

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 18, № 2



2016

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМ. Н. П. ОГАРЁВА

Журнал Средневолжского математического общества

ТОМ 18, № 2

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

Главный редактор

В. Ф. Тишкин

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

Заместитель главного редактора

Н. Д. Кузьмичев

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Ответственный секретарь

П. А. Шаманаев

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Редакционная коллегия

А. С. Андреев

Ш. А. Алимов

А. М. Ахтямов

Ш. А. Аюпов

И. В. Бойков

П. А. Вельмисов

В. К. Горбунов

В. З. Гринес

Ю. Н. Дерюгин

А. П. Жабко

В. И. Жегалов

Т. Ш. Кальменов

А. М. Камачкин

Е. Б. Кузнецов

В. Н. Кризский

Б. В. Логинов

Anca Veronica Ion

С. И. Мартынов

П. П. Матус

О. В. Починка

В. П. Радченко

И. П. Рязанцева

М. С. Салахитдинов

С. И. Спивак

М. Т. Терехин

Редакционный совет

Н. Д. Морозкин

Башкирский государственный
университет

П. В. Сенин

Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Л. А. Сухарев

Средне-Волжское
математическое общество

Н. Г. Ярушкина

Ульяновский государственный
технический университет

САРАНСК

2016

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва».

Издатель: Национальный исследовательский Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва

Территория распространения: зарубежные страны, Российская Федерация.
Язык: русский.

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.
Корректурa: Язовцева О.С.
Перевод: Сыромясов А.О.

Адрес учредителя, издателя и редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевикская, 68
Тел.: (834-2) 23-32-05
E-mail для статей: journal@svmo.ru
Web: <http://journal.svmo.ru>

С 2004 года статьи журнала «Журнал Средневолжского математического общества» индексируются в реферативной базе данных Zentralblatt MATH (zbMATH). Адрес доступа: <http://zbmath.org>

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

© Оформление. Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», 2016

Подписано в печать 01.06.2016. Дата выхода в свет 29.06.2016. Цена свободная.

Содержание

| | |
|-------------------|---|
| От РЕДАКЦИИ | 6 |
|-------------------|---|

МАТЕМАТИКА

Д. И. Бояркин

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---|
| Краевая задача с вырождением на границе вдоль многообразия коразмерности $k > 2$ | 7 |
|----------------------------------------------------------------------------------------|---|

| | |
|----------------------------------------------------------------------|---|
| 1. Классификация многообразия вырождения коразмерности $k > 2$ | 7 |
| 2. Постановка краевой задачи | 8 |
| 3. Априорные оценки и гладкость решений краевой задачи | 8 |

В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Гетероклинические кривые градиентно-подобных диффеоморфизмов и топология несущего многообразия | 11 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

В. З. Гринес, Е. Д. Куренков

| | |
|---------------------------------------------------------------------------|----|
| О структуре одномерных базисных множеств эндоморфизмов поверхностей | 16 |
|---------------------------------------------------------------------------|----|

| | |
|-----------------------------------|----|
| 1. Введение | 16 |
| 2. Вспомогательные сведения | 19 |
| 3. Доказательства теорем | 20 |

В. И. Добкин, В. Н. Щенников, Е. В. Щенникова

| | |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Исследование устойчивоподобных свойств «частичного» положения равновесия одной нелинейной системы дифференциальных уравнений. | 25 |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

Н. И. Жукова, К. И. Шеина

| | |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|
| Критерий псевдоримановости слоения с трансверсальной линейной связностью | 30 |
|--------------------------------------------------------------------------------|----|

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1. Введение | 30 |
| 2. Основные понятия | 32 |
| 2.1. Задание слоения N -коциклом | 32 |
| 2.2. Определение слоения с трансверсальной линейной связностью | 33 |
| 3. Послойная псевдориманова метрика в ассоциированном векторном расслоении | 33 |
| 4. Слоеное расслоение трансверсальных реперов | 34 |

Д. В. Иванов

| | |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Идентификация ARX систем Винера дробного порядка при наличии помехи во входном сигнале | 41 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|----|

| | |
|-------------------|----|
| 1. Введение | 41 |
|-------------------|----|

| | | |
|----|------------------------------------------------------|----|
| 2. | Постановка задачи о локальной приводимости | 41 |
| 3. | Критерий для оценивания параметров | 43 |
| 4. | Случай гомоскедастических помех | 44 |

В. Е. Круглов, Д. С. Малышев, О. В. Починка

| | | |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| | Графовый критерий топологической эквивалентности Ω -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях и эффективный алгоритм для его применения | 47 |
| 1. | Введение и формулировка результатов | 47 |
| 2. | Доказательство классификационной Теоремы 1.1. | 51 |
| 3. | Эффективный алгоритм распознавания изоморфности графов потоков класса G | 55 |

М. И. Малкин, К. А. Сафонов

| | | |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| | Непрерывность топологической энтропии для кусочно-гладких отображений лоренцевского типа | 59 |
| 1. | Введение | 59 |
| 2. | Предварительные сведения | 60 |
| 3. | Основная теорема | 62 |

И. П. Рязанцева, О. Ю. Бубнова

| | | |
|--|---------------------------------------------------------------|----|
| | Непрерывный аналог модифицированного метода Ньютона | 67 |
|--|---------------------------------------------------------------|----|

Т. К. Юлдашев, К. Х. Шабадиков

| | | |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| | О разрешимости интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с нелокальными интегральными условиями | 72 |
| 1. | Постановка задачи | 72 |
| 2. | Сведение смешанной задачи к счетной системе нелинейных интегральных уравнений | 73 |
| 3. | Однозначная разрешимость ССНИУ | 76 |
| 4. | Разрешимость смешанной задачи (1.1) – (1.4) | 81 |

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

О. В. Гермидер, В. Н. Попов

| | | |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| | Математическое моделирование процесса переноса тепла в прямоугольном канале в зависимости от числа Кнудсена | 85 |
| 1. | Введение | 85 |
| 2. | Постановка задачи. Вывод основных уравнений | 86 |
| 3. | Вычисление потока тепла в канале. Анализ полученных результатов | 90 |
| 4. | Заключение | 92 |

И. М. Губайдуллин, Р. В. Жалнин, В. Ф. Масягин, В. Ф. Тишкин, А. С. Шуршина

| | | |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| | Применение разрывного метода Галеркина для решения обратной задачи диффузии лекарственных веществ из хитозановых пленок | 94 |
|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|

| | | |
|----|-------------------------------------------------|-----|
| 1. | Введение | 94 |
| 2. | Постановка задачи | 95 |
| 3. | Численный метод решения прямой задачи | 95 |
| 4. | Численные результаты | 97 |
| 5. | Заключение | 102 |

П. А. Вельмисов, А. В. Корнеев, С. В. Киреев

| | | |
|----|---------------------------------------------------------------|-----|
| | Исследование динамической устойчивости трубопровода | 106 |
| 1. | Введение | 106 |
| 2. | Постановка задачи | 107 |
| 3. | Исследование устойчивости | 108 |

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

С. Н. Алексеенко, М. В. Донцова

| | | |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| | Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси. | 115 |
| 1. | Введение | 115 |
| 2. | Существование локального решения | 116 |
| 3. | Существование нелокального решения | 122 |

Д. А. Зенюк, Л. В. Клочкова, Ю. Н. Орлов

| | | |
|----|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| | Моделирование нестационарных случайных процессов кинетическими уравнениями с дробными производными | 125 |
| 1. | Введение | 125 |
| 2. | Дробное уравнение адвекции - диффузии | 126 |
| 3. | Прогнозная модель | 129 |

| | | |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| | Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества» | 134 |
| | Правила верстки рукописей в системе LaTeX | 136 |
| | Алфавитный указатель | 138 |

ОТ РЕДАКЦИИ

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Рубрики журнала:

- математика;
- прикладная математика и механика;
- математическое моделирование и информатика.

Во втором номере 18-го тома публикуются наиболее значимые работы ученых и молодых исследователей, являющихся участниками VII Всероссийской научной молодежной школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского с международным участием (г. Саранск, 12-17 июля 2016 г.).

Школа-семинар проводится Национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарева и Межрегиональной общественной организацией «Средне-Волжское математическое общество». Все статьи имеют положительные рецензии и доступны в сети Internet на сайте Научной Электронной Библиотеки Elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

МАТЕМАТИКА

Краевая задача с вырождением на границе вдоль многообразия коразмерности $k > 2$ © Д. И. Бояркин¹

Аннотация. В статье рассматривается краевая задача для эллиптического уравнения произвольного порядка $2m$ с вырождением на границе области вдоль многообразия коразмерности $k > 2$. При исследовании используются методы функционального анализа и геометрии гладких многообразий, предложенные Ю. В. Егоровым и В. А. Кондратьевым. Эти методы позволяют исследовать краевые задачи в более общей постановке. Получены априорные оценки для решения задачи в обобщенных пространствах Соболева – Слободецкого и сформулирована теорема о гладкости решений задачи.

Ключевые слова: эллиптические операторы, гладкое многообразие, преобразование Фурье, условие Шапиро – Лопатинского

1. Классификация многообразия вырождения коразмерности $k > 2$

Зависимость свойств решений граничной задачи от природы касания векторного поля границы вдоль многообразия коразмерности $k = 2$ и исследование этих свойств, впервые было проделано R. Vogtelli в работе [2].

Пусть G — ограниченная область в \mathbb{R}^n , $n > 3$, с кусочно-гладкой границей Γ^{n-1} и μ — гладкое векторное поле, определенное на Γ^{n-1} , касается Γ^{n-1} вдоль $(n - k)$ -мерного гладкого многообразия Γ^{n-k} , $k > 2$, но не касается Γ^{n-k} .

Определим гладкие $(n - i)$ -мерные многообразия Γ^{n-i} , $2 \leq i \leq k - 2$, таким образом, чтобы $\Gamma^{n-1} \supset \dots \supset \Gamma^{n-i} \supset \dots \supset \Gamma^{n-(k-1)} \supset \Gamma^k$. Многообразие Γ^k является ориентируемым в Γ^{k-1} с помощью поля μ . Пусть $\beta = \langle \mu, n \rangle$ — скалярное произведение μ и n , где n — вектор внешней нормали к Γ^{n-1} в точках Γ^{k-1} . В точках Γ^k функция $\beta = 0$. Обозначим через Γ_+^{k-1} множество точек Γ^{k-1} , в которых $\beta > 0$, а через Γ_-^{k-1} — множество точек Γ^{k-1} , где $\beta < 0$. Пусть $\beta^k = \langle \mu, n^k \rangle$ — скалярное произведение μ и n^k , где n^k — нормаль к Γ^k , лежащая в касательной плоскости к Γ^k и направленная в сторону Γ_+^{k-1} .

В зависимости от структуры поля μ $(n - k)$ -мерное многообразие Γ^{n-k} отнесем к одному из классов:

- к первому классу, если $\beta > 0$, $\beta^k > 0$;
- ко второму классу, если $\beta > 0$, $\beta^k < 0$;
- к третьему классу, если $\Gamma_+^{k-1} = \emptyset$ либо $\Gamma_-^{k-1} = \emptyset$.

Заметим что, так как поле μ не касается самого многообразия Γ^k , то Γ^k может относиться только к одному классу.

В настоящей работе рассматривается случай, когда Γ^k принадлежит к первому классу.

¹ Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; boyarkindi@gmail.com.

2. Постановка краевой задачи

Задачи для эллиптического оператора второго порядка с вырождением вдоль многообразия коразмерности $k = 2$ рассматривались в работах Бицадзе А.В. [1], Мазьи В.Г., Панеях Б. П. [7], Hormander L. [8], и в ряде других работ. В работах Ю.В. Егорова – В.А. Кондратьева [5], [6] при исследовании подобных задач были предложены методы функционального анализа, теории эллиптических краевых задач и геометрии гладких многообразий. Эти методы позволяют исследовать краевые задачи для эллиптического оператора произвольного порядка при вырождении граничных условий на многообразии коразмерности $k > 2$. Подобные задачи возникают при моделировании явлений упругости, фильтрации и многих других физических процессов.

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} Lu &= f && \text{в } G, \\ B_j(\mu(x, D)u) &= \phi_j, \quad j = 1, \dots, m, && \text{на } \Gamma^{n-1}, \\ B_j^k(u) &= \phi_j^k, \quad j = 1, \dots, m, && \text{на } \Gamma^{n-k}, \end{aligned}$$

где L — эллиптический оператор порядка $2m$ с гладкими коэффициентами по переменным x_1, x_2, \dots, x_n ; B_j — дифференциальный оператор порядка m_j с гладкими коэффициентами по переменным x_1, x_2, \dots, x_n ; B_j^k — дифференциальный оператор порядка m_j^k с гладкими коэффициентами по переменным x_{k+1}, \dots, x_n ; $\mu(x, D)$ — дифференцирование вдоль гладкого векторного поля μ . Операторы L и B_j , $j = 1, \dots, m$ удовлетворяют условию Шапиро — Лопатинского.

Обозначим через N^{n-k} — $(n - k + 1)$ -мерное гладкое многообразие, проходящее через Γ^{n-k} трансверсально к полю μ . Продолжим гладким образом поля μ в достаточно малую окрестность Ω^k многообразия Γ^{n-k} в $N^{n-k+1} \cap G$. Так как Γ^{n-k} относится к первому классу, то каждую точку из Ω^k можно соединить с N^{n-k+1} интегральной кривой поля μ . На $N^{n-k+1} \cap G$ операторы $L_k = f + \sum_{p=1}^{k-1} l_p$ и B_j^k , $j = 1, \dots, m$, удовлетворяют условию Шапиро — Лопатинского.

Далее, определим $(n - i + 1)$ -мерные плоскости нормалей N^{n-i} к Γ , $2 < i \leq k - 1$, проходящие соответственно через Γ^{n-i} . Заметим, что $N^{n-i} \in N^{n-i+1}$. Предположим, что в малой окрестности Ω многообразия Γ^{n-k} в G выполняется условие $[n_i, \mu] = 0$, где n_i — нормаль к плоскости N^{n-i} , $[\cdot, \cdot]$ — скобка Пуассона.

3. Априорные оценки и гладкость решений краевой задачи

Теорема 3.1. *Если $u \in H_{s-2m+1}(G)$, $\phi_j \in H_{s-m_j-\frac{3}{2}}(\Gamma^{n-1})$, $\phi_j^k \in H_{s-m_j-\frac{3}{2}}(\Gamma^{n-k})$, $d > 0$ — достаточно малое число и $s > \max(m_j + \frac{3}{2}, m_j^k + \frac{1}{2})$, то существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от u , что*

$$\begin{aligned} & C^{-1} \left(\|u\|_s + \|\mu(x, D)hu\|_s + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x, D)h^i u\|_s^{N^{n-i+1}} + \|h^k u\|_s^{N^{n-k}} \right) \leq \\ & \leq \|f\|_{s-2m} + \|\mu(x, D)hf\|_{s-2m} + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x, D)h^i f\|_{s-2m}^{N^{n-i+1}} + \|h^k f\|_{s-2m}^{N^{n-k}} + \\ & + \sum_{j=1}^m \|\phi_j\|_{s-m_j-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-1}} + \|h\phi\|_{s-m_j-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-1}} + \sum_{i=1}^{k-2} \left(\sum_{j=1}^m \left(\|\phi_j\|_{s-m_j-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} + \|h^i \phi_j\|_{s-m_j-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} \right) \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \|\phi_j^k\|_{s-m_j-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-k}} + \|u\|_0 \leq \\
& \leq C \left(\|u\|_s + \|\mu(x, D)hu\|_s + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x, D)h^i u\|_s^{N^{n-i+1}} + \|h^k u\|_s^{N^{n-k}} \right),
\end{aligned}$$

где $f = Lu$ в G , $\phi_j = B_j(\mu(x, D)u)$ на Γ^{n-1} , $\phi_k = B_j^k(u)$ на Γ^{n-k} , $h \in C^\infty(G)$ и $h = 1$ вне $(\frac{d}{2})$ -окрестности многообразия Γ^{n-1} , $h^i \in C^\infty(G)$, $i = 2, \dots, k-2$, причем h^i равна 1 в $(\frac{d}{2})$ -окрестности многообразия Γ^{n-i} и равна нулю вне d окрестности этого многообразия, $h^k \in C^\infty(G)$ и $h = 1$ вне $(\frac{d}{2})$ -окрестности многообразия Γ^{n-k} .

С л е д с т в и е 3.1. Пространство решений однородной задачи

$Lu = 0$ в G ,

$B_j(\mu(x, D)u) = 0$, $j = 1, \dots, m$, на Γ^{n-1} ,

$B_j^k(u) = 0$, $j = 1, \dots, m$, на Γ^{n-k} ,

конечномерно.

С л е д с т в и е 3.2. Обозначим через $\Pi_s(G)$ пространство функций с конечной нормой

$$\|u\|_{\Pi_s(G)} = \|u\|_s + \|\mu(hu)\|_s + \sum_{i=1}^{k-1} \|n_i(h^i u)\|_s^{N^{n-i}} + \|h^k u\|_s.$$

Через Γ_s^{n-i} ($i = 2, \dots, k-1$) — пространства функций, определенных на Γ^{n-i} с конечной нормой

$$\|u\|_{\Gamma_s^{n-i}} = \|u\|_s^{\Gamma^{n-i}} + \|h^i u\|_{s+1}^{\Gamma^{n-i}},$$

Γ_s^{n-1} — пространство функций, определенных на Γ^{n-1} с конечной нормой

$$\|u\|_{\Gamma_s^{n-1}} = \|u\|_s^{\Gamma^{n-1}} + \|hu\|_{s+1}^{\Gamma^{n-1}},$$

Γ_s^{n-k} — пространство функций, определенных на Γ^{n-k} с конечной нормой

$$\|u\|_{\Gamma_s^{n-k}} = \|u\|_s^{\Gamma^{n-k}} + \|h^k u\|_{s+1}^{\Gamma^{n-k}},$$

где h , h^i , h^k функции, определенные в теореме 2.1. Тогда область значений оператора $u \rightarrow (Lu, B_j(\mu(x, D)u)|_{\Gamma^{n-1}}, n_i(x, D)u|_{\Gamma^{n-i}}, B_j^k(u)|_{\Gamma^{n-k}}, j = 1, \dots, m, i = 2, \dots, k-1$, действующего из $\Pi_s(G)$ в $\Pi_{s-2m}(G) \times \Gamma_{s-m_j-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-1}} \times \dots \times \Gamma_{s-m_j-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-(k-1)}} \times H_{s-m_j-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-k}}$, замкнута.

Т е о р е м а 3.2. Если многообразия Γ^{n-k} принадлежит к первому классу и известно, что $u \in H_s(G)$, $Lu \in H_s(G)$, $\phi_j \in H_{s-m_j-\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-1}}$, $j = 2, \dots, k-1$, $\phi_j^k \in H_{s-m_j-\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-k}}$, где $s > \max(m_j + \frac{3}{2}, m_j^k + \frac{1}{2})$ то $u \in H_{s+1}(G)$ и существует такая постоянная $C > 0$, не зависящая от u , что

$$\begin{aligned}
\|u\|_s & \leq C(\|f\|_{s-2m+1} + \|\mu(x, D)hf\|_{s-2m+1} + \sum_{i=1}^{k-2} \|n_i(x, D)h^i f\|_{s-2m+1}^{N^{n-i+1}} + \|h^k f\|_{s-2m+1}^{N^{n-k}} \\
& + \sum_{j=1}^m \left(\|\phi_j\|_{s-m_j+\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-1}} + \|h\phi_j\|_{s-m_j+\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-1}} \right) + \sum_{i=1}^{k-2} \sum_{j=1}^m \left(\|\phi_j\|_{s-m_j+\frac{3}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} + \|h^i \phi_j\|_{s-m_j+\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-i+1}} \right) + \\
& + \sum_{j=1}^m \|\phi_j^k\|_{s-m_j+\frac{1}{2}}^{\Gamma^{n-k}} + \|u\|_s).
\end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В., *Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка*, Наука, М., 1966, 293 с.
2. Borrelli R., “The singular, second order oblique derivative problem”, *J. Math. and Mech.*, 1966, 51–81.
3. Бояркин Д. И., “Одно обобщение задачи с косо́й производной”, *УМН*, **38**:1(229) (1983), 157–158.
4. Бояркин Д. И., “Нерегулярная эллиптическая краевая задача”, *Труды Средневолжского математического общества*, **10**:1 (2008), 119–122.
5. Егоров Ю. В., *Линейные дифференциальные уравнения главного типа*, Наука, М., 1984, 360 с.
6. Егоров Ю. В., Кондратьев В. А., “О задаче с косо́й производной”, *Матем. сб.*, **78** (1969), 148–176.
7. Мазья В. Г., Панеях Б. П., “Вырождающиеся эллиптические операторы и задача с косо́й производной”, *Тр. ММО*, **31** (1974), 237–255.
8. Hormander L., “Pseudo-differential operators and non-elliptic boundary problems”, *Ann. Math.*, **83** (1966), 129–209; рус. пер.: Хёрмандер Л., “Псевдодифференциальные операторы и неэллиптические краевые задачи. – В кн.: Псевдодифференциальные операторы.”, 1967, 166–296.

Дата поступления 03.11.2015

A boundary value problem with degeneration on the boundary along the manifold of codimension $k > 2$

© D. I. Boyarkin²

Abstract. The article considers the boundary value problem for elliptic equations of arbitrary order $2m$ with degeneracy on the boundary of the domain along manifolds of codimension $k > 2$. The study uses methods of functional analysis and geometry of smooth manifolds proposed by Y. V. Egorov and V. A. Kondratiev. These methods allow us to investigate the boundary value problem in more general formulation. Aprioristic estimates for the solution of a task in the generalized spaces of Sobolev – Slobodetsky are obtained and the theorem of smoothness of solutions of a task is formulated.

Key Words: elliptic operators, smooth variety, transformation Fourier, condition Lopatinsky

² Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, N.P. Ogarev Mordovia State University, Saransk; boyarkindi@gmail.com.

УДК 517.938

Гетероклинические кривые градиентно-подобных диффеоморфизмов и топология несущего многообразия

© В. З. Гринес¹, Е. Я. Гуревич², О. В. Починка³

Аннотация. При изучении детерминированных процессов, описываемых системами Морса-Смейла, особую роль играют некомпактные гетероклинические кривые, принадлежащие пересечениям устойчивых и неустойчивых многообразий седловых периодических точек. В частности, такие кривые являются математическими моделями сепараторов в магнитном поле плазмы. В работе рассматривается класс градиентно-подобных диффеоморфизмов на трехмерных многообразиях, периодические точки которых и часть их инвариантных многообразий образуют непересекающиеся ручно вложенные поверхности. В работе устанавливается, что число таких поверхностей конечно и все они имеют один и тот же род. Основным результатом работы является предъявление точной нижней оценки числа гетероклинических кривых данного диффеоморфизма из рассматриваемого класса. Эта оценка определяется родом поверхностей и их количеством. Кроме того, в работе описан топологический тип многообразий, допускающих рассматриваемые диффеоморфизмы.

Ключевые слова: структурно-устойчивые динамические системы, гетероклинические кривые, локально-тривиальное расслоение над окружностью

Из классических работ [1], [7] следует, что грубые (структурно устойчивые) потоки на поверхностях не имеют траекторий, соединяющих два седловых состояния равновесия (гетероклинических траекторий). В случае, когда несущее многообразие имеет размерность три и выше, грубые потоки могут иметь такие траектории, а грубые диффеоморфизмы могут обладать гетероклиническими пересечениями инвариантных многообразий различных седловых периодических точек. Если фазовое пространство диффеоморфизма трехмерно, то одномерные гетероклинические перечения распадаются на непересекающиеся кривые, называемые гетероклиническими. При изучении детерминированных процессов, описываемых системами Морса-Смейла, особую роль играют некомпактные гетероклинические кривые, которые в случае потока являются гетероклиническими траекториями. В серии работ Е. Приста и его сотрудников (см. [8]-[9]) большое внимание уделено проблеме описания топологии магнитного поля в короне Солнца, важную роль в которой играют так называемые сепараторы. Математической моделью сепараторов являются как раз гетероклинические траектории и кривые, а вопрос об их существовании является одной из принципиальных проблем магнитной гидродинамики. В работе [2] найдено эффективное достаточное условие существования гетероклинических траекторий и кривых, которое удалось применить в работе [3] для установления существования сепараторов в магнитном поле короны Солнца. В работе [6] найдены новые достаточные условия существования гетероклинических траекторий и кривых для широких классов динамических систем на трехмерных многообразиях, которым дано название систем с поверхностной динамикой. В настоящей работе дается точная нижняя оценка числа гетероклинических кривых для таких систем. Полученные результаты позволят найти новые достаточные условия существования сепараторов в магнитных полях специального вида.

¹ Профессор кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; vgrines@hse.ru.

² Доцент кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; egurevich@hse.ru.

³ Заведующая кафедрой фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; opochinka@hse.ru.

Напомним, что диффеоморфизм $f : M^n \rightarrow M^n$ связного замкнутого гладкого многообразия M^n размерности n называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество Ω_f конечно и состоит только из гиперболических периодических точек и для любых различных седловых периодических точек $p, q \in \Omega_f$ инвариантные многообразия W_p^s, W_q^u либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально.

Пусть $f : M^3 \rightarrow M^3$ — диффеоморфизм Морса-Смейла. Непустое пересечение $W_p^s \cap W_q^u$, где p, q — различные седловые точки диффеоморфизма f , называется *гетероклиническим*. В случае $\dim(W_p^s \cap W_q^u) = 1$ компонента связности пересечения $W_p^s \cap W_q^u$ называется *гетероклинической кривой*, а в случае $\dim(W_p^s \cap W_q^u) = 0$ любая точка пересечения $W_p^s \cap W_q^u$ называется *гетероклинической точкой*. Диффеоморфизм f называется *градиентно-подобным*, если из условия $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$ следует, что размерность множества W_p^u меньше размерности множества W_q^u . Это условие означает, что если неблуждающее множество диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ не содержит гетероклинических точек, то диффеоморфизм f является градиентно-подобным.

С. Смейл в работе [10] (Theorem A) показал, что градиентный поток функции Морса на произвольном многообразии M^n может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в C^1 -топологии) потоком Морса-Смейла без замкнутых траекторий, что доказывает существование градиентно-подобных диффеоморфизмов на любом многообразии (например, являющихся сдвигами на единицу времени вдоль траекторий таких потоков Морса-Смейла).

Всюду ниже будем предполагать, что многообразие M^3 ориентируемо. В работе [2] доказано, что если сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$ Морса-Смейла не имеет гетероклинических кривых, то многообразие M^3 диффеоморфно либо сфере S^3 , либо связной сумме многообразий $S^2 \times S^1$. Отсюда, в частности, следует, что если трехмерное фазовое пространство диффеоморфизма Морса-Смейла отлично от сферы и связной суммы многообразий $S^2 \times S^1$, блуждающее множество диффеоморфизма необходимо содержит гетероклинические кривые.

В работе [3] (теорема 3) доказано, что если M^3 неприводимо (такое, что каждая цилиндрически вложенная двумерная сфера ограничивает в нем шар), а диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$ — полярный (то есть является диффеоморфизмом Морса-Смейла, чье неблуждающее множество содержит в точности один источник, один сток и конечное число седловых периодических точек), то двумерное инвариантное многообразие каждой седловой периодической точки содержит гетероклиническую кривую, а также показано, как этот результат применяется для решения проблемы о существовании сепараторов в магнитном поле плазмы. Для случая, когда многообразие M^3 является линзой $L_{p,q}$, а множество седловых точек полярного диффеоморфизма $f : M^3 \rightarrow M^3$ состоит в точности из двух точек, инвариантные многообразия которых тривиально вложены, этот результат может быть усилен: в работе [4] показано, что неблуждающее множество такого диффеоморфизма содержит как минимум p гетероклинических кривых.

В настоящей работе выделяется класс диффеоморфизмов Морса-Смейла, несущее ориентируемое трехмерное многообразие диффеоморфизма Морса-Смейла является локально-тривиальным расслоением над окружностью, и дается нижняя оценка числа гетероклинических кривых таких диффеоморфизмов.

Для точной формулировки результатов приведем несколько определений.

Пусть S_g — ориентируемая поверхность (замкнутое двумерное многообразие) рода g и $e : S_g \rightarrow M^3$ — топологическое вложение. Поверхность $S_g = e(S_g)$ называется *локально плоской*, если для любой точки $p \in S_g$ существует окрестность $U_p \subset M^3$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \rightarrow \mathbb{R}^3$ такие, что множество $h_p(S_g \cap U_p)$ является координатной плоскостью в пространстве \mathbb{R}^3 . В силу работы [5] локально плоская поверхность является *цилиндрически*

вложенной, то есть существует такое топологическое вложение $h : \mathbb{S}_g \times [-1; 1] \rightarrow M^3$, что $h(\mathbb{S}_g \times \{0\}) = S_g$.

Для диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^3 \rightarrow M^3$ обозначим через Ω_f^i множество всех его периодических точек, размерность неустойчивого многообразия которых равна $i \in \{0, 1, 2, 3\}$, и положим $\Sigma_f = \Omega_f^1 \cup \Omega_f^2$. Будем говорить, что сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^3 \rightarrow M^3$ обладает поверхностной динамикой, если множество Σ_f представляется в виде дизъюнктного объединения двух подмножеств $\Sigma_{\mathcal{A}}, \Sigma_{\mathcal{R}}$ таких, что каждая компонента связности множеств $\mathcal{A} = W_{\mathcal{A}}^u \cup \Omega_f^0$, $\mathcal{R} = W_{\mathcal{R}}^s \cup \Omega_f^3$ является локально плоской ориентируемой поверхностью. Обозначим класс таких диффеоморфизмов $G(M^3)$.

В работе устанавливается, что топология несущего многообразия диффеоморфизмов из класса $G(M^3)$ описывается следующей конструкцией.

Пусть $\tau : \mathbb{S}_g \rightarrow \mathbb{S}_g$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм (гомеоморфизм склейки). Обозначим через $M_{g,\tau}^3$ пространство орбит действия группы $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$, порожденной степенями гомеоморфизма $\gamma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, определенного формулой $\gamma(z, r) = (\tau(z), r - 1)$ и через $p_{g,\tau} : \mathbb{S}_g \times \mathbb{R} \rightarrow M_{g,\tau}^3$ естественную проекцию. Естественная проекция индуцирует на $M_{g,\tau}^3$ структуру топологического многообразия. Исходя из классических результатов можно утверждать, что любое компактное трехмерное топологическое многообразие допускает гладкую структуру, причем единственную, поэтому в дальнейшем будем предполагать многообразии $M_{g,\tau}^3$ гладким.

Следующее утверждение доказано в работе [6].

Предложение 1.1. Пусть диффеоморфизм f принадлежит классу $G(M^3)$, тогда:

1) граница каждой компоненты связности V множества $M^3 \setminus (\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$ состоит в точности из одной компоненты связности множества \mathcal{A}_f и одной компоненты связности множества \mathcal{R}_f ;

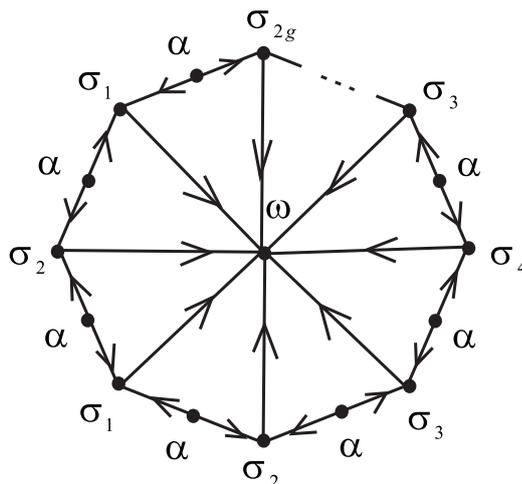
2) замыкание $cl V$ каждой компоненты связности V множества $M^3 \setminus (\mathcal{R} \cup \mathcal{A})$ гомеоморфно прямому произведению $\mathbb{S}_{g_f} \times [0, 1]$;

3) существует число $g_f \geq 0$ и сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $\tau_f : \mathbb{S}_{g_f} \rightarrow \mathbb{S}_{g_f}$ такие, что M^3 диффеоморфно многообразию M_{g_f, τ_f}^3 .

Из утверждения 1.1. следует, что множества \mathcal{A}_f и \mathcal{R}_f состоят из одинакового числа компонент связности, которое обозначим через k_f ($k_f \geq 1$).

Основной результат работы заключается в следующей теореме.

Теорема 1.3. Неблуждающее множество произвольного диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ содержит не менее чем $12g_f k_f$ гетероклинических кривых.



Р и с у н о к 1.1

Вспомогательный диффеоморфизм Морса-Смейла на поверхности рода g

Простейшие примеры диффеоморфизмов из класса $G(M^3)$, доказывающие точность оценки, приведенной в теореме 1.1, строятся следующим образом. Пусть $\varphi_g : \mathbb{S}_g \rightarrow \mathbb{S}_g$ — градиентно-подобный диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит в точности из одной стоковой, одной источниковой и $2g$ седловых неподвижных точек (фазовый портрет диффеоморфизма f на поверхности рода $g > 0$ приведен на рис. ??, где в качестве модели поверхности использован $2g$ -угольник, являющийся ее разверткой), $\psi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ — диффеоморфизм, являющийся сдвигом на единицу времени вдоль потока $\dot{s} = \sin 2\pi ks \pmod{1}$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда диффеоморфизм f , заданный формулой $f(x, s) = (\varphi_g(x), \psi(s))$, $x \in \mathbb{S}_g$, $s \in \mathbb{S}^1$, принадлежит классу $G(\mathbb{S}_g \times \mathbb{S}^1)$ и имеет в точности $12gk$ гетероклинических кривых.

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект «Топологические методы в динамике», ТЗ-98) при частичной поддержке РФФИ (грант 15-01-03687 А).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. А. Андронов, Л. С. Понтрягин, “Грубые системы”, *Докл. АН СССР*, **14**:5 (1937), 247-250..
2. Bonatti C., Grines V., Medvedev V., Pecou E., “Three-manifolds admitting Morse–Smale diffeomorphisms without heteroclinic curves”, *Topology and its Applications*, **117** (2002.), 335 – 344.
3. Grines V., Zhuzhoma E. V., Pochinka O., Medvedev T. V., “On heteroclinic separators of magnetic fields in electrically conducting fluids”, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, **294** (2015), 1-5.
4. Гринес В. З., Жужома Е. В., Медведев В. С., “Новые соотношения для систем Морса–Смейла с тривиально вложенными одномерными сепаратрисами”, *Матем. сб.*, **194**:7 (2003), 25–56.

5. Brown, Morton (1962), “Locally flat imbeddings of topological manifolds”, *Annals of Mathematics, Second series*, **75** (1962), 331-341.
6. Гринес В. З, Гуревич Е. Я., Жужома Е. В., Зинина С. Х., “Гетероклинические кривые диффеоморфизмов Морса–Смейла и сепараторы в магнитном поле плазмы”, *Нелинейная динамика*, **10**:4 (2014), 427–438.
7. M. Peixoto, “Structural stability on two-dimensional manifolds”, *Topology*, **2** (1963), 179 - 180.
8. E.R. Priest, *Solar Magneto-Hydrodynamics*, D. Reidel, Holland, 1982.
9. E. Priest, T. Forbes, *Magnetic Reconnection. MHD Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
10. Smale S., “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math*, **1**:1 (1961), 199–206.

Дата поступления 9.05.2016

Heteroclinic Curves of Gradient-like Diffeomorphisms and the Topology of Ambient Manifolds

© V. Grines⁴, E. Gurevich⁵, O. Pochinka⁶

Abstract. In the study of deterministic processes described by the Morse-Smale systems noncompact heteroclinic curves play special role. These curves belong to intersections of stable and unstable manifolds of saddle periodic points. In particular, these curves are mathematical models of magnetic separators in the plasma field. We consider the class of gradient-like diffeomorphisms on three-dimensional manifolds such that their periodic points and a part of their invariant manifolds form disjoint tamely embedded surfaces. We prove that the number of the surfaces is finite and all of them have the same genus. The main result is presentation of the exact lower estimation for the number of heteroclinic curves of any diffeomorphism from considered class. This estimation is defined by genus of surfaces and their number. In addition the paper describes the topological type of manifolds which admit considered diffeomorphisms.

Key Words: structurally stable dynamical systems, heteroclinic curves, mapping torus

⁴ Professor of Chair of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics, vgrines@hse.ru

⁵ Associated Professor of Chair of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics, egurevich@hse.ru.

⁶ The Head of Chair of Fundamental Mathematics, National Research University Higher School of Economics, opochinka@hse.ru.

УДК 517.9

О структуре одномерных базисных множеств эндоморфизмов поверхностей

© В. З. Гринес¹, Е. Д. Куренков²

Аннотация. Настоящая работа посвящена изучению динамики C^k -эндоморфизмов ($k \geq 1$) поверхностей, удовлетворяющих аксиоме A , в окрестности одномерных базисных множеств. Устанавливается, что если одномерное базисное множество эндоморфизма f поверхности имеет тип $(1, 1)$ и является одномерным подмногообразием без края, то оно является аттрактором, гладко вложенным в несущую поверхность. Более того, существует $k \geq 1$ такое, что ограничение эндоморфизма f^k на любую компоненту связности аттрактора является растягивающим эндоморфизмом. Также устанавливается, что если базисное множество эндоморфизма f имеет тип $(2, 0)$ и является одномерным подмногообразием без края, то оно является репеллером и существует $k \geq 1$ такое, что ограничение эндоморфизма f^k на любую компоненту связности базисного множества является растягивающим эндоморфизмом.

Ключевые слова: аксиома A , эндоморфизм, базисное множество

1. Введение

Хорошо известна ключевая роль понятий гиперболического множества и аксиомы A , введенных Д.В. Аносовым и С. Смейлом [1], [16] для исследования различных типов устойчивости диффеоморфизмов на многообразиях, в частности, для установления необходимых и достаточных условий структурной устойчивости. В работах [14], [10] аналогичные понятия были введены для эндоморфизмов, то есть гладких отображений, не являющихся, вообще говоря, взаимно однозначными.

Под C^k -эндоморфизмом гладкого замкнутого многообразия M^n понимается гладкое отображение класса C^k , $k \geq 1$. Если эндоморфизм f обладает обратным отображением класса C^k , то он называется C^k -диффеоморфизмом. Динамика эндоморфизмов окружности хорошо изучена и содержит целый ряд исчерпывающих результатов. Из работы А. Г. Майера [9] следует, что в том случае, когда f является диффеоморфизмом и его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических периодических точек, он является структурно устойчивым. Более того в работе [9] была получена топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов окружности. В работах М. Шуба, З. Нитецки и М. Якобсона [17], [12], [18] была изучена структура неблуждающих множеств эндоморфизмов окружности, удовлетворяющих аксиоме A и получены содержательные результаты в направлении топологической классификации эндоморфизмов в предположении их структурной устойчивости или устойчивости на неблуждающем множестве.

На любой двумерной поверхности существует диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A С. Смейла. В силу спектральной теоремы С. Смейла [16] неблуждающее множество таких диффеоморфизмов представляется в виде конечного объединения замкнутых инвариантных (базисных) множеств, в каждом из которых диффеоморфизм имеет транзитивную орбиту. Топологическая структура таких базисных множеств хорошо изучена.

¹ Профессор кафедры фундаментальной математики Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; vgrines@hse.ru

² Лаборант лаборатории ТАПРАДЕСС Национального исследовательского университета Высшая школа экономики; ekurenkov@hse.ru

В случае, когда размерность базисного множества равна нулю, оно локально устроено как декартово произведение двух канторовских множеств, а ограничение диффеоморфизма на него топологически сопряжено сдвигу некоторой марковской цепи с конечным числом состояний. Если размерность базисного множества равна единице, то оно является аттрактором (репеллером), целиком состоит из одномерных неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек и локально устроено как декартово произведение канторовского множества на отрезок. Если размерность базисного множества равна двум, то оно совпадает с несущей поверхностью M^2 , которая диффеоморфна двумерному тору, а исходный диффеоморфизм является диффеоморфизмом Д.В. Аносова. Более того, в ряде работ В.З. Гринеса, Р.В. Плыкина, А.Ю. Жирова, Х. Бонатти, Р. Ланжевена и др. (см. [4]) получены топологическая классификация базисных множеств диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A и топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей.

Что касается эндоморфизмов поверхностей, не являющихся диффеоморфизмами, значительный прогресс достигнут в изучении рациональных отображений комплексной плоскости, базирующихся на классических результатах Г. Жюлиа и П. Фату и полученных в работах М. Якобсона, Дж. Милнора, М. Любича и др (см. [8], [11]). Для эндоморфизмов поверхностей, не связанных с комплексной динамикой, имеющиеся результаты существенно скромнее.

Имеется также большой прогресс в топологической классификации диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A . Смейла на многообразиях размерности большей двух, в случае, когда размерность базисного множества совпадает с размерностью несущего многообразия. В этом случае диффеоморфизм является диффеоморфизмом Аносова и имеется целый ряд исчерпывающих классификационных результатов таких диффеоморфизмов в работах Дж. Фрэнкса, Ш. Ньюхауса, Э. Мэнинга и др (см. [2]). Имеется также значительный прогресс в топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов, обладающих базисными множествами коразмерности один, полученный в работах В.З. Гринеса, Е.В. Жужомы, В.С. Медведева, Р. В. Плыкина, О.В. Починки, Ю.А. Левченко и др. (см. [3], [5], [13]). Что же касается аналогичных результатов для эндоморфизмов, то наиболее полные результаты имеются по классификации растягивающихся эндоморфизмов [17]. Для таких эндоморфизмов неблуждающее множество состоит из единственного базисного множества, размерность которого совпадает с размерностью несущего многообразия.

Настоящая работа посвящена изучению динамики двумерных эндоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A , в окрестности одномерных базисных множеств. Полученные результаты являются частичным аналогом на случай эндоморфизмов поверхностей, соответствующих результатам Р.В. Плыкина для диффеоморфизмов (см. [13], Теорема 3).

Пусть $f : M^n \rightarrow M^n$ эндоморфизм класса C^r ($r \geq 1$), заданный на замкнутом многообразии M^n , снабженном римановой метрикой, и $\Lambda \subset M^n$ f -инвариантное (инвариантное относительно эндоморфизма f) множество, то есть $f(\Lambda) = \Lambda$. Для любой точки $x \in \Lambda$ существует, вообще говоря, бесконечное множество последовательностей вида $\bar{x} = \{x_i \in \Lambda \mid x_0 = x, i \in \mathbb{Z}\}$, таких что $f(x_i) = x_{i+1}$. Каждую из таких последовательностей будем называть частной траекторией точки x , ассоциированной с инвариантным множеством Λ .

О п р е д е л е н и е 1.1. *Инвариантное множество Λ эндоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$ называется гиперболическим, если существуют константы $C > 0$, $0 < \mu < 1$ такие, что для любой частной траектории \bar{x} точки x существует разложение касательного пространства $T_{\bar{x}}M^n$ в прямую сумму $T_{\bar{x}}M^n = E_{\bar{x}}^s \oplus E_{\bar{x}}^u$, инвариантное относи-*

тельно касательного отображения $Df: T_{\bar{x}}M^n \rightarrow T_{\bar{x}}M^n$, для которого верны следующие неравенства:

1. $\|Df^n(v)\| \leq C\mu^n\|v\|$, для любых $n \geq 0$, $v \in E_{\bar{x}}^s$;
2. $\|Df^n(v)\| \geq (1/C)\mu^{-n}\|v\|$, для любых $n \geq 0$, $v \in E_{\bar{x}}^u$.

В работе [14] было предложено следующее обобщение аксиомы A для эндоморфизмов (формально совпадающее с аналогичным определением для диффеоморфизмов).

О п р е д е л е н и е 1.2. Эндоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ удовлетворяет аксиоме A , если выполнены следующие условия:

1. неблуждающее множество Ω_f — гиперболично и не содержит критических точек;
2. множество периодических точек Per_f эндоморфизма f плотно в неблуждающем множестве Ω_f .

Для эндоморфизма f , удовлетворяющего аксиоме A , имеет место теорема о спектральном разложении, доказанная в [14], и обобщающая соответствующий результат, полученный С. Смейлом [16].

П р е д л о ж е н и е 1.1. Пусть эндоморфизм f удовлетворяет аксиоме A . Тогда его неблуждающее множество Ω представляется единственным образом в виде объединения конечного числа непересекающихся замкнутых f -инвариантных подмножеств (называемых базисными множествами) $\Omega = \bigcup_{i=1}^l \Omega_i$ таких, что ограничение f на каждое базисное множество является топологически транзитивным.

О п р е д е л е н и е 1.3. Базисное множество Ω_i эндоморфизма f называется аттрактором, если существует его замкнутая окрестность U такая, что $f(U) \subset \text{Int } U$ и $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(U) = \Omega_i$.

О п р е д е л е н и е 1.4. Базисное множество Ω_i эндоморфизма f называется репеллером, если существует его замкнутая окрестность U и подмножество $\tilde{U} \subset \text{Int } U$ такие, что $f(\tilde{U}) = U$ и $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^{-n}(U) = \Omega_i$ ³.

О п р е д е л е н и е 1.5. C^r -эндоморфизм $f: M^n \rightarrow M^n$ называется растягивающим, если существуют константы $C > 0$ и $\mu > 1$ такие, что $\|Df^n(v)\| \geq C\mu\|v\|$ для любого $v \in TM^n$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Наличие гладкой структуры на многообразии M^n не является обязательным условием для того, чтобы задать растягивающий эндоморфизм. Альтернативное определение растягивающего эндоморфизма, заданного на произвольном метрическом пространстве было предложено А. Б. Катком [7].

О п р е д е л е н и е 1.6. Непрерывное отображение $f: X \rightarrow X$ метрического пространства X называется растягивающим, если существуют такие константы $\varepsilon > 0$ и $\mu > 1$, что для любых $x, y \in X$, $x \neq y$, $\rho(x, y) < \varepsilon$ выполняется неравенство $\rho(f(x), f(y)) > \mu\rho(x, y)$.

³ Под $f^{-1}(A)$ понимается полный прообраз множества A .

В том случае, когда X является C^1 -гладким компактным многообразием, данные определения эквивалентны.

Для базисного множества Λ эндоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$, удовлетворяющего аксиоме A , пару чисел (a, b) , где a размерность E_x^u , b размерность E_x^s , $x \in \Lambda$, назовем типом множества Λ .

В настоящей работе изучается динамика и наличие гладкой структуры одномерного базисного множества Λ эндоморфизма $f: M^2 \rightarrow M^2$, удовлетворяющего аксиоме A , где M^2 – двумерное замкнутое многообразие. Основным результатом работы являются следующие теоремы.

Теорема 1.1. Пусть базисное множество Λ имеет тип $(1, 1)$ и является одномерным подмногообразием без края. Тогда:

- 1) Λ является аттрактором эндоморфизма f ;
- 2) Λ является гладко вложенной окружностью;
- 3) существует $k \geq 1$ такое, что ограничение эндоморфизма f^k на любую компоненту связности Λ является растягивающим эндоморфизмом.

Теорема 1.2. Пусть базисное множество Λ имеет тип $(2, 0)$ и является одномерным подмногообразием без края. Тогда:

- 1) Λ является репеллером;
- 2) существует $k \geq 1$ такое, что ограничение эндоморфизма f^k на любую компоненту связности Λ является растягивающим эндоморфизмом.

Замечание 1.1. В силу [17] (см. также [7]) любой растягивающий эндоморфизм окружности (в смысле определений 1.5., 1.6.) сопряжен отображению вида $\bar{x} = kx \pmod{1}$, где k есть степень отображения исходного эндоморфизма, а $x \in \mathbb{R}$.

Замечание 1.2. Компонента связности множества Λ в теореме 1.2. является окружностью, не обязательно гладко вложенной в M^2 . Примером такой ситуации может служить отображение римановой сферы, порожденное отображением вида $z \rightarrow z^2 + c$ (z – принадлежит комплексной плоскости), при всех достаточно малых значениях параметра c , отличных от нуля (см. например, [8] стр. 67).

Благодарности. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект «Топологические методы в динамике», ТЗ-98) при частичной поддержке РФФИ (грант 15-01-03687-а).

2. Вспомогательные сведения

Для точек гиперболического множества, как и в случае диффеоморфизмов, существуют понятия локального устойчивого и неустойчивого многообразий. Существенное отличие эндоморфизма от диффеоморфизма состоит в том, что у эндоморфизма, в силу отсутствия обратного отображения, локальное неустойчивое многообразие зависит, вообще говоря, от выбора конкретной частной траектории, проходящей через данную точку.

Определение 2.1. Пусть $x \in \Lambda$, где Λ – гиперболическое инвариантное множество эндоморфизма $f: M^n \rightarrow M^n$ и \bar{x} – частная траектория точки x . Множество

$$W_{x,\varepsilon}^s = \{y \in M^n \mid \rho(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon, n = 0, 1, 2, \dots\}$$

называется локальным устойчивым многообразием точки x , а множество

$$W_{\bar{x}, \varepsilon}^u = \{y \in M^n \mid \exists \bar{y}, \rho(x_n, y_n) < \varepsilon, n = 0, -1, -2, \dots\}$$

называется локальным неустойчивым многообразием точки x , ассоциированным с частной траекторией \bar{x} .

Структура гиперболических множеств эндоморфизмов подробно изучалась в [14]. Приведем некоторые важные для данной работы результаты (доказательства см. [14], [6])

Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ – гладкая риманова метрика, заданная на многообразии M^n .

Предложение 2.1. Для любого гиперболического множества Λ эндоморфизма f существует гладкая риманова метрика $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda$, эквивалентная метрике $\langle \cdot, \cdot \rangle$, ассоциированная с гиперболическим множеством Λ и число λ , $0 < \lambda < 1$ такие, что для любой частной траектории $\bar{x} \subset \Lambda$ имеют место неравенства

$$\|Df_{x_i}(v)\|_\Lambda \leq \lambda \|v\|_\Lambda \quad \text{при } v \in E_{x_i}^s,$$

$$\|Df_{x_i}(v)\|_\Lambda \geq (1/\lambda) \|v\|_\Lambda \quad \text{при } v \in E_{x_i}^s,$$

$i \in \mathbb{Z}$.

