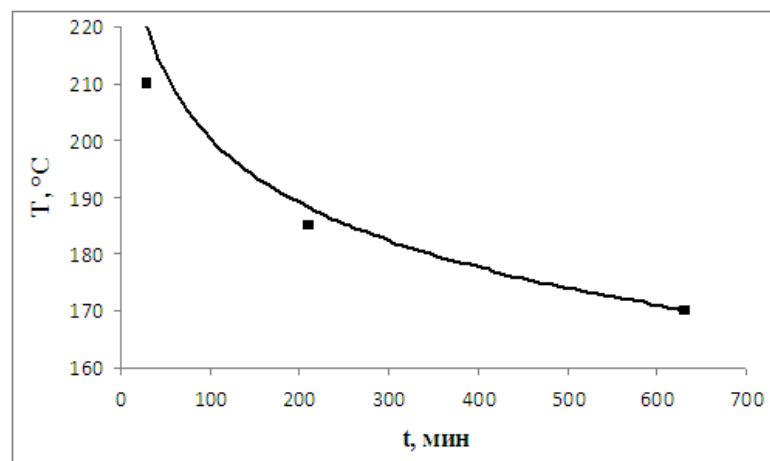
где B – производительность процесса [г/(моль*сут)]; N – количество циклов в сутки [сут-1]; $C_{x_i}^0$ – начальное значение исходного реагента [мольные доли]; ξ_{x_i} – конверсия исходного реагента; M_{x_i} – молярная масса исходного реагента [г/моль].

Причем максимальное значение производительности не всегда соответствует максимальной конверсии, так как для достижения максимальной конверсии необходимо затратить больше времени, что приводит к уменьшению N .

Так, для рассматриваемого примера (2.2) функционал качества управления (2.4) в виде производительности (2.5) будет иметь вид (время реакции 200 мин):

$$I = \frac{1}{200} \int_0^{200} N * C_{x_2}^0 * \xi_{x_2}(t, T) * M_{x_2} dt; \quad (2.6)$$

Тогда оптимальный температурный профиль, обеспечивающий максимальную производительность имеет вид рис. 2.1.



Р и с у н о к 2.1

Оптимальный температурный профиль реакции спиртов с диметилкарбонатом при максимальной производительности

2) Прибыль. Очевидно, что прибыль зависит от разности между ценой продукта и его себестоимостью, а также от производительности. В общем случае в себестоимости необходимо учитывать стоимость реагентов, некоторые переменные затраты (электроэнергия на поддержание заданной температуры и др.), постоянные затраты. Тогда значение прибыли определяется по формуле (2.7).

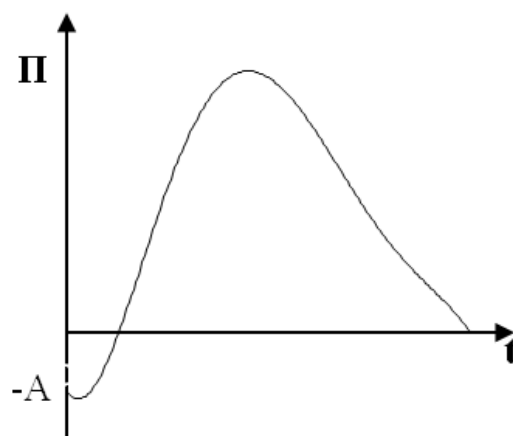
$$R : \Pi = \sum_{prod=1}^P x_{prod}(t, u) * \eta_{prod} - \sum_{source=1}^S x_{source}(t, u) * \eta_{source} - \psi(t, u) - A, \quad (2.7)$$

где Π – прибыль (норм.); x_{prod} – концентрации продуктов реакции, [мольные доли]; x_{source} – концентрации исходных реагентов, [мольные доли]; η – веса компонентов (норм.); $\psi(t)$ – переменные затраты (норм.); A – постоянные затраты (норм.); P – количество продуктов; S – количество исходных реагентов.

Так, для рассматриваемого примера (2.2) функционал качества управления (2.4) в виде прибыли (2.7) будет иметь вид:

$$I = \frac{1}{200} \int_0^{200} (x_4(t, T) * \eta_4 + x_5(t, T) * \eta_5 - x_1(t, T) * \eta_1 - x_2(t, T) * \eta_2 - x_3(t, T) * \eta_3 - \psi(t, T) - A) dt; \quad (2.8)$$

Тогда изменение прибыли имеет вид рис. 2.2. В начальный момент времени прибыль равна постоянным расходам и расходам на реагенты, то есть имеет отрицательное значение. Далее с появлением целевых продуктов прибыль увеличивается, но дальнейший рост переменных затрат, обратно снижает прибыль.



Р и с у н о к 2.2

Зависимость прибыли от времени проведения реакции

3) Рентабельность. Рентабельность определяется как отношение суммы прибыли к объему капиталовложений. Тогда рентабельность процесса можно определить по формуле (2.9).

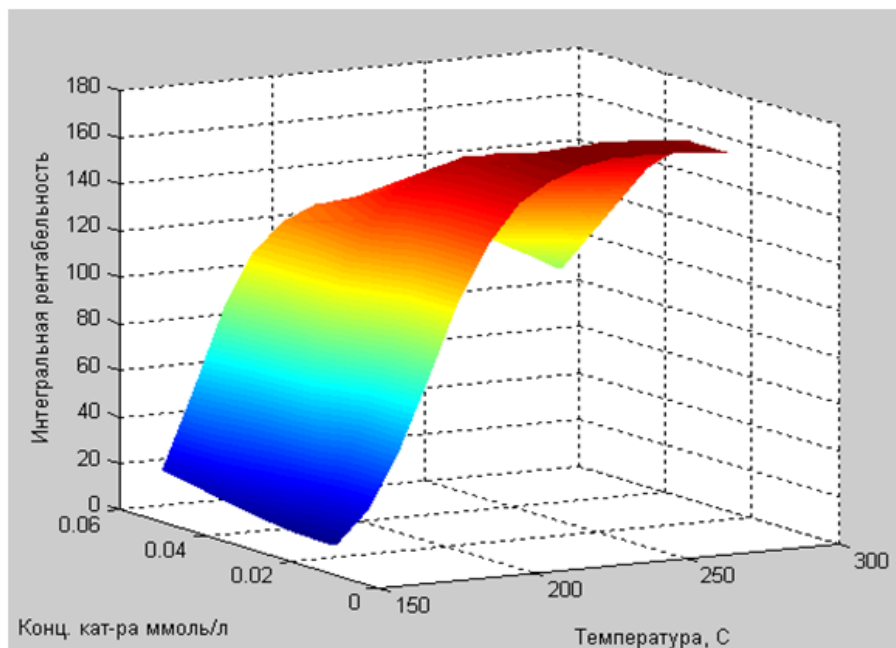
$$R : P = \frac{\sum_{prod=1}^P x_{prod}(t, u) * \eta_{prod}}{\sum_{source=1}^S x_{source}(t, u) * \eta_{source} + \psi(t, u) + A} \quad (2.9)$$

Так, для рассматриваемого примера (2.2) функционал качества управления (2.4) в виде рентабельности (2.9) будет иметь вид:

$$I = \frac{1}{200} \int_0^{200} \frac{x_4(t, T) * \eta_4 + x_5(t, T) * \eta_5}{x_1(t, T) * \eta_1 + x_2(t, T) * \eta_2 + x_3(t, T) * \eta_3 + \psi(t, T) + A} dt; \quad (2.10)$$

Рентабельность всегда неотрицательна. Но с увеличением переменных затрат показатель рентабельности проходит через максимум.

Причем оценку приведенных критериев можно производить с учетом нескольких управляющих воздействий, например температура и начальное количество катализатора. Тогда график изменения интегрального значения показателя будет иметь вид (рис. 2.3). На рис. 2.3 приведено изменение рентабельности для каталитической реакции спиртов с диметилкарбонатом, рассмотренной в работе [7].



Р и с у н о к 2.3

Изменение рентабельности в области изменения управляющих воздействий (температура и концентрация катализатора)

Таким образом, при оптимальном управлении химическими реакциями возможно использование показателей экономической эффективности процесса в качестве критериев оптимизации.

3. Чувствительность оптимального решения в задачах химической кинетики

При практической реализации полученного оптимального режима возможны отклонения от найденного закона. Поэтому важно оценить чувствительность найденного оптимального решения к изменению управляющих воздействий [9]. Оценки размеров окрестности ρ , в которой допустимо изменение значений управляющих воздействий при изменении критерия оптимальности не более чем на $|\Delta I|$ имеет вид (3.1) [6]:

$$\rho = \sqrt{\frac{2|\Delta I|}{\left|\frac{\partial^2 I}{\partial u^2}\right|}}. \quad (3.1)$$

Задача оценки ρ сводится к численному решению задачи оптимального управления с параллельной оценкой чувствительности решения [10].

