

ISSN 2079 – 6900

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 17, № 4



2015



# СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Н. П. ОГАРЁВА

## Журнал Средневолжского математического общества

Том 17, № 4

Издается с декабря 1998 года  
Выходит четыре раза в год

### Главный редактор

В. Ф. Тишкин

Институт прикладной математики  
им. М. В. Келдыша РАН

### Заместитель главного редактора

Н. Д. Кузьмичев

Мордовский государственный  
университет им. Н. П. Огарёва

### Ответственный секретарь

П. А. Шаманаев

Мордовский государственный  
университет им. Н. П. Огарёва

### Редакционная коллегия

А. С. Андреев

Ш. А. Алимов

А. М. Ахтямов

Ш. А. Аюпов

И. В. Бойков

П. А. Вельмисов

В. К. Горбунов

В. З. Гринес

Ю. Н. Дерюгин

А. П. Жабко

В. И. Жегалов

Т. Ш. Кальменов

А. М. Камачкин

Е. Б. Кузнецов

В. Н. Кризский

Б. В. Логинов

Anca Veronica Ion

С. И. Мартынов

П. П. Матус

О. В. Починка

В. П. Радченко

И. П. Рязанцева

М. С. Салахитдинов

С. И. Спивак

М. Т. Терехин

### Редакционный совет

Н. Д. Морозкин

Башкирский государственный  
университет

П. В. Сенин

Мордовский государственный  
университет им. Н. П. Огарева

Л. А. Сухарев

Средне-Волжское  
математическое общество

Н. Г. Ярушкина

Ульяновский государственный  
технический университет

САРАНСК

2015

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва».

## **Журнал Средневолжского математического общества. Том 17, № 4**

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

---

*Адрес редакции:* 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).

*Тел.:* (834-2) 23-32-05

*E-mail для статей:* journal@svmo.ru

*E-mail для организационных вопросов:* svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

*Web:* <http://www.svmo.ru>

---

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

## Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА . . . . .	6
---------------------------------	---

---

## МАТЕМАТИКА

### Е. Я. Гуревич

О топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов, являющихся локальными произведениями . . . . .	7
1. Введение и формулировка результатов . . . . .	7
2. Топологическая классификация многообразий, допускающих гомеоморфизмы из класса $G^*(M_{1,\tau}^3)$ . . . . .	10

---

### А. Ю. Долгоносова, Н. И. Жукова

Эквивалентные подходы к понятию полноты слоений с трансверсальной линейной связностью . . . . .	14
1. Введение . . . . .	14
2. Основные понятия . . . . .	16
2.1. Задание слоения $N$ -коциком . . . . .	16
2.2. Определение слоения с трансверсальной линейной связностью . . . . .	16
2.3. Аффинные отображения . . . . .	17
3. Расслоение трансверсальных реперов . . . . .	17
4. Доказательство теоремы 1.1. . . . .	19
5. Доказательство теоремы 1.2. . . . .	21
6. Примеры . . . . .	22

---

### Н. В. Исаенкова, Е. В. Жужома, Г. В. Осипов

О полусопряженности эндоморфизма Вильямса и неособого эндоморфизма окружности . . . . .	24
1. Введение . . . . .	24
2. Доказательство основных результатов . . . . .	25

---

### М. И. Малкин, К. А. Сафонов

Точная оценка разрывов топологической энтропии для отображений лоренцевского типа . . . . .	31
1. Введение . . . . .	31
2. Предварительные сведения и основные результаты . . . . .	32

---

### Т. М. Митрякова, О. В. Починка

Критерий топологической сопряженности 3-диффеоморфизмов с конечным числом орбит гетероклинического касания . . . . .	37
--	----

---

**С. Н. Нагорных, Д. С. Саблуков**

Плотность вероятности как решение уравнения Фоккера-Планка в индуцированных шумом переходах. . . . .	41
2. Теорема Хорстхемке-Саичева по Ито . . . . .	41

---

**А. В. Щенников, В. Н. Щенников, Е. В. Щенникова**

Оценки погрешности линеаризации относительно части и всех фазовых переменных . . . . .	45
1. Построение оценки линеаризации для случая, когда исходная система обык- новенных дифференциальных уравнений имеет линейной первое приближение	45
2. Критический случай $k$ нулевых, которым соответствуют простые элемен- тарные делители . . . . .	53

---

**Т. К. Юлдашев**

Непараметрическая оценка квадрата плотности вероятности и её свойства в условиях больших выборок . . . . .	60
1. Постановка задачи . . . . .	60
2. Асимптотические свойства непараметрической оценки $\bar{p}^2(x)$ . . . . .	61
3. Мера близости между искомой плотностью вероятностей $p^2(x)$ и ее оценкой $\bar{p}^2(x)$ . . . . .	66
4. Анализ свойств статистики $\bar{p}^2(x)$ . . . . .	67
5. Заключение . . . . .	68

---

**ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА****А. Р. Нафикова, В. Н. Кризский**

К вопросу математического моделирования процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями . . . . .	70
1. Введение . . . . .	70
2. Постановка задачи и способ решения . . . . .	71
3. Сравнительное сопоставление для случая однородных сред . . . . .	72
4. Перенос радона. Анизотропный случай . . . . .	73
5. Заключение . . . . .	76

---

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА****В. К. Ионычев, Р. Р. Кадеркаев, С. М. Мурюмин, П. А. Шаманаев**

Численное моделирование вероятности включения микроплазмы с участием глубоких центров в $p-n$ -переходе . . . . .	78
1. Численное моделирование вероятности включения микроплазмы при эмис- сии носителей заряда через простые двухзарядные глубокие центры . . . . .	79
2. Численное моделирование вероятности включения микроплазмы при эмис- сии носителей с многозарядной ловушкой . . . . .	83

---

<b>Г. Р. Карамутдинова, И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина, Е. И. Кулиш, А. К. Ильчибаева</b>	
Математическое описание процесса диффузии в пленке хитозана	87
1. Введение . . . . .	87
2. Разработка математических моделей . . . . .	88
3. Результаты вычислительного эксперимента . . . . .	90
<hr/>	
<b>И. В. Лутошкин, Н. Р. Ямалтдинова</b>	
Принцип максимума в задаче управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием . . . . .	96
1. Введение . . . . .	96
2. Постановка проблемы . . . . .	97
3. Принцип максимума . . . . .	99
4. Вычислительный эксперимент . . . . .	101
<hr/>	
Памяти Александры Федоровны Зубовой . . . . .	105
<hr/>	
Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневожского математического общества» . . . . .	107
Правила верстки рукописей в системе LaTex . . . . .	109
Алфавитный указатель . . . . .	111

## ОТ РЕДАКЦИИ

В четвертом номере 17-го тома публикуются наиболее значимые работы ученых и молодых исследователей, являющихся участниками XII научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых (г. Саранск, 28 – 30 августа 2015 года).

Конференция проводится национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом при поддержке РФФИ грант № 15-01-20610).

Все статьи имеют положительные рецензии и доступны в сети Internet на сайте Научной Электронной Библиотеки Elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

## МАТЕМАТИКА

УДК 517.938

# О топологической классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов, являющихся локальными произведениями

© Е. Я. Гуревич<sup>1</sup>

**Аннотация.** В работе выделяется класс диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях, представляющихя как локальные произведения диффеоморфизмов на поверхности и окружности, и приводится их топологическая классификация. Уточняется структура многообразий, допускающих такие диффеоморфизмы.

**Ключевые слова:** градиентно-подобные диффеоморфизмы, топологическая классификация, локальные произведения, локально-тривиальные расслоения

## 1. Введение и формулировка результатов

Диффеоморфизм  $f : M^n \rightarrow M^n$  связного замкнутого гладкого многообразия  $M^n$  размерности  $n$  называется *диффеоморфизмом Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество  $\Omega_f$  конечно и состоит только из гиперболических периодических точек, и для любых различных седловых периодических точек  $p, q \in \Omega_f$  инвариантные многообразия  $W_p^s, W_q^u$  либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально. Множество всех диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразии  $M^n$  будем обозначать через  $MS(M^n)$ .

Пусть  $f \in MS(M^3)$ . Непустое пересечение  $W_p^s \cap W_q^u$ , где  $p, q$  — различные седловые точки диффеоморфизма  $f$ , называется *гетероклиническим*, при этом в случае  $\dim(W_p^s \cap W_q^u) = 1$  компонента связности пересечения  $W_p^s \cap W_q^u$  называется *гетероклинической кривой*, а в случае  $\dim(W_p^s \cap W_q^u) = 0$  любая точка пересечения  $W_p^s \cap W_q^u$  называется *гетероклинической точкой*. Диффеоморфизм  $f \in MS(M^3)$  называется *градиентно-подобным*, если из условия  $W_p^s \cap W_q^u \neq \emptyset$  следует, что размерность множества  $W_p^u$  меньше размерности множества  $W_q^u$ . Это условие означает, что если неблуждающее множество диффеоморфизма  $f \in MS(M^3)$  не содержит гетероклинических точек, то диффеоморфизм  $f$  является градиентно-подобным.

С.Смейл в работе [1] (Theorem A) показал, что градиентный поток функции Морса на произвольном многообразии  $M^n$  может быть сколь угодно близко аппроксимирован (в  $C^1$ -топологии) потоком Морса-Смейла без периодических траекторий, что доказывает существование диффеоморфизмов Морса-Смейла на любом многообразии (например, являющихся сдвигами на единицу времени вдоль траекторий таких потоков).

Полная топологическая классификация сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов из класса  $MS(M^3)$  на ориентируемых трехмерных многообразиях получена в цикле работ В.З.Гринеса, О.В. Почкини, В.С. Медведева и Х.Бонатти (см. обзор [2] и книгу [3]). Однако по прежнему является актуальной задача выделения содержательных классов диффеоморфизмов из  $MS(M^3)$ , допускающих более простое, по сравнению с общим случаем,

<sup>1</sup> Доцент кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики; eigurevich@hse.ru.

описание. Так, в [4] рассмотрен класс диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, для которых полным топологическим инвариантом является граф, аналогичный классическим инвариантам Е.А. Андроновой, А. Г. Майера и М. Пейкшота.

В этой работе выделяется класс диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях, допускающих возможность решения проблемы топологической классификации в терминах топологических инвариантов диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях меньшей размерности (поверхности и окружности). Приведем точную конструкцию. Пусть  $\mathbb{S}^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$  — окружность,  $S_g^2$  — поверхность (замкнутое двумерное многообразие) рода  $g \geq 0$ ,  $\tau : S_g^2 \rightarrow S_g^2$  — некоторый гомеоморфизм, который будем называть *отображением склейки*. Обозначим через  $M_{g,\tau}^3$  пространство орбит действия группы  $\Gamma = \{\gamma^i, i \in \mathbb{Z}\}$ , порожденной степенями гомеоморфизма  $\gamma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ , определенного формулой  $\gamma(z, r) = (\tau(z), r - 1)$  и через  $p_{g,\tau} : S_g^2 \times \mathbb{R} \rightarrow M_{g,\tau}^3$  естественную проекцию.

Пусть  $\varphi_2 : S_g^2 \rightarrow S_g^2$  — диффеоморфизм такой, что либо  $\varphi_2 \tau = \tau \varphi_2$ , либо  $\varphi_2 \tau^{-1} = \tau^{-1} \varphi_2$ ;  $\varphi_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  — произвольный диффеоморфизм,  $\tilde{\varphi}_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — его поднятие. Тогда на  $M_g^3$  корректно определен диффеоморфизм  $\Phi : M_{g,\tau}^3 \rightarrow M_{g,\tau}^3$ , поднятие которого  $\tilde{\Phi} : S_g^2 \times \mathbb{R} \rightarrow S_g^2 \times \mathbb{R}$  определяется формулой  $\tilde{\Phi}(x, y) = (\tilde{\varphi}_1(x), \varphi_2(y))$ ,  $x \in \mathbb{R}, y \in S_g^2$ . Будем называть диффеоморфизм  $\Phi$  *локальным произведением* диффеоморфизмов  $\varphi_1, \varphi_2$  и обозначать  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2)$ .

Класс всех диффеоморфизмов на многообразии  $M_\tau^3$ , являющихся локальными произведениями градиентно-подобных диффеоморфизмов, обозначим через  $G(M_\tau^3)$ .

Методами работы [5] доказывается следующий результат.

**Т е о р е м а 1.1.** *Диффеоморфизмы  $\Phi = (\varphi_1, \varphi_2), \Phi' = (\varphi'_1, \varphi'_2)$  из класса  $G(M_\tau^3)$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существуют гомеоморфизмы  $h_1 : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $h_2 : S_1^2 \rightarrow S_1^2$  такие, что:*

1.  $\varphi'_1 = h_1 \varphi_1 h_1^{-1}$ ;
2.  $\varphi'_2 = h_2 \varphi_2 h_2^{-1}$ ;
3.  $h_2 \tau = \tau h_2$ .

Полная топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности получена А.Г. Майером в работе [6]. Проблема топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях решена для широкого класса систем в работах [7], [8]. Таким образом, основная задача, возникающая при классификации диффеоморфизмов из класса  $G(M_{g,\tau}^3)$ , сводится к различению многообразий вида  $M_{g,\tau}^3$ . Наиболее законченные результаты в этом направлении удается получить в случае  $g \in \{0, 1\}$ , чemu и посвящена эта работа.

Прежде чем перейти к формулировке основных результатов, сделаем еще одно замечание. Необходимые условия, которым удовлетворяют диффеоморфизмы из класса  $G(M_\tau^3)$ , позволяют выделить следующий класс систем. Пусть  $M^3$  — ориентируемое многообразие, и  $f : M^3 \rightarrow M^3$  — сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм. Обозначим через  $\Omega_f^i$  множество периодических точек диффеоморфизма  $f$ , размерность неустойчивого многообразия которых равна  $i \in \{1, 2, 3\}$ . Будем говорить, что диффеоморфизм  $f : M^3 \rightarrow M^3$  принадлежит классу  $G^*(M^3)$ , если множество его седловых периодических точек представляется как объединение двух подмножеств  $\Sigma_f = \Sigma_a \cup \Sigma_r$  таких, что каждая компонента связности множеств  $\mathcal{A} = W_{\Sigma_a}^u \cup \Omega_f^0$ ,  $\mathcal{R} = W_{\Sigma_r}^s \cup \Omega_f^3$  является ручно вложенной ориентируемой поверхностью. В работе [9] доказано, что для сохраняющего ориентацию диффеоморфизма  $f \in G^*(M^3)$  существует целое число  $g_f \geq 0$

и гомеоморфизм  $\tau_f : S_{g_f} \rightarrow S_{g_f}$  такие, что  $M^3$  диффеоморфно  $M_{g_f, \tau_f}^3$ . Таким образом, результаты настоящей работы применимы и для различения диффеоморфизмов из класса  $G^*(M^3)$ .

**Л е м м а 1.1.** *Пусть гомеоморфизмы  $\tau : S_g^2 \rightarrow S_g^2, \tau' : S_g^2 \rightarrow S_g^2$  изотопны. Тогда  $M_{g, \tau}^3, M_{g, \tau'}^3$  диффеоморфны.*

Из леммы 1.1. немедленно вытекает следующий результат.

**П р е д л о ж е н и е 1.1.** *Пусть  $f \in G^*(M_{0, \tau}^3)$ . Тогда  $M_{0, \tau}^3$  диффеоморфно прямому произведению  $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ .*

Случай  $g = 1$  дает более богатый набор многообразий. В этом случае  $\tilde{S}_1^2 = \mathbb{R}^2$ ,  $S_1^2 = T^2 = \mathbb{R}^2 / \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ . Из [13] (см. раздел D главы 2) следует, что гомеоморфизмы  $\varphi, \varphi' : T^2 \rightarrow T^2$  изотопны тогда и только тогда, когда совпадают индуцированные изоморфизмы фундаментальной группы  $\varphi_* : \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(T^2)$ ,  $\varphi'_* : \pi_1(T^2) \rightarrow \pi_1(T^2)$ . Так как группа  $\pi_1(T^2)$  изоморфна прямому произведению  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , то изотопическая классификация гомеоморфизмов тора сводится к классификации унимодулярных целочисленных матриц. Группу таких матриц будем обозначать через  $GL(2, \mathbb{Z})$ , а матрицу гомеоморфизма  $\varphi_* : H_1(T^2, \mathbb{R}) \rightarrow H_1(T^2, \mathbb{R})$  будем обозначать через  $A_\varphi$ .

Пусть  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  — унимодулярная целочисленная матрица. Обозначим через  $\check{A} : T^2 \rightarrow T^2$  диффеоморфизм, заданный уравнениями  $\check{A}(x_1, x_2) = (a_{11}x_1 + a_{12}x_2, a_{21}x_1 + a_{22}x_2) \pmod{1}$ .

**Т е о р е м а 1.2.** *Диффеоморфизм Морса-Смейла  $f$  принадлежит классу  $G^*(M_{1, \tau}^3)$  тогда и только тогда, когда  $M_{1, \tau}^3$  диффеоморфно многообразию  $M_{1, \check{A}}^3$  такому, что матрица  $A$  отображения склейки  $\check{A}$  совпадает с одной из следующих матриц:*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

В случае  $g \geq 2$ , согласно классификации Нильсена и Терстона (см. [10], [11]), множество всех гомотопических классов отображений  $\tau : S_g^2 \rightarrow S_g^2$  представляется как объединение четырех непересекающихся подмножеств  $T_1, T_2, T_3, T_4$  со следующими свойствами.

1. если гомотопический класс  $\{\tau\}$  отображения  $\tau$  принадлежит подмножеству  $T_1$ , то  $\{\tau\}$  содержит периодический гомеоморфизм;
2. если  $\{\tau\} \in T_2$ , то  $\{\tau\}$  содержит приводимый непериодический гомеоморфизм алгебраически конечного типа;
3. если  $\{\tau\} \in T_3$ , то  $\{\tau\}$  содержит приводимый гомеоморфизм, не являющийся гомеоморфизмом алгебраически конечного типа;
4. если  $\{\tau\} \in T_4$ , то  $\{\tau\}$  содержит псевдоаносовский гомеоморфизм.

Определения гомеоморфизмов, упомянутых в перечислении 1-4, имеется, например, в обзоре [12]. Аналогично доказательству теоремы 1.2. доказывается следующее утверждение.

**Т е о р е м а 1.3.** *Если  $f \in G^*(M_{g,\tau}^3)$ , то  $\{\tau\} \in T_1$ .*

Работа подготовлена с использованием средств Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2015г. по проекту 15-09-0255.

Автор выражает глубокую признательность В.З. Гринесу за внимание к работе плодотворные обсуждения.

## 2. Топологическая классификация многообразий, допускающих гомеоморфизмы из класса $G^*(M_{1,\tau}^3)$

### Доказательство леммы 1.1.

Из условия леммы следует, что существует изотопия  $\xi_t : S_g^2 \rightarrow S_g^2$ ,  $t \in [0, 1]$ , соединяющая отображение  $\xi_0 = \tau'\tau^{-1}$  с тождественным отображением  $\xi_1$ . Определим гомеоморфизм  $H : S_g^2 \times [0, 1] \rightarrow S_g^2 \times [0, 1]$  формулой  $H(z, t) = (\xi_t(z), t)$ . Тогда многообразия  $M_{g,\tau}^3$ ,  $M_{g,\tau'}^3$  гомеоморфны при помощи гомеоморфизма  $\tilde{H} : M_{g,\tau}^3 \rightarrow M_{g,\tau'}^3$ , который каждому классу эквивалентности  $[(z, t)]$  ставит в соответствие класс эквивалентности  $[H(z, t)]$ . В силу единственности гладкой структуры на трехмерных многообразиях многообразия  $M_{g,\tau}^3$ ,  $M_{g,\tau'}^3$  являются диффеоморфными.

Доказательство заканчено.

Приведем ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства теоремы 1.2.. Следующие два утверждения доказаны в [14].

### П р е д л о ж е н и е 2.1.

- *Фундаментальная группа  $\pi_1(M_{1,\tau}^3)$  является полуупрямым произведением подгруппы  $R_\tau \cong \mathbb{Z}$  и нормальной подгруппы  $N_\tau = p_\tau(T^2 \times \mathbb{R}) \cong \mathbb{Z}^2$ , то есть гомотопический класс  $[c] \in \pi_1(M_{1,\tau}^3)$  имеет единственное представление  $(a, b)$ ,  $a \in R_\tau$ ,  $b \in N_\tau$ , а групповая операция определяется следующим образом:  $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 + a_2, J^{a_1}(b_2) + b_1)$ .*
- *Если гомеоморфизм  $h : M_{1,\tau}^3 \rightarrow M_{1,\tau}^3$  индуцирует изоморфизм  $h_* : \pi_1(M_{1,\tau}^3) \rightarrow \pi_1(M_{1,\tau}^3)$  такой что  $h_*(N_\tau) = N_\tau$ , то  $h_*$  единственным образом определяется матрицей  $H \in GL(2, \mathbb{Z})$  и элементом  $\beta \in N_\tau$  такими, что  $h_*(0, b) = (0, H(b))$ ,  $b \in \mathbb{Z}^2$ , при этом либо  $h_*(1, 0) = (1, \beta)$  и  $HJ = J'H$ , либо  $h_*(1, 0) = (-1, \beta)$  и  $HJ^{-1} = J'H$ . Гомеоморфизм  $h$  накрывается гомеоморфизмом  $\tilde{h} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$  таким что  $\tilde{h}_* : \pi_1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}) \rightarrow \pi_1(\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})$  определяется матрицей  $H$ .*

**П р е д л о ж е н и е 2.2.** *Пусть  $A, B \in GL(2, \mathbb{Z})$ . Многообразия  $M_{1,A}^3$  and  $M_{1,B}^3$  диффеоморфны тогда и только тогда, когда существует матрица  $H \in GL(2, \mathbb{Z})$  такая, что выполняется одно из следующих условий:*

- $AH = HB$ ,
- $A^{-1}H = HB$ .

Приведенное ниже утверждение доказано в работе [17] (см. лемму 3).

**П р е д л о ж е н и е 2.3.** *Пусть собственные числа матрицы  $F \in GL(2, \mathbb{Z})$  являются корнями из единицы. Тогда  $F$  подобна (при помощи матрицы из  $GL(2, \mathbb{Z})$ ) одной из следующих матриц.*

$$B_{1,m} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_{2,m} = \begin{pmatrix} -1 & m \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B_5 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad B_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad m \in \{0, 1, 2, \dots\}.$$

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 1.2..

**Доказательство теоремы 1.2..** Докажем необходимость. Пусть  $f \in G^*(M_{1,\tau}^3)$ . В силу [9] каждая компонента связности  $T$  множества  $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$  гомеоморфна тору  $T^2$ . Так как множество  $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$   $f$ -инвариантно, то гомеоморфизм  $f$  индуцирует изоморфизм  $f_* : \pi_1(M_{1,\tau}^3) \rightarrow \pi_1(M_\tau^3)$  такой что  $f_*(N_\tau) = N_\tau$ . Тогда, в силу предложения 2.1., изоморфизм  $f_*$  единственным образом определяется матрицей  $F \in GL(2, \mathbb{Z})$ .

Не уменьшая общности предположим, что  $f(T) = T$  для любой компоненты множества  $\mathcal{A} \cup \mathcal{R}$  (в противном случае перейдем к рассмотрению некоторой степени диффеоморфизма  $f$ , при этом тип многообразия  $M_{1,\tau}^3$  не изменится). Обозначим через  $\varphi$  гомеоморфизм, являющийся ограничением диффеоморфизма  $f$  на множество  $T$ . Тогда матрица  $A_\varphi$  индуцированного изоморфизма  $\varphi_* : \pi_1(T) \rightarrow \pi_1(T)$  совпадает с матрицей  $F$ .

Напомним, что необходимым условием существования на многообразии  $M_{1,\tau}^3$  диффеоморфизма  $f \in G^*(M_{1,\tau}^3)$  является условие  $\varphi\tau = \tau\varphi$ , что влечет условие  $FA_\tau = A_\tau F$ .

Из работы [9] следует, что многообразие  $M_{1,\tau}^3$  гомеоморфно фактор-пространству многообразия  $T \times [0, 1]$  по отношению эквивалентности  $(z, 1) \sim (\tau(z), 0)$ . Пусть  $\check{H} : M_{1,\tau}^3 \rightarrow M_{1,\check{A}_\tau}^3$  — гомеоморфизм, построенный при доказательстве леммы 1.1.. Положим  $f' = \check{H}f\check{H}^{-1}$ ,  $\varphi' = f'|_{\check{H}(T)}$ . Тогда гомеоморфизм  $\varphi'$  удовлетворяет условию  $\varphi'\check{A}_\tau = \check{A}_\tau\varphi'$ .

Возможны два случая: 1) матрица  $A_\tau$  является гиперболической (то есть оба собственных числа  $\lambda_1, \lambda_2$  по модулю отличны от единицы) 2) матрица  $A_\tau$  — не гиперболическая.

Рассмотрим случай 1). В силу работы 20 гомеоморфизм  $\check{A}_\tau$  является аносовским, из формулы Лефшеца следует, что для любого  $l \in \mathbb{N}$  число неподвижных точек отображения  $J^l$  равно  $\lambda_1^l + \lambda_2^l - 2$  и стремится к бесконечности при  $l \rightarrow \infty$ . Тогда найдется такое  $l$ , что множество  $P_l$  неподвижных точек отображения  $\tau^l$  содержит больше точек, чем множество периодических точек гомеоморфизма  $\varphi'$ .

Из условия  $\varphi'\check{A}_\tau = \check{A}_\tau\varphi'$  следует, что  $\varphi'(P_l) = P_l$ . Но так как гомеоморфизм  $\varphi'$  топологически сопряжен с градиентно-подобным диффеоморфизмом, то множество его периодических точек является единственным его конечным инвариантным множеством. Полученное противоречие доказывает, что матрица  $A_\tau$  не может быть гиперболической.

Рассмотрим случай 2). Тогда матрица  $A_\tau$  подобна одной из матриц  $B_{1,m}, B_{2,m}, B_3, \dots, B_7$ , перечисленных в предложении 2.3.. В силу предложения 2.2. возможные топологические типы многообразия  $M_{1,\tau}^3$  исчерпываются случаями, когда матрица  $A_\tau$  в точности совпадает с одной из матриц  $B_{1,m}, B_{2,m}, B_3, \dots, B_7$ . Так как многообразие  $M_{1,\tau}^3$  предполагается ориентируемым, то матрица  $A_\tau$  имеет определитель, равный единице, что исключает сразу матрицы  $B_6, B_7$ . Для завершения доказательства осталось показать, что  $\varphi$  не может коммутировать с диффеоморфизмом  $\tau$  в случае, когда его матрица совпадает с матрицей  $B_{1,m}$  или  $B_{2,m}$  при  $m \geq 1$ . Предположим, что  $A_\tau = B_{1,m}$ ,  $m \geq 1$  (случай  $A_\tau = B_{2,m}$  рассматривается аналогично).

Обозначим через  $\mathcal{A}_\varphi$  объединение замыканий устойчивых многообразий седловых периодических орбит диффеоморфизма  $\varphi$ . Из определения и условия  $\varphi\tau = \tau\varphi$  следует, что  $\tau(A_\varphi) = A_\varphi$ . Совокупность устойчивых многообразий всех периодических орбит задает клеточное разбиение тора  $T$ , поэтому найдется замкнутая кривая  $\mu \in A_\varphi$ , гомотопический класс которой определяется как  $[\mu] = (0, 1)$ . Тогда  $[\tau^l(\mu)] = (lm, 1)$ . Так как  $A_f$  содержит конечное число замкнутых кривых, то найдется такое  $l > 0$ , что  $\tau^l(\mu)$  не будет принадлежать  $\mathcal{A}_\varphi$ , что противоречит условию  $\tau(A_\varphi) = A_\varphi$ .