Предложение 2.2. Пусть Λ – гиперболическое множество эндоморфизма f , тогда верны следующие утверждения:

1. существует такое $\varepsilon > 0$, что для любой частной траектории $\bar{x} \subset \Lambda$, ассоциированной с точкой $x \in \Lambda$, локальное устойчивое $W_{x, \varepsilon}^s$ и локальное неустойчивое $W_{x, \varepsilon}^u$ многообразия являются гладко вложенными подмногообразиями, касающимися E_x^s и E_x^u соответственно;
2. $W_{x, \varepsilon}^s$ и $W_{x, \varepsilon}^u$ непрерывно зависят от точки x и траектории \bar{x} соответственно⁴;
3. существует такое $\mu < 1$, что в метрике ρ на M^n , индуцированной метрикой $\langle \cdot, \cdot \rangle_\Lambda$, верны следующие утверждения:
 - а) для любых $y, z \in W_{\bar{x}, \varepsilon}^s$ выполнены неравенства $\rho(f^{n+1}(y), f^{n+1}(z)) \leq \mu \rho(f^n(y), f^n(z))$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
 - б) для любых двух точек $y, z \in W_{\bar{x}, \varepsilon}^u$ существуют их частные траектории \bar{y} и \bar{z} , для которых выполнены неравенства $\rho(y_{-n-1}, z_{-n-1}) \leq \mu \rho(y_{-n}, z_{-n})$, $n = 0, 1, 2, \dots$

3. Доказательства теорем

Здесь и далее мы всегда будем предполагать, что на Λ задана метрика, определенная в предложении 2.1.

Пусть Λ – базисное множество эндоморфизма $f : M^2 \rightarrow M^2$, являющееся одномерным подмногообразием без края. Тогда Λ состоит из конечного числа $l \geq 1$ компонент связности $\Lambda_1, \dots, \Lambda_l$, каждая из которых является топологическим вложением окружности, и $f(\Lambda_i) = \Lambda_{i+1}$, $i = 1, \dots, l-1$, а $f(\Lambda_l) = \Lambda_1$.

⁴ Непрерывная зависимость от частной траектории понимается в смысле метрики $\bar{\rho}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{\rho(x_i, y_i)}{2^{|i|}}$

Л е м м а 3.1. Пусть Λ_i — компонента связности базисного множества Λ , удовлетворяющего условиям теоремы 1.1., и $p \in \Lambda_i$ — периодическая точка периода k отображения f . Тогда для отображения f^k неустойчивое многообразие $W_{\bar{p},\varepsilon}^u$ точки p , ассоциированное с траекторией $\bar{p} = \{\dots, p, p, p, \dots\}$ содержится в Λ_i .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как в силу аксиомы A множество Λ является гиперболическим, то в силу предложения 2.2. для эндоморфизма f^k существуют локальное устойчивое $W_{p,\varepsilon}^s$ и локальное неустойчивое $W_{\bar{p},\varepsilon}^u$ многообразия такие, что $f^k(W_{p,\varepsilon}^s) \subset W_{p,\varepsilon}^s$ и $f^k(W_{\bar{p},\varepsilon}^u) \supset W_{\bar{p},\varepsilon}^u$. Так как отображение f^k не содержит в Λ критических точек, то f^k в некоторой окрестности точки p является локальным диффеоморфизмом. Тогда в силу теоремы Гробмана — Хартмана отображение f^k в некоторой окрестности точки p сопряжено линейному седлу. Из этого следует, что $W_{p,\varepsilon}^s$ и $W_{\bar{p},\varepsilon}^u$ являются единственными инвариантными одномерными подмногообразиями, проходящими через точку p . Так как множество Λ_i также является инвариантным подмногообразием, проходящим через точку p , то необходимо должно выполняться либо включение $W_{p,\varepsilon}^s \subset \Lambda_i$, либо включение $W_{\bar{p},\varepsilon}^u \subset \Lambda_i$.

Покажем, что включение $W_{p,\varepsilon}^s \subset \Lambda_i$ выполняться не может. Предположим противное, тогда устойчивое многообразие $W_{p,\varepsilon}^s$ является такой окрестностью точки p в базисном множестве Λ , что любая другая точка из этой окрестности стремится к точке p под действием эндоморфизма f^k . Получаем противоречие с тем, что периодические точки отображения f^k плотны в Λ .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

С л е д с т в и е 3.1. Если Λ — базисное множество, удовлетворяющее условиям теоремы 1.1., то Λ , является гладким подмногообразием.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Данный факт немедленно вытекает из того, что в силу аксиомы A периодические точки плотны в Λ , а неустойчивые многообразия $W_{\bar{p},\varepsilon}^u$ периодических точек, ассоциированных с периодическими траекториями, являются гладкими подмногообразиями.

С л е д с т в и е 3.2. Если Λ — базисное множество, удовлетворяющее условиям теоремы 1.1., то для любой точки $x \in \Lambda$ локальное устойчивое многообразие W_x^s пересекается с Λ трансверсально.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Так как $W_{x,\varepsilon}^s$ и $W_{\bar{x},\varepsilon}^u$ касаются E_x^s и E_x^u , а E_x^s и E_x^u пересекаются трансверсально, то в силу доказанной леммы данный факт верен для периодических точек базисного множества Λ . Кроме того, в силу того, что периодические точки плотны в Λ , а локальное устойчивое многообразие W_x^s непрерывно зависит от точки $x \in \Lambda$, то данный факт верен для любой точки $x \in \Lambda$.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.1.

Покажем, что Λ является аттрактором. В силу следствия 3.2. каждая точка $x \in \Lambda$ имеет локальное устойчивое многообразие W_x^s , трансверсальное базисному множеству Λ . Рассмотрим объединение $U = \bigcup_{x \in \mathcal{S}_i} W_{x,\varepsilon}^s$. В силу предложения 2.2. локальное устойчивое многообразие $W_{x,\varepsilon}^s$ непрерывно зависит от точки x , поэтому множество U имеет вид локального прямого произведения отрезка на отрезок. Кроме того, из условия 3.a предложения 2.2. следует, что $f(\text{cl}U) \subset \text{Int}U$. Свойство $\bigcap_{n=0}^{\infty} f^n(\text{cl}U) = \Lambda$ следует непосредственно из определения локального устойчивого многообразия. Таким образом, базисное множество Λ действительно является аттрактором для эндоморфизма f .

Рассмотрим произвольную компоненту связности Λ_i базисного множества Λ и покажем, что ограничение $f^l|_{\Lambda_i}$ является растягивающим отображением окружности

Покажем, что в рассматриваемом случае локальное неустойчивое $W_{\bar{x},\varepsilon}^u$ многообразие произвольной точки $x \in \Lambda_i$ не зависит от выбора частной траектории \bar{x} , ассоциированной с точкой x . Для этого докажем включение $W_{\bar{x},\varepsilon}^u \subset \Lambda_i$. Предположим противное, то есть, что существует точка $x \in \Lambda_i$ и такая ассоциированная с ней частная траектория $\bar{x}' \subset \Lambda$, что $W_{\bar{x}',\varepsilon}^u \not\subset \Lambda_i$. Выберем точку y такую, что $y \in W_{\bar{x}',\varepsilon}^u$ и $y \notin \Lambda_i$, и чтобы выполнялось включение $y \in U$, где U — окрестность окружности Λ_i из определения аттрактора. Тогда по определению аттрактора $\rho(f^{ln}(y), \Lambda_i) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Выберем такое $k > 0$, $k \in \mathbb{N}$ что $y \notin \bigcap_{n=0}^k f^{ln}(U)$. По определению неустойчивого многообразия существует точка

$z \in W_{\bar{x}',\varepsilon}^u$ такая, что $f^{lt} = y$ для некоторого $t \in \mathbb{N}$, и $z \in \bigcap_{n=0}^k f^{ln}(U)$. Но тогда точка y обязана принадлежать множеству $\bigcap_{n=0}^k f^{ln}(U)$, что противоречит выбору точки y .

Так как окружность Λ_i является гладкой, то можно рассмотреть касательное пространство к данной окружности $T_{\Lambda_i}M^2$. В силу того, что неустойчивые многообразия точек Λ_i не зависят от выбранной траектории, и в силу пункта 1 предложения 2.2. в касательном пространстве $T_{\Lambda_i}M^2$ для отображения f^l имеют место оценки $\|Df^{ln}(v)\| \geq (1/C)\mu^{-n}\|v\|$, $\mu < 1$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$, $v \in T_{\Lambda_i}M^2$. Следовательно ограничение $f^l|_{\Lambda_i}$ является растягивающим отображением в смысле определения 1.5.

Доказательство закончено.

Доказательство теоремы 1.2.

Покажем, что Λ является репеллером. Заметим, что в силу того, что размерность неустойчивого многообразия совпадает с размерностью многообразия M^2 , неустойчивое многообразие произвольной точки x не зависит от выбора конкретной частной траектории $\bar{x} \subset \Lambda$. Положим $U = \bigcup_{x \in \Lambda} W_{x,\varepsilon}^u$ и рассмотрим замыкание $\text{cl}U$. Свойство $\bigcap_{n=0}^{-\infty} f^n(\text{cl}U) = \Lambda$ следует непосредственно из определения локального неустойчивого многообразия. Положим $\tilde{U} = f^{-1}(\text{cl}U) \cap \text{cl}U$. В силу пункта 3.6 предложения 2.2. выполняются включения $\tilde{U} \subset \text{Int}U$. Следовательно, окружность Λ действительно является репеллером эндоморфизма f .

Рассмотрим произвольную компоненту связности Λ_i базисного множества Λ . Аналогично теореме 1.1. выберем $l > 0$ так, чтобы $f^l(\Lambda_i) = \Lambda_i$. Покажем, что сужение $f^l|_{\Lambda_i}$ является растягивающим отображением окружности. В силу того, что для любых двух точек $x, y \in \Lambda_i$ таких, что $\rho(x, y) < \varepsilon$ верно и что $y \in W_{x,\varepsilon}^u$, то в силу предложения 2.2. на множестве Λ_i для некоторого $\mu > 1$ будет выполняться неравенство $\rho(f^l(x), f^l(y)) > \mu\rho(x, y)$. Таким образом ограничение $f^l|_{\Lambda_i}$ является растягивающим отображением в смысле определения 1.6.

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Д. В. Аносов, “Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны”, *Тр. мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР*, **90** (1967), 1-210.
2. Д. В. Аносов, *Гладкие динамические системы*, Мир, 1977.

3. В. З. Гринес, Е. В. Жужома, “Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **66**:2 (2002), 3-66.
4. В. З. Гринес, О. В. Починка, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Регулярная и хаотическая динамика (Москва: Ижевский институт компьютерных исследований), 2011.
5. V. Z. Grines, O. V. Pochinka, V. S. Medvedev, Y. A. Levchenko, “The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets”, *Nonlinearity*, **28** (2015), 4081-4102.
6. G. Ikegami, “Hyperbolic sets and axiom A for endomorphisms”, *Proc. of the Institute of the Natural Sciences (Nihon Univ)*, **26** (1991), 69-86.
7. А. Б. Каток, Б. Хасселблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, "Факториал", 1999.
8. М. Ю. Любич, “Динамика рациональных преобразований: топологическая картина”, *УМН*, **41**:4 (1986), 35-95.
9. А. Г. Майер, “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч. Зап. ГГУ.*, **12** (1939), 215-229.
10. R. Mane, C. Pugh, “Stability of endomorphisms”, *Lecture Notes in Math*, **468** (1975), 175-184.
11. Дж. Милнор, *Голоморфная динамика: Вводные лекции*, Регулярная и хаотическая динамика, 2000.
12. Z. Nitecki, “Nonsingular endomorphisms of the circle”, *Global Analysis”, Proc. Symp. in Pure Math.*, **14** (1970), 203-220.
13. Р. В. Плыкин, “О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла”, *Матем. сб.*, **84**:2 (1971), 301-312.
14. F. Przytycki, “Anosov endomorphisms”, *Stud. Math.*, **58**:3 (1976), 249-285.
15. F. Przytycki, “On Ω -stability and structural stability of endomorphisms satisfying Axiom A”, *Stud. Math.*, **60** (1977), 61-77.
16. S. Smale, “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**:76 (1967), 747-817.
17. M. Shub, “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. J. Math*, **91** (1969), 175-199.
18. М. В. Якобсон, “О гладких отображениях окружности в себя”, *Матем. Сб.*, **85** (1970), 163-188.

Дата поступления 9.05.2016

On structure of one dimensional basic sets of endomorphisms of surfaces

© V. Z. Grines⁵, E. D. Kurenkov⁶.

Abstract. This paper deals with the study of the dynamics in the neighborhood of one-dimensional basic sets of C^k , $k \geq 1$, endomorphism satisfying axiom of A and given on surfaces. It is established that if one-dimensional basic set of endomorphism f has the type $(1, 1)$ and is a one-dimensional submanifold without boundary, then it is an attractor smoothly embedded in ambient surface. Moreover, there is a $k \geq 1$ such that the restriction of the endomorphism f^k to any connected component of the attractor is expanding endomorphism. It is also established that if the basic set of endomorphism f has the type $(2, 0)$ and is a one-dimensional submanifold without boundary then it is a repeller and there is a $k \geq 1$ such that the restriction of the endomorphism f^k to any connected component of the basic set is expanding endomorphism.

Key Words: axiom A , endomorphism, basic set

⁵ Professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; vgrines@hse.ru

⁶ Laboratory TAPRADESS, National Research University Higher School of Economics; ekurenkov@hse.ru

УДК 517.925.53

Исследование устойчивоподобных свойств «частичного» положения равновесия одной нелинейной системы дифференциальных уравнений.

© В. И. Добкин¹, В. Н. Щенников², Е. В. Щенникова³

Аннотация. Исследуется асимптотическая устойчивость и устойчивость «частичного» положения равновесия при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени, нелинейной системы дифференциальных уравнений, система первого приближения которой содержит однородные векторные функции порядка $\mu > 1$.

Ключевые слова: асимптотическая устойчивость, возмущения, функция Ляпунова, фазовые переменные, положение равновесия

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= X_1^{(\mu)}(y) + X_2^{(\mu)}(z) + F_1(t, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= X_3^{(\mu)}(y) + X_4^{(\mu)}(z) + F_2(t, y, z),\end{aligned}\tag{1.1}$$

где $X_1^{(y)}, X_2^{(z)}, X_3^{(y)}, X_4^{(z)}$ является однородными векторными функциями порядка $\mu = p/q > 1$, p и q - нечётные. Векторные функции $F_1(t, y, z)$ и $F_2(t, y, z)$ определены в области $G = \{t, y, z : t \geq t_0 \geq 0, \|y\| \leq h, \|z\| \leq \infty\}$, $y = (y_1, \dots, y_m)^T$, $z = (z_1, \dots, z_{n-m})^T$. Будем считать, что правые части системы (1.1) удовлетворяют условиям существования и единственности решения задачи Коши в области G . Индекс T означает транспонирование.

Как известно [1], если для системы (1.1) изучать вопрос об устойчивоподобных свойствах решений по части фазовых переменных (например, относительно y_1, \dots, y_m), то система (1.1) в первом приближении должна иметь вид

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= X_1^{(\mu)}(y), \\ \frac{dz}{dt} &= X_3^{(\mu)}(y) + X_4^{(\mu)}(z),\end{aligned}\tag{1.2}$$

Предположим далее, что $y = 0$ является «частичным» положением равновесия системы (1.1), т.е. $X_1^{(\mu)}(0) \equiv 0$, $F_1(t, 0, z) \equiv 0$. Следует отметить, что определение «частичного» положения равновесия дано в монографии [2]. Пусть $\|F_1(t, y, z)\| \leq \alpha_1 \|y\|^\mu$, где $\alpha_1 > 0$ есть некоторое вещественное число. Будем считать, что здесь и далее по тексту норма вектора является евклидовой.

Помимо указанных предположений выполняется условие: система

$$\frac{dy}{dt} = X_1^{(\mu)}(y), X_1^{(\mu)}(0) \equiv 0,\tag{1.3}$$

¹ Магистр кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; valeradz@rambler.ru

² Профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; du@math.mrsu.ru

³ Доцент кафедры фундаментальной информатики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; schennikova8000@yandex.ru

асимптотически устойчива. Тогда согласно условиям теорем [3] и [4] об асимптотической устойчивости нулевого решения системы (1.3) для этой системы существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям:

$$\begin{aligned} a_1 \|y\|^{m+1-\mu} &\leq V(y) \leq a_2 \|y\|^{m+1-\mu}, \\ \left\| \frac{\partial V(y)}{\partial y} \right\| &\leq \alpha_3 \|y\|^{m-\mu}, \\ \frac{dV(y)}{dy} \Big|_{(1.3)} &\leq -\alpha_4 \|y\|^m, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где a_1 , a_2 , a_3 и a_4 - положительные вещественные числа. Здесь $m > 0$ - достаточно большое чётное вещественное число.

С использованием функции $V(y)$, удовлетворяющей условиям (1.4), докажем асимптотическую устойчивость системы (1.1) относительно фазовых переменных y_1, \dots, y_m , (асимптотическую y - устойчивость). Для этого найдём полную производную по времени t вдоль решений системы (1.1), т.е.

$$\frac{dV(y)}{dy} \Big|_{(1.1)} \leq -\alpha_3 \|y\|^m + (\text{grad}_y V(y), F_1(t, y, z)). \quad (1.5)$$

С учётом оценок (1.4) и ограничений на векторную функцию $F_1(t, y, z)$ неравенство (1.5) окончательно принимает вид

$$\frac{dV(y)}{dy} \Big|_{(1.2)} \leq (-a_4 + a_3 \alpha_1) \|y\|^m. \quad (1.6)$$

Таким образом, если $-a_4 + a_3 \alpha_1 < 0$, то нулевое решение системы (1.1) будет асимптотически устойчивым относительно фазовых переменных y_1, \dots, y_m , (асимптотически y - устойчивым).

Этот вывод следует из теоремы Ляпунова об асимптотической устойчивости [3].

Далее докажем, что асимптотическая y - устойчивость в этом случае имеет степенной вид. Для этого введём в неравенстве (1.6) преобразование $\rho = (V(x))^{\frac{1}{m+1-\mu}}$ [1]. Тогда неравенство (1.6) получит вид

$$\frac{dV}{dt} \leq -\gamma \frac{V^{\frac{1}{m+1-\mu}}}{a_2^{\frac{m}{m+1-\mu}}}, \quad (1.7)$$

где $\gamma = -a_4 + a_3 \alpha_1$. Интегрируя неравенство (1.7), получим

$$V(x)^{\frac{1-\mu}{m+1-\mu}} \leq (V(x_0))^{\frac{1-\mu}{m+1-\mu}} + \gamma_1(t - t_0),$$

где $\gamma_1 = \frac{1-\mu}{m+1-\mu} \cdot \frac{-a_4 + a_3 \alpha_1}{a_2^{\frac{m}{m+1-\mu}}}$. С учётом неравенств (1.4) в результате будем иметь

$$\|x(t)\| \leq \left[\left(\frac{a_2}{a_1} \right)^{\frac{1-\mu}{m+1-\mu}} \|x_0\|^{\frac{m(1-\mu)}{m+1-\mu}} + \frac{\gamma_1}{a_1^{\frac{m(1-\mu)}{m+1-\mu}}} (t - t_0) \right]^{\frac{-m(\mu-1)}{m+1-\mu}}.$$

Таким образом получено, что асимптотическая y - устойчивость системы (1.1) имеет степенной характер. Теорема доказана.

Теорема 1. Если для системы (1.1) выполняются ограничения на векторную функцию $F_1(t, y, z)$, существует функция $V(y)$, удовлетворяющая условиям (1.4), и $\gamma =$

$= -a_4 + a_3\alpha_1 < 0$ то «частичное» положения равновесия системы (1.1) асимптотически y – устойчиво степенного типа.

Примечание. Если предположить, что $\|F_1(t, y, z)\| \leq \alpha_1 \|y\|^{m+k}$, $k > 0$, то в этом случае теорема 1 будет так же справедлива с тем лишь отличием, что асимптотическая y – устойчивость системы (1.1) будет иметь локальный характер.

В дальнейшем займёмся исследованием вопроса устойчивости «частичного» положения равновесия $y = 0$ при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени. Для этого приведём необходимые определения для системы более общего вида, чем система (1.1).

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= f_1(y) + F_1(t, y, z), \\ \frac{dz}{dt} &= f_2(y) + f_3(z) + F_2(t, y, z), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где $f_1(0) \equiv 0, F_1(t, 0, z) \neq 0$.

Будем предполагать, что правые части системы (1.8) определены в области $G_1 = \{t, y, z : t \geq t_0 \geq 0, \|y\| \leq h, \|z\| < \infty, h > 0\}$, и удовлетворяют условиям, обеспечивающих существование и единственность решения задачи Коши в области G_1 . Будем также считать, что векторная функция допускает оценку $\|F_1(t, y, z)\| \leq v^*$, где $v^* > 0$ является вещественной постоянной.

Предположим, что все решения системы существуют при всех $t \geq t_0 \geq 0$. Из задания системы (1.8) следует, что $y = 0$ является её «частичным» положением равновесия.

Определение. Будем говорить, что «частичное» положение равновесия $y = 0$ системы (1.1) устойчиво при постоянных возмущениях, малых в каждый момент времени, если для любых $\epsilon > 0$ и $t_0 \geq 0$ можно найти $\delta(\epsilon, t_0) > 0$ и $v^*(t_0, \epsilon_0) > 0$ такие, что произвольная фазовая переменная $y(t, t_0, y_0, z_0)$ решения системы (1.8) с $\|y_0\| \leq \delta, \|z\| < \infty$, системы (1.1), для которого в области G_1 выполняется условие $\|F_1(t, y, z)\| < v^*$, $v^* > 0$ удовлетворяет условию $\|y(t, t_0, y_0, z_0)\| < \epsilon$ при $t \geq t_0 \geq 0$.

Примечание. Решение системы (1.8) является векторной функцией $(y(t, t_0, y_0, z_0))^T, (z(t, t_0, y_0, z_0))^T$. В определение включено только $y(t, t_0, y_0, z_0)$.

Предположим, что для системы

$$\frac{dy}{dt} = f_1(y), f_1(0) \equiv 0, \quad (1.9)$$

существует функция Ляпунова $V_1(y)$, удовлетворяющая условиям

$$a(\|y\|) \leq V_1(y) \leq b(\|y\|), \quad (1.10)$$

$$\left. \frac{dV_1(y)}{dt} \right|_{(1.9)} \leq -c(\|y\|). \quad (1.11)$$

Здесь функции $a(\|y\|)$ и $b(\|y\|)$ определённо-положительные и относятся к классу функций Хана, $c(\|y\|)$ – определённо-положительная функция, а полная производная по времени на решениях системы (1.9) функции $V_1(y)$ определяется по формуле

$$\left. \frac{dV_1(y)}{dt} \right|_{(1.9)} = \overline{\lim}_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \{V_1(y + hf_1(y)) - V_1(y)\},$$

где $V_1(y) \in C_{lip}(\|y\| \leq h)$.

Теорема 2. Если для системы (1.9) существует функция Ляпунова $V = V_1(y)$, удовлетворяющая условиям (1.10) - (1.11), то при достаточно малом $v^* > 0$, «частичное» положение равновесия $y = 0$ системы (1.8) будет устойчивым при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени.

Доказательство. С учётом оценок (1.10) - (1.11) и того, что функция $V_1(y)$ является липшицевой, полная производная $V(y)$ по времени t на решениях системы (1.8) имеет оценку

$$\left. \frac{dV_1(y)}{dt} \right|_{(1.8)} \leq -c(\|y\|) + Lv^*. \quad (1.12)$$

Выберем далее некоторое $\epsilon \in (0, h)$. Положим, что $\delta(\epsilon) = b^{-1}(a(\epsilon))$, $v^* = \frac{c_1(b^{-1}(a(\epsilon)))}{L}$. Здесь $L > 0$ - постоянная Липшица. Если в области G_1 выполняется условие $\|r(t)\| \leq v^*$, то путём выбора $\delta(\epsilon)$ из (1.12) при достаточно малых v^* и с учётом того, что L есть ограниченная величина, можно добиться того, что будет справедливо неравенство

$$\left. \frac{dV_1(y(t, t_0, y_0, z_0))}{dt} \right|_{V(y) \equiv a(\epsilon)} < 0. \quad (1.13)$$

Рассмотрим далее фазовую переменную $y(t, t_0, y_0, z_0)$ решения системы (1.8) при $t_0 \geq 0$, $\|y_0\| < h$, $\|z_0\| < \infty$. С учётом (1.12) и в силу того, что $(a(\|y\|) \wedge (\|y\|))$ есть функция Хана, можно добиться того, что $V_1(y_0) < a(\epsilon)$. Докажем, что $V_1(y(t, t_0, y_0, z_0)) < a(\epsilon)$ при $t \geq t_0$.

Доказательство проведём от противного, т.е. пусть при $t \in t_0, t_1$ выполняется неравенство (1.13), а при $t = t_1$, $V_1(y(t, t_0, y_0, z_0)) = a(\epsilon)$. Но тогда будет $\dot{V}_1(y(t, t_0, y_0, z_0)) > 0$. В результате получили противоречие с (1.9). Следовательно, теорема доказана.

Доказательство закончено.

Рассмотрим систему (1.1) Предположим, что и система первого приближения имеет вид (1.2). Пусть теперь векторная функция $F_1(t, y, z)$ в системе (1.1) имеет вид

$$F_1(t, y, z) = f^{(1)}(t, y, z) + \omega(t),$$

где $\|f^{(1)}(t, y, z)\| \leq \alpha_2 \|y\|^\mu$ при $\|y\| \leq r$, $r < \infty$, $r > 0$, $f^{(1)}(t, 0, z) \equiv 0$, а $\omega(t)$ определяет постоянно действующие возмущения, малые в каждый момент времени, $\|\omega(t)\| < v_1$, $v_1 > 0$ - малое вещественное число.

Снова предположим, что для системы (1.3) существует функция $V(y)$, удовлетворяющая условиям (1.4). Выберем для системы (1.1) функцию Ляпунова $V(y)$, удовлетворяющую условиям (1.4). Тогда будем иметь

$$\left. \frac{dV(y)}{dt} \right|_{(1.1)} \leq -a_4 \|(y)\|^m + a_3 \|y\|^{m-\mu} \cdot a_2 \|y\|^\mu + a_3 \|y\|^{m-\mu} \cdot v_1 = (-a_4 + a_3 \alpha_2) \|y\|^m + a_3 v_1 \|y\|^{m-\mu}. \quad (1.14)$$

Пусть α_2 такое, что в (1.14) $-a_4 + a_3 \alpha_2 < 0$. Выберем $v_1 > 0$ таким, чтобы выполнилось неравенство

$$\left. \frac{dV(y)}{dt} \right|_{(1.1)} < 0$$

при $r_1 \leq \|y\| \leq r$, r_1 и r - положительные.

Исходя из теоремы об устойчивости при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени [4],[5],[6], неравенство (1.14) за счёт выбора величины $v_1 > 0$ имеет место в области $r_1 \leq \|y\| \leq r$. Таким образом, теорема доказана.

Теорема 3. «Частичное» положение равновесия $y = 0$ системы (1.7) устойчиво при постоянно действующих возмущениях, малых в каждый момент времени, если для системы (1.9) существует функция Ляпунова $V(y)$, удовлетворяющая условиям (1.10) - (1.11), $-a_4 + a_3 a_2 < 0$ и $v_1 > 0$ - достаточно малое в каждый момент времени.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Шенников В. Н., «Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями», *Дифференциальные уравнения*, 1984, № 8, 1645–1649.
2. Воротников В. И., Румянцев В. В., *Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и предположения*, Научный мир, М., 2001, 320 с.
3. Зубов В. И., *Устойчивость движения*, Высшая школа, М., 1973, 272 с.
4. Красовский Н. Н., *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Физматиз, М., 1959, 212 с.
5. Румянцев В. В., Озиранер А. С., *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных*, Наука, М., 1987, 256 с.
6. Малкин И. Г., *Некоторые задачи теории устойчивости движения*, Наука, М., 1966, 632 с.

Дата поступления 29.02.2016

Research of stability-similar properties of partial-equilibrium state of a system of nonlinear differential equations

© V. I. Dobkin⁴, V. N. Shchennikov⁵, E. V. Shchennikova⁶

Abstract. We study the asymptotic stability and stability of partial equilibrium state under constantly acting perturbations, small at any time, of nonlinear system of differential equations, for which a system of the first approximation includes homogeneous vector-functions of order $\mu > 1$.

Key Words: asymptotic stability, perturbations, Lyapunov function, phase variables, equilibrium position

⁴ Master of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; valeradz@rambler.ru

⁵ Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; du@math.mrsu.ru

⁶ Assistant professor of Fundamental Informatics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; schennikova8000@yandex.ru

УДК 514.7

Критерий псевдоримановости слоения с трансверсальной линейной связностью

© Н. И. Жукова¹, К. И. Шеина²

Аннотация. Получены необходимые и достаточные условия того, чтобы слоение коразмерности q на n -мерном многообразии с трансверсальной линейной связностью допускало трансверсальную инвариантную псевдориманову метрику заданной сигнатуры, параллельную относительно этой связности. В частности, получен критерий римановости слоения с трансверсальной линейной связностью.

Ключевые слова: слоение, линейная связность, группа голономии связности, ростковая группа голономии слоя

1. Введение

В настоящее время римановы слоения образуют наиболее глубоко изученный класс среди слоений с трансверсальными геометрическими структурами. Работы Б. Рейнхарта, А. Хефлигера, Э. Жиса, И. Карьера, Е. Салем, В. Сергеевского и многих других, а также известные монографии П. Молино [1], Ф. Тондеура [2] и В. Ровенского [3] представляют собой существенный вклад в исследование римановых слоений.

Р.А. Волак в [4] поставил вопрос о нахождении условий, при выполнении которых слоение является римановым.

Р.А. Волаком доказано, что любое полное компактное G -слоение конечного типа является римановым [4]. Аналогичное утверждение доказано для слоений, допускающих трансверсальную систему обыкновенных дифференциальных уравнений произвольного порядка [5] и для полных картановых слоений [6]. В ([7], теорема 5) указан ряд условий, эквивалентных римановости гладкого компактного слоения.

Известен критерий римановости для конформных слоений (M, F) коразмерности q , $q \geq 3$, согласно которому слоение (M, F) риманово тогда и только тогда, когда все его группы голономии относительно компактны ([8], Теорема 1). Этот результат верен и для более широкого класса слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один ([9], Теорема 3).

Псевдориманова геометрия коренным образом отличается от римановой геометрии [10], [11]. Одна из причин — некомпактность псевдоортогональной группы $O(k, n - k)$, соответствующей n -мерной псевдоримановой геометрии, в отличие от ортогональной группы $O(n)$, соответствующей римановой геометрии. В настоящее время псевдоримановы слоения образуют мало исследованный класс слоений.

Пусть (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N) -коциклом, причем связность может иметь кручение (см. определение 2.1.), коразмерность слоения (M, F) равна q , а M — n -мерное многообразие, $0 \leq q \leq n$.

Целью данной работы является нахождение необходимых и достаточных условий для того, чтобы слоение с трансверсальной линейной связностью было псевдоримановым и римановым.

¹ Профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; nzjukova@hse.ru

² Стажер-исследователь кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; ksheina@hse.ru

Обозначим через $G = GL(q, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^q$ полупрямое произведение общей линейной группы $GL(q, \mathbb{R})$ и векторной группы \mathbb{R}^q . Группу G можно интерпретировать как группу всех аффинных преобразований $Aff(A^q)$ q -мерного аффинного пространства A^q , а $H = GL(q, \mathbb{R})$ как стационарную подгруппу аффинной группы $Aff(A^q)$ в некоторой точке.

Как известно, любое слоение (M, F) с трансверсальной линейной связностью является картановым слоением типа (G, H) (см. [12]). Для него определено слоеное расслоение, которое называется *слоеным расслоением трансверсальных реперов*. Оно представляет собой главное $GL(q, \mathbb{R})$ -расслоение с проекцией $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$, со слоением $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ и индуцированной $GL(q, \mathbb{R})$ -связностью Q , обладающее дополнительными свойствами (Предложение 4.1.). При этом слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ называется *поднятым слоением* по отношению к (M, F) . Слоеное расслоение трансверсальных реперов используется нами далее в этой работе.

Основным результатом данной работы является доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а 1.1. Пусть (M, F) — слоение произвольной коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N) -коциклом, а Q — индуцированная связность в слоеном расслоении трансверсальных реперов $\mathcal{R}(M, H)$. Тогда для того, чтобы слоение (M, F) было псевдоримановым, заданным (N, g^N) -коциклом, где g^N — псевдориманова метрика сигнатуры $(k, q - k)$, $0 \leq k \leq q$, параллельная относительно связности ∇^N , необходимо и достаточно существования точки $u \in \mathcal{R}$ такой, что группа голономии $\Phi(u)$ связности Q с опорной точкой u принадлежит псевдоортогональной подгруппе $O(k, q - k)$ группы $GL(q, \mathbb{R})$.

С л е д с т в и е 1.1. Пусть (M, F) — слоение произвольной коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N) -коциклом. Для того, чтобы (M, F) было лоренцевым слоением, заданным (N, g^N) -коциклом, где лоренцева метрика g^N параллельна относительно ∇^N , необходимо и достаточно, чтобы группа голономии $\Phi(u)$, $u \in \mathcal{R}$, расслоения трансверсальных реперов $\mathcal{R}(M, H)$ была подгруппой группы $O(1, q - 1)$.

С л е д с т в и е 1.2. Пусть (M, F) — слоение произвольной коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N) -коциклом. Слоение (M, F) является римановым, заданным (N, g) коциклом, где $\nabla g = 0$, тогда и только тогда, когда группа голономии $\Phi(u)$, $u \in \mathcal{R}$, расслоения трансверсальных реперов $\mathcal{R}(M, H)$ является относительно компактной подгруппой группы Ли $GL(q, \mathbb{R})$.

Напомним, что линейная связность ∇ на псевдоримановом многообразии (M, g) называется *метрической*, если метрика g параллельна относительно этой связности, то есть, если $\nabla g = 0$.

В случае, когда (M, F) — нульмерное слоение, из Теоремы 1.1. вытекает следующий критерий Б.Г. Шмидта [13] для связности без кручения.

С л е д с т в и е 1.3. Линейная связность без кручения является метрической связностью псевдоримановой метрики заданной сигнатуры тогда и только тогда, когда группа голономии этой связности является подгруппой псевдоортогональной группы данной сигнатуры.

Напомним, что для любого подмножества V слоеного многообразия M объединение $N(U_i)$ слоев слоения (M, F) , пересекающих V , называется *насыщением множества V* .

Пусть (U, φ) — карта на многообразии M , адаптированная к слоению (M, F) , $\varphi(U) = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^q$, причем $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{c\})$ — локальные слои слоения. При этом подмногообразие $D \times = \varphi^{-1}(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ называется трансверсальным диском в U .

Для слоений с трансверсальной линейной связностью мы доказываем следующий критерий псевдоримановости, носящий локально-глобальный характер: глобальный по слоям и локальный по трансверсалам.

Т е о р е м а 1.2. Пусть (M, F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, (U, φ) — произвольная адаптированная карта многообразия M и D — трансверсальный диск в U . Слоение $(N(U), F)$, индуцированное на насыщении $N(U)$ множества U , является псевдоримановым относительно трансверсальной псевдоримановой метрики сигнатуры $(k, q - k)$, параллельной относительно трансверсальной связности, тогда и только тогда, когда существует сечение $s : D \rightarrow \mathcal{R}$ такое, что для любой точки $u \in s(D)$ подгруппа $H(u)$ группы $H = GL(q, \mathbb{R})$, оставляющая инвариантным слой $\mathcal{L}(u)$ поднятого слоения, принадлежит подгруппе $O(k, q - k)$ группы H .

С л е д с т в и е 1.1. Если для слоения (M, F) с трансверсальной линейной связностью существует адаптированная карта (U, φ) многообразия M , обладающая свойствами:

1) существует сечение $s : D \rightarrow \mathcal{R}$ трансверсального диска D в U такое, что для любой точки $u \in s(D)$ подгруппа $H(u)$ группы $H = GL(q, \mathbb{R})$, оставляющая инвариантным слой $\mathcal{L}(u)$ поднятого слоения, принадлежит $O(k, q - k)$;

2) каждый слой слоения пересекает U ;

то (M, F) — псевдориманово слоение с трансверсальной инвариантной псевдоримановой метрикой сигнатуры $(k, q - k)$, причем эта метрика параллельна относительно исходной трансверсальной линейной связности.

С л е д с т в и е 1.2. Пусть (M, F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, (U, φ) — произвольная адаптированная карта многообразия M и D — трансверсальный диск в U . Слоение $(N(U), F)$, индуцированное на насыщении $N(U)$ множества U , является римановым тогда и только тогда, когда существует сечение $s : D \rightarrow \mathcal{R}$ такое, что для любой точки $u \in s(D)$ подгруппа $H(u)$ группы $H = GL(q, \mathbb{R})$, оставляющая инвариантным слой $\mathcal{L}(u)$ поднятого слоения, принадлежит ортогональной подгруппе $O(q)$ группы H .

Следуя [14], мы обозначаем через $P(N, H)$ главное H -расслоение с проекцией $P \rightarrow N$.

Через $\mathfrak{X}(M)$ обозначается множество гладких векторных полей, а через $\mathfrak{F}(M)$ — алгебра гладких функций на многообразии M . Если \mathfrak{M} — гладкое распределение на многообразии M , то через $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ будем обозначать множество векторных полей на M , касательных к \mathfrak{M} .

Пусть $f : K \rightarrow M$ — субмерсия многообразий и \mathfrak{M} — распределение на M , то через $\widetilde{\mathfrak{M}} = f^*\mathfrak{M}$ обозначается распределение на K такое, что $\widetilde{\mathfrak{M}} := \{\widetilde{\mathfrak{M}}_u \mid u \in M\}$, где $\widetilde{\mathfrak{M}}_u := \{X \in T_u K \mid f_{*u}(X) \in \mathfrak{M}_x, x = f(u)\}$, f_{*u} — дифференциал отображения f в точке u .

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-01-00312, и Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году, проект № 98.

2. Основные понятия

2.1. Задание слоения N -коциклом

Пусть N — q -мерное многообразие и M — гладкое n -мерное ($0 \leq q \leq n$) многообразие. В отличие от M связность топологического пространства N не предполагается.

N -коциклом называется семейство $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{I}}\}$, обладающее свойствами:

- Множество $\{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ образует открытое покрытие M .
- Отображения $f_i : U_i \rightarrow N$ являются субмерсиями на $V_i = f_i(U_i) \subset N$ со связными слоями.
- Если $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, то существует диффеоморфизм $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \rightarrow f_j(U_i \cap U_j)$, удовлетворяющий равенству $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$ для всех $x \in U_i \cap U_j$.

Семейство всех локальных слоев субмерсий f_i из максимального N -коцикла, содержащего данный N -коцикл $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{I}}\}$, образует базу новой топологии ζ в M . Компоненты линейной связности $L_a, a \in A$, топологического пространства (M, ζ) образуют разбиение F многообразия M , которое называется слоением, заданным N -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{I}}\}$.

О п р е д е л е н и е 2.1. Если на многообразии N существует такая псевдориманова метрика g_N сигнатуры $(k, q - k)$, что каждое локальное преобразование γ_{ij} является изоморфизмом псевдоримановых многообразий, индуцированных на открытых подмножествах, то слоение (M, F) называется псевдоримановым слоением трансверсальной сигнатуры $(k, q - k)$, а метрика g_N называется трансверсальной метрикой. Если при этом g_N — риманова метрика, то слоение (M, F) называется римановым.

2.2. Определение слоения с трансверсальной линейной связностью

Задание связности в главном расслоении линейных реперов эквивалентно заданию оператора

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y,$$

где $\nabla_X Y$ — ковариантная производная векторного поля Y вдоль X [14]. Пара (M, ∇) называется многообразием линейной или аффинной связности, а ∇ — линейной связностью на M .

Диффеоморфизм $f : M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$ называется изоморфизмом многообразий линейной связности $(M^{(1)}, \nabla^{(1)})$ и $(M^{(2)}, \nabla^{(2)})$, если

$$f_*(\nabla_X^{(1)} Y) = \nabla_{f_* X}^{(2)} f_* Y$$

для любых векторных полей $X, Y \in \mathfrak{X}(M^{(1)})$, где f_* — дифференциал отображения f .

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть слоение (M, F) задано N -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{I}}\}$. Если на многообразии N существует линейная связность ∇ такая, что каждый локальный диффеоморфизм γ_{ij} является изоморфизмом линейных связностей, индуцированных ∇ на открытых подмножествах $f_i(U_i \cap U_j)$ и $f_j(U_i \cap U_j)$, то говорят, что (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇) -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{I}}\}$.

3. Послойная псевдориманова метрика в ассоциированном векторном расслоении

Обозначим для краткости, как и выше, $GL(m, R)$ через H . Пусть $P(K, H)$ — главное H -расслоение с проекцией $p : P \rightarrow K$ над m -мерным гладким многообразием K .

Будем рассматривать точку $x \in \mathbb{R}^m$ как одностолбцовую матрицу из координат в стандартном базисе. Определим левое действие общей линейной группы $GL(m, R)$ на \mathbb{R}^m следующим образом

$$\rho : H \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^q : (A, x) \mapsto Ax, \quad (3.1)$$

где $A \in H$ — невырожденная m -мерная квадратная матрица, а Ax — произведение матриц.

Определим правое действие группы H на произведении $P \times \mathbb{R}^m$ равенством $(u, \xi) \cdot a \times = (u \cdot a, \rho(a^{-1}) \cdot \xi)$, где $(u, \xi) \in P \times \mathbb{R}^m$, $a \in H$. На пространстве орбит $E = P \times_H \mathbb{R}^m$ естественным образом индуцируется структура гладкого многообразия, а отображение $\pi_E : E \rightarrow K : (u, \xi) \cdot H \mapsto u \cdot H$ определяет локально тривиальное векторное расслоение со стандартным слоем \mathbb{R}^m , которое обозначается через $E(K, \mathbb{R}^m, H, P)$ и называется ассоциированным с H -расслоением $P(K, H)$.

В стандартном слое \mathbb{R}^m определим скалярное произведение по формуле

$$g_0(\xi, \eta) := -\xi^1 \eta^1 - \dots - \xi^k \eta^k + \xi^{k+1} \eta^{k+1} + \dots + \xi^m \eta^m \quad (3.2)$$

для любых векторов ξ, η из \mathbb{R}^m , где $\xi^T = (\xi^1, \dots, \xi^m)$, $\eta^T = (\eta^1, \dots, \eta^m)$.

Напомним, что $E_k^m = (\mathbb{R}^m, g_0)$ — псевдоевклидово векторное пространство индекса k сигнатуры $(k, m - k)$, а

$$O(k, m) := \{a \in H \mid g_0(a\xi, a\eta) = g_0(\xi, \eta) \quad \xi, \eta \in \mathbb{R}^m\}$$

псевдоортогональная подгруппа (того же индекса и сигнатуры) группы $H = GL(m, R)$.

Предположим, что в ассоциированном векторном расслоении $E(K, \mathbb{R}^m, H, P)$ задана послойная псевдориманова метрика g . Обозначим через \hat{P} множество всех точек $u \in P$ таких, что $g(u(\xi), u(\eta)) = g_0(\xi, \eta)$, где $u : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x K$, $x = \pi_E(u)$, рассматривается как отображение векторных пространств, определенное по равенству координат векторов в базисе u и в стандартном базисе в \mathbb{R}^m соответственно. Нетрудно проверить, что \hat{P} — пространство редуцированного подрасслоения со структурной группой $O(k, m - k)$.

Следующее утверждение доказывается аналогично Предложению 1.5 Главы III из [14]. Оно играет ключевую роль в доказательстве Теоремы 1.1.

Предложение 3.1. Пусть g — послойная псевдориманова метрика в векторном расслоении $E(K, \mathbb{R}^m, H, P)$ и $\hat{P}(M, O(k, m - k))$ — редуцированное подрасслоение в $P(K, H)$, определяемое указанным выше способом при помощи g . Связность \hat{Q} в \hat{P} редуцирована к связности Q в P тогда и только тогда, когда метрика g параллельна относительно связности ∇ в E , индуцированной H -связностью Q .

4. Слоеное расслоение трансверсальных реперов

Пусть, как и выше, N — возможно несвязное q -мерное многообразие, (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N) -коциклом $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ на n -мерном многообразии M .

Положим для краткости $GL(q, R) = H$. Пусть $P = P(N, GL(q, R))$ — главное H -расслоение реперов над N с проекцией $p : P \rightarrow N$. Обозначим через $P_i \times = p^{-1}(V_i)$ — подрасслоение H -расслоения P , где $V_i \times = f_i(U_i)$, и $\mathcal{R}_i \times = f_i^* P_i = \{(x, z) \in U_i \times P_i \mid f_i(x) = p(z)\}$ — прообраз расслоения P_i относительно субмерсии f_i . Тогда определены проекции $p_i : \mathcal{R}_i \rightarrow U_i : (x, z) \mapsto x$ и $f_i : \mathcal{R}_i \rightarrow P_i : (x, z) \mapsto z$, где $(x, z) \in \mathcal{R}_i$. Предположим, что на многообразии M задано q -мерное распределение \mathfrak{M} , трансверсальное слоению

F , то есть $T_x M = T_x F \oplus \mathfrak{M}_x$ для любой точки $x \in M$. Отождествим векторное фактор-расслоение TM/TF с распределением \mathfrak{M} .

Будем рассматривать репер $z = \{\varepsilon_i\}$, $i = \overline{1, q}$, в точке $v \in N$, $\varepsilon_i \in T_v N$, как отображение $z : R^q \rightarrow T_v N : \lambda^i E_i \mapsto \lambda^i \varepsilon_i$, где E_i — стандартный базис в R^q , а по i идет суммирование от 1 до q . Точку $(x, z) \in \mathcal{R}_i$ мы рассматриваем как такой базис $\{\varepsilon_\alpha\}$ в пространстве \mathfrak{M}_x , что $f_{i*x} \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha$, где $\alpha = 1, \dots, q$, $\{\varepsilon_\alpha\} = z$ — репер в точке $v = f_i(x) \in N$. Назовем пару (x, z) \mathfrak{M} -репером или трансверсальным репером в точке x .

В несвязной сумме $Y = \sqcup_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{R}_i$ введем бинарное отношение S следующим образом. Для $(x, z) \in \mathcal{R}_i, (\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{R}_j$ положим $(x, z) = S(\tilde{x}, \tilde{z})$, если выполняются следующие два условия: 1) $x = \tilde{x} \in U_i \cap U_j$ и 2) $\tilde{z} = \gamma_{ij*x} \circ z$, где γ_{ij*x} — дифференциал локального диффеоморфизма γ_{ij} в точке x .

Непосредственная проверка показывает, что введенное отношение S является отношением эквивалентности в Y . Обозначим через $\mathcal{R} = Y/S$ фактор-пространство по S и через $f : Y \rightarrow \mathcal{R}$ соответствующее фактор-отображение. Заметим, что сужение $f|_{\mathcal{R}_i} : \mathcal{R}_i \rightarrow \tilde{U}_i := f(\mathcal{R}_i)$ является биекцией для каждого $i \in \mathcal{I}$. Требуем, чтобы все сужения $f|_{\mathcal{R}_i}$ были диффеоморфизмами, мы определим структуру гладкого многообразия в \mathcal{R} .

Таким образом, семейство $\{\tilde{U}_i, \tilde{f}_i, \{\Gamma_{ij}\}\}_{i, j \in \mathcal{I}}$, где $\tilde{f}_i := f_i \circ (f|_{\mathcal{R}_i})^{-1} : \tilde{U}_i \rightarrow P_i$ и $\Gamma_{ij} : \tilde{f}_j(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j) \rightarrow \tilde{f}_i(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j) : z \mapsto \gamma_{ij*x} \circ z$, для каждого $z \in \tilde{f}_j(\tilde{U}_i \cap \tilde{U}_j)$ является P -коциклом, определяющим некоторое слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, размерность которого совпадает с размерностью слоения (M, F) .

Заметим, что $\mathcal{R}(M, H)$ — главное H -расслоение с проекцией $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$. Из определения слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ вытекает, что слои $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ посредством π покрывают соответствующие слои слоения (M, F) . При этом распределение $\tilde{\mathfrak{M}} := \pi^* \mathfrak{M}$ трансверсально слоению $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$.

Связность ∇^N на N индуцирует связность Q_0 в H -расслоении $P(N, H)$. Пусть β_0 — \mathfrak{h} -значная 1-форма, а θ_0 — каноническая 1-форма связности Q_0 на P . Равенства $\beta|_{\tilde{U}_i} := \tilde{f}_i^* \beta_0$ и $\theta|_{\tilde{U}_i} := \tilde{f}_i^* \theta_0$, где $i \in \mathcal{I}$, определяют \mathfrak{h} -значную 1-форму β и \mathbb{R}^p -значную 1-форму θ на многообразии \mathcal{R} . H -эквивариантность 1-форм β_0 и θ_0 на P влечет H -эквивариантность 1-форм β и θ на \mathcal{R} .

Пусть, как и выше, $G = H \times \mathbb{R}^q$ — полупрямое произведение группы H и абелевой группы \mathbb{R}^q , а \mathfrak{g} — алгебра Ли группы Ли G . Равенство $\omega(X) \times = \beta(X) + \theta(X)$, где $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{R})$, определяет \mathfrak{g} -значную H -эквивариантную 1-форму ω на \mathcal{R} . Из определения β и θ следует, что эти 1-формы проектируемы относительно слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Поэтому ω — также проектируемая 1-форма, то есть $L_X \omega = 0$ для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{TF}(\mathcal{R})$.

Равенство $Q|_{\tilde{U}_i} \times = \tilde{f}_i^*(Q_0) \forall i \in \mathcal{I}$ определяет связность Q в H -расслоении $\mathcal{R}(M, H)$.

Зафиксируем базис E_α алгебры Ли \mathfrak{g} группы Ли $G = H \times \mathbb{R}^q$. Тогда в любой точке $u \in \mathcal{R}$ определен трансверсальный репер $X_\alpha \times = (\omega|_{\tilde{\mathfrak{M}}_u})^{-1}(E_\alpha)$. Следовательно, определено такое гладкое векторное поле $X \in \mathfrak{X}_{\tilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$, что $\omega(X_\alpha) = E_\alpha$. Векторные поля X_α определяют трансверсальную параллелизацию слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, поэтому $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ является трансверсально параллелизуемым или e -слоением.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

Предложение 4.1. Пусть (M, F) — слоение коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N) -коциклом. Пусть $H = GL(q, \mathbb{R})$, $G = H \times \mathbb{R}^q$, а $\mathfrak{h}, \mathfrak{g}$ — алгебры Ли групп Ли H и G соответственно. Тогда определены:

1) главное H -расслоение $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$;

- 2) H -инвариантное e -слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, слои которого посредством π накрывают соответствующие слои слоения (M, F) ;
- 3) \mathfrak{h} -значная 1-форма β и \mathfrak{g} -значная 1-форма ω на \mathcal{R} , обладающие следующими свойствами:
- (i) $\beta(A^*) = A$ для любого $A \in \mathfrak{g}$, где A^* — фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу A ;
 - (ii) равенство $R_a^* \beta = Ad_G(a^{-1}) \omega$ выполняется для каждого $a \in H$, где Ad_G — присоединенное представление группы Ли G в ее алгебре Ли \mathfrak{g} ;
 - (iii) производная Ли $L_X \omega$ равна нулю для любого векторного поля $X \in \mathfrak{X}_{TF}(\mathcal{R})$;
 - (iv) β — 1-формой связности Q , которая является трансверсально проектируемой относительно $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$, в H -расслоении $\mathcal{R}(M, H)$.