Таким образом, в работе рассмотрено оптимальное управление химическими реакциями, на основе кинетики, с использованием показателей экономической эффективности процесса в качестве критериев оптимизации. Постановка задачи оптимального управления приведена на основе кинетической модели реакции. Рассмотрена оценка чувствительности оптимального режима к изменению управляющих воздействий.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 15-07-01764 А «Оптимальное управление химическими реакциями металлокомплексного катализа».

Дата поступления 30.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. К. Ф. Коледина, И. М. Губайдуллин, “Кинетика и механизм каталитических реакций гидроалюминирования олефинов алюминийорганическими соединениями”, *Журнал физической химии*, **90**:5 (2016), 671–678.
2. S. A. Mustafina, T. A. Mikhailova, T. G. Mustafin, “Optimal parameters of the α -methylstyrene oligomerization reaction in the presence of a zeolite catalyst”, *International Journal of Chemical Sciences*, **13**:2 (2015), 1071–1075.
3. И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, С. И. Спивак, “Последовательно-параллельное определение кинетических параметров”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **11**:2 (2009), 14–25.
4. И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, С. И. Спивак, “Структурная и параметрическая идентификация кинетических моделей химических реакций с участием металлоорганических соединений на основе информационно-вычислительной аналитической системы”, *Химическая промышленность сегодня*, 2014, № 1, 18–27.
5. И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, Р. Р. Сафин, “Автоматизированная система структурной и параметрической идентификации кинетических моделей химических реакций с участием металлоорганических соединений на основе базы данных кинетических исследований”, *Системы управления и информационные технологии*, **58**:4 (2014), 10–16.
6. А. И. Бояринов, В. В. Кафаров, *Методы оптимизации в химической технологии*, Химия, М., 1975, 564 с.
7. К. Ф. Коледина, С. Н. Коледин, И. М. Губайдуллин, Р. Р. Сафин, И. В. Ахметов, “Информационная система построения кинетической модели каталитической реакции, планирование экономически оптимального химического эксперимента”, *Системы управления и информационные технологии*, **61**:3 (2015), 79–84.
8. Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко, *Математическое теория оптимальных процессов*, Наука, М., 1983, 392 с.
9. В. Д. Лукин, А. В. Новосельский, *Циклические адсорбционные процессы*, Химия, М., 1989, 256 с.
10. И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, Ю. Б. Линд, “Современные технологии высокопроизводительных вычислений при моделировании детального механизма реакции каталитического гидроалюминирования олефинов”, *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, **6** (2011), 10.

Optimal control and optimum sensitivity in problems of chemical kinetics

© S. N. Koledin³, K. F. Koledina⁴

Abstract. The paper considers the problem of optimal control of chemical reactions on the basis of kinetic model using indicators of economic efficiency of the process as an optimization criteria - productivity, profit and profitability. Kinetic model, built on the basis of the law of mass action is a fundamental knowledge of the chemical process. The object of the research work is the catalytic reaction of alcohols with dimethyl carbonate. As the temperature control parameters are considered and the initial value of catalyst concentrations, which for a particular reaction have restrictions on certain physico-chemical conditions. As previously unknown to the final concentrations of substances, the problem is a problem with free right end. The authors of an estimate of the sensitivity of the optimal mode to change control actions.

Key Words: kinetic model, optimal control, economic evaluation, the sensitivity of the optimal solution

³ Postgraduate student of Mathematical Chemistry Laboratory Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences; koledinsrg@gmail.com

⁴ Researcher of Mathematical Chemistry Laboratory, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences; associate professor of Computer Science and ICT Department, Ufa State Petroleum Technological University; koledinakamila@mail.ru

УДК 519.6:665.6-405

Решение обратной задачи химической кинетики на примере реакции синтеза бензилиденбензиламина

© А. А. Мазитов¹, А. Г. Осипова², И. В. Ахметов³, И. М. Губайдуллин⁴

Аннотация. В работе построена новая математическая модель реакции синтеза бензилиденбензиламина. На основе модели решены прямая и обратная задачи химической кинетики. В качестве численного метода решения прямой задачи описан метод Розенброка 4 порядка точности, для обратной задачи – метод покоординатного спуска. В статье приведены экспериментальные данные концентраций веществ в зависимости от времени для исходной реакции, а также значения кинетических констант скоростей отдельных стадий реакции, полученных химиками-экспериментаторами. Результаты решения задач представлены в виде таблиц. Также описаны структура и задачи информационно-вычислительной аналитической системы, с помощью которой проводились расчеты.

Ключевые слова: бензилиденбензиламин, жесткая система, кинетическая модель, прямая и обратная задачи химической кинетики, метод Розенброка, метод покоординатного спуска, информационно-вычислительная аналитическая система

1. Введение

Объектом исследования данной работы является каталитическая реакция синтеза бензилиденбензиламина реакцией бензиламина с четыреххлористым углеродом под действием $\text{FeCl}_3 \bullet 6\text{H}_2\text{O}$ [1]. Продукт этой реакции – бензилиденбензиламин имеет широкий спектр применения в медицине и органическом синтезе.

N-бензилиденбензиламин известен как индикатор для количественного определения литийорганических соединений титриметрическим методом. Кроме того, N-бензилиденбензиламин служит исходным соединением для синтеза ряда гетероциклов, обладающих широким спектром физиологической активности.

В работе исследуется математическая модель реакции синтеза бензилиденбензиламина с точки зрения химической кинетики, которая позволяет изучать закономерности протекания реакции во времени. Применение средств и методов химической кинетики позволяет построить кинетическую модель процесса, которая представляет собой совокупность элементарных стадий реакции и уравнений, характеризующую зависимость скорости химического превращения от параметров реакции, таких как концентрация, давление, температура и других. Данные зависимости определяются на основе экспериментальных данных.

¹ Студент 4-го курса бакалавриата, Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа; mazitov.ainur13@gmail.com

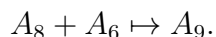
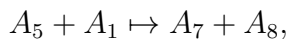
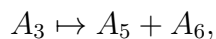
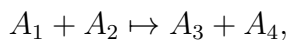
² Студент 2-го курса магистратуры, Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа; anna.osipova@gmail.com

³ Исполняющий обязанности заведующего кафедрой информатики, Уфимский государственный нефтяной технический университет, г. Уфа; ilnurakhmetov@gmail.com

⁴ Старший научный сотрудник лаборатории математической химии Института нефтехимии и катализа РАН, профессор кафедры технологии нефти и газа Уфимского государственного нефтяного технического университета, г. Уфа; irekmars@mail.ru

2. Математическая модель процесса реакции синтеза бензилиденбензиламина

Исходная реакция протекает по схеме, включающей в себя 4 стадии:



В качестве реагентов (A_i) выступают следующие вещества:

$A_1 = C_7H_9N$ – бензиламин,

$A_2 = CCl_4$ – четыреххлористый углерод,

$A_3 = C_7H_8NCl$ – хлорбензиламин,

$A_4 = CHCl_3$ – хлороформ,

$A_5 = C_7H_7N$ – 1-фенилметанимин,

$A_6 = HCl$ – соляная кислота,

$A_7 = C_{14}H_{13}N$ – бензилиденбензиламин,

$A_8 = NH_3$ – аммиак,

$A_9 = NH_4Cl$ – хлористый аммоний.

Уравнения скоростей отдельных стадий имеют вид:

$$w_1 = k_1 x_1 x_2,$$

$$w_2 = k_2 x_3,$$

$$w_3 = k_3 x_5 x_1,$$

$$w_4 = k_4 x_8 x_6,$$

где w_j – скорость j -ой стадии, моль/(л*ч);

k_j – кинетическая константа скорости j -ой стадии, л/(моль*ч) ($j=1,3,4$), 1/ч ($j=2$);

x_i – концентрация i -го вещества (соответствует A_i), моль/л.

Математическая модель, представляющая собой систему обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которая описывает исходную реакцию, и построенная с помощью [2, с.17-21], имеет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = -w_1 - w_3, \\ \frac{dx_2}{dt} = -w_1, \\ \frac{dx_3}{dt} = w_1 - w_2, \\ \frac{dx_4}{dt} = w_1, \\ \frac{dx_5}{dt} = w_2 - w_3, \\ \frac{dx_6}{dt} = -w_2 - w_4, \\ \frac{dx_7}{dt} = w_3, \\ \frac{dx_8}{dt} = w_3 - w_4, \\ \frac{dx_9}{dt} = w_4. \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Начальными данными для системы являются ненулевые концентрации двух веществ и концентрации остальных веществ, в начальный момент времени равные нулю и представленные в мольных долях (в сумме дают единицу):

$$x_1 = 0.3738, \quad x_2 = 0.6262, \quad k_i = 0, \quad i = \overline{3, 9}. \quad (2.2)$$

Проведенный в лаборатории ряд химических опытов по синтезу бензилиденбензиламина при различных температурах и начальными данными (2.2) дали результаты, представленные в таблицах 3 и 4.