Достаточность условия теоремы следует из работы [18] где для каждого из периодических отображений  $\check{B}_i$ ,  $i \in \{1, \dots, 5\}$ , указывается алгоритм построения диффеоморфизма Морса–Смейла  $\varphi_i : T^2 \rightarrow T^2$ , коммутирующего с этим отображением. Представители каждого класса топологической сопряженности диффеоморфизмов Морса–Смейла на окружности приведены, например, в работе [5]. Пусть  $\psi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$  — один из таких представителей. Тогда локальное произведение  $(\psi, \varphi_i)$  является диффеоморфизмом Морса–Смейла на  $M_{1, \check{B}_i}^3$ .

Доказательство закончено.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Smale S., “On Gradient Dynamical Systems”, *Annals of Math*, **1**:1 (1961), 199–206.
2. В. З. Гринес, О. В. Починка, “Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях”, *УМН*, **68**:409 (2013), 129–188.
3. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три.*, Ижевск:Институт компьютерных исследований, 2011.
4. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, “О включении диффеоморфизмов Морса–Смейла на 3-многообразии в топологический поток”, *Матем. сб.*, **203**:12 (2012), 81–104.
5. В. З. Гринес, Ю. А. Левченко, О. В. Починка, “О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами”, *Нелинейная динам.*, **10** (2014), 17–33.
6. Майер А.Г., “Грубое преобразование окружности в окружность”, *Уч. Зап. ГГУ*, 1939, 12, 215-229.
7. Безденежных А. Н., В. З. Гринес, “Диффеоморфизмы с ориентируемыми гетероклиническими множествами на двумерных многообразиях”, *Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. науч. тр. под ред. Н. Ф. Отрокова, Горький, ГГУ.*, 1985, 111 - 112.
8. Гринес В. З., “Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса–Смейла с конечным числом гетероклинических траекторий на поверхностях”, *Мат. заметки*, **54**:3 (1993), 3-17.
9. В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, Е. В. Жужома, С. Х. Зинина, “427–438”, *Нелинейная динам.*, **10**:4 (2014).
10. J. Nielsen, “Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen I”, *Acta Math.*, **50** (1927), 189-356.
11. W. Thurston, “On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces”, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, **19**:2 (1988), 417–431.
12. С. Х. Арансон, В. З. Гринес, “Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях”, *УМН*, **45**:1 (1990), 3–39.

13. D. Rolfsen, “Transactions of the American Mathematical Society”, **450**:1 (2003), 26-28.
14. Ghys E., Sergiescu V., “Stabilite et conjugaison differentiable pour certains feuilletages”, *Topology*, **19**:2 (1980), 179–197.
15. Гринес В. З., Капкаева С. Х., Почкина О. В., “Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей”, *Математический сборник*, **10**, 205 (2014), 19-46.
16. Shub M., “Morse-Smale diffeomorphisms are unipotent on homology”, *Dynamical systems (Proc. Sympos., Univ. Bahia, Salvador, 1971)*, Academic Press, New York, (1973).
17. Batterson S., “The Dynamics of Morse-Smale Diffeomorphisms on the Torus”, *Transactions of the American Mathematical Society*, **256** (1979), 395-403.
18. Гуревич Е. Я., Сяинова Д. Т., “Реализация изотопических классов градиентно-подобных диффеоморфизмов тора”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16** (2014), 46-56.
19. Plykin R.V., “On structure of the centralizers of Anosov diffeomorphisms of torus.”, *UMN*, **53**:6 (1998), 259–260.
20. J. Franks, “Anosov diffeomorphisms on tori”, *Transactions of the american mathematical society*, **145** (1969), 61–93.

## On topological classification of gradient-like diffeomorphisms that are locally products.

© E. Ya. Gurevich<sup>2</sup>,

**Abstract.** We define a class of gradient-like diffeomorphisms that can be presented as local products of diffeomorphisms on the circle and on a surface, provide their topological classification and specify topology of the ambient manifold.

**Key Words:** gradient-like diffeomorphism, topological classification, local product, mapping torus.

---

<sup>2</sup> Associate Professor of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, elena \_ gurevich@list.ru.

УДК 514.7

# Эквивалентные подходы к понятию полноты слоений с трансверсальной линейной связностью

© А. Ю. Долгоносова<sup>1</sup>, Н. И. Жукова<sup>2</sup>

**Аннотация.** Мы доказываем эквивалентность трех различных определений полноты слоения с трансверсальной линейной связности. Показано, что для трансверсально аффинных слоений  $(M, F)$  коразмерности  $q$ ,  $q \geq 1$ , каждое из упомянутых выше определений полноты эквивалентно выполнению следующих двух условий: 1) существует связность Эресмана для  $(M, F)$ ; 2) индуцированное слоение на универсальном накрывающем пространстве образовано слоями субмерсии на  $q$ -мерное аффинное пространство.

**Ключевые слова:** слоение, линейная связность, связность Эресмана, аффинное слоение

## 1. Введение

Вопрос об эквивалентности различных определений полноты трансверсально аффинных слоений затронут Р.А. Волаком [1]. Мы доказываем эквивалентность различных подходов к определению полноты для более широкого класса слоений — для слоений с трансверсальной линейной связностью. Полнота указанных слоений позволяет при их исследовании перейти от локальных свойств к глобальным.

Согласно известной теореме Хопфа — Ринова ([2]) для риманова многообразия понятие геодезической полноты эквивалентно полноте метрического пространства, метрика которого определяется с помощью функционала длины. Поэтому, в частности, любое компактное риманово многообразие является геодезически полным, что вообще говоря не верно для многообразий линейной связности. В отличие от римановых слоений на компактных многообразиях, слоения с трансверсальной линейной связностью на компактных многообразиях не всегда являются полными (пример 6.1.).

Пусть  $(M, F)$  — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом (см. определение 2.1.). Мы будем рассматривать общий случай, когда коразмерность слоения  $(M, F)$  равна  $q$ , а  $M$  —  $n$ -мерное многообразие,  $0 < q < n$ . Распределение  $\mathfrak{M}$  размерности  $q$  на  $M$  называется трансверсальным к слоению  $(M, F)$ , если для каждой точки  $x$  из  $M$  выполняется равенство  $T_x M = T_x F \oplus \mathfrak{M}_x$ , где  $\oplus$  — символ прямой суммы подпространств.

Обозначим через  $G = GL(q, \mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^q$  полуправильное произведение общей линейной группы  $GL(q, \mathbb{R})$  и векторной группы  $\mathbb{R}^q$ . Группу  $G$  можно интерпретировать как группу всех аффинных преобразований  $Aff(A^q)$   $q$ -мерного аффинного пространства  $A^q$ , а  $H = GL(q, \mathbb{R})$  как стационарную подгруппу аффинной группы  $Aff(A^q)$  в некоторой точке.

Как известно, любое слоение  $(M, F)$  с трансверсальной линейной связностью является картановым слоением типа  $(G, H)$  (см., например, [3]).

<sup>1</sup> Преподаватель кафедры общенаучных дисциплин, Нижегородский архитектурно-строительный университет, Нижний Новгород; annadolgonsova@gmail.com

<sup>2</sup> Профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород; nzhukova@hse.ru

**Определение 1.1.** Распределение на многообразии линейной связности называется геодезически инвариантным, если каждая геодезическая объемлющего пространства, касающаяся этого распределения в одной точке, касается его в каждой своей точке.

**Теорема 1.1.** Пусть  $(M, F)$  — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ . Тогда следующие три условия эквивалентны:

1. Слоение  $(M, F)$ , рассматриваемое как картаново, является полным.
2. Слоение  $(M, F)$  полное в смысле определения 3.2.;
3. На  $M$  существуют трансверсальное  $q$ -мерное распределение  $\mathfrak{M}$  и линейная связность  $\nabla$  такие, что:
  - 1) каждая субмерсия  $f_i$  является аффинным отображением;
  - 2) распределения  $\mathfrak{M}$  и  $Tf$  геодезически инвариантны;
  - 3) канонический параметр на каждой максимальной геодезической, касающейся распределения  $\mathfrak{M}$ , изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

Преимущество условия 3 в теореме 1.1. перед остальными двумя состоит в том, что оно определено на самом слоеном многообразии  $M$ , в то время как условия 1 и 2 определяются с помощью расслоения трансверсальных реперов над  $M$ .

Слоение  $(M, F)$  с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ , является трансверсально аффинным слоением тогда и только тогда, когда кривизна и кручение линейной связности  $\nabla^N$  равны нулю.

Применяя теорему 1.1. к трансверсально аффинным слоениям, мы доказываем следующее утверждение, где связность Эресмана для слоения понимается в смысле Р.А. Блюменталя и Дж. Хебды [4].

**Теорема 1.2.** Пусть  $(M, F)$  — трансверсально аффинное слоение произвольной коразмерности  $q$  на  $n$ -мерном многообразии. Тогда каждое из трех условий теоремы 1.1. эквивалентно выполнению следующих двух независимых условий:

- (i) существует связность Эресмана для слоения  $(M, F)$ ;
- (ii) индуцированное слоение на универсальном накрывающем многообразии  $\widetilde{M}$  образовано слоями субмерсии  $r : \widetilde{M} \rightarrow A^q$  на аффинное пространство  $A^q$ .

Независимость свойств (i) и (ii) в теореме 1.2. вытекает из примеров 6.1. и 6.2..

## Обозначения

Следуя [2], мы обозначаем через  $P(N, H)$  главное  $H$ -расслоение с проекцией  $P \rightarrow N$ .

Через  $\mathfrak{X}(M)$  обозначается множество гладких векторных полей на многообразии  $M$ . Если  $\mathfrak{M}$  — распределение на многообразии  $M$ , то через  $\mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(M)$  будем обозначать множество векторных полей на  $M$ , касательных к  $\mathfrak{M}$ .

Если  $f : K \rightarrow M$  — субмерсия многообразий и  $\mathfrak{M}$  — распределение на  $M$ , то через  $\widetilde{\mathfrak{M}} = f^*\mathfrak{M}$  обозначается распределение на  $K$  такое, что  $\widetilde{\mathfrak{M}} := \{\widetilde{\mathfrak{M}}_u < | u \in M\}$ , где  $\widetilde{\mathfrak{M}}_u := \{X \in T_u K | f_{*u}(X) \in \mathfrak{M}_x, x = f(u)\}$ ,  $f_{*u}$  — дифференциал отображения  $f$  в точке  $u$ .

## Благодарность

Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 138) в 2015 году.

## 2. Основные понятия

### 2.1. Задание слоения $N$ -коциклом

Пусть  $N$  —  $q$ -мерное многообразие и  $M$  — гладкое  $n$ -мерное ( $0 < q < n$ ) многообразие. В отличие от  $M$  связность топологического пространства  $N$  не предполагается.  $N$ -коциклом называется семейство  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ , обладающее свойствами:

- Множество  $\{U_i | i \in \mathcal{I}\}$  образует открытое покрытие  $M$ .
- Отображения  $f_i : U_i \rightarrow N$  являются субмерсиями на  $V_i = f_i(U_i) \subset N$  со связными слоями.
- Если  $U_i \cap U_j \neq \emptyset$ , то существует диффеоморфизм  $\gamma_{ij} : f_i(U_i \cap U_j) \rightarrow f_j(U_i \cap U_j)$ , удовлетворяющий равенству  $f_i = \gamma_{ij} \circ f_j$  для всех  $x \in U_i \cap U_j$ .

Семейство всех локальных слоев субмерсий  $f_i$  из максимального  $N$ -коцикла, содержащего данный  $N$ -коцикль  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ , образует базу новой топологии  $\zeta$  в  $M$ . Компоненты линейной связности  $L_a, a \in A$ , топологического пространства  $(M, \zeta)$  образуют разбиение  $F$  многообразия  $M$ , которое называется *слоением, заданным  $N$ -коциклом*  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ .

### 2.2. Определение слоения с трансверсальной линейной связностью

Задание связности в главном расслоении линейных реперов эквивалентно заданию оператора  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M) : (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$ , где  $\nabla_X Y$  — ковариантная производная векторного поля  $Y$  вдоль  $X$  [2]. Пара  $(M, \nabla)$  называется *многообразием линейной или аффинной связности*, а  $\nabla$  — линейной связностью на  $M$ .

Диффеоморфизм  $f : M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$  называется *изоморфизмом* многообразий линейной связности  $(M^{(1)}, \nabla^{(1)})$  и  $(M^{(2)}, \nabla^{(2)})$ , если

$$f_*(\nabla_X^{(1)} Y) = \nabla_{f_* X}^{(2)} f_* Y$$

для любых векторных полей  $X, Y \in \mathfrak{X}(M^{(1)})$ , где  $f_*$  — дифференциал отображения  $f$ .

**Определение 2.1.** Пусть слоение  $(M, F)$  задано  $N$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ . Если на многообразии  $N$  существует линейная связность  $\nabla$  такая, что каждый локальный диффеоморфизм  $\gamma_{ij}$  является изоморфизмом линейных связностей, индуцированных  $\nabla$  на открытых подмножествах  $f_i(U_i \cap U_j)$  и  $f_j(U_i \cap U_j)$ , то говорят, что  $(M, F)$  — слоение с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla)$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ .

**Определение 2.2.** Пусть  $A^q$  —  $q$ -мерное аффинное пространство и  $Aff(A^q)$  — группа Ли всех аффинных преобразований  $A^q$ . Слоение  $(M, F)$ , заданное  $A^q$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ , называется  $(Aff(A^q), A^q)$ -слоением или трансверсально аффинным слоением, если каждое преобразование  $\gamma_{ij}$  является сужением некоторого аффинного преобразования из аффинной группы  $Aff(A^q)$ .

Другими словами, трансверсально аффинное слоение — слоение, заданное  $(A^q, \nabla)$ -коциклом, где  $\nabla$  — полная плоская симметричная линейная связность на  $A^q$ .

### 2.3. Аффинные отображения

Пусть  $f : M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$  — произвольное гладкое отображение. Напомним, что векторные поля  $X$  из  $\mathfrak{X}(M^{(1)})$  и  $Y$  из  $\mathfrak{X}(M^{(2)})$  называются  $f$ -связными, если  $f_{*x}X = Y_{f(x)}$  для любого  $x \in M^{(1)}$ , где  $f_{*x}$  — дифференциал отображения  $f$  в  $x$ .

**Определение 2.3.** Пусть  $f : M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$  — гладкое отображение многообразий аффинной связности  $(M^{(1)}, \nabla^{(1)})$  и  $(M^{(2)}, \nabla^{(2)})$ . Тогда отображение  $f$  называется аффинным, если из того, что векторные поля  $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}(M^{(1)})$  и  $X_2, Y_2 \in \mathfrak{X}(M^{(2)})$   $f$ -связны, следует, что векторное поле  $\nabla_{X_1}^{(1)}Y_1$   $f$ -связно с векторным полем  $\nabla_{X_2}^{(2)}Y_2$ .

Нетрудно доказать следующую лемму.

**Лемма 2.1.** Пусть  $(M^{(i)}, \nabla^{(i)})$ ,  $i = 1, 2$ , — многообразия аффинной связности,  $f : M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$  — субмерсия и  $p^{(i)} : P^{(i)} \rightarrow M^{(i)}$  — расслоение реперов над  $M^{(i)}$ . Обозначим через  $Q^{(i)} = GL(m_i, \mathbb{R})$ -инвариантное распределение на  $P^{(i)}$ , соответствующее линейной связности  $\nabla^{(i)}$ . Тогда следующие два условия эквивалентны:

- субмерсия  $f : M^{(1)} \rightarrow M^{(2)}$  является аффинным отображением;
- для любой геодезической  $\gamma$  в  $M^{(1)}$  кривая  $f \circ \gamma$  является геодезической в  $M^{(2)}$ .

## 3. Расслоение трансверсальных реперов

Пусть  $(M, F)$  — слоение коразмерности  $q$  с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом  $\{U_i, f_i, \{\gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$ . При этом многообразие  $N$ , возможно, не связано.

Положим для краткости  $H = GL(q, \mathbb{R})$ , пусть  $\mathfrak{h}$  — алгебра Ли группы Ли  $H$ . Обозначим через  $p : P \rightarrow N$  проекцию расслоения реперов над  $N$ , тогда  $P = P(N, H)$  — главное  $H$ -расслоение. Пусть  $V_i := f_i(U_i)$  и  $P_i := p^{-1}(V_i)$  — подрасслоение  $H$ -расслоения  $P$ . Пусть  $\mathcal{R}_i := f_i^*P_i = \{(x, z) \in U_i \times P_i \mid f_i(x) = p(z)\}$  — прообраз расслоения  $P_i$  относительно субмерсии  $f_i$ . Определены проекции  $\widehat{p}_i : \mathcal{R}_i \rightarrow U_i : (x, z) \mapsto x$  и  $\widehat{f}_i : \mathcal{R}_i \rightarrow P_i : (x, z) \mapsto z$ , где  $(x, z) \in \mathcal{R}_i$ .

Предположим, что на многообразии  $M$  задано  $q$ -мерное распределение  $\mathfrak{M}$ , трансверсальное слоению  $F$ . Отождествим векторное фактор-расслоение  $TM/TF$  с распределением  $\mathfrak{M}$ .

Будем рассматривать точку  $(x, z) \in \mathcal{R}_i$  как такой базис  $\{e_\alpha\}$  пространства  $\mathfrak{M}_x$ , что  $f_{*x}e_\alpha = \epsilon_\alpha$ , где  $\alpha = 1, \dots, q$ ,  $\{\epsilon_\alpha\} = z$  — репер в точке  $v = f_i(x) \in N$ . Назовем пару  $(x, z)$   $\mathfrak{M}$ -репером в точке  $x$ .

В несвязной сумме  $Y = \sqcup_{i \in J} \mathcal{R}_i$  введем следующим образом бинарное отношение  $S$ . Пусть  $(x, z) \in \mathcal{R}_i$ ,  $(\tilde{x}, \tilde{z}) \in \mathcal{R}_j$ . Положим  $(x, z)S(\tilde{x}, \tilde{z})$ , если выполняются следующие два условия:

- (i)  $x = \tilde{x} \in U_i \cap U_j$ ;
- (ii)  $\tilde{z} = \gamma_{ji*x} \circ z$ , где  $\gamma_{ji*x}$  — дифференциал локального диффеоморфизма  $\gamma_{ji}$  точке  $x$ .

Непосредственная проверка показывает, что введенное отношение  $S$  является отношением эквивалентности. Пусть  $\mathcal{R} = Y/S$  — фактор-пространство, а  $f : Y \rightarrow \mathcal{R}$  — фактор-отображение. Заметим, что для любого  $i \in \mathcal{I}$  сужение  $f|_{\mathcal{R}_i} : \mathcal{R}_i \rightarrow \widetilde{U}_i := f(\mathcal{R}_i)$  — биекция. Требованием, чтобы все сужения  $f|_{\mathcal{R}_i}$  были диффеоморфизмами, мы определим структуру гладкого многообразия в  $\mathcal{R}$ .

Введем обозначения:  $\tilde{f}_i := \widehat{f}_i \circ (f|_{\mathcal{R}_i})^{-1} : \widetilde{U}_i \rightarrow P_i$  и  $\Gamma_{ij} : \widetilde{f}_j(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j) \rightarrow \widetilde{f}_i(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j) : z \mapsto \gamma_{ij \ast x} \circ z$ , где  $z \in \widetilde{f}_j(\widetilde{U}_i \cap \widetilde{U}_j)$ . Тогда  $\{\widetilde{U}_i, \widetilde{f}_i, \{\Gamma_{ij}\}\}_{i,j \in \mathcal{I}}$  есть  $P$ -коцикль, определяющий некоторое слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  той же размерности, что и слоение  $(M, F)$ .

Для любой точки  $u \in \mathcal{R}$  существует такая точка  $(x, z) \in \mathcal{R}_i$ , что  $u = f((x, z))$ . Равенство  $\pi(u) = x$  определяет субмерсию  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$ . Соотношение  $u \cdot a := f((x, z \cdot a))$ , где  $a \in H$  задает правое свободное действие группы  $H$  на  $\mathcal{R}$ . Таким образом, задано главное  $H$ -расслоение  $\mathcal{R}(M, H)$  с проекцией  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$ . Из определения слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  вытекает его  $H$ -инвариантность и то, что слои  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  посредством  $\pi$  накрывают соответствующие слои слоения  $(M, F)$ . При этом распределение  $\widetilde{\mathfrak{M}} := \pi^* \mathfrak{M}$  трансверсально слоению  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ .

Связность  $\nabla^N$  на  $N$  определяет связность  $Q_0$  в  $H$ -расслоении  $P(N, H)$ . Пусть  $\omega_0$  —  $\mathfrak{h}$ -значная 1-форма, а  $\theta$  — каноническая 1-форма связности  $Q_0$  на  $P$ . Равенства  $\widetilde{\omega}|_{\widetilde{U}_i} := \widetilde{f}_i^* \omega_0$  и  $\widetilde{\theta}|_{\widetilde{U}_i} := \widetilde{f}_i^* \theta$ , где  $i \in \mathcal{I}$ , определяют  $\mathfrak{h}$ -значную 1-форму  $\widetilde{\omega}$  и  $\mathbb{R}^p$ -значную 1-форму  $\widetilde{\theta}$  на многообразии  $\mathcal{R}$ .  $H$ -эквивариантность 1-форм  $\omega_0$  и  $\theta$  на  $P$  влечет  $H$ -эквивариантность 1-форм  $\widetilde{\omega}$  и  $\widetilde{\theta}$  на  $\mathcal{R}$ .

Пусть, как и выше,  $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$  — полупрямое произведение группы  $H$  и абелевой группы  $\mathbb{R}^q$ , а  $\mathfrak{g}$  — алгебра Ли группы Ли  $G$ . Равенство  $\omega(X) := \omega_0(X) + \theta(X)$ , где  $X \in \mathfrak{X}(\mathcal{R})$ , определяет  $\mathfrak{g}$ -значную  $H$ -инвариантную 1-форму  $\omega$  на  $\mathcal{R}$ . Следовательно,  $Q := \ker \omega$  — связность в  $H$ -расслоении  $\mathcal{R}(M, H)$ .

Из определения  $\widetilde{\omega}_0$  и  $\widetilde{\theta}$  следует, что эти 1-формы проектируемы относительно слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ . Поэтому  $\omega$  — также проектируемая 1-форма, то есть  $L_X \omega = 0$  для любого векторного поля  $X \in \mathfrak{X}_{TF}(\mathcal{R})$ .

Зафиксируем базис  $E_\alpha$  алгебры Ли  $\mathfrak{g}$  группы Ли  $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$ . Тогда в любой точке  $u \in \mathcal{R}$  определен трансверсальный репер  $X_\alpha := (\omega|_{\widetilde{\mathfrak{M}}_u})^{-1}(E_\alpha)$ . Следовательно, определено такое гладкое векторное поле  $X \in \mathfrak{X}_{\widetilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$ , что  $\omega(X_\alpha) = E_\alpha$ . Векторные поля  $X_\alpha$  определяют трансверсальную параллелизацию слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ , поэтому  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  является трансверсально параллелизуемым или  $e$ -слоением.

Таким образом, имеет место следующее утверждение.

**П р е д л о ж е н и е 3.1.** Пусть  $(M, F)$  — слоение произвольной коразмерности  $q$  с трансверсальной линейной связностью, заданное  $(N, \nabla^N)$ -коциклом. Пусть  $H = GL(q, \mathbb{R})$ ,  $G = H \ltimes \mathbb{R}^q$ , а  $\mathfrak{h}$ ,  $\mathfrak{g}$  — алгебры Ли групп Ли  $H$  и  $G$ , соответственно. Тогда определены:

- 1) главное  $H$ -расслоение  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$ ;
- 2)  $H$ -инвариантное  $e$ -слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$ , слои которого посредством  $\pi$  накрывают соответствующие слои слоения  $(M, F)$ ;
- 3)  $\mathfrak{g}$ -значная 1-форма  $\omega$  на  $\mathcal{R}$ , обладающая следующими свойствами:
  - (i)  $\omega(A^*) = A$  для любого  $A \in \mathfrak{h}$ , где  $A^*$  — фундаментальное векторное поле, соответствующее элементу  $A$ ;
  - (ii) равенство  $R_a^* \omega = Ad_G(a^{-1})\omega$  выполняется для каждого  $a \in H$ , где  $Ad_G$  — присоединенное представление группы Ли  $G$  в ее алгебре Ли  $\mathfrak{g}$ ;
  - (iii) производная Ли  $L_X \omega$  равна нулю для любого векторного поля  $X \in \mathfrak{X}_{TF}(\mathcal{R})$ ;
  - (iv) распределение  $Q := \ker \omega$  — связность в  $H$ -расслоении  $\mathcal{R}(M, H)$ .

**Определение 3.1.** Главное  $H$ -расслоение  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$ , удовлетворяющее предложению 3.1., называется расслоением трансверсальных реперов [5]. При этом е-слоение  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  называется поднятым слоением.

Сохраним введенные выше обозначения.

Заметим, что слоение  $(M, F)$  с трансверсальной линейной связностью является картановым слоением с трансверсальной картановой геометрией  $\xi = (P(N, H), \beta)$ , где  $\beta = \omega_0 + \theta - \mathfrak{g}$ -значная 1-форма на многообразии  $P$  [3].

Напомним, что картаново слоение  $(M, F)$  называется *полным*, если существует такое трансверсальное ему распределение  $\mathfrak{M}$ , что любое векторное поле  $X \in \mathfrak{X}_{\tilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$ ,  $\tilde{\mathfrak{M}} := \pi^*\mathfrak{M}$ , для которого  $\omega(X) = \text{const}$ , является полным [3].

Дадим еще одно определение полноты слоения  $(M, F)$ .

**Определение 3.2.** Слоение  $(M, F)$  называется *полным*, если существует такое трансверсальное ему распределение  $\mathfrak{M}$ , что любое векторное поле  $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(\mathcal{R})$ ,  $\mathfrak{N} := \tilde{\mathfrak{M}} \cap Q$ , для которого  $\tilde{\theta}(X) = \text{const}$ , является полным.

#### 4. Доказательство теоремы 1.1.

**Доказательство.** Импликация  $1 \Rightarrow 2$  выполняется очевидным образом.

Обратное, предположим, что  $(M, F)$  — слоение с трансверсальной линейной связностью, полное в смысле определения 3.2. Это означает, что существуют трансверсальное  $q$ -мерное распределение  $\mathfrak{M}$  и  $H$ -связность  $Q$  в расслоении  $\mathcal{R}(M, H)$  такие, что для распределения  $\mathfrak{N} = \tilde{\mathfrak{M}} \cap Q$ ,  $\tilde{\mathfrak{M}} := \pi^*\mathfrak{M}$ , любое векторное поле  $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{N}}(\mathcal{R})$ , для которого  $\tilde{\theta}(X) = \text{const}$ , является полным.

Покажем полноту произвольного векторного поля  $Y \in \mathfrak{X}_{\tilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$ , для которого  $\omega(Y) = c = \text{const}$ . Пусть  $c = c_1 + c_2$ ,  $c_1 \in \mathfrak{h}$ ,  $c_2 \in V$ . Возьмем любую точку  $u \in \mathcal{R}$ , пусть  $\pi(u) = x \in M$ . По определению,  $\omega(Y) = \tilde{\omega}(Y) + \tilde{\theta}(Y)$ , где  $\tilde{\omega}(Y) = c_1$ ,  $\tilde{\theta}(Y) = c_2$ . Обозначим через  $X$  и  $Z$  векторные поля из  $\mathfrak{X}_{\tilde{\mathfrak{M}}}(\mathcal{R})$  такие, что  $\omega(X) = c_1$ ,  $\omega(Z) = c_2$ . Пусть  $\varphi(s)$ ,  $\psi(s)$  и  $\mu(s)$  — интегральные кривые векторных полей  $Y$ ,  $X$  и  $Z$ , соответственно, проходящие при  $s = 0$  через  $u$ . Предположим, что кривая  $\varphi(s)$  определена на отрезке  $[a, b]$ , где  $a < 0$ ,  $b > 0$ . В силу полноты векторных полей  $X$  и  $Z$  интегральные кривые  $\psi(s)$  и  $\mu(s)$  определены на любом отрезке  $[0, d]$ ,  $d > 0$ .