О п р е д е л е н и е 4.1. Главное H -расслоение $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$, удовлетворяющее предложению 4.1., называется слоеным расслоением трансверсальных реперов, а e -слоение $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ называется поднятым слоением [15].

Сохраним введенные выше обозначения.

З а м е ч а н и е. Заметим, что слоение (M, F) с трансверсальной линейной связностью является картановым слоением с трансверсальной картановой геометрией $\xi = (P(N, H), \omega_0)$, где $\omega_0 = \beta_0 + \theta_0$ — \mathfrak{g} -значная 1-форма картановой связности на многообразии P [12].

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.1.

Необходимость. Пусть (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью заданное (N, ∇^N) -коциклом $\{U_i, f_i, \gamma_{ij}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$.

Предположим, что (M, F) является псевдоримановым слоением, заданным (N, g^N) коциклом, где g^N — псевдориманова метрика произвольной сигнатуры $(k, q - k)$, параллельная относительно связности ∇^N . Будем рассматривать g^N как послойную метрику в ассоциированном векторном расслоении, которое в данном случае является касательным расслоением к многообразию N . Метрика g^N определяет указанным выше образом редукцию $\widehat{P}(N, O(k, q - k))$ H -расслоения $P(N, H)$ к замкнутой подгруппе $O(k, q - k)$.

Согласно Предложению 3.1. в этом случае, благодаря выполнению условия $\nabla^N g^N = 0$, связность Q_0 в H -расслоении $P(N, H)$ редуцируема к связности \widehat{Q}_0 в $O(k, q - k)$ -расслоении \widehat{P} . Так как слоение (M, F) псевдориманово, заданное (N, g^N) коциклом, то каждый локальный диффеоморфизм

$$\gamma_{ij} : f_j(U_i \cap U_j) \rightarrow f_i(U_i \cap U_j) \quad i, j \in \mathcal{I},$$

является локальной изометрией псевдоримановых многообразий $(f_j(U_i \cap U_j), g_{f_j(U_i \cap U_j)})$ и $(f_i(U_i \cap U_j), g_{f_i(U_i \cap U_j)})$ с индуцированными псевдоримановыми метриками.

Мы по-прежнему фиксируем q -мерное гладкое распределение \mathfrak{M} , трансверсальное слоению (M, F) , которое отождествлено с векторным фактор расслоением TM/TF .

Используя векторное расслоение $\widehat{P}(N, O(k, q - k))$, также как при доказательстве Предложения 4.1. мы строим слоеное расслоение $\widehat{\mathcal{R}}(M, O(k, q - k))$ со слоением $(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}})$ и структурной группой $\widehat{H} = O(k, q - k)$, которое является редукцией H -расслоения \mathcal{R} к замкнутой подгруппе $O(k, q - k)$. Из построения следует, что слоение $\widehat{\mathcal{F}}$ является сужением слоения \mathcal{F} на подмногообразии $\widehat{\mathcal{R}}$.

Как известно ([14], Глава III), H -связность Q в главном расслоении $\mathcal{R}(M, H)$ определяет линейную связность

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) \quad (4.3)$$

в ассоциированном векторном расслоении $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^q, H, \mathcal{R})$.

Так как $f_{i*x} : \mathfrak{M}_x \rightarrow T_v N$, где $v = f_i(x)$, $i \in \mathcal{I}$, — изоморфизм векторных пространств, то на \mathfrak{M}_x существует единственная псевдориманова метрика g_x такая, что f_{i*x} — изометрия псевдоевклидовых векторных пространств (\mathfrak{M}_x, g_x) и $(T_v N, g_v^N)$. Поскольку каждое γ_{ij} , $i, j \in \mathcal{I}$, является изометрией, метрика g_x не зависит от выбора субмерсии $f_i : U_i \rightarrow V_i$ из указанного (N, g^N) -коцикла. Используя условие $\nabla^N g^N = 0$ и определение метрики g , нетрудно показать выполнение равенства $\nabla g = 0$.

Таким образом, на каждом слое $\mathfrak{M}_x = \pi_{\mathcal{E}}^{-1}(x)$, $x \in M$, векторного расслоения $\mathcal{E}(M, \mathbb{R}^q, H, \mathcal{R})$ определена метрика g_x , которая сохраняется при параллельном переносе относительно связности ∇ , указанной в (4.3). Согласно Предложению 3.1. при этом связность Q в главном расслоении $\mathcal{R}(M, H)$ редуцируется к связности \widehat{Q} в редуцированном расслоении $\widehat{\mathcal{R}}(M, O(k, q - k))$. Это означает, что для любой точки $u \in \mathcal{R}$ группа голономии $\Phi(u)$ удовлетворяет включению $\Phi(u) \subset O(k, q - k)$.

Достаточность. Пусть (M, F) — слоение произвольной коразмерности q с трансверсальной линейной связностью, заданное (N, ∇^N) -коциклом и $\mathcal{R}(M, H)$ его расслоение трансверсальных реперов. Пусть Q — H -инвариантное распределение на \mathcal{R} , удовлетворяющее условию Предложения 4.1. Предположим, что существует такая точка u , что группа голономии $\Phi(u)$ связности Q с опорной точкой u принадлежит псевдоортогональной подгруппе $O(k, q - k)$ группы H . Согласно ([14], Глава 2, Теорема 7.1) существует редукция $\widehat{\mathcal{R}}(M, \Phi(u))$ H -расслоения $\mathcal{R}(M, H)$ к подгруппе Ли $\Phi(u)$ группы H . Подчеркнем, что связность Q редуцируется к связности \widehat{Q} на $\widehat{\mathcal{R}}$.

Напомним, что кусочно гладкая кривая в \mathcal{R} называется горизонтальной, если каждый ее гладкий кусок является интегральной кривой распределения Q . Как известно, многообразие $\widehat{\mathcal{R}}$ образовано всеми точками из \mathcal{R} , которые можно соединить с точкой u горизонтальной кривой.

Из определения слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ вытекает включение $T\mathcal{F} \subset Q$, поэтому любые две точки произвольного слоя слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ можно соединить горизонтальной кривой. Следовательно, если $z \in \widehat{\mathcal{R}}$, то слой $\mathcal{L}(z)$, проходящий через z , принадлежит $\widehat{\mathcal{R}}$. Это означает, что $\widehat{\mathcal{R}}(M, \Phi(u))$ является слоеным расслоением и $T\widehat{\mathcal{F}} \subset \widehat{Q}$ для индуцированного слоения $(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}})$.

Пусть $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M) \rightarrow \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$ — линейная связность в ассоциированном с $\widehat{\mathcal{R}}(M, \Phi(u))$ векторном расслоении $\widehat{\mathcal{E}}(M, \mathbb{R}^q, \Phi(u), \mathcal{R})$, построенном с помощью левого действия $\widehat{\rho} = \rho|_{\Phi(u) \times \mathbb{R}^q}$, где ρ определено выше. Обозначим через Ψ_{x_0} группу голономии связности ∇ в точке $x_0 = \pi(u)$, причем u — точка из \mathcal{R} , в которой по условию теоремы выполняется включение $\Phi(u) \subset O(k, q - k)$.

Поскольку репер u можно рассматривать как линейный изоморфизм векторных пространств $u : \mathfrak{M}_{x_0} \rightarrow \mathbb{R}^m$, то существует единственная псевдоевклидова метрика g_{x_0} сигнатуры $(k, q - k)$ в \mathfrak{M}_{x_0} такая, что $u : (\mathfrak{M}_{x_0}, g_{x_0}) \rightarrow (\mathbb{R}^m, g_0)$ — изометрия псевдоевклидовых векторных пространств.

Группа Ψ_{x_0} образована линейными преобразованиями векторного пространства \mathfrak{M}_{x_0} , определенными параллельным переносом векторов $X \in \mathfrak{M}_{x_0}$ вдоль кусочно гладких петель, замкнутых в x_0 , относительно линейной связности ∇ . Из выполнения включения $\Phi(u) \subset O(k, q - k)$ вытекает, что определенная выше псевдоевклидова метрика g_0 в векторном пространстве \mathfrak{M}_{x_0} инвариантна относительно группы голономии Ψ_{x_0} .

Соединим точку x_0 с произвольной точкой x кусочно гладкой кривой $h : [0, 1] \rightarrow M$, $h(0) = x_0$ и $h(1) = x$. Обозначим через $\tau^h : \mathfrak{M}_{x_0} \rightarrow \mathfrak{M}_x$ линейный изоморфизм пространств, заданный параллельным переносом векторов вдоль кривой h . Требуем, чтобы τ^h было изометрией, мы определяем псевдориманову метрику сигнатуры $(k, q-k)$ в векторном пространстве \mathfrak{M}_x . Используя инвариантность g_0 относительно Ψ_{x_0} , нетрудно проверить, что метрика g_x не зависит от выбора пути h , соединяющего x_0 с x .

Таким образом, в ассоциированном векторном расслоении $\widehat{\mathcal{E}}(M, \mathbb{R}^q, \Phi(u), \mathcal{R})$ определена послойная псевдориманова метрика g , которая, согласно построению, параллельна относительно линейной связности ∇ .

Подчеркнем, что параллельный перенос метрики g вдоль любого пути, принадлежащего какому-либо локальному слою слоения (M, F) в окрестности U_i , $i \in \mathcal{I}$, эквивалентен проектируемости g вдоль этого слоя. Это означает, что метрика g трансверсально проектируема относительно слоения (M, F) . Благодаря этому, субмерсии $f_i : U_i \rightarrow V_i$ требуем, чтобы линейные изоморфизмы $f_{i*x} : \mathfrak{M}_x \rightarrow T_v N$, где $v = f_i(x)$, были изометриями, определяют псевдориманову метрику g^N сигнатуры $(k, q-k)$ на многообразии N , относительно которой все γ_{ij} — локальные изометрии.

Поскольку слоение $(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}})$ является сужением слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ на $\widehat{\mathcal{R}}$, а связность \widehat{Q} — сужением H -связности Q на $\widehat{\mathcal{R}}$, то нетрудно убедиться в том, что проектируемость Q относительно слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ влечет проектируемость \widehat{Q} относительно слоения $(\widehat{\mathcal{R}}, \widehat{\mathcal{F}})$. Следовательно, связность \widehat{Q} индуцирует $O(k, q-k)$ -связность \widehat{Q}_0 на \widehat{P} , которая является редукцией H -связности Q_0 на P . Согласно Предложению 3.1. это эквивалентно параллельности псевдоримановой метрики g^N относительно линейной связности ∇^N , то есть $\nabla^N g^N = 0$.

Таким образом, (M, F) — псевдориманово слоение трансверсальной сигнатуры $(k, q-k)$, а его трансверсальная метрика параллельна относительно трансверсальной связности ∇^N .

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о

Д о к а з а т е л ь с т в о С л е д с т в и я 1.2. Пусть (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью, а $\mathcal{R}(M, H)$ со слоением $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ образует слоеное расслоение трансверсальных реперов над (M, F) . По условию существует точка $u \in \mathcal{R}$, для которой группа голономии $\Phi(u)$ является относительно компактной подгруппой в группе Ли $H = GL(q, R)$. Следовательно, $\Phi(u)$ принадлежит некоторой максимальной компактной подгруппе K группы H . Так как ортогональная группа $O(q)$ является максимальной компактной подгруппой группы H , то она сопряжена с K . Пусть $x = \pi(u)$. Когда u пробегает слой $\pi^{-1}(x)$, группа $\Phi(u)$ пробегает весь класс подгрупп, сопряженных с группой K . Поскольку в этом классе содержится $O(q)$, найдется такая точка $\widehat{u} \in \pi^{-1}(x)$, что $\Phi(\widehat{u}) \subset O(q)$.

Рассматривая $O(q)$ как группу $O(k, q-k)$ при $k = 0$ и применяя Теорему 1.1., мы получаем, что (M, F) — риманово слоение.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о

Д о к а з а т е л ь с т в о Т е о р е м ы 1.2.

Предположим, что (M, F) — слоение с трансверсальной линейной связностью.

Пусть U — координатная окрестность адаптированной карты (U, φ) многообразия M , D — трансверсальный диск в U и $s : D \rightarrow \mathcal{R}$ — сечение, обладающее указанным в теореме свойством. Обозначим той же буквой слоеное сечение $s : U \rightarrow \mathcal{R}$, являющееся продолжением сечения $s : D \rightarrow \mathcal{R}$, при котором локальные слои слоения (M, F) отображаются в локальные слои поднятого слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$. Благодаря локальному рассмотрению такое сечение существует. Не нарушая общности, будем считать, что существует тривиализация

$h : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times H$ расслоения трансверсальных реперов $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$ в окрестности U , при которой $h(s(U)) = U \times \{e\}$, где e — единица группы H .

Положим $W = h^{-1}(U \times O(k, q - k))$. Покажем, что насыщение $N(W)$ множества W относительно поднятого слоения $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ является слоеным $O(k, q - k)$ -расслоением для слоения $(N(U), F)$. Поскольку насыщение открытого подмножества открыто, $N(W)$ — открытое подмногообразие в \mathcal{R} .

Покажем, что $\pi^{-1}(U) \cap N(W) = W$. Для любого слоя $\mathcal{L}(u)$, $u \in \mathcal{R}$, поднятого слоения через $H(u) = \{a \in H \mid R_a \mathcal{L}(u) = \mathcal{L}(u)\}$ обозначается подгруппа структурной группы H , оставляющая этот слой инвариантным. Согласно условию теоремы для любой точки $u \in s(D)$ выполняется включение $H(u) \subset O(k, q - k)$ и, следовательно, это включение выполняется для любой точки $u \in s(U)$. Поэтому $\pi^{-1}(x) \cap \mathcal{L}(u) \subset W$ для любой точки $x \in U$ и $u = s(x)$. Пусть теперь v — любая точка из W . Так как $W := h^{-1}(U \times O(k, q - k))$, то найдутся $a \in O(k, q - k)$ и $u \in s(U)$ такие, что $v = ua$. В этом случае $H(v) = a^{-1}H(u)a$, следовательно, $H(v) \subset O(k, q - k)$ для любой точки $v \in W$. Поскольку W инвариантно относительно группы $O(k, q - k)$, это влечет требуемое равенство $\pi^{-1}(U) \cap N(W) = W$. Используя это равенство, нетрудно показать, что $N(W)$ является редукцией расслоения реперов над M к замкнутой подгруппе $O(k, q - k)$ группы H .

Таким образом, $\pi_{N(W)} : N(W) \rightarrow N(U)$ — проекция слоеного $O(k, q - k)$ -расслоения над $(N(U), F)$. Заметим, что сужение формы связности β на W является $\mathfrak{so}(k, q - k)$ -значной 1-формой римановой связности на W , трансверсально проектируемой относительно слоения $(N(W), \mathcal{F})$. Это означает, что $(N(U), F)$ — псевдориманово слоение трансверсальной сигнатуры $(k, q - k)$.

Обратное утверждение выполняется очевидным образом.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Molino P., *Foliations on Riemannian manifolds and submanifolds*, Birkhauser, 1988, 339 pp.
2. Tondeuer P., *Foliations on Riemannian manifolds and submanifolds*, Birkhauser, 1997, 286 pp.
3. Rovenskii V. Y., *Foliations on Riemannian manifolds and submanifolds*, Birkhauser, 1997, 286 pp.
4. Wolak R. A., “Leaves of foliations with transverse G -structures of finite type”, *Publications Mathematiques*, **33** (1989), 153–162.
5. Wolak R. A., “Foliations admitting transverse systems of differential equations”, *Compositio Math.*, **67** (1988), 89–101.
6. Жукова Н. И., “График слоения со связностью Эресмана и стабильность слоев”, *Изв. вузов. Матем.*, 1994, № 2, 78–81.
7. Zhukova N. I., “Local and global stability of compact leaves and foliations”, *Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.*, **9:3** (2013), 400–420.
8. Жукова Н. И., “Аттракторы и аналог гипотезы Лихнеровича для конформных слоений”, *Сиб. матем. журн.*, **52:3** (2011), 555–574.

9. Жукова Н. И., “Аттракторы слоений с трансверсальной параболической геометрией ранга один”, *Матем. заметки*, **93**:6 (2013), 944–946.
10. O’Neil В., *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, 1983, 468 pp.
11. Бим Дж., Эрлих П., *Глобальная лоренцева геометрия*, Мир, 1985, 400 с.
12. Жукова Н. И., “Минимальные множества картановых слоений”, *Тр. МИАН*, 2007, № 256, 115–147.
13. Schmidt В. G., “Conditions on a Connection to be a Metric Connection”, *Commun. math. Phys.*, **29** (1973), 55–59 pp.
14. Кобаяси Ш., Номидзу К., *Основы дифференциальной геометрии*, **1**, Наука, 1988, 428 с.
15. Zhukova N. I., Dolgonosova A. Yu., “The automorphism groups of foliations with transverse linear connection”, *Central European Journal of Mathematics*, **11**:12 (2013), 2076–2088.

Дата поступления 16.05.2016

A criterion for foliations with transverse linear connection to be pseudo-Riemannian

© N. I. Zhukova³, K. I. Sheina⁴,

Abstract. We obtain necessary and sufficient conditions for a foliation of codimension q on n -dimensional manifold with transverse linear connection to admit a transverse invariant pseudo-Riemannian metric of a given signature which is parallel with the respect to the indicated connection. In particular we obtain a criterion for a foliation with transverse linear connection to be Riemannian foliation.

Key Words: foliation, linear connection, holonomy group of a connection, the germ holonomy group of a leaf

³ Professor of chair of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; nzhukova@hse.ru

⁴ Research assistant of chair of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; ksheina@hse.ru

УДК 519.254

Идентификация ARX систем Винера дробного порядка при наличии помехи во входном сигнале

© Д. В. Иванов¹

Аннотация. В статье рассмотрена параметрическая идентификация ARX (Autoregressive with exogenous input) систем Винера дробного порядка при наличии помех во входных сигналах. Предложен критерий для оценивания параметров данных систем, представляющий собой обобщение метода наименьших квадратов. Доказано, что при помехах класса мартингал-разности, получаемые оценки параметров будут обладать свойством сильной состоятельности. Показано, что в случае постоянной дисперсии помех для получения состоятельных оценок достаточно знать отношение их дисперсий.

Ключевые слова: параметрическая идентификация, система Винера, разность дробного порядка, помеха наблюдения, метод наименьших квадратов, состоятельность оценок

1. Введение

Для описания процессов различной природы все большее применение находят уравнения с производными и разностями дробного порядка. Несмотря на отсутствие простой интерпретации, которой обладают производные, интегралы и разности целых, модели, описываемые уравнениями дробного порядка, позволяют достаточно точно моделировать многие процессы в физике и технике [1-4], активно развивается раздел теории управления связанный с синтезом регуляторов дробного порядка. В связи с активным развитием и применением уравнений с разностями и производными дробного порядка для задач моделирования и прогнозирования, стали также активно развиваться методы идентификации систем, описываемых уравнениями и разностями дробного порядка.

При идентификации динамических систем наибольшее распространение получили линейные модели динамических систем. Линейные модели просты в описании и часто обеспечивают адекватную точность представления динамической системы. Однако существует огромное число систем, описываемых нелинейными уравнениями. В общем случае задача идентификации динамических систем не имеет решения и возможно говорить лишь об идентификации некоторых классов нелинейных систем, таких как системы класса Гаммерштейна, Винера, Вольтерра, билинейные системы и т.д. Идентификация даже отдельных классов нелинейных систем при наличии помех, по сравнению с линейными системами, является более сложной задачей. Идентификации линейных систем дробного порядка посвящены [4-9].

В данной статье предложен критерий, позволяющий получать сильно состоятельные оценки параметров ARX систем класса Винера дробного порядка при наличии помехи во входном сигнале.

2. Постановка задачи о локальной приводимости

Динамическая система, описываемая линейными стохастическими уравнениями с разностями дробного порядка:

¹ Доцент кафедры мехатроники в автоматизированных производствах, Самарский государственный университет путей сообщения, г. Самара; dvi85@list.ru

$$z_i = \sum_{m=1}^r b_0^{(m)} \Delta^{\alpha_m} z_{i-1} + \sum_{m=1}^{r_1} a_0^{(m)} \Delta^{\beta_m} x_i + \zeta_i, y_i = f(z_i), w_i = x_i + \zeta_i, \quad (2.1)$$

где $f(\bullet)$ - нелинейная обратимая беровская функция,

$$0 < \alpha_1 \dots < \alpha_r, 0 < \beta_1 \dots < \beta_{r_1}, \Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt,$$

$$\Delta^{\alpha_m} z_i = \sum_{j=0}^i \binom{\alpha_m}{j} z_{i-j}, \Delta^{\beta_m} x_i = \sum_{j=0}^i \binom{\beta_m}{j} x_{i-j},$$

$$\binom{\alpha_m}{j} = (-1)^j \frac{\Gamma(\alpha_m + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\alpha_m - j + 1)}, \binom{\beta_m}{j} = (-1)^j \frac{\Gamma(\beta_m + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\beta_m - j + 1)}.$$

Пусть выполнены условия:

1. Динамическая система устойчивая. Истинные параметры системы принадлежат компактному множеству \tilde{B} .

2. Помехи $\{\zeta_i\}, \{\zeta_i^2\}$ являются мартингал-разностями и удовлетворяют следующим условиям:

$$E(\zeta_{i+1}/F_\zeta^{(i)}) = 0, E(\zeta_{i+1}^2/F_\zeta^{(i)}) = 0 \text{ п.н.},$$

$$E(\zeta_{i+1}^2/F_\zeta^{(i)}) < W_\zeta, E(\zeta_{i+1}^2/F_\zeta^{(i)}) < W_\zeta \text{ п.н.},$$

$$E(\zeta_i^2) < \infty, E(\zeta_i^2) < \infty \text{ п.н.},$$

где $F_\zeta^{(i)}, F_\zeta^{(i)}$ - σ - алгебры, индуцированные семействами случайных величин $\{\zeta_t, \zeta_t, t \in T_i\}, T_i = \{t; t \leq i, t \in \mathbb{Z}_c\}$ - множество целых чисел};

W_ζ, W_ζ - случайные величины, $E(W_\zeta) < \infty, E(W_\zeta) < \infty$ п.н.

3. $\{x_i\}$ статистически не зависит от $\{\zeta_i\}, \{\zeta_i^2\}$.

4. $\{\zeta_i\}, \{\zeta_i^2\}$ статистически не зависят между собой.

5. Для помехи $\{\zeta_i\}$ выполнено условие

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N \varphi_\zeta^{(i)} (\varphi_\zeta^{(i)})^T \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left[\sum_{i=1}^N E(\varphi_\zeta^{(i)} (\varphi_\zeta^{(i)})^T) \right] = \begin{pmatrix} h_\zeta^{(11)} & \dots & h_\zeta^{(r_1 1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\zeta^{(1 r_1)} & \dots & h_\zeta^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix} = H_\zeta,$$

$$\text{где } \varphi_\zeta^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i \binom{\beta_1}{j} \zeta_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i \binom{\beta_{r_1}}{j} \zeta_{i-j} \right)^T,$$

причем H_ζ положительно определена.

6. Входной сигнал x_i является случайным и удовлетворяет условию

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left((\varphi_z^{(i)})^T \mid (\varphi_x^{(i)})^T \right)^T \left((\varphi_z^{(i)})^T \mid (\varphi_x^{(i)})^T \right) = \left(\frac{H_{zz}}{(H_{zx})^T} \mid \frac{H_{zx}}{H_{xx}} \right) = H \text{ п.н.},$$

$$\text{где } \varphi_z^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i \binom{\alpha_1}{j} z_{i-j-1}, \dots, \sum_{j=0}^i \binom{\alpha_r}{j} z_{i-j-1} \right)^T,$$

$$\varphi_x^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i \binom{\beta_1}{j} x_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i \binom{\beta_{r_1}}{j} x_{i-j} \right)^T,$$

причем H существует, ограничена и положительно определена.

Необходимо оценить неизвестные коэффициенты динамической системы, описываемой уравнением (2.1) по наблюдениям y_i, w_i при известных порядках $r, r_1, \alpha_m, \beta_m$.

3. Критерий для оценивания параметров

Представим уравнение (2.1) в виде линейной регрессии

$$y_i = \varphi_i^T \theta_0 + \varepsilon_i, \quad (3.1)$$

где $\varphi_i = \left(\left(\varphi_y^{(i)} \right)^T \mid \left(\varphi_w^{(i)} \right)^T \right)^T$,

$$\varphi_y^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i \binom{\alpha_1}{j} f^{-1}(y_{i-j-1}), \dots, \sum_{j=0}^i \binom{\alpha_r}{j} f^{-1}(y_{i-j-1}) \right)^T,$$

$$\varphi_w^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_1}{j} w_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} w_{i-j} \right)^T,$$

$$\theta_0 = \left(b_0^T \mid a_0^T \right)^T, b_0 = \left(b_0^{(1)}, \dots, b_0^{(r)} \right)^T, a_0 = \left(a_0^{(1)}, \dots, a_0^{(r_1)} \right)^T, \varepsilon_i = \varsigma_i - a_0^T \varphi_\zeta^{(i)},$$

$$\varphi_\zeta^{(i)} = \left(\sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_1}{j} \zeta_{i-j}, \dots, \sum_{j=0}^i (-1)^j \binom{\beta_{r_1}}{j} \zeta_{i-j} \right)^T.$$

Л е м м а 3.1. Пусть выполнены предположения 1-3, тогда $E(\varepsilon_i) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из предположения 2 следует, что $E(\zeta_i) = 0$, $E(\varsigma_i) = 0$, тогда используя предположение 3 можно показать

$$E(\varepsilon_i) = E\left(\varsigma_i - a_0^T \varphi_\zeta^{(i)}\right) = E(\varsigma_i) - \sum_{m=1}^r a_0^{(m)} \sum_{j=0}^i \binom{\beta_m}{j} E(\zeta_{i-j-1}) = 0.$$

Л е м м а 3.2. Пусть выполнены предположения 2-6, тогда дисперсия обобщенной ошибки равна

$$\bar{\sigma}_\varepsilon^2 = \bar{\sigma}_\zeta^2 + a_0^T H_\zeta a_0 = \omega(b_0, a_0),$$

где $\bar{\sigma}_\zeta^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \varsigma_i^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По определению дисперсии

$$\sigma_\varepsilon^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\varepsilon_i - E(\varepsilon_i))^2,$$

так как $E(\varepsilon_i) = 0$, то

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_\varepsilon^2 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E(\varepsilon_i^2) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N E\left(\varsigma_i - a_0^T \varphi_\zeta^{(i)}\right)^2 = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\varsigma_i^2 + a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_\zeta^{(i)}\right)^T a_0 - 2 \varsigma_i a_0^T \varphi_\zeta^{(i)}\right) \end{aligned}$$

Применяя лемму 1.1 [9, с.12, 10] для ς_i, ζ_i и предположения 3-5 получим

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\varsigma_i^2 + a_0^T \varphi_\zeta^{(i)} \left(\varphi_\zeta^{(i)}\right)^T a_0\right) = \bar{\sigma}_\zeta^2 + a_0^T H_\zeta a_0.$$

Используя лемму 2 [9, с.13, 11] и лемму 1 для случайных процессов получаем

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N 2\zeta_i b_0^T \varphi_\zeta^{(i)} = 0.$$

Будем искать оценки $\hat{\theta}(N)$ коэффициентов θ из условия минимума следующего критерия:

$$\min_{\theta \in \mathbb{B}} \sum_{i=1}^N \frac{(f^{-1}(y_i) - \varphi_i^T \theta)^2}{\bar{\sigma}_\zeta^2 + a^T H_\zeta a} = \min_{\theta \in \mathbb{B}} \frac{U_N(b, a)}{\omega(a)}. \quad (3.2)$$

Т е о р е м а 3.1. Пусть динамическая система описывается уравнением (2.1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1-6. Тогда оценка коэффициентов $\hat{\theta}(N)$, определяемая выражением (3.2) существует, единственная и сходится к истинному значению коэффициентов с вероятностью 1, т.е.

$$\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \theta_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При доказанных выше леммах доказательство проводится аналогично рассуждениям работы [7].

4. Случай гомоскедастических помех

Полученный критерий (3.2) требует знания квадратов значений помех в наблюдении, что является довольно ограничительным условием. Для многих практических задач дисперсию помех можно считать постоянной. Пусть выполняется следующее предположение. Случайные процессы $\{\zeta_i\}$, $\{\zeta_i^2\}$ являются мартингал-разностями и удовлетворяют следующим условиям:

$$E \left(\zeta_{i+1} / F_\zeta^{(i)} \right) = 0, \quad E \left(\zeta_{i+1}^2 / F_\zeta^{(i)} \right) = \sigma_\zeta^2 < 0 \text{ п.н.},$$

$$E \left(\zeta_{i+1}^2 / F_\zeta^{(i)} \right) = \sigma_\zeta^2 < 0, \quad E \left(\zeta_{i+1}^2 / F_\zeta^{(i)} \right) = \sigma_\zeta^2 < 0 \text{ п.н.}$$

7. Априорно известны отношения $\gamma = \sigma_\zeta^2 / \sigma_\zeta^2$.

Тогда оценки $\hat{\theta}(N)$ неизвестных параметров θ могут быть определены из критерия

$$\min_{\theta \in \mathbb{B}} \sum_{i=1}^N \frac{(f^{-1}(y_i) - \varphi_i^T \theta)^2}{\gamma + a^T H_\beta a}, \quad (4.1)$$

$$\text{где } H_\beta = \begin{pmatrix} h_\beta^{(11)} & \dots & h_\beta^{(r_1 1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ h_\beta^{(1 r_1)} & \dots & h_\beta^{(r_1 r_1)} \end{pmatrix}, \quad h_\beta^{(mn)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \begin{pmatrix} \beta_m \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_n \\ j \end{pmatrix} \frac{N-j}{N}.$$

Т е о р е м а 4.1. Пусть динамическая система описывается уравнением (2.1) с начальными нулевыми условиями и выполняются предположения 1,3,4-6 и 2.0. Тогда оценка коэффициентов $\hat{\theta}(N)$, определяемая выражением (4.1) существует, единственная и сходится к истинному значению коэффициентов с вероятностью 1, т.е.

$$\hat{\theta}(N) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \theta_0.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство проводится аналогично рассуждениям в работе [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А. М. Нахушев, *Дробное исчисление и его применение*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2003, 272 с.
2. В. В. Учайкин, *Метод дробных производных*, Издательство «Артишок», Ульяновск, 2008, 512 с.
3. В. В. Мишунин, *Системы автоматического управления и контроля с дробно-иррациональными передаточными функциями*, Изд-во БГТУ им. В. Г. Шухова, Белгород, 2004, 255 с.
4. И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, “Параметрическая идентификация систем, математические модели которых описываются дифференциальными уравнениями с производными дробных порядков”, *Метрология*, 2013, № 9, 3–16.
5. И. В. Бойков, Н. П. Кривулин, “Параметрическая идентификация эредитарных систем с распределенными параметрами”, *Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Технические науки.*, 2013, № 2(26), 120–129.
6. Д. В. Иванов, О. А. Кацюба, “О состоятельности оценок параметров ARX-систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале”, *Стохастическая оптимизация в информатика*, 2013, № 1(2), 21–32.
7. Д. В. Иванов, “Оценивание параметров линейных ARX-систем дробного порядка с помехой наблюдения во входном сигнале”, *Вестник Томского государственного университета. Управление, вычислительная техника и информатика*, 2014, № 2(27), 43–50.
8. Д. В. Иванов, “Численный алгоритм оценивания параметров линейных динамических систем дробного порядка с помехой в выходном сигнале”, *Эвристические алгоритмы и распределённые вычисления*, 2014, № 1(1), 53–63.
9. О. А. Кацюба, *Теория идентификации стохастических динамических систем в условиях неопределенности*, СамГУПС, Самара, 2008, 119 с.
10. О. А. Кацюба, А. И. Жданов, “Особенности применения МНК для оценивания линейных разностных операторов в задачах идентификации объектов управления”, *Автоматика и телемеханика*, 1979, № 8, 86–90.
11. О. А. Кацюба, А. И. Жданов, “Идентификация методом наименьших квадратов параметров уравнений авторегрессии с аддитивными ошибками измерений”, *Автоматика и телемеханика*, 1982, № 2, 29–38.

Дата поступления 5.05.2016

Identification of fractional-order ARX Wiener systems in the presence of noise in the input signals

© D. V. Ivanov²

Abstract. The paper describes the parametric identification of fractional-order Wiener ARX (Autoregressive with exogenous input) systems in the presence of noise in the input signals. The criterion for evaluating the parameters of these systems is proposed which is a generalization of the method of least squares. It is proved that the interference class martingale-difference derived parameter estimates will have the property of strong consistency. It is shown that in the case of constant noise variance to obtain consistent estimates it is sufficient to know the ratio of their variances.

Key Words: parametric identification, Wiener system, a difference of fractional order, errors in variables, least squares, consistent estimator

² Associate Professor of the Department of Mechatronics, Samara State University of Transport, Samara; dvi85@list.ru

УДК 517.9

Графовый критерий топологической эквивалентности Ω -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях и эффективный алгоритм для его применения

© В. Е. Круглов¹, Д. С. Малышев², О. В. Починка³

Аннотация. Изучение динамики потока на поверхностях путем разбиения фазового пространства на ячейки с одинаковым предельным поведением траекторий внутри ячейки восходит к классическим работам А.А. Андронова, Л.С. Понтрягина, Е.А. Леонтович, А. Г. Майера. Типы ячеек, которых конечное число, и их примыкание друг к другу полностью определяют класс топологической эквивалентности потока с конечным числом особых траекторий. Если в каждой ячейке грубого потока без периодических орбит выбрать по одной траектории, то ячейки распадаются на так называемые треугольные области, которые имеют один единственный тип. Комбинаторное описание такого разбиения приводит к трехцветному графу А.А. Ошемкова и В.В. Шарко, вершины которого соответствуют треугольным областям, а ребра — связывающим их сепаратрисам. Ими доказано, что два таких потока топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их трехцветные графы изоморфны и описан алгоритм распознавания трехцветных графов. Однако, построенный алгоритм не является эффективным с точки зрения теории графов. В настоящей работе динамика Ω -устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях описана на языке четырехцветных графов и приведен эффективный алгоритм распознавания таких графов.

Ключевые слова: многоцветный граф, топологический инвариант, Ω -устойчивый поток, эффективный алгоритм

1. Введение и формулировка результатов

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом особых траекторий на поверхностях состоит в выделении на несущем многообразии областей с предсказуемым поведением траекторий — *ячеек*. Такой взгляд на непрерывные динамические системы восходит к классической работе А.А. Андронова и Л.С. Понтрягина [1] 1937 года, в которой они рассмотрели систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x) \quad (*)$$

где $v(x)$ — C^1 -векторное поле, заданное в круге на плоскости, граница которого является кривой без контакта, и нашли критерий грубости системы (*).

В работах Е.А. Леонтович-Андроновой и А.Г. Майера [7], [8] рассматривался более общий класс динамических систем и их классификация также была основана на идеях о выделении множества специальных траекторий, относительное положение которых (схема Леонтович-Майера) полностью определяет качественную структуру разбиения фазового пространства динамической системы на траектории. Основной трудностью в обобщении этого результата на случай произвольных ориентируемых поверхностей положительного рода является возможность нового типа движения — незамкнутая рекуррентная траектория. Отсутствие таких траекторий для грубых потоков без особенностей на 2-торе была

¹ Студент ННГУ им. Н.И. Лобачевского; kruglovslava21@mail.ru

² Профессор кафедры прикладной математики и информатики НИУ ВШЭ-НН, профессор кафедры алгебры, геометрии и дискретной математики ННГУ; dsmalyshev@rambler.ru

³ Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ-НН; olga-pochinka@yandex.ru

доказана А.Г. Майером [9] в 1939 году. В 1971 в работе [14] М. Пейшото обобщил схему Леонтович-Майера для структурно устойчивых потоков на произвольных поверхностях и получил топологическую классификацию таких потоков, изучив все допустимые ячейки для них и введя комбинаторный инвариант – *ориентированный граф*, обобщающий схему Леонтович-Майера. В 1976 году Д. Нейманом и Т. О’Брайеном [11] на произвольных поверхностях были рассмотрены так называемые *регулярные потоки* – потоки без нетривиальных периодических траекторий, которые включают в себя описанные выше потоки как частный случай. Они ввели полный топологический инвариант для регулярных потоков – *орбитальный комплекс*, который представляет из себя пространство орбит потока, оснащенное некоторой дополнительной информацией. В 1998 году А. А. Ошемков и В. В. Шарко [12] ввели новый инвариант для структурно устойчивых систем на поверхностях – *трехцветный граф* и описали алгоритм распознавания изоморфности таких графов, который, однако, не является *эффективным*, то есть время его работы не ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации⁴.

В настоящей работе рассматривается класс G , состоящий из Ω -устойчивых потоков f^t без периодических траекторий на поверхностях S . Каждому потоку рассматриваемого класса ставится в соответствие четырехцветный граф и приводится эффективный алгоритм различения таких графов.

Из критерия Ω -устойчивости [15] следует, что потоки класса G имеют неблуждающее множество, состоящее из конечного числа гиперболических неподвижных точек и не имеют *циклов*, то есть наборов неподвижных точек

$$x_1, \dots, x_k, x_{k+1} = x_1$$

со свойством

$$W_{x_i}^s \cap W_{x_{i+1}}^u \neq \emptyset, i = 1, \dots, k.$$

При этом в классе G системы могут быть как структурно устойчивыми, так и нет, а определяется это отсутствием или наличием *связок* – сепаратрис, идущих из седла в седло. Условие Ω -устойчивости влечет тот факт, что связки потока из класса G не образуют замкнутых кривых.

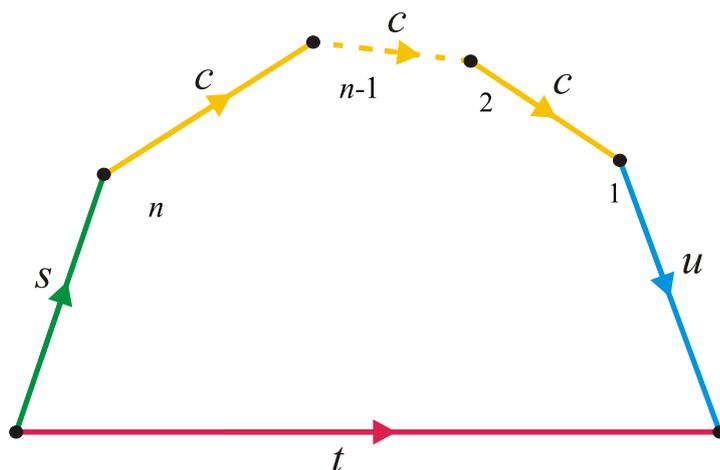
Обозначим через $\Omega_{f^t}^0, \Omega_{f^t}^1, \Omega_{f^t}^2$ множество всех стоков, сёдел, источников потока f^t соответственно. Если множество $\Omega_{f^t}^1$ пусто, то поток f^t имеет в точности две неподвижные точки: источник и сток, и одну ячейку, замыкание которой совпадает со всем несущим многообразием, которое в этом случае является сферой. Поэтому везде далее мы будем предполагать, что поток f^t имеет хотя бы одну седловую точку. Положим

$$\tilde{S} = S \setminus (\Omega_{f^t}^0 \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^s \cup W_{\Omega_{f^t}^1}^u \cup \Omega_{f^t}^2).$$

Компонента связности множества \tilde{S} называется *ячейкой*. Согласно работе [6], в границу каждой ячейки J входит единственный источник α и единственный сток ω , а вся ячейка является объединением траекторий, идущих из α в ω . Выберем одну траекторию θ_J в каждой ячейке J и будем называть её *t-кривой*. Положим

$$\mathcal{T} = \bigcup_{J \subset \tilde{S}} \theta_J, \bar{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}.$$

⁴ В работе [4] доказано, что трехцветный граф с периодической подстановкой также является полным топологическим инвариантом для градиентно-подобных диффеоморфизмов на поверхностях, а в работе [3] приведен эффективный алгоритм распознавания таких графов.

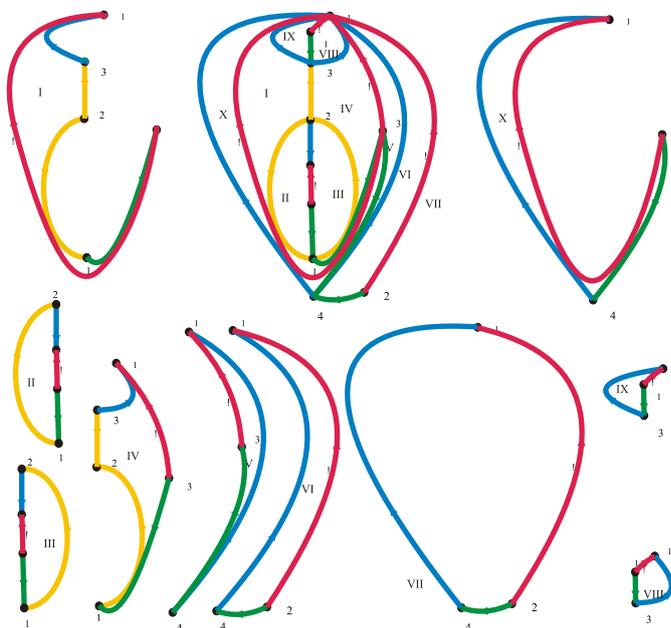


Р и с у н о к 1.1

Многоугольная область

Будем называть s -кривыми сепаратрисы, соединяющие седла (связки), u -кривыми – неустойчивые седловые сепаратрисы, имеющие в замыкании сток, s -кривыми – устойчивые седловые сепаратрисы, имеющие в замыкании источник. Будем закрашивать на рисунках t -кривые красным цветом, c -кривые – жёлтым цветом, u -кривые – синим цветом, а s -кривые – зелёным. Из работы [6] следует, что любая компонента связности Δ множества \bar{S} (мы называем её *многоугольной областью*) гомеоморфна открытому диску и её граница состоит из одной t -кривой, одной u -кривой, одной s -кривой и конечного (возможно пустого) множества c -кривых (см. рис. 1.1).

На рисунке 1.2 изображён поток из класса G и все его многоугольные области.



Р и с у н о к 1.2

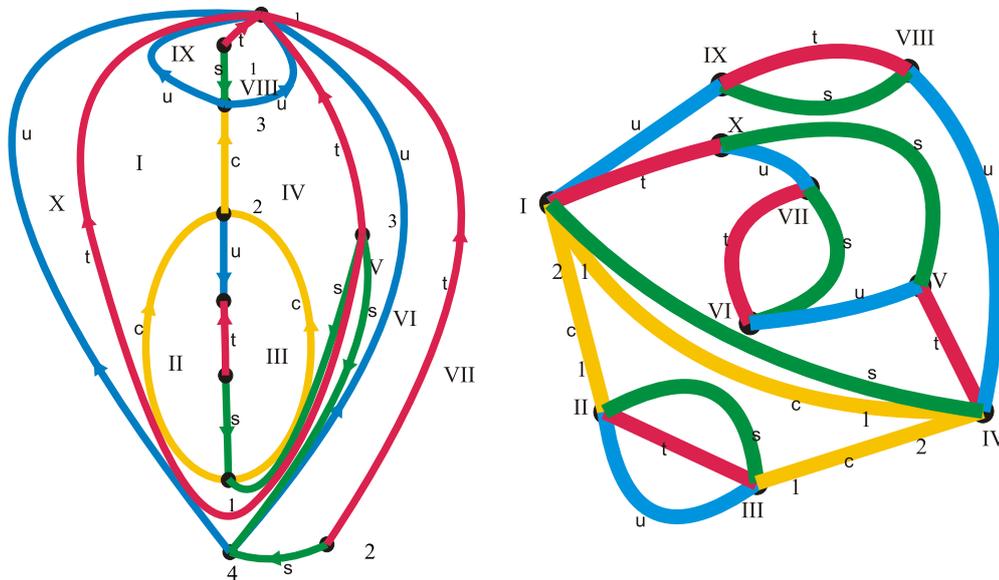
Пример потока из класса G (сверху в центре) и его многоугольные области

Обозначим через Δ_{f^t} множество всех многоугольных областей потока $f^t \in G$. Поставим в соответствие потоку $f^t \in G$ граф Γ_{f^t} следующим образом (см. рис. 1.3):

1) вершины графа Γ_{f^t} взаимно однозначно соответствуют многоугольным областям множества Δ_{f^t} ;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s , t , u или c , если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую s -, t -, u - или c -кривую, что устанавливает взаимно однозначное соответствие между ребрами графа и s -, t -, u - и c -кривыми;

3) при наличии более чем одного c -ребра, выходящего из некоторой вершины графа Γ_{ft} , c -рёбра считаются упорядоченными согласно порядку появления c -кривых при обходе границы соответствующей области.



Р и с у н о к 1.3

Пример потока из класса G и его граф

Два многоцветных графа Γ_{ft} и Γ_{f^t} , соответствующие потокам f^t и f^{ft} из класса G соответственно, назовём *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение вершин и ребер одного графа соответственно в вершины и ребра другого графа с сохранением цветности всех рёбер и нумерации c -рёбер.

Т е о р е м а 1.1. *Потоки из класса G топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их многоцветные графы изоморфны.*

Принято считать, что алгоритм решения задачи распознавания изоморфности графов (в каком-нибудь классе графов) является *эффективным*, если время его работы ограничено некоторым полиномом от длины задания входной информации. Такое определение эффективной разрешимости восходит к А. Кобхэму [2]. Стандартом труднорешаемости является NP-полнота задачи [5]. Сложностной статус задачи распознавания изоморфизма графов не известен до сих пор, т. е. в классе всех графов для этой задачи не доказана ни полиномиальная разрешимость, ни NP-полнота. Вместе с тем, многоцветные графы не являются графами общего вида, поскольку они вложимы в несущую поверхность, на которой заданы соответствующие им потоки класса G . Этот факт позволяет доказать следующую теорему.

Т е о р е м а 1.2. *Задача распознавания изоморфизма многоцветных графов, соответствующих потокам из класса G , может быть решена за полиномиальное время.*

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году (проект № 98 «Топологические методы в динамике»), Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 15-01-03689-а, 16-31-60008-мол_а_дк), гранта Президента РФ МК-4819.2016.1, лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур НИУ ВШЭ.

2. Доказательство классификационной Теоремы 1.1.

Приведем необходимый в доказательстве технический факт.

Предложение 2.1. ([13]) *Поток f^t из класса G в некоторой окрестности неподвижной точки $p \in \Omega_{f^t}^i$ топологически сопряжен линейному потоку $a^t(x, y) = ((\frac{x}{2})^t, (\frac{y}{2})^t)$ при $i = 0$, $b^t(x, y) = ((\frac{x}{2})^t, (2y)^t)$ при $i = 1$ или $c^t(x, y) = ((2x)^t, (2y)^t)$ при $i = 2$.*

Докажем, что потоки из класса G топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их многоцветные графы изоморфны.

Пусть $f^t \in G$ ($f^{t'} \in G$) и Γ_{f^t} ($\Gamma_{f^{t'}}$) – многоцветный граф, построенный по потоку f^t ($f^{t'}$). Обозначим через π_{f^t} – взаимно-однозначное соответствие между вершинами и многоугольными областями, а также между ребрами s –, t –, s –, c – кривыми графа Γ_{f^t} и потока f^t соответственно.

Необходимость. Пусть потоки f^t и $f^{t'}$ топологически эквивалентны, т. е. существует гомеоморфизм $h : S \rightarrow S$, переводящий траектории f^t в траектории $f^{t'}$. Будем считать, не уменьшая общности, что множество многоугольных областей потока $f^{t'}$ построено с помощью t -кривых $\mathcal{T}' = h(\mathcal{T})$. Тогда гомеоморфизм h переводит многоугольные области потока f^t в многоугольные области потока $f^{t'}$ и искомым изоморфизм $\xi : \Gamma_{f^t} \rightarrow \Gamma_{f^{t'}}$ определяется формулой $\xi = \pi_{f^{t'}} h \pi_{f^t}^{-1}$.

Достаточность. Пусть графы Γ_{f^t} и $\Gamma_{f^{t'}}$ потоков f^t и $f^{t'}$ изоморфны посредством ξ . Построим гомеоморфизм $h : S \rightarrow S$, осуществляющий топологическую эквивалентность потоков f^t и $f^{t'}$.

Шаг 1. Рассмотрим многоугольную область $\Delta \in \Delta_{f^t}$. Она содержит единственный источник α , единственный сток ω и n седловых точек $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n, n \in \mathbb{N}$, которые мы положим расположенными на границе в порядке номеров в направлении движения.

Рассмотрим область Δ' для потока $f^{t'}$, для которой выполняется $\Delta' = \pi_{f^{t'}}^{-1} \xi \pi_{f^t}$. Изоморфизм ξ обеспечивает одинаковое количество одноцветных рёбер, исходящих из вершин графов, соответствующих областям Δ и Δ' , с сохранением нумерации c -рёбер, что влечёт у Δ' наличие в границе ровно $n - 1$ штук c -кривых, то есть как и у области Δ , и расположенных в порядке номеров соответствующих им рёбер так, что c -кривая, соответствующая c -ребру с первым номером, лежит следом за u -кривой. Это означает наличие у области Δ' ровно n штук сёдел $\sigma'_1, \sigma'_2, \dots, \sigma'_n$, расположенных на границе при движении в выбранном направлении; также это означает одинаковое расположение c -кривых в границе Δ и в границе Δ' .

Шаг 2. Построим гомеоморфизм $H_\Delta : cl(\Delta) \rightarrow cl(\Delta')$, переводящий траектории потока f^t , лежащие в $cl(\Delta)$ в траектории потока $f^{t'}$, лежащие в $cl(\Delta')$, таким образом, чтобы для некоторой стороны ℓ' области Δ' выполнялось $\ell' = \pi_{f^{t'}}^{-1} \xi \pi_{f^t}(\ell)$, где ℓ – некоторая сторона области Δ .