Таблица 3: Экспериментальные данные кинетических констант скоростей

Температура опыта, °С	Кинетические константы скоростей			
	k_1 , л/(моль*ч)	k_2 , 1/ч	k_3 , л/(моль*ч)	k_4 , л/(моль*ч)
23	0.01525	4.772	14.49	1.073
85	0.3206	804.6	337.4	0.06742

Таблица 4: Экспериментальные данные концентраций веществ

Температура опыта, °С	Время, ч	Концентрации измеряемых веществ в долях	
		A_1	A_7
23	0.5	1.0	0.0
	1.5	0.9938	0.0062
	2.0	0.9844	0.0156
	4.0	0.9658	0.0342
	6.0	0.9437	0.0563
85	0.5	0.85	0.15
	1.5	0.74	0.26
	2.0	0.62	0.38
	4.0	0.54	0.46
	6.0	0.22	0.78
	8.0	0.04	0.96

Как видно из таблицы 3, порядок констант для обеих температур сильно отличается, поэтому далее система (2.1) рассматривается как жесткая [3].

Конечной задачей построения математической модели является определение кинетических параметров скоростей реакций для построенной модели на основе экспериментальных данных о скоростях химических превращений [4, с.4-5].

3. Численные методы решения прямой и обратной задач химической кинетики для процесса синтеза бензилиденбензиламина

3.1. Решение прямой задачи методом Розенброка

Прямая задача химической кинетики представляет собой расчет состава многокомпонентной реагирующей смеси и скорости реакции на основе кинетической модели с известными параметрами.

Математически прямая задача представляет собой задачу Коши для системы из n уравнений:

$$x' = f(x), \quad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0; t_k],$$

где x, x_0 – вещественные n -мерные функции, t – независимая переменная, которая изменяется на заданном интервале $[t_0; t_k]$.

Начальными данными в прямой задаче являются: начальное t_0 и конечное t_k значения времени, а также исходные концентрации реагентов x_0 .

Так как система жесткая, то для решения прямой задачи используется метод Розенброка 4 порядка точности [5]. В данном методе приближенное значение функции в следующий момент времени вычисляется по формуле:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{13}{6}p_1 + \frac{1}{6}p_2 - 2p_3 + \frac{2}{3}p_4,$$

здесь p_i – числовые коэффициенты, определяющие свойства точности и устойчивости.

Для 4 порядка точности данные коэффициенты вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned} p_1 &= h[E - hA(x_n)]^{-1}f(x_n), \\ p_2 &= h[E - hA(x_n)]^{-1}f(x_n - p_1), \\ p_3 &= h[E - hA(x_n)]^{-1}f(x_n + \frac{1}{8}p_1 + \frac{3}{8}p_2), \\ p_4 &= h[E - hA(x_n)]^{-1}f(x_n + \frac{3}{8}p_1 + \frac{19}{24}p_2 - \frac{1}{6}p_3), \end{aligned}$$

где h – шаг интегрирования, E – единичная матрица, $A(x_n)$ – якобиан системы (2.1) в момент времени $t = t_n$, $f(x_n)$ – вектор-функция правых частей системы (2.1) в момент времени $t = t_n$.

Таким образом решением прямой задачи является пара чисел $(t_i; x_i)$, где t_i – момент времени, x_i – вектор-функция концентраций всех реагентов системы в данный момент времени.

Решая систему (2.1) методом Розенброка 4 порядка, используя в качестве начальных данных значения концентраций (2.2) и значения кинетических констант скоростей из таблицы 3 для разных температур, приняв $h=0.0001$, получим результаты, представленные в таблице 5.

Таблица 5: Сравнение расчетных и экспериментальных значений при решении прямой задачи

Температура опыта, °C	Время, ч	Эксперимент		Метод Розенброка	
		A_1	A_7	A_1	A_7
23	0.5	1.0	0.0	0.9983	0.0017
	1.5	0.9938	0.0062	0.9895	0.0105
	2.0	0.9844	0.0156	0.9847	0.0153
	4.0	0.9658	0.0342	0.9658	0.0342
	6.0	0.9437	0.0563	0.9472	0.0528
85	0.5	0.85	0.15	0.9038	0.0962
	1.5	0.74	0.26	0.7286	0.2714
	2.0	0.62	0.38	0.6507	0.3493
	4.0	0.54	0.46	0.4023	0.5977
	6.0	0.22	0.78	0.2387	0.7613
	8.0	0.04	0.96	0.1390	0.8610

3.2. Решение обратной задачи методом покоординатного спуска

Решение обратной задачи позволяет восстановить вид кинетической модели реакции и ее параметры, то есть обратная задача химической кинетики состоит в построении такой модели, которая удовлетворяет экспериментальным данным и позволяет извлечь всю возможную информацию о кинетических параметрах рассматриваемой реакции.

Решение обратной задачи химической кинетики сводится к поиску минимума целевой функции. В данной работе в качестве критерия минимизации выбрана целевая функция вида [4, с.31]:

$$EE = \sum_{i=1}^P \sum_{j=1}^Q (x_{ij}^{exp} - x_{ij}^{calc})^2,$$

где x_{ij}^{exp} , x_{ij}^{calc} – экспериментальные и расчетные значения концентраций компонентов (измеряются в мольных долях); P – количество моментов времени, для которых проводился эксперимент; Q – количество измеряемых веществ (для которых проводится оптимизация, в данной работе это вещества A_1 и A_7).

Значение EE представляет собой погрешность отклонения вычислительного результата от экспериментального. Примем $EE = 0.00001$.

Поскольку основным методом решения обратных кинетических задач является метод многократного решения прямой кинетической задачи, то основой алгоритма решения обратной кинетической задачи является блок решения прямой кинетической задачи. В качестве метода оптимизации рассмотрим метод покоординатного спуска [6], который является методом прямого поиска или методом нулевого порядка для определения минимума функций m (m – количество стадий исходной реакции, т.е. $m=4$) переменных.

Решая обратную задачу методом покоординатного спуска относительно веществ A_1 и A_7 , получим результаты, представленные в таблице 6.

Таблица 6: Полученные значения кинетических констант скоростей отдельных стадий при решении обратной задачи

Температура опыта, °C	Кинетические константы скоростей			
	k_1 , л/(моль*ч)	k_2 , 1/ч	k_3 , л/(моль*ч)	k_4 , л/(моль*ч)
23	0.04	1.21	0.96	1.0
85	0.36	35.66	6.06	1.0

Сравним решение прямой задачи с использованием констант, полученных экспериментальным и расчетным путями, результат представим в таблице 7.

4. Структура и задачи ИВАС

Для исследования данной реакции реализована информационно-вычислительная аналитическая система (ИВАС), которая включает в себя базу данных и комплекс программ для решения прямой и обратной задачи химической кинетики [7]. Данная ИВАС позволяет построить кинетическую модель химического процесса, находить взаимосвязь между различными объектами и определять возможные закономерности, характерные для исследуемой химической реакции. За счет применения в ИВАС основных принципов и методов математического моделирования возможно наиболее полно исследовать любые химико-технологические процессы, а за счет этого возможно повышение управляемости процесса и проведение его оптимизации.

Таблица 7: Сравнение решения прямой задачи с константами, полученными экспериментальным и расчетным путями

Температура опыта, °C	Время, ч	Эксперимент		Расчет	
		A ₁	A ₇	A ₁	A ₇
23	0.5	1.0	0.0	0.9998	0.0002
	1.5	0.9938	0.0062	0.9969	0.0031
	2.0	0.9844	0.0156	0.9937	0.0063
	4.0	0.9658	0.0342	0.9713	0.0287
	6.0	0.9437	0.0563	0.9392	0.0608
85	0.5	0.85	0.15	0.96	0.04
	1.5	0.74	0.26	0.7853	0.2147
	2.0	0.62	0.38	0.6963	0.3037
	4.0	0.54	0.46	0.4078	0.5922
	6.0	0.22	0.78	0.2256	0.7744
	8.0	0.04	0.96	0.1058	0.8942

Структура ИВАС включает в себя 4 основных компонента: входные информационные потоки, выходные информационные потоки, методы обработки информации, технические средства обработки информации. Структура ИВАС [2, с.8-10] представлена на рисунке 4.1.



Р и с у н о к 4.1

Структура ИВАС

Для ИВАС входными информационными потоками могут являться: условия проведения экспериментов, концентрации веществ по времени (экспериментальные данные), схема реакции (в матричной форме). Выходными же потоками являются: графики сравнения, концентрации веществ по времени (расчетные данные), кинетические константы, энергии активации. Под методами обработки информации подразумеваются различные численные методы, алгоритмы, программы. К техническим средствам обработки информации относятся: компьютеры, экспериментальные установки.

Для ИВАС ставятся следующие задачи:

- 1) составить систему дифференциальных уравнений для заданной схемы реакции;
- 2) проверить произведение атомарно-молекулярной и стехиометрической матриц;
- 3) решить прямые задачи с готовыми константами и сравнить результаты в те моменты времени, где известны экспериментальные данные;
- 4) решить обратную задачу для всех заданных температур и найти кинетические константы, при которых достигается наименьшая разность между расчетом и экспериментом;
- 5) поиск энергий активации для каждой стадии.