Заметим, что  $Q$  — связность Эресмана для субмерсии  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$ . Поэтому, согласно ([4], предложение 1.3),  $Q$  — связность Эресмана для слоения, образованного компонентами связности слоев этой субмерсии. Следовательно, для допустимой пары путей  $(\psi, \mu)$ , заданных на отрезке  $[0, d]$ , существует единственная вертикально-горизонтальная гомотопия  $\Phi$  с базой  $(\psi, \mu)$ . Нетрудно видеть, что кривая  $\Phi(s, s)$ ,  $s \in [0, d]$ , удовлетворяет равенству  $\omega(\frac{d}{ds}(\Phi(s, s))) = c$  и, следовательно, является интегральной кривой векторного поля  $Y$ , проходящей через  $u$  при  $s = 0$ . Поэтому  $\Phi(s, s)$  является продолжением интегральной кривой  $\varphi|_{[0, b]}$  на сколь угодно большой отрезок  $[0, d]$ . Аналогичные рассуждения показывают, что кривая  $\varphi$  может быть неограниченно продолжена и в другом направлении.

Таким образом, любая максимальная интегральная кривая векторного поля  $Y$  определена на всей числовой прямой, что означает полноту  $Y$ . Следовательно,  $2 \Rightarrow 1$ .

Покажем, что  $2 \Rightarrow 3$ . Зафиксируем трансверсальное  $q$ -мерное распределение  $\mathfrak{M}$ . Пусть  $\mathcal{R}(M, H)$  — слоенное расслоение  $\mathfrak{M}$ -реперов над  $(M, F)$  с проекцией  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$ . Рассмотрим открытое покрытие  $\{V_\alpha\}$  многообразия  $M$  с множеством функций перехода  $\psi_{\beta\alpha} : V_\alpha \cap V_\beta \rightarrow GL(q, \mathbb{R})$  ([2], Часть 1, §5). Рассмотрим вложение  $j : GL(q, \mathbb{R}) \rightarrow$

$GL(n, \mathbb{R}) : A \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & I_{n-q} \end{pmatrix}$ , где  $A \in GL(q, \mathbb{R})$  и  $I_{n-q}$  — единичная  $(n-q)$ -мерная матрица, группы Ли  $GL(q, \mathbb{R})$  в группу Ли  $GL(n, \mathbb{R})$ . Тогда существуют отображения

$$\varphi_{\beta\alpha} := j \circ \psi_{\beta\alpha} : V_\alpha \cap V_\beta \rightarrow Gl(n, \mathbb{R}),$$

удовлетворяющие условиям

$$\varphi_{\gamma\alpha}(x) = \varphi_{\gamma\beta}(x) \cdot \varphi_{\beta\alpha}(x), \quad x \in V_\alpha \cap V_\beta \cap V_\gamma,$$

где символ  $\cdot$  обозначает произведение элементов в группе  $GL(n, \mathbb{R})$ . Согласно ([2], Часть 1, Предложение 5.2), существует главное  $GL(n, \mathbb{R})$ -расслоение  $\widehat{\pi} : \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow M$  с функциями перехода  $\varphi_{\beta\alpha}$ . Отождествим  $GL(q, \mathbb{R})$  с замкнутой подгруппой  $j(GL(q, \mathbb{R}))$  группы Ли  $GL(n, \mathbb{R})$ , тогда  $\mathcal{R} \subset \widehat{\mathcal{R}}$ , более того  $\widehat{\pi}|_{\mathcal{R}} = \pi$ . Таким образом, будем рассматривать  $\mathcal{R}$  как редуцированное подрасслоение  $GL(n, \mathbb{R})$ -расслоения  $\widehat{\mathcal{R}}(M, GL(n, \mathbb{R}))$ .

Согласно предложению 3.1.  $Q = \ker \omega$  —  $H$ -связность на  $\mathcal{R}$ . Кроме того,

$$\tilde{f}_{i*} Q_u = Q_0|_{f_i(u)} \quad \forall u \in \tilde{U}_i \subset \mathcal{R} \quad \forall i \in \mathcal{I}. \quad (4.1)$$

Продолжим связность  $Q$  до  $GL(n, \mathbb{R})$ -связности  $\widehat{Q}$  на  $\widehat{\mathcal{R}}$ , положив  $\widehat{Q}_{u \cdot a} := R_{a*} Q_u$  для любых  $u \in \mathcal{R}$ ,  $a \in GL(n, \mathbb{R})$ . Связность  $\widehat{Q}$  определяет некоторую линейную связность  $\nabla$  на многообразии  $M$ . Так как  $T\mathcal{F} \subset Q$ , то распределение  $TF$  геодезически инвариантно относительно связности  $\nabla$  на  $M$ . Покажем, что  $\mathfrak{M}$  также геодезически инвариантное распределение на  $(M, \nabla)$ .

Свойство распределения  $\mathfrak{M}$  быть геодезически инвариантным — локальное, поэтому достаточно доказать его выполнение в окрестности точки  $x \in M$ . Пусть  $x \in U$ , где  $f : U \rightarrow V$  — субмерсия из  $(N, \nabla^N)$ -коцикла, определяющая слоение  $(M, F)$ . Рассмотрим произвольный вектор  $\lambda \in \mathfrak{M}_x$ , пусть  $f_{*x}(\lambda) = \mu$ , тогда  $\mu \in T_y N$ , где  $y = f(x)$ . Существует геодезическая  $\sigma = \sigma(s)$ ,  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , связности  $(N, \nabla^N)$ , удовлетворяющая условиям  $\sigma(0) = y$ ,  $\dot{\sigma}(0) = \mu$ . Благодаря теореме о существовании и единственности решения дифференциального уравнения, существует такое число  $\delta$ ,  $0 < \delta \leq \varepsilon$ , и локально  $\mathfrak{M}$ -лифт  $\gamma = \gamma(s)$ ,  $s \in (-\delta, \delta)$ , линии  $\sigma$  в точку  $x$ . Это значит, что  $\gamma$  — такая интегральная кривая распределения  $\mathfrak{M}$ , что  $\gamma(0) = x$  и  $f \circ \gamma = \sigma|_{(-\delta, \delta)}$ . Так как  $f_{*x} : \mathfrak{M}_x \rightarrow T_y N$  — изоморфизм векторных пространств, то  $\dot{\gamma}(0) = \lambda$ . Покажем, что  $\gamma$  геодезическая на  $(M, \nabla)$ . Пусть  $\widehat{\omega}$  — форма связности и  $\widehat{\theta}$  — каноническая  $\mathbb{R}^n$ -значная 1-форма на  $\widehat{\mathcal{R}}$ , соответствующие  $\widehat{Q}$  и связности  $\nabla$ . Напомним, что  $B_\xi \in \mathfrak{X}(\widehat{\mathcal{R}})$  называется *стандартным горизонтальным векторным полем*, если  $\widehat{\omega}(B_\xi) = 0$  и  $\widehat{\theta}(B_\xi) = \xi = \text{const} \in \mathbb{R}^n$ . Как известно ([2], Глава III, предложение 6.3),  $\gamma$  — геодезическая в  $(M, \nabla)$  тогда и только тогда, когда  $\gamma$  — проекция интегральной кривой некоторого стандартного горизонтального векторного поля. Так как  $\sigma$  — геодезическая и  $\sigma(0) = y$ , то для  $v \in p^{-1}(y)$  существует  $Q_0$ -горизонтальный лифт  $\sigma_0 = \sigma_0(s)$ ,  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , кривой  $\sigma$  в точку  $v$ , более того  $\theta_0(\dot{\sigma}_0(s)) = \xi = \text{const} \in \mathbb{R}^q$ .

Пусть  $\tilde{f} : \tilde{U} = \pi^{-1}(U) \rightarrow P$  — субмерсия, определенная субмерсией  $f$  и удовлетворяющая равенству  $p \circ \tilde{f} = f \circ \pi$ . Возьмем  $u \in \tilde{f}^{-1}(v) \cap \pi^{-1}(x) \subset \mathcal{R}$ . Пусть  $\widehat{\gamma} = \widehat{\gamma}(s)$ ,  $s \in (-\delta, \delta)$ , —  $\widehat{Q}$ -горизонтальный лифт кривой  $\gamma$  в точку  $u$ . Тогда равенство  $\pi \circ \widehat{\gamma} = \gamma$  влечет за собой тот факт, что  $\widehat{\gamma}$  интегральная кривая распределения  $\widehat{\mathfrak{M}} := \widehat{\mathfrak{M}} \cap \widehat{Q}$ , где  $\widehat{\mathfrak{M}} := \widehat{\pi}^* \mathfrak{M}$ . Так как  $\widehat{\theta}|_{\mathcal{R}} = \widehat{j} \circ \widehat{\theta}$ , где  $\widehat{j} : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n : \xi \mapsto (\xi, 0_{n-q})$  и  $0_{n-q}$  — ноль в  $\mathbb{R}^{n-q}$ , тогда (4.1) влечет равенство

$$\widehat{\theta}(\dot{\widehat{\gamma}}(s)) = \widehat{j} \circ \widehat{\theta}(\dot{\widehat{\gamma}}(s)) = \widehat{j} \circ \theta_0(\tilde{f}_* \dot{\widehat{\gamma}}(s)) = \widehat{j} \circ \theta_0(\dot{\sigma}_0(s)) \quad \forall s \in (-\delta, \delta), \quad (4.2)$$

откуда  $\widehat{\theta}(\dot{\gamma}(s)) = (\xi, 0_{n-q}) = \eta \in \mathbb{R}^n$ , если  $\theta_0(\dot{\sigma}_0(s)) = \xi \in \mathbb{R}^q \forall s \in (-\delta, \delta)$ . Поэтому,  $\widehat{\gamma}(s)$ ,  $s \in (-\delta, \delta)$ , интегральная кривая горизонтального векторного поля  $B_\eta$  на  $\widehat{\mathcal{R}}$ . Это значит, что  $\gamma(s) = \pi(\widehat{\gamma}(s))$  геодезическая на  $(M, \nabla)$ .

Таким образом, распределение  $\mathfrak{M}$ , как и  $TM$ , геодезически инвариантно на  $(M, \nabla)$ . Более того,  $\mathfrak{M}$ -лифт геодезической линии  $\sigma$  из  $V$  в точку  $x = f^{-1}(\sigma(0))$  в  $U$  есть геодезическая на  $(M, \nabla)$ .

Заметим, что соотношение (4.2) выполняется для каждой геодезической  $\gamma$  в  $U$  и ее проекции  $\sigma = f \circ \gamma$ . Поэтому из соотношения (4.2) получаем, что каждая геодезическая  $\gamma$  на  $(M, \nabla)$  в  $U$  отображается в геодезическую  $f \circ \gamma$  на  $(N, \nabla^N)$ . Согласно лемме 2.1. это значит, что  $f$  — аффинное отображение.

Пусть  $\gamma$  — любая максимальная геодезическая многообразия аффинной связности  $(M, \nabla)$ ,  $\gamma(0) = x$  и  $\dot{\gamma}(0) \in \mathfrak{M}_z$ . Так как  $\mathfrak{M}$  — геодезически инвариантно, то  $\dot{\gamma}(s) \in \mathfrak{M}_{\gamma(x)} \forall s$ . Обозначим через  $\widehat{\gamma}(s)$  горизонтальный лифт  $\gamma$  в точку  $u = \widehat{\gamma}(0) \in \mathcal{R}$ .

Благодаря (4.2)  $\widetilde{\theta}(\dot{\gamma}(s)) = \widehat{\theta}(\dot{\gamma}(s)) = (\xi, 0_{n-q}) = \eta = const$ .

Поэтому, согласно определению 3.2., канонический параметр на  $\gamma(s)$  изменяется на всей числовой прямой. Таким образом, выполняется условие 3 теоремы 1.1., то есть  $2 \Rightarrow 3$ .

Обратно, покажем, что  $3 \Rightarrow 2$ . Сохраним введенные выше обозначения. Пусть  $\mathfrak{M}$  фиксировано. Тогда, согласно предложению 3.1., определено расслоение трансверсальных реперов с проекцией  $\pi : \mathcal{R} \rightarrow M$  и указанным выше способом определено расслоение  $GL(n, \mathbb{R})$ -реперов с проекцией  $\widehat{\pi} : \widehat{\mathcal{R}} \rightarrow M$ , причем расслоение  $\mathcal{R}$  вложено в  $\widehat{\mathcal{R}}$  как редукция к замкнутой подгруппе  $GL(q, \mathbb{R}) \times I_{n-q}$ .

Обозначим через  $\nabla$  линейную связность на  $M$ , определенную выше, а через  $\nabla^{(1)}$  — линейную связность, удовлетворяющую условиям 1), 2), 3) теоремы 1.1. Пусть  $\widehat{Q}^{(1)}$  — горизонтальное распределение на  $\widehat{\mathcal{R}}$ , соответствующее линейной связности  $\nabla^{(1)}$ , а  $Q^{(1)}$  — ограничение  $\widehat{Q}^{(1)}$  на  $\mathcal{R}$  и  $\mathfrak{N}^{(1)} := Q^{(1)} \cap \widetilde{\mathfrak{M}}$ .

Так как распределение  $TF$  геодезически инвариантно относительно  $\nabla$  и  $\nabla^{(1)}$ , то для поднятого слоения  $(\mathcal{R}, \mathcal{F})$  выполняются включения  $T\mathcal{F} \subset Q^{(1)}$  и  $TF \subset Q$  на  $\mathcal{R}$ . Кроме того, каждая субмерсия  $f_i : U_i \rightarrow V_i$  является аффинным отображением относительно обеих связностей  $\nabla$  и  $\nabla^{(1)}$ , поэтому  $Q^{(1)} = Q$  на  $\mathcal{R}$ . Следовательно, геодезическая полнота распределения  $\mathfrak{M}$  относительно связности  $\nabla^{(1)}$  влечет полноту в смысле определения 1.1.

Доказательство заканчено.

## 5. Доказательство теоремы 1.2.

Доказательство. Так как выполнены условия теоремы 1.1., то  $(M, F)$  — полное картаново слоение. Отсюда следует, согласно ([3], предложение 3), что существует связность Эресмана для слоения  $(M, F)$ , то есть выполняется условие (i).

Таким образом,  $(M, F)$  —  $(Aff(A^q), A^q)$ -слоение со связностью Эресмана. Пусть  $\kappa : \widetilde{M} \rightarrow M$  — универсальное накрывающее отображение и  $\widetilde{F} = \kappa^*F$  — индуцированное слоение. Тогда, согласно ([6], теорема 2), существует субмерсия  $r : \widetilde{M} \rightarrow B$  на  $q$ -мерное аффинное многообразие  $B$  такая, что слоение  $\widetilde{F}$  образовано слоями этой субмерсии.

Нетрудно проверить, что распределение  $\mathfrak{M}^* = \kappa^*\mathfrak{M}$  — связность Эресмана для слоения  $(\widetilde{M}, \widetilde{F})$ . При этом,  $\mathfrak{M}^*$  — связность Эресмана для субмерсии  $r$ . Следовательно,  $r : \widetilde{M} \rightarrow B$  — локально-тривиальное расслоение. Из точной гомотопической последовательности этого расслоения в силу односвязности  $\widetilde{M}$  и связности слоев слоения вытекает односвязность аффинного многообразия  $B$ . Из выполнения условия 3 теоремы 1.1. вытекает существование такой линейной связности  $\nabla$  на  $M$ , относительно которой каждая

субмерсия  $f_i$  из  $(N, \nabla^N)$ -коцикла, задающего слоение  $(M, F)$ , является аффинной субмерсией. Обозначим через  $\tilde{\nabla}$  индуцированную посредством  $\kappa$  линейную связность на  $\tilde{M}$ . При этом субмерсия  $r : \tilde{M} \rightarrow B$  становится аффинным отображением  $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$  на аффинное многообразие  $B$ , а  $\mathfrak{M}^*$  — геодезически инвариантным распределением.

Покажем, что  $B$  — геодезически полное аффинное многообразие. Пусть  $\gamma = \gamma(s)$  — произвольная максимальная геодезическая в  $B$ , определенная на интервале, содержащем ноль,  $b = \gamma(0)$  и  $X = \dot{\gamma}(0)$ . Возьмем вектор  $Y \in \mathfrak{M}_y^*$  такой, что  $r_{*y}Y = X$ . Обозначим через  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}(s)$  геодезическую в  $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$ , проходящую через точку  $y = \tilde{\gamma}(0)$  в направлении вектора  $Y$ . Поскольку  $\mathfrak{M}^*$  — геодезически инвариантное распределение, то  $\tilde{\gamma}$  — интегральная кривая распределения  $\mathfrak{M}^*$ . Согласно лемме 2.1.  $r \circ \tilde{\gamma}$  — геодезическая в аффинном многообразии  $B$ . Она проходит через точку  $b$  в направлении вектора  $X$ . Следовательно,  $\gamma = r \circ \tilde{\gamma}$  и  $\tilde{\gamma}$  —  $\mathfrak{M}^*$ -лифт кривой  $\gamma$  в точку  $y$ .

Накрывающее отображение  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$  — локальный изоморфизм многообразий линейной связности, поэтому кривая  $\sigma := \kappa \circ \tilde{\gamma}$  — максимальная  $\mathfrak{M}$ -геодезическая в  $(M, \nabla)$  с началом в точке  $\kappa(y) = \tilde{\gamma}(0)$ . Согласно пункту 3) теоремы 1.1. канонический параметр  $s$  на геодезической  $\sigma = \sigma(s)$  изменяется на всей числовой прямой. Отсюда вытекает, что канонический параметр на геодезических  $\tilde{\gamma}$  и  $\gamma$  также изменяется на всей числовой прямой. Таким образом,  $B$  — односвязное полное аффинное многообразие. Следовательно,  $B = A^q$  и выполняется условие (ii).

Обратно, пусть выполнены условия (i) и (ii) теоремы 1.1. для  $(M, F)$ . Тогда существует связность Эресмана  $\mathfrak{M}$  для слоения  $(M, F)$ . Рассмотрим универсальное накрывающее отображение  $\kappa : \tilde{M} \rightarrow M$ . Нетрудно проверить, что  $\mathfrak{M}^* = \kappa^*\mathfrak{M}$  — связность Эресмана для индуцированного слоения  $F = \kappa^*F$ . Согласно (ii) слоение  $(\tilde{M}, \tilde{F})$  образовано слоями субмерсии  $r : \tilde{M} \rightarrow A^q$ .

Пусть  $\tilde{\pi} : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow \tilde{M}$  — расслоение трансверсальных реперов для слоения  $(\tilde{M}, \tilde{F})$ ,  $(\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{F}})$  — поднятое слоение и  $\omega'$  — 1-форма индуцированной картановой связности на  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Заметим, что слоение  $(\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{F}})$  образовано слоями субмерсии  $\tilde{r} : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow G$ , где  $G = Aff(A^q)$ , при этом выполняется равенство  $r \circ \tilde{\pi} = f \circ \tilde{r}$ , где  $f : G \rightarrow G/H = A^q$  — каноническая проекция. Пусть  $\mathfrak{M}' := \tilde{\pi}^*\mathfrak{M}^*$  — индуцированное распределение на  $\tilde{\mathcal{R}}$ . Тогда  $\mathfrak{M}'$  — связность Эресмана для слоения  $(\tilde{\mathcal{R}}, \tilde{\mathcal{F}})$ . Как известно, в этом случае  $\mathfrak{M}'$  — связность Эресмана для субмерсии  $\tilde{r} : \tilde{\mathcal{R}} \rightarrow G$ . 1-форма Маэра-Картана  $\omega^0$  на  $G$  является формой картановой связности в  $H$ -расслоении  $f : G \rightarrow G/H$ , причем эта связность полная. Любое векторное поле  $X \in \mathfrak{X}_{\mathfrak{M}}(\tilde{\mathcal{R}})$ , удовлетворяющее условию  $\omega'(X) = const$ , проектируется в  $Y \in \mathfrak{X}(G)$ , для которого  $\omega^0(Y) = const$ . В силу полноты поля  $Y$  векторное поле  $X$  является полным. Отсюда следует полнота слоений  $(\tilde{M}, \tilde{F})$  и  $(M, F)$ , рассматриваемых как картановы слоения. Таким образом, 3  $\Rightarrow$  1.

Доказательство закончено.

## 6. Примеры

**Пример 6.1.** Пусть  $B = A^q \setminus \{0\}$ ,  $q \geq 3$ , — аффинное подпространство в  $A^q$ . Обозначим через  $\Phi$  группу гомотетий  $B$  с образующей  $\varphi$ , гомотетией  $B$  с коэффициентом  $\lambda > 1$ . Тогда фактор-многообразие  $Horf_\lambda^q := B/\Phi$ , называемое многообразием Хопфа, диффеоморфно произведению многообразий  $S^{q-1} \times S^1$ , а фактор-отображение  $\kappa : B \rightarrow Horf_\lambda^q$  — аффинное универсальное накрывающее отображение на неполное аффинное многообразие  $Horf_\lambda^q$ . Трансверсально аффинное слоение  $F = \{S^1 \times \{z\} \mid z \in Horf_\lambda^q\}$  произведения  $S^1 \times Horf_\lambda^q$  является неполным трансверсально аффинным слоением на ком-

пактном многообразии  $M = S^1 \times \text{Hopf}_\lambda^q$ . Слоение  $(M, F)$  имеет интегрируемую связностью Эресмана  $\mathfrak{M} = TF^t$ , где  $F^t = \{\tau\} \times B \mid \tau \in S^1\}$  – трансверсальное слоение.

Индуктированное слоение на универсальном накрывающем многообразии  $\mathbb{R}^1 \times B$  для  $M$  образовано слоями субмерсии  $\mathbb{R}^1 \times B \rightarrow B$ . Таким образом, слоение  $(M, F)$  удовлетворяет условию (i), но не удовлетворяет условию (ii) теоремы 1.2.

**П р и м е р 6.2.** Пусть  $M = \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}$ , где  $0_n$  – ноль в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n = p+q, p \geq 2, q \geq 1$ . Обозначим через  $f : M \rightarrow A^q : (x^1, \dots, x^n) \mapsto (x^{p+1}, \dots, x^n)$  проекцию на  $q$ -мерное аффинное пространство  $A^q$ . Тогда  $f$  – субмерсия и, следовательно, определено трансверсально аффинное слоение  $F = \{f^{-1}(z) \mid z \in A^q\}$  на  $M$  коразмерности  $q$ . Заметим, что слой  $f^{-1}(0_q)$  диффеоморфен  $\mathbb{R}^p \setminus \{0_p\}$ , а остальные слои диффеоморфизмы  $\mathbb{R}^p$ . Следовательно, субмерсия  $f$  не допускает связности Эресмана, поскольку субмерсия со связностью Эресмана образует локально тривиальное расслоение и все ее слои диффеоморфизмы. Таким образом,  $(M, F)$  обладает свойством (ii), но не удовлетворяет (i).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Wolak R. A., “Transversaly affine foliations compared with affine manifolds”, 1. *Q J Math*, **43**:3 (1990), 369–384.
2. Кобаяси Ш., Номидзу К., *Основы дифференциальной геометрии*, 1, Наука, 1988, 428 с.
3. Жукова Н.И., “Минимальные множества картановых слоений”, *Tr. МИАН*, 2007, № 256, 115–147.
4. Blumenthal R. A, Hebda J. J., “Ehresmann Connection for Foliations”, *Indiana Univ. Math. J.*, **33**:4 (1984), 897–611.
5. Zhukova N.I., Dolgonosova A.Yu., “The automorphism groups of foliations with transverse linear connection”, *Central European Journal of Mathematics*, **11**:12 (2013), 2076–2088.
6. Жукова Н.И., “Глобальные аттракторы полных конформных слоений”, *Матем. сб.*, **203**:3 (2012), 79–106.

## Equivalent approaches to the concept of completeness of foliations with transverse linear connection

© A. Yu. Dolgonosova<sup>3</sup>, N. I. Zhukova<sup>4</sup>

**Abstract.** We prove the equivalence of three different approaches to the definition of completeness of a foliation with transverse linear connection. It is shown that for the transverse affine foliations  $(M, F)$  of codimension  $q, q \geq 1$ , each of the mentioned above conditions are equivalent to fulfillment of the following two conditions: 1) there exists an Ehresmann connection to  $(M, F)$ ; 2) the induced foliation on the universal covering space is formed by fibres of submersion onto  $q$ -dimensional affine space.

**Key Words:** foliation, linear connection, Ehresmann connection, affine foliation

<sup>3</sup> Lecturer of department of scientific disciplines, Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Nizhny Novgorod; annadolgonosova@gmail.com

<sup>4</sup> Professor of department of fundamental mathematics, National Research University Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; nzhukova@hse.ru

УДК 517.9+519.8

# О полусопряженности эндоморфизма Вильямса и неособого эндоморфизма окружности

© Н. В. Исаенкова<sup>1</sup>, Е. В. Жужома<sup>2</sup>, Г. В. Осипов<sup>3</sup>

**Аннотация.** В статье доказывается, что эндоморфизм Вильямса одномерного ветвленного многообразия с двумя точками ветвления полусопряжен с неособым эндоморфизмом окружности степени три. В качестве следствия получаем, что неблуждающее множество эндоморфизма Вильямса содержит канторово множество.

**Ключевые слова:** полусопряженность, одномерное ветвленное многообразие, неблуждающее множество, неособый эндоморфизм

## 1. Введение

Первый пример гиперболического одномерного растягивающегося аттрактора был построен С. Смейлом на полнотории. Построение аттрактора Смейла основывалось на примере линейного растягивающего отображения окружности. Эта конструкция была обобщена Вильямсом [10], [11], который показал, что любой одномерный растягивающийся аттрактор можно построить, стартуя с равномерно растягивающего неособого эндоморфизма ветвленного одномерного многообразия (что позволило Вильямсу получить классификацию ограничений диффеоморфизмов на растягивающихся одномерных аттракторах). Отметим, что в рамках конструкции Смейла-Вильямса были также построены интересные одномерные и многомерные примеры растягивающихся аттракторов в работах [3], [5], [6], [8]. В статье [4] были введены диффеоморфизмы Смейла-Виеториса, включающие в себя пример Смейла. Примеры диффеоморфизмов Смейла-Виеториса основывались на неособых эндоморфизмах окружности, которые включают в себя линейные растягивающие отображения окружности и не обязательно являются растягивающими.

В работе [10] Вильямс привел пример неособого эндоморфизма (этот эндоморфизм в статье мы называем эндоморфизмом Вильямса) одномерного ветвленного многообразия с двумя точками ветвления (это минимально возможное число точек ветвления). На основе эндоморфизма Вильямса можно построить пример диффеоморфизма полнокренделя (то есть, трехмерного шара с двумя ручками), который можно продолжить на некоторое трехмерное многообразие до диффеоморфизма  $f$ , удовлетворяющего аксиоме А. Если эндоморфизм Вильямса является растягивающим, то  $f$  имеет одномерный растягивающийся гиперболический аттрактор, который совпадает с неблуждающим множеством диффеоморфизма в полнокренделе. Если эндоморфизм Вильямса не является растягивающим, то неблуждающее множество диффеоморфизма  $f$  представляет собой семейство нескольких базисных множеств различной топологической структуры. Для описания базисных множеств необходима информация о неблуждающем множестве эндоморфизма Вильямса.