Положим $H_\Delta(\alpha) = \alpha'$, $H_\Delta(\omega) = \omega'$, $H_\Delta(\sigma_i) = \sigma'_i$, $i = \overline{1, n}$. Будем обозначать замыкание участка некоторой траектории, ограниченного точками a и b , через $l_{a,b}$, а через $\lambda_{a,b}$ – его длину, при этом через $l_{\alpha,\omega}$ ($l_{\alpha',\omega'}$) всегда будем обозначать t -кривую, а через $\lambda_{\alpha,\omega}$

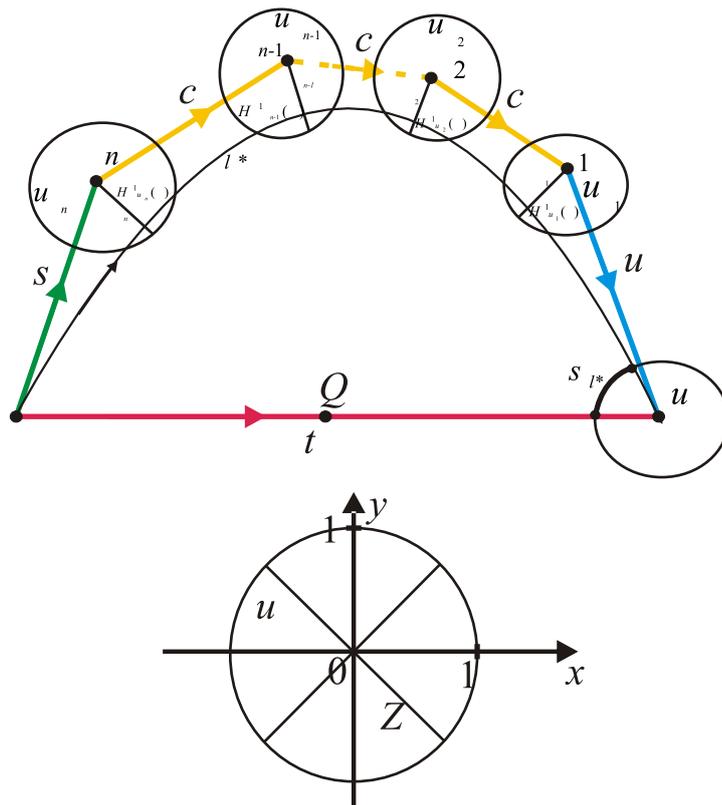
$(\lambda_{\alpha',\omega'})$ – её длину. Кроме того, замыкание некоторой оговорённой ранее секущей участка, ограниченного точками c и d , будем обозначать через $m_{c,d}$, а через $\mu_{c,d}$ – его длину. Отметим, что $l_{a,b} = l_{b,a}$, $m_{c,d} = m_{d,c}$, $\lambda_{a,b} = \lambda_{b,a}$, $\mu_{c,d} = \mu_{d,c}$. Для точки x такой, что $x \in l_{\alpha,\omega}$, положим $H_{\Delta}(x) = x'$, где $x' \in l_{\alpha',\omega'}$ и $\lambda_{\alpha',x'} = \frac{\lambda_{\alpha,x}\lambda_{\alpha',\omega'}}{\lambda_{\alpha,\omega}}$. Аналогичным образом определим отображение H_{Δ} на каждой стороне многоугольной области.

Определим точку $Q \in l_{\alpha,\omega}$ ($Q' \in l_{\alpha',\omega'}$) так, что $\lambda_{\alpha,Q} = \lambda_{Q,\omega}$ ($\lambda_{\alpha',Q'} = \lambda_{Q',\omega'}$). Из этого определения вытекает, что $H_{\Delta}(Q) = Q'$.

Шаг 3. Проведём секущие от неподвижных точек до точки Q , трансверсальные всем траекториям нашей области. Для этого совершим следующие действия.

Обозначим $u_{\sigma_1}, u_{\sigma_2}, \dots, u_{\sigma_n}$ попарно не пересекающиеся окрестности точек $\omega, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ соответственно. На плоскости \mathbb{R}^2 зададим поток $b^t(x, y) = ((\frac{x}{2})^t, (2y)^t)$, для которого $(0, 0)$ – седловая точка. Пусть $u = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. На основании Предложения 2.1. у любого седла σ_i существует окрестность, внутри которой f^t сопряжён $b^t|_u$. Обозначим через $u_{\sigma_1}, u_{\sigma_2}, \dots, u_{\sigma_n}$ попарно не пересекающиеся окрестности точек $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ соответственно, такие, что $f^t|_{u_{\sigma_i}}$, где $i = \overline{1, n}$, сопряжён $b^t|_u$ посредством гомеоморфизма $H_{u_{\sigma_i}} : u_{\sigma_i} \rightarrow u$. Пусть $Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| = |y|\} \cap u$, представляющий из себя два пересекающихся в начале координат отрезка, пересекающих траектории b^t трансверсально. Положим ζ – компонента связности $Z \setminus \{(0, 0)\}$ такая, что $H_{u_{\sigma_i}}^{-1}(\zeta) \subset \Delta$. Для b^t отрезок ζ трансверсален его траекториям, поэтому траекториям f^t будет трансверсально $H_{u_{\sigma_i}}^{-1}(\zeta)$. Выберем некоторую траекторию ℓ^* , которая пересекает все $H_{u_{\sigma_i}}^{-1}(\zeta)$ (см. рис. 2.1). Обозначим участки $H_{u_{\sigma_i}}^{-1}(\zeta)$, соединяющие σ_i и точку пересечения $H_{u_{\sigma_i}}^{-1}(\zeta)$ и ℓ^* через ζ_i .

На плоскости \mathbb{R}^2 зададим поток $a^t(x, y) = ((\frac{1}{2}x)^t, (\frac{1}{2}y)^t)$, для которого $(0, 0)$ – сток. В силу Предложения 2.1. у стока ω существует окрестность u_{ω} и гомеоморфизм $H_{u_{\omega}} : u_{\omega} \rightarrow u$ такие, что $f^t|_{u_{\omega}}$ сопряжён $a^t|_u$ посредством $H_{u_{\omega}}$. Поскольку ∂u трансверсальна всем траекториям a^t , получаем, что ∂u_{ω} , гомеоморфная ∂u посредством $H_{u_{\omega}}^{-1}$, тоже трансверсальна траекториям f^t . Выберем некоторый участок ∂u_{ω} , одним концом лежащий на $l_{\alpha,\omega}$, другим на ℓ^* , и лежащий внутри нашей многоугольной области, назовём его $S_{\theta\ell^*}$ (см. рис. 2.1).

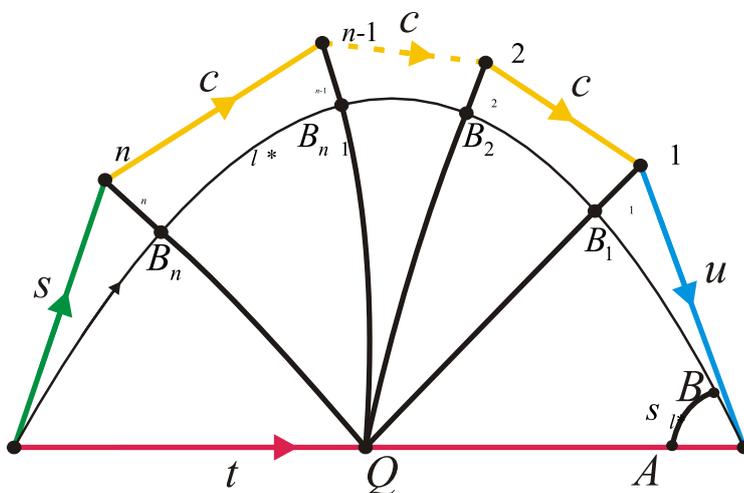


Р и с у н о к 2.1

Построение $H_{u\sigma_i}^{-1}(\zeta)$ и $S_{\theta\ell^*}$

Обозначим пересечение $S_{\theta\ell^*}$ с $l_{\alpha,\omega}$ через A , а с ℓ^* – через B . Обозначим точку пересечения ℓ^* с $H_{u\sigma_i}^{-1}(\zeta)$ через B_i , где $i = \overline{1, n}$. Переобозначим в соответствии с оговорённым выше $S_{\theta\ell^*}$ через $m_{A,B}$ (смотрите Рис. 2.2).

Выберем t_0 и t_i так, что $A = f^{t_0}(Q)$ и $B = f^{t_i}(B_i)$. Определим секущую $m_{B_i,Q}$, трансверсально пересекающую траектории, формулой $m_{B_i,Q} = \{f^{\frac{\mu_{A,x}}{\mu_{A,B}} t_i + (1 - \frac{\mu_{A,x}}{\mu_{A,B}}) t_0}(x)$, где $x \in m_{A,B}\}$. При этом $m_{B_i,Q}$ гладко соединяется с ζ_i , поэтому $m_{\sigma_i,Q}$ тоже трансверсально пересекает траектории (смотрите Рис. 2.2).



Р и с у н о к 2.2

Построение секущих

Так мы получили количество секущих, равное числу седловых точек наших многоугольных областей. Они не пересекаются между собой и своими концами имеют седловую точку и точку Q – середину t -кривой этой области.

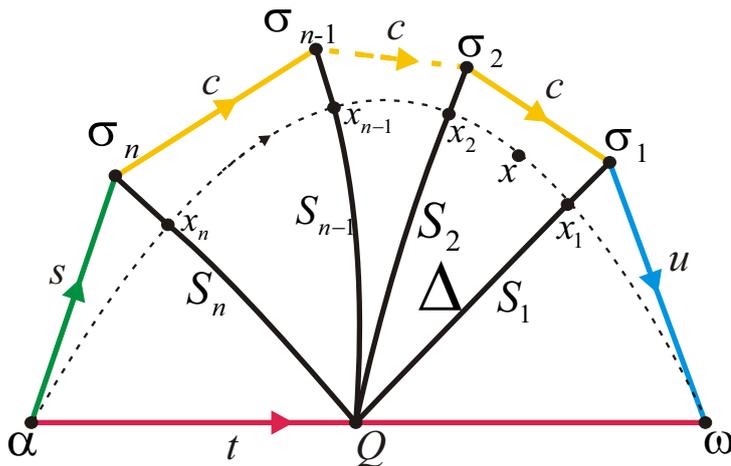
Повторим все действия шага 3 для потока f^t , помечая штрихами все обозначения, аналогичные сделанным для потока f^t .

Шаг 4. Доопределим H_Δ внутри многоугольной области всюду.

Сначала распространим H_Δ на секущую $m_{\sigma_1, Q}$. Положим для $x \in m_{\sigma_1, Q}$, что $H_\Delta(x) = x'$, если $x' \in m_{\sigma'_1, Q'}$ и выполняется $\mu_{Q', x'} = \frac{\mu_{Q, x} \lambda_{\sigma'_1, Q'}}{m_{\sigma_1, Q}}$. Переобозначим наши секущие: $m_{\sigma_i, Q} \equiv S_i$ ($m_{\sigma'_i, Q'} \equiv S'_i$) (см. рис. 2.3).

Пусть x лежит в замкнутой области, ограниченной u -кривой, t -кривой и S_1 . Выберем \tilde{t}_0 так, что $x = f^{\tilde{t}_0}(x_1)$, где $x_1 \in S_1$. Точка $x_1 = H_\Delta^{-1}(x'_1)$, где $x'_1 \in S'_1$. Тогда для некоторого \tilde{t}'_0 положим $x' = H_\Delta(x)$, где $x' = f^{\tilde{t}'_0}(x'_1)$ и выполняется $\lambda_{x', x'_1} = \frac{\lambda_{x, x_1} \lambda_{\omega', x'_1}}{\lambda_{\omega, x_1}}$ (см. рис. 2.3).

Пусть x лежит в замкнутой области, ограниченной s -кривой, S_i и S_{i+1} . Выберем \tilde{t}_i так, что $x = f^{-\tilde{t}_i}(x_1)$. Тогда положим $x' = H_\Delta(x)$, где $x' = f^{-\tilde{t}'_i}(x'_1)$ для некоторого \tilde{t}'_i и выполняется $\lambda_{x', x'} = \frac{\lambda_{x_i, x} \lambda_{x'_i, x'_{i+1}}}{\lambda_{x_i, x_{i+1}}}$, где $x_i \in S_i$ ($x'_i \in S'_i$), $x_{i+1} \in S_{i+1}$ ($x'_{i+1} \in S'_{i+1}$), а для некоторых \bar{t}_i (\bar{t}'_i) и \bar{t}_{i+1} (\bar{t}'_{i+1}) имеет место $x_i = f^{-\bar{t}_i}(x_1)$ ($x'_i = f^{-\bar{t}'_i}(x'_1)$) и $x_{i+1} = f^{-\bar{t}_{i+1}}(x_1)$ ($x'_{i+1} = f^{-\bar{t}'_{i+1}}(x'_1)$) (см. рис. 2.3).



Р и с у н о к 2.3

Продолжение гомеоморфизма внутрь области Δ

Пусть x лежит в замкнутой области, ограниченной s -кривой, t -кривой и S_n . Выберем \tilde{t}_n так, что $x = f^{-\tilde{t}_n}(x_1)$. Тогда положим $x' = H_\Delta(x)$, где $x' = f^{-\tilde{t}'_n}(x'_1)$ для некоторого \tilde{t}'_n и выполняется $\lambda_{x', x'} = \frac{\lambda_{x_n, x} \lambda_{x'_n, \alpha'}}{\lambda_{x_n, \alpha}}$, где $x_n \in S_n$ ($x'_n \in S'_n$) и для некоторого \bar{t}_n (\bar{t}'_n) имеет место $x_n = f^{-\bar{t}_n}(x_1)$ ($x'_n = f^{-\bar{t}'_n}(x'_1)$) (см. рис. 2.3).

Итак, мы отобразили посредством H_Δ многоугольную область Δ на многоугольную область Δ' .

Шаг 5. Мы строили H_Δ , начиная с отображения сторон многоугольной области и затем непрерывно продолжая гомеоморфизм внутрь. Построив его на Δ , получаем, что на некоторых сторонах смежных с ней многоугольных областей гомеоморфизм уже создан, однако это не создаёт проблемы для создания гомеоморфизмов, отображающих эти смежные области друг на друга, и равных H_Δ на смежных с Δ сторонах, потому что мы начали построение H_Δ с его определения на сторонах Δ . Поэтому повторяем шаги

со второго по четвёртый для многоугольных областей, связанных посредством $\pi_{ft}^{-1}\xi\pi_{ft}$ и имеющих общие стороны с многоугольными областями, на которых гомеоморфизм уже задан.

Таким образом, определим гомеоморфизм $h : S \rightarrow S$ так, что $h(x) = H_{\Delta}(x)$, если $x \in cl(\Delta)$.

3. Эффективный алгоритм распознавания изоморфности графов потоков класса G

В данном разделе мы доказываем Теорему 1.2. путем построения эффективного алгоритма распознавания (с точностью до изоморфизма) многоцветных графов потоков из класса G . Для этого можно считать, что количества вершин и рёбер у этих графов совпадают, иначе они заведомо не изоморфны. По построению многоцветные графы потоков из G не являются графами общего вида, поскольку они вложимы в несущую поверхность, на которой заданы соответствующие им потоки класса G . Иными словами, эти графы можно изобразить так, что их вершины — точки на поверхности, а рёбра — жордановы кривые и рёбра не пересекаются во внутренних своих точках. Интерес к этому наблюдению вызван существованием эффективного алгоритма различения *обыкновенных графов* (т. е. непомеченных графов без петель, ориентированных и кратных рёбер), вложимых в заданную поверхность, а именно, имеет место следующий факт.

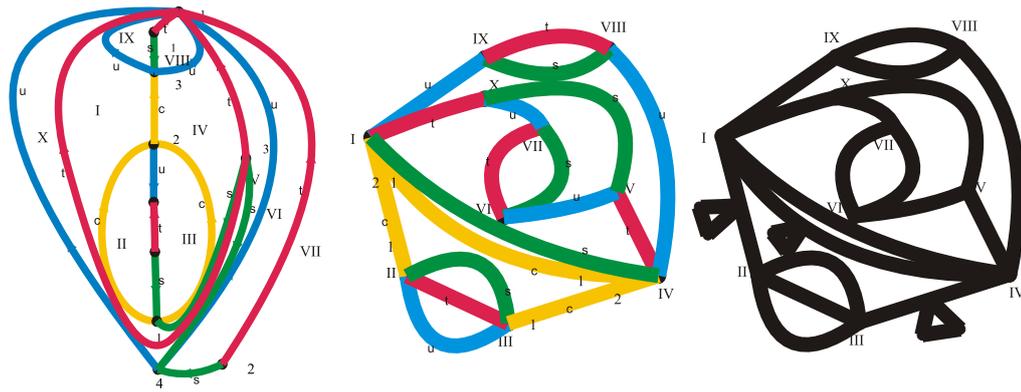
Предложение 3.1. ([10]) *Задача распознавания изоморфизма двух n -вершинных обыкновенных графов, каждый из которых вложим в поверхность рода g , может быть решена за время $O(n^{O(g)})$.*

К сожалению, приведенный результат не может быть непосредственно применён к распознаванию изоморфизма графов Γ_{ft} и Γ_{ft} , поскольку они не являются обыкновенными. Тем не менее, задачу изоморфизма многоцветных графов можно свести (с невысокой трудоёмкостью сведения) к задаче изоморфизма обыкновенных графов, вложимых в поверхность. Для этого нам понадобятся две операции с графами — k -подразбиение ребра и (k_1, k_2) -подразбиение ребра.

Операция k -подразбиения ребра (a, b) графа состоит в том, чтобы удалить его из графа, добавить вершины c_1, \dots, c_k и рёбра $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_k, b)$.

Операция (k_1, k_2) -подразбиения ребра (a, b) графа состоит в том, чтобы удалить его из графа, добавить вершины $c_1, c_2, \dots, c_{k_1}, v, u, w, d_1, d_2, \dots, d_{k_2}$ и рёбра $(a, c_1), (c_1, c_2), \dots, (c_{k_1}, v), (v, u), (u, w), (v, w), (v, d_1), (d_1, d_2), \dots, (d_{k_2}, b)$.

Для заданного графа Γ_{ft} построим соответствующий ему обыкновенный граф $\Gamma(f^t)$ следующим образом. В графе Γ_{ft} выполним 1-подразбиение каждого s -ребра, 2-подразбиение каждого t -ребра, 3-подразбиение каждого u -ребра. Пусть $e = (a, b)$ — произвольное s -ребро графа Γ_{ft} , $num_a(e)$ и $num_b(e)$ — номера ребра e в множествах s -рёбер, соответственно инцидентных вершинам a и b . Выполним $(num_a(e), num_b(e))$ -подразбиение ребра e . Подобную операцию выполним для всех s -рёбер графа Γ_{ft} (см. рис. 3.1).



Р и с у н о к 3.1

Пример потока f^t из класса G , его четырёхцветный граф Γ_{f^t} и соответствующий ему обыкновенный граф $\Gamma(f^t)$

Л е м м а 3.1. *Графы Γ_{f^t} и Γ_{f^t} изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны графы $\Gamma(f^t)$ и $\Gamma(f^t)$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что по графу Γ_{f^t} граф $\Gamma(f^t)$ определяется единственным образом. Покажем, что верно и обратное утверждение. Отсюда будет следовать справедливость леммы. Каждая многоугольная область множества Δ_{f^t} имеет не менее трёх сторон, и поэтому каждая вершина Γ_{f^t} имеет не менее трёх соседей в этом графе. Очевидно, что в графе $\Gamma(f^t)$ никакая вершина графа Γ_{f^t} не принадлежит никакому треугольнику. Поэтому множество вершин графа Γ_{f^t} образуют те и только те вершины графа $\Gamma(f^t)$, которые имеют не менее трёх соседей и не принадлежат треугольникам. Удалив из графа $\Gamma(f^t)$ все вершины графа Γ_{f^t} , мы получим дизъюнктное объединение связанных подграфов, каждый из которых является либо путём, либо путём, к некоторой внутренней вершине которого «присоединён» треугольник. Эти связанные подграфы являются индикаторами наличия рёбер между соответствующими вершинами графа Γ_{f^t} . Если подграф является путём, то его длина определяет цвет из множества $\{s, t, u\}$ у соответствующего ребра графа Γ_{f^t} . Если подграф является путём с «присоединённым» треугольником, то он соответствует некоторому c -ребру $e = (a, b)$ графа Γ_{f^t} . В данном подграфе, удалив вершины треугольника, получим два пути, длины которых определяют номера e в множествах c -рёбер, инцидентных вершинам a и b соответственно. Тем самым, по графу $\Gamma(f^t)$ граф Γ_{f^t} восстанавливается единственным образом.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Оценим количество вершин графа $\Gamma(f^t)$ в предположении, что граф Γ_{f^t} имеет n вершин и m рёбер. Очевидно, что каждое из m рёбер графа Γ_{f^t} соответствует некоторому подграфу графа $\Gamma(f^t)$, содержащему не более $2n + 5$ вершин. Поэтому граф $\Gamma(f^t)$ имеет не более $(2n + 5)m$ вершин и может быть эффективно вычислен по графу Γ_{f^t} . Отметим, что граф $\Gamma(f^t)$ вложим в ту же поверхность, что и граф Γ_{f^t} . Поэтому, по Лемме 6.1, имеет место полиномиальное сведение задачи распознавания изоморфизма многоцветных графов потоков из класса G к задаче распознавания изоморфизма обыкновенных графов, вложенных в фиксированную поверхность. Отсюда и по Предложению 6.1 справедлива Теорема 1.2..

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А. А., Понтрягин Л. С., “Грубые системы”, *Доклады Академии наук СССР*, **14**:5 (1937), 247-250.
2. Cobham A, “The intrinsic computational difficulty of functions”, 1964, 24-30.
3. Grines V., Malyshev D., Pochinka O., Zinina S., “Efficient algorithms for the recognition of topologically conjugate gradient-like diffeomorphisms”, *Regular and Chaotic Dynamics*, **21**:2 (2016.), 189-203.
4. Гринес В. З., Капкаева С.Х., Починка О.В., “Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Математический сборник*, **205**:10 (2014.), 19-46.
5. Гэри М., Джонсон Д., *Вычислительные машины и труднорешаемые задачи*, М.: Мир, 1982, 416 с.
6. Починка О.В., Круглов В.Е., Митрякова Т.М., “О типах ячеек Омега-устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях”, *Динамические системы*, **5(33)**:1-2 (2015), 43-49.
7. Леонтович Е. А., Майер А.Г., “О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР СССР*, **14**:5 (1937), 251-257.
8. Леонтович Е. А., Майер А.Г., “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Докл. Акад. АН СССР*, **103**:4 (1955), 557-560.
9. Майер А.Г., “Грубые преобразования окружности”, *Уч. Зап. ГГУ. Горький, публикации. ГГУ*, **12** (1939), 215-229.
10. Miller G., “Isomorphism testing for graphs of bounded genus”, 1980, 225-235.
11. Neumann D., O’Brien T., “Global structure of continuous flows on 2-manifolds”, *J. Diff. Eq.*, **22**:1 (1976), 89-110.
12. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях”, *Матем. сб.*, **189**:8 (1998), 93-140.
13. Палис Ж., ди Мелу В., *Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ.*, Мир, М., 1986, 301 с.
14. Peixoto M., *On the classification of flows on two manifolds*, Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ. of Bahia, Salvador, Brasil, 1971.
15. Pugh C., Shub M., “ Ω -stability for flows”, *Inven. Math.*, **11** (1970), 150-158.

Дата поступления 9.05.2016

The graph criterion for the topological equivalence of Ω – stable flows without periodic trajectories on surfaces and efficient algorithm for its application

© V. E. Kruglov⁵, D. S. Malyshev⁶, O. V. Pochinka⁷

Abstract. Studying of dynamics of flows on surfaces by dividing a phase space into cells with same limit behavior of trajectories within the cell goes back to the classical works of A.A. Andronov, L.S. Pontryagin, E.A. Leontovich and A.G. Mayer. Types of cells (which are finite in number) and abutting each other fully determine the class of topological equivalence of a flow with finite number of singular trajectories. If in each cell of the rough stream without periodic orbits we select one trajectory, the cells fall into so-called triangular regions which has the same single type. Combinatorial description of such a partition leads to a three-colored graph of A.A. Oshemkov and V.V. Sharko. The vertices of this graph correspond to the triangular areas and edges correspond to those separatrices that link them. A.A. Oshemkov and V.V. Sharko demonstrated that two such flow topologically equivalent if and only if their three-colored graphs are isomorphic and an algorithm of distinction of three-colored graphs is described. However, their algorithm is not effective in terms of graph theory. In this work the dynamics of Ω –stable flows without periodic trajectories on surfaces is described in terms of four-colored graphs and effective algorithm of distinction of these graphs is given.

Key Words: multicolored graph, topological invariant, Ω -stable flow, effective algorithm

⁵ Student, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; krugovslava21@mail.ru

⁶ Professor of Department of Applied Mathematics and Informatics, High School Economy, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; dsalyshev@rambler.ru

⁷ Professor of Department fundamental mathematics, High School Economy, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru

УДК 512.917+513.9

Непрерывность топологической энтропии для кусочно-гладких отображений лоренцевского типа

© М. И. Малкин¹, К. А. Сафонов²

Аннотация. Для одномерных отображений лоренцевского типа изучается вопрос о поведении топологической энтропии как функции отображения. В предыдущей работе авторов было показано, что энтропия как функция отображения в C^0 -топологии может иметь разрыв (скачок) только в исключительном случае, а именно, в окрестности отображения с нулевой энтропией, причем тогда и только тогда, когда оба нидинг-инварианта отображения периодичны с одним и тем же периодом. В данной статье мы показываем, что в классе лоренцевских отображений с C^1 -топологией и при наличии нулевых односторонних производных в точке разрыва указанный исключительный случай невозможен, а значит, энтропия непрерывно зависит от отображения.

Ключевые слова: топологическая энтропия, отображения лоренцевского типа, нидинг-инвариант

1. Введение

Одномерные разрывные отображения с двумя интервалами монотонного возрастания (лоренцевские отображения) и их надстройки моделируют отображения Пуанкаре для потоков со сложным поведением предельных траекторий, имеющих странные аттракторы типа аттрактора Лоренца (см. [4]). В работе М.И. Малкина [1] рассматривался вопрос о непрерывности топологической энтропии $h_{top}(f)$ как функции отображения f для класса кусочно-непрерывных монотонных отображений отрезка с одной точкой разрыва. При условии плотности прообразов точки разрыва была доказана теорема о непрерывности энтропии на пространстве лоренцевских отображений с C^0 -топологией. Можно показать, что этот результат справедлив, если условие плотности прообразов разрыва заменить на условие положительности топологической энтропии отображения, в окрестности которого рассматривается функция $h_{top}(f)$. Если же рассматривать функцию $h_{top}(f)$ в окрестности отображения f_0 с нулевой энтропией, то, как показано в предыдущей статье авторов [2], $h_{top}(f)$ может иметь разрыв (скачок энтропии), причем такой разрыв имеет место тогда и только тогда, когда оба нидинг-инварианта отображения периодичны с одним и тем же периодом.

Подобный вопрос о возможных скачках топологической энтропии изучался ранее для класса непрерывных кусочно-монотонных отображений. В работе М. Мизюревича [7] было получено значение максимально возможного скачка энтропии для этого класса и установлено, что величина скачка зависит от количества критических точек, входящих в периодические орбиты.

В работе [2] мы установили точное значение максимально возможного разрыва энтропии в классе лоренцевских отображений и показали, что по аналогии с результатом Мизюревича величина скачка энтропии определяется (общим) периодом орбит, проходящих через точку разрыва лоренцевского отображения f_0 с нулевой энтропией. В связи с

¹ Доцент кафедры дифференциальных уравнений, математического и численного анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики, Нижний Новгород; malkin@unn.ru

² Студент, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Институт информационных технологий, математики и механики, Нижний Новгород

этим результатом возникает такой вопрос: нельзя ли все же добиться непрерывности энтропии, если повысить класс гладкости отображений и рассматривать их в C^k -топологии ($k \geq 1$). Нетрудно убедиться (см. конструкцию контрпримеров в [2]), что при любой гладкости можно построить контрпример со скачком энтропии в окрестности лоренцевского отображения с нулевой энтропией, у которого односторонние производные в точке разрыва строго положительны. Если же односторонние производные в точке разрыва равны нулю, то, как будет доказано в данной статье (см. Теорему 3.1), топологическая энтропия зависит непрерывно от отображения с C^1 -топологией.

Заметим, что в случае симметричных лоренцевских отображений эту теорему можно доказать непосредственно, используя результаты Милнора-Терстона [6], а также М. И. Малкина и М.-Ч. Ли [5]. Действительно, в работе [6] была доказана непрерывность энтропии для дифференцируемых кусочно-монотонных отображений с C^1 -топологией, а в работе [5] установлено соответствие между динамикой унимодальных и симметричных лоренцевских отображений (в частности, с сохранением энтропии для соответствующих отображений).

2. Предварительные сведения

Мы рассматриваем семейство \mathcal{F} лоренцевских отображений $f : I \rightarrow I$, где $I = [0, 1]$ и f удовлетворяет условиям:

1. f — непрерывно дифференцируемая, строго монотонно возрастающая функция на каждом из полуинтервалов $[0; c)$ и $(c; 1]$;
2. $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = 0$.

При изменении отображения f в классе лоренцевских отображений для рассмотрения топологии в пространстве отображений точку разрыва $c = c(f)$ без ограничения общности можно считать не зависящей от f , если сделать при необходимости соответствующую замену координат. С другой стороны, рассматривая поднятие лоренцевского отображения как разрывного отображения окружности степени 1 (см. [5]), мы получаем разрывное отображение прямой в себя с фиксированными точками разрыва в целых точках, в то время как в точке c (и в точках $c + n$ для целых n) поднятие является непрерывным, так что можно C^0 -топологию лоренцевских отображений определить как обычную C^0 -топологию на отрезке $[0; 1]$ для поднятий, а в случае непрерывно дифференцируемых лоренцевских отображений при совпадении односторонних производных в точке разрыва (и существовании односторонних производных в точках 0 и 1) аналогично определяется C^1 -топология. Таким образом, считая точку разрыва не зависящей от f , на множестве \mathcal{F} введем C^1 -топологию соотношением

$$d(f, g) = \max(\sup_{x \in I \setminus c} |f(x) - g(x)|, \sup_{x \in I \setminus c} |f'(x) - g'(x)|).$$

Вначале напомним некоторые определения из [2]. Пусть Π — пространство последовательностей $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$ из символов $\{-1, 1\}$ с топологией прямого (тихоновского) произведения $\{-1, 1\}^{\mathbf{Z}^+}$ (счетного числа экземпляров двухэлементного множества с дискретной топологией). Будем считать, что топология на Π задана метрикой $d(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_n - \beta_n|}{2^n}$ (эта метрика согласована с указанной топологией). Далее будем считать, что на Π установлен лексикографический порядок (индуцированный очевидным неравенством $(-1) < (+1)$). На этом пространстве определено отображение

$\sigma : \Pi \rightarrow \Pi$ — отображение левого сдвига: $\sigma(\omega_0\omega_1\omega_2\dots) = (\omega_1\omega_2\dots)$. Множество прообразов точки разрыва c отображения f обозначим $D = \cup_{n=0}^{\infty} D_n$, где $D_0 = \{c\}$, $D_n = \{x \in I | f^n(x) = c, f^{n-1}(x) \neq c\}$.

О п р е д е л е н и е 2.1. *Нидинг-последовательностью точки $x \in I \setminus D$ называется последовательность $\omega(x) = \omega_0\omega_1\omega_2\dots$, где $\omega_i = \text{sign}(f^i(x) - c)$. Формальный степенной ряд $\tilde{\omega} = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i t^i$ переменного t будем называть нидинг-рядом точки x .*

Для каждой точки $x \in D$ определим пару нидинг-последовательностей по формуле:

$$K^+(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \rightarrow x+0} \omega(y), \quad K^-(x) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{y \rightarrow x-0} \omega(y), \quad y \in I \setminus D.$$

О п р е д е л е н и е 2.2. *Нидинг-инвариантами отображения $f \in \mathcal{F}$ называется пара последовательностей $(K_f^+(c), K_f^-(c))$.*

Пара нидинг-инвариантов $(\alpha, \beta) = (K_f^+(c), K_f^-(c))$ является символическим описанием отображения f , а в случае плотности D прообразов разрыва эта пара является полной системой инвариантов топологической сопряженности.

Обозначим $\Sigma_f = \{\omega(x) | x \in I \setminus D\}$ — замыкание множества всех возможных нидинг-последовательностей; согласно [3] топологическую энтропию разрывного отображения $f \in \mathcal{F}$ можно определить как

$$h_{top}(f) = h_{top}(\sigma | \Sigma_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log l'_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log l_n}{n},$$

где l'_n — число допустимых n -блоков в Σ_f , а $l_n = \text{card} D_n$.

Пусть $r(f)$ — радиус сходимости ряда $\tilde{L}_f = \sum_{n=0}^{\infty} l_n t^n$, а $r'(f) = \min(r(f), 1)$. Из формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости имеем

$$h_{top}(f) = -\log r'(f).$$

Связь топологической энтропии с производящей функцией нидинг-инвариантов устанавливает следующая лемма (см. [1]).

Л е м м а 2.1. *Значение $r'(f) = \min(r(f), 1)$ совпадает с наименьшим положительным корнем аналитической в единичном круге функции $\Theta_f(t) = \tilde{K}_f^+(c) - \tilde{K}_f^-(c)$.*

В статье [2] был получен критерий непрерывности топологической энтропии для лоренцевских отображений в пространстве с C^0 -топологией в терминах нидинг-инвариантов, который имеет следующую формулировку.

Т е о р е м а 2.1. *Функция $f \rightarrow h_{top}(f)$ в классе лоренцевских отображений, рассматриваемых в C^0 -топологии, является разрывной в окрестности отображения f_0 тогда и только тогда, когда $h_{top}(f_0) = 0$ и нидинг-инварианты $K_{f_0}^+, K_{f_0}^-$ отображения f_0 периодичны с одним и тем же периодом; величина скачка энтропии в этом случае равна $\frac{1}{p} \log 2$, где p — общий период нидинг-инвариантов.*

Поскольку, в силу данной теоремы, за исключением указанного в ее формулировке случая, топологическая энтропия непрерывно зависит от отображения, остаётся рассмотреть этот исключительный случай. В данной статье мы добавляем условие кусочной C^1 -гладкости отображения f при наличии нулевых односторонних производных в точке разрыва. Будет показано, что в этом классе отображений с C^1 -топологией энтропия непрерывно зависит от отображения.

3. Основная теорема

Исходя из предыдущего пункта, мы будем рассматривать C^1 -гладкие (вне точки разрыва) лоренцевские отображения и изучим поведение энтропии в окрестности данного отображения f , удовлетворяющего исключительным условиям теоремы 2.1., гарантирующим в C^1 -топологии скачок энтропии. Таким образом, будем предполагать нулевое значение энтропии для f и выполнение указанных в теореме равенств.

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f^p(x) = \lim_{x \rightarrow c+0} f^p(x) = c \text{ для некоторого минимального } p. \quad (3.1)$$

Также добавим условие на односторонние нулевые производные в точке разрыва и поэтому

$$\lim_{x \rightarrow c-0} (f^p)'(x) = \lim_{x \rightarrow c+0} (f^p)'(x) = 0. \quad (3.2)$$

Для начала введем некоторые дополнительные обозначения. Считая отображение f и число p фиксированными, обозначим $g^p = \bar{g}$ для рассматриваемых в этом параграфе отображений g (близких к f). Точку разрыва отображения g обозначим c_g , а ближайшие к ней справа и слева точки разрыва отображения \bar{g} (или прообразы $\bar{g}^{(-1)}(c_g)$) обозначим соответственно a_g и b_g . Нам понадобятся также образы точки разрыва c_g :

$$u_g = \bar{g}(c_g + 0), v_g = \bar{g}(c_g - 0).$$

В качестве $\tau(I)$ будем считать длину интервала I .

Для произвольного отображения $f \in \mathcal{F}$, удовлетворяющего условиям (3.1) и (3.2), отображение \bar{f} непрерывно в точке c (точнее, имеет место устранимый разрыв), а нидинг-инварианты имеют вид

$$K_f^+ = PPP \dots, K_f^- = QQQ \dots, \text{ поэтому } \Theta_f = \frac{\tilde{P} - \tilde{Q}}{1 - t^p},$$

где \tilde{P} и \tilde{Q} — соответствующие многочлены степени p . Таким образом, наименьший положительный корень функции $\Theta_f(t)$ совпадает с наименьшим положительным корнем многочлена $\tilde{P} - \tilde{Q}$. Для доказательства непрерывности энтропии в точке f выясним, какие нидинг-инварианты могут иметь близкие в C^1 -топологии отображения g .

Для любой функции $g \in \mathcal{F}$ поведение функции \bar{g} в окрестности точки разрыва можно описать одним из следующих условий:

1. $v_g \leq c, u_g \geq c$,
2. $v_g > c, u_g \geq c$,
3. $v_g \leq c, u_g < c$,
4. $v_g > c, u_g < c$.

Мы будем проводить рассуждения для каждого из этих случаев в отдельности.

1. В первом случае при приближении отображения g к исходному отображению f точки a_g и b_g стремятся к точкам a_f и b_f соответственно, и эти точки являются точками разрыва отображений \bar{g} и \bar{f} . Выберем ε -окрестность отображения f в C^1 -топологии так, чтобы для любого отображения из этой окрестности выполнялись неравенства

$$|v_g| < \varepsilon < \frac{a_f}{3}, \quad |u_g| < \varepsilon < \frac{b_f}{3},$$

$$\bar{g}'(x) < \frac{1}{2}, \quad x \in (-2\varepsilon, 2\varepsilon),$$

$$|a_f - a_g| < \varepsilon < \frac{a_f}{3}, \quad |b_f - b_g| < \varepsilon < \frac{a_f}{3}.$$

Отображение \bar{g} непрерывно и монотонно на интервале $R_0 = (c, c + \varepsilon)$, поэтому $R_1 = \bar{g}(R_0) = (u, \bar{g}(\varepsilon))$ является связным интервалом и его длина не превосходит

$$\tau(R_1) = |\bar{g}'(\xi)|\tau(R_0) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Так как $u < \varepsilon < \frac{a_f}{3}$, то интервалы R_0 и R_1 пересекаются, а следовательно R_1 содержится в интервале $(0, 2\varepsilon) \subset (0, a_g)$, поэтому \bar{g} также непрерывно на R_1 . Аналогично, любой интервал $R_n = \bar{g}(R_{n-1})$ пересекается с R_{n-1} и для него справедливо неравенство

$$\tau(R_n) \leq \frac{1}{2}\tau(R_{n-1}) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Значит и этот интервал содержится в $(0, 2\varepsilon) \subset (0, a_g)$. Таким образом, \bar{g}^n непрерывно на R_0 для любого $n \in \mathbb{N}$, следовательно, нидинг-последовательности точек из R_0 совпадают и равны $PPP \dots$.

Аналогичные рассуждения можно провести для точек из левой полукрестности $(c - \varepsilon, c)$, при этом нидинг-последовательности этих точек будут равны $QQQ \dots$. В итоге имеем, что в первом случае нидинг-инварианты отображения g совпадают с нидинг-инвариантами отображения f . Таким образом,

$$\Theta_g = \frac{\tilde{P} - \tilde{Q}}{1 - t^p} = \Theta_f.$$

2. Второй случай отличается тем, что точка b_g является прообразом точки разрыва для отображения \bar{g} и поэтому стремится к точке c_g для близких g . Но для правой полукрестности точки c_g рассуждения повторяют первый случай, то есть существует система интервалов $R_0, R_1, R_2 \dots$, построенная выше. Учитывая, что $u_g, v_g \in R_0$, получим следующие выражение для нидинг-инвариантов отображения g

$$K_g^+ = PPP \dots, K_g^- = QPP \dots,$$

$$\Theta_g = \tilde{P} - \tilde{Q} = \Theta_f(1 - t^p).$$

3. В третьем случае рассуждения аналогичны второму, и в этом случае для левой полукрестности они приводят к тому же результату:

$$K_g^+ = PQQ \dots, K_g^- = QQQ \dots,$$

$$\Theta_g = \tilde{P} - \tilde{Q} = \Theta_f(1 - t^p).$$

4. В последнем случае рассуждения существенно отличаются, так как обе точки a_g и b_g есть прообразы точки разрыва и стремятся к c_g при приближении g к исходному отображению. До этого мы рассматривали случаи, когда все итерации точек из окрестности точки разрыва всегда оставались внутри интервала (b_g, a_g) , что позволяло однозначно определить нидинги отображения g . Теперь же ситуация усложняется из-за возможной неинвариантности подобного интервала.

Рассмотрим отрезок $J_g = [\min(u_g, b_g), \max(v_g, a_g)]$ и выберем окрестность отображения f так, чтобы

$$\begin{aligned} |v_g| < \varepsilon, \quad |u_g| < \varepsilon, \\ |\bar{g}'(x)| < \frac{1}{2}, \quad x \in J, \\ |c_g - a_g| < \varepsilon, \quad |c_g - b_g| < \varepsilon. \end{aligned}$$

Очевидно, что $\bar{g}(J_g) \subset J_g$. Сначала установим, что хотя бы одна из точек u_g, v_g принадлежит отрезку $[b_g, a_g]$. Предположим, что $u_g < b_g$, тогда $f(c_g, a_g) = (u_g, c_g) \supset (b_g, c_g)$ и $f(b_g, c_g) = (c_g, v_g)$, это означает, что интервал c_g, a_g за две итерации покрывает интервал c_g, v_g . Принимая во внимание условие на производную $|\bar{g}'(x)| < \frac{1}{2}$, получим

$$\tau(c_g, v_g) \leq \frac{1}{4} \tau(c_g, a_g),$$

откуда и следует утверждение. Теперь пусть k — наименьшее натуральное число, для которого $\bar{g}^k(u_g) > c_g$. Очевидно, что такое k существует для достаточно близких отображений, так как $\bar{g}(x) > x$ при $x \in [u_g, c_g]$ ³.

При $k = 1$ выполняются включения

$$\begin{aligned} \bar{g}(c_g, a_g) &= (u_g, c_g) \subset (a_g, c_g), \\ \bar{g}(b_g, c_g) &= (c_g, v_g) \subset (c_g, b_g), \end{aligned}$$

из которых получаем, что каждая из орбит точек u_g и v_g поочередно попадает в правую и левую полукрестность точки c_g , и нидинг-инвариантны равны

$$K_g^+ = PQP \dots, K_g^- = QPQ \dots,$$

$$\Theta_g = \frac{\tilde{P} - \tilde{Q}}{1 + t^p} = \Theta_f \frac{1 - t^p}{1 + t^p}.$$

При $k \geq 2$ рассмотрим совокупность отрезков

$$J_i = [\bar{g}^{i-1}(u_g), \bar{g}^i(u_g)], \quad i = \overline{1, k},$$

Длина каждого последующего J_i не превосходит половины длины предыдущего. Заметим, что

$$(b_g, c_g) \subset J_{k-1} \cup J_k,$$

Следовательно

$$\tau(b_g, c_g) \leq \frac{3}{2^{k-1}} \tau(J_1).$$

Для образа интервала (b_g, c_g) имеем следующие оценки

$$\tau(\bar{g}^2(b_g, c_g)) = \tau(\bar{g}(c_g, v_g)) = \tau(u_g, \bar{g}(v_g)) \leq \frac{3}{2^{k+1}} \tau(J_1) \leq \tau(J_1).$$

Таким образом, точка v_g под действием \bar{g} попадает в интервал J_1 и $\bar{g}^i(v_g) \in J_{i+1}, i = \overline{1, k-1}$. Теперь рассмотрим два случая.

³ Если орбита точки u_g содержит точку разрыва, то значение соответствующей функции в этой точке понимается как $\bar{g}^i(u_g) = \bar{g}^i(u_g + 0)$. Аналогично, для другой точки $\bar{g}^i(v_g) = \bar{g}^i(v_g - 0)$.

Если $\bar{g}^{k-2}(v_g) \in J_{k-1}$ лежит левее точки b_g , то $c_g < \bar{g}^k(v_g) < v_g$. Учитывая, что $c_g < \bar{g}^k(u_g) < v_g$ несложно убедиться, что нидинг-инварианты имеют вид

$$K_g^+ = VV \dots, K_g^- = QVV \dots, \text{ где } V = P \underbrace{QQ \dots Q}_{k-1},$$

$$\Theta_g = (\tilde{P} - \tilde{Q}) \frac{1 - t^p}{1 - t^{pk}}.$$

Далее нам понадобится утверждение из [1], позволяющее оценить топологическую энтропию функции g .

Предложение 3.1. Пусть (α, β) и (α^*, β^*) допустимые пары последовательностей, удовлетворяющие неравенствам

$$\alpha \leq \alpha^*, \beta \geq \beta^*,$$

тогда выполняется $r'(\alpha, \beta) \leq r'(\alpha^*, \beta^*)$.

Допустимость пары (α, β) означает, что эти последовательности удовлетворяют при всех $n \geq 0$ условиям

$$\sigma^n(\alpha) \geq \alpha \text{ или } \sigma^n(\alpha) \leq \beta,$$

$$\sigma^n(\beta) \geq \alpha \text{ или } \sigma^n(\beta) \leq \beta.$$

Предположим $\bar{g}^{k-2}(v_g) > b_g$, а следовательно, выполняется $c_g < \bar{g}^{k-1}(v_g) < v_g$. Обозначим интервал $T = (\bar{g}^{k-1}(v_g), \bar{g}^k(u_g)) \subset (c_g, v_g)$ и s наименьшее натуральное число, для которого $c_g \in [t_v, t_u] = \bar{g}^s(T)$. На языке нидингов это означает, что нидинг-инварианты равны

$$K_g^+ = S^+ K^+(t_u), S^+ = P \underbrace{QQ \dots Q}_{k-1} V_1 V_2 \dots V_s,$$

$$K_g^- = S^- K^-(t_v), S^- = Q \underbrace{PQ \dots Q}_{k-2} V_1 V_2 \dots V_s, V_i = P \text{ или } Q.$$

Так как $t_u \geq c_g$ и $t_v \leq c_g$, то $K^+(t_u) \geq K^+(c_g)$ и $K^-(t_v) \leq K^-(c_g)$, и поэтому выполняются неравенства

$$K_g^+ \geq S^+ K_g^+ \geq S^+ S^+ \dots,$$

$$K_g^- \leq S^- K_g^- \leq S^- S^- \dots$$

Таким образом, получаем тождество

$$\tilde{S}^+ \tilde{S}^+ \dots - \tilde{S}^- \tilde{S}^- \dots = (\tilde{P} - \tilde{Q}) \frac{1 - t^p}{1 - t^{p(k+s)}}$$

Из 3.1. следует, что наименьший положительный корень функции $\Theta_g(t)$ не больше наименьшего положительного корня многочлена $P - Q$. Из условия $h_{top}(f) = 0$ понятно, что на самом деле они совпадают ⁴.

Учитывая полученные тождества и оценки, полученные во всех пунктах, имеем, что наименьший положительный корень Θ_g совпадает с корнем $\Theta_f = \frac{\tilde{P} - \tilde{Q}}{1 - t^p}$, следовательно, энтропия непрерывна в точке f . Таким образом, нами доказана:

⁴ Последнее тождество остается справедливыми при $s = \infty$, если формальное считать $t^\infty = 0$

Т е о р е м а 3.1. В классе непрерывно-дифференцируемых (всюду кроме точки разрыва) лоренцевских отображений с C^1 -топологией и при условии нулевых односторонних производных в точке разрыва топологическая энтропия непрерывно зависит от отображения.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 15-01-03687-а, 14-01-00344).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Malkin, "On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval", *Selecta Mathematica Sovietica*, **8** (1989), 131–139.
2. М.И. Малкин, К.А. Сафонов, "Точная оценка разрывов энтропии для отображений лоренцевского типа", *Журнал Средневолжского Математического Общества*, **17:4** (2015), 31–36.
3. L.-S. Young, "On the prevalence of horseshoes", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **263:1** (1981), 75–88.
4. Afraimovich V., Sze-Bi Hsu, *Lecture on chaotic dynamical systems. Studies in Advanced Mathematics. 28*, AMS/IP, N.-Y., 2002.
5. M.-C. Li, M. Malkin, "Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps", *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353–3372.
6. J. Milnor, W. Thurston, *On iterated maps of the interval. "Dynamical Systems, Proc., 1986-87" (J.C. Alexander, Ed.). Lec. Notes Math. 1342*, Springer-Verlag, N.-Y., 1988.
7. M. Misiurewicz, "Jumps of entropy in one dimension", *Fundamenta Mathematicae*, **132** (1989), 215–226.

Дата поступления 9.05.2016

Continuity of topological entropy for piecewise smooth Lorenz type mappings

© M. Malkin⁵, K. Safonov⁶

Abstract. For one-dimensional mappings of Lorenz type, the problem on behavior of the topological entropy as the function of a mapping is studied. In the previous paper the authors proved that entropy as the function of a mapping with C^0 -topology can have jumps only for exceptional case, namely, in a neighbourhood of a mapping with zero entropy, and moreover, if and only if two kneading invariants are periodic with the same period. In the present paper we show that for the class of Lorenz mappings having zero one-sided derivatives at the discontinuity point and with C^1 -topology, such an exceptional case is impossible, and thus the entropy depends continuously on the mapping.

Key Words: topological entropy, Lorenz type mappings, kneading invariant

⁵ Associate professor of the Department of differential equations, mathematical and numerical analysis, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru

⁶ Student, Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod, Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, Nizhny Novgorod

УДК 519.624

Непрерывный аналог модифицированного метода Ньютона

© И. П. Рязанцева¹, О. Ю. Бубнова²

Аннотация. В итерационном методе Ньютона необходимо обращать производную оператора решаемого уравнения на каждом шаге. В модифицированном методе Ньютона обратный к производной оператор обращается только в начальной точке итерационного процесса. При этом вычисления сокращаются, а скорость сходимости падает. Известен непрерывный аналог метода Ньютона. В данной заметке построен непрерывный аналог модифицированного метода Ньютона для уравнения с сильно монотонным оператором. Получены достаточные условия сильной сходимости предложенного метода в гильбертовом пространстве.

Ключевые слова: гильбертово пространство, сильно монотонный оператор, производная Фреше, непрерывный метод, оператор сжатия, сходимость

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, (u, v) – скалярное произведение элементов u и v из H , оператор $A : H \rightarrow H$ обладает свойствами:

а) A – сильно монотонный оператор, т.е.

$$(Au - Av, u - v) \geq M\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in H, \quad M > 0; \quad (1.1)$$

б) A удовлетворяет на H условию Липшица с постоянной $L > 0$, т.е.

$$\|Au - Av\| \leq L\|u - v\| \quad \forall u, v \in H. \quad (1.2)$$

Кроме того, считаем оператор A дифференцируемым по Фреше на H , тогда из (1.1) следует неравенство (см. [1])

$$(A'(u)h, h) \geq M\|h\|^2 \quad \forall u, h \in H. \quad (1.3)$$

В наших условиях уравнение

$$Ax = f \quad (1.4)$$

имеет в H единственное решение x при любом элементе $f \in H$ (см. [2] с. 273).