Программная часть ИВАС написана на языке программирования Fortran, поскольку данный язык отлично подходит для решения подобных задач, связанных с большим количеством вычислений, а также он поддерживает технологию параллельного программирования, которая позволяет значительно ускорить процесс решения задачи, а значит и повысить производительность всей системы. Кроме того, Fortran является стандартизированным языком, что позволяет переносить программы, написанные на нем, на любые платформы.

5. Заключение

В статье построена новая математическая модель реакции синтеза бензилиденбензиламина реакцией бензиламина с четыреххлористым углеродом под действием $\text{FeCl}_3 \bullet 6\text{H}_2\text{O}$. На основе модели проведены расчеты по решению прямой и обратной задач химической кинетики. Получены результаты, представленные в виде таблиц сравнения экспериментальных и расчетных данных.

По результатам решения обратной задачи можно сделать вывод, что значения концентраций реагентов системы, полученные расчетным путем с найденными кинетическими константами скоростей отдельных стадий реакции, незначительно (не более чем на 12 %) отличаются от результатов, полученных химиками-экспериментаторами. Отличие обуславливается локальными погрешностями численных методов. Поэтому найденные кинетические константы можно использовать в дальнейшем для проведения экспериментов.

Дата поступления 15.08.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. В. Ахметов, И. М. Губайдуллин, "Построение кинетических моделей химических реакций на основе многоядерных систем.", *Журнал Средневолжского математического общества*, **14:3** (2012), 38–42.
2. И. М. Губайдуллин, Л. В. Сайфуллина, М. Р. Еникеев, *Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики: учебное пособие*, Изд-е Башкирск. Ун-та, Уфа, 2011, 89 с.
3. Дж. Уатт, Дж. Холл, *Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1979, 312 с.
4. С. И. Спивак, И. М. Губайдуллин, Е. В. Вайман, *Обратные задачи химической кинетики: учебное пособие*, РИО БашГУ, Уфа, 2003, 110 с.

5. М. В. Тихонова, И. М. Губайдуллин, С. И. Спивак, “Численное решение прямой кинетической задачи методами Розенброка и Мишельсона для жестких систем дифференциальных уравнений”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **12:2** (2010), 26–33.
6. В. И. Рейзлин, *Численные методы оптимизации: учебное пособие*, ТПУ, Томск, 2011, 105 с.
7. И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, Р. Р. Сафин, “Автоматизированная система структурной и параметрической идентификации кинетических моделей химических реакций с участием металлоорганических соединений на основе базы данных кинетических исследований”, *Системы управления и информационные технологии*, **58:4** (2014), 10–16.

Solution of inverse problem of chemical kinetics of synthesis reaction benzyldenebenzylamine

© А. А. Мазитов⁵, А. Г. Осипова⁶, И. В. Ахметов⁷, И. М. Губайдуллин⁸

Abstract. In the paper a new mathematical model of reaction of benzilidenbenzylamine synthesis is constructed. Basing on the model direct and inverse problems of chemical kinetics are solved. Fourth order Rosenbrock method is used for directional solution of direct problem and coordinate-wise descent method is used to solve the inverse problem. The paper presents experimental data such as reagent concentrations versus time for the initial reaction. Kinetic rate constants for individual reaction steps, obtained by chemists experimenters, are presented, too. The results of problems' solution are listed in tabular form. Structure and objectives of the information and computer analysis system which was used to maintain the calculations are also described.

Key Words: benzyldenebenzylamine, stiff system, kinetic model, Rosenbrock method, direct and inverse problems of chemical kinetics, coordinate-wise descent method, information and computational analysis system

⁵ BSc student, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa; mazitov.ainur13@gmail.com

⁶ MSc student, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa; anna.osipova@gmail.com

⁷ Acting head of Informatics Department, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa; ilnurakhmetov@gmail.com

⁸ Senior Researcher of Mathematical Chemistry Laboratory, Institute of Petrochemistry and Catalysis of Russian Academy of Sciences, Ufa; professor of Petroleum and Gas Technology Department, Ufa State Petroleum Technological University, Ufa; irekmars@mail.ru

УДК 519.87, 544.35

Идентификация и информативность моделей количественного анализа многокомпонентных смесей

© С. И. Спивак¹, О. Г. Кантор², Д. С. Юнусова³

Аннотация. Продукты радикальной полимеризации мономеров в присутствии фуллерена, в зависимости от степени конверсии мономера, могут содержать широкий набор соединений. В их числе могут присутствовать свободный фуллерен, ряд продуктов его присоединения и не функционализированные фуллереном макромолекулы. Поэтому количественное определение состава смесей, получающихся в результате химических реакций фуллерена C_{60} , представляет собой достаточно сложную задачу. Один из подходов связан с определением концентраций фуллерена и его производных в смеси на основе системы уравнений Фирорда. Эти уравнения записываются для оптических плотностей раствора при длинах волн, характеризующих максимумы поглощения. Непосредственное решение системы уравнений Фирорда может приводить к противоречивым результатам в силу того, что некоторые концентрации могут получаться отрицательными. Помимо этого, могут возникать проблемы, связанные с погрешностями в экспериментальных данных коэффициентов экстинкции. В работе представлен метод определения концентраций компонент в фуллеренсодержащих смесях на основе данных УФ спектрометрического анализа, нивелирующий названные проблемы. Методологическую основу разработанного подхода составили методы линейного программирования. Это позволило использовать основные положения теории двойственности для анализа информативности построенных моделей. Представлены результаты апробации разработанного подхода на примере модельной смеси фуллеренсодержащих компонент и раствора полистирола. Полученные результаты соответствуют требованиям, предъявляемым к значениям концентраций компонент смеси, и характеризуются высокой точностью.

Ключевые слова: многокомпонентные смеси, молярные концентрации, погрешность измерений, предельно допустимая погрешность, информативность моделей.

1. Введение

Задачи анализа состава многокомпонентных смесей широко применяются в различных областях науки и на практике. При этом для целей исследования используется разнообразный математический и модельный инструментарий [1]. Большое значение при этом имеет качество применяемых математических моделей, в связи с чем актуальной является разработка методов идентификации математических моделей [6], [8] и анализа их информативности [7].

Примером задач такого рода является задача УФ спектроскопического анализа состава многокомпонентных смесей по показателям поглощения компонент. К таким задачам, в частности, относится задача количественного определения содержания фрагментов фуллерена и его производных в фуллеренсодержащих продуктах. Один из подходов связан с определением концентраций фуллерена и его производных в смеси на основе системы уравнений Фирорда, записанной для оптических плотностей раствора при длинах волн, характеризующих максимумы поглощения [2], [3], [10]:

¹ Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; semen.spivak@mail.ru

² Старший научный сотрудник, Институт социально-экономических исследований Уфимского научного центра РАН, г. Уфа; o_kantor@mail.ru

³ Ассистент кафедры информационной безопасности, Башкирский государственный университет, г. Уфа; kazakova_d_s@mail.ru

$$A_\lambda = \sum_{i=0}^4 \epsilon_i^\lambda \cdot x_i \cdot l, \quad (1.1)$$

где A_λ – измеряемое значение оптической плотности раствора при длине волны λ (280, 290, 315, 326, 330 нм); ϵ_i^λ – молярные экстинкции ядер несвязанного фуллерена (при $i = 0$) и ядер, связанных с одним, двумя, тремя и четырьмя аддендами (при $i = \overline{1, 4}$, соответственно) при длине волны λ ; $x_0 - x_4$ – молярные концентрации соответствующих ядер фуллерена C_{60} ; l – толщина кюветы.

На практике при решении системы (1.1) возникают проблемы, связанные с точностью определения экспериментальных значений коэффициентов экстинкции. В частности, это связано с допущением о том, что коэффициенты экстинкций производных фуллерена не зависят от вида адденда, а зависят только от их числа. Обоснованность такого допущения в случае фуллеренсодержащих полимерных продуктов объясняется сложностью как процессов их образования, так и структуры.

2. Постановка задачи

Для определения погрешности экспериментальных данных в описанной задаче проводилось исследование растворов трех модельных смесей с известным молярным соотношением компонент. Первый раствор представлял собой эквимольную смесь низкомолекулярных индивидуальных продуктов моно- (I), ди- (II), три- (III) и тетра- (IV) присоединения диаллилмаллонового эфира к фуллерену C_{60} с известными концентрациями при длинах волн 280, 290, 315 и 326 нм, второй – неэквимольную смесь тех же продуктов присоединения к фуллерену при аналогичных длинах волн, третий – эквимольную смесь C_{60} и продуктов присоединения к фуллерену I–IV при длинах волн 280, 290, 315, 326 и 330 нм с заданными концентрациями.