В работе [2] было получено описание неблуждающего множества неособого эндоморфизма окружности. Ключевым результатом, который использовался в [2], было то, что

<sup>1</sup> Старший преподаватель кафедры математики, информатики и информационных технологий, Нижегородская академия МВД России; math-h-ngaa@yandex.ru, nisaenkova@mail.ru

<sup>2</sup> Профессор кафедры фундаментальной математики, Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»; zhuzhoma@mail.ru.

<sup>3</sup> Профессор кафедры теории управления и динамики машин, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского; grosipov@gmail.ru

любой неособый эндоморфизм окружности полусопряжен с линейным растягивающим эндоморфизмом окружности. В настоящей работе доказывается, что (неособый) эндоморфизм Вильямса одномерного ветвленного многообразия с двумя точками ветвления полу-сопряжен с неособым эндоморфизмом окружности степени три. Это позволяет получить частичное описание неблуждающего множества эндоморфизма Вильямса. В частности, из основного результата вытекает, что неблуждающее множество эндоморфизма Вильямса, не являющегося равномерно растягивающей иммерсией, содержит инвариантное канторово множество.

*Благодарности.* Авторы благодарят РФФИ, гранты 13-01-12452 офи-м, 15-01-03687, 13-01-00589, и РНФ, грант 14-41-00044, за финансовую поддержку. Исследование осуществлено в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ (проект 138) в 2015 году.

## 2. Доказательство основных результатов

Напомним некоторые определения, и приведем необходимые для дальнейшего результаты. Рассмотрим окружность  $S^1$ . Сюръективное  $C^1$  отображение  $g : S^1 \rightarrow S^1$  называется *эндоморфизмом* [9]. Эндоморфизм  $g$  называется *неособым*, если его производная  $Dg \neq 0$  [7]. Поскольку  $d \geq 2$ , то  $E_d$  является растягивающим эндоморфизмом ( $g : S^1 \rightarrow S^1$  - *растягивающий* эндоморфизм, если  $Dg > 1$ ). Шуб [9] классифицировал растягивающиеся эндоморфизмы, показав, что степень является полным инвариантом сопряженности в классе растягивающих эндоморфизмов.

Неособые эндоморфизмы окружности образуют важный класс *d-накрытий* окружности. *d-накрытием* окружности  $S^1$  называется сюръективный локальный гомеоморфизм  $S^1 \rightarrow S^1$  степени  $|d| \geq 2$ , при этом прообраз каждой точки состоит из  $|d| \in \mathbb{N}$  точек. В статье [2] сделана классификация *d-накрытий* окружности  $S^1$  с точностью до сопряженности с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов. В [2] показано, что полным классификационным инвариантом с точностью до *d-эквивалентности* является наделенное схемой инвариантное счетное множество (отмеченное множество) линейного растягивающего эндоморфизма степени  $d$ . Также в статье [2] изучено неблуждающее множество *d-накрытий* окружности, а именно, показано, что оно содержит канторовское множество плюс периодические точки из открытых смежных интервалов.

Пусть  $M$  – некоторое многообразие. Напомним, неблуждающее множество  $NW(g)$  эндоморфизма  $g$  определяется как множество неблуждающих точек и является  $g$ -инвариантным и замкнутым. Точка  $x \in M$  является *неблуждающей*, если для любой ее окрестности  $U$  пересечение  $g^n(U) \cap U \neq \emptyset$  для бесконечного множества положительных  $n$ .

Будем говорить, что отображение  $f_1 : S^1 \rightarrow S^1$  *полусопряжено*  $f_2 : M \rightarrow M$ , если существует непрерывное отображение  $h : S^1 \rightarrow M$  такое, что  $h \circ f_1 = f_2 \circ h$ , то есть имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{f_1} & S^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ M & \xrightarrow{f_2} & M. \end{array}$$

Следуя [1], *одномерным ветвленным многообразием* называется топологическое пространство  $B$ , допускающее два типа координатных окрестностей: окрестности, гомеоморфные  $\mathbb{R}$  и окрестности, гомеоморфные  $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R} : y = 0 \text{ или } y = \varphi(x)\}$ , где  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  –  $C^\infty$ -функция такая, что  $\varphi(x) = 0$  для  $x \leq 0$  и  $\varphi(x) = 0$  для  $x > 0$ , см. рис. 1.

Непосредственно из определения ветвленного многообразия вытекает, что одномерное ветвленное многообразие  $B$  имеет касательное пространство  $TB$  в каждой точке. Поэтому достаточно гладкий эндоморфизм  $g : B \rightarrow B$  (в точках ветвления в понятном смысле надо говорить об односторонних производных) индуцирует отображение  $D_g : TB \rightarrow TB$  касательного пространства в себя. Эндоморфизм называется неособым, если отображение  $D_g$  инъективно в каждой точке.



Рис. 1:

Пусть  $\mathbb{K}$  – одномерное ветвленное многообразие с двумя точками ветвления, изображенное на рис. 2. Обозначим через  $\mathbf{B}$  – серединный отрезок, снабженный ориентацией, как показано на рис. 2. Обозначим через  $\mathbf{A}$  (соответственно  $\mathbf{C}$ ) – ориентированную дугу, гомотопную  $S^1$ , примыкающую к отрезку  $\mathbf{B}$  слева (соответственно справа).

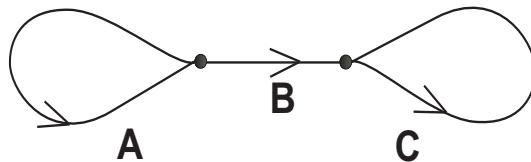


Рис. 2: Одномерное ветвленное многообразие с двумя точками ветвления.

Рассмотрим окружность  $S^1$  и введем на ней следующие обозначения:  $A'$  – дуга, полученная при обходе окружности против часовой стрелки от точки  $M_1$  до  $M_2$ ;  $B'_2$  – дуга, полученная при обходе окружности против часовой стрелки от точки  $M_2$  до  $N_2$ ;  $C'$  – дуга, полученная при обходе окружности против часовой стрелки от точки  $N_2$  до  $N_1$ ;  $B'_1$  – дуга, полученная при обходе окружности против часовой стрелки от точки  $N_1$  до  $M_1$ , см. рис. 3.

В данной статье мы будем рассматривать неособые эндоморфизмы  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  одномерного ветвленного многообразия  $\mathbb{K}$  вида 2.1 в предположении, что они не обязательно должны быть растягивающие.

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow -B + A + B \\ B &\longrightarrow C - B + A \\ C &\longrightarrow B + C - B \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ключевым результатом является следующее утверждение.

**Т е о р е м а 2.1.** Пусть  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  – неособый эндоморфизм одномерного ветвленного многообразия  $\mathbb{K}$  вида 2.1. Тогда существуют неособый эндоморфизм окружности  $g : S^1 \rightarrow S^1$  степени три и непрерывное отображение  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{K}$ , такие что

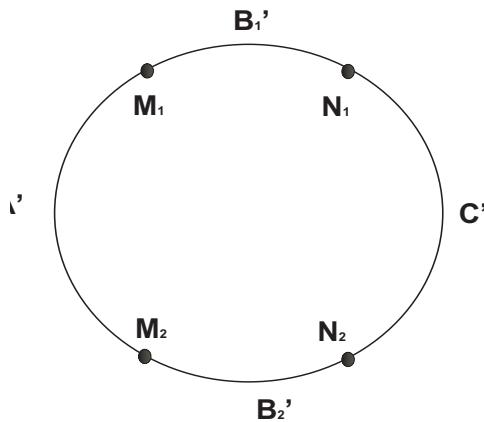


Рис. 3:

имеет место равенство  $h \circ g = \varphi \circ h$ , то есть верна коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{g} & S^1 \\ \downarrow h & & \downarrow h \\ \mathbb{K} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{K}. \end{array}$$

Более того:

1.  $h^{-1}(A) \stackrel{\text{def}}{=} A'$ , где  $A'$  - дуга, такая что ограничение  $h|_{intA'}$  - гомеоморфизм.
2.  $h^{-1}(C) \stackrel{\text{def}}{=} C'$ , где  $C'$  - дуга, такая что ограничение  $h|_{intC'}$  - гомеоморфизм.
3.  $h^{-1}(B) \stackrel{\text{def}}{=} B'_1 \cup B'_2$  - объединение двух дуг  $B'_1$  и  $B'_2$ , таких что ограничение  $h|_{intB'_i}$ ,  $i = 1, 2$  - гомеоморфизм и  $h|_{B'_1 \cup B'_2}$  - локальный гомеоморфизм.

*Доказательство.*

Определим отображение  $h$  так, как показано на рис. 4, то есть  $h(A') = A$ ,  $h(C') = C$ ,  $h(B'_1) = h(B'_2) = B$ , причем ограничения  $h|_{intA'} : S^1 \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $h|_{intC'} : S^1 \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $h|_{intB'_i} : S^1 \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $i = 1, 2$  являются гомеоморфизмами, а объединение  $h|_{B'_1 \cup B'_2}$  - локальный гомеоморфизм.

Справедливость равенства  $h \circ g = \varphi \circ h$ , то есть наличие соответствующей коммутативной диаграммы проверяется непосредственно на рис. 5 - рис. 7.

□

### Следствие 2.1.

$$h \circ g^n = \varphi^n \circ h.$$

Для неблуждающего множества эндоморфизма Вильямса одномерного ветвленного многообразия получаем следующий факт:

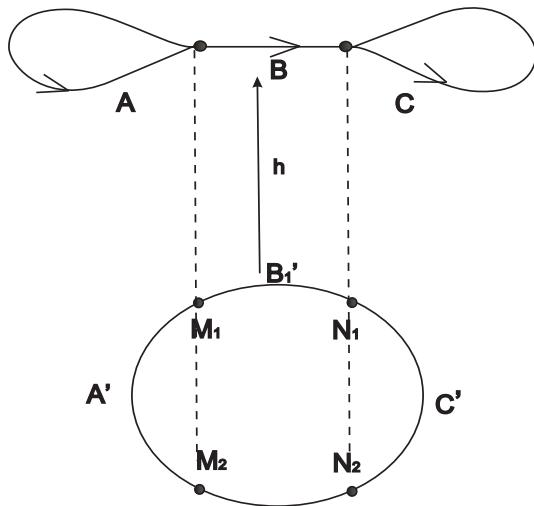


Рис. 4:

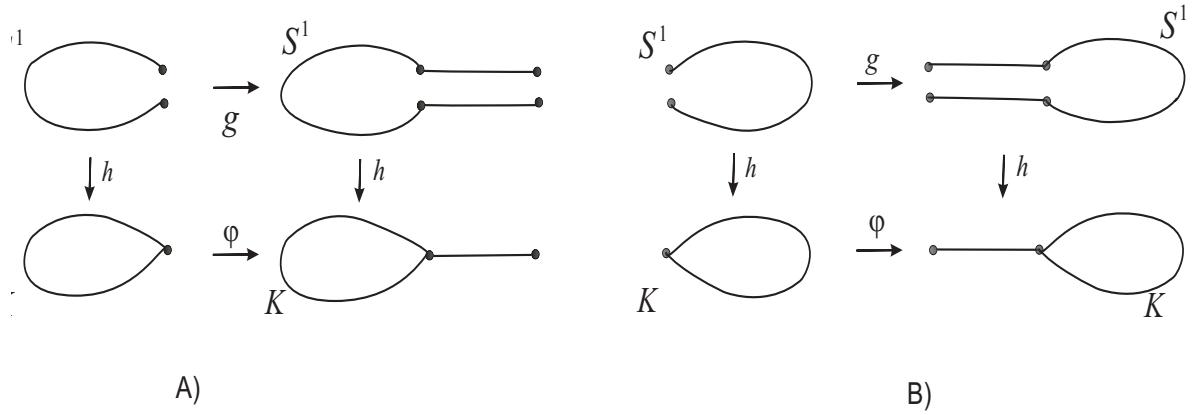


Рис. 5:

**Следствие 2.2.** Пусть  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  - неособый эндоморфизм вида 2.1 и  $g : S^1 \rightarrow S^1$  - неособый эндоморфизм окружности  $S^1$ , удовлетворяющие условиям теоремы 2.1.. Тогда имеет место следующее включение

$$h(NW(g)) \subset NW(\varphi).$$

**Доказательство.** Для  $x \in NW(g)$ , покажем, что  $h(x) \in NW(\varphi)$ . Возьмем любую  $\varepsilon$ -окрестность точки  $h(x)$  -  $U_\varepsilon(h(x))$ , тогда  $h^{-1}[U_\varepsilon(h(x))] = V(x)$  – окрестность точки  $x$ ,  $x \in S^1$ . Так как точка  $x \in NW(g)$ , существует  $n_0 \geq 0$  такое, что  $g^{n_0}[V(x)] \cap V(x) \neq \emptyset$ , следовательно  $h[g^{n_0}[V(x)] \cap V(x)] \neq \emptyset$ . Поскольку  $h$  - непрерывное отображение, верно следующее включение  $h[g^{n_0}[V(x)] \cap V(x)] \subset h \circ g^{n_0}[V(x)] \cap h[V(x)]$ . Значит,  $h \circ g^{n_0}[V(x)] \cap h[V(x)] \neq \emptyset$ . В силу следствия 2.1.,  $\varphi^{n_0} \circ h[V(x)] \cap h[V(x)] \neq \emptyset$ . Таким образом,  $h[V(x)] = U_\varepsilon(h(x))$ , и тогда  $\varphi^{n_0}[U_\varepsilon(h(x))] \cap U_\varepsilon(h(x)) \neq \emptyset$ , что означает  $h(x) \in NW(\varphi)$ .  $\square$ .

**Следствие 2.3.** Пусть  $\varphi : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  - неособый эндоморфизм вида 2.1, тогда  $NW(\varphi)$  содержит инвариантное канторово множество.

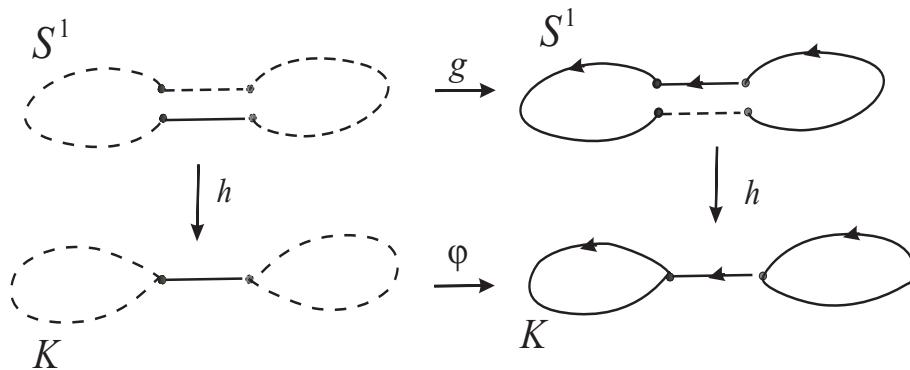


Рис. 6:

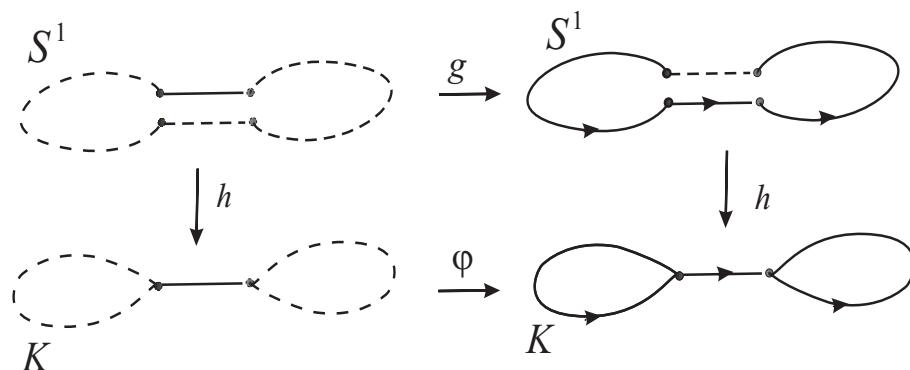


Рис. 7:

*Доказательство.* В статье [2] показано, что неблуждающее множество  $NW(g)$  неособого эндоморфизма окружности  $g : S^1 \rightarrow S^1$  содержит инвариантное канторово множество. Из теоремы 2.1. следует, что существует непрерывное отображение  $h : S^1 \rightarrow \mathbb{K}$ , полусопрягающее  $g$  и  $\varphi$ , верно включение  $h(NW(g)) \subset NW(\varphi)$  (следствие 2.2.), таким образом неблуждающее множество  $NW(\varphi)$  неособого эндоморфизма  $\varphi$  одномерного ветвленного многообразия  $\mathbb{K}$  также содержит инвариантное канторово множество.  $\square$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гринес В.З., Починка О.В., “Каскады Морса–Смейла на 3-многообразиях”, УМН, **68**:1 (2013), 129–188.
- Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “Классификация накрытий окружности”, Труды МИАН. Российская академия наук, **3** (2012), 96–101.
- Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О классификации одномерных растягивающих аттракторов”, Матем. зам., **86**:3 (2009), 333–341.
- Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, Матем. сб., **202**:3 (2011), 47–68.
- Bothe H., “Transversally wild expanding attractors”, Math. Nachr., **157** (1992), 25–49.

6. Farrell F., Jones L., "New attractors in hyperbolic dynamics", *Jour. Diff. Geom.*, **15** (1980), 107-133.
7. Nitecki Z., "Nonsingular endomorphisms of the circle", *Proc. Symp. Pure Math.*, **14** (1970), 203-220.
8. Robinson C., Williams R., "Classification of expanding attractors: an example", *Topology*, **15** (1976), 321-323.
9. Shub M., "Endomorphisms of compact differentiable manifolds", *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175-199.
10. Williams R.F., "One-dimensional non-wandering sets", *Topology*, **6** (1967), 473-487.
11. Williams R., "Expanding attractors", *Publ. Math. IHES*, **43** (1974), 169-203.

## On semiconjugacy of Williams endomorphism and nonsingular circle endomorphism

© N. Isaenkova<sup>4</sup>, E. Zhuzhoma<sup>5</sup>, G. Osipov<sup>6</sup>

**Abstract.** In the paper, we proof that Williams endomorphism of one-dimensional branched manifold with two branched points semiconjugates with the nonsingular circle endomorphism of degree three. As a consequence, one gets that the non-wandering set of the Williams endomorphism contains Cantor set.

**Key Words:** semiconjugacy, one-dimensional branched manifold, non-wandering set, nonsingular endomorphism, basic set

---

<sup>4</sup> University professor of department of Mathematics, Computer Science and Information Technology, MIA academy of Nizhnii Novgorod; math-ngaa@yandex.ru, nisaenkova@mail.ru

<sup>5</sup> Professor of department of Fundamental Mathematics, National research University «Higher school of Economics», Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

<sup>6</sup> Professor of Chair of Theory of Control and Dynamics of Machines, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod; grosipov@gmail.ru

УДК 517.956.2

# Точная оценка разрывов топологической энтропии для отображений лоренцевского типа

© М. И. Малкин<sup>1</sup>, К. А. Сафонов<sup>2</sup>

**Аннотация.** Для одномерных отображений лоренцевского типа изучается вопрос о поведении топологической энтропии как функции отображения. С помощью техники символической динамики (техники нидинг-инвариантов), а также с использованием ренормализационного подхода, показано, что топологическая энтропия может иметь разрыв (скачок) только в окрестности отображения с нулевой энтропией, причем такой разрыв имеет место тогда и только тогда, когда оба нидинг-инварианта отображения периодичны с одним и тем же периодом. Данна точная оценка скачка энтропии в указанном случае.

**Ключевые слова:** топологические марковские цепи, топологическая энтропия, отображения лоренцевского типа

## 1. Введение

Одномерные разрывные отображения с двумя интервалами монотонного возрастания (лоренцевские отображения) и их надстройки моделируют отображения Пуанкаре для потоков со сложным поведением предельных траекторий, имеющих странные аттракторы типа аттрактора Лоренца (см. [4]). В работе М.И. Малкина [1] рассматривался вопрос о непрерывности топологической энтропии  $h_{top}(f)$  как функции отображения  $f$  для класса кусочно-непрерывных монотонных отображений отрезка с одной точкой разрыва. При условии плотности прообразов точки разрыва была доказана теорема о непрерывности энтропии на пространстве лоренцевских отображений с  $C^0$ -топологией. Можно показать, что этот результат справедлив, если условие плотности прообразов разрыва заменить на условие положительности топологической энтропии отображения, в окрестности которого рассматривается функция  $h_{top}(f)$ . Если же рассматривать функцию  $h_{top}(f)$  в окрестности отображения  $f_0$  с нулевой энтропией, то, как показано в данной статье,  $h_{top}(f)$  может иметь разрыв (скачок энтропии), причем такой разрыв имеет место тогда и только тогда, когда оба нидинг-инварианта отображения периодичны с одним и тем же периодом.

Подобный вопрос о возможных скачках топологической энтропии изучался ранее для класса непрерывных кусочно-монотонных отображений. В работе М. Мизюревича [2] было получено значение максимально возможного скачка энтропии для этого класса и установлено, что величина скачка зависит от количества критических точек, входящих в периодические орбиты.

В данной работе мы установим точное значение максимально возможного разрыва энтропии в классе лоренцевских отображений и покажем, что, по аналогии с результатом Мизюревича, величина скачка энтропии определяется (общим) периодом орбит, проходящих через точку разрыва лоренцевского отображения  $f_0$  с нулевой энтропией.

Точнее, будет доказано, что функция  $h_{top}(f)$  в классе лоренцевских отображений, рассматриваемых в  $C^0$ -топологии, является разрывной в окрестности отображения  $f_0$  тогда

<sup>1</sup> Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; malkin@mm.unn.ru

<sup>2</sup> Студент института информационных технологий, математики и механики, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; malkin@mm.unn.ru

и только тогда, когда  $h_{top}(f_0) = 0$  и нидинг-инварианты  $K_{f_0}^+, K_{f_0}^-$  отображения  $f_0$  периодичны с одним и тем же периодом; величина скачка энтропии в этом случае равна  $\frac{1}{p} \log 2$ , где  $p$  — общий период нидинг-инвариантов.

## 2. Предварительные сведения и основные результаты

Рассмотрим семейство  $\mathcal{F}$  лоренцевских отображений  $f : I \rightarrow I$ , где  $I = [-1, 1]$  и  $f$  удовлетворяет условиям:

1.  $f$  — непрерывная, строго монотонно возрастающая функция на каждом из полуинтервалов  $[-1; 0)$  и  $(0; 1]$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = -1$ ,  $f(0) = 0$ .

Отметим, что второе условие является, фактически, удобным условием нормировки (интересная динамика отображения, удовлетворяющая лишь первому условию, имеет место лишь на отрезке  $f(0+), f(0-)$ ).

Пусть  $\Pi$  — пространство последовательностей  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots)$  из символов  $\{-1, 1\}$  с топологией прямого (тихоновского) произведения. Будем считать, что топология задана метрикой

$$dist(\alpha, \beta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha_i - \beta_i|}{2^n}$$

и что на  $\Pi$  установлен лексикографический порядок. На этом пространстве определим отображение  $\sigma : \Pi \rightarrow \Pi$  — отображение левого сдвига:  $\sigma(\omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots) = (\omega_1 \omega_2 \dots)$ .

Множество прообразов точки разрыва 0 отображения  $f$  обозначим  $D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n$ , где  $D_0 = \{0\}$ ,  $D_n = \{x \in I | f^n(x) = 0, f^{n-1}(x) \neq 0\}$ . Введем необходимые определения.

**Определение 2.1.** Нидинг-последовательностью точки  $x \in I \setminus D$  называется последовательность  $\omega(x) = \omega_0 \omega_1 \omega_2 \dots$ , где  $\omega_i = sign(f^i(x))$ . Формальный степенной ряд  $\tilde{\omega} = \sum_{i=0}^{\infty} \omega_i t^i$  переменного  $t$  будем называть нидинг-рядом точки  $x$ .

Для каждой точки  $x \in D$  определим пару нидинг-последовательностей по формуле:

$$K^+(x) \stackrel{def}{=} \lim_{y \rightarrow x+0} \omega(y), \quad K^-(x) \stackrel{def}{=} \lim_{y \rightarrow x-0} \omega(y), \quad y \in I \setminus D$$

**Определение 2.2.** Нидинг-инвариантами отображения  $f \in \mathcal{F}$  называется пара последовательностей  $(K_f^+(0), K_f^-(0))$ .

Пара нидинг-инвариантов  $(\alpha, \beta) == (K_f^+(0), K_f^-(0))$  является символическим описанием отображения  $f$ , а в случае плотности  $D$  прообразов разрыва, эта пара является полной системой инвариантов топологической сопряженности. В частности, данная пара определяет множество  $\Sigma_f = \Sigma_{(\alpha, \beta)}$  всех допустимых нидинг-последовательностей (см. [4]), а именно, имеет место следующее утверждение.

**Предложение 2.1.** Последовательность  $\omega$  принадлежит  $\Sigma_f$  тогда и только тогда, когда выполняются условия:

$$\text{либо } \sigma^n(\omega) \geq \alpha, \text{ либо } \sigma^n(\omega) \leq \beta, \forall n \in \mathbb{N} \quad (2.1)$$

$$\sigma(\alpha) \leq \omega \leq \sigma(\beta). \quad (2.2)$$

Если каждая из последовательностей  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяет (в качестве  $\omega$ ) условию (2.1), то пара  $(\alpha, \beta)$  будет называться *допустимой парой*. Для допустимой пары  $(\alpha, \beta)$  обозначим через  $\Sigma_{(\alpha, \beta)}$  множество последовательностей  $\omega$ , удовлетворяющих (2.1).

Множество  $W$  допустимых пар без изолированной точки  $(111\dots, -1 - 1 - 1\dots)$  является компактным подмножеством  $\Pi$ , и для допустимых пар выполняются следующие соотношения (см. [1]):

**П р е д л о ж е н и е 2.2.** Пусть  $(\alpha, \beta)$  и  $(\alpha', \beta')$  — допустимые пары и  $\alpha' \leq \alpha$ ,  $\beta' \leq \beta$ , тогда:

1.  $\alpha \in \Sigma_{(\alpha', \beta')}$  и  $\beta \in \Sigma_{(\alpha', \beta')}$

2.  $\tilde{\alpha} - \tilde{\beta} = (\tilde{\alpha}' - \tilde{\beta}') L_{\alpha, \beta}(\alpha', \beta')$ , где  $L_{\alpha, \beta}(\alpha', \beta') = \sum_{n=0}^{\infty} l_n t^n$ , а коэффициенты  $l_n = l_n(\alpha, \beta)$  определяются как уменьшенное на единицу число допустимых  $n$ -блоков в  $\Sigma_{(\alpha', \beta')}$ , находящихся между  $\alpha$  и  $\beta$ .

Согласно [3], топологическую энтропию разрывного отображения  $f \in \mathcal{F}$  можно определить как

$$h_{top}(f) = h_{top}(\sigma|\Sigma_f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log l'_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log l_n}{n},$$

где  $l'_n$  — число допустимых  $n$ -блоков в  $\Sigma_f$ , а  $l_n = \text{card}D_n$ .

Пусть  $r(f)$  — радиус сходимости ряда  $\tilde{L}_f = \sum_{n=0}^{\infty} l_n t^n$ , а  $r'(f) = \min(r(f), 1)$ . Из формулы Коши-Адамара для радиуса сходимости имеем

$$h_{top}(f) = -\log r'(f)$$

Так ряд  $\tilde{L}_f$  определяется заданием пары нидинг-инвариантов, то отображение  $h_{top} : \mathcal{F} \rightarrow [0; \log 2]$ <sup>3</sup> можно представить как композицию трех отображений

$$(K^+, K^-) : \mathcal{F} \rightarrow W, \quad r' : W \rightarrow \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \text{ и } h(f) = -\log r'.$$

Последнее отображение, очевидно, является непрерывным. В [1] было показано, что второе отображение также является непрерывным. Переядем к рассмотрению первого отображения.