Для нахождения решения (1.4) можно использовать непрерывный аналог метода Ньютона [3]

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\gamma(t)[A'(y(t))]^{-1}(Ay(t) - f), \quad (1.5)$$

$$y(t_0) = y_0 \in H, \quad t \geq t_0 \geq 0. \quad (1.6)$$

При численной реализации этого метода необходимо обращать линейный оператор $A'(y(t))$, что требует больших временных затрат. Такая же проблема возникает при нахождении решения (1.4) итеративным методом Ньютона (см. [4], с. 401). Метод Ньютона для (1.4) удалось упростить, т. е. построить модифицированный метод Ньютона следующего вида

$$x_{n+1} = x_n - [A'(x_0)]^{-1}(Ax_n - f), \quad (1.7)$$

¹ Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@applmath.ru

² Доцент кафедры математики, информатики и информационных технологий, Нижегородская академия МВД России, Нижний Новгород; bubnovaou@mail.ru

где x_0 - начальная точка итерационного процесса. При этом скорость сходимости (1.7) ухудшилась по сравнению со скоростью сходимости классического метода Ньютона. Интерес к непрерывным методам в настоящее время весьма высок, так как имеются обширные пакеты программ для их численной реализации. В силу сказанного целью данной заметки является построение на основе (1.7) непрерывного метода и исследование его сильной сходимости.

Подобно (1.5) (см. [3]) на основании (1.7) построим непрерывный аналог модифицированного метода Ньютона в следующей форме:

$$\frac{dz(t)}{dt} = -\gamma(t)[A'(z_0)]^{-1}(Az(t) - f), \quad (1.8)$$

$$z(t_0) = z_0 \in H, \quad t \geq t_0 \geq 0, \quad (1.9)$$

где $\gamma(t)$ - непрерывная функция при $t \geq t_0$, и

$$0 < \gamma(t) \leq \gamma_0 \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.10)$$

Исследуем вопрос о разрешимости задачи Коши (1.8), (1.9). Для этого введем обозначение

$$G(t, u) = -\gamma(t)[A'(z_0)]^{-1}(Au - f), \quad t \geq t_0, \quad u \in H.$$

В наших условиях оператор $G(t, u)$ непрерывен по t при $t \geq t_0$. Поскольку из (1.3) вытекает неравенство

$$\|[A'(u)]^{-1}\| \leq \frac{1}{M} \quad \forall u \in H, \quad (1.11)$$

то с учетом (1.10) и свойства (1.2) оператора A приходим к неравенству

$$\|G(t, z_1) - G(t, z_2)\| \leq \frac{\gamma_0 L}{M} \|z_1 - z_2\| \quad \forall z_1, z_2 \in H.$$

Следовательно, задача Коши (1.8), (1.9) однозначно разрешима в классе функций $C^1[t_0, +\infty)$ (см. [4], пункт 33.4).

Исследуем поведение $z(t)$ при $t \rightarrow \infty$.

Сделаем дополнительные предположения:

в) пусть производная $A'(u)$ в открытом шаре

$$B(z_0, r) = \{u \mid \|u - z_0\| < r\}, \quad r > 0$$

, удовлетворяет условию Липшица с постоянной $l > 0$, т. е.

$$\|A'(u) - A'(v)\| \leq l\|u - v\| \quad \forall u, v \in B(z_0, r);$$

г) верны неравенства

$$\|Az_0\| \leq \rho, \quad \frac{2l\rho}{M^2} < 1, \quad r' = \frac{Mq}{l} < r,$$

где

$$q = 1 - \sqrt{1 - \frac{2l\rho}{M^2}}.$$

Очевидно, что $0 < q < 1$.

Построим оператор $C : H \rightarrow H$,

$$Cu = u - [A'(z_0)]^{-1}(Au - f).$$

В [4], с. 405 доказано, что в наших предположениях оператор C отображает замкнутый шар $\overline{B(z_0, r')}$ в себя и является сжимающим на $\overline{B(z_0, r')}$ с коэффициентом сжатия q , т. е.

$$\|Cu - Cv\| \leq q\|u - v\| \quad \forall u, v \in \overline{B(z_0, r')}. \quad (1.12)$$

Значит, существует единственная неподвижная точка оператора C в $\overline{B(z_0, r')}$, которая в наших предположениях совпадает с единственным решением x уравнения (1.4). Кроме того, оператор $F : H \rightarrow H$, $F = E - C$ в силу (1.12) обладает свойством

$$(Fu - Fv, u - v) = \|u - v\|^2 - (Cu - Cv, u - v) \geq (1 - q)\|u - v\|^2 \quad \forall u, v \in \overline{B(z_0, r')}. \quad (1.13)$$

Следовательно, F - сильно монотонный оператор на $\overline{B(z_0, r')}$ с постоянной $1 - q$.

Построим для уравнения $Fx = 0$ непрерывный метод первого порядка (см., например, [5]). Этот метод совпадает с задачей Коши (1.8), (1.9), при этом (1.8) можно записать в следующей форме

$$\frac{dz(t)}{dt} + \gamma(t)Fz(t) = 0. \quad (1.14)$$

Чтобы воспользоваться свойством (1.13) оператора F на траекториях задачи Коши (1.14), (1.9), необходимо показать, что

$$z(t) \in \overline{B(z_0, r')} \quad \forall t \geq t_0. \quad (1.15)$$

Для решения этой проблемы сделаем еще одно предположение: пусть справедливо неравенство

$$(Fu, u - z_0) \geq 0 \quad \text{при} \quad \|u - z_0\| \geq r'. \quad (1.16)$$

Доказательство (1.15) ведем от противного: пусть при некотором $t = \bar{t} > t_0$ верно неравенство $\|z(\bar{t}) - z_0\| > r'$. Тогда в силу (1.16)

$$(Fz(\bar{t}), z(\bar{t}) - z_0) \geq 0. \quad (1.17)$$

В то же время из (1.14) при $t = \bar{t}$ имеем

$$\left(\frac{dz(t)}{dt}, z(t) - z_0 \right) \Big|_{t=\bar{t}} + \gamma(\bar{t})(Fz(\bar{t}), z(\bar{t}) - z_0) = 0.$$

Отсюда, приняв во внимание (1.10) и (1.17), приходим к неравенству

$$\frac{d\|z(t) - z_0\|}{dt} \Big|_{t=\bar{t}} \leq 0.$$

Таким образом, $\|z(t) - z_0\|$ не возрастает при всех $t > t_0$, для которых $\|z(t) - z_0\| > r'$. Следовательно, (1.15) доказано. Далее, из (1.14) без труда получаем равенство

$$\left(\frac{d(z(t) - x)}{dt}, z(t) - x \right) + \gamma(t)(Fz(t) - Fx, z(t) - x) = 0,$$

откуда с учетом свойства (1.13) оператора F имеем неравенство

$$\frac{d\|z(t) - x\|^2}{dt} \leq -2\gamma(t)(1 - q)\|z(t) - x\|^2.$$

Следовательно,

$$\|z(t) - x\|^2 \leq \|z_0 - x\|^2 \exp \left(-2(1 - q) \int_{t_0}^t \gamma(\tau) d\tau \right). \quad (1.18)$$

Таким образом, доказано утверждение.

Т е о р е м а 1.1. Пусть H – вещественное гильбертово пространство, дифференцируемый по Фреше оператор $A : H \rightarrow H$ обладает свойствами а), б), в), г), непрерывная положительная при $t \geq t_0 \geq 0$ функция $\gamma(t)$ удовлетворяет условию (1.10), и

$$\int_{t_0}^{+\infty} \gamma(t) dt = +\infty,$$

оператор $F : H \rightarrow H$, $Fu = [A'(z_0)]^{-1}(Au - f)$ обладает свойством (1.16). Тогда задача Коши (1.8), (1.9) имеет единственное решение $z(t)$ класса $C^1[t_0, +\infty)$ такое, что справедливо (1.15), и $\|z(t) - x\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$, причем имеет место оценка (1.18), здесь x – единственное решение уравнения (1.4).

Укажем, что (1.16) есть одно из достаточных условий существования решения x уравнения $Fx = 0$ с $\|x - z_0\| \leq r'$ (см. [2], с.262; [6], сс. 15, 104).

Вопрос о сравнении скорости сходимости непрерывных методов не ставится, так как путем замены переменной t можно добиться любой скорости сходимости непрерывного метода [5]. В то же время разные непрерывные методы могут давать разные по свойствам приближения к искомому решению, что дает возможность выбрать приближение к искомому решению с априорно известными свойствами.

Отметим, что свойства а), б) и (1.11) оператора A в доказательстве теоремы были использованы только на некотором ограниченном множестве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Качуровский Р.И., “Нелинейные монотонные операторы в банаховых пространствах”, *Успехи математических наук*, **XXIII**:2(140) (1968), 121–168.
2. Вайнберг М.М., *Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений*, Наука, Москва, 1972.
3. Гавурин М.К., “Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов”, *Известия вузов. Математика*, 1958, № 5(6), 18–31.
4. Треногин В.А., *Функциональный анализ*, Наука, Москва, 1980.
5. Антипин А.С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР*, 1989, 5–43.
6. Рязанцева И.П., *Избранные главы теории операторов монотонного типа*, НГТУ, Нижний Новгород, 2008.

Дата поступления 29.02.2016

A continuous analogue of modified Newton method

© I. P. Ryazantseva³, O. Yu. Bubnova⁴

Abstract. In the iterative Newton method we invert derivative of operator of equation for every step. In the modified Newton method we find inverse of derivative of operator only at initial point of iterative process. Then amount of calculations decreases and convergence speed falls. Continuous analog of Newton method is known. We construct the continuous analog of the modified Newton method for equation with strongly monotone operator in this note. We obtain sufficient conditions of strong convergence in Hilbert space for propose method.

Key Words: Hilbert space, strictly monotone operator, Frechet derivative, continuous method, operator of contraction, convergence

³ Professor of Applied Mathematics Chair, Nizhny Novgorod State Technical University after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod; lryazantseva@appliedmath.ru

⁴ Associate Professor of Department of Mathematics, Computer Science and Information Technology, Nizhny Novgorod Academy of the Ministry of Internal Affairs of Russia, Nizhny Novgorod; bubnovaoyu@mail.ru

УДК 517.968

О разрешимости интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска с нелокальными интегральными условиями

© Т. К. Юлдашев¹ К. Х. Шабаликов²

Аннотация. Рассмотрены вопросы однозначной разрешимости нелокальной смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка. Использован метод Фурье разделения переменных. Получена счетная система нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ). Для доказательства теоремы об однозначной разрешимости ССНИУ использован метод последовательных приближений. Далее показана сходимость ряда Фурье к искомой функции нелокальной смешанной задачи. Данная работа является дальнейшим развитием теории интегро-дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение типа Буссинеска, нелокальные интегральные условия, однозначная разрешимость

1. Постановка задачи

Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению смешанных задач для уравнений математической физики. Большой интерес с точки зрения физических приложений представляют дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков. Многие задачи газовой динамики, теории упругости, теории пластин и оболочек приводятся к рассмотрению дифференциальных уравнений в частных производных высоких порядков [1] – [3]. Изучению различных задач для уравнений в частных производных четвертого порядка посвящено большое количество работ (см. [4] – [16]). Дифференциальные уравнения в частных производных типа Буссинеска имеют много приложений в математической физике (см. [17]).

В случаях, когда граница области протекания физического процесса недоступна для измерений, в качестве дополнительной информации, достаточной для однозначной разрешимости задачи, могут служить нелокальные условия в интегральной форме. Нелокальные задачи рассмотрены в работах многих авторов (см. [18], [19]). В настоящей работе предлагается методика изучения нелокальной смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения типа Буссинеска четвертого порядка.

Итак, в области Ω рассматривается уравнение

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial t^2} - \frac{\partial^4 U(t, x)}{\partial t^2 \partial x^2} - \mu(t) \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} = \eta(t) \int_0^T U(\theta, x) d\theta + f \left(x, \int_0^T \int_0^l H(\theta, y) U(\theta, y) dy d\theta \right) \quad (1.1)$$

¹ Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursun.k.yuldashev@gmail.com

² Доцент кафедры математического анализа и дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан

с нелокальными интегральными условиями

$$U(0, x) + \int_0^T \Theta_1(t) \cdot U(t, x) dt = \varphi_1(x), \quad x \in \Omega_l, \quad (1.2)$$

$$U_t(0, x) + \int_0^T \Theta_2(t) \cdot U(t, x) dt = \varphi_2(x), \quad x \in \Omega_l \quad (1.3)$$

и граничными условиями Бенара

$$U(t, 0) = U(t, l) = 0, \quad t \in \Omega_T, \quad (1.4)$$

где $\eta(t) \in C(\Omega_T)$, $\mu(t) \in C(\Omega_T)$, $f(x, \gamma) \in C(\Omega_l \times R)$, $\varphi_k(x) \in C^2(\Omega_l)$, $\varphi_k(0) = \varphi_k(l) = 0$, $k = 1, 2$, $\Theta_k(t) \in C^2(\Omega_T)$, $k = 1, 2$, $\int_0^T \int_0^l |H(t, x)| dx dt < \infty$, $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l$, $\Omega_T \equiv [0, T]$, $\Omega_l \equiv [0, l]$, $0 < T < \infty$, $0 < l < \infty$.

Под решением смешанной задачи (1.1) – (1.4) понимаем функцию $U(t, x) \in C^{2,2}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и условиям (1.2) – (1.4).

2. Сведение смешанной задачи к счетной системе нелинейных интегральных уравнений

Решение данной задачи ищем в виде ряда Фурье:

$$U(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \vartheta_n(x), \quad (2.1)$$

где функции $\vartheta_n(x)$ определены как собственные функции спектральной задачи $\vartheta''(x) + \lambda^2 \vartheta(x) = 0$, $\vartheta(0) = \vartheta(l) = 0$, $0 < \lambda$ и образуют полную систему собственных функций $\{\vartheta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в пространстве $L_2(\Omega_l)$, где λ_n – соответствующие собственные числа.

По предположению

$$f(x, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(\gamma) \cdot \vartheta_n(x), \quad (2.2)$$

где $f_n(\gamma) = \int_0^l f(y, \gamma) \cdot \vartheta_n(y) dy$, $\gamma = \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \cdot \vartheta_k(z) dz d\theta$.

Кроме того, учтем, что

$$\vartheta_n''(x) = -\lambda_n^2 \cdot \vartheta_n(x). \quad (2.3)$$

Подставляя ряды (2.1) и (2.2) в уравнение (1.1), с учетом (2.3) получаем следующую счетную систему интегро-дифференциальных уравнений второго порядка:

$$u_n''(t) = -\tau_n \cdot \mu(t) \cdot u_n(t) + \frac{\eta(t)}{1 + \lambda_n^2} \cdot \int_0^T u_n(\theta) d\theta + \frac{1}{1 + \lambda_n^2} f_n(\gamma), \quad (2.4)$$

где $\tau_n = \frac{\lambda_n^2}{1 + \lambda_n^2}$, $u_n(t) = \int_0^l U(t, y) \vartheta_n(y) dy$.

Нелокальные условия (1.2) и (1.3) для уравнения (2.4) запишем в следующем виде

$$u_n(0) + \int_0^T \Theta_1(t) \cdot u_n(t) dt = \varphi_{1n}, \quad (2.5)$$

$$u'_n(0) + \int_0^T \Theta_2(t) \cdot u_n(t) dt = \varphi_{2n}, \quad (2.6)$$

где $\varphi_{kn} = \int_0^l \varphi_k(y) \cdot \vartheta_n(y) dy$, $k = 1, 2$.

Правую часть (2.4) обозначим через $F_n(t)$. Тогда путем интегрирования два раза по t из (2.4) получаем

$$u_n(t) = C_{2n} + C_{1n}t + \int_0^t (t-s)F_n(s)ds, \quad (2.7)$$

где C_{1n}, C_{2n} – пока неизвестные постоянные, для определения которых из интегральных условий (2.5) и (2.6) получаем следующую систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} C_{1n}\alpha_3 + C_{2n}\alpha_1 = g_1, \\ C_{1n}\alpha_2 + C_{2n}\alpha_4 = g_2, \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\alpha_1 = 1 + \int_0^T \Theta_1(t)dt, \quad \alpha_2 = 1 + \int_0^T t\Theta_2(t)dt, \quad \alpha_3 = \int_0^T t\Theta_1(t)dt,$$

$$\alpha_4 = \int_0^T \Theta_2(t)dt, \quad g_k = \varphi_k - \int_0^T \Theta_k(t) \int_0^t (t-s)F_n(s)dsdt, \quad k = 1, 2.$$

Решая систему алгебраических уравнений (2.8), получаем

$$C_{1n} = \frac{\alpha_3 g_1 - \alpha_1 g_2}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left\{ \alpha_3 \varphi_1 - \alpha_3 \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s)F_n(s)dsdt - \right. \quad (2.9)$$

$$\left. - \alpha_1 \varphi_2 + \alpha_1 \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s)F_n(s)dsdt \right\},$$

$$C_{2n} = \frac{\alpha_2 g_1 - \alpha_3 g_2}{\omega} = \frac{1}{\omega} \left\{ \alpha_2 \varphi_1 - \alpha_2 \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s)F_n(s)dsdt - \right. \quad (2.10)$$

$$\left. - \alpha_3 \varphi_2 + \alpha_3 \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s)F_n(s)dsdt \right\},$$

где

$$\omega = \alpha_3 \alpha_4 - \alpha_1 \alpha_2 \neq 0. \quad (2.11)$$

Подставляя (2.9) и (2.10) в (2.7), получаем

$$u_n(t) = Q_n(t) + \tau_n \frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega} \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s) \cdot \mu(s) \cdot u_n(s) dsdt - \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned}
 & -\tau_n \frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega} \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s) \cdot \mu(s) \cdot u_n(s) ds dt - \\
 & \quad -\tau_n \int_0^t (t-s) \cdot \mu(s) \cdot u_n(s) ds - \\
 & -\frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega} \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s) \frac{p(s)}{1 + \lambda_n^2} \int_0^T u_n(\theta) d\theta ds dt + \\
 & +\frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega} \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s) \frac{p(s)}{1 + \lambda_n^2} \int_0^T u_n(\theta) d\theta ds dt + \\
 & \quad + \int_0^t (t-s) \frac{p(s)}{1 + \lambda_n^2} \int_0^T u_n(\theta) d\theta ds - \\
 & -\frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega} \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s) \frac{s^2}{2(1 + \lambda_n^2)} f_n(\gamma) ds dt + \\
 & +\frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega} \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s) \frac{s^2}{2(1 + \lambda_n^2)} f_n(\gamma) ds dt + \\
 & \quad + \int_0^t (t-s) \frac{s^2}{2(1 + \lambda_n^2)} f_n(\gamma) ds,
 \end{aligned}$$

где $Q_n(t) = \frac{1}{\omega} [(\alpha_2 + \alpha_3 t) \cdot \varphi_{1n} - (t\alpha_1 + \alpha_3) \cdot \varphi_{2n}]$, $p(t) = \int_0^t (t-s) \cdot \eta(s) ds$.

Используем формулу Дирихле

$$\int_0^T \Theta_k(t) \int_0^t (t-s) \cdot \mu(s) \cdot u_n(s) ds dt = \int_0^T \mu(s) \cdot u_n(s) \cdot (\nu_{1k}(s) - s \cdot \nu_{2k}(s)) ds dt,$$

где

$$\nu_{1k}(s) = \int_s^T t \cdot \Theta_k(t) dt, \quad \nu_{2k}(s) = \int_s^T \Theta_k(t) dt, \quad k = 1, 2.$$

Тогда счетную систему нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ) (2.12) запишем в следующем виде

$$\begin{aligned}
 u_n(t) = \mathfrak{S}_1(t; u_n) \equiv & Q_n(t) + \int_0^T \mathfrak{R}_n(t, s) u_n(s) ds + G_n(t) \int_0^T u_n(\theta) d\theta + \\
 & + \Phi_n(t) \int_0^l f \left(y, \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \cdot \vartheta_k(z) dz d\theta \right) \vartheta_n(y) dy, \quad t \in \Omega_T,
 \end{aligned} \tag{2.13}$$

где

$$\mathfrak{R}_n(t, s) = \begin{cases} -\frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega} \tau_n \mu(s) \cdot (\nu_{11}(s) - s \cdot \nu_{21}(s)) + \\ + \frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega} \tau_n \mu(s) \cdot (\nu_{12}(s) - s \cdot \nu_{22}(s)) - \\ - \tau_n(t - s) \cdot \mu(s), 0 \leq s < t, \\ -\frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega} \tau_n \mu(s) \cdot (\nu_{11}(s) - s \cdot \nu_{21}(s)) + \\ + \frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega} \tau_n \mu(s) \cdot (\nu_{12}(s) - s \cdot \nu_{22}(s)), t < s \leq T, \end{cases}$$

$$G_n(t) = -\frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{\omega} \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t (t-s) \frac{p(s)}{1 + \lambda_n^2} ds dt +$$

$$+ \frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{\omega} \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t (t-s) \frac{p(s)}{1 + \lambda_n^2} ds dt + \int_0^t (t-s) \frac{p(s)}{1 + \lambda_n^2} ds,$$

$$\Phi_n(t) = -\frac{\alpha_2 + \alpha_3 t}{2\omega} \int_0^T \Theta_1(t) \int_0^t \frac{(t-s) \cdot s^2}{1 + \lambda_n^2} ds dt +$$

$$+ \frac{\alpha_3 + \alpha_1 t}{2\omega} \int_0^T \Theta_2(t) \int_0^t \frac{(t-s) \cdot s^2}{1 + \lambda_n^2} ds dt + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{(t-s) \cdot s^2}{1 + \lambda_n^2} ds.$$

3. Однозначная разрешимость ССНИУ

В пространстве $B_2(T)$ используем следующую норму

$$\|u(t)\|_{B_2(T)} = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \max_{t \in \Omega_T} |u_n(t)|^2}.$$

Для функции $g(x) \in L_2(\Omega_l)$ рассматривается норма

$$\|g(x)\|_{L_2(\Omega_l)} = \sqrt{\int_0^l |g(y)|^2 dy}.$$

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполняются: условие (2.11) и

- 1). $\beta_1 = \|Q(t)\|_{B_2(T)} < \infty$; $\beta_2 = \max_{t \in \Omega_T} \|\mathfrak{R}(t, s)\|_{B_2(T)} + \|G(t)\|_{B_2(T)} < \infty$;
- 2). $\beta_3 = \|\Phi(t)\|_{B_2(T)} < \infty$; $M = \|f(x, \gamma)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$;
- 3). $|f(x, \gamma_1) - f(x, \gamma_2)| \leq L(x) |\gamma_1 - \gamma_2|$, $\delta_1 = \|L(x)\|_{L_2(\Omega_l)} < \infty$;
- 4). $\delta_2 = \int_0^T \int_0^l |H(t, x)| dx dt < \infty$; $\rho = \beta_2 T + \beta_3 \delta_1 \delta_2 \delta_3 < 1$,

где $\delta_3 = \max_{x \in \Omega_l} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n(x)|^2} < \infty$.

Тогда ССНИУ (2.13) имеет единственное решение в пространстве $B_2(T)$. Это решение может быть найдено методом последовательных приближений:

$$u_n^0(t) = Q_n(t), \quad u_n^{j+1}(t) = \mathfrak{F}_1(t; u_n^j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in \Omega_T. \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим шар $S(u_n^0; r_1)$ с радиусом $r_1 = \beta_1 + \frac{\beta_3 M}{1 - \beta_2 T}$. Для нулевого приближения, в силу первого условия теоремы, из (3.1) имеем

$$\|u^0(t)\|_{B_2(T)} \leq \beta_1. \quad (3.2)$$

Для первой разности, в силу условий теоремы, из (3.1) с учетом (3.2) получим оценку

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^1(t) - u_n^0(t)|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^T \mathfrak{R}_n(t, s) \cdot Q_n(s) ds \right|^2} + \\ & + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |G_n(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_0^T Q_n(t) dt \right|^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[|\Phi_n(t)| \int_0^l |f(y, \gamma^0) \vartheta_n(y)| dy \right]^2} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \|u^1(t) - u^0(t)\|_{B_2(T)} & \leq \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l |f(y, \gamma^0)| \cdot |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq \quad (3.3) \\ & \leq \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 \|f(x, \gamma^0)\|_{L_2(\Omega_l)} = \beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M, \end{aligned}$$

где $\gamma^0 = \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^0(\theta) \cdot \vartheta_k(z) dz d\theta$.

Для разности $u_n^2(t) - u_n^0(t)$, в силу условий теоремы, из (3.1) с учетом (3.3) получим оценку

$$\begin{aligned} & \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^2(t) - u_n^0(t)|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T |\mathfrak{R}_n(t, s)| \cdot |u_n^1(s) - u_n^0(s)| ds \right]^2} + \\ & + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |G_n(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T |u_n^1(t) - u_n^0(t)| dt \right]^2} + \\ & + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l |f(y, \gamma^1) \cdot \vartheta_n(y)| dy \right]^2} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \|u^2(t) - u^0(t)\|_{B_2(T)} & \leq (\beta_1 \beta_2 T + \beta_3 M) \cdot \beta_2 T + \quad (3.4) \\ & + \beta_3 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l |f(y, \gamma^1)| \cdot |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq \end{aligned}$$

$$\leq (\beta_1\beta_2T + \beta_3M) \cdot \beta_2T + \beta_3M = \beta_1(\beta_2T)^2 + (\beta_2T + 1) \cdot \beta_3M,$$

где $\gamma^1 = \int_0^T \int_0^l H(t, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^1(t) \cdot \vartheta_k(z) dz dt$.

Далее из (3.1) с учетом (3.4) имеем

$$\begin{aligned} \|u^3(t) - u^0(t)\|_{B_2(T)} &\leq (\beta_1\beta_2T + \beta_3M) \cdot (\beta_2T)^2 + (\beta_2T + 1) \cdot \beta_3M = \\ &= \beta_1(\beta_2T)^3 + \left((\beta_2T)^2 + \beta_2T + 1 \right) \cdot \beta_3M. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Продолжая этот процесс, аналогично (3.5) получаем

$$\begin{aligned} \|u^j(t) - u^0(t)\|_{B_2(T)} &\leq \beta_1(\beta_2T)^j + \\ &+ \left((\beta_2T)^{j-1} + (\beta_2T)^{j-2} + \dots + (\beta_2T)^2 + \beta_2T + 1 \right) \cdot \beta_3M. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из последнего условия теоремы следует, что $\beta_2T < 1$. Поэтому из (3.6), переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \|u^j(t) - u^0(t)\|_{B_2(T)} &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \left[\beta_1(\beta_2T)^j + \right. \\ &+ \left. \left((\beta_2T)^{j-1} + (\beta_2T)^{j-2} + \dots + (\beta_2T)^2 + \beta_2T + 1 \right) \cdot \beta_3M \right], \end{aligned}$$

имеем

$$\|u^\infty(t) - u^0(t)\|_{B_2(T)} < \beta_1 + \frac{1}{1 - \beta_2T} \cdot \beta_3M = r_1 < \infty. \quad (3.7)$$

Из (3.7) следует, что оператор в правой части (2.13) отображает шар $S(u_n^0; r_1)$ в себя. Теперь для произвольной разности $u_n^{j+1}(t) - u_n^j(t)$ получим следующую оценку

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |u_n^{j+1}(t) - u_n^j(t)|^2} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T |\mathfrak{R}_n(t, s)| \cdot |u_n^j(s) - u_n^{j-1}(s)| ds \right]^2} + \\ &+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |G_n(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T |u_n^j(t) - u_n^{j-1}(t)| dt \right]^2} + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n(t)|^2} \times \\ &\times \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l L(y) \int_0^T \int_0^l |H(\theta, z)| \sum_{k=1}^{\infty} |u_k^j(\theta) - u_k^{j-1}(\theta)| \cdot |\vartheta_k(z)| dz d\theta \cdot |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \|u^{j+1}(t) - u^j(t)\|_{B_2(T)} &\leq \\ &\leq \left\{ \beta_2T + \beta_3\delta_2\delta_3 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l L(y) \cdot |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \right\} \cdot \|u^j(t) - u^{j-1}(t)\|_{B_2(T)} \leq \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\leq \rho \|u^j(t) - u^{j-1}(t)\|_{B_2(T)}.$$

В силу последнего условия теоремы, из оценки (3.8) следует, что оператор в правой части (2.13) является сжимающим. Из оценок (3.7) и (3.8) заключаем, что для оператора (2.13) существует единственная неподвижная точка (см. [20], стр. 389–401). Следовательно, в пространстве $B_2(T)$ интегральное уравнение (2.13) имеет единственное решение $u(t) \in B_2(T)$.

Кроме того, справедлива оценка скорости сходимости

$$\|u^{j+1}(t) - u(t)\|_{B_2(T)} \leq (\beta_1\beta_2T + \beta_3M) \frac{\rho^{j+1}}{1 - \rho}.$$

Теорема доказана.

Дифференцируя ССНИУ (2.13) два раза по t и учитывая

$$Q_n''(t) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} R_n(t, s) = 0,$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n(t) = \mathfrak{S}_2(t; u_n) \equiv G_n''(t) \int_0^T u_n(\theta) d\theta + \\ + \Phi_n''(t) \int_0^l f \left(y, \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \cdot \vartheta_k(z) dz d\theta \right) \vartheta_n(y) dy, \quad t \in \Omega_T, \end{aligned} \tag{3.9}$$

где $G_n''(t) \in C(\Omega_T)$, $\Phi_n''(t) \in C(\Omega_T)$.

Т е о р е м а 3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.1. и

$$N_1 = \|G''(t)\|_{B_2(T)} < \infty; \quad N_2 = \|\Phi''(t)\|_{B_2(T)} < \infty.$$

Тогда $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) \in B_2(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для оператора в правой части (3.9) рассмотрим следующий итерационный процесс:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^0(t) = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^{j+1}(t) = \mathfrak{S}_2(t; u_n^j), \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad t \in \Omega_T. \tag{3.10}$$

Рассмотрим шар $S\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^0; r_2\right)$ с радиусом $r_2 = N_1 T \left(\beta_1 + \frac{1}{1 - \beta_2 T}\right) + N_2 M$. Для первой разности, в силу условий теоремы и оценки (3.2), из (3.10) получаем оценку

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^1(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n^0(t) \right|^2} \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |G_n''(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T |u_n^0(t) - u_n^0(t)| dt \right]^2} + \\ + \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[|\Phi_n''(t)| \int_0^l |f(y, 0) \vartheta_n(y)| dy \right]^2} \end{aligned}$$

или

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^1(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} u^0(t) \right\|_{B_2(T)} \leq N_1 \beta_1 T + N_1 \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l |f(y, 0)| \cdot |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq$$

$$\leq N_1\beta_1T + N_2\|f(x, \gamma)\|_{L_2(\Omega_t)} = N_1\beta_1T + N_2M.$$

Для разности $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^2(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^0(t)$, в силу условий теоремы и оценки (3.3), из (3.10) получим оценку

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^2(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^0(t) \right|^2} &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |G_n''(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^T |u_n^1(t) - u_n^0(t)| dt \right]^2} + \\ &+ \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n''(t)|^2} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l |f(y, \gamma^1) \cdot \vartheta_n(y)| dy \right]^2} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^2(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^0(t) \right\|_{B_2(T)} &\leq \\ &\leq N_1(\beta_1\beta_2T + \beta_3M)T + N_2\sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l |f(y, \gamma^1)| \cdot |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq \\ &\leq (\beta_1\beta_2T + \beta_3M) \cdot N_1T + N_2M. \end{aligned}$$

Далее из (3.10) с учетом (3.4) получим

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^3(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^0(t) \right\|_{B_2(T)} &\leq \\ &\leq N_1T \left(\beta_1(\beta_2T)^2 + (\beta_2T + 1) \cdot \beta_3M \right) + N_2M. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Продолжая этот процесс, аналогично (3.11) имеем

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^j(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^0(t) \right\|_{B_2(T)} &\leq N_1T \left[\beta_1(\beta_2T)^j + \right. \\ &\left. + \left((\beta_2T)^{j-1} + (\beta_2T)^{j-2} + \dots + (\beta_2T)^2 + \beta_2T + 1 \right) \cdot \beta_3M \right] + N_2M. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Из последнего условия теоремы 3.1. следует, что $\beta_2T < 1$. Поэтому из (3.12), переходя к пределу при $j \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^j(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^0(t) \right\|_{B_2(T)} &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} N_1T \left[\beta_1(\beta_2T)^j + \right. \\ &\left. + \left((\beta_2T)^{j-1} + (\beta_2T)^{j-2} + \dots + (\beta_2T)^2 + \beta_2T + 1 \right) \cdot \beta_3M \right] + N_2M, \end{aligned}$$

имеем

$$\left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^\infty(t) - \frac{\partial^2}{\partial t^2}u^0(t) \right\|_{B_2(T)} < N_1T \cdot \left(\beta_1 + \frac{1}{1 - \beta_2T} \right) + N_2M = r_2 < \infty. \quad (3.13)$$

Из (3.13) следует, что оператор в правой части (3.9) отображает шар $S\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}u_n^0; r_2\right)$ в себя. Следовательно, $\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(t) \in B_2(T)$. Теорема доказана.

4. Разрешимость смешанной задачи (1.1) – (1.4)

Подставляя (2.13) в ряд (2.1), получаем формальное решение смешанной задачи (1.1) – (1.4):

$$\begin{aligned} U(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \vartheta_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_1(t; u_n) \cdot \vartheta_n(x) \equiv \\ &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ Q_n(t) + \int_0^T \mathfrak{R}_n(t, s) \cdot u_n(s) ds + G_n(t) \int_0^T u_n(\theta) d\theta + \right. \\ &\left. + \Phi_n(t) \int_0^l f \left(y, \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k(\theta) \cdot \vartheta_k(z) dz d\theta \right) \vartheta_n(y) dy \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Подставляем также (3.1) в ряд (2.1):

$$\begin{aligned} U^{j+1}(t, x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n^{j+1}(t) \cdot \vartheta_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathfrak{S}_1(t; u_n^j) \cdot \vartheta_n(x) \equiv \\ &\equiv \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta_n(x) \left\{ Q_n(t) + \int_0^T \mathfrak{R}_n(t, s) \cdot u_n^j(s) ds + G_n(t) \int_0^T u_n^j(\theta) d\theta + \right. \\ &\left. + \Phi_n(t) \int_0^l f \left(y, \int_0^T \int_0^l H(\theta, z) \sum_{k=1}^{\infty} u_k^j(\theta) \cdot \vartheta_k(z) dz d\theta \right) \vartheta_n(y) dy \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Т е о р е м а 4.1. Пусть выполняются условия теоремы 3.2. и $u(t) \in B_2(T)$ – решение ССНИУ (2.13). Тогда последовательность функций (4.2) сходится к функции (4.1) при $j \rightarrow \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $u(t) \in B_2(T)$ – решение ССНИУ (2.13), тогда мы положим, что

$$\|u^j(t, \mu) - u(t, \mu)\|_{B_2(T)} \leq \frac{\varepsilon}{\delta_3},$$

где $0 < \varepsilon$ – малый параметр. Тогда для разности функций (4.2) и (4.1) с применением неравенства Гельдера получаем

$$\begin{aligned} |U^j(t, x) - U(t, x)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |u_n^j(t) - u_n(t)| \cdot |\vartheta_n(x)| \leq \\ &\leq \delta_3 \cdot \|u^j(t) - u(t)\|_{B_2(T)} \leq \delta_3 \cdot \frac{\varepsilon}{\delta_3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Так как для оператора (3.9) справедливо $\frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) \in B_2(T)$, то с применением неравенства Гельдера имеем оценку

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} U(t, x) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n(t) \right| \cdot |\vartheta_n(x)| \leq \delta_3 \cdot \left\| \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(t) \right\|_{B_2(T)} < \infty.$$

Дифференцируя (4.1) два раза по x и с учетом (2.3) получим

$$\frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) \cdot \frac{\partial^2 \vartheta_n(x)}{\partial x^2} = - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cdot u_n(t) \cdot \vartheta_n(x). \quad (4.3)$$

Мы покажем, что ряд (4.3) сходится абсолютно и равномерно. Два раза интегрируя по частям следующий интеграл

$$u_n(t) = \int_0^l U(t, y) \vartheta_n(y) dy,$$

получаем

$$u_n(t) = - \frac{1}{\lambda_n^2} \int_0^l \frac{\partial^2 U(t, y)}{\partial y^2} \vartheta_n(y) dy. \quad (4.4)$$

Подставляя (4.4) в (4.3) и используя неравенства Гельдера и неравенства Бесселя, имеем оценку

$$\begin{aligned} \left| - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 \cdot u_n(t) \cdot \vartheta_n(x) \right| &= \left| \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l \frac{\partial^2 U(t, y)}{\partial y^2} \vartheta_n(y) dy \cdot \vartheta_n(x) \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |\vartheta_n(x)|^2} \cdot \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^l \left| \frac{\partial^2 U(t, y)}{\partial y^2} \right| \cdot |\vartheta_n(y)| dy \right]^2} \leq \\ &\leq \delta_3 \cdot \left\| \frac{\partial^2 U(t, x)}{\partial x^2} \right\|_{L_2(\Omega_t)} < \infty. \end{aligned}$$

Это и завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.
2. Замышляева А. А., “Математические модели соболевского типа высокого порядка”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Матем. моделир. и программирование*, **7:2** (2014), 5 – 28.
3. Benney D. J., “Interactions of permanent waves of finite amplitude”, *Journ. Math. Phys.*, **43** (1964), 309 – 313.
4. Абзалимов Р. Р., Саляхова Е. В., “Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями”, *Известия вузов. Математика*, 2008, № 11, 3 – 11.
5. Ахтямов А. М., Аюпова А. Р., “О решении задачи диагностирования дефектов в виде малой полости в стержне”, *Журн. СВМО*, **12:3** (2010), 37 – 42.

6. Джураев Т. Д., Логинов Б. В., Малюгина И. А., “Вычисления собственных значений и собственных функций некоторых дифференциальных операторов третьего и четвертого порядков”, *Дифференц. уравнения мат. физики и их приложения*, 1989, 24 – 36.
7. Турбин М. В., “Исследование начально-краевой задачи для модели движения жидкости Гершель-Балкли”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 2, 246 – 257.
8. Шабров С. А., “Об одной математической модели малых деформаций стержневой системы с внутренними особенностями”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2013, № 1, 232 – 250.
9. Шабров С. А., “Об оценках функции влияния одной математической модели четвертого порядка”, *Вестник Воронежского государственного университета. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 168 – 179.
10. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, 2011, № 10 (227), 40 – 48.
11. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного дифференциального уравнения, содержащего квадрат гиперболического оператора и нелинейное отражающее отклонение”, *Вестник ТомГУ. Математика и Механика*, **14:2** (2011), 59 – 69.
12. Юлдашев Т. К., “Смешанная задача для нелинейного дифференциального уравнения четвертого порядка с малым параметром при параболическом операторе”, *Журнал вычисл. математики и мат. физики*, **51:9** (2011), 1703 – 1711.
13. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журн. СВМО*, **14:2** (2012), 137 – 142.
14. Юлдашев Т. К., “Об устойчивости по малым параметрам решения смешанной задачи для нелинейного псевдогиперболического уравнения”, *Журн. СВМО*, **15:1** (2013), 134 – 142.
15. Юлдашев Т. К., “Об одной обратной задаче для линейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка”, *Вестник ВоронежГУ. Серия: Физика. Математика*, 2015, № 2, 180 – 189.
16. Yuldashev T. K., “A double inverse problem for a partial Fredholm integro-differential equation of fourth order”, *Proc. of Jangjeon Math. Society*, **18:3** (2015), 417 – 426.
17. Уизем Дж., *Линейные и нелинейные волны*, Мир, М., 1977, 622 с.
18. Гордезиани Д. Г., Авалишвили Г. А., “Решения нелокальных задач для одномерных колебаний среды”, *Матем. моделирование*, **12:1** (2000), 94 – 103.
19. Иванчов Н. И., “Краевые задачи для параболического уравнения с интегральным условием”, *Дифференц. уравнения*, **40:4** (2004), 547 – 564.
20. Треногин В. А., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1980, 495 с.

On solvability of a Boussinesq type integro-differential equation with nonlocal integral conditions

© T. K. Yuldashev³ K. H. Shabadikov⁴

Abstract. This article considers the questions of one value solvability of the nonlocal boundary value problem for a nonlinear Boussinesq type fourth-order integro-differential equation. The Fourier method of separation of variables is employed. The countable system of nonlinear integral equations (CSNIE) is obtained. To prove the theorem of one-value solvability of CSNIE the method of successive approximations is used. The convergence of the Fourier series to an unknown function of considering nonlocal boundary value problem is shown. This paper advances the theory of Boussinesq type differential equations.

Key Words: Boundary value problem, nonlinear equation, Boussinesq type equation, nonlocal integral conditions, one valued solvability

³ Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursun.k.yuldashev@gmail.com

⁴ Associate professor of Mathematical Analyses and Differential Equations Chair, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 533.72

**Математическое моделирование процесса переноса
тепла в прямоугольном канале в зависимости от числа
Кнудсена**© О. В. Гермидер¹, В. Н. Попов²

Аннотация. В рамках кинетического подхода найдено решение задачи о теплопереносе в длинном канале прямоугольного сечения. В канале поддерживается постоянный градиент температуры, направленный вдоль оси симметрии канала. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, использовано кинетическое уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия на стенках канала - модель диффузного отражения. Отклонение состояния газа от равновесного полагается малым. Это позволило рассмотреть решение задачи в линеаризованном виде. Построен профиль вектора потока тепла в канале, а также вычислен поток тепла через поперечное сечение канала в зависимости от отношения сторон прямоугольного сечения и значений числа Кнудсена. Проведен анализ полученных выражений при переходе к свободномолекулярному и гидродинамическому режимам.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, уравнение Вильямса, модель диффузного отражения, аналитические решения, число Кнудсена

1. Введение

Исследование течений в микроканалах имеет большое значение для применения новых технологий [1]. Предметом изучения динамики разреженного газа являются, главным образом, процессы тепло-массообмена и движения газов при значительных степенях разрежения [2]. В силу развития нанотехнологий в последние время особое внимание привлекают исследования течений разреженного газа в каналах произвольного поперечного сечения. Так в [3], [4], [5] рассматривалось течение разреженного газа в прямоугольном канале, в [6] – в канале треугольного сечения, в [7]-[10] – в цилиндрическом канале, в [11] – между двумя концентрическими цилиндрами, в [12] – в канале эллиптического сечения. В [5] и [10] получены профиль вектора потока тепла и поток тепла с помощью уравнения Вильямса при постоянном градиенте температуры, но явной зависимости построенного решения уравнения Вильямса от числа Кнудсена не приведено. В [4] построены профили массовой скорости и потока тела в свободномолекулярном режиме. В [3], [6]-[9], [11], [12] для описания процессов переноса использовались уравнения с постоянной частотой столкновений. В то время как более реалистичным является предположение о постоянстве длины свободного пробега молекул газа, по крайней мере, для молекул, взаимодействие которых между собой можно аппроксимировать моделью твердых сфер. Это предположение эквивалентно тому, что частота столкновений молекул должна быть пропорциональна абсолютной величине их тепловой скорости [13], [14]. Последнее предположение приводит к следующей коррекции БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модели кинетического уравнения

¹ Аспирант кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; o.germider@narfu.ru

² Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; v.popov@narfu.ru

Больцмана [13]

$$\frac{df}{dt} + \mathbf{v}\nabla f = \frac{\omega}{\gamma l_g}(f_* - f).$$

Здесь $\omega = |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|$, \mathbf{v} – скорость молекул газа, $\mathbf{u}(\mathbf{r}')$ – массовая скорость газа, \mathbf{r}' – размерный радиус-вектор, l_g – средняя длина свободного пробега молекул газа, $\beta = m/(2k_B T_0)$, $\gamma = 5/2$, m – масса молекулы газа, k_B – постоянная Больцмана, T_0 – температура газа в некоторой точке, принятой в качестве начала координат,

$$f_* = n_* \left(\frac{m}{2\pi k_B T_*} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T_*} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_*)^2 \right).$$

Все основные свойства интеграла столкновений Больцмана при такой коррекции сохраняются, однако величины n_* , T_* и \mathbf{u}_* , входящие в f_* , уже не локальные плотность, температура и скорость, а некоторые параметры, которые выбираются из условия, что модельный интеграл столкновений удовлетворяет законам сохранения числа частиц, импульса и энергии [13]. Полученное в результате такой коррекции модельное уравнение называется БГК моделью кинетического уравнения Больцмана с частотой столкновений, зависящей от скорости, или модельным уравнением Вильямса. Полученные в [3], [6], [8], [11], [12] результаты относятся к задачам, связанным с переносом массы газа в каналах при наличии параллельного стенкам канала градиента давления. Целью представленной работы является вычисление потока тепла разреженного газа под действием продольного градиента температуры в канале прямоугольного сечения в зависимости от значений числа Кнудсена. В качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса, в работе использовано уравнение Вильямса, а в качестве граничного условия – модель диффузного отражения.

2. Постановка задачи. Вывод основных уравнений

Рассмотрим прямоугольный канал со сторонами сечения a' и b' , стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm a'/2$ и $y' = \pm b'/2$. Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент температуры, направленный вдоль оси симметрии канала z' . Кинетическое уравнение Вильямса в выбранной системе координат запишем в виде

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_y \frac{\partial f}{\partial y'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\omega}{\gamma l_g}(f_* - f). \quad (2.1)$$

В качестве граничного условия на стенках канала будем использовать модель диффузного отражения молекул газа стенками канала. В этом случае [15]:

$$f^+(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v}), \quad \mathbf{v}\mathbf{n} > 0, \quad (2.2)$$

где $f^+(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v})$ – функция распределения молекул газа, отраженных от стенок канала, $f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально-равновесная функция распределения с параметрами, заданными на стенках, \mathbf{n} – вектор нормали к стенке канала, направленный в сторону газа,

$$f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z) \left(\frac{m}{2\pi k_B T_0} \right)^{3/2} \exp \left(-\frac{m}{2k_B T_0} \mathbf{v}^2 \right). \quad (2.3)$$

Будем полагать изменение давления на длине свободного пробега молекул газа малым. В этом случае решение задачи можно получить в линеаризованном виде, представив

функции f и f_* в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{C})(1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \quad (2.4)$$

$$f_*(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_0(\mathbf{C})(1 + h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C})), \quad (2.5)$$

$$h_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \frac{\delta n_*}{n_0} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}_* + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right) \frac{\delta T_*}{T_0}. \quad (2.6)$$

Здесь $f_0(C) = n_0(\beta/\pi)^{3/2} \exp(-C^2)$ – абсолютный максвеллиан, $\mathbf{C} = \beta^{1/2}\mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа, n_0 – концентрация молекул газа в начале координат, $\mathbf{r} = \mathbf{r}'/b'$ – безразмерный радиус-вектор, а величины n_* , T_* и \mathbf{u}_* , входящие в (2.6), находим из соотношений [15]:

$$\int \omega M_j f_* d^3\mathbf{v} = \int \omega M_j f d^3\mathbf{v}, \quad j = 0, 1, \dots, 4, \quad (2.7)$$

$$M_0 = 1, \quad M_i = m\mathbf{v}_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad M_4 = mv^2/2.$$

Подставляя (2.4)-(2.6) в уравнение (2.1), для определения функции $h(\mathbf{r}, \mathbf{C})$ получаем уравнение в безразмерных координатах:

$$\left(C_x \frac{\partial h}{\partial x} + C_y \frac{\partial h}{\partial y} + C_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) \gamma Kn + Ch(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = Ch_*(\mathbf{r}, \mathbf{C}), \quad (2.8)$$

где $Kn = l_g/b'$ – число Кнудсена. Подставляя (2.4)-(2.6) в (2.7), находим

$$\begin{aligned} \frac{\delta n_*}{n_0} &= \frac{3}{4\pi} \int C \exp(-C^2) h d^3\mathbf{C} - \frac{1}{8\pi} \int C^3 \exp(-C^2) h d^3\mathbf{C}, \\ \frac{\delta T_*}{T_0} &= \frac{1}{2\pi} \int C \exp(-C^2) h d^3\mathbf{C} - \frac{1}{4\pi} \int C^3 \exp(-C^2) h d^3\mathbf{C}, \\ \mathbf{U}_* &= \frac{3}{8\pi} \int C\mathbf{C} \exp(-C^2) h d^3\mathbf{C}. \end{aligned}$$

С учетом сказанного, уравнение (2.8) перепишем в виде

$$\left(C_x \frac{\partial h}{\partial x} + C_y \frac{\partial h}{\partial y} + C_z \frac{\partial h}{\partial z}\right) \gamma Kn + Ch(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = \frac{C}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') h(\mathbf{r}, \mathbf{C}') d^3\mathbf{C}', \quad (2.9)$$

где $k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') = 1 + 3\mathbf{C}\mathbf{C}'/2 + (C^2 - 2)(C'^2 - 2)/2$.