По результатам проведенных наблюдений были сформированы необходимые массивы данных: значения коэффициентов молярного поглощения, на основании которых была построена матрица A [5] (ее элементы представляют собой коэффициенты при молярных концентрациях, стоящие в правых частях соотношений (1.1)), и величины измеренных оптических плотностей раствора, используемые для формирования вектор-столбца B , стоящего в левой части (1.1). Матрица A имеет следующий вид:

$$A = \begin{pmatrix} 54000 & 30800 & 35800 & 28500 & 30900 \\ 30900 & 22800 & 28300 & 27900 & 28800 \\ 19600 & 21000 & 21800 & 18500 & 16050 \\ 50500 & 24370 & 17630 & 15070 & 11800 \\ 60780 & 24150 & 15350 & 13000 & 11700 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Для первых двух модельных смесей матрица A коэффициентов экстинкции получается путем вычеркивания из матрицы (2.1) первого столбца и последней строки. Элементами вектора-столбца B для первой, второй и третьей модельных смесей являются соответственно следующие величины оптических плотностей: $\{1.23, 1.01, 0.70, 0.59\}$, $\{1.48, 1.25, 0.90, 0.72\}$ и $\{1.62, 1.24, 0.85, 0.99, 1.03\}$. На основании введенных обозначений система (1.1) принимает вид $AX = B$. Имея экспериментальные данные для матрицы A и векторов B , методами линейной алгебры могут быть определены молярные концентрации – компоненты вектора X (табл. 8). В качестве критерия, характеризующего соответствие расчетных и экспериментальных значений концентраций, использовалась величина сред-

ней относительной погрешности описания

$$\bar{A} = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \left| \frac{x_i^{exp} - x_i^{calc}}{x_i^{exp}} \right| \cdot 100\%,$$

где x_i^{exp} и x_i^{calc} – известные концентрации компонент модельных смесей и рассчитанные согласно уравнению $AX = B$, соответственно, m – число компонентов смеси.

Таблица 8: Решение уравнений Фирорда

Номер модельной смеси	Концентрации компонент, M		Погрешность описания $\bar{A}$, %
	экспериментальные x_i^{exp}	расчетные x_i^{calc}	
1	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$-1.13 \cdot 10^{-6}$	127
	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$2.97 \cdot 10^{-5}$	
	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$1.13 \cdot 10^{-5}$	
	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$4.15 \cdot 10^{-6}$	
2	$3.82 \cdot 10^{-6}$	$6.82 \cdot 10^{-6}$	104
	$7.62 \cdot 10^{-6}$	$1.74 \cdot 10^{-5}$	
	$11.36 \cdot 10^{-6}$	$-8.31 \cdot 10^{-6}$	
	$14.97 \cdot 10^{-6}$	$2.05 \cdot 10^{-5}$	
3	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$8.43 \cdot 10^{-6}$	71
	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$3.11 \cdot 10^{-6}$	
	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$1.81 \cdot 10^{-5}$	
	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$1.64 \cdot 10^{-6}$	
	$7.5 \cdot 10^{-6}$	$1.22 \cdot 10^{-5}$	

3. Описание концептуального подхода

Как следует из приведенных результатов, полученные решения далеки от истинных, и, более того, часть из них противоречат физическому смыслу концентраций в силу того, что некоторые их компоненты отрицательны.

Такого рода проблемы могут быть обусловлены погрешностями в экспериментальных данных, на основании которых и были сформированы матрицы A и B . Это, в свою очередь, обусловило целесообразность постановки задачи определения приближенных значений концентраций, отвечающих требованиям исследователя относительно качественных характеристик.

Применительно к математическим моделям категория «качество» может трактоваться двояко: в обычном понимании – это принципиальная способность модели описывать исследуемый объект («да» – описывает, «нет» – не описывает); в расширенном – «качество» модели определяется некоторой числовой величиной, принимающей значения в определенном интервале. Под задачей определения качества модели в настоящей работе будем подразумевать задание некоторого числового критерия и алгоритм его идентификации, позволяющий ответить на вопрос, описывает ли модель изучаемую систему с требуемым уровнем качества, что в нашем понимании соответствует попаданию значений введенного критерия внутрь заданного интервала.

Одной из важных характеристик модели является точность, под которой понимают степень соответствия расчетных и экспериментальных значений. Непосредственный вид критерия, характеризующего точность математического описания экспериментальных

данных, определяется исследователем, и зависит от совокупности параметров, задействованных в формализованном представлении модели.

Развиваемый авторами подход для определения множества параметров, обеспечивающих требуемое качество математических моделей, базируется на использовании идеи задачи чебышевского приближения и метода определения областей неопределенности [4], автором которого является Л. В. Канторович. Суть этого подхода состоит в следующем. Модель описывает измерения в пределах их точности, если выполняется следующая система неравенств:

$$|x_l^{exp} - x_l^{calc}| \leq \xi, l = \overline{1, L}, \quad (3.1)$$

где x_l^{exp} и x_l^{calc} , $l = \overline{1, L}$ — экспериментальные и расчетные значения наблюдаемой величины x (x_l^{calc} зависят от некоторых параметров a_p , $p = \overline{1, P}$), ξ — предельно допустимая погрешность описания экспериментальных данных.

По каждому из параметров a_p , $p = \overline{1, P}$ определим интервал неопределенности как некоторый отрезок, внутри которого сохраняется совместность системы (3):

$$A^p = [\min a_p, \max a_p], p = \overline{1, P}. \quad (3.2)$$

Интервалы A^p , по сути, характеризуют вариацию значений параметров, а их объединение будем трактовать как область неопределенности параметров модели. (В некоторых задачах интервалы (3.2) могут «стягиваться» в точку.) Учитывая, что информация о величине ξ , как правило, присутствует, выполнение условий (3.1) означает, что модель описывает измерения в пределах, обусловленных величиной предельно допустимой погрешности, что совершенно естественно. В случае линейного вида модели решение задачи (3.1)–(3.2) сводится к задачам линейного программирования.

4. Модель определения погрешности экспериментальных данных

С описанных позиций постановка задачи определения концентраций была формализована в виде следующей задачи линейного программирования [5], [7]–[9]:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \min, \\ |AX - B| &\leq \xi, \\ X &\geq 0. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Заметим, что если существует решение упомянутой выше системы линейных уравнений $AX = B$, компоненты которого являются неотрицательными, то оно автоматически (в силу того, что $\xi = 0$) будет являться и оптимальным решением модели (4.1). Однако, как следует из представленных расчетов (табл. 8), использование методов линейной алгебры для определения концентраций не всегда позволяет получить приемлемые результаты.

Решая задачу (4.1) для пятикомпонентной смеси неизвестного состава с матрицей коэффициентов экстинкций вида (2.1) и вектором $B = \{0.703, 0.537, 0.376, 0.374, 0.370\}$ было получено решение с неотрицательными значениями концентраций $X = \{2.20 \cdot 10^{-6}, 0, 1.23 \cdot 10^{-5}, 0, 4.38 \cdot 10^{-6}\}$, при этом величина предельно допустимой погрешности описания измерений составила $\xi = 6.65 \cdot 10^{-3}$.

Несмотря на то, что модель (4.1) позволяет определять компоненты вектора X , удовлетворяющие условию неотрицательности, в подобных задачах необходимо принимать

во внимание тот факт, что экспериментальные данные могут быть получены с некоторой погрешностью, и учитывать его при определении концентраций.

Авторами было выдвинуто предположение о наличии погрешностей в измерениях оптических плотностей и молярных экстинкций ядер фуллерена, участвующих в формировании вектора B и матрицы коэффициентов экстинкций A . Для определения этих погрешностей была разработана следующая модель [8]:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \min, \\ |A'X - B'| &\leq \tau, \\ |\delta_i - 1| &\leq \xi, \forall i = 1, \dots, m, \\ |\gamma_{ij} - 1| &\leq \xi, \forall i = 1, \dots, m, \forall j = 1, \dots, n, \\ X &\geq 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где матрица A' – матрица, получается путем внесения погрешности γ_{ij} в каждый элемент матрицы A : $A' = (\gamma_{ij}a_{ij})$, вектор B' получается из вектора оптических плотностей B после внесения в каждый его элемент погрешности δ_i ($b'_i = \delta_i b_i$), ξ – предельно допустимая погрешность описания экспериментальных данных, которая связана с погрешностями измерений матриц A и B соотношением:

$$\xi = \max \left\{ \max_i |\delta_i - 1|; \max_{ij} |\gamma_{ij} - 1| \right\},$$

τ – заданный порог точности в уравнениях Фирорда (в расчетах τ полагалось равным 0.00001).

Переменными модели (4.2) выступили погрешности γ_{ij} , δ_i , $i = \overline{1, 5}$, $j = \overline{1, 5}$ и ξ . Расчеты по модели (4.2) проводились на основании рассмотрения совокупности экспериментальных данных по всем трем модельным смесям. По результатам численной реализации модели (4.2) были определены следующие значения величин погрешностей:

$$\begin{aligned} \gamma_{11} &= 0.7996, \quad \gamma_{12} = 1.0424, \quad \gamma_{13} = 1.2006, \quad \gamma_{14} = 1.2006, \quad \gamma_{15} = 0.8184, \\ \gamma_{21} &= 0.8108, \quad \gamma_{22} = 1.0821, \quad \gamma_{23} = 1.2006, \quad \gamma_{24} = 0.7996, \quad \gamma_{25} = 0.9097, \\ \gamma_{31} &= 0.8376, \quad \gamma_{32} = 0.7996, \quad \gamma_{33} = 0.7996, \quad \gamma_{34} = 1.1718, \quad \gamma_{35} = 1.1471, \\ \gamma_{41} &= 0.8853, \quad \gamma_{42} = 0.7996, \quad \gamma_{43} = 0.7996, \quad \gamma_{44} = 1.2006, \quad \gamma_{45} = 1.2006, \\ \gamma_{51} &= 0.7996, \quad \gamma_{52} = 0.7996, \quad \gamma_{53} = 0.7996, \quad \gamma_{54} = 1.1907, \quad \gamma_{55} = 1.2006, \\ \delta_1 &= 0.8219, \quad \delta_2 = 0.7996, \quad \delta_3 = 0.7996, \quad \delta_4 = 0.8383, \quad \delta_5 = 0.7996. \end{aligned}$$

Предельно допустимая погрешность описания экспериментальных данных составила $\xi = 0.20$.