Если оба нидинг-инварианта отображения  $f$  непериодические, то  $(K^+, K^-)$  непрерывно в точке  $f$ , и, следовательно, топологическая энтропия также является непрерывной.

В случае, когда ровно один из нидинг-инвариантов периодический, то есть имеет вид  $\omega = PPP\dots$ , где  $P = \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{p-1}$ , отображение  $(K^+, K^-)$  терпит разрыв в точке  $f$ , но, как показано в [1], второе отображение склеивает этот разрыв, и поэтому композиция  $h_{top}(f)$  остается непрерывной.

Рассмотрим последний, самый интересный случай, когда оба нидинг-инварианта периодические. В этом случае динамика отображения  $f$  определяется конечной топологической марковской цепью (т.м.ц.), порожденной разбиением отрезка  $I$  орбитами крайних точек:  $\{f^i(-1)\} \cup \{f^j(1)\}$  (см. [1]). При этом граф  $G$ , соответствующий т.м.ц., имеет два пересекающихся цикла длины  $p$  и  $q$ , где  $p, q$  — периоды нидинг-инвариантов. Если данные циклы не совпадают, то  $h_{top}(f) > 0$  и топологическая энтропия непрерывна для отображения  $f$ . Если же циклы совпадают, то  $h_{top}(f) = 0$  и энтропия имеет разрыв в  $f$ . Наша задача выяснить величину максимально возможного разрыва для энтропии в этом случае.

Итак, будем рассматривать отображение  $f \in \mathcal{F}$ , для которого выполняются условия:

<sup>3</sup> Так как  $0 < l_n \leq 2l_{n-1}$ , то  $0 < h_{top} \leq \log 2$

1. Нидинг-инварианты отображения  $f$  периодичны и имеют одинаковый период  $p$  (при этом выполняется  $f^{p-1}(1) = f^{p-1}(-1) = 0$ ).
2. Пусть  $S = \{f^i(-1)\} \cup \{f^j(1)\}$ ,  $i, j = 0, 1, \dots, p-1$  и  $\Omega$  — совокупность максимальных связных интервалов множества  $I \setminus S$ , тогда существуют интервалы  $J_0, J_1, \dots, J_{p-1} \in \Omega$ , для которых  $f(J_i) = J_{i+1}$ ,  $i = 0, 1, \dots, p-2$  и  $f(J_{p-1}) = J_0$ , причем указанные интервалы отображаются гомеоморфно.

Так как прообразами точки разрыва являются только точки множества  $S$ , то  $h_{top}(f) = 0$ .

Пусть нидинг-инварианты имеют вид  $\alpha = PPP\dots$ ,  $\beta = QQQ\dots$ . Для любой последовательности  $f_n \rightarrow f$  (в  $C^0$ -топологии) рассмотрим соответствующую последовательность нидинг-инвариантов  $(\alpha_n, \beta_n)$ . Для последней последовательности в силу компактности  $W$  множество предельных точек непусто и они имеют вид

$$\alpha_n = PP_1P_2\dots, \beta_n = QQ_1Q_2\dots; P_i, Q_i \text{ являются блоками } P \text{ или } Q. \quad (2.3)$$

Рассмотрим ряд  $\Theta_{(\alpha, \beta)} = \tilde{\alpha} - \tilde{\beta}$ . Если  $r(\alpha, \beta) \leq 1$ , то  $r$  совпадает с наименьшим положительным корнем функции  $\Theta_{(\alpha, \beta)}(t)$  [1], при этом для допустимых пар  $\alpha' \leq \alpha$  и  $\beta' \geq \beta$  выполняется  $r(\alpha, \beta) \geq r(\alpha', \beta')$ . Таким образом, среди всех допустимых пар вида (2.3) наименьшим радиусом сходимости (следовательно, наибольшей энтропией) обладает пара вида

$$\alpha* = PQQ\dots, \beta* = QPP\dots$$

Так как  $\alpha* = \tilde{P} + t^p \frac{\tilde{Q}}{(1-t^q)}$  и  $\beta* = \tilde{Q} + t^q \frac{\tilde{P}}{(1-t^p)}$ , то выполняется тождество

$$\Theta_{(\alpha*, \beta*)}(t) = (1 - t^p - t^q)\Theta_{(\alpha, \beta)}(t),$$

где  $p$  и  $q$  — периоды нидинг-инвариантов. При  $p = q$  равенство принимает вид

$$\Theta_{(\alpha*, \beta*)}(t) = (1 - 2t^p)\Theta_{(\alpha, \beta)}(t).$$

Поскольку  $h_{top}(f) = 0$ , наименьший положительный корень  $\Theta_{(\alpha*, \beta*)}(t)$  совпадает с положительным корнем  $1 - 2t^p$ , то есть равен  $\sqrt[p]{\frac{1}{2}}$ . Таким образом, максимально возможный скачок энтропии равен  $-\log \sqrt[p]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p} \log 2$ . Докажем, что данная оценка достигается.

Итак, для  $f$  имеем непересекающиеся интервалы  $J_0, J_1, \dots, J_{p-1}$ , которые под действием  $f$  циклически и гомеоморфно переходят друг в друга, а границами данных интервалов являются точки множества  $S$ . Пусть  $c_1$  и  $c_2$  — точки из  $S$ , ближайшие к 0 справа и слева, соответственно. Тогда интервалы  $(c_1, 0)$  и  $(0, c_2)$  входят в  $\{J_i\}$ , обозначим их  $K$  и  $L$ . Для произвольного  $\varepsilon > 0$  рассмотрим интервалы  $K_0 = (-\varepsilon, 0)$ ,  $L_0 = (0, \varepsilon)$ . Определим линейное отображение  $f_\varepsilon$  на  $K_0$  с наклоном  $\sqrt[p]{2}$ , удовлетворяющее условию  $f_\varepsilon(0-) = 1 - 0$ . Аналогично определим отображение на  $L_0$ . Соответствующие образы обозначим  $K_1$  и  $L_1$ . Далее, на остальных интервалах разбиения, отображение  $f_\varepsilon$  действует так: на  $K_i = (a, b)$  оно линейно с наклоном  $\sqrt[p]{2}$  и условием  $f_\varepsilon(b-0) = f(b) - 0$ , для  $L_i = (c, d)$  последнее условие заменяется на  $f_\varepsilon(c+0) = f(c) - 0$ . При достаточно малом  $\varepsilon$  интервалы  $K_i$ ,  $L_i$  попарно не пересекаются, и  $f_\varepsilon$  корректно определено.

Пусть  $T = K_i \cup L_i$ . Для каждого  $K_i = (a, b)$  определим интервалы

$$K'_i = (\min(a, f^{-1}f_\varepsilon(a)), b), \quad L'_i = (a, b)$$

и аналогично,  $L'_i = (c, \max(d, f^{-1}f_\varepsilon(d)))$ . Выберем  $\mathcal{A}$  — открытое покрытие множества  $T' = K'_i \cup L'_i$ , такое, что элементы покрытия попарно не пересекаются и для любого

$A_m \in \mathcal{A}$  существует интервал  $J_r$ , содержащий  $A_m$ , но не совпадающий с ним. При малом  $\varepsilon$  элементы покрытия можно выбрать также малой длины, а их количество равным  $2p$ .

На подмножестве  $I \setminus \mathcal{A}$  (заметим, что это множество содержит  $S$ ) определим отображение  $f_\varepsilon(x) = f(x)$  и доопределим  $f$  линейно и непрерывно на оставшемся подмножестве  $\mathcal{A} \setminus T$ .

Полученное отображение непрерывно и, в силу выбора покрытия  $\mathcal{A}$ , является строго монотонным. Для отображения  $f_\varepsilon$  имеем инвариантное подмножество  $T$ , при действии  $f^p$  на интервалах  $K_0$  и  $L_0$  их длина увеличивается в два раза, следовательно,  $f^p(K_0) = f^p(L_0) = K_0 \cup L_0$  и  $h_{top}(f_\varepsilon|T) = \frac{1}{p} \log 2$ . Кроме того, в силу монотонности  $f$ , имеем  $|f - f_\varepsilon| < \max V_{Ai} f$  (максимум берется по всем элементам покрытия), т.е. расстояние стремится к 0 при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Таким образом, доказана теорема.

**Т е о р е м а 2.1.** *Функция  $f \rightarrow h_{top}(f)$  в классе лоренцевских отображений, рассматриваемых в  $C^0$ -топологии, является разрывной в окрестности отображения  $f_0$  тогда и только тогда, когда  $h_{top}(f_0) = 0$  и нидинг-инварианты  $K_{f_0}^+, K_{f_0}^-$  отображения  $f_0$  периодичны с одним и тем же периодом; величина скачка энтропии в этом случае равна  $\frac{1}{p} \log 2$ , где  $p$  — общий период нидинг-инвариантов.*

Отметим, что в случае непрерывных кусочно-монотонных отображений отрезка, согласно результату Мизюревича [2], наибольший возможный скачок энтропии равен  $\max \frac{a}{b} \log 2$ , где  $a$  — количество критических точек (точнее, turning points — точек возврата) в периодической орбите длины  $b$ , и максимум считается по всем периодическим орбитам. В случае лоренцевских отображений аналогом критической точки можно считать точку разрыва. Тогда единственными периодическими орбитами, содержащими эту точку, являются точки вида  $f^i(-1)$  и  $f^i(+1)$  (периодичность этих точек следует понимать как  $f^p(1-0) = 1-0$  и  $f^p(-1+0) = -1+0$ ). Таким образом, доказанную нами в теореме оценку скачка энтропии  $\frac{1}{p} \log 2$  можно рассматривать как аналог результата Мизюревича для класса лоренцевских отображений.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Malkin. *On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval*, Selecta Mathematica Sovietica, (1989), 131–139.
2. M. Misiurewicz. *Jumps of entropy in one dimension*, Fundamenta Mathematicae, (1989), v. 132, 215-226.
3. Lai Sang Young. *On the prevalence of horseshoes*, Trans. Amer. Math. Soc. (1981), v. 263, no. 1, 75-88.
4. Afraimovich V., Sze-Bi Hsu. *Lecture on chaotic dynamical systems*, AMS/IP, Studies in Advanced Mathematics, (2002), v.28.

# Accurate assessment of the topological entropy for breaks maps of Lorenz type

© M. Malkin<sup>4</sup>, K. Saphonov<sup>5</sup>

**Abstract.** For one-dimensional maps of Lorenz type, the problem on behavior of the topological entropy as the function of a map is studied. Using the technique of symbolic dynamics (the kneading technique) and by renormalization arguments we show that the topological entropy can have jumps only in a neighbourhood of a map with zero entropy, and moreover, such a jump appear if and only if two kneadind invariants are repiodic with the same period. An exact estimate on the value of the jump for this case is given.

**Key Words:** topological Markov chains, topological entropy, Lorenz type maps

---

<sup>4</sup> Associate Professor of Department of differential equations and mathematical Analysis, Nizhny Novgorod State University. N. I. Lobachevsky; malkin@mm.unn.ru

<sup>5</sup> Student of Institute of Information Technology, Mathematics and Mechanics, Nizhny Novgorod State University. N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; malkin@mm.unn.ru

УДК 517.9

# Критерий топологической сопряженности 3-диффеоморфизмов с конечным числом орбит гетероклинического касания

© Т. М. Митрякова<sup>1</sup>, О. В. Почкина<sup>2</sup>

**Аннотация.** В настоящей работе рассматривается класс трёхмерных диффеоморфизмов, отличающихся от градиентно-подобных систем наличием конечного числа орбит гетероклинических касаний. Хорошо известно, что такие каскады не являются структурно устойчивыми, однако для них найдена полная система топологических инвариантов.

**Ключевые слова:** топологическая сопряжённость, гетероклинические касания, модули устойчивости

Дж. Палис [5] был первым, кто обнаружил, что нарушение условия трансверсальности пересечения инвариантных многообразий неподвижных точек приводит к тому, что в любой  $C^1$ -окрестности такой динамической системы существует континuum попарно не сопряженных систем. Про такие системы говорят, что они обладают модулями топологической сопряженности или модулями устойчивости. Несмотря на неустойчивость, для некоторого класса таких систем удается получить полную систему топологических инвариантов. Для дискретных систем на поверхностях такие результаты получены в работах [3], [4]. Настоящая статья является продолжением этих идей в размерность три.

Более детально, в настоящей работе необходимые и достаточные условия топологической сопряженности получены для диффеоморфизмов класса  $\Psi$ , заданных на гладких трёхмерных замкнутых ориентируемых многообразиях  $M^3$  и таких, что любой диффеоморфизм  $f \in \Psi$  обладает следующими свойствами:

1) неблуждающее множество  $\Omega_f$  диффеоморфизма  $f$  состоит из конечного числа гиперболических точек;

2) для различных седловых точек  $p, q \in \Omega_f$  пересечение  $W_p^s \cap W_q^u$  не пусто только в случае, когда  $\dim W_p^s = \dim W_q^u = 2$ , при этом оно является трансверсальным всюду, кроме, возможно, конечного числа орбит невырожденного одностороннего касания<sup>3</sup>;

3) седловые точки диффеоморфизма  $f$  обладают  $C^2$ -линеаризующими окрестностями (см. определение 1.3. ниже).

Чтобы сформулировать результат настоящей работы, введём следующие обозначения для диффеоморфизма  $f \in \Psi$ .

Для  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$  обозначим через  $\Omega_i$  подмножество  $\Omega_f$ , состоящее из точек  $p$  таких, что  $\dim W_p^u = i$ . Положим  $A_f = W_{\Omega_0 \cup \Omega_1}^u$ ,  $R_f = W_{\Omega_2 \cup \Omega_3}^s$ ,  $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$  и  $\hat{V}_f = V_f/f$ . Из [1] следует, что множества  $A_f$ ,  $R_f$ ,  $V_f$  и  $\hat{V}_f$  являются связными,  $\hat{V}_f$  является гладким замкнутым 3-многообразием и естественная проекция  $p_f : V_f \rightarrow \hat{V}_f$  является накрытием, индуцирующим эпиморфизм  $\eta_f : \pi_1(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$ , действующий следующим образом. Пусть  $\hat{c}$  — петля в  $\hat{V}_f$  такая, что  $\hat{c}(0) = \hat{c}(1) = \hat{x}$ . В силу теоремы о монодромии существует петля  $c$  в  $V_f$  с началом в точке  $x$  ( $c(0) = x$ ), которая является поднятием пути  $\hat{c}$ , и

<sup>1</sup> Доцент кафедры теории функций ННГУ им. Н.И. Лобачевского; tatiana.mitryakova@yandex.ru

<sup>2</sup> Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ-НН; olga-pochinka@yandex.ru

<sup>3</sup> Пусть  $N_1$ ,  $N_2$  — двумерные подмногообразия многообразия  $M^3$ . Точка  $x \in N_1 \cap N_2$  называется точкой *невырожденного одностороннего касания*, если существует карта  $(U_x, \varphi_x)$  многообразия  $M^3$ , где  $U_x \subset M^3$  — открытая окрестность точки  $x$  и  $\varphi_x : U_x \rightarrow \mathbb{R}^3$  —  $C^2$ -диффеоморфизм такой, что  $\varphi_x(x) = (0, 0, 0)$ ,  $\varphi_x(N_1 \cap U_x) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\}$ ,  $\varphi_x(N_2 \cap U_x) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$ .

существует элемент  $k \in \mathbb{Z}$  такой, что  $c(1) = f^k(x)$ . Тогда  $\eta_f : \pi_1(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$  — отображение, переводящее  $[\hat{c}]$  в  $k$ .

Положим  $\hat{\mathbb{W}}_f^s = \bigcup_{p \in \Omega_1} \hat{W}_p^s$  и  $\hat{\mathbb{W}}_f^u = \bigcup_{p \in \Omega_2} \hat{W}_p^u$ . Каждая компонента связности  $\hat{W}_p^\delta, \delta \in \{s, u\}$  множества  $\hat{\mathbb{W}}_f^\delta$  является  $\eta_f$ -существенным двумерным тором или  $\eta_f$ -существенной бутылкой Клейна на многообразии  $\hat{V}_f$  в следующем смысле. Пусть  $j : \hat{W}_p^\delta \rightarrow \hat{V}_f$  включение и  $j_* : \pi_1(\hat{W}_p^\delta) \rightarrow \pi_1(\hat{V}_f)$  индуцированный гомоморфизм, тогда  $\eta_f(j_*(\pi_1(\hat{W}_p^\delta))) \neq \{0\}$ . Из свойства 2) класса  $\Psi$  следует, что компоненты связности  $\hat{W}_p^s \subset \hat{\mathbb{W}}_f^s$  и  $\hat{W}_p^u \subset \hat{\mathbb{W}}_f^u$  либо не пересекаются, либо пересекаются трансверсально по одномерным кривым, либо пересекаются нетрансверсально с нарушением условия трансверсальности пересечения в конечном числе точек, являющихся точками невырожденного одностороннего касания.

Пусть диффеоморфизм  $f$  принадлежит классу  $\Psi$  и  $\sigma$  — его седловая точка периода  $m_\sigma$  с двумерным устойчивым многообразием. Обозначим через  $J_\sigma : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  линейный диффеоморфизм, определяемый жордановой формой линейной части диффеоморфизма  $f^{m_\sigma}$  в окрестности точки  $\sigma$ . Точка  $O(0, 0, 0)$  является седловой точкой диффеоморфизма  $J_\sigma$  и имеет  $J_\sigma$ -инвариантную окрестность  $\mathcal{U}_{J_\sigma}$  (см., например, [2]).

**Определение 1.3.**  $f^{m_\sigma}$ -инвариантную окрестность  $\mathcal{U}_\sigma$  седловой точки  $\sigma$  назовем  $C^2$ -линеаризующей, если существует  $C^2$ -диффеоморфизм  $\psi_\sigma : \mathcal{U}_\sigma \rightarrow \mathcal{U}_{J_\sigma}$ , сопрягающий диффеоморфизм  $f^{m_\sigma}|_{\mathcal{U}_\sigma}$  с диффеоморфизмом  $J_\sigma|_{\mathcal{U}_{J_\sigma}}$ .

Обозначим через  $\mathcal{A}$  множество точек гетероклинического касания. Для любой точки  $a \in \mathcal{A}$  обозначим через  $\sigma_a^s$  и  $\sigma_a^u$  седловые точки такие, что  $a$  принадлежит пересечению инвариантных многообразий  $W_{\sigma_a^s}^s$  и  $W_{\sigma_a^u}^u$ . Обозначим через  $\mu_a$  ( $\lambda_a$ ) собственное значение точки  $\sigma_a^s$  ( $\sigma_a^u$ ) по модулю большее (меньшее) единицы.

Обозначим через  $\Psi^*$  множество диффеоморфизмов  $f \in \Psi$  таких, что отношение  $\frac{\ln|\lambda_a|}{\ln|\mu_a|}$  является иррациональным числом для любой точки  $a \in \mathcal{A}$ .

Обозначим через  $U_a$  компоненту связности множества  $U_{\sigma_a^s} \cap U_{\sigma_a^u}$ , содержащую точку  $a$ . Для любой точки  $p \in U_a$  положим  $p^s = \psi_{\sigma_a^s}(p) = ([p]_x^s, [p]_y^s, [p]_z^s)$ ,  $p^u = \psi_{\sigma_a^u}(p) = ([p]_x^u, [p]_y^u, [p]_z^u)$ ,  $g_a = \psi_{\sigma_a^u} \circ (\psi_{\sigma_a^s}|_{U_a})^{-1} : \psi_{\sigma_a^s}(U_a) \rightarrow \psi_{\sigma_a^u}(U_a)$ . Запишем отображение  $g_a$  в координатном виде

$$g_a(x, y, z) = (\xi_a(x, y, z), \eta_a(x, y, z), \zeta_a(x, y, z)).$$

Положим

$$\tau_a = \frac{\partial \zeta_a}{\partial x}(a^s).$$

Положим  $H_a = \mathcal{A} \cap W_{\sigma_a^s}^s \cap W_{\sigma_a^u}^u$ ,  $\hat{H}_a = p_f(H_a)$ ,  $\lambda_{\hat{H}_a} = \lambda_a$  и  $\mu_{\hat{H}_a} = \mu_a$  для  $a \in \mathcal{A}$ . Обозначим через  $\hat{H}_f$  объединение всех множеств  $\hat{H}_a$ .

Положим  $\hat{\mathcal{A}} = p_f(\mathcal{A})$ . Обозначим через  $K_f$  связную фундаментальную область действия диффеоморфизма  $f$  на  $V_f$ , граница которой не содержит точек множества  $\mathcal{A}$ . Для произвольной гладкой кривой  $\hat{\nu} \subset \hat{V}_f$ , соединяющей точки  $\hat{x}$  и  $\hat{y}$ , существует единственное поднятие  $\nu \subset V_f$  с начальной точкой  $x = p_f^{-1}(\hat{x}) \cap K_f$  и конечной точкой  $f^{k_{\hat{\nu}}}(\hat{K}_f)$  для некоторого целого  $k_{\hat{\nu}}$ .

Пусть  $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \hat{H}_a \cap \hat{K}_f$ . Обозначим через  $\hat{\nu}_{\hat{a}_1, \hat{a}_2}$  гладкую кривую, соединяющую точки  $\hat{a}_1$  и  $\hat{a}_2$ .

Для каждой точки  $b \in (H_f \cap K_f)$  вычислим параметр  $\tau_b$  и положим  $\tau_{\hat{b}} = \tau_b$  для  $\hat{b} = p_f(b)$ . Для  $\hat{H}_a$  из  $\hat{H}_f$  положим

$$\tau_{\hat{H}_a} = \{\tau_{\hat{b}}, \hat{b} \in \hat{H}_a\} \quad \hat{C}_{\hat{H}_a} = \{\lambda_{\hat{H}_a}, \mu_{\hat{H}_a}, \tau_{\hat{H}_a}\}.$$

Положим

$$\hat{C}_f = \{\hat{C}_{\hat{H}_a}, \hat{H}_a \subset \hat{H}_f\}.$$

**Определение 1.4.** Набор  $S_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{\mathbb{W}}_f^s, \hat{\mathbb{W}}_f^u, \hat{C}_f)$  назовем схемой диффеоморфизма  $f \in \Psi$ .

**Определение 1.5.** Схемы  $S_f$  и  $S_{f'}$  диффеоморфизмы  $f, f' \in \Psi$  назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$  со следующими свойствами:

- 1)  $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$ ;
- 2)  $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{W}}_f^s) = \hat{\mathbb{W}}_{f'}^s$  и  $\hat{\varphi}(\hat{\mathbb{W}}_f^u) = \hat{\mathbb{W}}_{f'}^u$ ;
- 3) если  $\hat{H}_{a'} = \hat{\varphi}(\hat{H}_a)$  то  $\frac{\ln|\lambda_{\hat{H}_a}|}{\ln|\mu_{\hat{H}_a}|} = \frac{\ln|\lambda_{\hat{H}_{a'}}|}{\ln|\mu_{\hat{H}_{a'}}|}$ ;
- 4) если  $\hat{H}_{a'} = \hat{\varphi}(\hat{H}_a)$  для  $\hat{H}_a$  из  $\hat{H}_f$ , то для любых точек  $\hat{a}_1, \hat{a}_2 \in \hat{H}_a$ , принадлежащих  $\hat{V}_f$  выполняется равенство  $\left| \frac{\tau_{\hat{a}_2}}{\tau_{\hat{a}_1}} \right|^{\frac{1}{\ln|\mu_{\hat{H}_a}|}} = \left( \left| \frac{\lambda_{\hat{H}_{a'}}}{\mu_{\hat{H}_{a'}}} \right|^{k_{\hat{\varphi}}(\hat{\nu}_{\hat{a}_1, \hat{a}_2})} \cdot \left| \frac{\tau_{\hat{\varphi}(\hat{a}_2)}}{\tau_{\hat{\varphi}(\hat{a}_1)}} \right| \right)^{\frac{1}{\ln|\mu_{\hat{H}_{a'}}|}}$ .

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

### Теорема 1.2.

1. Если схемы диффеоморфизмов  $f, f' \in \Psi$  эквивалентны, то диффеоморфизмы топологически сопряжены.

2. Дiffeоморфизмы  $f, f' \in \Psi^*$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»), Российского фонда научных исследований (гранты № 13-01-12452 офи-м и 15-01-03689-а) и НИР согласно заданию 2014/134 на выполнение государственных работ в сфере научной деятельности в рамках базовой части государственного задания Минобрнауки России на 2014-2016 гг. (ННГУ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, “Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла”, *Дифференциальные уравнения и топология. II, Сборник статей. К 100-летию со дня рождения академика Льва Семеновича Понtryagina, Тр. МИАН*, **271** (2010), 111–133.
2. Grines E., Pochinka O., “Necessary conditions of topological conjugacy for three-dimensional diffeomorphisms with heteroclinic tangencies”, *Динамические системы*, **3(31)** (2013), 185–200.
3. W. De Melo, S. J. Strien, “Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli”, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, **7** (1987), 415–462.
4. Т. М. Митрякова, О. В. Починка, “К вопросу о классификации диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом модулей топологической сопряженности”, *Труды МИАН*, **6(1)** (2010), 91–105.

5. J. Palis, “A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability”, *Asterisque*, **51** (1978), 335–346.

## The criteria of the topological conjugacy of 3-diffeomorphisms with a finite number orbits of heteroclinic tangency

© T. M. Mitryakova<sup>4</sup>, O. V. Pochinka<sup>5</sup>

**Abstract.** In the present paper a class of 3-diffeomorphisms is considered, which differ from the gradient-like systems in the existence of the finite number of heteroclinic tangencies orbits. It is a well-known fact that such cascades are not structurally stable. However, the full system of topological invariants is found for them.

**Key Words:** topological conjugacy, heteroclinic contact, moduli of stability

---

<sup>4</sup> Docent of theory function chair of Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky; tatiana.mitryakova@yandex.ru

<sup>5</sup> Professor of fundamental mathematics chair of National Research University Higher School of Economics; olga-pochinka@yandex.ru

УДК 517.9

# Плотность вероятности как решение уравнения Фоккера-Планка в индуцированных шумом переходах.

© С. Н. Нагорных<sup>1</sup>, Д. С. Саблюков<sup>2</sup>

**Аннотация.** В развитие теории индуцированных шумом переходов рассматриваются необходимые и достаточные условия существования плотности вероятности решения уравнения Фоккера-Планка по Ито в виде сингулярной обобщенной функции в окрестности точки бифуркации уравнения Ферхюльста и критические параметры.

**Ключевые слова:** плотность вероятности, критические параметры, уравнение Фоккера-Планка, уравнение Ферхюльста, индуцируемые шумом переходы

Известно [1], что плотность вероятности (ПВ) - решение уравнения Фоккера-Планка (УФП) в точке  $x = 0$  теории индуцированных шумом переходов (ИШП) может иметь вид дельта-функции. В [2] доказано, что эта ПВ по Стратановичу имеет вид дельта-функции. В данной работе исследуется вид ПВ решения УФП по Ито и ищется критический параметр стохастического обыкновенного дифференциального уравнения Ферхюльста и эквивалентного ему УФП по Ито.

Уравнения Ферхюльста имеет вид:

$$\dot{x} = \lambda_0 x - x^2 \quad (1.1)$$

где:  $x$  - плотность, например  $[0, \infty)$  и (1.1) - это приближение  $\dot{x} = F(x, \lambda_0)$  связанное с симметрией. Аттрактором (1.1) является  $x = \lambda_0$  с точкой бифуркации  $\lambda_0 = 0, x = 0$ .