Решение уравнения (2.9) ищем в виде разложения по инвариантам столкновений $h_0 = 1$, $h_1 = C_x$, $h_2 = C_y$, $h_3 = C_z$, $h_4 = C^2 - 3/2$. Принимая во внимание, что ось z направлена вдоль градиента температуры, можем записать

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = G_n z + AC_z + G_T z \left(C^2 - \frac{3}{2}\right) + \varphi(\mathbf{C}). \quad (2.10)$$

Здесь G_n и G_T – безразмерные градиенты концентрации молекул газа и температуры:

$$G_n = \frac{b'}{n_0} \frac{dn}{dz'}, \quad G_T = \frac{b'}{T_0} \frac{dT}{dz'}.$$

Учтем, что в линейном приближении $T(z) = T_0(1 + G_T z)$ и $n(z) = n_0(1 + G_n z)$. Тогда из равенства $p(z) = n(z)k_B T(z)$ в предположении постоянства давления, получаем $G_n^{(T)} = -G_T$. Следовательно, выражение (2.10) перепишем в виде

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = AC_z + G_T z \left(C^2 - \frac{5}{2}\right) + \varphi(\mathbf{C}). \quad (2.11)$$

Подставляя (2.11) в (2.9), приходим к уравнению относительно $\varphi(\mathbf{C})$:

$$C_z G_T \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) \gamma K n + C \varphi(\mathbf{C}) = \frac{C}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') \varphi(\mathbf{C}') d^3 \mathbf{C}'. \quad (2.12)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что решение уравнения (2.12) имеет вид:

$$\varphi(\mathbf{C}) = -\gamma K n \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) G_T \frac{C_z}{C}. \quad (2.13)$$

Тогда, исходя из статистического смысла функции распределения, и того факта, что вектор массовой скорости газа имеет только одну ненулевую z -компоненту U_0 [15]:

$$U_0 = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) d^3 \mathbf{C} = \frac{G_T}{3\sqrt{\pi}} + \frac{A}{2},$$

находим $A = 2U_0 - 2G_T/(3\sqrt{\pi})$. Таким образом, выражение (2.11) примет вид:

$$h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) = 2U_0 C_z + G_T \left(\left(z - \gamma K n \frac{C_z}{C} \right) \left(C^2 - \frac{5}{2} \right) - \frac{2G_z}{3\sqrt{\pi}} \right). \quad (2.14)$$

Соотношения (2.4) и (2.14) определяют в линейном приближении решение уравнения (2.1). Однако это решение не удовлетворяет граничному условию (2.2), так как в линейном приближении функция $f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, определяемая выражением (2.3), имеет вид:

$$f_s(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_0(C) (1 + G_T (C^2 - 5/2) z). \quad (2.15)$$

Для того, чтобы условие (2.2) выполнялось, решение уравнения (2.1) ищем в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = f_0(C) (1 + h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) + C_z Z_0(x, y, C_x, C_y)). \quad (2.16)$$

Подставляя (2.16) в (2.9), с учетом (2.15) для нахождения $Z_0(x, y, C_x, C_y)$ приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \left(C_x \frac{\partial Z_0}{\partial x} + C_y \frac{\partial Z_0}{\partial y} \right) \gamma K n + C Z_0(x, y, C_x, C_y) = \\ = \frac{C}{2\pi} \int C' \exp(-C'^2) C'_z Z_0(x, y, C'_x, C'_y) k(\mathbf{C}, \mathbf{C}') d^3 \mathbf{C}', \end{aligned} \quad (2.17)$$

с граничным условием

$$Z_0(x, y, C_x, C_y)|_s = -2U_0 + G_T \gamma K n \left(C - \frac{5}{2C} \right) + \frac{2G_T}{3\sqrt{\pi}}, \quad \mathbf{Cn} > 0. \quad (2.18)$$

Принимая во внимание вид граничного условия (2.18), для нахождения решения уравнения (2.17) образуем на множестве функций, зависящих от модуля молекулярной скорости, скалярное произведение весом $g(C) = C^5 \exp(-C^2)$:

$$(f_1, f_2) = \int_0^{+\infty} g(C) f_1(C) f_2(C) dC.$$

Функцию $Z_0(x, y, C_x, C_y)$ раскладываем по ортогональным функциям $e_1 = 1$, $e_2 = C - 5/(2C)$ (ортогональность понимается здесь как равенство нулю записанного выше интеграла):

$$Z_0(x, y, C_x, C_y) = Z_1(x, y, \varphi, \theta) + G_T \gamma K n (C - 5/(2C)) Z_2(x, y, \varphi, \theta). \quad (2.19)$$

При записи (2.19) перешли в пространстве скоростей к сферической системе координат $C_x = C \cos \varphi \sin \theta$, $C_y = C \sin \varphi \sin \theta$, $C_z = C \cos \theta$, где углы φ и θ отсчитываются от положительных направлений осей C_x и C_z , соответственно. Подставляя (2.19) в (2.17), в силу ортогональности функций e_1 , e_2 приходим к системе двух незацепленных уравнений

$$\left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial Z_1}{\partial y} \sin \varphi \right) \gamma Kn \sin \theta + Z_1(x, y, \varphi, \theta) = \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta' \sin \theta' d\theta' \int_0^{2\pi} Z_1(x, y, \varphi', \theta') d\varphi', \quad (2.20)$$

$$\left(\frac{\partial Z_2}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial Z_2}{\partial y} \sin \varphi \right) \gamma Kn \sin \theta + Z_2(x, y, \varphi, \theta) = 0. \quad (2.21)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} Z_1(x, y, \varphi, \theta)|_s &= -2U_0 + \frac{2G_T}{3\sqrt{\pi}}, \quad \mathbf{Cn} > 0, \\ Z_2(x, y, \varphi, \theta)|_s &= 1, \quad \mathbf{Cn} > 0. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Из статистического смысла функции распределения, отличная от нуля компонента вектора потока тепла определяется выражением [15]:

$$q'_z(x, y) = \frac{m}{2} \int (v_z - u_z(x', y')) |\mathbf{v} - \mathbf{u}(x', y')|^2 f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3\mathbf{v} = \frac{p_0}{\beta^{1/2}} q_z(x, y), \quad (2.23)$$

где безразмерная компонента вектора потока тепла:

$$\begin{aligned} q_z(x, y) &= \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z (C^2 - 5/2) (h(\mathbf{r}, \mathbf{C}) + C_z Z_0(x, y, C'_x, C'_y)) d^3\mathbf{C} = \\ &= -\frac{3G_T \gamma Kn}{2\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} Z_2(x, y, \varphi, \theta) d\varphi \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Из (2.24) следует, что функция $Z_1(x, y, \varphi, \theta)$ не вносит вклада в вектор потока тепла. Следовательно, решение задачи сводится к отысканию функции $Z_2(x, y, \varphi, \theta)$ из уравнения (2.21) с граничным условием (2.22). Граничные условия (2.22) не являются однородным. Для того чтобы привести его к однородному, введем функцию

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = Z_2(x, y, \varphi, \theta) - 1, \quad (2.25)$$

для которой согласно (2.21) приходим к уравнению

$$\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial Z}{\partial y} \sin \varphi \right) \gamma Kn \sin \theta + Z(x, y, \varphi, \theta) + 1 = 0. \quad (2.26)$$

Граничное условие (2.22) для $Z(x, y, \varphi, \theta)$ перепишем в виде:

$$Z(\pm a/2, y, \varphi, \theta) = 0, \quad \pm \cos \varphi < 0, \quad (2.27)$$

$$Z(x, \pm 1/2, \varphi, \theta) = 0, \quad \pm \cos \varphi < 0. \quad (2.28)$$

где $a = a'/b'$.

Решение уравнения (2.26) с граничными условиями (2.27) и (2.28) находим методом характеристик [16]. Система уравнений характеристик для уравнения (2.26) имеет вид

$$\frac{dx}{\gamma Kn \cos \varphi \sin \theta} = \frac{dy}{\gamma Kn \sin \varphi \sin \theta} = -\frac{dZ}{Z(x, y, \varphi, \theta) + 1} = dt. \quad (2.29)$$

Получаем функцию $Z(x, y, \varphi, \theta)$ из системы (2.29)

$$Z(x, y, \varphi, \theta) = \exp(-t) - 1. \quad (2.30)$$

Здесь значения параметра t , учитывая граничные условия (2.27) и (2.28), находим при отражении молекул от правой стенки

$$t_1 = \frac{2x - a}{2\gamma Kn \cos \varphi \sin \theta}, \quad \varphi_0 \leq \varphi \leq \varphi_1, \quad \varphi_0 = \arctan \frac{2y + 1}{2x - a} + \pi, \\ \varphi_1 = \arctan \frac{2y - 1}{2x - a} + \pi, \quad (2.31)$$

при отражении молекул от верхней стенки

$$t_2 = \frac{2y - 1}{2\gamma Kn \sin \varphi \sin \theta}, \quad \varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2, \quad \varphi_2 = \arctan \frac{2y - 1}{2x + a} + 2\pi, \quad (2.32)$$

при отражении молекул от левой стенки

$$t_3 = \frac{2x + a}{2\gamma Kn \cos \varphi \sin \theta}, \quad \varphi_2 \leq \varphi \leq \varphi_3, \quad \varphi_3 = \arctan \frac{2y + 1}{2x + a} + 2\pi, \quad (2.33)$$

при отражении молекул от нижней стенки

$$t_4 = \frac{2y + 1}{2\gamma Kn \sin \varphi \sin \theta}, \quad \varphi_3 \leq \varphi \leq \varphi_4, \quad \varphi_4 = \arctan \frac{2y + 1}{2x - a} + 3\pi. \quad (2.34)$$

Соотношения (2.30)-(2.34) полностью определяют решение уравнения (2.26) с граничными условиями (2.27) и (2.28). Таким образом, функция распределения молекул газа построена.

3. Вычисление потока тепла в канале. Анализ полученных результатов

Подставляя построенную функцию $Z(x, y, \varphi, \theta)$ в (2.25), находим отличную от нуля компоненту вектора потока тепла согласно (2.24):

$$q_z(x, y) = -\frac{3G_T \gamma Kn}{2\sqrt{\pi}} \left(1 - \frac{3}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \int_0^\pi \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \int_{\varphi_{k-1}}^{\varphi_k} \exp(-t_k) d\varphi \right). \quad (3.1)$$

Соответственно поток тепла через поперечное сечение канала равен [1]

$$J'_Q = \int_{-b'/2}^{b'/2} \int_{-a'/2}^{a'/2} q'_z(x', y') dx' dy' = \frac{p_0}{2\beta^{1/2}} J_Q, \quad (3.2)$$

где J_Q — безразмерный поток тепла:

$$J_Q = \frac{8}{a} \int_0^{1/2} \int_0^{a/2} q_z(x, y) dx dy. \tag{3.3}$$

Значения J_Q , найденные согласно (3.3) с использованием системы компьютерной алгебры Maple 17 при различных значениях числа Кнудсена и отношениях сторон поперечного сечения канала a' и b' приведены в таблице 1.

Таблица 1. Значения $-J_Q/G_T$ при различных значениях a и Kn .

| Kn | $a = a'/b'$ | | | | | | | | |
|---------|-------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| | 0, 1 | 0, 5 | 0, 9 | 1 | 1, 01 | 1, 1 | 5 | 10 | 100 |
| 0, 0001 | 0, 0004 | 0, 0004 | 0, 0004 | 0, 0004 | 0, 0004 | 0, 0004 | 0, 0004 | 0, 0004 | 0, 0004 |
| 0, 001 | 0, 0042 | 0, 0042 | 0, 0042 | 0, 0042 | 0, 0042 | 0, 0042 | 0, 0042 | 0, 0042 | 0, 0042 |
| 0, 01 | 0, 0380 | 0, 0411 | 0, 0415 | 0, 0415 | 0, 0415 | 0, 0416 | 0, 0418 | 0, 0419 | 0, 0419 |
| 0, 1 | 0, 1884 | 0, 3195 | 0, 3470 | 0, 3506 | 0, 3510 | 0, 3536 | 0, 3770 | 0, 3803 | 0, 3832 |
| 0, 5 | 0, 3235 | 0, 7637 | 0, 9414 | 0, 9708 | 0, 9735 | 0, 9965 | 1, 2539 | 1, 2966 | 1, 3349 |
| 1 | 0, 3661 | 0, 9344 | 1, 1988 | 1, 2456 | 1, 2500 | 1, 2875 | 1, 7821 | 1, 8837 | 1, 9776 |
| 2 | 0, 3966 | 1, 0639 | 1, 4029 | 1, 4657 | 1, 4716 | 1, 5226 | 2, 2973 | 2, 5017 | 2, 7101 |
| 5 | 0, 4217 | 1, 1750 | 1, 5838 | 1, 6622 | 1, 6697 | 1, 7341 | 2, 8488 | 3, 2348 | 3, 7440 |
| 10 | 0, 4326 | 1, 2248 | 1, 6667 | 1, 7528 | 1, 7610 | 1, 8321 | 3, 1403 | 3, 6608 | 4, 5252 |
| 100 | 0, 4457 | 1, 2856 | 1, 7702 | 1, 8663 | 1, 8755 | 1, 9554 | 3, 5537 | 4, 3259 | 6, 5185 |
| 1000 | 0, 4476 | 1, 2950 | 1, 7865 | 1, 8843 | 1, 8936 | 1, 9750 | 3, 6278 | 4, 4566 | 7, 2085 |

Приведенный поток тепла, найденный согласно (3.3), не зависит непосредственно от сторон прямоугольного сечения этого канала, а определяется их отношением $a = a'/b'$ и числом Кнудсена Kn . Для режима течения, близкого к свободномолекулярному ($Kn \gg \gg 0$), выражение (3.3) можно существенно упростить. Раскладывая в ряд по малому параметру $1/Kn$ подынтегральные выражения в (3.3) и ограничиваясь линейными членами разложения, находим

$$J_Q = -\frac{9}{4\sqrt{\pi}a} \int_0^{1/2} \int_0^{a/2} \left(\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \frac{2x - a}{\cos \varphi} d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{2y - 1}{\sin \varphi} d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\varphi_3} \frac{2x + a}{\cos \varphi} d\varphi + \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} \frac{2y + 1}{\sin \varphi} d\varphi \right) dx dy.$$

Интегралы в последнем выражении могут быть вычислены аналитически [4]:

$$J_Q = \frac{9}{4\sqrt{\pi}a} \left(\frac{a}{3(1 + \sqrt{a^2 + 1})} + \frac{a}{3(a + \sqrt{a^2 + 1})} - \ln(\sqrt{a^2 + 1} + a) - a \ln\left(\sqrt{\frac{1}{a^2} + 1} + \frac{1}{a}\right) \right). \tag{3.4}$$

При этом для $a \gg 0$ выражение (3.4) имеет логарифмическую особенность $J_Q = -9 \ln(2a)/(4\sqrt{\pi}) - 9/(8\sqrt{\pi})$, что также совпадает с аналогичными результатами, приведенными в [4] для прямоугольного канала и для каналов с бесконечными параллельными стенками [1] в свободномолекулярном режиме. Для режимов течения, близких к гидродинамическому, анализ выражения (3.3) приводит к следующему результату:

$$J_Q = -\frac{15G_T Kn}{2\sqrt{\pi}}. \tag{3.5}$$

Таким образом, для режимов, близких к гидродинамическому, значение потока тепла не зависит от размеров прямоугольного сечения a' и b' . Последнее утверждение подтверждается результатами, приведенными в таблице 1 для $Kn \ll 0.001$, а выражение для J_Q в (3.5) совпадает с приведенным в [1].

4. Заключение

В работе в рамках кинетического подхода решена задача о переносе тепла в канале прямоугольного сечения под действием постоянного градиента температуры. Для различных значений отношений сторон этого сечения построен профиль вектора потока тепла, вычислены значения потока тепла через поперечное сечение канала в широком диапазоне изменения числа Кнудсена. Проведено сравнение с аналогичными выражениями, полученными при условии, что один из размеров канала много меньше другого, — представленные в работе результаты переходят в аналогичные результаты для каналов с бесконечными параллельными стенками. Показано, что в предельных случаях, когда $Kn \ll 1$ и $Kn \gg 1$ полученные в работе результаты переходят в аналогичные значения потока тепла для гидродинамического и свободномолекулярного режимов соответственно.

Работа выполнена при частичном финансировании в рамках Государственного задания «Создание вычислительной инфраструктуры для решения наукоемких прикладных задач» (Проект № 3628).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ф. М. Шарипов, В. Д. Селезнев, *Движение разреженных газов в каналах и микроканалах*, УрО РАН, Екатеринбург, 2008, 230 с.
2. Ю. А. Кошмаров, Ю. А. Рыжов, *Прикладная динамика разреженного газа*, Машиностроение, Москва, 1997, 184 с.
3. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, “Кинетический анализ изотермического течения в длинном микроканале прямоугольного поперечного сечения”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **50:7** (2010), 1285–1302.
4. О. В. Гермидер, В. Н. Попов, А. А. Юшканов, “Вычисление потоков массы газа и тепла в канале прямоугольного сечения в свободномолекулярном режиме”, *Журнал технической физики*, **86:6** (2016), 37–41.
5. О. В. Гермидер, В. Н. Попов, А. А. Юшканов, “Вычисление в рамках кинетического подхода потока тепла в длинном канале постоянного прямоугольного поперечного сечения”, *Вестник Московского государственного областного университета. Серия: Физика-математика*, 2015, № 2, 96–106.
6. S. Naris, D. Valougeorgis, “Rarefied gas flow in a triangular duct based on a boundary fitted lattice”, *European Journal of Mechanics B/ Fluids*, **27** (2008), 810–822.
7. C. E. Siewert, D. Valougeorgis, “An analytical discrete-ordinates solution of the S-model kinetic equations for flow in a cylindrical tube”, *Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer*, **72** (2002), 531–550.

8. P. Taheri, M. Bahrami, “Macroscopic description of nonequilibrium effects in thermal transpiration flows in annular microchannels”, *Physical Review*, **86** (2012), 1–9.
9. C. H. Kamphorst, P. Rodrigues, L. B. Barichello, “A Closed-Form Solution of a Kinetic Integral Equation for Rarefied Gas Flow in a Cylindrical Duct”, *Applied Mathematics*, **5** (2014), 1516–1527.
10. О. В. Гермидер, В. Н. Попов, А. А. Юшканов, “Математическое моделирование процесса теплопереноса в длинном цилиндрическом канале”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:1 (2015), 22–29.
11. В. А. Титарев, Е. М. Шахов, “Численный анализ винтового течения Куэтта разреженного газа между коаксиальными цилиндрами”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **46**, 2006, 527–535.
12. I. Graur, F. Sharipov, “Gas flow through an elliptical tube over the whole range of the gas rarefaction”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **27** (2008), 335–345.
13. К. Черчиньяни, *Математические методы в кинетической теории газов*, Мир, М., 1973, 245 с.
14. С. В. Гулакова, В. Н. Попов, А. А. Юшканов, “Аналитическое решение уравнения Вильямса в задаче о течении Пуазейля с использованием зеркально-диффузной модели взаимодействия молекул газа со стенками канала”, *Журнал технической физики*, **85**:4 (2015), 1–6.
15. М. Н. Коган, *Динамика разреженного газа. Кинетическая теория*, Наука, М., 1967, 440 с.
16. М. Курант, *Уравнения с частными производными*, Мир, М., 1964, 830 с.

Дата поступления 27.04.2016

Mathematical modeling of the heat transfer process in a rectangular channel depending on Knudsen number

© О. В. Гермидер³, В. Н. Попов⁴

Abstract. A solution of heat transfer problem in a long rectangular channel has been found using the kinetic approach. In channel the constant temperature gradient along the axis of symmetry is supported. For the basic equation that describes the kinetics of the process Williams kinetic equation is used. For the boundary condition on the channel walls the model of diffuse reflection is used. The deviation from the state of rarefied gas equilibrium is assumed to be small. It allows to consider the solution of the problem in the linearized form. The heat flow vector profile is constructed in the channel and the heat flow through the channel cross-section is calculated, depending on the ratio lengths of rectangular cross-section and values of the Knudsen number. The results obtained upon transition to the free molecular regime and the hydrodynamic regime of the gas flow are analyzed.

Key Words: Boltzmann kinetic equation, Williams equation, model of diffuse reflection, analytical solutions, Knudsen number

³ Post graduate student, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; o.germider@narfu.ru.

⁴ Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university named after M. V. Lomonosov, Arkhangelsk; v.popov@narfu.ru.

УДК 517.9

Применение разрывного метода Галеркина для решения обратной задачи диффузии лекарственных веществ из хитозановых пленок

© И. М. Губайдуллин¹, Р. В. Жалнин², В. Ф. Масыгин³, В. Ф. Тишкин⁴, А. С. Шуршина⁵

Аннотация. В данной работе решается обратная задача диффузии лекарственных веществ из хитозановых пленок для определения коэффициента диффузии пленок. Для решения обратной задачи решается серия прямых задач, которая перебирается по генетическому алгоритму. При этом в качестве критерия для минимизации отклонения расчетных и экспериментальных данных используется индекс корреляции. Проведена серия численных расчетов для пленок с различным составом лекарственного вещества и временем термической модификации, для которых известны экспериментальные данные. Полученные численные результаты показывают хорошее согласование с экспериментальными данными.

Ключевые слова: уравнения диффузионного типа, метод Галёркина с разрывными базисными функциями, обратная задача, генетический алгоритм

1. Введение

На сегодняшний день перспективным направлением в медицине является лечение ран с помощью полимерных пленок, содержащих лекарственные вещества (ЛВ). Для таких пленок необходимо в течение длительного времени поддерживать требуемый уровень лекарственного вещества в крови или тканях пациента [1-7]. В условиях, когда процессами растворения или деструкции полимера можно пренебречь, основным механизмом высвобождения ЛВ из пленки является диффузия. Одной из важнейших характеристик, влияющей на выход ЛВ из полимерной матрицы-носителя, является коэффициент диффузии пленки.

Основой для математического моделирования служат экспериментальные данные, представленные в работах [8-10]. В этих работах были рассмотрены пленки на основе полимера природного происхождения — хитозана. В качестве ЛВ были использованы некоторые представители антибиотиков аминогликозидного (амикацин) и цефалоспоринового (цефазолин) ряда, активно используемые в лечении ожоговых травм [11]. Пленки на основе хитозана способствуют ускоренному заживлению повреждений кожи, подавляют рост микроорганизмов, хорошо сорбируют раневой экссудат, а кроме этого, является биоразлагаемыми, что позволяет исключить крайне болезненную процедуру смены повязки [12].

¹ Старший научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; irekmars@mail.ru.

² Заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск; zhalnin@gmail.com.

³ Преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск; vmasyagin@gmail.com.

⁴ Заместитель директора по научной работе Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва; v.f.tishkin@mail.ru.

⁵ Старший преподаватель кафедры высокомолекулярных соединений и общей химической технологии, Башкирский государственный университет, г. Уфа; anzhela_murzagil@mail.ru.

2. Постановка задачи

Для нахождения коэффициента диффузии нужно решить обратную задачу о диффузии ЛВ из полимерной пленки. Универсального метода решения обратной задачи не существует. Ее решение чаще всего находят, перебирая по определенному алгоритму серию прямых задач и минимизируя выбранный критерий отклонения расчетных и экспериментальных данных [13]. В качестве такого критерия в настоящей работе был выбран индекс корреляции. Для минимизации выбранного критерия использовался генетический алгоритм [14]. При этом очень важно найти решение прямой задачи с высокой точностью, т.к. речь идет о структурах, размер которых сравнительно невелик и погрешность вносит существенные коррективы в получаемый результат. С этой целью для решения прямой задачи используется метод Галеркина с разрывными базисными функциями [15, 16].

В экспериментах из работ [8-10] использовались пленки с длиной и шириной, равной 0,5 см и толщиной 0,1 мм, которые помещали в емкость объемом 10 мл, заполненную водой, при этом воду постоянно перемешивали.

На основании вышеописанных данных для описания процесса диффузии в пленке будем использовать одномерное уравнение диффузии:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial c}{\partial x} \right), \quad 0 \leq x \leq l, \quad 0 < t \leq T, \\ c(x, 0) &= c_0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ c(0, t) &= c(l, t) = 0, \quad t > 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где D – искомый коэффициент диффузии, t – время, x – пространственная координата, $c = c(x, t)$ – концентрация лекарственного вещества в пленке, c_0 – начальная концентрация вещества в пленке, l – толщина пленки.

Использование такого сочетания граничных и начальных условий подразумевает, что полимерная пленка, предварительно насыщенная ЛВ до равновесной концентрации, помещается в воду, где мгновенно начинает терять ЛВ с поверхности. Граничная концентрация становится равной нулю и остается таковой на всем протяжении процесса десорбции.

В результате возникает прямая задача — при известном коэффициенте диффузии D найти концентрацию ЛВ во всех точках x на момент времени t .

Модель с постоянным коэффициентом диффузии, используемая в работе [11] адекватно описывает поведение пленки при малых значениях t , но при больших t наблюдается расхождение численных расчетов с экспериментальными данными. В экспериментах наблюдается интенсивный выход ЛВ в начальные моменты времени и почти полное отсутствие выхода в конце эксперимента. В связи с этим в данной работе рассматривается математическая модель, при которой коэффициент диффузии экспоненциально меняется с течением времени:

$$D = D_0 e^{-t/t_0}, \quad (2.2)$$

где D_0 – начальное значение коэффициента диффузии, t_0 – время релаксации.

3. Численный метод решения прямой задачи

Покроем отрезок, на котором ищется решение, сеткой $0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_N = l$ с шагом $\Delta x_i = (x_{i+1} - x_i)$. Также примем в рассмотрение двойственную сетку $0 = x_0 \leq x_{1/2} \leq \dots \leq x_{N-1/2} \leq x_N = l$ с шагом $\Delta x'_i = (x_{i+1/2} - x_{i-1/2})$, где $x_{i+1/2} = \frac{x_i + x_{i+1}}{2}$.

Для аппроксимации уравнения (2.1) будем использовать проекционно-сеточную схему на разнесенных сетках [17-19]. Введем в рассмотрение вспомогательную переменную [20]:

$$\omega_x = D \frac{\partial c}{\partial x}.$$

Уравнение (2.1) переписывается в виде системы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= \frac{\partial \omega_x}{\partial x}, \\ \omega_x &= D \frac{\partial c}{\partial x}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

На каждом интервале $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ выберем систему базисных функций $\{\phi_j^i\} \in P^1(x)$:

$$\phi_0^i = 1, \quad \phi_1^i = \frac{x - x_{ci}}{\Delta x_i},$$

где x_{ci} - центр интервала $x_i \leq x \leq x_{i+1}$.

Тогда на каждом интервале $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ искомую функцию будем искать в виде проекции c на базис $\phi_j^i(x)$ с зависящими от времени коэффициентами: $c_i(x, t) =$

$$= \sum_{j=0}^1 \phi_j^i(x) c_{ji}(t).$$

На каждом интервале $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$ выберем систему базисных функций:

$$\psi_0^i = 1, \quad \psi_1^i = \frac{x - x'_{ci}}{\Delta x'_i},$$

где x'_{ci} - центр интервала $x_{i-1/2} \leq x \leq x_{i+1/2}$.

Для определения коэффициентов c_{ji} искомой функции на ячейках основной сетки, необходимо первое уравнение системы (3.1) умножить на вспомогательные функции, роль которых выполняют базисные функции $\phi_j^i(x)$ [15]. В результате получаем следующую систему:

$$\sum_{j=0}^1 \frac{\partial c_{ji}}{\partial t} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \phi_j^i \phi_k^i dx = \omega_x^\Gamma \phi_k^i|_{x=x_{i+1}} - \omega_x^\Gamma \phi_k^i|_{x=x_i} - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \omega_x \frac{\partial \phi_k^i}{\partial x} dx, \quad k = \overline{0, 1}. \quad (3.2)$$

Для определения коэффициентов ω_{xji} на ячейках двойственной сетки, необходимо второе уравнение системы (3.1) умножить на вспомогательные функции, роль которых выполняют базисные функции $\psi_j^i(x)$. В результате получаем систему:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^1 \omega_{xji} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \psi_j^i \psi_k^i dx &= Dc^\Gamma \psi_k^i|_{x=x_{i+1/2}} - Dc^\Gamma \psi_k^i|_{x=x_{i-1/2}} - \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} Dc \frac{\partial \psi_k^i}{\partial x} dx, \\ k &= \overline{0, 1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для вычисления интегралов применяются квадратурные формулы Гаусса [21]. В вычислениях использовался двухточечный шаблон. В системах (3.2-3.3) при нахождении интегралов по границам ячеек необходимо вычислить потоковые значения величин c^Γ и ω_x^Γ . Эти значения предлагается вычислять аналогично тому, как это сделано для уравнения теплопроводности [22], используя стабилизирующие добавки:

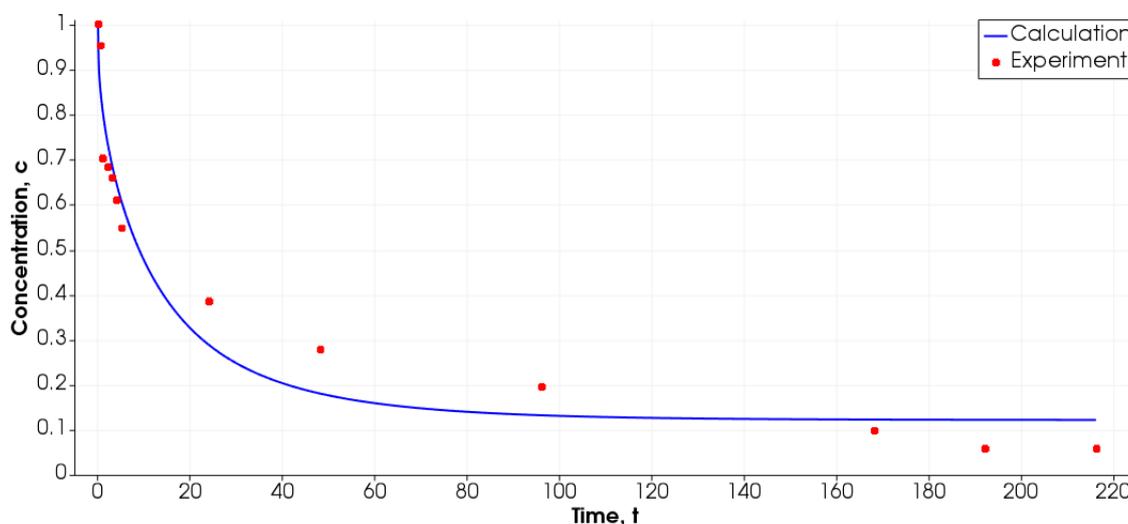
$$\begin{aligned} c^\Gamma|_{x=x_{i+1/2}} &= c_{0i}, \\ \omega_x^\Gamma|_{x=x_i} &= \omega_{x0i} + C_{11} (c_i|_{x=x_i} - c_{i-1}|_{x=x_i}). \end{aligned}$$

4. Численные результаты

Начальные данные задачи представляются в безразмерных величинах:

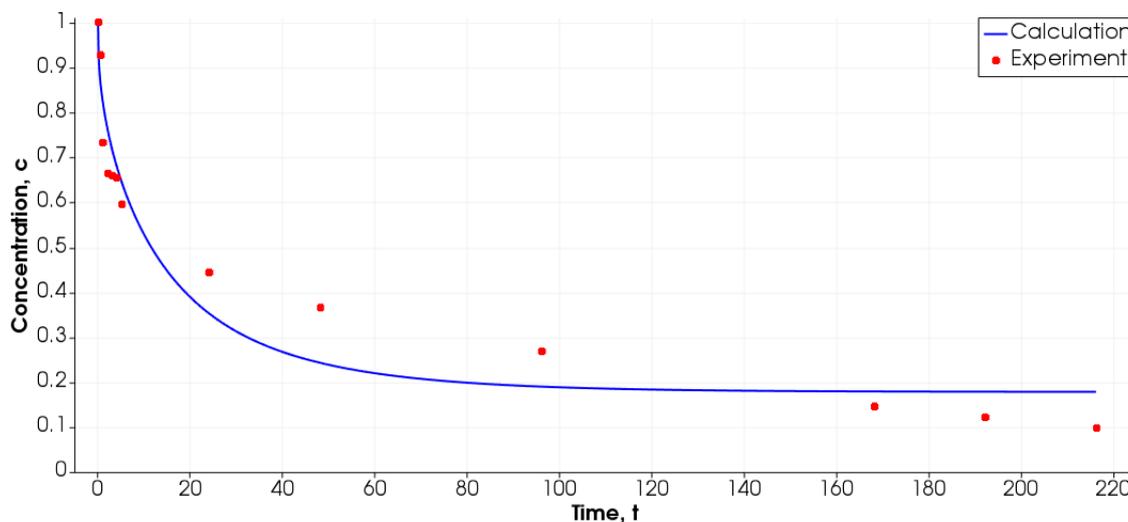
$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, & \quad 0 < t \leq 1, \\ c(x, 0) &= 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ c(0, t) &= c(1, t) = 0, & t > 0. \end{aligned}$$

Результаты решения обратной задачи представлены в графиках изменения концентрации ЛВ в долях от начального значения в пленке в зависимости от времени проведения натурального эксперимента (в часах) для пленок амикацин-хитозан и цефазолин-хитозан (рис. 4.1 - 4.11).



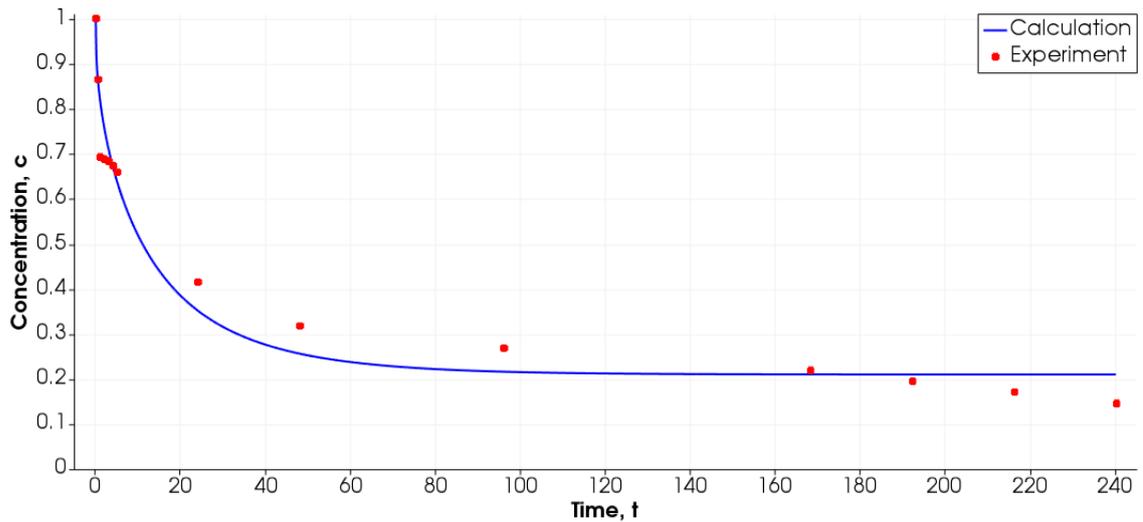
Р и с у н о к 4.1

График изменения концентрации АМС в пленке в зависимости от времени, состав АМС в пленке 0,01 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 30 минут.



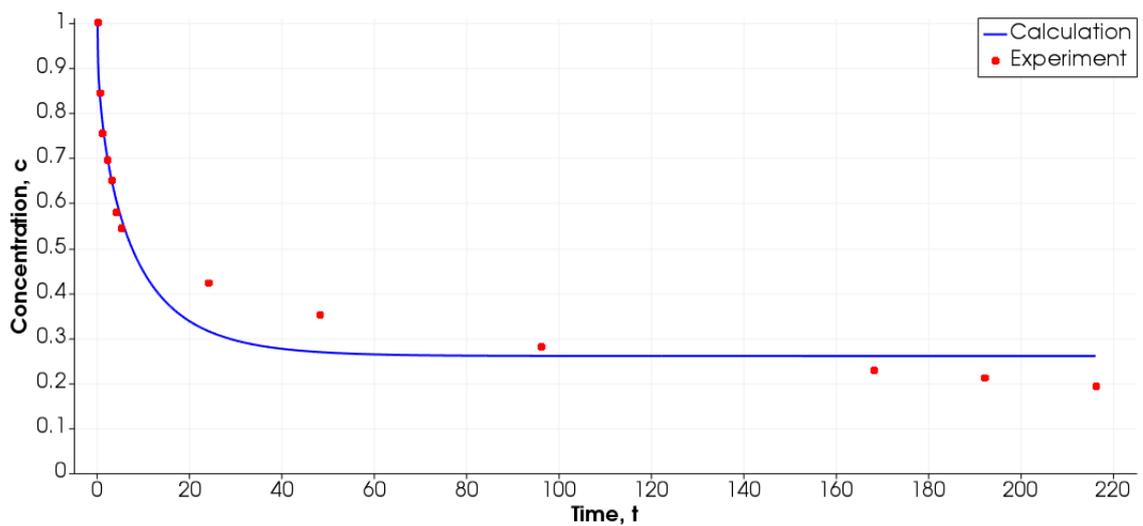
Р и с у н о к 4.2

График изменения концентрации АМС в пленке в зависимости от времени, состав АМС в пленке 0,01 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 60 минут.



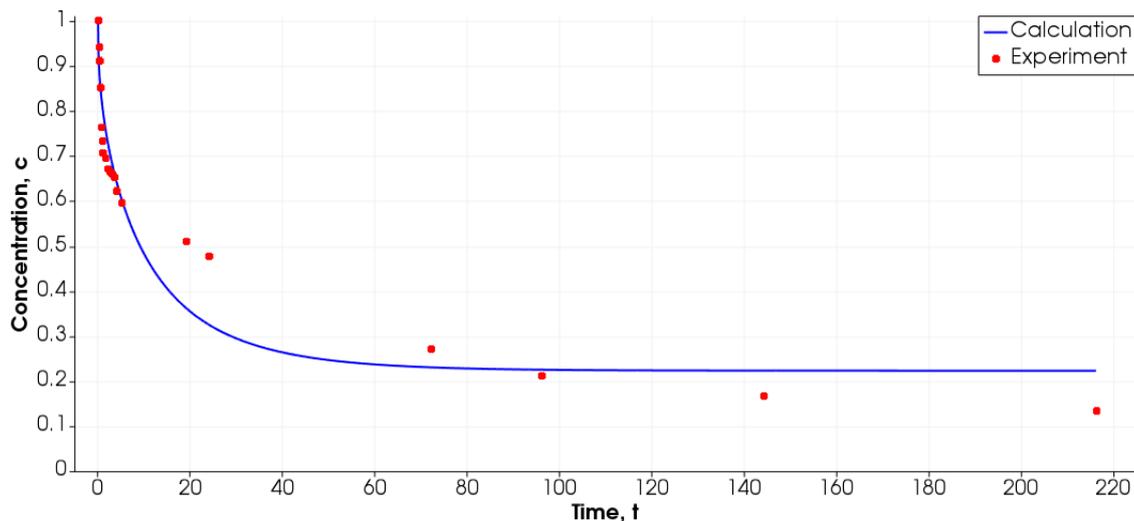
Р и с у н о к 4.3

График изменения концентрации АМС в пленке в зависимости от времени, состав АМС в пленке 0,01 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 120 минут.



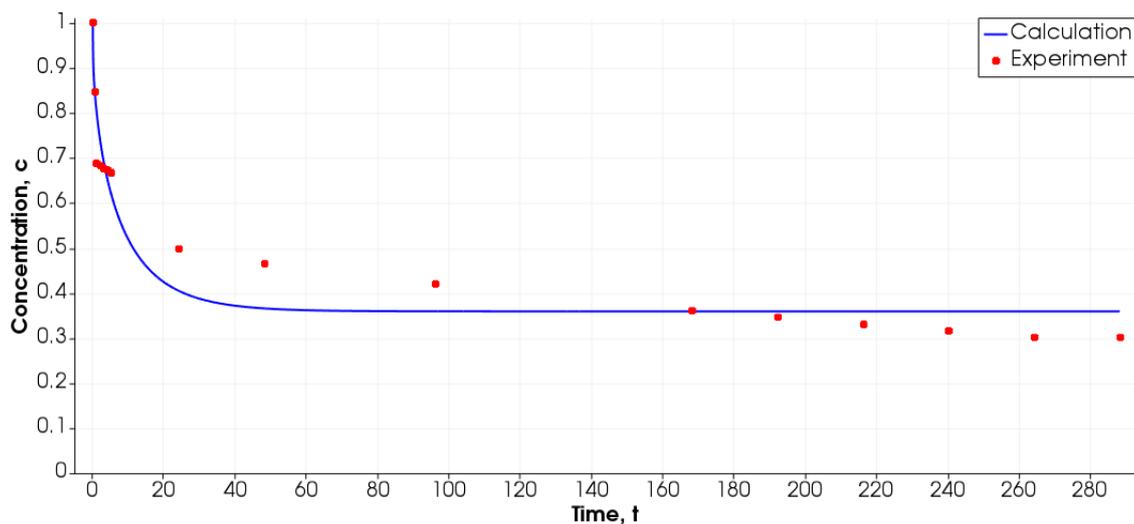
Р и с у н о к 4.4

График изменения концентрации АМС в пленке в зависимости от времени, состав АМС в пленке 0,05 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 30 минут.



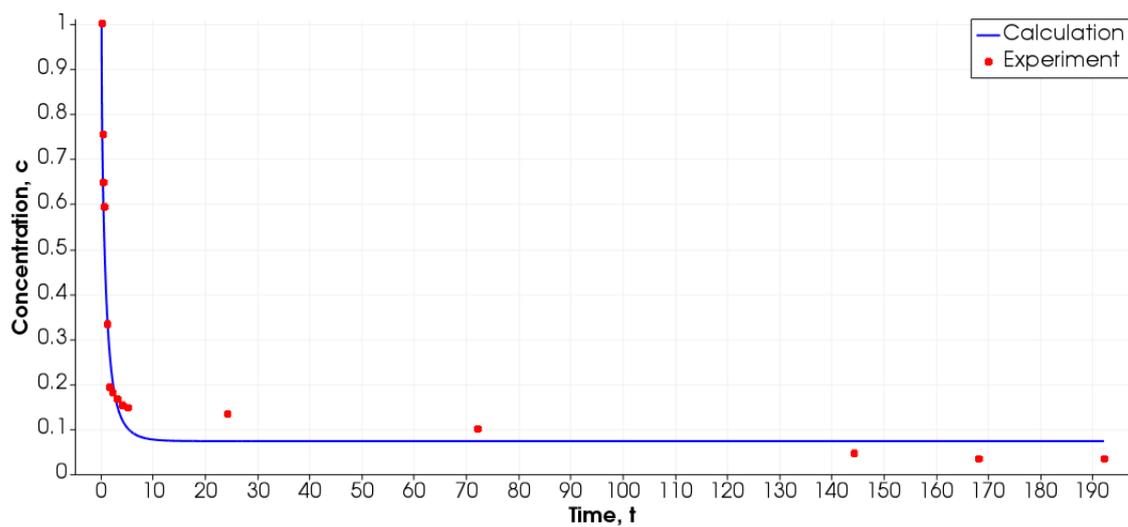
Р и с у н о к 4.5

График изменения концентрации АМС в пленке в зависимости от времени, состав АМС в пленке 0,1 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 0 минут.



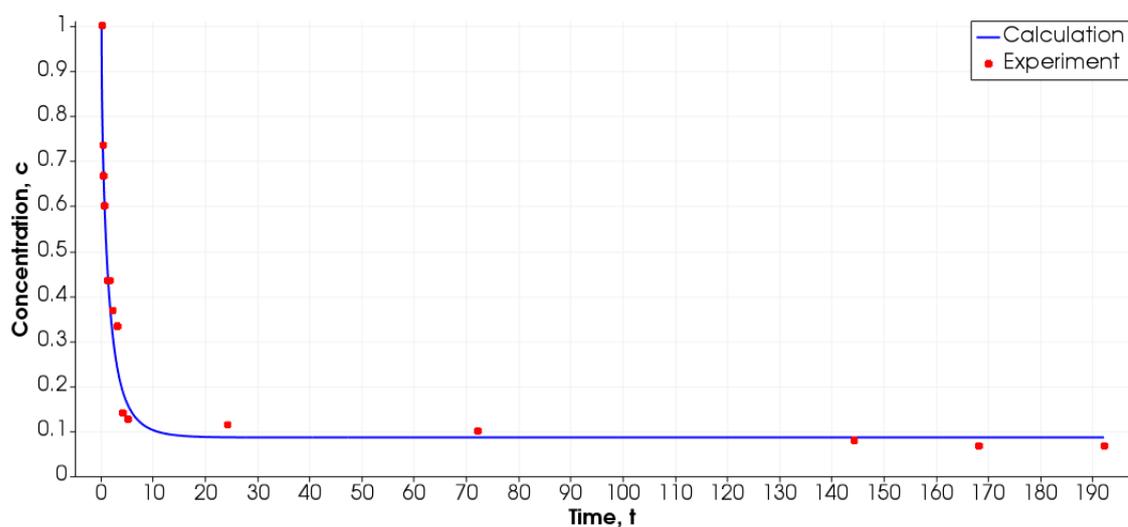
Р и с у н о к 4.6

График изменения концентрации АМС в пленке в зависимости от времени, состав АМС в пленке 0,1 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 30 минут.



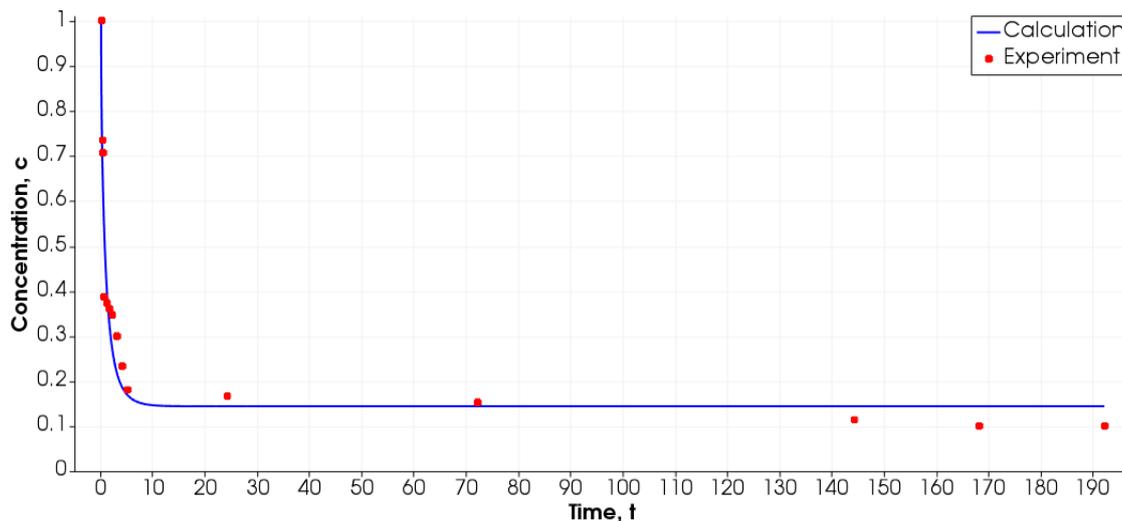
Р и с у н о к 4.7

График изменения концентрации ЦФЗ в пленке в зависимости от времени, состав ЦФЗ в пленке 0,01 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 30 минут.



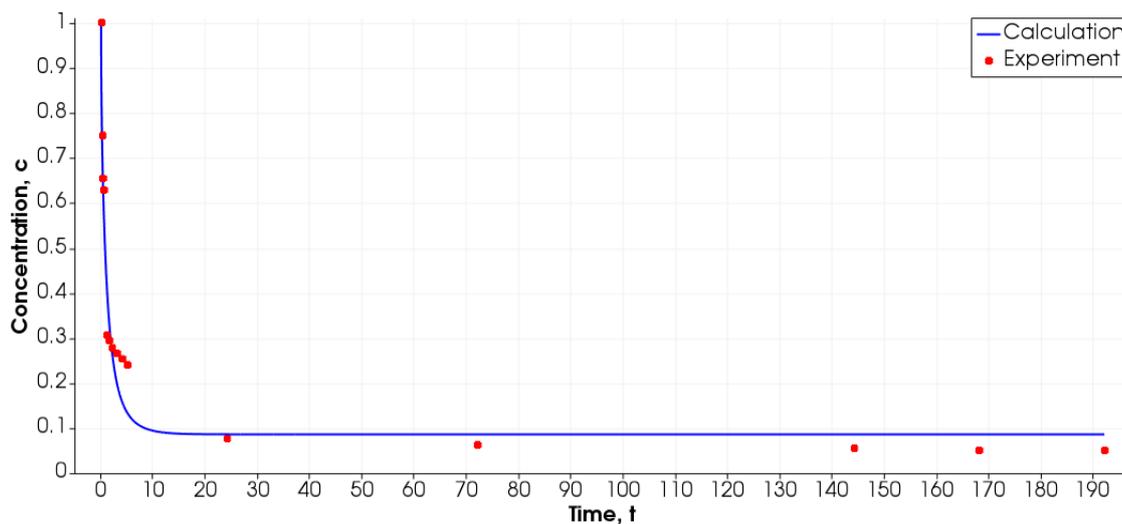
Р и с у н о к 4.8

График изменения концентрации ЦФЗ в пленке в зависимости от времени, состав ЦФЗ в пленке 0,01 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 60 минут.



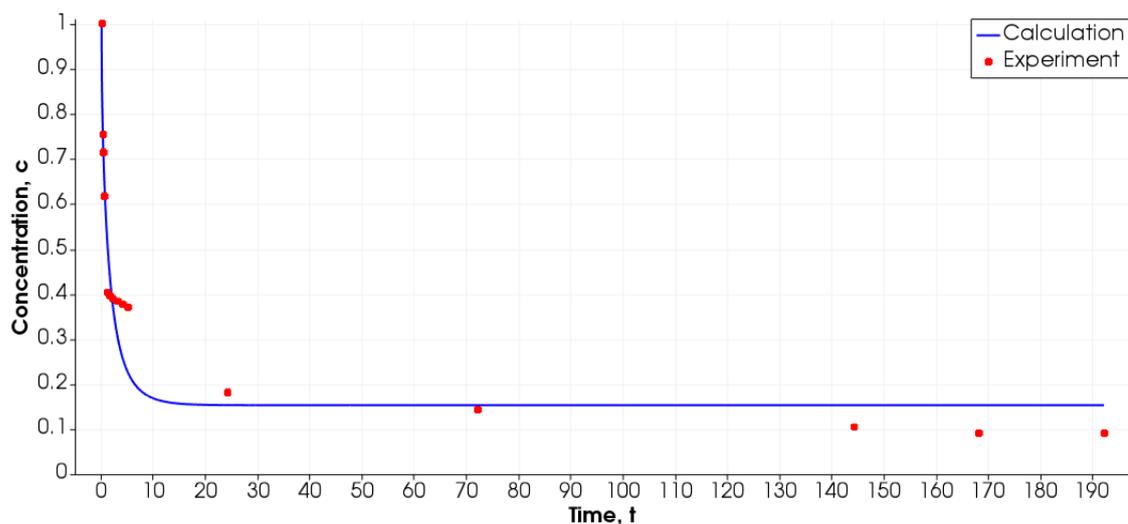
Р и с у н о к 4.9

График изменения концентрации ЦФЗ в пленке в зависимости от времени, состав ЦФЗ в пленке 0,01 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 120 минут.



Р и с у н о к 4.10

График изменения концентрации ЦФЗ в пленке в зависимости от времени, состав ЦФЗ в пленке 0,05 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 30 минут.



Р и с у н о к 4.11

График изменения концентрации ЦФЗ в пленке в зависимости от времени, состав ЦФЗ в пленке 0,1 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 30 минут.

Расчитанные значения коэффициентов диффузии и индексов корреляции для пленок представлены в таблице 1.