5. Модель определения концентраций компонент смеси и анализ ее информативности

С учетом полученных оценок для погрешностей элементов матриц A и B задача определения концентраций элементов смеси (4.1) была преобразована к виду:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \min, \\ |A'X - B'| &\leq \xi, \\ X &\geq 0. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Результаты расчетов концентраций компонент модельных смесей (табл. 9) подтвердили целесообразность учета предположения о наличии погрешности в экспериментальных данных и адекватность модели (5.1). В приведенных расчетах ξ – оптимальные значения целевых функций соответствующих задач, а $\bar{A}$ – значения средних относительных погрешностей описания экспериментальных значений концентраций.

Таблица 9: Сравнительный анализ подходов к моделированию

Номер модельной смеси	Расчетные концентрации компонент x_i^{calc} , М	
	согласно модели (4.1)	согласно модели (5.1)
1	$2.70 \cdot 10^{-6}$	$7.5 \cdot 10^{-6}$
	$1.99 \cdot 10^{-5}$	$7.5 \cdot 10^{-6}$
	0	$7.5 \cdot 10^{-6}$
	$1.36 \cdot 10^{-5}$	$7.5 \cdot 10^{-6}$
	$\xi = 0.0119, \bar{A} = 103\%$	$\xi = 0, \bar{A} = 0\%$
2	0	$3.82 \cdot 10^{-6}$
	$2.83 \cdot 10^{-5}$	$7.62 \cdot 10^{-6}$
	$9.32 \cdot 10^{-6}$	$1.11 \cdot 10^{-6}$
	$6.58 \cdot 10^{-6}$	$1.50 \cdot 10^{-6}$
	$\xi = 0.0129, \bar{A} = 111\%$	$\xi = 0, \bar{A} = 0.14\%$
3	$8.43 \cdot 10^{-6}$	$7.54 \cdot 10^{-6}$
	$3.11 \cdot 10^{-6}$	$7.29 \cdot 10^{-6}$
	$1.81 \cdot 10^{-5}$	$7.55 \cdot 10^{-6}$
	$1.64 \cdot 10^{-6}$	$7.54 \cdot 10^{-6}$
	$1.21 \cdot 10^{-5}$	$7.57 \cdot 10^{-6}$
	$\xi = 0, \bar{A} = 70\%$	$\xi = 0, \bar{A} = 1.09\%$

При определении погрешностей в экспериментальных данных коэффициентов экстинкций индивидуальных продуктов присоединения к фуллерену и оптических плотностей при длинах волн, характеризующих максимумы поглощения для каждого продукта присоединения, предполагалось, что концентрации компонент в модельных смесях известны точно. Однако, ввиду наличия погрешности при приготовлении модельных смесей, достичь такого на практике невозможно. В связи с этим, целесообразным является оценка информативности экспериментальных данных о трех модельных смесях. Для этого авторами был использован аппарат теории двойственности [7], [9], что подразумевало решение двойственной задачи к задаче (5.1):

$$\begin{aligned} -(B', \hat{y}^1) + (B', \check{y}^1) &\rightarrow \max, \\ -(A')^T \hat{y}^1 + (A')^T \check{y}^1 &\leq 0, \\ \sum_{i=1}^m \hat{y}_i^1 + \sum_{i=1}^m \check{y}_i^1 &\leq 1, \\ \hat{y}^1 &\geq 0, \check{y}^1 \geq 0. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Здесь $\hat{y}^1 = \{\hat{y}_i^1\}$, $\check{y}^1 = \{\check{y}_i^1\}$, $i = \overline{1, m}$ – векторы оптимального решения двойственной задачи, соответствующие ограничению $|A'X - B'| \leq \xi$ в задаче (5.1). Поскольку в ограничении присутствует модуль, то каждому такому ограничению соответствует два вектора в решении двойственной задачи, $\hat{y}^1$ соответствует ограничению при раскрытии модуля со знаком «плюс», $\check{y}^1$ – со знаком «минус». Итоговая информативность ограничений $|A'X - B'| \leq \xi$ оценивалась с помощью вектора информативности, компоненты которого определялись следующим образом: $y_i^1 = \max\{\hat{y}_i^1, \check{y}_i^1\}$, $i = \overline{1, m}$ (табл. 10).

Таблица 10: Анализ информативности исходных данных задачи (5.1)

Номер модельной смеси	Двойственные оценки		Вектор информативности y^1
	$\hat{y}^1$	$\check{y}^1$	
1 и 2	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0.5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$
3	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$	$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{Bmatrix}$

Анализ рассчитанных двойственных оценок (согласно модели (5.2)) показал, что для каждой из четырехкомпонентных модельных смесей наиболее неточными следует считать значения концентраций продуктов диприсоединения к фуллерену (II), причем вносимый вклад этих компонент в величину предельно допустимой погрешности описания экспериментальных данных ξ одинаков в обоих случаях. Для третьей модельной смеси наибольшее влияние на погрешность ξ оказывает концентрация тетраприсоединения диаллилмаллонового эфира к фуллерену (IV). Данная информация может быть использована для определения приоритетных направлений последующих экспериментов.

6. Апробация подхода

Апробации предложенного подхода осуществлялась на модельной смеси фуллеренсодержащих компонент и раствора полистирола. Относительно приготовленной смеси было известно, что она эквимольна по фуллеренсодержащим компонентам, а концентрация полистирола существенно превышала концентрацию фуллеренсодержащих компонент.

Исходные данные для проведения расчетов представлены в матрице экстинций A и векторе оптических плотностей B :

$$A = \begin{pmatrix} 108500 & 53000 & 44000 & 36700 & 29300 & 175 \\ 54000 & 30800 & 35800 & 28500 & 30900 & 15 \\ 30900 & 22800 & 28300 & 27900 & 28800 & 5 \\ 19600 & 21000 & 21800 & 18500 & 16050 & 0 \\ 50500 & 24370 & 17630 & 15070 & 11800 & 0 \\ 60780 & 24150 & 15350 & 13000 & 11700 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

$$B = \{2.447, 1.622, 1.240, 0.851, 0.989, 1.029\}.$$

Строки матрицы A – это коэффициенты правых частей уравнений Фирорда (1.1), выписанных при длинах волн 269, 280, 290, 315, 326, 330 нм. Элементы первых пяти столбцов

матрицы A соответствуют коэффициентам при мольных концентрациях фуллеренсодержащих компонент в уравнениях Фирорда, последнего – коэффициентам при мольных концентрациях полистирола. Элементы вектора B – это значения измеренных оптических плотностей растворов при длинах волн 269, 280, 290, 315, 326, 330 нм, соответственно.

Определение вектора концентраций $X = \{x_i | i = \overline{1, 6}\}$, в котором первые пять компонент соответствовали фуллеренсодержащим элементам смеси, а шестая – полистиролу, осуществлялось на основании задачи линейного программирования (5.1), составленной с учетом условий, учитывающих эквимольность по фуллеренсодержащим компонентам:

$$\begin{aligned} \xi &\rightarrow \min, \\ |A'X - B| &\leq \xi, \\ |x_1 - x_j| &\leq \tau, j = \overline{2, 5}, \\ X &\geq 0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Заметим, что ограничение $|x_1 - x_j| \leq \tau$, $j = \overline{2, 5}$ (где τ – задаваемая константа) равносильно тому, что концентрации всех фуллеренсодержащих элементов смеси отличаются не более чем на 2τ , что в силу произвольности задания τ можно обеспечить на приемлемом с точки зрения исследователя уровне.

Матрица A' и вектор B' формировались на основании рассчитанных погрешностей γ_{ij} , δi , $i = \overline{1, 5}$, $j = \overline{1, 5}$ с учетом соответствия используемым длинам волн. Таким образом, в матрице A согласно правилу $a'_{i+1j} = (\gamma_{ij}a_{i+1j})$, $i = \overline{1, 5}$, $j = \overline{1, 5}$ изменялись элементы, стоящие на пересечении последних пяти строк и первых пяти столбцов, а в векторе B – последние пять элементов: $b'_{i+1} = \delta_i b_{i+1}$, $i = \overline{1, 5}$.