Известна ПВ  $P_S(x)$  решение УФП:

$$P_S(x) = Nx^{\frac{2\lambda_0}{\sigma^2} - \nu} \exp\left(\frac{-2x}{\sigma^2}\right), \quad (1.2)$$

$\nu = 1$  по Стратановичу,  $\nu = 2$  по Ито

где:  $N = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{\frac{2\lambda_0}{\sigma^2}} / \Gamma\left(\frac{2\lambda_0}{\sigma^2}\right)$ ,  $\Gamma\left(\frac{2\lambda_0}{\sigma^2}\right)$ -гамма-функция,  $x \in [0, \infty)$ .

## 2. Теорема Хорстхемке-Саичева по Ито

Необходимо в  $P_S(x)$  на  $[0, \infty)$  выделить множитель - пробную функцию в виде:

$$\Phi(x) = e^{-\frac{2x}{\sigma^2}}, \Phi(x) \in D, \quad (2.1)$$

чтобы найти  $a(x)$  - сингулярную обобщенную функцию (СОФ) с помощью функционала:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} a_{\epsilon}^u(x) \Phi(x) dx, \quad (2.2)$$

где

---

<sup>1</sup> Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

<sup>2</sup> Студент, Нижегородский государственный технический университет им.Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; denis-sablukov@mail.ru

$$a_\epsilon^u(x) = \frac{(\epsilon/\lambda_0)^\epsilon}{\Gamma(\epsilon+1)} \epsilon x^{\epsilon-2} \chi(x) \quad (2.3)$$

есть другой сомножитель, который назовем фундаментальной последовательностью (УФП) обобщенной функции по Ито,  $\epsilon = \frac{2\lambda_0}{\sigma^2}$  - параметр,  $\chi(x)$ -функция Хевисайда. Функция  $\Phi(x)$  отвечает свойствам непрерывности, бесконечной дифференцируемости, симметрии [3]. С учетом симметрии представим:

$$\Phi(x) = \Phi(0) + x\Phi'(x_0), \quad (2.4)$$

где  $x_0 \in (0, x)$ . Найдем (2.2), допустив финитность  $\Phi(x)$ , то есть  $\Phi(x) \equiv 0$  как только  $x > M$  и учтя ограниченность  $\Phi'(x)$ :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} a_\epsilon^u(x) \Phi(x) dx = \Phi'(x_0) \quad (2.5)$$

По определению [3]  $a_\epsilon^u(x)$  слабо сходится к  $\delta'(x - x_0)$ . Так как  $P_S^u(x) = a_\epsilon^u(x)\Phi(x)$  есть решение УФП, то  $\delta'(x - x_0)\Phi(x)$  при неотрицательных значениях на связном  $[0, \infty)$  как нормированная функция тоже есть решение УФП по Ито. Применяя свойство произведения функции  $\Phi(x)$  на СОФ получим:

$$P_S^u(x) = \delta'(x - x_0) + \frac{2}{\sigma^2} \delta(x - x_0) \quad (2.6)$$

Если  $\epsilon \rightarrow 0$  при стремлении аттрактора (1.1)  $\lambda_0 \rightarrow 0$ , то второе слагаемое в (2.6), является ПВ из теоремы Хорстхемке-Саичева по Стратановичу [2] и входит в необходимое условие получения  $a(x)$  по Ито. Очевидна линейность СОФ в (2.6) и принадлежность к решению при непосредственной подстановке в УФП.

Достаточным условием является выделение множителей УФП обобщенных функций по Ито  $a_\epsilon^u(x) \sim (\epsilon-1)x^{\epsilon-2}$  и по Стратановичу  $a_\epsilon^c(x) \sim x^{\epsilon-1}$  в  $P_S(x)$  на  $[0, \infty)$  для нахождения пробной функции  $\Phi(x)$ . Приведем определение обобщенных производных обобщенных функций и их непрерывности с помощью (2.2) [3]:

$$\int a'(x)\Phi(x) dx = - \int a(x)\Phi'(x) dx \quad (2.7)$$

так как нормальные производные есть

$$\Phi'(x) = -\frac{2}{\sigma^2} e^{-\frac{2x}{\sigma^2}}, a_\epsilon^u(x) = (a_\epsilon^c(x))' \quad (2.8)$$

определим первый функционал по Ито, а второй по Стратановичу в (2.7) и получим:

$$\frac{2}{\sigma^2}(\epsilon-1) \int a_\epsilon^u(x)\Phi(x) dx = \int a_\epsilon^c(x)\Phi(x) dx \quad (2.9)$$

Вычисление  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$  от (2.9) дает:

$$\frac{\sigma^2}{2} \Phi'(x) + \Phi(0) = 0 \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) соответствует функции  $\Phi(x)$  (2.1) при  $x = \frac{\sigma^2}{2}$ , типа  $\Phi(x) = 1$ , дружественного  $\Phi(x) \in D$  [3]. Действительно, финитность для таких функций обычно устанавливается при  $M = 3\frac{\sigma^2}{2}$ . Непрерывность и симметрия сдвигов  $\Phi(x)$  выражается равенством:

$$0 = \Phi(0) + \frac{\sigma^2}{2} \Phi'(x_0) = (\delta, \Phi(x) + \frac{\sigma^2}{2} \Phi'(x + x_0)) = (\frac{2}{\sigma^2} \delta(x) + \delta'(x - x_0), \Phi(x)), \quad (2.11)$$

где круглые скобки обозначают функционал. Следовательно функция  $\Phi(x)$  (2.10) дает верные значения. Так как  $\epsilon \rightarrow 0$  только при  $\frac{\sigma^2}{2} \rightarrow \infty$ , то слагаемое  $\Phi(0)$  в (2.10) отвечающее СОФ  $\frac{2}{\sigma^2} \delta(x)$  зануляется. Дифференцируемость  $\Phi(x)$  следует из применения (2.4) при вычислении  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0}$  от (2.9) и из величины окрестности  $x = 0 \sim 3\epsilon$  в соответствии с Леммой 1 раздела: "пространство пробных функций  $D$ "[3]. Относительная погрешность отклонения координаты  $x_0$  от координаты СОФ есть  $\frac{2x_0}{\sigma^2}$  и стремится к 0 при  $\frac{\sigma^2}{2} \rightarrow \infty$  для аттрактора (1.1)  $x = \lambda_0$ . Следовательно функция (2.10) является пробной. Тогда получаем  $P_S(x) = \delta'(x - x_0)$  при  $\delta'(x - x_0) \geq 0$  на связном  $[0, \infty)$  как нормированную функцию, непосредственно удовлетворяющую УФП. Сформулируем теорему: Для существования и пересечения стационарного решения УФП  $P_S(x)$  в окрестности точки  $x = 0$  со стационарным решением уравнения Ферхюльста в окрестности точки  $x = 0, \lambda_0 = 0$  необходима при  $\epsilon \rightarrow 0$  ПВ вида  $\delta'(x - x_0) + \frac{2}{\sigma^2} \delta(x - x_0)$  и достаточна ПВ вида  $\delta'(x - x_0)$  при  $\delta'(x - x_0) \geq 0$  на связном интервале.

**Следствие 2.1.** Если в необходимых условиях  $\epsilon \rightarrow 0$  только при  $\frac{\sigma^2}{2} \rightarrow \infty$  и заданном аттракторе  $\lambda_0$ , то ПВ (2.6) принимает вид  $P_S(x) = \delta'(x - x_0)$ , реализуемый также в достаточных условиях.

**Следствие 2.2.** В необходимых условиях относительная погрешность отклонения  $x_0$  от точки бифуркации  $x = 0, \lambda_0 = 0$  есть  $\frac{2x_0}{\sigma^2}$  и может быть сопоставлена с числом  $3\epsilon$ . Откуда имеем  $x_0 \sim 3\lambda_0$  и  $x_0 \rightarrow 0$  при  $\lambda_0 \rightarrow 0(\epsilon \rightarrow 0)$ , то есть при стремлении аттрактора  $\lambda = \lambda_0$  к нулю.

**Следствие 2.3.** Получение в необходимых условиях ПВ вида  $\delta(x - x_0) + \delta'(x - x_0)$  является аналогом граничного условия для стохастического волнового уравнения [4]. Граничное условие представляет полную систему в граничном нормированном пространстве  $W$  обобщенных функций.

Значение критического параметра  $\epsilon = \frac{2\lambda_0}{\sigma^2} \rightarrow 0$ , при котором ПВ  $P_S(x)$  по Ито имеет непрерывные обобщенные производные, отличается от значения  $\frac{2\lambda_0}{\sigma^2} = 1$  [1]. Однако при этом отличаются и условия рассмотрения ПВ.

Теорема Хорстхемке-Саичева по Ито частично включает в себя результаты теоремы Хорстхемке-Саичева по Стратановичу [2] и наряду с доказанной эквивалентностью УФП стохастическому дифференциальному уравнению по Ито в работе [1] может образовать более последовательную теорию ИШП.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хорстхемке В., Лефевр Р., *Индукционные шумом переходы*, Мир., 1987, 397 с.
2. Нагорных С.Н., "Критические параметры плотности вероятности в индуцированных шумом переходах", *Журн. СВМО.*, **16**:4 (2014).
3. Владимиров В.С., *Уравнения математической физики*, М. Наука, 1981, 512 с.

4. Розанов Ю. А., *Случайные поля и стохастические уравнения с частными производными.*, М. Наука, 1995, 256 с.

## Probability density as the solution of the Fokker-Plank equation in Noise-Induced Transitions.

© S. N. Nagornykh<sup>3</sup>, D. S. Sablukov<sup>4</sup>

**Abstract.** Under development of the noise-induced transitions theory all necessary and sufficient conditions of Fokker-Plank equations solutions are considered according to Ito as singular united functions near the bifurcation point of Verhulst equation in connection of Liouville theorem. The critical parameters of probability density are estimated.

**Key Words:** probability density, critical parameters, Fokker-Plank equations, Verhulst equation

---

<sup>3</sup> Docent of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

<sup>4</sup> Student, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; denis-sablukov@mail.ru

УДК 517.925.54

## Оценки погрешности линеаризации относительно части и всех фазовых переменных

© Щенников А. В.<sup>1</sup>, Щенников В. Н.<sup>2</sup>, Щенникова Е. В.<sup>3</sup>

**Аннотация.** Данная работа является полным изложением материала, представленного на международную конференцию, посвященную 85-летию В. И. Зубова. Разрабатывается метод построения оценок погрешностей линеаризации нелинейных систем дифференциальных уравнений, включая критические случаи.

**Ключевые слова:** оценка погрешности линеаризации, асимптотическая устойчивость

### 1. Построение оценки линеаризации для случая, когда исходная система обыкновенных дифференциальных уравнений имеет линейной первое приближение

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= A(t) \cdot y + Y(t, y, z) + \Delta_1(t), \\ y(t_0) &= \xi_y(t_0) - \varphi_y(t_0) \equiv y_0, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \xi_y(t_0) &= (\xi_1(t_0), \dots, \xi_k(t_0))^T, \varphi_y(t_0) = (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_k(t_0))^T. \\ \frac{dz}{dt} &= B(t) \cdot y + C(t) \cdot z + \Phi(t, z) + Z(t, y, z) + \Delta_2(t), \\ z(t_0) &= \xi_z(t_0) - \varphi_z(t_0) \equiv z_0, \\ \xi_z(t_0) &= (\xi_{k+1}(t_0), \dots, \xi_n(t_0))^T, \varphi_z(t_0) = (\varphi_{k+1}(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))^T. \end{aligned} \quad (1.2)$$

где  $A(t)$ ,  $B(t)$  и  $C(t)$  непрерывные ограниченные матрицы размерности соответственно  $k \times k$ ,  $k_1 \times k$  и  $k_1 \times k_1$  и, кроме того,  $(\|A(t)\| \wedge \|B(t)\| \wedge \|C(t)\| \leq M, 0 < M = const, \Delta(t) = (\Delta_1(t), \Delta_2(t))^T, \|\Delta_i(t)\| \leq \Delta_i, 0 < \Delta_i = const, i = \overline{1, 2}$ ; векторные функции  $Y(t, y, z)$ ,  $Z(t, y, z)$  и  $\Phi(t, z)$  непрерывные и удовлетворяют условиям

$$Y(t, 0, z) \equiv Z(t, 0, z) \equiv \Phi(t, 0) \equiv Z(t, 0, 0) \equiv 0, \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \|Y(t, y, z)\| &\leq a_1 \cdot \|y\|^{1+\beta}, \|Z(t, y, z)\| \leq a_2 \cdot \|y\|^{1+\beta}, \\ \|\Phi(t, z)\| &\leq a_3 \cdot \|z\|^{1+\beta}, 0 < (a_1 \wedge a_2 \wedge a_3 \wedge \beta) = const \end{aligned} \quad (1.4)$$

при  $\|y\| \leq r_1, \|z\| \leq r_2 ((r_1 \wedge r_2) > 0$  – произвольные вещественные числа),  $t \in J^+, k + k_1 = n$ . Здесь и далее будем считать, что норма матрицы и вектора согласованы. Норма вектора является евклидовой. Верхний индекс  $T$  означает транспонирование.

Предположим, что для системы

$$\frac{d\theta}{dt} = A(t)\theta, \quad (1.5)$$

<sup>1</sup> Студент кафедры фундаментальной информатики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; du@math.mrsu.ru

<sup>2</sup> Профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; du@math.mrsu.ru

<sup>3</sup> Доцент кафедры фундаментальной информатики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; du@math.mrsu.ru

$$\frac{d\tilde{\theta}}{dt} = C(t)\tilde{\theta} \quad (1.6)$$

существуют соответствующие функции Ляпунова  $v_1(t, \theta)$  и  $v_2(t, \tilde{\theta})$  удовлетворяющие следующим условиям:

$$a) b_1 \|\theta\|^2 \leq v_1(t, \theta) \leq b_2 \|\theta\|^2, (b_1 \wedge b_2) > 0, \quad (1.7)$$

$$\|grad_\theta v_1(t, \theta)\| \leq c_1 \|\theta\|, c_1 > 0, \quad (1.8)$$

$$\left. \frac{dv_1}{dt} \right|_{(5)} = -w_1(t, \theta), \quad (1.9)$$

где

$$-d_1 \|\theta\|^2 \leq -w_1(t, \theta) \leq -d_2 \|\theta\|^2, (d_1 \wedge d_2) > 0; \quad (1.10)$$

$$b) b_3 \|\tilde{\theta}\|^2 \leq v_2(t, \tilde{\theta}) \leq b_4 \|\tilde{\theta}\|^2, (b_3 \wedge b_4) > 0 \quad (1.11)$$

$$\|grad_{\tilde{\theta}} v_2(t, \tilde{\theta})\| \leq c_2 \|\tilde{\theta}\|, c_2 > 0, \quad (1.12)$$

$$\left. \frac{dv_2}{dt} \right|_{(6)} = -w_2(t, \tilde{\theta}), \quad (1.13)$$

где

$$-d_3 \|\tilde{\theta}\|^2 \leq -w_2(t, \tilde{\theta}) \leq -d_4 \|\tilde{\theta}\|^2, (d_3 \wedge d_4) > 0 \quad (1.14)$$

при  $t \in J^+, \|\theta\| \leq r_3, \|\tilde{\theta}\| \leq r_4, 0 < (r_3 \wedge r_4)$  – произвольные вещественные числа.

Справедлива теорема.

**Т е о р е м а 1.1.** Пусть: 1) выполнены предположения (1.7)-(1.14) относительно систем (1.5),(1.6) и условий (1.3),(1.4) относительно правых частей систем (1.1),(1.2); 2) система (1.29)-(1.30) (см. доказательство) имеет решения

$$0 \leq \eta_1^{(1)} \left( -\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1 c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K \right) \leq \eta_2^{(1)} \left( -\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1 c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1 \right),$$

$$0 \leq \eta_1^{(2)} \left( -\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3 c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K \right) \leq \eta_2^{(2)} \left( -\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3 c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K \right).$$

Тогда:

a) справедливы оценки

$$\sup_{t \geq t_0} \|y(t)\| \leq \max \left( a_1^{(0)} \|y_0\|, \eta_1^{(1)} \left( -\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1 c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1 \right) \right), \quad (1.15)$$

$$\sup_{t \geq t_0} \|z(t)\| \leq \max \left( a_2^{(0)} \|y_0\|, \eta_2^{(1)} \left( -\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3 c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_2 \right) \right); \quad (1.16)$$

$$\text{при } a_1^{(0)} \|y_0\| < \eta_2^{(1)} \left( -\frac{d_2}{2b_2}, -\frac{a_1 c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1 \right), a_2^{(0)} \|y_0\| < \eta_2^{(1)} \left( -\frac{d_4}{2b_4}, -\frac{a_3 c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_2 \right);$$

б) для разностей решений систем (1.12),(1.13) и их соответственно линеаризованных вариантов

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = A(t) \cdot \tilde{y} + \Delta_1(t), \tilde{y}(t_0) = y_0, \quad (1.17)$$

$$\frac{d\tilde{z}}{dt} = B(t) \cdot \tilde{y} + C(t) \cdot \tilde{z} + \Delta_2(t), \tilde{z}(t_0) = z_0, \quad (1.18)$$

т. е. для разностей  $\xi_y(t) = y(t) - \tilde{y}(t), \xi_z(t) = z(t) - \tilde{z}(t)$ , справедливы оценки

$$\begin{aligned} & \sup_{t \geq t_0} \|\xi_y(t)\| \leq \\ & \leq \frac{a_1 c_1 b_2}{b_1^{\frac{1}{2}} d_2} \left[ \max \left( a_1^{(0)} \|y_0\|, \rho_1^{(1)} \left( -\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1 c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1 \right) \right) \right]^{1+\beta} \end{aligned} \quad (1.19)$$

$$\sup_{t \geq t_0} \|\xi_z(t)\| \leq \frac{b_4 c_2}{b_3^{\frac{1}{2}} d_4} \max \{ \bar{B} \}. \quad (1.20)$$

Здесь  $b_1^{\frac{1}{2}} \leq a_1^{(0)} \leq b_2^{\frac{1}{2}}, b_3^{\frac{1}{2}} \leq a_2^{(0)} \leq b_4^{\frac{1}{2}}$ , а постоянные  $B$ ,  $\eta_i^{(1)} \left( -\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1 c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K \right), \eta_i^{(1)} \left( -\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3 c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_2 \right)$  определяются в процессе доказательства,  $i = 1, 2$ .

Доказательство.

Для построения оценок (1.15), (1.16) воспользуемся вектор-функцией Ляпунова  $v(t, y, z) = (v_1(t, y), v_2(t, z))^T$ , где функция  $v_1(t, y)$  удовлетворяет оценкам (1.7)-(1.10), а  $v_2(t, z)$  – оценкам (1.11)-(1.14). Найдем далее полную производную по времени  $t$  от векторной функции  $v(t, y, z)$  вдоль решений систем (1.1)-(1.2). Эта производная будет иметь вид

$$\frac{dv_1}{dt} \Big|_{(1)} = -w_1(t, y) + (grad_y v_1(t, y), Y(t, y, z) + \Delta_1(t)), \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_2}{dt} \Big|_{(2)} &= -w_2(t, y) + (grad_z v_2(t, z), B(t)y + \\ &+ \Phi(t, z) + Z(t, y, z) + \Delta_2(t)). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Исходя из ограничений (1.3), (1.4) на правые части систем (1.1), (1.2) и оценок (1.7)-(1.14), из соотношений (1.21) и (1.22) получим дифференциальные неравенства

$$\frac{dv_1}{dt} \Big|_{(1)} \leq -d_2 \|y\|^2 + c_1 \|y\| (a_1 \|y\|^{1+\beta} + \tilde{\Delta}_1), \quad (1.23)$$

$$\frac{dv_2}{dt} \Big|_{(2)} \leq -d_4 \|z\|^2 + c_2 \|z\| (M \|y\| + a_3 \|z\|^{1+\beta} + a_2 \|z\|^{1+\beta} + \tilde{\Delta}_2), \quad (1.24)$$

где  $\|y\| = \sup_{t \geq t_0} \|y(t)\|$ .

В полученных дифференциальных неравенствах (1.23) и (1.24) введем преобразования

$$\rho_1 = v_1^{\frac{1}{2}}(t, y), \rho_2 = v_2^{\frac{1}{2}}(t, z).$$

С учетом этих преобразований и оценок (1.7)-(1.14) дифференциальные неравенства (1.23) и (1.24) примут вид

$$\frac{d\rho_1}{dt} \leq -\frac{d_2}{2b_2} \rho_1 + \frac{a_1 \cdot c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}} \rho_1^{1+\frac{\beta}{2}} + K_1 \equiv \Phi_1(\rho_1), \quad (1.25)$$

$$\frac{d\rho_2}{dt} \leq -\frac{d_4}{2b_4}\rho_2 + \frac{a_3 \cdot c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}} \rho_2^{1+\frac{\beta}{2}} + K_2 \equiv \Phi_2(\rho_2, \rho_2), \quad (1.26)$$

где  $K_1 = \frac{\tilde{\Delta}_1 \cdot c_1}{2b_1^{\frac{1}{2}}}, K_2 = \frac{((M+a_2||y|||^{\beta}) \cdot ||y|| + \tilde{\Delta}_2) \cdot c_2}{2b_3^{\frac{1}{2}}}$ .

Тогда для системы дифференциальных неравенств (1.25) и (1.26) согласно теореме сравнения [1, гл. 5] получим неравенства

$$\rho_1(t) \leq \eta_1(t), \rho_2(t) \leq \eta_2(t)$$

при  $t \geq t_0$ , где  $\eta_1(t)$  и  $\eta_2(t)$  есть решение задачи Коши

$$\frac{d\eta_1}{dt} = \Phi_1(\eta_1), \eta_1(t_0) = \rho_1(t_0) = v_1^{\frac{1}{2}}(z_0, y_0) = a_1^{(0)} \cdot \|y_0\|, \quad (1.27)$$

$$\frac{d\eta_2}{dt} = \Phi_2(\eta_1, \eta_2), \eta_2(t_0) = \rho_2(t_0) = v_2^{\frac{1}{2}}(t_0, z_0) = a_2^{(0)} \cdot \|z_0\|. \quad (1.28)$$

Здесь постоянные  $a_1$  и  $a_2$  во всех случаях однозначно определяются.

Далее рассмотрим систему нелинейных алгебраических уравнений

$$\Phi_1(\eta_1) = 0, \quad (1.29)$$

$$\Phi_2(\eta_1, \eta_2) = 0. \quad (1.30)$$

Предположим, что в области  $\eta_1 \geq 0$  уравнение  $\Phi_1(\eta_1) = 0$  имеет решение  $\eta_1^{(1)} \left( -\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1 c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1 \right)$  и  $\eta_1^{(2)} \left( -\frac{d_2}{2b_2}, \frac{a_1 c_1}{2b_1^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_1 \right)$ . Пусть  $\eta_1^{(2)}(\cdot) \geq \eta_1^{(1)}(\cdot) \geq 0$ . Но тогда, если  $a_1^{(0)} \cdot \|y_0\| < \eta_1^{(2)}(\cdot)$  то решения дифференциального уравнения (1.27) равномерно ограничены в пределе (вернее, уравнение (1.27) обладает свойством конвергенции в малом [ ] в окрестности решения  $\eta_1^{(1)}(\cdot)$  так как  $\Phi_1(\eta_1) \geq 0$  при  $(0 \leq \eta_1 \leq \eta_1^{(1)}) \wedge (\eta_1 \geq \eta_1^{(2)})$  и  $\Phi_1(\eta_1) \leq 0$  при  $\eta_1^{(1)} \leq \eta_1 \leq \eta_1^{(2)}$ . Решение же  $\eta_1^{(2)}(\cdot)$  в этом случае не будет обладать отмеченным выше свойством. Значит, решение  $\rho_1(t)$  будет монотонно стремиться к  $\rho_1^{(1)}(\cdot)$ . Отсюда следует, что при  $a_1^{(0)} \cdot \|y_0\| < \eta_1^{(2)}(\cdot)$  для решения задачи Коши дифференциального уравнения (1.27) справедлива оценка (1.15). С учетом оценки (1.15) получим аналогичную оценку и для решения задачи Коши относительно фазовой переменной  $z(t)$ . Для этого снова применим теорему сравнения [1, гл. 5] по отношению к решениям дифференциального неравенства (1.26) и дифференциального уравнения сравнения (1.27), (1.28).

В результате получим  $\rho_2(t) \leq \eta_2(t)$  при  $t \leq t_0$ , где  $\eta_2(t)$  – решение задачи Коши дифференциального уравнения (1.28) при  $\eta_2(t_0) = \rho_2(t_0)$ .

Пусть в области  $\eta_2 \geq 0$  при  $\eta_1^{(1)} > 0$  уравнение  $\Phi_2(\eta_1^{(1)}, \eta_2) = 0$  имеет решение. Очевидно, что этих решений не более двух. Обозначим их через  $\eta_2^{(1)} \left( -\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3 \cdot c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_2 \right)$  и  $\eta_2^{(2)} \left( -\frac{d_4}{2b_4}, \frac{a_3 \cdot c_2}{2b_3^{1+\frac{\beta}{2}}}, K_2 \right)$ . Пусть  $\eta_2^{(2)}(\cdot) \geq \eta_2^{(1)}(\cdot) \geq 0$ . Тогда, рассуждая так же, как и при отыскании оценки (1.15), получим оценку (1.16).

**З а м е ч а н и е 1.1.** Условие 2) теоремы 1.1. можно опустить, если потребовать, чтобы величина  $\gamma$  была такой чтобы системы (1.29), (1.30) имела в области  $(\eta_1 \wedge \eta_2) \geq 0$  решение. Следует однако отметить, что если система (1.1),(1.2) является

системой с управлением, то разрешимость системы (1.29), (1.30) в области  $(\eta_1 \wedge \eta_2) \geq 0$  можно добиться путем выбора коэффициента усиления [2, гл. 7] и величины  $\gamma$ . В этом случае величина  $\gamma$  может принимать и большие значения по сравнению с системой (1.1), (1.2) без управления.

В случае, когда система (1.1), (1.2) является системой с управлением, можно ослабить условия на величину  $\gamma$  и коэффициент усиления, если осуществить аппроксимацию данной системы билинейной системой с управлением.

Докажем теперь справедливость оценок погрешностей линеаризации (1.19) и (1.20).