Таблица 1: Значения коэффициентов диффузии для представленных хитозановых пленок

| Состав пленки | Концентрация ЛВ в пленке, моль/моль ХТЗ | Время изотермического отжига пленки, мин | D_0 | t_0 | Индекс корреляции |
|---------------|-----------------------------------------|------------------------------------------|---------|-------|-------------------|
| ХТЗ-ЦФЗ | 1:0,01 | 30 | 17,6232 | 0,014 | 0,98869 |
| ХТЗ-ЦФЗ | 1:0,01 | 60 | 10,8158 | 0,021 | 0,99139 |
| ХТЗ-ЦФЗ | 1:0,01 | 120 | 15,5387 | 0,011 | 0,97104 |
| ХТЗ-ЦФЗ | 1:0,05 | 30 | 13,8281 | 0,016 | 0,97941 |
| ХТЗ-ЦФЗ | 1:0,1 | 30 | 8,8549 | 0,019 | 0,96559 |
| ХТЗ-АМС | 1:0,01 | 30 | 1,3314 | 0,142 | 0,97642 |
| ХТЗ-АМС | 1:0,01 | 60 | 1,0714 | 0,141 | 0,96978 |
| ХТЗ-АМС | 1:0,01 | 120 | 1,2817 | 0,105 | 0,98397 |
| ХТЗ-АМС | 1:0,05 | 30 | 1,7959 | 0,063 | 0,98273 |
| ХТЗ-АМС | 1:0,1 | 0 | 1,4127 | 0,091 | 0,96375 |
| ХТЗ-АМС | 1:0,1 | 30 | 1,8347 | 0,044 | 0,96479 |

5. Заключение

Как видно из результатов расчетов полученные численные данные хорошо согласуются с экспериментальными данными, при этом индекс корреляции расчетных и экспериментальных данных во всех экспериментах не ниже, чем 0.96. Дальнейшее сочетание

натурного и вычислительного эксперимента для новых наборов экспериментальных данных позволит уточнить математическую модель диффузии ЛВ из полимерных пленок и создать информационно-вычислительную аналитическую систему разработки эффективных лечебных полимерных плёнок. Проведенные вычислительные эксперименты показывают возможность применения разрывного метода Галёркина для решения обратных задач диффузии ЛВ из полимерных пленок.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Harrison K., *Introduction to polymeric drug delivery*, Woodhead Publishing Limited, Cambridge England, 2007, 33–56.
2. Bajpai A. K., Shukla S. K., Bhanu S., Kankane S., “Responsive polymers in controlled drug delivery”, *Progr. Polym. Sci.*, **33**:1 (2008), 1088–1118.
3. Jia Ala, *Processing of polymer-based systems for improved performance and controlled release*, PhD Thesis (London), 208 pp.
4. Vilar G., Tulla-Puche J., Albericio F., “Polymers and drug delivery systems”, *Current Drug Delivery*, **9**:4 (2012), 367–394.
5. Uhrich K. E., Cannizzaro S. M., Langer E. S., Shakesheff K. M., “Polymeric systems for controlled drug release”, *Chem. Rev.*, **10**:4 (1999), 3181–3198.
6. Shaik M. R., Korsapati M., Panati D., “Polymers in controlled drug delivery systems”, *Int. J. Pharm. Sci.*, **2**:4 (2012), 112–116.
7. Kumaresh S. Soppimath, Tejraj M. Aminabhavi, Anandrao E. Kulkarni, Walter E. Eudzinski, “Biodegradable polymeric nanoparticles as drug delivery devices”, *J. of Controlled Release*, **70**:1 (2001), 1–20.
8. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Особенности сорбции паров воды хитозановыми лекарственными пленками сетках”, *Журнал прикладной химии*, **86**:10 (2013), 1583–1590.
9. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Особенности транспортных свойств лекарственных хитозановых пленок”, *Высокомолекулярные соединения. Серия А*, **56**:3 (2014), 282–288.
10. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Транспортные свойства пленок хитозан – амикацин”, *Химическая физика*, **33**:8 (2014), 76–84.
11. Карамутлинова Г. Р., Губайдуллин И. М., Коледина К. Ф., Кулиш Е. И., Ильибаева А. К., “Математическое описание процесса диффузии в пленке хитозана”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:4 (2015), 87–95.
12. Скрябина К. Г., Вихоревой Г. А., Варламова В. П., *Хитин и хитозан: Получение, свойства и применение*, Наука, Москва, 2002, 368 с.
13. Губайдуллин И. М., Рябов В. В., Тихонова М. В., “Применение индексного метода глобальной оптимизации при решении обратных задач химической кинетики”, *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*, **12**:1 (2011), 137–145.

14. Емельянов В. В., Курейчик В. В., Курейчик В. М., *Теория и практика эволюционного моделирования*, Физматлит, Москва, 2003, 432 с.
15. Cockburn B., Shu C. W., “Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, *J. Sci. Comp.*, **3** (2001), 173–261.
16. Bernardo Cockburn, “An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations (Lecture Notes in Mathematics)”, **1697** (1998), 151–268.
17. Масыгин В. Ф., Бобренева Ю. О., Губайдуллин И. М., Жалнин Р. В., “Применение разрывного метода Галеркина для моделирования температурного поля в вертикальной скважине с трещиной гидроразрыва”, *Системы управления и информационные технологии*, **63**:1 (2016), 13–16.
18. Жалнин Р. В., Ладонкина М. Е., Масыгин В. Ф., Тишкин В. Ф., “Об одном способе решения уравнений диффузионного типа с помощью разрывного метода Галеркина на неструктурированной сетке”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:2 (2014), 7–13.
19. Жалнин Р. В., Масыгин В. Ф., Панюшкина Е. Н., “О применении разрывного метода Галеркина для численного решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных разнесенных сетках”, *Современные проблемы науки и образования*, 2013, № 6, URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=10929>.
20. Bassi F., Rebay S., “A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations”, *J. Comput. Phys.*, **131** (1997), 267–279.
21. Li B. Q., *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*, Springer, Berlin, 2006, 578 pp.
22. Arnold D. N., Brezzi F., Cockburn B., Marini L. D., “Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems”, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **29** (2002), 1749–1779.

Дата поступления 12.05.2016

Application of the DG method for solution of inverse problem of medicine diffusion out from the chitosan film

© I. M. Gubaydullin⁶, R. V. Zhalnin⁷, V. F. Masyagin⁸, V. F. Tishkin⁹,
A. S. Shurshina¹⁰

Abstract. In the work a numerical method based on the discontinuous Galerkin method is proposed to solve the inverse problem of finding the diffusion coefficient using a genetic algorithm. Series of numerical experiments with field data for various calcination temperature of the film with different chitosan drug composition were set.

Key Words: diffusion-type equations, discontinuous Galerkin method, inverse problem, genetic algorithm

⁶ Senior researcher of laboratory of mathematical chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis, RAS, Ufa; irekmars@mail.ru.

⁷ Head of Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; zhalnin@gmail.com.

⁸ Lecturer of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; vmasyagin@gmail.com.

⁹ Deputy Director for Science of the Institute of applied mathematics by name M. V. Keldysh of RAS, Moscow; v.f.tishkin@mail.ru.

¹⁰ Senior lecturer of the department of high-molecular compounds and general chemical technology, Bashkir State University, Ufa; anzhela_murzagil@mail.ru.

УДК 539.3:533.6:517.9

Исследование динамической устойчивости трубопровода

© П. А. Вельмисов¹ А. В. Корнеев² С. В. Киреев³

Аннотация. В работе предложены математические модели динамики упругого трубопровода – полого стержня, внутри которого протекает жидкость (газ), и на их основе рассмотрены задачи динамической устойчивости трубопровода. Модели как линейные, так и нелинейные, описываются дифференциальными уравнениями в частных производных для неизвестной функции – поперечного отклонения трубопровода от положения равновесия. На основе построенного функционала типа Лапунова получено аналитическое условие устойчивости для параметров механической системы для различных типов закрепления трубопровода. Полученное условие устойчивости является достаточным, но не необходимым, поэтому для решения проблемы разработан программный комплекс, позволяющий численно находить приближенное решение дифференциальных уравнений, описывающих колебания трубопровода, проводить численный эксперимент для построения областей, соответствующих как достаточным, так и необходимым условиям устойчивости. Проведена интерпретация полученных численных результатов и сравнение их с аналитическим условием устойчивости.

Ключевые слова: упругий трубопровод, динамика, устойчивость, уравнения с частными производными, численные методы, метод Галеркина

1. Введение

Составными элементами широкого класса конструкций, приборов, аппаратов, установок, устройств, систем и т. д. являются трубопроводы, по которым протекает жидкость или газ. При проектировании таких конструкций возникают вопросы надежности, которые заключаются в определении параметров механической системы, соответствующих нормальной работе конструкции и не приводящих к разрушению или возникновению аварийной ситуации.

При исследовании колебаний деформируемых тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, одним из важнейших является вопрос об устойчивости этих колебаний. Поток, воздействуя на тело, может не только возбуждать колебания, но и приводить к увеличению амплитуды, скорости или частоты колебаний до значений, нарушающих надежность эксплуатации, вплоть до разрушения конструкции или ее элементов.

Характерной особенностью задач аэрогидроупругости является невозможность определения силового воздействия потока на обтекаемое деформируемое тело заранее, до решения задачи об определении деформации тела. Математически это выражается в том, что совместное движение деформируемого тела и жидкости описывается связанной системой дифференциальных уравнений для функций, определяющих деформации тел и параметры течения жидкости. Однако в некоторых случаях удается разделить решение задачи определения силового воздействия потока на деформируемое тело и задачи исследования деформации тела с помощью интегрального оценивания воздействия жидкости

¹ Заведующий кафедрой высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

² Аспирант кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; a.korneev1@gmail.com.

³ Доцент кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ksv1511@yandex.ru.

(газа) на тело на основе законов теоретической механики. Модель трубопровода, предложенная в работе, использует именно этот подход для получения дифференциального уравнения, описывающего его динамику.

В статических задачах вопрос об исследовании устойчивости формулируется следующим образом: необходимо определить, при каких статических изменениях параметров системы, последняя может совершать скачкообразный переход из одного состояния равновесия в другое (явление дивергенции системы). В этом случае происходит переход параметров через некоторые критические значения, при этом меняется качественная картина решений дифференциальных уравнений, описывающих физический процесс (явление бифуркации решения).

Задача об исследовании динамической устойчивости (иначе – устойчивости по начальным данным или устойчивости по Ляпунову) может быть сформулирована так: при каких значениях параметров, характеризующих систему «жидкость–тело» (основными параметрами являются скорость потока, прочностные и инерционные характеристики тела, сжимающие усилия), малым отклонениям прогибов (деформаций) тел от положения равновесия в начальный момент времени $t = 0$ будут соответствовать малые прогибы и в любой момент времени $t > 0$. Такая постановка вопроса является актуальной для многих задач, где в первую очередь важен характер поведения решений уравнения при изменении аргумента, в частности, при его неограниченном возрастании.

Устойчивости упругих тел, взаимодействующих с потоком жидкости или газа, посвящено большое количество теоретических и экспериментальных исследований, проведенных в последние десятилетия. Исследования в этом направлении представлены в работах Белоцерковского С.М., Скрипача Б.К., Табачникова В.Г., Галиева Ш.У., Вестяка А.В., Тарлаковского Д.В., Болотина В.В., Вольмира А.С., Григолюка Э.И., Лампера Р.Е., Шандарова Л.Г., Новичкова Ю.Н., Бисплингхоффа Р.Л., Эшли Х., Халфмэна Р.Л., Фына Я.Ц., Доуелла Е.Х., Фершинга Г., Ильюшина А.А., Кийко И.А., Алгазина С.Д., Мовчана А.А., Майлса Дж., Пановко Я.Г., Губановой И.И., Ильгамова М.А., Горшкова А.Г., Кудрявцева Б.Ю., Пономарева А.Т., Шклярчука Ф.Н. и других авторов.

В работах Зефирова В.Н., Колесова В.В., Милославского А.И., Светлицкого В.А., Челомея С.В., Феодосьева В.И., Казакевича М.И., Мовчана А.А., Нгуена В.Л., Томпсона Дж. М.Т. и др. исследуется динамика трубопровода.

Задачи динамической устойчивости и статической неустойчивости упругих элементов конструкций, в том числе трубопроводов, рассматривались в работах [1–29].

2. Постановка задачи

В работе исследуется динамика и динамическая устойчивость трубопровода (полого стержня при протекании внутри него жидкости). На плоскости xOy недеформированному стержню соответствует на оси Ox отрезок $(0, l)$. Скорость жидкости равна U и имеет направление, совпадающее с направлением оси Ox .

Для описания динамики трубопровода предлагается уравнение, обобщающее уравнение [15] на случай нелинейного демпфирования в материале трубопровода и инерции вращения сечения,

$$\begin{aligned}
& EJ \left[w'' \left(1 - \frac{3}{2}(w')^2 \right) \right]'' + \alpha J \left[w'' \left(1 - \frac{3}{2}(w')^2 \right) \right]''' - 2Jw'w'' (Ew''' + \alpha\dot{w}''') + \\
& + (m_0 + m_*) \ddot{w} \left(1 + \frac{3}{2}(w')^2 \right) + (N + m_*U^2) w'' \left(1 - \frac{1}{2}(w')^2 \right) + 2Um_*\dot{w}' - \\
& - \rho_0 J \left[\ddot{w}'' \left(1 - \frac{1}{2}(w')^2 \right) - 4\dot{w}''w'\dot{w}' - 2w''(\dot{w}')^2 - 3w'w''\dot{w}' \right] + f(x, t, w, \dot{w}) = 0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где коэффициенты m_* , m_0 , J вычисляются по формулам:

$$m_0 = \rho_0 \pi (R_*^2 - R_0^2), \quad m_* = \rho_* \pi R_0^2, \quad J = \frac{\pi}{4} (R_*^4 - R_0^4). \tag{2.2}$$

Штрих и точка сверху обозначают частные производные по координате x и времени t соответственно. В уравнении (2.1) $w(x, t)$ – деформация (прогиб) в сечении x в момент времени t ; E – модуль упругости; U , m_* , ρ_* – скорость, масса жидкости (газа) на единицу длины и плотность жидкости (газа); l – длина трубы между опорами; R_* , R_0 – внешний и внутренний радиусы трубопровода; m_0 , ρ_0 – масса металла на единицу длины трубы и плотность металла; N – сжимающая ($N > 0$) или растягивающая ($N < 0$) сила; α – коэффициент внутреннего демпфирования; функция $f(x, t, w, \dot{w})$ определяет внешнее воздействие, например, управляющее воздействие, влияние упрочняющего слоя, и т.д. Все коэффициенты, входящие в уравнение – положительные постоянные (за исключением N).

Для определения неизвестной функции $w(x, t)$ уравнение (2.1) необходимо дополнить граничными и начальными условиями. Предполагаются граничные условия следующего типа:

$$\text{шарнирное закрепление концов: } w(0, t) = w''(0, t) = 0, \quad w(l, t) = w''(l, t) = 0; \tag{2.3}$$

$$\text{жесткое защемление концов: } w(0, t) = w'(0, t) = 0, \quad w(l, t) = w'(l, t) = 0; \tag{2.4}$$

$$\text{жесткое защемление одного конца и шарнирное закрепление другого:} \\ w(0, t) = w'(0, t) = 0, \quad w(l, t) = w''(l, t) = 0; \tag{2.5}$$

$$w(0, t) = w''(0, t) = 0, \quad w(l, t) = w'(l, t) = 0. \tag{2.6}$$

3. Исследование устойчивости

Исследование устойчивости проводилось двумя методами. Первый метод основан на составлении функционалов типа Ляпунова в уравнении (2.1) в некоторых частных случаях. Так, для линейной модели, полученной отбрасыванием из уравнения (2.1) кубических членов

$$\begin{aligned}
& EJw'''' + (m_0 + m_*) \ddot{w} + (N + m_*U^2) w'' + \\
& + 2m_*U\dot{w}' + \xi\dot{w} + \mu w + \alpha J\dot{w}'''' - \rho_0 J\ddot{w}'' = 0,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где ξ , μ – коэффициенты демпфирования и жесткости упрочняющего слоя, построен функционал

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} \int_0^l [EJw''^2 + (m_0 + m_*) \dot{w}^2 - (N + m_*U^2) w'^2 + \rho_0 J\dot{w}'^2 + \mu w^2] dx, \tag{3.2}$$

на основе которого получено аналитическое условие устойчивости

$$N \leq \lambda_1 EJ - m_* U^2, \quad (3.3)$$

где λ_1 – наименьшее собственное значение краевой задачи для уравнения $\psi'''' + \lambda\psi'' = 0$ с граничными условиями (2.3–2.6). Например, для шарнирного закрепления $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{l^2}$

На основе анализа функционала (3.2) доказана теорема:

Т е о р е м а 3.1. *Если $N \leq \lambda_1 EJ - m_* U^2$, то малым значениям начальных данных $w_0, \dot{w}_0, w_0', w_0'', \dot{w}_0'$ (деформации, скорости, угла поворота, кривизны, угловой скорости) будут соответствовать малые (в среднем, в интегральном смысле) значения деформации $w(x, t)$ в любой момент времени $t > 0$.*

Второй метод предполагает построение решения уравнений (2.1), (3.1) методом Галеркина, в этом случае $w(x, t)$ задается в виде

$$w_M(x, t) = \sum_{k=1}^M w_k(t) g_k(x), \quad (3.4)$$

где $\{g_k(x)\}_1^\infty$ – полная на $[0, l]$ система базисных функций, соответствующих условиям закрепления концов трубопровода.

Ниже приведены результаты исследования для уравнения (2.1) при шарнирном закреплении обоих концов.

Обозначим левую часть уравнения (2.1) через $L(w)$. В соответствии с шарнирным закреплением ($w = w'' = 0$), выберем $g_k(x) = \sin \lambda_k x$, где $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = \overline{1, \infty}$. На основе процедуры метода Галеркина получим систему из M обыкновенных дифференциальных уравнений для функций $w_k(t)$, $k = \overline{1, M}$.

$$\int_0^l L(w_M(x, t)) \sin \lambda_k x dx = 0, \quad k = \overline{1, M}. \quad (3.5)$$

Для определения неизвестной функции $w(x, t)$ зададим начальные условия

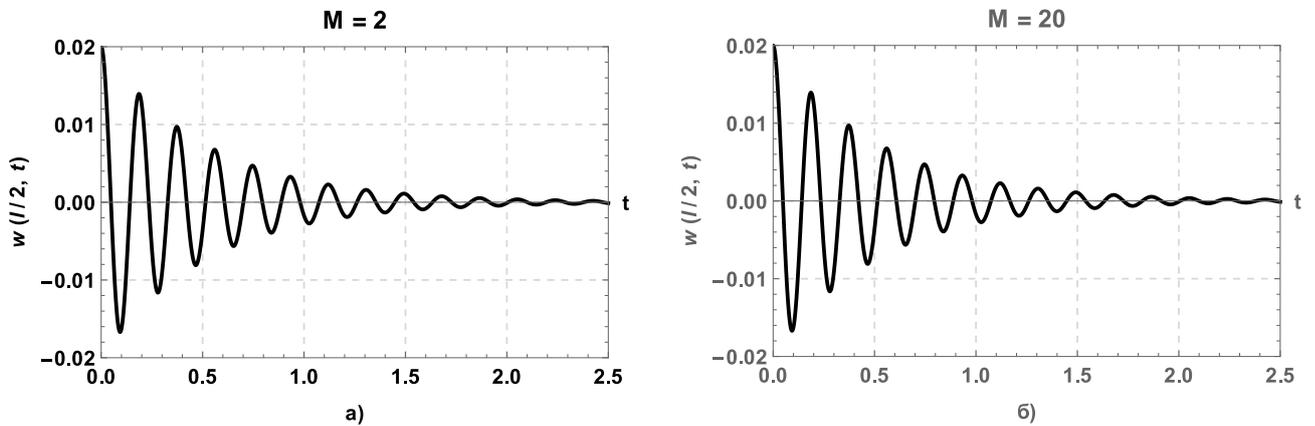
$$w(x, 0) = F(x), \quad \dot{w}(x, 0) = G(x). \quad (3.6)$$

Из условий (3.6), согласно методу Галеркина, определяются начальные условия для $w_k(t)$, $k = \overline{1, M}$

$$\begin{aligned} w_k(0) &= \frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \lambda_k x dx, \quad k = \overline{1, M}, \\ \dot{w}_k(0) &= \frac{2}{l} \int_0^l G(x) \sin \lambda_k x dx, \quad k = \overline{1, M}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

С помощью разработанного комплекса программ исследовалась динамическая устойчивость в зависимости от сжимающего воздействия N и скорости потока жидкости (газа) U . Параметры исследуемой механической системы были выбраны следующим образом: $E = 210 \cdot 10^9$ – модуль упругости стали, $\rho_* = 1000$ – плотность воды; $\rho_0 = 7000$ – плотность стали; $l = 1$, $R_* = 0,05$, $R_0 = 0,046$, $\alpha = 1$. Функции $F(x)$ и $G(x)$ в (3.6) задавались в виде: $F(x) = 0,02 \sin \frac{\pi x}{l}$, $G(x) = 0$. Функция f в (2.1) была представлена выражением: $f(x, t, w, \dot{w}) = \xi \dot{w} + \mu w$, где $\xi = 2$ – коэффициент демпфирования и $\mu = 40$ – коэффициент жесткости основания. Все величины приведены в системе СИ.

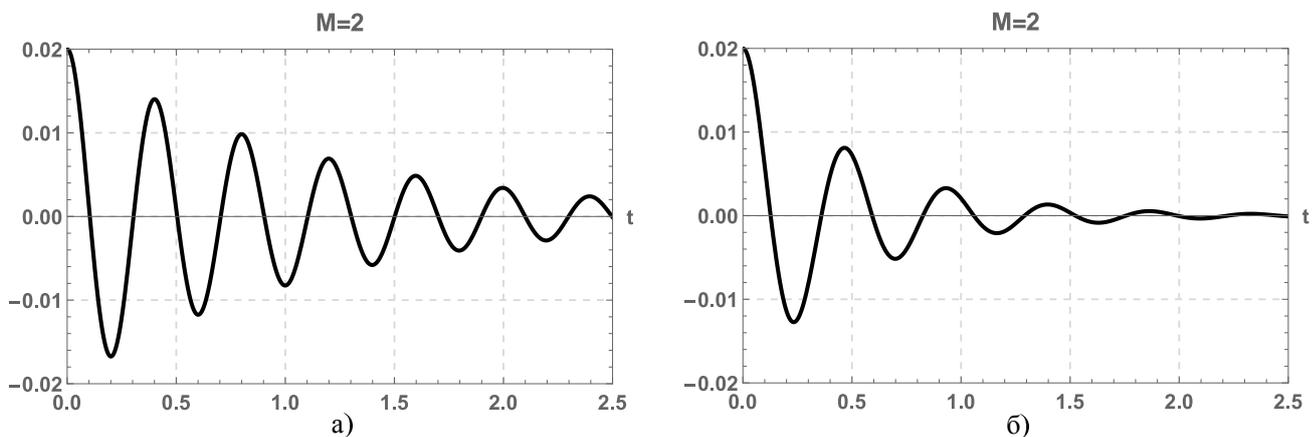
Полученная задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.5) с начальными условиями (3.7) решалась с помощью пакета математических программ Wolfram Mathematica 8. Проведенные расчеты показали, что различие результатов для двух и большего числа приближений (например, $M = 20$) в методе Галеркина незначительно, примеры соответствующих графиков приведены на рис. 3.1. Поэтому при расчетах можно ограничиться двумя приближениями.



Р и с у н о к 3.1

Пример вычисления колебаний точки $x_0 = l/2$ при $N = 1250$ и $U = 10$ с разным количеством приближений M в методе Галеркина

Проведено сравнение характера колебаний точки $x_0 = l/2$, при выборе линейной модели (3.1) и нелинейной модели (2.1), результаты отображены на рис. 3.2. Из рисунка 3.2 видно, что в нелинейной модели наблюдается меньшая частота и более быстрое затухание амплитуды колебаний.

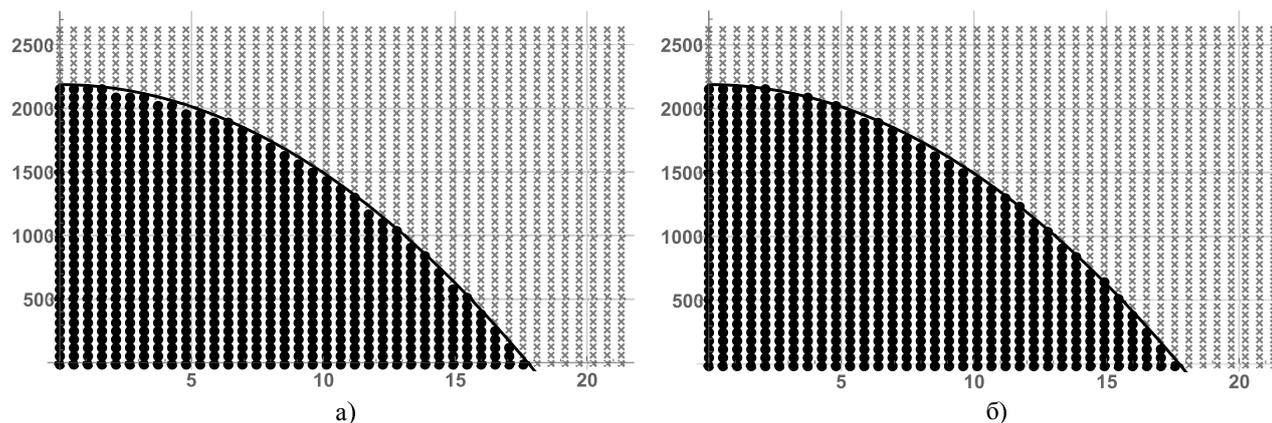


Р и с у н о к 3.2

Пример вычисления колебаний точки $x_0 = l/2$ при $N = 750$ и $U = 12.5$: а) для линейной модели (3.1); б) для нелинейной модели (2.1)

При помощи разработанного комплекса программ на плоскости (U, N) построены области устойчивости и неустойчивости колебаний. Критерий неустойчивости механической системы при заданных параметрах – неограниченное возрастание амплитуды колебаний с течением времени. Результат исследования изображен на рис. 3.3: серыми символами 'x' показаны точки, в которых наблюдается возрастание амплитуды колебаний (неустойчивость); черные круги на рисунке соответствуют точкам, в которых амплитуда колебаний

с течением времени стремится к нулю (устойчивость); на рисунке также изображена теоретическая граница области устойчивости, соответствующая параболе (3.3).



Р и с у н о к 3.3

Область устойчивости на плоскости (U, N) : а) для линейной модели (3.1); б) для нелинейной модели (2.1)

Согласно рис. 3.3, наблюдается хорошее соответствие теоретических результатов и численного эксперимента. Полученная в результате численного эксперимента область устойчивости незначительно шире, чем рассчитанная по формуле (3.3). Также из рисунка 3.3 видно, что отличие области устойчивости для нелинейной модели (2.1) от аналогичной области устойчивости для линейной модели (3.1) несущественно.

Таким образом, в ходе исследования разработан комплекс программных средств для численного моделирования динамики трубопровода с учетом взаимодействия с потоком жидкости (газа), упругим основанием (упрочняющим слоем) и влияния продольного сжимающего (растягивающего) усилия. Для линейной модели (3.1) построен функционал и на его основе получены в аналитической форме достаточные условия динамической устойчивости, налагающие ограничения на значение сжимающего усилия N , скорости потока жидкости (газа) U и другие параметры модели. Разработанный программный комплекс позволяет определять тип колебаний (устойчивый, неустойчивый) в зависимости от параметров задачи, строить области устойчивости и неустойчивости колебаний.

Работа выполнена в рамках государственного задания №2014/232 Минобрнауки России и при поддержке гранта РФФИ № 15-01-08599.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Paidoussis M. P., “Задача о колебаниях трубопровода с протекающей жидкостью и ее связи с другими задачами прикладной механики”, *J. Sound and Vibr.*, **3(310)** (2008), 462-492.
2. Paidoussis M. P., Issid N. T., “Dymanic stability of piped conveying fluid”, *J. Sound and Vibr.*, **33** (1974), 267-268.
3. Vel'misov P. A., Garnefska L. V., Milusheva S. D., “Investigation of the asymptotic stability of a pipeline in the presence of delay in time”, *Rev. Mat. Estat., Sao Paulo, Brasil*, **19** (2001), 159-178.

4. Vel'misov P. A., Garnefska L. V., Milusheva S. D., "Investigation of the stability of the solution of the equation of oscillations of an axis or a plate with a delay in time of the reaction and friction forces", *Applications of Mathematics in Engineering*, Heron Press, Sofia, Bulgaria, 1999, 83–88.
5. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Корнеев А. В., "Исследование динамической устойчивости трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий", *Вестник Ульяновского государственного технического университета*, 4 (2014), 29–36.
6. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., *Математическое моделирование в задачах динамической устойчивости деформируемых элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2013, 322 с.
7. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., "О динамической устойчивости трубопровода", *Математические методы и модели в науке, технике, естествознании и экономике*, Труды международной «Конференции по логике, информатике, науковедению – КЛИН-2007» (г. Ульяновск, 17-18 мая 2007 г.), 4, УлГТУ, Ульяновск, 2007, 10-14.
8. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Семенова Е. П., "О решениях интегродифференциальных уравнений в задаче динамики одной аэроупругой системы типа «тандем»", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, 2(33) (2011), 266-271.
9. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., "Об устойчивости решений уравнений взаимодействия упругих стенок каналов с протекающей жидкостью", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, 1(32) (2011), 179-185.
10. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., "Устойчивость решений некоторых классов интегродифференциальных уравнений в частных производных", *Вестник Самарского государственного университета*, 8 (2008), 331.
11. Анкилов А. В., Вельмисов П. А., Казакова Ю. А., "Устойчивость решений одной нелинейной начально-краевой задачи аэроупругости", *Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки*, 2(31) (2013), 120-126.
12. Барметов Ю. П., Дободейч И. А., "К расчету нестационарных течений сжимаемой жидкости в трубопроводе", *Известия вузов. Авиационная техника*, 1 (2006), 18-21.
13. Болотин В. В., *Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости*, Физматгиз, М., 1961, 339 с.
14. Вельмисов П. А., Логинов Б. В., Милушева С. Д., "О динамической устойчивости трубопровода", *Приложение на математиката в техниката*, Сб. доклады и научни съобщения. XXI национална школа, Болгария, Варна, 1995, 299–304.
15. Вельмисов П. А., Корнеев А. В., "О динамической устойчивости трубопровода", *Бесконечномерный анализ, стохастика, математическое моделирование: новые задачи и методы. Проблемы математического и естественнонаучного образования*, ред. А. И. Кириллов, С. А. Розанова, Сборник статей Международной конференции, Российский университет дружбы народов, М., 2015, 205–210.

16. Вельмисов П. А., Покладова Ю. В., “Исследование динамики трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий”, *Вестник Ульяновского государственного технического университета*, **4** (2004), 26–29.
17. Вельмисов П. А., Васильева А. А., Семенова Е. П., “Математическое моделирование динамики упругих элементов при аэрогидродинамическом воздействии”, *Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов* (2–5 февраля 2009 г., г. Ульяновск), Труды 7 Международной конференции, УлГТУ, Ульяновск, 2009, 68-70.
18. Вельмисов П.А., Горшков Г.М., Рябов Г.К., *Пат.2062662 Российская Федерация, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель*, заявитель и патентообладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – № 5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл. № 18.
19. Вельмисов П. А., Киреев С. В., *Математическое моделирование в задачах статической неустойчивости упругих элементов конструкций при аэрогидродинамическом воздействии*, УлГТУ, Ульяновск, 2011, 200 с.
20. Вельмисов П. А., Ходзицкая Ю. В., “О динамике трубопровода с учетом запаздывания внешних воздействий”, *Математические методы и модели в прикладных задачах науки и техники* (Труды международной конференции КЛИН–2003), **5**, УлГТУ, Ульяновск, 2003, 35-39.
21. Казакевич М. И., *Аэродинамическая устойчивость надземных и висячих трубопроводов*, Недра, М., 1977, 200 с.
22. Мовчан А. А., “Об одной задаче устойчивости трубы при протекании через нее жидкости”, *Прикладная математика и механика*, **4** (1965), 760-762.
23. Могилевич Л. И., Попова А. А., “Динамика взаимодействия упругой цилиндрической оболочки с ламинарным потоком жидкости внутри нее применительно к трубопроводному транспорту”, *Наука и техн. транс.*, **2** (2007), 69-72.
24. Сафина Г. Ф., “О Исследование зависимостей частот колебаний участка трубопровода от характеристик жидкости”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16:4** (2014), 59-67.
25. Светлицкий В. А., *Механика трубопроводов и шлангов: Задачи взаимодействия стержней с потоком жидкости или воздуха*, Машиностроение, М., 1982, 280 с.
26. Соколова В. Г., Березнев А. В., “Уравнение движения криволинейного участка трубопровода с потоком жидкости”, *Изв. вузов. Нефть и газ*, **6** (2004), 76-80.
27. Томпсон Дж. М. Т., *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике : пер. с англ.*, Мир, М., 1985, 254 с.
28. Феодосьев В. И., “О колебаниях и устойчивости трубы при протекании через нее жидкости”, *Инж. сб.*, **10**, АН СССР, М., 1951, 169–170.
29. Челомей С. В., “О динамической устойчивости упругих систем”, *Докл. АН СССР*, **252**, 1980, 307-310.

Investigation of dynamic stability of pipeline

© P. A. Velmisov⁴ A. V. Korneev⁵ S. V. Kireev⁶

Abstract. The paper presents a mathematical model of an elastic pipeline, which is a hollow rod with the fluid (gas) running inside it. The article is devoted to the problem of the dynamic stability of the pipeline. Linear and non-linear models described by partial differential equations for the unknown function, i.e. the displacement of the pipeline points from the equilibrium state. By means of designed functional Lyapunov type, stability theorems were formulated and analytical stability conditions for the parameters of the mechanical system and different types of an initial conditions were founded. The obtained stability conditions are sufficient but not necessary. A mathematical software package was developed to solve this problem. This package allows to find an approximate numerical solution of differential equation for describing pipeline model and plot a stability region appropriate to both sufficient and necessary stability conditions. Full coverage to the design a numerical search algorithm for these regions was given. The obtained numerical results were compared with analytical stability conditions. The influence of the model parameters variation on the stability was studied.

Key Words: elastic pipeline, dynamics, stability, partial differential equations, numerical methods, galerkin method

⁴ Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

⁵ Graduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; a.korneev1@gmail.com.

⁶ Associate Professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ksv1511@yandex.ru.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

УДК 517.9

Условия разрешимости системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси.© С. Н. Алексеенко¹, М. В. Донцова²

Аннотация. Нелокальная разрешимость задачи Коши в физических переменных доказана для системы уравнений, описывающих длинные волны в водном прямоугольном канале, глубина которого меняется вдоль оси. Чаще всего эту систему квазилинейных уравнений называют системой уравнений мелкой воды. Исходная система преобразуется к системе симметричных квазилинейных уравнений с помощью инвариантов Римана. Хотя ударные волны вполне возможны при построении решений квазилинейных гиперболических систем для широкого класса начальных данных, мы нашли достаточные условия на исходные данные, которые гарантируют существование глобального классического решения, продолженного конечным числом шагов из локального решения. Существование локального решения, гладкость которого не ниже, чем гладкости начальных условий, тоже доказана. Исследование рассматриваемой проблемы выполнено на основе метода дополнительного аргумента. Доказательство нелокальной разрешимости опирается на оригинальные глобальные оценки.

Ключевые слова: система длинных волн, метод дополнительного аргумента, глобальные оценки

1. Введение

Рассмотрим водный узкий (ширина канала меньше длины волны) канал прямоугольной формы, глубина которого меняется вдоль оси x , а ширина равна единице.

Динамика длинных (длина волны больше глубины) волн в таких каналах описывается следующей нелинейной системой дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [1]:

$$\begin{cases} \partial_t \eta + \partial_x [u(h(x) + \eta)] = 0, \\ \partial_t u + u \partial_x u + g \partial_x \eta = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $u(t, x)$ - усредненная по поперечному сечению скорость течения, $\eta(t, x)$ - колебания водной поверхности вдоль оси x , g - ускорение свободного падения, $h(x) + \eta$ и $h(x)$ - полная и невозмущенная глубина канала вдоль главной оси x .

Для системы уравнений (1.1) определим начальные условия:

$$u(0, x) = u_0(x), \quad \eta(0, x) = \eta_0(x). \quad (1.2)$$

Задача (1.1), (1.2) рассматривается в области

$$\Omega_T = \{(t, x) \mid 0 \leq t \leq T, x \in [0, +\infty), T > 0\}.$$

¹ Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

² Аспирантка кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный педагогический университет им. К. Минина, г. Нижний Новгород; dontsowa.marina2011@yandex.ru

Для исследования систем такого вида применялись самые разнообразные подходы. Описание многих современных подходов содержится в [2]. В [2] содержится анализ разрешимости систем типа (1.1) как на основе классического метода характеристик, так и с использованием понятия обобщенного решения. Оба эти подхода, как и многие другие, имеют свои достоинства и недостатки. Так, в частности, в методе характеристик условием разрешимости в исходных координатах является существование обратной функции для решения характеристического уравнения. Нахождение обратной функции в общем случае представляет собой непростую задачу, особенно, когда характеристическое уравнение решается приближенно.

Задача определения условий разрешимости в исходных координатах систем и уравнений дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, как и задача построения численного решения дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, эффективно решается в рамках метода дополнительного аргумента [3],[4], [5], [6], [7]. В работе [3] с помощью метода дополнительного аргумента были определены условия локальной разрешимости задачи Коши для системы двух квазилинейных уравнений и указаны границы интервала разрешимости. Но то решение, существование которого доказано в [3], имеет меньшую гладкость, чем начальные функции. В настоящей работе представлены результаты исследования по определению условий нелокальной разрешимости задачи Коши для системы (1.1) с помощью метода дополнительного аргумента.

Для того, чтобы можно было применить метод дополнительного аргумента, рассматриваемую задачу нужно привести к преобразованной системе в инвариантах Римана. Это осуществляется с помощью специального алгоритма и введением новых неизвестных функций, которые называют инвариантами Римана [2], [4]. В данном случае они примут вид:

$$z_1 = u + 2\sqrt{g(h(x) + \eta)}, \quad z_2 = -u + 2\sqrt{g(h(x) + \eta)}. \quad (1.3)$$

В результате получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \partial_t z_1 + \frac{1}{4}(3z_1 - z_2)\partial_x z_1 = gh'(x), \\ \partial_t z_2 + \frac{1}{4}(z_1 - 3z_2)\partial_x z_2 = -gh'(x). \end{cases} \quad (1.4)$$

с начальными условиями

$$\varphi_1(x) = z_1(0, x) = u_0(x) + 2\sqrt{g(h(x) + \eta_0(x))}, \quad \varphi_2(x) = z_2(0, x) = -u_0(x) + 2\sqrt{g(h(x) + \eta_0(x))}. \quad (1.5)$$

Стандартно проверяется, что если z_1, z_2 являются решением задачи (1.4), (1.5), то $u(t, x) = \frac{z_1(t, x) - z_2(t, x)}{2}$, $\eta(t, x) = \frac{(z_1(t, x) + z_2(t, x))^2}{16g} - h(x)$, являются решением задачи (1.1), (1.2).

2. Существование локального решения

В соответствии с методом дополнительного аргумента запишем для задачи (1.4), (1.5) расширенную характеристическую систему [3],[4], [5], [6], [7]:

$$\frac{d\eta_1(s, t, x)}{ds} = \frac{1}{4}(3w_1(s, t, x) - w_3(s, t, x)), \quad (2.1)$$

$$\frac{d\eta_2(s, t, x)}{ds} = \frac{1}{4}(w_4(s, t, x) - 3w_2(s, t, x)), \quad (2.2)$$

$$\frac{dw_1(s, t, x)}{ds} = gh'(\eta_1(s, t, x)), \quad (2.3)$$

$$\frac{dw_1(s, t, x)}{ds} = -gh'(\eta_2(s, t, x)), \quad (2.4)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, \eta_1), \quad w_4(s, t, x) = w_1(s, s, \eta_2), \quad (2.5)$$

$$w_1(0, t, x) = \omega_1(\eta_1(0, t, x)), \quad w_2(0, t, x) = \omega_2(\eta_2(0, t, x)). \quad (2.6)$$

Неизвестные функции η_i , w_j , $i = 1, 2$, $j = \overline{1, 4}$ зависят не только t и x , но еще и от дополнительного аргумента s . Интегрируя уравнения (2.1) - (2.4) по аргументу s и учитывая условия (2.5), (2.6) получим эквивалентную систему интегральных уравнений:

$$\eta_1(s, t, x) = x - \frac{1}{4} \int_s^t (3w_1 - w_3) d\nu, \quad (2.7)$$

$$\eta_2(s, t, x) = x - \frac{1}{4} \int_s^t (w_4 - 3w_2) d\nu, \quad (2.8)$$

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(\eta_1(0, t, x)) + \int_0^s gh'(\eta_1) d\nu, \quad (2.9)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(\eta_2(0, t, x)) - \int_0^s gh'(\eta_2) d\nu, \quad (2.10)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, \eta_1), \quad w_4(s, t, x) = w_1(s, s, \eta_2). \quad (2.11)$$

Система (2.7) - (2.11) эквивалентна следующей системе:

$$w_1(s, t, x) = \varphi_1(x - \frac{1}{4} \int_0^t (3w_1 - w_3) d\nu) + g \int_0^s h'(x - \frac{1}{4} \int_\nu^t (3w_1 - w_3) d\tau) d\nu, \quad (2.12)$$

$$w_2(s, t, x) = \varphi_2(x - \frac{1}{4} \int_0^t (w_4 - 3w_2) d\nu) - g \int_0^s h'(x - \frac{1}{4} \int_\nu^t (w_4 - 3w_2) d\tau) d\nu, \quad (2.13)$$

$$w_3(s, t, x) = w_2(s, s, x - \frac{1}{4} \int_s^t (3w_1 - w_3) d\nu), \quad (2.14)$$

$$w_4(s, t, x) = w_1(s, s, x - \frac{1}{4} \int_s^t (w_4 - 3w_2) d\nu). \quad (2.15)$$

При выполнении условий $h(x) \geq 0$, $\eta_0(x) \geq c > 0$, $u_0(x) \leq -2\sqrt{g(h(x) + \eta_0(x))}$, $x \in [0, \infty)$ получаем, что

$$\varphi_1(x) = u_0 + 2\sqrt{g(h(x) + \eta_0)} \leq 0, \quad \varphi_2(x) = -u_0 + 2\sqrt{g(h(x) + \eta_0)} \geq 0, \quad x \in [0, \infty).$$

Из (2.9), (2.10) при выполнении условий $h'(x) \leq 0$, $\varphi_1(x) \leq 0$, $\varphi_2(x) \geq 0$, $x \in [0, \infty)$ получаем, что $w_1(s; t, x) \leq 0$, $w_2(s; t, x) \geq 0$ на Γ_T .

Из (2.11) следует, что $w_4(s; t, x) \leq 0$, $w_3(s; t, x) \geq 0$ на Γ_T . Следовательно,

$$\eta_1(s; t, x) = x - \frac{1}{4} \int_s^t [3w_1(\nu; t, x) - w_3(\nu; t, x)] d\nu \in [0, \infty), \quad (s, t, x) \in \Gamma_T,$$

$$\eta_2(s; t, x) = x - \frac{1}{4} \int_s^t [w_4(\nu; t, x) - 3w_2(\nu; t, x)] d\nu \in [0, \infty), \quad (s, t, x) \in \Gamma_T.$$

Обозначим $\Gamma_T = \{(s, t, x) | 0 \leq s \leq t \leq T, x \in [0, +\infty), T > 0\}$,

$$C_\varphi = \max\left\{ \sup_{[0, +\infty)} |\varphi_i|, \sup_{[0, +\infty)} |\varphi'_i|, \sup_{[0, +\infty)} |\varphi''_i|, i = 1, 2 \right\},$$

$$C_h = \max\left\{ \sup_{[0, +\infty)} |h|, \sup_{[0, +\infty)} |h'|, \sup_{[0, +\infty)} |h''|, \sup_{[0, +\infty)} |h''| \right\},$$

$\bar{C}^{1,2,2}(\Omega_T)$ - пространство функций дифференцируемых по переменной t , дважды дифференцируемых по переменной x , имеющих смешанные производные второго порядка и ограниченные вместе со своими производными на Ω_T , $\bar{C}^{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}(\Omega_*)$ - пространство функций, определенных, непрерывных и ограниченных вместе со своими производными до порядка α_m по m -му аргументу, $m = \overline{1, n}$, на неограниченном подмножестве $\Omega_* \subset R^n, n = 1, 2, \dots$.

Для произвольной функции U введем норму $\|U\| = \sup_{\Gamma_T} |U(s, t, x)|$ без указания в символе $\| \cdot \|$ области, по которой норма вычисляется, так как каждый раз это будет понятно из контекста.

Справедлива следующая теорема, в которой сформулированы условия существования локального решения задачи Коши (1.1), (1.2), которое имеет такую же гладкость по x , как и начальные функции.

Т е о р е м а 2.1. Пусть $u_0, \eta_0 \in C^2([0, \infty))$, $h \in C^3([0, \infty))$ и выполняются условия

$$h(x) \geq 0, h'(x) \leq 0, h''(x) \geq 0, \eta_0(x) \geq c > 0, \quad x \in [0, \infty),$$

$$u_0(x) \leq -2\sqrt{g(h(x) + \eta_0(x))} u'_0(x) \geq \frac{|h'(x) + \eta'_0(x)|}{\sqrt{h(x) + \eta_0(x)}}, \quad x \in [0, \infty).$$

Тогда для любого $T \leq \min(\frac{C_\varphi}{4gC_h}, \frac{1}{10C_\varphi})$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение $u, \eta \in C^{1,2,2}(\Omega_T)$, где $u(t, x) = \frac{w_1(t, t, x) - w_2(t, t, x)}{2}$, $\eta(t, x) = \frac{(w_1(t, t, x) + w_2(t, t, x))^2}{16g} - h(x)$ и функции w_1, w_2 удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.12) - (2.15).

Доказательство теоремы разбито на три леммы.

Л е м м а 2.1. Пусть функции $w_j, j = \overline{1, 4}$, удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.12) - (2.15) и являются непрерывно дифференцируемыми и ограниченными вместе со своими первыми производными. Тогда функции

$$u(t, x) = \frac{w_1(t, t, x) - w_2(t, t, x)}{2}, \quad \eta(t, x) = \frac{(w_1(t, t, x) + w_2(t, t, x))^2}{16g} - h(x)$$

будут решением задачи Коши (1.1), (1.2) на Ω_{T_0} , $T_0 \leq T$, где T_0 - константа, определяемая через исходные данные.

Вышеприведенная лемма составляет по существу основу метода дополнительного аргумента. Во всех работах с использованием метода дополнительного аргумента (как упомянутых в списке литературы, так и других) подобное утверждение или доказывалось для изучаемых систем или анонсировалось.

Л е м м а 2.2. При выполнении условий $u_0, \eta_0 \in C^2([0, \infty))$, $h \in C^3([0, \infty))$,

$$h(x) \geq 0, h'(x) \leq 0, \eta_0(x) \geq c > 0, u_0(x) \leq -2\sqrt{g(h(x) + \eta_0(x))}, \quad x \in [0, \infty),$$

и

$$T \leq \min\left(\frac{C_\varphi}{4gC_h}, \frac{1}{10C_\varphi}\right) \quad (2.16)$$

система интегральных уравнений (2.12) - (2.15) имеет единственное решение

$$w_j \in C^{1,1,1}(\Gamma_T).$$

Доказательство. Доказательство этой леммы проводится по схеме, изложенной в [3]. Поэтому приведем только его ключевые пункты, без которых остальной текст был бы непонятен. Основная трудность состоит в том, что в системе (2.12) - (2.15) присутствует суперпозиция неизвестных функций. Для преодоления этой трудности используется «двухуровневый» алгоритм последовательных приближений.

Нулевое приближение к решению системы интегральных уравнений (2.12) - (2.15) зададим равенствами: $w_{10}(s, t, x) = \varphi_1(x)$, $w_{20}(s, t, x) = \varphi_2(x)$.

Первое и последующие приближения системы уравнений (2.12) - (2.15) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений ($n = 1, 2, \dots$):

$$w_{1n} = \varphi_1(x - \frac{1}{4} \int_0^t (3w_{1n} - w_{3n})d\nu) + \int_0^s gh'(x - \frac{1}{4} \int_\nu^t (3w_{1n} - w_{3n})d\tau)d\nu, \quad (2.17)$$

$$w_{2n} = \varphi_2(x - \frac{1}{4} \int_0^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\nu) - \int_0^s gh'(x - \frac{1}{4} \int_\nu^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\tau)d\nu, \quad (2.18)$$

$$w_{3n} = w_{2(n-1)}(s, s, x - \frac{1}{4} \int_s^t (3w_{1n} - w_{3n})d\nu), \quad (2.19)$$

$$w_{4n} = w_{1(n-1)}(s, s, x - \frac{1}{4} \int_s^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\nu). \quad (2.20)$$

При выполнении условий

$$h(x) \geq 0, \eta_0(x) \geq c > 0, u_0(x) \leq -2\sqrt{g(h(x) + \eta_0(x))}, h'(x) \leq 0, \quad x \in [0, \infty)$$

получаем, что $w_{1n}(s; t, x) \leq 0$, $w_{2n}(s; t, x) \geq 0$, $w_{4n}(s; t, x) \leq 0$, $w_{3n}(s; t, x) \geq 0$ на Γ_T . Следовательно,

$$\eta_{1n}(s; t, x) = x - \frac{1}{4} \int_s^t [3w_{1n}(\nu; t, x) - w_{3n}(\nu; t, x)] d\nu \in [0, \infty), \quad (s, t, x) \in \Gamma_T,$$

$$\eta_{2n}(s; t, x) = x - \frac{1}{4} \int_s^t [w_{4n}(\nu; t, x) - 3w_{2n}(\nu, t, x)] d\nu \in [0, \infty), \quad (s, t, x) \in \Gamma_T.$$

Теперь при каждом n систему (2.17) - (2.20) решаем (доказываем существование решения) с помощью своего процесса последовательных приближений. Нулевое приближение (при каждом n) определим равенствами: $w_{jn}^0 = w_{j(n-1)}$, $j = \overline{1, 4}$. Для системы уравнений (2.17) - (2.20) первое и все последующие приближения определим на основе соотношений:

$$w_{1n}^{k+1} = \varphi_1(x - \frac{1}{4} \int_0^t (3w_{1n}^k - w_{3n}^k)d\nu) + \int_0^s gh'(x - \frac{1}{4} \int_\nu^t (3w_{1n}^k - w_{3n}^k)d\tau)d\nu, \quad (2.21)$$

$$w_{2n}^{k+1} = \varphi_2(x - \frac{1}{4} \int_0^t (w_{4n}^k - 3w_{2n}^k)d\nu) - \int_0^s gh'(x - \frac{1}{4} \int_\nu^t (w_{4n}^k - 3w_{2n}^k)d\tau)d\nu, \quad (2.22)$$

$$w_{3n}^{k+1} = w_{2(n-1)}(s, s, x - \frac{1}{4} \int_s^t (3w_{1n}^k - w_{3n}^k)d\nu), \quad (2.23)$$

$$w_{4n}^{k+1} = w_{1(n-1)}(s, s, x - \frac{1}{4} \int_s^t (w_{4n}^k - 3w_{2n}^k) d\nu). \quad (2.24)$$

Так же, как в [3] устанавливается, что при выполнении условия

$$T \leq \min(\frac{C_\varphi}{2gC_h}, \frac{1}{9C_\varphi}) \quad (2.25)$$

последовательные приближения (2.21) - (2.24) сходятся к непрерывному и ограниченному решению системы (2.17) - (2.20), для которого справедливы оценки: $\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi$, $j = \overline{1, 4}$.