Расчеты проводились в предположении, что $\tau = 10^{-7}$. По результатам проведенных расчетов был определен следующий вектор концентрации компонент смеси (М):

$$X^{calc} = \{7.44 \cdot 10^{-6}, 7.34 \cdot 10^{-6}, 7.34 \cdot 10^{-6}, 7.34 \cdot 10^{-6}, 7.34 \cdot 10^{-6}, 2.46 \cdot 10^{-3}\}.$$

Предельно допустимая погрешность описания ξ составила 0.013, а средняя относительная погрешность описания $\bar{A} = 2.3\%$.

Все требования к полученному решению выполняются, а именно, концентрация полистирола существенно превышает концентрацию фуллеренсодержащих компонент, по которым смесь в пределах заданной погрешности τ получилась эквимольной.

Заметим, что решение задачи (4.1) при внесении ограничения, отражающего требование эквимольности по фуллеренсодержащим компонентам $|x_1 - x_j| \leq \tau$, $j = \overline{2, 5}$, при $\tau = 10^{-7}$ не позволило получить какого-либо результата, что, на взгляд авторов, доказывает целесообразность разработанного подхода к определению концентраций компонент смеси, учитывающего погрешности экспериментальных данных.

Для анализа информативности экспериментальных данных о шестикомпонентной смеси фуллеренсодержащих компонент и раствора полистирола было проведено решение задачи, двойственной к (6.2):

$$\begin{aligned}
& -(B', \hat{y}^1) + (B', \check{y}^1) - \tau \left(\sum_{i=1}^4 \hat{y}_i^2 + \sum_{i=1}^4 \check{y}_i^2 \right) \rightarrow \max, \\
& \sum_{i=1}^5 (-a_{i1} \hat{y}^1 + a_{i1} \check{y}^1) - \hat{y}_1^2 + \check{y}_1^2 \leq 0, \\
& \sum_{i=1}^5 (-a_{ij} \hat{y}^1 + a_{ij} \check{y}^1) + \hat{y}_{j-1}^2 - \check{y}_{j-1}^2 \leq 0, j = \overline{2, 5}, \\
& \sum_{i=1}^5 \hat{y}_i^1 + \sum_{i=1}^5 \check{y}_i^1 \leq 1, \\
& \hat{y}^1 \geq 0, \check{y}^1 \geq 0, \hat{y}^2 \geq 0, \check{y}^2 \geq 0.
\end{aligned} \tag{6.3}$$

Верхние индексы двойственных переменных соответствуют группам ограничений модели (6.2): индекс «1» соответствует группе ограничений $|A'X - B'| \leq \xi$; индекс «2» – группе ограничений $|x_1 - x_j| \leq \tau$, $j = \overline{2, 5}$. $\hat{y}_i^p$ и $\check{y}_i^p$ ($p = 1, 2$) – переменные, используемые для одного и того же ограничения p -й группы модели (6.2), при раскрытии модуля со знаками «плюс» и «минус» соответственно.

По результатам решения задачи (6.3) были получены следующие значения двойственных переменных $\hat{y}_i^p$ и $\check{y}_i^p$ ($p = 1, 2$) и векторов информативности y^1 и y^2 , компоненты которых определялись согласно правилам $y_i^1 = \max\{\hat{y}_i^1, \check{y}_i^1\}$, $i = \overline{1, 5}$, $y_i^2 = \max\{\hat{y}_i^2, \check{y}_i^2\}$, $i = \overline{1, 4}$:

$$\begin{aligned}
\hat{y}^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.403 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \check{y}^1 = \begin{pmatrix} 0.035 \\ 0 \\ 0 \\ 0.563 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^1 = \begin{pmatrix} 0.035 \\ 0.403 \\ 0 \\ 0.563 \\ 0 \end{pmatrix}, \\
\hat{y}^2 &= \begin{pmatrix} 133 \\ 7850 \\ 2330 \\ 1200 \end{pmatrix}, \quad \check{y}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y^2 = \begin{pmatrix} 133 \\ 7850 \\ 2330 \\ 1200 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Анализ компонент векторов информативности y^1 и y^2 показал, что наибольший вклад в погрешность ξ вносят:

- концентрации второй и пятой компонент смеси (соответствующие компоненты вектора y^1 равны 0.403 и 0.563);
- условие на эквивальность 1-й и 3-й компонент смеси (что определяется второй компонентой вектора y^2).

7. Заключение

Модель (5.1), по сути, является математической постановкой задачи определения концентраций компонент смеси на основе уравнений для их оптических плотностей, составленных в предположениях выполнения закона Бугера-Ламберта-Бера для каждой компоненты и принципа аддитивности для их смеси. Представленная модель допускает использование дополнительных условий, отражающих требования на количественные значения концентраций компонент смеси. Для повышения качества идентификации модели предложено осуществлять учет априорной неточности исходной экспериментальной информации, что достигается с помощью использования разработанного подхода для определения

погрешностей в измерениях молярных экстинкций ядер фуллерена, участвующих в формировании матрицы коэффициентов экстинкций A , и оптических плотностей B . Задача количественной оценки погрешности в экспериментальных данных формализована (модель (4.2)), осуществлена ее численная реализация. Принадлежность модели (5.1) к классу задач линейного программирования позволила использовать теорию двойственности для анализа информативности имеющейся экспериментальной информации. Представлены результаты апробации разработанного подхода на примере модельной смеси фуллеренсодержащих компонент и раствора полистирола. Полученные результаты соответствуют требованиям, предъявляемым к значениям концентраций компонент смеси, и характеризуются высокой точностью, выраженной критериями предельно допустимой погрешности описания ($\xi = 0.013$) и средней относительной погрешности ($\bar{A} = 2.33\%$).

Дата поступления 01.11.2016

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. И. Я. Берштейн, Ю. А. Каминский, *Спектрофотометрический анализ в органической химии*, Химия, Л., 1986, 200 с.
2. Ю. Н. Биглова, В. А. Крайкин, В. В. Михеев, С. А. Торосян, С. В. Колесов, А. Г. Мустафин, М. С. Мифтахов, “Количественное определение методом УФ спектроскопии производных метанофуллеренов с различной степенью замещения”, *Журнал структурной химии*, **54**:4 (2013), 674–678.
3. Ю. Н. Биглова, В. А. Крайкин, С. А. Торосян, С. В. Колесов, М. С. Мифтахов, В. В. Михеев, А. Г. Мустафин, “УФ-спектроскопия производных метанофуллеренов с различной степенью замещения”, *Журнал физической химии*, **87**:10 (2013), 1705–1708.
4. Л. В. Канторович, “О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений”, *Сибирский математический журнал*, **3**:5 (1962), 701–709.
5. С. И. Кузнецов, Д. С. Юнусова, Р. Х. Юмагулова, М. С. Мифтахов, С. В. Колесов, С. И. Спивак, О. Г. Кантор, “О некоторых новых подходах к вычислительным методам и обработке наблюдений”, *Журнал прикладной спектроскопии*, **4** (2015), 608–615.
6. С. И. Спивак, А. С. Исмагилова, О. Г. Кантор, “Области неопределенности в математической теории анализа измерений”, *Системы управления и информационные технологии*, **58**:4 (2014), 17–21.
7. С. И. Спивак, О. Г. Кантор, Д. С. Юнусова, С. И. Кузнецов, С. В. Колесов, “Оценка погрешности и значимости измерений для линейных моделей”, *Информатика и ее применения*, **9**:1 (2015), 90–100.
8. С. И. Спивак, О. Г. Кантор, Д. С. Юнусова, С. И. Кузнецов, С. В. Колесов, “Предельно допустимые оценки расчета параметров физико-химических моделей”, *Доклады Академии наук*, **464**:4 (2015), 437–439.
9. С. И. Спивак, О. Г. Кантор, Д. С. Юнусова, “Предельно-допустимые оценки параметров физико-химических моделей”, *Башкирский химический журнал*, **3** (2015), 12–17.

10. Р.Х. Юмагулова, Ю.Н. Биглова, С.В. Колесов, Ю.Б. Монаков, “О радикальной (со)полимеризации аллилметакрилата в присутствии фуллерена C_{60} ”, *Доклады Академии наук*, **48**:5 (2006), 625–626.

Identification and informativity of models for quantitative analysis of multicomponent mixtures

© S. I. Spivak⁴, O. G. Kantor⁵, D. S. Yunusova⁶

Abstract. The products of radical polymerization in presence of fullerene can contain a wide variety of compounds depending on the monomer's degree of conversion. Among them free fullerene, some products of its tailing and macromolecules may exist. Therefore, quantitative determination of the mixture's composition resulting from chemical reactions of fullerene C_{60} , is a rather complicated problem. One approach involves determining concentrations of fullerene and its derivatives in a mixture on the basis of Firord equations' system. These equations are written for the optical densities of the solution at the wavelengths that characterize the absorption maximums. The direct solution of such system may lead to conflicting results due to the fact that some concentrations may be negative. In addition, problems may arise related to errors in the experimental data of the extinction coefficients. The paper presents a method for the determination of component concentrations in mixtures of fullerene based on UV spectrometric data analysis that mitigates the above mentioned problems. The methodological basis of the approach was formed by the linear programming. It permitted to use the theory of duality to analyze the models' information capability. The approbation results of this method for the model mixture of fullerene components and polystyrene are presented. Obtained results match requirements for the concentrations of mixture components, and are characterized by high accuracy.