Отметим, что векторные функции  $\xi_y(t)$  и  $\xi_z(t)$  являются решениями систем

$$\frac{d\xi_y}{dt} = A(t)\xi_y + Y(t, y, z), \xi_y(t_0) = 0, \quad (1.31)$$

$$\frac{d\xi_z}{dt} = B(t)\xi_y + C(t)\xi_z + \Phi(t, z) + Z(t, y, z), \xi_z(t_0) = 0. \quad (1.32)$$

С целью получения искомых оценок (1.19), (1.20) воспользуемся функциями Ляпунова  $v_1(t, \xi_y)$  и  $v_2(t, \xi_z)$ , для которых справедливы условия (1.7)-(1.14), с той лишь разницей, что полные производные по времени от функций  $v_1(t, \xi_y)$  и  $v_2(t, \xi_z)$ , находятся вдоль решений соответственно систем

$$\frac{d\tilde{\xi}_y}{dt} = A(t)\tilde{\xi}_y \quad (1.33)$$

$$\frac{d\tilde{\xi}_z}{dt} = A(t)\tilde{\xi}_z \quad (1.34)$$

$$\left. \frac{dv_1(t, \tilde{\xi}_y)}{dt} \right|_{(30)} = -w_1(t, \tilde{\xi}_y) \leq -d_2 \|\tilde{\xi}_y\|^2, d_2 > 0,$$

$$\left. \frac{dv_2(t, \tilde{\xi}_z)}{dt} \right|_{(31)} = -w_2(t, \tilde{\xi}_z) \leq -d_4 \|\tilde{\xi}_z\|^2, d_4 > 0.$$

Тогда, с учетом оценок (1.7)-(1.14) получим дифференциальные неравенства

$$\left. \frac{dv_1(t, \tilde{\xi}_y)}{dt} \right|_{(28)} \leq -d_2 \|\tilde{\xi}_y\|^2 + (\text{grad}_{\xi_y} v_1, Y(t, y, z)),$$

$$\left. \frac{dv_1(t, \tilde{\xi}_y)}{dt} \right|_{(29)} \leq -d_4 \|\tilde{\xi}_z\|^2 + (\text{grad}_{\xi_z} v_2, (B(t)\xi_y + \Phi(t, z) + Z(t, y, z))).$$

В полученных дифференциальных неравенствах воспользуемся преобразованием

$$\rho_3 = v_1^{\frac{1}{2}}(t, \xi_y),$$

$$\rho_4 = v_2^{\frac{1}{2}}(t, \xi_z),$$

и оценками (1.7)-(1.14). В результате получим дифференциальные неравенства

$$\frac{d\rho_3}{dt} \leq -\frac{d_2}{2b_2}\rho_3 + \bar{A}, \rho_3(t_0) = 0,$$

$$\frac{d\rho_4}{dt} \leq -\frac{d_4}{2b_2}\rho_4 + \bar{B}, \rho_4(t_0) = 0,$$

где

$$\bar{\bar{A}} = \frac{a_1 c_1 |||y|||^{1+\beta}}{2b_1^{\frac{1}{2}}},$$

$$\bar{\bar{B}} = \frac{c_2}{2b_3^{\frac{1}{2}}} (M \cdot |||\xi_y||| + a_2 \cdot |||y|||^{1+\beta} + a_3 \cdot |||z|||^{1+\beta}),$$

$$|||\xi_y||| = \sup_{t \geq t_0} \|\xi_y(t)\|, |||\xi_z||| = \sup_{t \geq t_0} \|\xi_z(t)\|.$$

Этой системе дифференциальных неравенств соответствует соответственно система сравнения

$$\frac{d\eta_3}{dt} = -\frac{d_2}{2b_2}\eta_3 + \bar{\bar{A}}, \eta_3(t_0) = 0, \quad (1.35)$$

$$\frac{d\eta_4}{dt} = -\frac{d_4}{2b_4}\eta_4 + \bar{\bar{B}}, \eta_4(t_0) = 0. \quad (1.36)$$

По теореме сравнения [1] имеем

$$\rho_3(t) \leq \eta_3(t), t \geq t_0,$$

$$\rho_4(t) \leq \eta_4(t), t \geq t_0.$$

Положением равновесия системы (1.35) и (1.36) являются соответственно

$$\eta_3 = \frac{2b_2}{d_2} \bar{\bar{A}}, \eta_4 = \frac{2b_2}{d_2} \bar{\bar{B}}$$

Указанное положение равновесия равномерно асимптотически устойчиво. Это следует из того, что системы (1.35) и (1.36) являются линейными с отрицательными коэффициентами при фазовых переменных. Следовательно, система (1.35), (1.36) конвергентны. А тогда будет справедливы оценки (1.19) и (1.20).

Таким образом, теорема 1.1. полностью доказана.

Доказательство закончено.

**З а м е ч а н и е 1.2.** Применительно к задачам адаптивного управления с эталонной моделью, к задачам идентификации, в которых используется адаптивное управление с эталонной моделью, оценки (1.19) и (1.20) определяют оценки фазового рассогласования. Этalonной моделью в рассматриваемом случае является система (1.17)-(1.18).

**З а м е ч а н и е 1.3.** В силу того, что в данной работе рассматриваются управляемые системы, то необходимость требования разрешимости управлений  $\Phi_1(\eta_1) = 0, \Phi_2(\eta_1, \eta_2) = 0$  в положительной области отпадает, так как за счет выбора коэффициента усиления всегда можно добиться разрешимость указанных уравнений в указанной области.

**П р и м ер 1.1.** Пусть дана система

$$\dot{y} = \left( -2 + \frac{1}{1+t} \right) y + y^2 + \frac{1}{8}, y(0) = 1, \quad (1.37)$$

$$\dot{z} = y + \left( -1 + \frac{1}{2+t} \right) z - y^3 + z^2 + \frac{1}{64}, z(0) = 1. \quad (1.38)$$

Ее линеаризованный вариант имеет вид

$$\dot{\tilde{y}} = \left( -2 + \frac{1}{1+t} \right) \tilde{y} + \frac{1}{8}, y(0) = 1, \quad (1.39)$$

$$\dot{\tilde{z}} = \tilde{y} + \left( -1 + \frac{1}{2+t} \right) \tilde{z} + \frac{1}{64}, z(0) = 1. \quad (1.40)$$

Очевидно для уравнения  $\dot{\bar{y}} = \left( -2 + \frac{1}{1+t} \right) \bar{y}$  функцию Ляпунова можно выбрать в виде  $v_1 = \bar{y}^2$ , а для уравнения  $\dot{\bar{z}} = \tilde{y} + \left( -1 + \frac{1}{2+t} \right) \bar{z}$  в виде  $v_2 = z^2$ . Тогда будем иметь

$$\frac{dv_1}{dt} \Big|_{(34)} = 2 \left( -2 + \frac{1}{1+t} \right) y^2 + 2y^3 + \frac{1}{4}y, \quad (1.41)$$

$$\frac{dv_2}{dt} \Big|_{(35)} = 2zy + 2 \left( -1 + \frac{1}{2+t} \right) z^2 - 2zy^3 + 2z^3 + 2z \frac{1}{64}. \quad (1.42)$$

Далее введем для уравнения (1.41) преобразование:  $\rho_1 = v_1^{1/2}$ . В результате получим

$$\frac{d\rho_1}{dt} \leq -\rho_1 + \rho_1^2 + \frac{1}{8}, \rho(0) = 1.$$

Соответствующее дифференциальное уравнение сравнения имеет вид

$$\frac{du_1}{dt} = -u_1 + u_1^2 + \frac{1}{8}, u_1(0) = 1.$$

По теореме сравнения [1, гл. 5] имеем  $\rho_1(t) \leq u_1(t), t \geq 0$ .

Рассмотрим теперь уравнение  $-u_1 + u_1^2 + \frac{1}{8} = 0$ . Его корни  $u_1^{(1)} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}, u_1^{(2)} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ . Тогда  $u_1^{(2)} > u_1^{(1)} > 0$ .

Следовательно,

$$\|y(t)\| \leq \max \left\{ 1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} \right\} = 1. \quad (1.43)$$

Далее рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\xi}_y = - \left( -2 + \frac{1}{1+t} \right) \xi_y + y^2, \xi_y(0) = 0. \quad (1.44)$$

Функция Ляпунова для уравнения (1.44) выбираем в виде квадратичной формы, т. е.  $v_3(\xi_y) = \xi_y^2$ . Тогда

$$\frac{dv_3}{dt} \Big|_{(41)} = -2 \left( -2 + \frac{1}{1+t} \right) \xi_y^2 + 2\xi_y y^2. \quad (1.45)$$

Вводя преобразования  $\rho_3 = v_3^{1/2}$  для (1.45) и учитывая оценку сверху на  $|y(t)|$ , получим

$$\frac{d\rho_3}{dt} \leq -\rho_3 + 1, \rho_3(0) = 0.$$

Этому дифференциальному неравенству соответствует дифференциальное уравнение сравнения

$$\frac{du_3}{dt} \leq -u_3 + 1, u_3(0) = 0.$$

Тогда с учетом оценки (1.44), оценка сверху на  $|\xi_y(t)|$  будет иметь вид

$$|||\xi_y||| \leq 1.$$

Соответствующие оценки для переменных  $z(t)$  и  $\xi_z(t)$  найдем тем же методом, что и оценка на  $y(t)$  и  $\xi_y(t)$ . Для этого введем в уравнении (1.42) преобразование:  $\rho_2 = v_2^{1/2}$ . Тогда будем иметь дифференциальное неравенство

$$\frac{d\rho_2}{dt} \leq -\rho_2 + \rho_2^2 + \frac{1}{64}, \rho_2(0) = 1$$

и дифференциальное уравнение сравнения

$$\frac{du_2}{dt} = -u_2 + u_2^2 + \frac{1}{64}, u_2(0) = 1.$$

Снова по теореме сравнения имеем  $\rho_2(t) \leq u_2(t), t \geq 0$ .

Уравнение  $-u_2 + u_2^2 + \frac{1}{64} = 0$  имеет корни  $u_2^{(2)} = \frac{4+\sqrt{15}}{8}, u_2^{(1)} = \frac{4-\sqrt{15}}{8}$ , т. е.  $u_2^{(2)} > u_2^{(1)} > 0$ . Тогда на основании оценки (1.43) будем иметь

$$|||z(t)||| \leq \max \left\{ 1, \frac{4 - \sqrt{15}}{8} \right\} = 1. \quad (1.46)$$

Для нахождения оценки сверху на  $|\xi_y(t)|$  составим дифференциальное уравнение

$$\dot{\xi}_z = \xi_y + \left( -1 + \frac{1}{2+t} \right) \xi_z - y^3 + z^2, \xi_z(0) = 0.$$

Функцию Ляпунова для данного уравнения можно выбрать в виде  $v_4(t, \xi_z) = \xi_z^2$ . Тогда

$$\frac{dv_4}{dt} \Big|_{(41)} = 2\xi_z \xi_y + 2 \left( -1 + \frac{1}{2+t} \right) \xi_z^2 - 2\xi_z y^3 + \xi_z z^2. \quad (1.47)$$

Введем преобразование  $\rho_4 = v_4^{1/2}$  для данного соотношения. С учетом оценок (1.46) соотношение (1.47) преобразуется в дифференциальное неравенство

$$\frac{d\rho_4}{dt} \leq -\frac{1}{2}\rho_4 + \frac{5}{2}, \rho_4(0) = 0.$$

Соответствующее дифференциальное уравнение сравнения имеет вид

$$\frac{du_4}{dt} = -\frac{1}{2}u_4 + \frac{5}{2}, u_4(0) = 0.$$

По теореме сравнения  $\rho_4(t) \leq u_4(t)$  при  $t \geq 0$ . Таким образом, искомая оценка, с учетом оценки (1.46) найдена, т. е.

$$|||\xi_z(t)||| \leq 5.$$

Следовательно, найдены оценки погрешности линеаризации, т. е. верхние оценки на нормы решения нелинейной системы (1.37), (1.38) и ее линеаризованного варианта (1.39), (1.40).

## 2. Критический случай $k$ нулевых, которым соответствуют простые элементарные делители

В этом случае система (1.1) преобразует вид

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + R(t). \quad (2.1)$$

Пусть правые части системы (2.1) определены в области  $\Omega = \{x, t : x \in R^n, t \in J^+ = [0, +\infty]\}$  и пусть существует единственная точка  $x_1$ , в которой  $F(x_1) = 0$ . Вектор-функция  $R(t)$  непрерывная ограниченная. Будем считать, что  $F(x)$  есть аналитическая вектор-функция в окрестности точки  $x_1$ . Тогда систему (2.1) можно представить в виде

$$\dot{z} = Az + \Phi(z) + R(t), \quad (2.2)$$

где  $z = x - x_1$ ,  $A$  – постоянная матрица размерности  $n \times n$ ,  $\Phi(z)$  – аналитическая вектор-функция. Здесь  $z(0) = x(0) - x_1(0) \equiv z_0$ .

Будем искать оценку для максимального уклонения решения исходной системы (2.1) от решения соответствующей линеаризованной системы для случая, когда матрица  $A$  имеет  $k$  ( $k \leq n$ ) нулевых корней характеристического уравнения, которым соответствуют простые элементарные делители, а все остальные имеют  $Re\lambda_j(A) < 0$  ( $j = \overline{k+1, n}$ ). Случай же, когда  $Re\lambda_j(A) < 0$  ( $j = \overline{1, n}$ ), рассмотрен в работе [3, гл. 2].

Известно [3, гл. 2], что при указанных предположениях на матрицу  $A$  система (2.2) приводится к виду

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_1 z_1 + \Phi_1(z_1) + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{1j}^{(N)} + R_1(t), \\ \dot{z}_2 &= Z^{(\mu)}(z_2) + \sum_{j=\mu+1}^{\infty} Z_j^{(N)}(z_2) + \sum_{j=1}^{\infty} \Phi_{2j}^{(N)}(z_1, z_2) + \\ &\quad + R_2(t). \end{aligned} \quad (2.3)$$

В системе (2.3) вектор  $z_1$  имеет размерность  $n - k$ ,  $z_2$  – размерность  $k$ ,  $Re\lambda_j(A) < 0$  ( $j = \overline{1, n-k}$ ), а  $\Phi_{1j}^{(N)}, \Phi_{2j}^{(N)}$  – векторы, компоненты которых суть однородные формы степени  $N$  относительно координат вектора  $z_2$  с аналитическими по  $z_{11}, \dots, z_{1,n-k}$  коэффициентами,  $\Phi_1(z_1)$  – аналитическая вектор-функция, разложение которой не содержит членов, линейных относительно координат вектора  $z_1$ , координаты векторов в  $Z^{(N)}(z_2)$  есть также однородные формы порядка  $N$  ( $N = \mu, \mu + 1, \dots$ ),  $R(t) = \begin{bmatrix} R_1(t) \\ R_2(t) \end{bmatrix}$ .

Здесь  $z_{11}, \dots, z_{1,n-k}$  – координаты вектора  $z_1$ ,  $\|z_i\| = \sqrt{\sum_{j=1}^m z_{ij}^2}$  ( $i = 1, 2; m = k, n - k$ ). Дифференциальной системе  $\dot{z} = Az + \Phi(z) + R(t)$  поставим в соответствие систему вида

$$\dot{y}_1 = A_1 y_1 + R_1(t), \quad \dot{y}_2 = Z^{(\mu)} + R_2(t), \quad (2.4)$$

которую будем называть << линеаризованной >>.

Чтобы ответить на поставленный вопрос, найдем вначале оценку нормы вектора  $z_2$  в предположении, что нулевое решение системы

$$\dot{z} = Z^{(\mu)}(z_2) \quad (2.5)$$

асимптотически устойчивое и все решения удовлетворяют неравенству  $\|z_2\| \leq \beta t^{-\alpha}$ ,  $\beta$  и  $\alpha$  – положительные постоянные.

Как известно [3, гл. 2], для системы (2.5) существует однородная функция Ляпунова  $V_2$  порядка  $m+1-\mu$ , где  $m$  – четное достаточно большое число. Выберем в качестве функции

Ляпунова для системы (2.3) функцию вида  $V = V_1 + V_2$ . Здесь  $V_1$  – квадратичная форма и является функцией Ляпунова для системы  $\dot{z}_1 = A_1 z_1$ .

Введем обозначения:  $\rho_1 = V_1^{\frac{1}{2}}$ ,  $\rho_2 = V_2^{\frac{1}{m+1-\mu}}$ . Рассуждая так же, как в работах [4], [5] получим систему дифференциальных неравенств

$$\dot{\rho}_1 \leq -k_{11}\rho_1 + k_{12}\rho_2^{(\mu+1)}\rho_1^{1+\beta} + A_{10}R_1, \rho_1(0) = A_{10}\|\bar{z}_{10}\|,$$

$$\dot{\rho}_2 \leq -k_{21}\rho_2^\mu + k_{22}\rho_2^{(\mu+\beta_2)} + A_{11}R_1, \rho_2(0) = A_{11}\|\bar{z}_{20}\|$$

в области  $\rho_1 \leq r_1, \rho_2 \leq r_2, r = r(r_1, r_2)$ . Здесь  $k_{ij}, A_{10}, A_{11}, R_j, \beta_j$  – положительные вещественные постоянные;  $i, j = 1, 2$ .

По теореме сравнения [1, гл. 5] имеем

$$\rho_1(t) \leq v_1(t), \rho_2(t) \leq v_2(t),$$

где  $v_1(t)$  и  $v_2(t)$  удовлетворяют соответственно уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &\leq -k_{11}v_1 + k_{12}v_2^{(\mu+\alpha)}v_1^{1+\beta_1} + A_{10}R_1, \equiv \\ &\equiv \Psi_1(v_1, v_2), v_1(0) = A_{10}\|\bar{z}_{10}\|, \\ \dot{v}_2 &\leq -k_{21}v_2^\mu + k_{22}v_2^{(\mu+\beta_2)} + A_{11}R_2, \equiv \\ &\equiv \Psi_1(v_1, v_2), v_1(0) = A_{10}\|\bar{z}_{10}\|. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Предположим, что конечная система

$$\Psi_1(v_1, v_2) = 0, \Phi_2(v_1, v_2) = 0, \quad (2.7)$$

имеет решение в области  $K = \{v_1, v_2 : v_1 \geq 0, v_2 \geq 0\}$ . Тогда второе уравнение системы (2.7) имеет не более двух решений, а первое – не более четырех. Обозначим через

$$v_{11}(k_{11}, k_{12}, A_{10}, R_1), v_{12}(k_{11}, k_{12}, A_{10}, R_1),$$

$$v_{13}(k_{11}, k_{12}, A_{10}, R_1), v_{14}(k_{11}, k_{12}, A_{10}, R_1)$$

решения первого уравнения системы (2.7), а через

$$v_{21}(k_{21}, k_{22}, A_{11}, R_2), v_{22}(k_{21}, k_{22}, A_{11}, R_2)$$

– решение второго уравнения системы (2.7). В дальнейшем будем их обозначать через  $v_{kl}(\cdot)$  ( $k = 1, 2; l = \overline{1, 4}$ ). Очевидно, что

$$\Psi_2(v_2) \begin{cases} \geq 0 & \text{при } 0 \leq v_2 \leq v_{21} \wedge v_2 \geq v_{22}, \\ \leq 0 & \text{при } v_{21} \leq v_2 \leq v_{22}. \end{cases}$$

Отсюда следует, что положение равновесия  $v_{21}(\cdot)$  системы

$$\dot{v}_2 = \Psi_2(v_2) \quad (2.8)$$

асимптотически устойчиво при  $v_2(0) < v_{22}(\cdot)$ , а положение равновесия  $v_{22}(\cdot)$  неустойчиво. Далее нас будут интересовать решение первого уравнения системы (2.8)  $v_{11}(\cdot)$  и  $v_{12}(\cdot)$ , соответствующие  $v_2 = v_{21}(\cdot)$ , так как из  $v_{21}(\cdot)$  и одного из решений  $v_{11}(\cdot)$ , либо  $v_{12}(\cdot)$  можно выделить положительно асимптотически устойчивое положение равновесия системы (2.6).

Рассмотрим систему

$$\bar{v}_1 = \Psi_1(v_1, v_2). \quad (2.9)$$

Положительно асимптотически устойчивое положение равновесия системы (2.9) при  $v_2 = v_{21}(\cdot)$  определяется аналогично тому, как это проделано для системы (2.8). Пусть асимптотически устойчивое положение равновесия есть  $v_{11}(\cdot)$  при  $v_1(0) < v_{12}(\cdot)$ . Следовательно, справедливы оценки

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq t_0} \rho_1(t) &\leq \max\{A_{10}\|\bar{z}_{10}\|, v_{11}(\cdot), v_{21}(\cdot)\} \\ \sup_{t \geq t_0} \rho_2(t) &\leq \max\{A_{11}\|\bar{z}_{20}\|, v_{21}(\cdot)\} \end{aligned}$$

при  $A_{10}\|\bar{z}_{10}\| \leq v_{21}(\cdot)$  и  $A_{11}\|\bar{z}_{20}\| \leq v_{22}(\cdot)$ . Возвращаясь к переменной  $z$ , получим

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq t_0} \|z_1(t)\| &\leq \gamma_1 \max\{A_{10}\|\bar{z}_{10}\|, v_{11}(\cdot), v_{21}(\cdot)\} \\ \sup_{t \geq t_0} \|z_2(t)\| &\leq \gamma_2 \max\{A_{11}\|\bar{z}_{20}\|, v_{21}(\cdot)\}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь  $\gamma_1 > 0, \gamma_2 > 0$  – вещественные постоянные. В частности, их можно положить равными единице.

Перейдем теперь непосредственно к решению поставленного в работе вопроса. Для этого введем обозначение  $\varepsilon(t) = \begin{bmatrix} \varepsilon_1(t) \\ \varepsilon_2(t) \end{bmatrix}$ , где  $\varepsilon_1(t) = z_1(t) - y_1(t)$ , а  $\varepsilon_2(t) = z_2(t) - y_2(t)$ .

Вектор-функция  $\varepsilon(t)$  характеризует искомую погрешность линеаризации. Система дифференциальных уравнений, которой удовлетворяют  $\varepsilon_i(t)(i = 1, 2)$ , имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_1(t) &= A_1 \varepsilon_1 + \Phi_1(z_1) + \sum_{N=1}^{\infty} \Phi_2^{(N)}, \\ \dot{\varepsilon}_2(t) &= A_2(z_2(t), y_2(t)) \varepsilon_2 + \sum_{N=\mu+1}^{\infty} Z^{(N)}(z_2) + \sum_{N=\mu+1}^{\infty} \Phi_2^{(N)}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Выберем для системы (2.12) функцию Ляпунова в виде  $\bar{V} = \bar{V}_1 + \bar{V}_2$ , где  $\bar{V}$  – квадратичная форма, являющаяся функцией Ляпунова для системы

$$\dot{\varepsilon}_1(t) = A_1 \varepsilon_1,$$

$\bar{V}_2$  – функция Ляпунова для системы

$$\dot{\varepsilon}_2(t) = A_2(z_2(t), y_2(t)) \varepsilon_2. \quad (2.12)$$

Известно [3, гл. 2], что решения системы (2.12) стремятся к нулю асимптотически при  $t \rightarrow +i\infty$ . Предположим, что функция  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$  удовлетворяют неравенствам

$$\omega_1 \|\varepsilon\|^2 \leq \bar{V}_1 \leq \omega_2 \|\varepsilon\|^2, v_1 \|\varepsilon\|^2 \leq \bar{V}_2 \leq v_2 \|\varepsilon\|^2,$$

где  $\omega_1, \omega_2, v_1, v_2$  – положительные вещественные постоянные. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{V}_1}{dt} \Big|_{(55)} &= -\|\varepsilon_1\|^2 + (\text{grad} \bar{V}_1, \Phi_1(z_1) + \sum_{N=1}^{\infty} \Phi_{1j}^{(N)}) \\ \frac{d\bar{V}_2}{dt} \Big|_{(55)} &= -\bar{W}^2 + (\text{grad} \bar{V}_2, \sum_{N=\mu+1}^{\infty} z^{(N)}(z_2) + \sum_{N=\mu+1}^{\infty} \Phi_{2j}^{(N)}) \end{aligned}$$

Здесь  $\bar{W}^2$  – определено отрицательная функция. Очевидно, при указанных предложении на  $\bar{V}_2$  функция  $\bar{W}^2$  удовлетворяет неравенствам

$$\bar{\gamma}_1 \|\varepsilon_1\|^2 \leq |\bar{W}^2| \leq \bar{\gamma}_2 \|\varepsilon_1\|^2,$$

где  $\bar{\gamma}_1 > 0, \bar{\gamma}_2 > 0$  – вещественные постоянные. Вводя вновь обозначения:  $\bar{\rho}_1(t) = \bar{V}_1^{(1/2)}$  и  $\bar{\rho}_2(t) = \bar{V}_2^{(1/2)}$  получим для  $\varepsilon_i(t)(i = 1, 2)$  оценки

$$\begin{aligned} \sup_{t \geq t_0} \varepsilon_1(t) &\leq \frac{1}{2} \alpha_1 \omega_2 a \|z_1^*\|^{\mu+\alpha}, \\ \sup_{t \geq t_0} \varepsilon_2(t) &\leq \frac{\gamma_2 \alpha_2}{2v_1} (b \|z_1^*\|^v \cdot \|z_1^*\| + c \|z_1^*\| \cdot \|z_1^*\|), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где постоянные  $\alpha_1, \alpha_2, a, b, c$  определяются из следующих неравенств:

$$\|grad V_i\| \leq \alpha_i \|z_i\|, i = 1, 2,$$

$$\|\Phi_1(z_1) + \sum_{N=1}^{\infty} \Phi_2^{(N)}\| \leq a \|z_1\|^{\mu+\alpha}, x > 0,$$

$$\left\| \sum_{N=\mu+1}^{\infty} z^{(N)}(z_2) + \sum_{N=\mu+1}^{\infty} \Phi_2^{(N)} \right\| \leq b \|z_1^*\|^v \cdot \|z_1^*\| + c \|z_1^*\| \cdot \|z_1^*\|, v > 0,$$

в области  $\|z_1\| \leq r_1, \|z_2\| \leq r_2, (r_1 \wedge r_2)$ , а

$$z_1^* = \sup_{t \geq t_0} \|z_1(t)\|, z_2^* = \sup_{t \geq t_0} \|z_2(t)\|.$$

Таким образом, доказана следующая

### Т е о р е м а 2.1. Пусть

- a)  $x_1$  есть единственная точка, в которой  $F(x_1) = 0$ ;
- б) матрица имеет  $k$  нулевых корней, которым соответствуют простые элементарные делители, а все остальные имеют  $Re \lambda_j(A) < 0$  ( $j = \overline{k+1, n}$ ) (2.8);
- с) конечная система уравнений (2.9) имеет решения такие, что

$$0 \leq v_{21}(\cdot) \leq v_{22}(\cdot), 0 \leq v_{11}(\cdot) \leq v_{12}(\cdot);$$

d)  $A_{10} \|\bar{z}_{10}\| \leq v_{12}(\cdot), A_{11} \|\bar{z}_{20}\| \leq v_{22}(\cdot)$ .

Тогда существует решение дифференциальной системы (1.1) при всех  $t \geq 0$ , для которого справедливы оценки (2.10), а максимальное уклонение решения системы (2.2) от решения системы (2.5) удовлетворяет неравенствам (2.13) при  $F(x_1) = 0$ .

Для системы более общего вида по сравнению с системой (1.1), т. е.

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= X_s^{(\mu)}(x_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q) + \sum_{j=1}^q X_{sj}^{(\mu+\alpha)} + \Delta_s(t) \equiv \\ &\equiv M_s(t, x) + \Delta_s(t) \end{aligned} \quad (2.14)$$

с начальными данными  $(x_1^T(t_0), \dots, x_q^T(t_0))^T = x(t_0) = \xi(t_0) - \phi(t_0) = x_0$ .

Здесь  $X_s^{(\mu)}(x_s) : R^{n_s} \rightarrow R^{n_s}$  и  $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q) : R^+ \times R^{n_1} \times \dots \times R^{n_q} \rightarrow R^{n_s}$  ( $s = \overline{1, q}$ ),  $x_s \in R^{n_s}, R^{n_1} \oplus \dots \oplus R^{n_q} = R^n, x = (x_1^T, \dots, x_q^T)^T$ .  $X_s^{(\mu)}$  и  $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q)$  являются непрерывными по совокупности переменных и, кроме того, непрерывно дифференцируемыми по переменным  $x_1, \dots, x_q$ . Векторные функции  $X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \dots, x_q) :$

$R^+ \times R^{n_1} \times \cdots \times R^{n_q} \rightarrow R^{n_s}$  определяют взаимосвязи подсистем  $X_s^{(\mu)}(x_s), s, j = \overline{1, q}$ , т. е. подсистемы, а функции  $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q)$  описывают внутренние взаимосвязи подсистем:

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q), s = \overline{1, q}.$$

Векторные функции  $X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \dots, x_q)$  обладают теми же свойствами, что и  $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q), \Delta_s(t)$  – непрерывные ограниченные векторные функции,  $\|\Delta_s(t)\| < \Delta_s, \Delta_s > 0, M_s(t, 0) \equiv 0, s = \overline{1, q}$ . Индекс  $\mu = \frac{p}{q} > 1, p$  и  $q$  нечетные, указывает на порядок однородности  $X_s^{(\mu)}(x_s)$  и  $X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q)$ , у векторных функций  $X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \dots, x_q)$  верхний индекс  $\mu + \alpha, 0 < \alpha = const$  также указывает на порядок однородности относительно  $x_1, \dots, x_q$ . Всюду в дальнейшем будем считать, что норма вектора является евклидовой.