С помощью дифференцирования последовательных приближений (2.21) - (2.24) выводится, что при выполнении условия (2.25) справедливы оценки:

$$\|w_{1nx}^{k+1}\| \leq 4C_\varphi, \|w_{2nx}^{k+1}\| \leq 4C_\varphi, \|w_{3nx}^{k+1}\| \leq 8C_\varphi, \|w_{4nx}^{k+1}\| \leq 8C_\varphi.$$

Затем доказывается, что при выполнении условия (2.25) последовательные приближения w_{jnx}^k , $j = \overline{1, 4}$ сходятся при $k \rightarrow \infty$, а значит, существуют производные w_{jnx} , $j = \overline{1, 4}$ и справедливы оценки:

$$\|\partial_x w_{1n}\| \leq 4C_\varphi, \|\partial_x w_{2n}\| \leq 4C_\varphi, \|\partial_x w_{3n}\| \leq 8C_\varphi, \|\partial_x w_{4n}\| \leq 8C_\varphi.$$

Затем, как и в [3], сначала доказывается, что при выполнении условия (2.25) последовательные приближения, определяемые из системы (2.17) - (2.20), сходятся к непрерывному решению системы (2.12) - (2.15), для которого справедливы оценки: $\|w_j\| \leq 2C_\varphi$, $j = \overline{1, 4}$.

После доказывается, что при выполнении условия (2.16) $w_{jnx} \rightarrow w_{jx} = \partial_x w_j$, $j = \overline{1, 4}$, где функции $\partial_x w_j$ являются непрерывными по всем своим аргументам на Γ_T . Справедливы оценки: $\|\partial_x w_i\| \leq 4C_\varphi$, $i = 1, 2$, $\|\partial_x w_3\| \leq 8C_\varphi$, $\|\partial_x w_4\| \leq 8C_\varphi$. Аналогично доказывается, что w_j , $j = \overline{1, 4}$ имеют непрерывные и ограниченные производные по переменной t в области Γ_T . Единственность решения доказывается так же, как и в статье [3].

В нижеследующей лемме утверждается, что при выполнении следующих условий

$$\begin{aligned} h(x) \geq 0, h'(x) \leq 0, u_0(x) \leq -2\sqrt{g(h(x) + \eta_0(x))}, \eta_0(x) \geq c > 0, \\ h''(x) \geq 0, u'_0(x) \geq \frac{|h'(x) + \eta'_0(x)|}{\sqrt{h(x) + \eta_0(x)}}, \quad x \in [0, \infty), \end{aligned} \quad (2.26)$$

решение имеет такую же гладкость по x , как и начальные функции. Этот результат имеет определяющее значение для возможности продолжения решения.

Л е м м а 2.3. Пусть $u_0, \eta_0 \in C^2([0, \infty))$, $h \in C^3([0, \infty))$, тогда при выполнении условий (2.16), (2.26) функции w_j , $j = \overline{1, 4}$, представляющие собой решение системы уравнений (2.12) - (2.15), имеют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x t}$, $j = \overline{1, 4}$ на Γ_T , где $T \leq \min(\frac{C_\varphi}{4gC_h}, \frac{1}{10C_\varphi})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

При выполнении условий (2.16), (2.26) установлено, что справедливы неравенства:

$$|\eta_{1n}(s, t, x_1) - \eta_{1n}(s, t, x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \quad |\eta_{2n}(s, t, x_1) - \eta_{2n}(s, t, x_2)| \leq |x_1 - x_2|, \quad \text{где}$$

$$\eta_{1n}(s, t, x) = x - \frac{1}{4} \int_s^t (3w_{1n} - w_{3n}) d\nu, \quad \eta_{2n}(s, t, x) = x - \frac{1}{4} \int_s^t (w_{4n} - 3w_{2n}) d\nu.$$

Дважды продифференцируем последовательные приближения (2.17) - (2.20) по x . Обозначив $\omega_j^n = w_{jnx}$, $j = \overline{1, 4}$, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \omega_1^n(s, t, x) = & -\frac{1}{4} \varphi_1'(x - \frac{1}{4} \int_0^t (3w_{1n} - w_{3n}) d\nu) \int_0^t (3\omega_1^n - \omega_3^n) d\nu + \\ & + \varphi_1''(x - \frac{1}{4} \int_0^t (3w_{1n} - w_{3n}) d\nu) (1 - \frac{1}{4} \int_0^t (3w_{1nx} - w_{3nx}) d\nu)^2 - \\ & - \frac{1}{4} \int_0^s g h'' \int_\nu^t (3\omega_1^n - \omega_3^n) d\tau d\nu + g \int_0^s h''' (1 - \frac{1}{4} \int_\nu^t (3w_{1nx} - w_{3nx}) d\tau)^2 d\nu, \end{aligned} \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \omega_2^n(s, t, x) = & -\frac{1}{4}\varphi_2'(x - \frac{1}{4}\int_0^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\nu) \int_0^t (\omega_4^n - 3\omega_2^n)d\nu + \\ & + \varphi_2''(x - \frac{1}{4}\int_0^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\nu) (1 - \frac{1}{4}\int_0^t (w_{4nx} - 3w_{2nx})d\nu)^2 + \\ & + \frac{1}{4}\int_0^s gh'' \int_\nu^t (\omega_4^n - 3\omega_2^n)d\tau d\nu - g \int_0^s h''' (1 - \frac{1}{4}\int_\nu^t (w_{4x} - 3w_{2x})d\tau)^2 d\nu, \end{aligned} \quad (2.28)$$

$$\omega_3^n(s, t, x) = \omega_2^{n-1} \cdot (1 - \frac{1}{4}\int_s^t (3w_{1nx} - w_{3nx})d\nu)^2 - \frac{1}{4}w_{2(n-1)x} \int_s^t (3\omega_1^n - \omega_3^n)d\nu, \quad (2.29)$$

$$\omega_4^n(s, t, x) = \omega_1^{n-1} \cdot (1 - \frac{1}{4}\int_s^t (w_{4nx} - 3w_{2nx})d\nu)^2 - \frac{1}{4}w_{1(n-1)x} \int_s^t (\omega_4^n - 3\omega_2^n)d\nu, \quad (2.30)$$

С учетом установленных выше оценок $\|w_{jn}\| \leq 2C_\varphi$, $j = \overline{1, 4}$, при $t \leq \frac{1}{10C_\varphi}$ имеем

$$|\frac{1}{4}\int_s^t (3w_{1n} - w_{3n})d\tau| \leq 0.3, \quad |\frac{1}{4}\int_s^t (w_{4n} - 3w_{2n})d\tau| \leq 0.3.$$

Зафиксируем точку x_0 . Рассмотрим множество $\Omega_{x_0} = \{x | 0 \leq x \leq x_0 + 0.3\}$. В замкнутом ограниченном множестве Ω_{x_0} непрерывные вторые производные функций φ_i , $i = 1, 2$, и функция h''' будут равномерно непрерывны. Затем, при выполнении условий (2.16), (2.26), доказана равностепенная непрерывность функций ω_1^n , ω_2^n по x при $x \in \Omega_{x_0}$, из которой следует равностепенная непрерывность функций ω_1^n , ω_2^n по x в выбранной, произвольной точке x_0 , т.е. на $[0, \infty)$. Равностепенная непрерывность функций ω_1^n , ω_2^n по x используется для доказательства сходимости последовательных приближений ω_j^n , $j = \overline{1, 4}$.

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1^n = & -\frac{1}{4}\varphi_1'(\eta_1(0, t, x)) \int_0^t (3\tilde{\omega}_1^n - \tilde{\omega}_3^n)d\tau + \varphi_1'' \cdot (1 - \frac{1}{4}\int_0^t (3w_{1x} - w_{3x})d\tau)^2 + \\ & + g \int_0^s (h'''(\eta_1)(1 - \frac{1}{4}\int_\nu^t (3w_{1x} - w_{3x})d\tau)^2 - \frac{1}{4}h''(\eta_1(\nu, t, x)) \int_\nu^t (3\tilde{\omega}_1^n - \tilde{\omega}_3^n)d\tau d\nu), \end{aligned} \quad (2.31)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_2^n = & -\frac{1}{4}\varphi_2'(\eta_2(0, t, x)) \int_0^t (\tilde{\omega}_4^n - 3\tilde{\omega}_2^n)d\tau + \varphi_2'' \cdot (1 - \frac{1}{4}\int_0^t (w_{4x} - 3w_{2x})d\tau)^2 - \\ & - g \int_0^s (h'''(\eta_2)(1 - \frac{1}{4}\int_\nu^t (w_{4x} - 3w_{2x})d\tau)^2 - \frac{1}{4}h''(\eta_2(\nu, t, x)) \int_\nu^t (\tilde{\omega}_4^n - 3\tilde{\omega}_2^n)d\tau d\nu), \end{aligned} \quad (2.32)$$

$$\tilde{\omega}_3^n = \tilde{\omega}_2^{n-1} \cdot (1 - \frac{1}{4}\int_s^t (3w_{1x} - w_{3x})d\tau)^2 - \frac{1}{4}w_{2x}(s, s, \eta_1(s, t, x)) \int_s^t (3\tilde{\omega}_1^n - \tilde{\omega}_3^n)d\tau, \quad (2.33)$$

$$\tilde{\omega}_4^n = \tilde{\omega}_1^{n-1} \cdot (1 - \frac{1}{4}\int_s^t (w_{4x} - 3w_{2x})d\tau)^2 - \frac{1}{4}w_{1x}(s, s, \eta_2(s, t, x)) \int_s^t (\tilde{\omega}_4^n - 3\tilde{\omega}_2^n)d\tau. \quad (2.34)$$

Доказывается, что при выполнении условий (2.16), (2.26) система рекуррентных уравнений (2.31) - (2.34) при каждом n имеет решение, причем $\tilde{\omega}_j^n \rightarrow \tilde{\omega}_j$, $j = \overline{1, 4}$, справедливы оценки: $\|\tilde{\omega}_1\| \leq 2C_\varphi$, $\|\tilde{\omega}_2\| \leq 2C_\varphi$, $\|\tilde{\omega}_3\| \leq 4C_\varphi$, $\|\tilde{\omega}_4\| \leq 4C_\varphi$.

Далее доказывается, что последовательные приближения ω_j^n сходятся к функциям $\tilde{\omega}_j$, $j = \overline{1, 4}$ при $n \rightarrow \infty$.

Получаем, что $w_{jnx} \rightarrow w_{jxx} = \tilde{\omega}_j$, где функции $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $j = \overline{1, 4}$, непрерывны и ограничены в области Γ_T при выполнении условий (2.16), (2.26).

Аналогично устанавливаем, что существуют непрерывные и ограниченные производные $\frac{\partial^2 w_j}{\partial x^2}$, $j = \overline{1, 4}$, в области Γ_T при выполнении условий (2.16), (2.26).

3. Существование нелокального решения

Теорема 3.1. Пусть $u_0, \eta_0 \in C^2([0, \infty))$ и $h \in C^3([0, \infty))$ и выполняются условия (2.26). Тогда для любого $T > 0$ задача Коши (1.1), (1.2) имеет единственное решение $u, \eta \in C^{1,2,2}(\Omega_T)$, где $u(t, x) = \frac{w_1(t,t,x) - w_2(t,t,x)}{2}$, $\eta(t, x) = \frac{(w_1(t,t,x) + w_2(t,t,x))^2}{16g} - h(x)$ и функции w_1, w_2 удовлетворяют системе интегральных уравнений (2.12) - (2.15).

Доказательство. Продифференцируем систему уравнений (1.4) по x . Обозначим $p(t, x) = \partial_x z_1(t, x)$, $q(t, x) = \partial_x z_2(t, x)$, получим

$$\begin{cases} \partial_t p + \frac{1}{4}(3z_1 - z_2)\partial_x p = -\frac{3}{4}p^2 + \frac{1}{4}pq + gh'', \\ \partial_t q + \frac{1}{4}(z_1 - 3z_2)\partial_x q = \frac{3}{4}q^2 - \frac{1}{4}pq - gh'', \\ p(0, x) = \varphi'_1(x), \quad q(0, x) = \varphi'_2(x). \end{cases} \quad (3.1)$$

Добавим к системе уравнений (2.7) - (2.11) два уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\gamma_1(s,t,x)}{ds} = -\frac{3}{4}\gamma_1^2(s, t, x) + \frac{1}{4}\gamma_1(s, t, x)\gamma_2(s, s, \eta_1) + gh''(\eta_1), \\ \frac{d\gamma_2(s,t,x)}{ds} = \frac{3}{4}\gamma_2^2(s, t, x) - \frac{1}{4}\gamma_1(s, s, \eta_2)\gamma_2(s, t, x) - gh''(\eta_2), \end{cases} \quad (3.2)$$

с начальными условиями

$$\gamma_1(0, t, x) = \varphi'_1(\eta_1), \quad \gamma_2(0, t, x) = \varphi'_2(\eta_2). \quad (3.3)$$

Перепишем систему уравнений (3.2) в следующем виде:

$$\begin{cases} \gamma_1(s, t, x) = \varphi'_1(\eta_1) + \int_0^s [-\frac{3}{4}\gamma_1^2 + \frac{1}{4}\gamma_1\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1) + gh''(\eta_1)]d\tau, \\ \gamma_2(s, t, x) = \varphi'_2(\eta_2) + \int_0^s [\frac{3}{4}\gamma_2^2 - \frac{1}{4}\gamma_1(\tau, \tau, \eta_2)\gamma_2 - gh''(\eta_2)]d\tau. \end{cases} \quad (3.4)$$

Аналогично тому, как это выполнено в статье [7], доказываем существование непрерывно дифференцируемого решения задачи (3.4). Следовательно,

$$\gamma_1(t, t, x) = p(t, x) = \frac{\partial z_1}{\partial x}, \quad \gamma_2(t, t, x) = q(t, x) = \frac{\partial z_2}{\partial x}$$

Для вывода глобальных оценок отметим, что из (2.7) - (2.11) следуют оценки:

$$\|w_i\| \leq C_\varphi + gTC_h, \quad i = 1, 2$$

. Следовательно,

$$\|z_i\| \leq C_\varphi + gTC_h, \quad i = 1, 2. \quad (3.5)$$

Далее, из (3.2) имеем:

$$\begin{cases} \gamma_1(s, t, x) = \varphi'_1(\eta_1) \exp\left(\int_0^s (-\frac{3}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2(\tau, \tau, \eta_1))d\tau\right) + \\ + g \int_0^s h'' \exp\left(\int_\tau^s (-\frac{3}{4}\gamma_1 + \frac{1}{4}\gamma_2(\nu, \nu, \eta_1))d\nu\right)d\tau, \\ \gamma_2(s, t, x) = \varphi'_2(\eta_2) \exp\left(\int_0^s (\frac{3}{4}\gamma_2 - \frac{1}{4}\gamma_1(\tau, \tau, \eta_2))d\tau\right) - \\ - g \int_0^s h'' \exp\left(\int_\tau^s (\frac{3}{4}\gamma_2 - \frac{1}{4}\gamma_1(\nu, \nu, \eta_2))d\nu\right)d\tau. \end{cases} \quad (3.6)$$

При выполнении условия $u'_0(x) \geq \frac{|h'(x)+\eta'_0(x)|}{\sqrt{h(x)+\eta_0(x)}}$, $x \in [0, \infty)$, получаем:

$$\varphi'_1(x) \geq 0, \quad \varphi'_2(x) \leq 0, \quad x \in [0, \infty).$$

Из (3.6) при выполнении условий $h''(x) \geq 0$, $\varphi'_1(x) \geq 0$, $\varphi'_2(x) \leq 0$, $x \in [0, \infty)$ получаем, что $\gamma_1 \geq 0$, $\gamma_2 \leq 0$, на Γ_T , значит, $\|\gamma_i\| \leq C_\varphi + gTC_h$, $i = 1, 2$. Следовательно,

$$\|\partial_x z_i\| \leq C_\varphi + gTC_h, \quad i = 1, 2. \quad (3.7)$$

Далее, также, как в статье [7] выводится, что при всех t и x справедливы оценки:

$$|\partial_{x^2}^2 z_1| \leq E_{11}ch \left(t\sqrt{C_{12}C_{21}} \right) + \frac{E_{21}C_{12} + C_{13}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh \left(t\sqrt{C_{12}C_{21}} \right) + C_{12}C_{23}t^2, \quad (3.8)$$

$$|\partial_{x^2}^2 z_2| \leq E_{21}ch \left(t\sqrt{C_{12}C_{21}} \right) + \frac{E_{11}C_{21} + C_{23}}{\sqrt{C_{12}C_{21}}} sh \left(t\sqrt{C_{12}C_{21}} \right) + C_{21}C_{13}t^2, \quad (3.9)$$

где E_{11} , E_{21} , C_{12} , C_{13} , C_{21} , C_{23} - постоянные, которые определяются через исходные данные.

Полученные глобальные оценки для z_1 , z_2 , $\partial_x z_1$, $\partial_x z_2$, $\partial_{x^2}^2 z_1$, $\partial_{x^2}^2 z_2$ ((3.5), (3.7)- (3.9)) дают возможность продолжить решение на любой заданный промежуток $[0, T]$.

Взяв в качестве начальных значений $z_1(T_0, x)$, $z_2(T_0, x)$, продлим решение на промежуток $[T_0, T_1]$, а затем, беря начальные значения $z_1(T_1, x)$, $z_2(T_1, x)$, продлим решение на промежуток $[T_1, T_2]$. Длина промежутка разрешимости не будет уменьшаться, так как она определяется величинами $\|\partial_x z_1\|$, $\|\partial_x z_2\|$, а эти величины в силу глобальных оценок (3.7) ограничены значением $C_\varphi + gTC_h$ на любом промежутке разрешимости. В частности, начальные значения

$$z_1(T_k, x), z_2(T_k, x) \in \bar{C}^2([0, +\infty)), \quad |z_1(T_k, x)| \leq C_\varphi + gTC_h, \quad |z_2(T_k, x)| \leq C_\varphi + gTC_h.$$

$$|\partial_x z_1(T_k, x)| \leq C_\varphi + gTC_h, \quad |\partial_x z_2(T_k, x)| \leq C_\varphi + gTC_h.$$

Для вторых производных справедливы оценки (3.8), (3.9), где в качестве t можно взять T . В результате за конечное число шагов решение может быть продлено на любой заданный промежуток $[0, T]$.

Единственность решения доказывается применением аналогичных оценок, которые позволили установить сходимость последовательных приближений.

$$\text{Так как } u(t, x) = \frac{z_1(t, x) - z_2(t, x)}{2}, \quad \eta(t, x) = \frac{(z_1(t, x) + z_2(t, x))^2}{16g} - h(x), \quad h \in C^3([0, \infty)), \\ z_1, z_2 \in C^{1,2,2}(\Omega_T), \quad \text{то } u, \eta \in C^{1,2,2}(\Omega_T).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пелиновский Е. Н., *Гидродинамика волн цунами*, Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород, 1996.
2. Рождественский Б. Л., Яненко Н. И., *Системы квазилинейных уравнений и их приложения в газовой динамике*, Наука, М., 1978.
3. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., "К вопросу существования гладкого ограниченного решения для системы двух нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка", *Докл. РАН*, **379**:1 (2001), 16–21.

4. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ*, 2006, Серия "Математика, механика, информатика". Спец. выпуск, № 1, 60–64.
5. Алексеенко С. Н., Донцова М. В., “Исследование разрешимости системы уравнений, описывающей распределение электронов в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **14** (2012), 34–41.
6. Алексеенко С. Н., Донцова М. В., “Локальное существование ограниченного решения системы уравнений, описывающей распределение электронов в слабоионизированной плазме в электрическом поле спрайта”, *Матем. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, **15** (2013), 52–59.
7. Алексеенко С. Н., Шемякина Т. А., Донцова М. В., “Условия нелокальной разрешимости систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка”, *Научно-технические ведомости СПбГПУ. Физико-математические науки*, 2013, № 3 (177), 190–201.

Дата поступления 24.04.2016

The solvability conditions of the system of long waves in a water rectangular channel, the depth of which varies along the axis.

© S. N. Alekseenko³, M. V. Dontsova⁴

Abstract. Nonlocal solvability of the Cauchy problem in physical variables is proved for the system of long waves in a water rectangular channel with the depth varying along its axis. Most often this system of quasi-linear equations is called as the Shallow water system. The starting system is transformed to the system of symmetric quasi-linear equations with help of Riemann invariants. Although shock waves are expected in this quasi-linear hyperbolic system for a wide class of initial data, we find a sufficient condition on the initial data that guarantees existence of a global classical solution continued from a local solution. The existence of the local solutions, the smoothness of which is not lower than the smoothness of the initial conditions, is also proven. The investigation of the considered problem is based on the method of an additional argument. The proof of the nonlocal solvability relies on original global estimates.

Key Words: long-wave system, method of an additional argument, global estimates

³ The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

⁴ A post - graduate student of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; dontsova.marina2011@yandex.ru

УДК 51.7:532.546

Моделирование нестационарных случайных процессов кинетическими уравнениями с дробными производными

© Д. А. Зенюк¹, Л. В. Клочкова², Ю. Н. Орлов³

Аннотация. В работе рассматривается кинетическое уравнение дробного порядка относительно квантилей выборочной функции распределения для моделирования эволюции случайных величин. Предлагается модель для описания эволюции уровня загрязнения мегаполиса, когда источник примесей случаен и имеет так называемые тяжелые хвосты в распределении, а также для моделирования эволюции эпидемиологической обстановки. Исследуются условия существования решения уравнения адвекции-диффузии дробного порядка. Формулируется метод определения параметров этого уравнения по наблюдаемым данным по фактическим значениям изучаемых величин.

Ключевые слова: дробное уравнение адвекции-диффузии, производная Римана-Лиувилля, производная Герасимова-Капуто, выборочные квантили, выборочная функция распределения

1. Введение

Анализ и прогноз нестационарных временных рядов, встречающихся на практике, опирается на изучение эволюционных свойств их выборочных функций распределения. Основы такого подхода применительно к эволюционным уравнениям Лиувилля и Фоккера-Планка были сформулированы в [1, 2]. Эти уравнения были призваны описать эволюцию выборочной плотности функции распределения наблюдаемого временного ряда с целью поиска подходящей динамической системы, имеющей близкие к данной выборке статистические свойства. Тогда дискретный аналог такой системы можно было бы рассматривать как модель временного ряда, позволяющей дать его прогноз на некоторый горизонт, определяемый скоростью разбегания близких траекторий.

Задача прогнозирования ряда с определенной точностью на заданный горизонт возникает во многих практических приложениях. В частности, в работе [3] такие модели предлагалось использовать для прогнозирования загрязненности атмосферы мегаполисов, а также распространения инфекций или вредных примесей в случайно-неоднородной и нестационарной среде. Актуальность кинетических моделей для описания эволюции распределения случайных параметров, характеризующих интенсивность источника вредных примесей, состоит в следующем. Для таких задач общепринятым подходом является использование уравнений химической кинетики, описывающих эволюцию примесей, их состав и концентрацию в химически активном газе в определенных температурных и конвективных условиях внешней среды. Однако практическая трудность использования уравнений такого типа для конкретных мегаполисов состоит в том, что источник загрязнения по интенсивности и составу является случайным и притом нестационарным. В результате кинетические уравнения, применяемые в условиях неопределенности пространственного распределения примесей, приобретают дополнительные стохастические свойства из-за

¹ Аспирант Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

² Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

³ Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; ov3159fd@yandex.ru.

неопределенности функции источника. Возможность описать эту неопределенность кинетическим уравнением того же типа, что и среду, в которой осуществляется перенос изучаемого фактора, позволяет построить унифицированную кинетическую модель процесса в целом.

Анализ распределений таких нестационарных случайных величин, как уровень загазованности, уровень примесей, содержащих тяжелые металлы, радиоактивный фон в промышленных городах, показывает, что эти распределения характеризуются частыми аномальными выбросами наблюдаемых значений, что приводит к формированию так называемых тяжелых хвостов распределений. Эволюция таких распределений может быть описана уравнениями с дробными производными, моделирующими так называемую аномальную диффузию. Математическим аспектам таких уравнений, в частности, дробного уравнения Фоккера-Планка применительно к выборочным плотностям распределений случайных величин и посвящена данная работа.

Теория дифференциальных и интегральных операторов дробного порядка имеет богатую историю, ретроспективные обзоры которой можно найти, например, в [4, 5]. Подробное описание свойств этих операторов приведено в [6-11]. Тем не менее, активное использование этого аппарата для решения различных инженерных и естественнонаучных задач началось сравнительно недавно. Так, например, в середине прошлого века было показано, что использование дифференциальных уравнений нецелого порядка для описания механики вязкоупругих тел имеет более адекватное физическое обоснование и позволяет более точно воспроизводить наблюдаемые в экспериментах данные. Приложения теории дробного исчисления обсуждаются, например, в [12-15]. В последние десятилетия все большее внимание исследователей привлекает уравнение адвекции-диффузии дробного порядка. Например, в [12] оно используется для описания «аномальных» кинетических процессов, наблюдаемых во фрактальных структурах со сложными топологическими свойствами или демонстрирующих нетривиальные корреляционные зависимости, объединенных под общим названием «странная кинетика». Это уравнение возникает как обобщение уравнения Ланжевена и уравнения Чепмена-Колмогорова.

Практически важной задачей является определение параметров кинетического уравнения — коэффициентов сноса, диффузии и порядка дробной производной — по наблюдаемым значениям временного ряда. В работе показывается, что удобной формой кинетического уравнения относительно выборочной плотности функции распределения, позволяющей с достаточной точностью оценивать указанные параметры, является уравнение эволюции в терминах квантилей.

Поскольку использование дробного исчисления требует применения специальной математической техники, в следующем разделе будут даны основные определения и обозначения применительно к кинетическим уравнениям типа Фоккера-Планка. Будут также отмечены некоторые проблемы, связанные с существованием решений этого уравнения, имеющих физический смысл.

2. Дробное уравнение адвекции - диффузии

В настоящей работе под уравнением адвекции-диффузии дробного порядка мы будем

понимать интегро-дифференциальное уравнение [10]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial \tau} (t-\tau)^{-\beta} d\tau + A \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \\ & = \frac{Bc_1}{\Gamma(n-\alpha) \sin(\pi\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_{-\infty}^x \frac{p(\xi, t)}{(x-\xi)^{\alpha+1-n}} d\xi + \frac{(-1)^n Bc_2}{\Gamma(n-\alpha) \sin(\pi\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} \int_x^{\infty} \frac{p(\xi, t)}{(\xi-x)^{\alpha+1-n}} d\xi, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $n = [\text{Re}\alpha] + 1$, $c_{1,2} = \sin(0.5\pi(\alpha \mp \theta))$.

Первое слагаемое в (2.1) представляет собой частную производную Герасимова-Капуто по временной переменной, а конструкция в правой части — частную производную Рисса-Феллера по пространственной переменной. Параметры уравнения (2.1) подчинены следующим ограничениям:

$$0 < \beta \leq 1, \quad \alpha \in (0; 1) \cup (1; 2], \quad |\theta| \leq \min\{2; 2 - \alpha\}, \quad A \in R, \quad B \in R^+.$$

Известно, что фундаментальные решения задачи Коши для этого уравнения являются плотностями распределения некоторых абсолютно непрерывных случайных величин. Класс этих плотностей достаточно широк — он, например, включает в себя все устойчивые распределения (при $\beta = 1$). Доказательство, опирающееся на использование техники интегральных преобразований Фурье и Лапласа, подробно описано в [16-18]. В работе [16] фундаментальное решение уравнения (2.1) при $A = 0$ было получено в явном виде в терминах т. н. H -функций Фокса (см. [18]). Также известно, что уравнение (2.1) возникает при предельном переходе в схеме случайного блуждания с непрерывным временем, если ввести некоторые дополнительные предположения относительно асимптотического поведения плотностей времен ожидания и величин смещения [19-21].

Начально-краевая задача для дробного уравнения адвекции-диффузии является более сложной. Будем рассматривать случай конечного отрезка $[a; b]$. Для него вместо (2.1) имеем уравнение

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{\partial p(x, \tau)}{\partial \tau} (t-\tau)^{-\beta} d\tau + A \frac{\partial p(x, t)}{\partial x} = \\ & = \frac{B}{\sin(\pi\alpha)} \frac{\partial^n}{\partial x^n} (c_1 \cdot {}_x I_{a+}^{n-\alpha} p(x, t) + (-1)^n c_2 \cdot {}_x I_{b-}^{n-\alpha} p(x, t)), \end{aligned} \tag{2.2}$$

где ${}_x I_{a+}^\alpha$ и ${}_x I_{b-}^\alpha$ — соответственно операторы лево- и правостороннего частного интеграла Римана-Лиувилля дробного порядка α , определяемые формулами

$${}_x I_{a+}^\alpha y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x \frac{y(\xi) d\xi}{(x-\xi)^{1-\alpha}}, \quad {}_x I_{b-}^\alpha y = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b \frac{y(\xi) d\xi}{(\xi-x)^{1-\alpha}}.$$

Уравнение (2.2) может быть записано в виде уравнения непрерывности

$${}_t D_{0+}^\beta p(x, t) = -\frac{\partial j(x, t)}{\partial x}, \tag{2.3}$$

где ${}_t D_{0+}^\beta$ есть производная Герасимова-Капуто порядка β , а плотность потока вероятности $j(x, t)$ имеет вид

$$j(x, t) = \begin{cases} Ap(x, t) - B(c_1 \cdot {}_x I_{a+}^{1-\alpha} p(x, t) - c_2 \cdot {}_x I_{b-}^{1-\alpha} p(x, t)), & 0 < \alpha < 1; \\ Ap(x, t) - B \frac{\partial}{\partial x} (c_1 \cdot {}_x I_{a+}^{2-\alpha} p(x, t) + c_2 \cdot {}_x I_{b-}^{2-\alpha} p(x, t)), & 1 < \alpha < 2. \end{cases} \tag{2.4}$$

Для того чтобы решение уравнения (2.3) являлось функцией плотности некоторой случайной величины, оно должно быть неотрицательно и сохранять условие нормировки. Отсюда следует, что естественными граничными условиями в этом случае будут условия

$$j(a, t) = j(b, t) = 0. \quad (2.5)$$

Поведение плотности потока $j(x, t)$ на границах рассматриваемой области может быть весьма сложным. Предположим, что функция плотности представима в окрестности точки $x = a$ в виде:

$$p(x, t) = (x - a)^{\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} h_k (x - a)^k, \quad h_0 \neq 0, \quad \gamma > 0. \quad (2.6)$$

Рассмотрим сначала случай $0 < \alpha < 1$. Тогда имеем

$${}_x I_{a+}^{1-\alpha} p(x, t) = \Gamma(\gamma) \sum_{k=0}^{\infty} h_k (x - a)^{k+\gamma-\alpha} / \Gamma(k + 1 + \gamma - \alpha). \quad (2.7)$$

Из (2.7) следует, что в точке $x = a + 0$ выполняется предельное равенство:

$$\lim_{x \rightarrow a+0} {}_x I_{a+}^{1-\alpha} p(x, t) = \Gamma(\gamma) h_0 \lim_{x \rightarrow a+0} (x - a)^{\gamma-\alpha} / \Gamma(1 + \gamma - \alpha) = \begin{cases} \infty, & \gamma < \alpha \\ \Gamma(\alpha) h_0, & \gamma = \alpha \\ 0, & \gamma > \alpha. \end{cases} \quad (2.8)$$

Тогда равенство в (2.5) $j(a, t) = 0$ при $\gamma > \alpha$ эквивалентно выполнению условия ${}_a I_{a+}^{1-\alpha} p(a, t) = 0$, а при $\gamma = \alpha$ эквивалентно выполнению условия

$$h_0 \Gamma(\alpha) = \frac{c_2}{c_1} {}_a I_{a+}^{1-\alpha} p(a, t). \quad (2.9)$$

Аналогично в окрестности точки также необходимо рассматривать разложение типа (2.6), приводящее к схожим по форме условиям на плотность $p(x, t)$.

Пусть теперь $1 < \alpha < 2$. Тогда

$${}_x I_{a+}^{2-\alpha} p(x, t) = \Gamma(\gamma) \sum_{k=0}^{\infty} h_k (x - a)^{k+1+\gamma-\alpha} / \Gamma(k + 2 + \gamma - \alpha).$$

Отсюда следует, что и в этом случае выполняются граничные соотношения, аналогичные (2.8):

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{\partial}{\partial x} {}_x I_{a+}^{2-\alpha} p(x, t) = \Gamma(\gamma) h_0 \lim_{x \rightarrow a+0} (x - a)^{\gamma-\alpha} / \Gamma(1 + \gamma - \alpha) = \begin{cases} \infty, & \gamma < \alpha \\ \Gamma(\alpha) h_0, & \gamma = \alpha \\ 0, & \gamma > \alpha. \end{cases} \quad (2.10)$$

Таким образом, вопрос о существовании решений уравнения адвекции-диффузии дробного порядка в форме (2.6) на ограниченном отрезке с граничными условиями (2.5) требует выполнения дополнительных условий по сравнению с обычным классическим уравнением: класс функций, которому может принадлежать это решение, задается нетривиальными ограничениями на поведение функции в окрестности граничных точек и на значения дробных интегралов от нее.

3. Прогнозная модель

Как известно [22-25], обычное уравнение адвекции-диффузии играет важную роль в теории вероятностей, поскольку описывает эволюцию одномерной плотности диффузионных марковских случайных процессов, что позволяет использовать это уравнение, в частности, для статистического анализа временных рядов. Учитывая, что уравнение (2.2) также допускает решение в виде плотности распределения, оно тоже может быть использовано для этой цели. В основе предлагаемой прогностической модели лежит предположение, что эволюция одномерной плотности подлежащего случайного процесса, порождающего временной ряд, описывается уравнением типа (2.3). Далее мы ограничимся рассмотрением случая $\beta = 1$, отвечающего обычной производной по времени.

В контексте задачи анализа временных рядов предпочтительнее рассматривать неоднородный и нестационарный конвективный коэффициент $A(x, t)$. Этот вопрос подробно обсуждался в [26], где было показано, что

$$A(x, t)p(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} vp_2(x, v, t)dv, \tag{3.1}$$

где $p_2(x, v, t)$ есть совместное распределение рассматриваемого временного ряда и его первых разностей. Следует подчеркнуть, что введение неоднородного конвективного коэффициента может привести к появлению отрицательных вероятностей при численном решении соответствующих прогностических уравнений. Наличие отрицательных вероятностей, однако, не является однозначным свидетельством некорректности модели, поскольку сами эмпирические вероятности здесь оцениваются с некоторой погрешностью. Модель можно считать неадекватной лишь в том случае, если сумма полученных отрицательных вероятностей по модулю превосходит эту погрешность.

Пусть $Q_\gamma(t)$ есть квантиль порядка γ распределения с плотностью $p(x, t)$, т. е.

$$\int_{-\infty}^{Q_\gamma(t)} p(x, t)dx = \gamma, \quad \gamma \in [0; 1]. \tag{3.2}$$

Дифференцируя (3.2) по t , получаем

$$\frac{dQ_\gamma(t)}{dt}p(Q_\gamma(t), t) + \int_{-\infty}^{Q_\gamma(t)} \frac{\partial p(x, t)}{\partial t}dx = 0,$$

откуда в предположении, что эволюция функции плотности описывается уравнением непрерывности (2.3) с $\beta = 1$, приходим к уравнению

$$\frac{dQ_\gamma(t)}{dt}p(Q_\gamma(t), t) - j(Q_\gamma(t), t) = 0. \tag{3.3}$$

Заметим, что уравнение (3.3) справедливо как на конечном отрезке, так и на неограниченной области. Удобство конструкции (3.3) заключается также и в том, что для его решения не требуется граничных условий, а квантили существуют у любого распределения, в отличие от моментов.

Определенная сложность при использовании модели в виде уравнения (3.3) состоит в том, что оно незамкнуто в том смысле, что это уравнение не может быть решено относительно $Q_\gamma(t)$, если неизвестна функция плотности $p(x, t)$. Однако, если считать, что это уравнение описывает эволюцию эмпирических характеристик временного ряда, то указанное обстоятельство не является препятствием: вместо неизвестных функции плотности $p(x, t)$ и плотности потока вероятности $j(x, t)$ можно использовать их статистические оценки, построенные по наблюдаемым данным за прошлый период.

Сама же процедура оценки параметров α, θ, B в уравнении (2.2) может быть реализована следующим образом. Пусть задана длина сегмента L данных, т. е. длина выборки временного ряда, заканчивающегося в момент наблюдения t . По этой выборочной совокупности строится оценка эмпирических квантилей $Q_\gamma(t)$, а также плотности вероятности и плотности потока вероятности. При фиксированных значениях параметров α, θ, B модельное уравнение, получаемое как дискретный аналог уравнения (3.3) с шагом L , позволяет найти прогнозные значения квантилей $\tilde{Q}_\gamma(t+1)$ в следующем сегменте длины L по известным данным с предыдущего шага по времени:

$$\tilde{Q}_\gamma(t+1) = Q_\gamma(t) + \frac{j(Q_\gamma(t), t)}{p(Q_\gamma(t), t)}. \quad (3.4)$$

В качестве оценок параметров в данном сегменте будем рассматривать те значения, при которых отклонение прогнозируемых квантилей $\tilde{Q}_\gamma(t+1)$ от реально наблюдаемых $Q_\gamma(t+1)$ будет минимальным. Функционал, описывающий меру отклонения, может быть выбран различными способами; в простейшем случае можно использовать обычное расстояние в пространстве R_2^q , где есть количество анализируемых квантилей:

$$\rho(\alpha, \theta, B, t) = \sqrt{\sum_{k=1}^q \left(\tilde{Q}_{\gamma_k}(t+1) - Q_{\gamma_k}(t+1) \right)^2}. \quad (3.5)$$

Затем процедура повторяется для следующей пары выборок длины L , «двигаясь» таким образом вдоль временного ряда.

В общем случае количество q рассматриваемых в рамках этого метода квантилей и их уровни γ_k могут быть любыми. Рассмотрим один из простых, но практически важных вариантов, когда используется прогностическая модель с тремя квантилями, т.е. квантилями уровней 0.25, 0.50 и 0.75. Такой выбор может быть аргументирован тем, что второй квантиль (уровня 0.5) является медианой, которая, как известно, используется в качестве устойчивой оценки параметра положения, а разность третьего и первого квантилей (интерквартильный размах) используется в качестве оценки параметра рассеяния.

Оценки функции плотности и плотности потока вероятности, входящие в (3.4), могут быть построены различными способами. Простейшей оценкой функции плотности, обозначаемой «шляпкой», чтобы отличать ее от генеральной совокупности, является гистограмма эмпирических частот, которая при разбиении на m классовых интервалов определяется формулой

$$\hat{p}(x, t) = \sum_{k=1}^{m-1} v_k I(\Delta_k(x)), \quad (3.6)$$

где $\Delta_k(x)$ — k -ый классовый интервал при разбиении области значений временного ряда в рассматриваемом сегменте, v_k — количество точек временного ряда, попадающих в $\Delta_k(x)$, а $I(\Delta)$ — индикативная функция множества. Аналогичная оценка может быть

построена и для двумерной функции плотности:

$$\hat{p}_2(x, v, t) = \sum_{i,k=1}^{m-1} v_{ik} I(\Delta_i(x)) I(\Delta_k(v)). \quad (3.7)$$

Здесь v_{ik} — количество пар точек двумерного временного ряда, попавших в отмеченный квадрат.

Оценку плотности потока вероятности можно получить, подставляя в его аналитическое выражение (2.4) и вычисляя интегралы в явном виде.

Описанная схема оценки параметров была апробирована на нескольких временных рядах: сформированных искусственно, или построенных на основе реальных данных. Так, например, серия вычислений для траекторий фрактального броуновского движения с заданным показателем Херста (см. [27]) показала, что среднее значение и выборочная мода оценки параметра α весьма близки к истинному значению самого показателя Херста (среднеквадратичная относительная ошибка отклонения составила менее 0.01).

Также были исследованы временные ряды, образованные ценами акций (с минутным интервалом) российских компаний с наибольшей капитализацией, используемые при расчете индекса РТС, в схеме с тремя квартилями. Значения параметров оказались существенно нестационарны и различны для разных рядов. Важно отметить, что на квазистационарном промежутке наилучшей оценкой параметра B в смысле метрики (3.5) являлось нулевое значение, то есть наилучший прогноз квантилей можно в таком случае получить с помощью уравнения типа Лиувилля, когда в (2.4) отсутствует диффузионное слагаемое, что также подтверждает корректность метода.

Важно также и то, что среднеквадратичная ошибка оценки реально наблюдаемых квантилей с помощью изложенного метода в сравнении со стандартными методами моделей авторегрессии — скользящего среднего для тестируемых рядов оказалась в 2-4 раза меньше. Следовательно, кинетические модели типа дробной адвекции-диффузии могут быть эффективно применены для прогнозирования нестационарных временных рядов.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ, проекты № 14-01-00145 и № 13-01-00617.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Орлов Ю. Н., Осминин К. П., “Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда”, *Математическое моделирование*, 2008, № 9, 23–33.
2. Орлов Ю. Н., Осминин К. П., *Нестационарные временные ряды: методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков*, Эдиториал УРСС/Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2011, 384 с.
3. Клочкова Л. В., Орлов Ю. Н., Тишкин В. Ф., “Математическое моделирование корреляции эпидемической обстановки в мегаполисах от состояния воздуха”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **7** (2012), 34–43.
4. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И., “Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения”, *Наука и техника*, 1987.

5. Miller K. S., Ross B., *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, New York etc.: John Wiley & Sons, 1993.
6. Oldham K. B., Spaniel J., *The fractional calculus*, San Diego etc.: Academic Press, 1974.
7. Gorenflo R., Mainardi F., “Fractional calculus: Integral and differential equations of fractional order”, *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics*, 1997, 223–276.
8. Mainardi F., “Fractional calculus: Some basic problems in continuum and statistical mechanics”, 1997, 291–348.
9. Podlubny I., *Fractional differential equations*, San Diego etc.: Academic Press, 1999.
10. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J., *Theory and applications of fractional differential equations*, Amsterdam etc.: Elsevier, 2005.
11. Псху А. В., *Уравнения в частных производных дробного порядка*, Наука ур 2005, Москва.
12. Зеленый Л. М., Милованов А. В., “Фрактальная топология и странная кинетика: от теории перколяции к проблемам космической электродинамики”, *Успехи физических наук*, **174**:8 (2004), 809–852.
13. Нахушев А. М., *Дробное исчисление и его применение*, ФИЗМАТЛИТ, Москва, 2003.
14. Васильев В. В., Симак Л. А., *Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем*, НАН Украины (Национальная академия Украины), Киев, 2008.
15. Бутковский А. Г., Постнов С. С., Постнова Е. А., “Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления I. Математические основы и проблема интерпретации”, *Автоматика и телемеханика*, 2013, № 4, 3–42.
16. Mainardi F., Luchko Y., Pagnini G., “The fundamental solution of the space-time fractional diffusion equation”, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, **4**:2 (2001), 153–192.
17. Uchaikin V. V., Zolotarev V. M., “Chance and Stability: Stable distributions and their applications 13-34.”, *Zeist: VSPs*, **282**:1 (1999), 13-34..
18. Mainardi F., Pagnini G., Saxena R., “Fox functions in fractional diffusion”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **178**:1-2 (2005), 321–331.
19. Schertzer D., Larcheveque M., Duan J. et al, “Fractional Fokker-Planck equation for nonlinear stochastic differential equations driven by non-Gaussian Levy stable noises”, *Journal of Mathematical Physics*, **42** (2001), 200–212.
20. Tarasov V. E., “Fractional Fokker-Planck equation for fractal media”, *Chaos*, **15**:2 (2005), 023102.
21. Gorenflo R., Mainardi F., Moretti D. et al., “Discrete random walk models for space-time fractional diffusion”, *Chemical Physics*, **284**:1 (2002), 521–541.

22. Giona M., Roman H. E., “Fractional diffusion equation on fractals: One-dimensional case and asymptotic behavior”, *Journal of Physics A: Mathematical and General*, **25**:8 (1992), 2093–2105.
23. Metzler R., Klafter J., “The random walk’s guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach”, *Physics reports*, **339**:1 (2000), 1–77.
24. Zaslavsky G. M., “Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport”, *Physics reports*, **371**:6 (2002), 461–580.
25. Yanovsky V. V., Chechkin A. V., Schertzer D., Tur A. V., “Levy anomalous diffusion and fractional Fokker-Planck equation”, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 2000.
26. Зенюк Д. А., Орлов Ю. Н., *О применении дробного исчисления Римана - Лиувилля для описания распределения вероятностей*, Препринт № 18 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2014, 21 с.
27. Кириллов Д. С., Короб О. В., Митин Н. А., Орлов Ю. Н., Плешаков Р. В., *Распределение показателя Херста нестационарного маркированного временного ряда*, Препринт № 11 ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, ИПМ им. М. В. Келдыша РАН, Москва, 2013, 16 с.

Дата поступления 21.12.2015

Simulation of nonstationary random processes kinetic equations with fractional derivatives.

© D. A. Zenuk⁴, L. V. Klochkova⁵, J. H. Orlov⁶

Abstract. In this paper we construct a method of simulation of nonstationary random processes by kinetic equations with fractional derivatives. Paper discusses the kinetic equation of fractional order with respect to the sample quantiles of the distribution function for modeling the evolution of the random variables. A model is proposed to describe the evolution of the pollution of the metropolis, when the source of impurities is random.

Key Words: fractional equation advection-diffusion, Riemann-Liouville derivative, Gerasimov-Caputo derivative, sample quantiles, sample distribution function

⁴ Aspirant of the Institute of applied mathematics by name M. V. Keldysh of RAS, Moscow

⁵ Senior Research Fellow of Keldysh Institute of Applied Mathematics of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

⁶ Senior Researcher Officer of the Institute of applied mathematics by name M. V. Keldysh of RAS, Moscow; ov3159fd@yandex.ru.

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневолжского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Объем рукописи не должен превышать 12 страниц для научной статьи и 20 страниц для обзорной статьи.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX. Компиляцию статьи необходимо производить с помощью MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте — <http://www.miktex.org>.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы:

- коды УДК;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО, e-mail, должность и место работы (официальное название организации);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи;
- список литературы.

Если статья на русском языке, то название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова необходимо так же предоставить и на английском языке. Если статья написана на английском языке, то отдельно представляются коды УДК, название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова на русском языке.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описываются предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– не включать несущественные детали;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example», «the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать одно из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т. е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

На английском языке приводится авторское резюме (аннотация), которое является кратким резюме большей по объему работы, имеющей научный характер.

Объем аннотации должен быть в среднем от 100 до 250 слов.

Раздел Ключевые слова должен содержать от 5 до 15 слов и четко указывать на основное содержание статьи. Не следует приводить в качестве ключевых слов общие понятия, так как поиск по ключевому слову не приведет читателя к нахождению интересующей его информации. Однако данное слово может входить в значимое словосочетание.

Авторам необходимо придерживаться следующей структуры статей:

– введение – краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье.

– материалы и методы решения задачи и принятые допущения.

– результаты – основное содержание статьи.

– обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.

– заключение – выводы и рекомендации.

Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB (см. Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTeX). Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье. В оригинальных статьях допускается до 20, в обзорных – до 60 источников.

Подробные Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTeX содержатся на сайте журнала по адресу <http://journal.svmo.ru/page/rules>.

Правила верстки рукописей в системе LaTeX

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе Т_ЕX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\ footnote { Долж-
ность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\ footnote {Должность, место ра-
боты, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место рабо-
ты, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-
mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т. д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , \mathcal{D}_i в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\mathcal{D}}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т. п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

```
\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}
```

где `степень_сжатия` число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

```
\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}
```

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

```
\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}
```

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

```
\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}
```

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение `thebibliography`. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле `amsbib.pdf`. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл `svtobib.sty` (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\RBibitem{метка для ссылки на источник}`.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку `'ivanovb7'`. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в преамбуле).

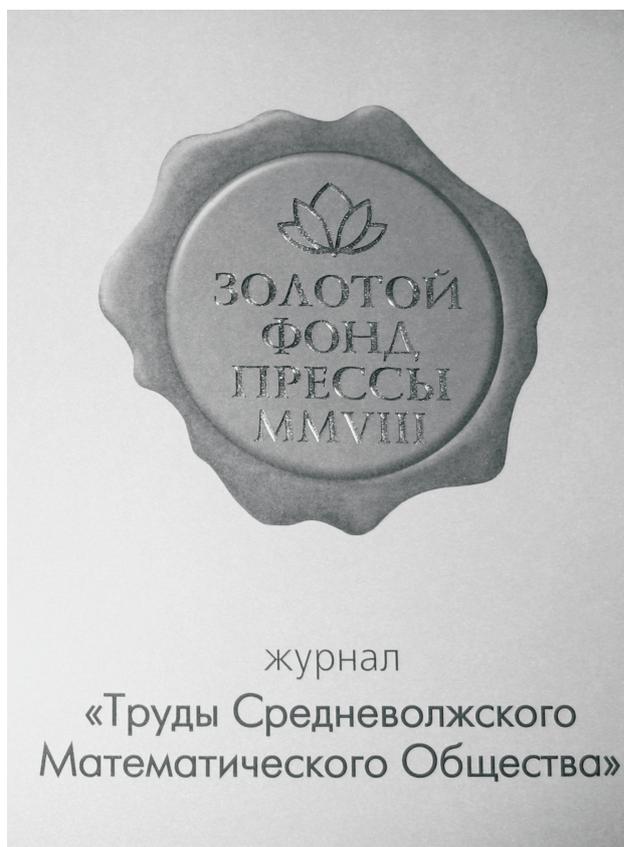
Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

| | | | |
|-------------------|--------|-----------------|--------|
| Алексеев С. Н. | 115 | Круглов В. Е. | 47 |
| Бояркин Д. И. | 7 | Куренков Е. Д. | 16 |
| Бубнова О. Ю. | 67 | Малкин М. И. | 59 |
| Вельмисов П. А. | 106 | Мальшев Д. С. | 47 |
| Гермидер О. В. | 85 | Масягин В. Ф. | 94 |
| Гринес В. З. | 11, 16 | Орлов Ю. Н. | 125 |
| Губайдуллин И. М. | 94 | Попов В. Н. | 85 |
| Гуревич Е. Я. | 11 | Починка О. В. | 11, 47 |
| Добкин В. И. | 25 | Рязанцева И. П. | 67 |
| Донцова М. В. | 115 | Сафонов К. А. | 59 |
| Жалнин Р. В. | 94 | Тишкин В. Ф. | 94 |
| Жукова Н. И. | 30 | Шабаликов К. Х. | 72 |
| Зенюк Д. А. | 125 | Шейна К. И. | 30 |
| Иванов Д. В. | 41 | Шуршина А. С. | 94 |
| Киреев С. В. | 106 | Щенников В. Н. | 25 |
| Клочкова Л. В. | 125 | Щенникова Е. В. | 25 |
| Корнеев А. В. | 106 | Юлдашев Т. К. | 72 |

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.

Для заметок