Key Words: multicomponent mixture, molar concentration, measurement error, maximum permissible error, models' information capability

⁴ Head of Department of Mathematical Modelling, Bashkir State University, Ufa; semen.spivak@mail.ru

⁵ Senior researcher, Institute of Social and Economic Research, Ufa Research Centre of Russian Academy of Sciences, Ufa; o_kantor@mail.ru

⁶ Assistant lecturer, Department of Information Security, Bashkir State University, Ufa; kazakova_d_s@mail.ru

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЖИЗНЬ

ВЛАДИМИР ФЁДОРОВИЧ ТИШКИН – ПОЗДРАВЛЕНИЕ С
ИЗБРАНИЕМ ЧЛЕНОМ-КОРРЕСПОНДЕНТОМ РАН

Поздравляем главного редактора журнала Тишкина Владимира Фёдоровича с избранием членом-корреспондентом Российской академии наук! Желаем новых больших свершений! Это заслуженное признание научных достижений Владимира Фёдоровича и награда за долгие годы самоотверженного труда на благо отечественной науки.

Редколлегия журнала,

Средне-Волжское математическое общество,

Коллектив Национального исследовательского

Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

ИВАН ИВАНОВИЧ ЧУЧАЕВ (К СЕМИДЕСЯТИЛЕТИЮ СО ДНЯ РОЖДЕНИЯ)

Чучаев Иван Иванович родился 3 ноября 1946 года в селе Атюрьево Торбеевского района республики Мордовия. В 1969 году окончил Мордовский госуниверситет по специальности «Математика», с 1969 по 1970 год находился в рядах Советской Армии, затем год работал в школе учителем математики. С 1971 по 1972 год работал стажером-исследователем на математико-механическом факультете Ленинградского государственного университета имени А.А. Жданова. С 1972 по 1975 год обучался в аспирантуре того же университета, успешно защитил диссертацию на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. С 1975 года работает в Мордовском университете на кафедре математического анализа, сначала в должности старшего преподавателя, затем – доцента, заведующего кафедрой (с 1981 года) и декана математического факультета (с 1999 года).



Чучаев И.И. читает лекции и ведет практические занятия по курсам: математический анализ, функциональный анализ, ТФКП, научные основы школьного курса математики. Все виды занятий проводит на высоком научно-методическом уровне, уделяя большое внимание планированию организации и контролю научной и самостоятельной работы студентов.

Много времени и внимания Чучаев И.И. уделяет организации учебного процесса на кафедре и факультете, его научно-методическому обеспечению. На факультете налажено взаимопосещение занятий преподавателей с их последующим анализом, ведется шефство опытных преподавателей над молодыми.

Чучаев И.И. активно ведет научные исследования: опубликовано более 100 работ, в отечественных и зарубежных журналах, он постоянно докладывает свои научные и методические результаты на всероссийских и региональных конференциях. В 2001 году вышла книга Чучаева И.И. «Нестандартные (функциональные) приемы решения уравнений», в 2002 году – «Нестандартные (геометрические и функциональные) приемы решения уравнений». Эти издания были рекомендованы Учебно-методическим объединением по математике и механике университетов Российской Федерации в качестве учебных пособий для студентов математических направлений и специальностей университетов.

Чучаев И.И. подготовил шесть кандидатов наук (двух – физ.-мат. наук, четырех – педагогических наук)

За годы работы Чучаева И. И. деканом факультет существенно изменился, что нашло свое отражение в его названии. В 2012 году математический факультет был переименован в факультет математики и информационных технологий. В настоящее время на факультете ведется подготовка бакалавров по четырем направлениям – математика и компьютерные науки, прикладная математика и информатика, фундаментальная информатика и информационные технологии, программная инженерия – и двум направлениям магистратуры – прикладная математика и информатика, фундаментальная информати-

ка и информационные технологии. В 2016 году факультетом была получена лицензия на подготовку магистров по направлению программная инженерия.

Чучаев И.И. принимает активное участие в общественной жизни университета и факультета. Он член Ученого Совета университета, член университетского совета НИРС. Чучаев И.И. ведет работу с учащимися и учителями средних школ и лицеев, преподавателями техникумов Республики Мордовия, выезжая с чтением лекций.

Чучаев И.И. пользуется большим авторитетом среди студентов и сотрудников университета.

Необходимо особо отметить активную роль Чучаева И.И. в организации и проведении научных конференций по дифференциальным уравнениям и школ-семинаров по математическому моделированию, регулярно проводимых Национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва, Средне-Волжским математическим обществом и Институтом прикладной математики им. М.В. Келдыша Российской академии наук.

В 1995 году Чучаеву И.И. присвоено звание «Заслуженный работник высшей школы Республики Мордовия», в 1999 году присуждена Государственная премия Республики Мордовия за цикл работ в области функционального анализа и математической физики, в 2004 году он был награжден нагрудным знаком «Почетный работник высшего профессионального образования Российской Федерации».

Поздравляем Ивана Ивановича с 70-летием! Желаем ему крепкого здоровья, творческих успехов и долголетия!

Коллектив факультета математики и информационных технологий

Национального исследовательского Мордовского государственного

университета им. Н. П. Огарёва,

Средне-Волжское математическое общество,

Редколлегия Журнала СВМО

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Объем рукописи не должен превышать 12 страниц для научной статьи и 20 страниц для обзорной статьи.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX. Компиляцию статьи необходимо производить с помощью MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте — <http://www.miktex.org>.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы:

- коды УДК;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО, e-mail, должность и место работы (официальное название организации);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи;
- список литературы.

Если статья на русском языке, то название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова необходимо так же предоставить и на английском языке. Если статья написана на английском языке, то отдельно представляются коды УДК, название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова на русском языке.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

- необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;
- не включать несущественные детали;
- использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;
- текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;
- необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

На английском языке приводится авторское резюме (аннотация), которое является кратким резюме большей по объему работы, имеющей научный характер.

Объем аннотации должен быть в среднем от 100 до 250 слов.

Раздел Ключевые слова должен содержать от 5 до 15 слов и четко указывать на основное содержание статьи. Не следует приводить в качестве ключевых слов общие понятия, так как поиск по ключевому слову не приведет читателя к нахождению интересующей его информации. Однако данное слово может входить в значимое словосочетание.

Авторам необходимо придерживаться следующей структуры статей:

- введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье.
- материалы и методы решения задачи и принятые допущения.
- результаты – основное содержание статьи.
- обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.
- заключение – выводы и рекомендации.

Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB (см. Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTeX). Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье. В оригинальных статьях допускается до 20, в обзорных – до 60 источников.

Подробные Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTeX содержатся на сайте журнала по адресу <http://journal.svmo.ru/page/rules>.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе $\text{\TeX}$ (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например, `\input{voskresensky.tex}`

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

`\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}`

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

`\headerEn{название статьи}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}`

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром: `\sect{Заголовок}`

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defn**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т. д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и

`\pctog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , Δ_i в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\Delta}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рис}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение **thebibliography**. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле `amsbib.pdf`. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл `svmobib.sty` (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\RBibitem{метка для ссылки на источник}`.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку `'ivanovb7'`. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в преамбуле).

Внимание! Новые правила. Следом за списком цитируемой литературы в формате AMSBIB должен быть список литературы в текстовом формате, оформленный в соответствии с требованиями ГОСТ Р 7.0.5.-2008. Данный ГОСТ можно найти на сайте журнала <http://www.journal.svmo.ru/files>. Эта часть статьи должна быть закомментирована. Этот список литературы будет использоваться при загрузке электронной версии журнала на сайт elibrary.ru

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Андреев А. С.	8, 107	Мазитов А. А.	145
Анкилов А. В.	80	Майоров А. Ю.	49
Ахмадуллина Л. Ф.	117	Малышев Д. С.	19
Ахметов И. В.	145	Мартынов С. И.	91
Багаев А. В.	127	Новичкова А. В.	117
Багрова А. В.	70	Осипова А. Г.	145
Вельмисов П. А.	80	Пелиновский Е. Н.	127
Грибанов Д. В.	19	Перегудова О. А.	8
Губайдуллин И. М.	117, 145	Пескова Е. Е.	98
Дерябина М. С.	91	Потемкин Д. И.	117
Еникеева Л. В.	117	Починка О. В.	41
Жалнин Р. В.	98	Раков С. Ю.	8
Кантор О. Г.	153	Снытников П. В.	117
Ковалев Н. В.	32	Спивак С. И.	153
Коледин С. Н.	137	Стадничено О. А.	98
Коледина К. Ф.	137	Тишкин В. Ф.	98, 165
Круглов В. Е.	41	Чучаев И. И.	166
Кудашова Е. А.	107	Шаманаев П. А.	61
Логинов Б. В.	61	Юлдашев Т. К.	70

Юнусова Д. С. 154

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.