Будем считать, что структура многосвязной системы (2.14) может быть такой, что связи между подсистемами могут с течением времени отключаться, включаться или неопределённым образом изменяться. Следовательно, возникает проблема определения структуры многосвязной системы таким образом, чтобы изменения связей между подсистемами не нарушили устойчивость системы. В случае, когда устойчивость системы и её частей сохраняется при всевозможных изменениях связей, то многосвязная система называется устойчивой к связыванию или коннективно устойчивой ([1, гл. 2 и 5]). Очевидно, (2.14) является системой при полностью включенных связях. Режим функционирования её в этом случае будет предельным. Чтобы отразить структурные изменения в (2.14), в систему вводится ([6, гл. 2 и 7]) так называемая фундаментальная матрица связей  $\bar{E} = (\bar{e}_{sj})_{1,1}^{q,q}$ , где  $\bar{e}_{sj} = 1$  если возможна связь между подсистемами, и нулю, если связи отсутствуют. Следовательно, чтобы полнее отразить структурные изменения в исходную систему (2.14) вводится еще матрица текущих связей  $E$

Подробное описание многосвязных систем при указанных структурных изменениях связей можно найти в [6, гл. 2 и 7].

<< Линейным >> приближением (2.14) является система

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(y_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, y_1, \dots, y_q) + \Delta_s(t), \quad (2.15)$$

для которой  $(x_1^T(t_0), \dots, x_q^T(t_0))^T = x(t_0) = x_0 = y_0 = y(t_0) = (y_1^T(t_0), \dots, y_q^T(t_0))^T, s = \overline{1, q}$ .

Далее опишем структуру системы (2.14). Для этого введем фундаментальные матрицы связи  $\bar{L} = (\bar{l}_{sj})_{1,1}^{q,q}$  и  $\bar{E} = (\bar{e}_{sj})_{1,1}^{q,q}$ , а также матрицы текущих связей  $L = (l_{sj})_{1,1}^{q,q}$  и  $E = (e_{sj})_{1,1}^{q,q}, L \in \bar{L}, E \in \bar{E}$ . Здесь  $L$  и  $\bar{L}$  есть соответственно матрица текущих связей и функциональная матрица на уровне подсистемы. Тогда векторные функции взаимосвязей представим в виде

$$\begin{aligned} X_{1s}^{(\mu)}(t, x_1, \dots, x_q) &:= X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}x_1, \dots, l_{sq}x_q), \\ X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, x_1, \dots, x_q) &:= X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}x_1, \dots, e_{sq}x_q). \end{aligned}$$

В этом случае система (2.14), (2.15) соответственно будут иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_s}{dt} &= X_s^{(\mu)}(x_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}x_1, \dots, l_{sq}x_q) + \sum_{j=1}^q X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}x_1, \dots, e_{sq}x_q) + \\ &\quad + \Delta_s(t), \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(y_s) + X_{1s}^{(\mu)}(t, l_{s1}y_1, \dots, l_{sq}y_q) + \Delta_s(t), s = \overline{1, q}. \quad (2.17)$$

Исходя из вида правых частей системы (2.14) и структуры матриц  $L, \bar{L}, E, \bar{E}$ , следует, что все условия теоремы Каратеодори о существовании и единственности решения задачи Коши для систем (2.16), (2.17) выполнены. Таким образом, решениями систем (2.16), (2.17) является абсолютно непрерывные векторные функции.

Предположим, что справедливы неравенства

$$l_{s1}x_1, \dots, l_{sq}x_q) \leq \sum_{j=1}^q l_{sj}a_{1sj}\|x_j\|^{\mu},$$

$$X_{sj}^{(\mu+\alpha)}(t, e_{s1}x_1, \dots, e_{sq}x_q) \leq \sum_{j=1}^q e_{sj}b_{sj}\|x_j\|^{\mu+\alpha}$$

при  $\|x_j\| \leq r_j$ ,  $\sqrt{\sum_{j=1}^q r_j^2} = r$ ,  $s = \overline{1, q}$ . Здесь  $a_{1sj}$  и  $b_{sj}$  – положительные вещественные числа,  $s, j = \overline{1, q}$ .

Пусть нулевое решение систем

$$\frac{dx_s}{dt} = X_s^{(\mu)}(x_s), s = \overline{1, q}, \quad (2.18)$$

асимптотически устойчиво. Следовательно, по теореме Зубова-Красовского для каждой системы (2.18) существует функция Ляпунова, удовлетворяющая условиям

$$c_{1s}\|x_s\|^{m+1-\mu} \leq V_s(x_s) \leq c_{2s}\|x_s\|^{m+1-\mu},$$

$$\|gradV_s(x_s)\| \leq c_{3s}\|x_s\|^{m-\mu},$$

$$\left. \frac{dV_s}{dt} \right|_{(62)} \leq -c_{4s}\|x_s\|^m \quad (2.19)$$

при  $\|x_s\| \leq r_s$ ,  $\sqrt{\sum_{s=1}^q r_s^2} = r$ ,  $s = \overline{1, q}$ . Здесь  $m$  – достаточно большое четное вещественное положительное число,  $c_{1s}, c_{2s}, c_{3s}, c_{4s}$  – постоянные положительные вещественные числа,  $s = \overline{1, q}$ .

Следует отметить, что для получения искомых оценок необходимо воспользоваться функцией Ляпунова

$$V(x) = \sum_{s=1}^q d_s V_s(x_s), d_s > 0.$$

Для систем общего вида с использованием метода векторных функций Ляпунова также получаются оценки погрешности линеаризации (см. доказательство [8, 9]).

**З а м е ч а н и е 2.1.** Таким образом, в работах [5], [6], [8-12] и в данной работе развит метод построения оценок погрешностей линеаризации.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воронов А.А., *Введение в динамику сложных управляемых систем*, "Наука", М., 1985.
2. Зубов В.И., *Теория колебаний*, Высш. школа, М., 1979.

3. Зубов В.И., *Лекции по теории управления*, Лань, СПб., 2009.
4. Зубов В.И., *Устойчивость движения*, Высш. школа, М., 1973.
5. Щенников В.Н., “Об оценке погрешности линеаризации нелинейной дифференциальной системы в критическом случае”, *ДУ*, **17**:3 (1981), 568-571.
6. Щенников В.Н., Щенникова Е.В., “Оценки погрешности линеаризации относительно части и всех фазовых переменных”, *ДУ*, **37**:1 (2001), 132-133.
7. Шильяк Д., *Децентрализованное управление сложными системами*, Мир, 1994.
8. Шестаков А.А., “О степенной асимптотике неавтономной однородной и квазиоднородной системы”, *ДУ*, **11**:8 (1975), 1427-1436.
9. Щенников А.В., Щенников В.Н., “Коннективные оценки погрешности линеаризации существенно нелинейных систем”, *Известия ВУЗов. Математика*, 2013, № 11, 51-63.
10. Щенникова Е.В., “Построение киннективных оценок погрешностей линеаризации многосвязных нелинейных систем”, *Вестник С.-Петербург. ун-та*, 2007, Сер. 10, вып. 1, 76-83.
11. Щенников В.Н., Щенникова Е.В., “Построение верхних оценок решений нелинейных систем дифференциальных уравнений и оценки погрешностей линеаризации”, *Труды СВМО*, **8**:1 (2006), 127-135.
12. Дружинина О.В., Щенников В.Н., Щенникова Е.В., “Построение оценки максимального отклонения решений нелинейной многосвязной системы и соответствующей системы первого приближения”, *Труды X Международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость, управление» 12-16 июня, Казань, 2012 г.*, **1**, секция 1. Аналитическая механика, 143-153.

## Estimates of error of linearization of the relative parts and all phase variables

© A. V. Shchennikov<sup>4</sup>, V. N. Shchennikov<sup>5</sup>, E. V. Shchennikova<sup>6</sup>

**Abstract.** This article is a complete statement of the material presented at the international conference dedicated to the 85th anniversary of VI Zubov. The paper developed a method of constructing estimates of error of linearization of nonlinear systems of differential equations, including critical cases.

**Key Words:** estimation of the error of linearization, asymptotic stability

<sup>4</sup> Applicant of the Department of fundamental informatics, Ogarev Mordovia State University, Saransk; du@math.mrsu.ru

<sup>5</sup> Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University, Saransk; du@math.mrsu.ru

<sup>6</sup> Associate Professor of the Department of fundamental informatics, Ogarev Mordovia State University, Saransk; du@math.mrsu.ru

УДК 519.7

## Непараметрическая оценка квадрата плотности вероятности и её свойства в условиях больших выборок

© Т. К. Юлдашев<sup>1</sup>

**Аннотация.** Эффективность непараметрических алгоритмов обработки информации, основанных на ядерных оценках квадрата плотности вероятности и коэффициента размытости, во многом определяется объемом статистических данных. Рассмотрены непараметрические оценки квадрата плотности вероятности типа Розенблатта-Парзена. Изучены асимптотические свойства непараметрической оценки квадрата плотности вероятности. Проверена сходимость непараметрической оценки квадрата плотности вероятности с увеличением объема экспериментальных данных к искомой функции квадрата плотности вероятности. Получена формула асимптотической несмещенностии искомой оценки. Доказана сходимость в среднеквадратическом и состоятельность оценки квадрата плотности. При этом произведен вычислительный эксперимент для выявления зависимости среднеквадратической ошибки аппроксимации непараметрической оценки квадрата плотности вероятности от объемов статистических данных. Полученная в данной работе непараметрическая оценка квадрата плотности вероятности может быть использовано при построении алгоритмов принятия решений, когда основной исходной информацией являются статистические данные.

**Ключевые слова:** квадрат плотности вероятности, непараметрическая оценка, асимптотические свойства, оценка типа Розенблатта-Парзена, ядерная функция

Часто изучение технологических, экономических и социально-организационных систем связано с усложнением процессов принятия решений, что в значительной мере характерно для условий априорной неопределенности в закономерностях функционирования систем и их целевых установках. Использование традиционных методов моделирования и управления путем введения последовательности допущений не всегда позволяет получать удовлетворительные результаты.

Теоретическую основу построения обучающихся алгоритмов синтеза и анализа структуры сложных систем в условиях априорной неопределенности составляет задача непараметрического оценивания плотности вероятности.

Непараметрическая оценка квадрата плотности вероятности может быть использовано при построении алгоритмов принятия решений, когда основной исходной информацией являются статистические данные.

Применение непараметрической оценки плотности вероятности и методов восстановления законов распределения случайных величин позволяет получить статистики с улучшенными аппроксимационными свойствами при увеличении количества наблюдений [1] – [5]. Здесь важную роль играют методы, основанные на оценках плотности вероятности типа Розенблатта-Парзена [6], [7].

### 1. Постановка задачи

Пусть имеется выборка  $V = \left( x^i, i = \overline{1, n} \right)$  статистически независимых наблюдений случайной величины  $x$ , распределенной в соответствии с неизвестной плотностью вероятности  $p(x)$ .

<sup>1</sup> Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru

В качестве приближения по эмпирическим данным  $V$  плотности вероятности  $p(x)$  примем статистику [6], [7]:

$$\bar{p}(x) = \frac{1}{nc} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x - x^i}{c}\right), \quad (1.1)$$

где  $\Phi(u)$  – ядерная функция,  $c$  – коэффициент размытости ядерной функции.

Коэффициенты размытости  $c = c(n)$  ядерной функции в непараметрической оценке плотности вероятности (1.1) убывают с ростом  $n$ .

Объектом исследования является статистика:

$$\bar{p}^2(x) = \left( \frac{1}{nc} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x - x^i}{c}\right) \right)^2. \quad (1.2)$$

Цель настоящей работы заключается в исследовании асимптотических свойств непараметрической оценки квадрата плотности вероятности (1.2) и их сравнении со свойствами статистики (1.1).

## 2. Асимптотические свойства непараметрической оценки $\bar{p}^2(x)$

**Т е о р е м а 2.1.** Пусть выполняются следующие условия:

1). Функция  $p(x)$  ограничена и непрерывна со всеми своими производными до второго порядка сколь угодно;

2). Ядерная функция  $\Phi(u)$  является положительным и симметричным, а также  $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \Phi(u)du = 1$ ;

3).  $b^{\nu,2\mu} = \int_{-\infty}^{\infty} u^{2\mu} \Phi^\nu(u)du < \infty$ ,  $1 \leq \mu \in \mathbb{N}$ ,  $\nu \geq 1$ ;

4).  $\int_{-\infty}^{\infty} u^{2\mu-1} \Phi^\nu(u)du = 0$ ,  $1 \leq \mu \in \mathbb{N}$ ,  $\nu \geq 1$ ;

5).  $\lim_{n \rightarrow \infty} c(n) = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot c(n) = \infty$ .

Тогда:

1) Математическое ожидание  $M$  непараметрической оценки  $\bar{p}^2(x)$  при увеличении объема экспериментальных данных сходится к искомой функции квадрата плотности вероятности  $p^2(x)$ , т.е. справедлива формула асимптотической несмещенностии оценки  $\bar{p}^2(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^2(x) - p^2(x)) = 0; \quad (2.1)$$

2) Имеют место сходимость в среднеквадратическом:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^2(x) - p^2(x))^2 = 0; \quad (2.2)$$

и состоятельность оценки квадрата плотности  $\bar{p}^2(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^2(x) - M(\bar{p}^2(x)))^2 = 0. \quad (2.3)$$

Доказательство. Так как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^2(x) - p^2(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^2(x)) - \lim_{n \rightarrow \infty} M(p^2(x)) = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^2(x)) - p^2(x),$$

то для доказательства формулы (2.1) достаточно показать, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^2(x)) = p^2(x). \quad (2.4)$$

Для  $M(\bar{p}^2(x))$  с помощью статистики (1.2) имеем

$$\begin{aligned} M(\bar{p}^2(x)) &= M\left(\frac{1}{nc} \sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\right)^2 = M\left(\frac{1}{n^2 c^2} \sum_{i=1}^n \Phi^2\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\right) + \\ &+ M\left(\frac{1}{n^2 c^2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right) \Phi\left(\frac{x-x^j}{c}\right)\right). \end{aligned} \quad (2.5)$$

Для первого слагаемого в (2.5) имеем

$$M\left(\frac{1}{n^2 c^2} \sum_{i=1}^n \Phi^2\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\right) = \frac{1}{n^2 c^2} \sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2\left(\frac{x-x^i}{c}\right) p(x^i) dx^i.$$

Так как выборка независимых наблюдений  $(x^i, i = \overline{1, n})$  из генеральной совокупности  $X$  есть наблюдения одной и той же случайной величины, то

$$p(x^1) = p(x^2) = \dots = p(x^n) = p(t).$$

Отсюда

$$M\left(\frac{1}{n^2 c^2} \sum_{i=1}^n \Phi^2\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\right) = \frac{1}{nc} \left[ \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2\left(\frac{x-t}{c}\right) p(t) dt \right].$$

Производим замену переменных

$$\frac{x-t}{c} = u, \quad t = x - cu, \quad dt = -cdu.$$

Тогда, в силу условий теоремы, получаем

$$\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2\left(\frac{x-t}{c}\right) p(t) dt = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(u) p(x - cu) du.$$

Разложим функцию  $p(x - cu)$  в ряд Тейлора в точке  $x$ :

$$p(x - cu) = p(x) + (x - cu - x)p^{(1)}(x) + \frac{(x - cu - x)^2}{2} p^{(2)}(x) + \dots + O(c^4),$$

где  $p^{(k)}(x)$  – производная  $k$ -го порядка функции  $p(x)$ .

Тогда имеем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2\left(\frac{x-t}{c}\right) p(t) dt = \\ & = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(u) \left[ p(x) - c u p^{(1)}(x) + \frac{c^2 u^2}{2!} p^{(2)}(x) + \dots + O(c^4) \right] du. \end{aligned}$$

Поэтому, в силу условий теоремы, справедливо соотношение

$$M \left( \frac{1}{n^2 c^2} \sum_{i=1}^n \Phi^2\left(\frac{x-x^i}{c}\right) \right) = \frac{1}{nc} \left[ p(x) b^{2,0} + \frac{c^2}{2} p^{(2)}(x) b^{2,2} + \dots + O(c^4) \right], \quad (2.6)$$

где  $b^{2,0} = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(u) du$ ,  $b^{2,2} = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \Phi^2(u) du$ .

Для второго слагаемого в (2.5) имеем

$$\begin{aligned} & M \left( \frac{1}{n^2 c^2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right) \Phi\left(\frac{x-x^j}{c}\right) \right) = \\ & = \frac{1}{n^2 c^2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right) \Phi\left(\frac{x-x^j}{c}\right) p(x^i, x^j) dx^i dx^j \right) = \\ & = \frac{1}{n^2 c^2} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2\left(\frac{x-t}{c}\right) p^2(t) dt^2 = \frac{n(n-1)}{n^2} \left[ \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x-t}{c}\right) p(t) dt \right]^2 = \\ & = \frac{n-1}{n} \left[ p(x) + \frac{c^2}{2} p^{(2)}(x) + \dots + O(c^4) \right]^2 = \\ & = \frac{n-1}{n} \left[ p^2(x) + c^2 p(x) p^{(2)}(x) + \frac{c^4}{4} \left( p^{(2)}(x) \right)^2 + O(\cdot) \right]. \quad (2.7) \end{aligned}$$

Подстановка формул (2.6) и (2.7) в (2.5) дает

$$\begin{aligned} & M(\bar{p}^2(x)) \sim \frac{1}{nc} \left[ p(x) b^{2,0} + \frac{c^2}{2} p^{(2)}(x) b^{2,2} \right] + \\ & + p^2(x) + c^2 p(x) p^{(2)}(x) + \frac{c^4}{4} \left( p^{(2)}(x) \right)^2. \quad (2.8) \end{aligned}$$

Переход к пределу при  $n \rightarrow \infty$  в (2.8) с учетом (1.2) дает (2.4). Итак, мы доказали асимптотическую несмешенность непараметрической оценки  $\bar{p}^2(x)$ . Таким образом, доказана справедливость формулы (2.1).

Теперь докажем, что математическое ожидание непараметрической оценки  $\bar{p}^4(x)$  при увеличении объема экспериментальных данных сходится к искомой функции плотности вероятности  $p^4(x)$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^4(x)) = p^4(x). \quad (2.9)$$

Действительно, имеем

$$\begin{aligned}
 M\left(\bar{p}^4(x)\right) &= M\left(\frac{1}{nc}\sum_{i=1}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\right)^4 = M\left(\frac{1}{n^4c^4}\sum_{i=1}^n \Phi^4\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\right) + \\
 &+ M\left(\frac{1}{n^4c^4}\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\Phi^3\left(\frac{x-x^j}{c}\right)\right) + \\
 &+ M\left(\frac{1}{n^4c^4}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\Phi\left(\frac{x-x^j}{c}\right)\Phi^2\left(\frac{x-x^k}{c}\right)\right) + \\
 &+ M\left(\frac{1}{n^4c^4}\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\Phi\left(\frac{x-x^j}{c}\right)\Phi\left(\frac{x-x^k}{c}\right)\Phi\left(\frac{x-x^m}{c}\right)\right). \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

Для первого слагаемого в (2.10) используем определение математического ожидания

$$\begin{aligned}
 M\left(\frac{1}{n^4c^4}\sum_{i=1}^n \Phi^4\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\right) &= \frac{1}{n^4c^4}\sum_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^4\left(\frac{x-x^i}{c}\right)p(x^i)dx^i = \\
 &= \frac{1}{n^4c^3}\sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^4\left(\frac{x-t}{c}\right)p(t)dt \right] = \\
 &= \frac{1}{n^3c^3} \left[ p(x)b^{4,0} + \frac{c^2}{2}p^{(2)}(x)b^{4,2} + \dots + O(c^4) \right]. \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в (2.10), в силу определения математического ожидания, имеем

$$\begin{aligned}
 M\left(\frac{1}{n^4c^4}\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\Phi^3\left(\frac{x-x^j}{c}\right)\right) &= \\
 &= \frac{1}{n^4c^4}\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x-x^i}{c}\right)\Phi^3\left(\frac{x-x^j}{c}\right)p(x^i, x^j)dx^i dx^j = \\
 &= \frac{1}{n^4c^4}\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^4\left(\frac{x-t}{c}\right)p^2(t)dt^2 = \\
 &= \frac{n(n-1)}{n^4c^2} \left[ \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2\left(\frac{x-t}{c}\right)p(t)dt \right]^2 \sim \frac{1}{n^2c^2} \left[ p(x)b^{2,0} + \frac{c^2}{2}p^{(2)}(x)b^{2,2} \right]^2 = \\
 &= \frac{1}{n^2c^2} \left[ p^2(x) \left( b^{2,0} \right)^2 + c^2 p^{(2)}(x) p(x) b^{2,2} b^{2,0} + \frac{c^4}{4} \left( p^{(2)}(x) \right)^2 \left( b^{2,2} \right)^2 \right]. \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

Аналогично и для третьего слагаемого в (2.10), в силу определения математического ожидания, получаем асимптотическое разложение

$$\begin{aligned}
 M & \left( \frac{1}{n^4 c^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \Phi\left(\frac{x - x^i}{c}\right) \Phi\left(\frac{x - x^j}{c}\right) \Phi^2\left(\frac{x - x^k}{c}\right) \right) = \\
 & = \frac{1}{n^4 c^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^4\left(\frac{x - t}{c}\right) p^3(t) dt^3 = \\
 & = \frac{n-1}{n^2 c} \left[ \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^{\frac{4}{3}}\left(\frac{x - t}{c}\right) p(t) dt \right]^3 \sim \frac{1}{nc} \left[ p(x) b^{\frac{4}{3}, 0} + \frac{c^2}{2} p^{(2)}(x) b^{\frac{4}{3}, 2} \right]^3 = \\
 & = \frac{1}{nc} \left[ p^3(x) \left( b^{\frac{4}{3}, 0} \right)^3 + \frac{3c^2}{2} p^{(2)}(x) p^2(x) b^{\frac{4}{3}, 2} \left( b^{\frac{4}{3}, 0} \right)^2 + \right. \\
 & \quad \left. + \frac{3c^4}{4} p(x) \left( p^{(2)}(x) \right)^2 \left( b^{\frac{4}{3}, 2} \right)^2 b^{\frac{4}{3}, 0} + O(\cdot) \right]. \tag{2.13}
 \end{aligned}$$

Для четвертого слагаемого в (2.10) имеем следующую аппроксимационную оценку

$$\begin{aligned}
 M & \left( \frac{1}{n^4 c^4} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq k}}^n \Phi\left(\frac{x - x^i}{c}\right) \Phi\left(\frac{x - x^j}{c}\right) \Phi\left(\frac{x - x^k}{c}\right) \Phi\left(\frac{x - x^m}{c}\right) \right) = \\
 & = \frac{n-1}{nc^4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^4\left(\frac{x - t}{c}\right) p^4(t) dt^4 \sim \\
 & \sim \left[ \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{x - t}{c}\right) p(t) dt \right]^4 \sim \left[ p^2(x) + c^2 p^{(2)}(x) p(x) + \frac{c^4}{4} \left( p^{(2)}(x) \right)^2 \right]^2 \sim \\
 & \sim p^4(x) + 2c^2 p^{(2)}(x) p^3(x) + \frac{c^4}{2} p^2(x) \left( p^{(2)}(x) \right)^2. \tag{2.14}
 \end{aligned}$$

С учетом формул (2.11) – (2.14) из (2.10) получаем следующую асимптотическую формулу

$$\begin{aligned}
 M(\bar{p}^4(x)) & \sim \frac{1}{n^3 c^3} \left[ p(x) b^{4,0} + \frac{c^2}{2} p^{(2)}(x) b^{4,2} \right] + \\
 & + \frac{1}{n^2 c^2} \left[ p^2(x) \left( b^{2,0} \right)^2 + c^2 p^{(2)}(x) p(x) b^{2,2} b^{2,0} + \frac{c^4}{4} \left( p^{(2)}(x) \right)^2 \left( b^{2,2} \right)^2 \right] + \\
 & + \frac{1}{nc} \left[ p^3(x) \left( b^{\frac{4}{3}, 0} \right)^3 + \frac{3c^2}{2} p^{(2)}(x) p^2(x) b^{\frac{4}{3}, 2} \left( b^{\frac{4}{3}, 0} \right)^2 + \frac{3c^4}{4} p(x) \left( p^{(2)}(x) \right)^2 \left( b^{\frac{4}{3}, 2} \right)^2 b^{\frac{4}{3}, 0} \right] + \\
 & + p^4(x) + 2c^2 p^{(2)}(x) p^3(x) + \frac{c^4}{2} p^2(x) \left( p^{(2)}(x) \right)^2. \tag{2.15}
 \end{aligned}$$

Переходя к пределу в (2.15) при  $n \rightarrow \infty$ , в силу условий теоремы, получаем (2.9). С помощью формулы (2.9) нетрудно показать, что имеет место сходимость в среднеквадратическом для оценки плотности  $\bar{p}^2(x)$ . Действительно, из следующего соотношения

$$\lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^2(x) - p^2(x))^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^4(x)) - 2 \lim_{n \rightarrow \infty} M(\bar{p}^2(x))p^2(x) + p^4(x)$$

с учетом (2.4) и (2.9) получаем, что справедлива формула (2.2).

Поскольку  $\bar{p}^2(x)$  является асимптотически несмещенной оценкой для  $p^2(x)$  и сходится в среднеквадратическом, то она обладает свойством состоятельности, т.е. справедлива формула (2.3).

Доказательство закончено.

### 3. Мера близости между искомой плотностью вероятностей $p^2(x)$ и ее оценкой $\bar{p}^2(x)$

С учетом формул (2.8) и (2.15) имеем

$$\begin{aligned} M(\bar{p}^2(x) - p^2(x))^2 &= M(\bar{p}^4(x)) - 2M(\bar{p}^2(x))p^2(x) + p^4(x) \sim \\ &\sim \frac{1}{n^3 c^3} \left[ p(x)b^{4,0} + \frac{c^2}{2} p^{(2)}(x)b^{4,2} \right] + \\ &+ \frac{1}{n^2 c^2} \left[ p^2(x)(b^{2,0})^2 + c^2 p^{(2)}(x)p(x)b^{2,2}b^{2,0} + \frac{c^4}{4} (p^{(2)}(x))^2 (b^{2,2})^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{nc} \left[ p^3(x)(b^{\frac{4}{3},0})^3 + \frac{3c^2}{2} p^{(2)}(x)p^2(x)b^{\frac{4}{3},2}(b^{\frac{4}{3},0})^2 + \frac{3c^4}{4} p(x)(p^{(2)}(x))^2 (b^{\frac{4}{3},2})^2 b^{\frac{4}{3},0} \right] + \\ &+ p^4(x) + 2c^2 p^{(2)}(x)p^3(x) + \frac{c^4}{2} p^2(x)(p^{(2)}(x))^2 - 2p^2(x) \left\{ \frac{1}{nc} \left[ p(x)b^{2,0} + \frac{c^2}{2} p^{(2)}(x)b^{2,2} \right] + \right. \\ &\quad \left. + p^2(x) + c^2 p(x)p^{(2)}(x) + \frac{c^4}{4} (p^{(2)}(x))^2 \right\} + p^4(x) \end{aligned}$$

или, пренебрегая слагаемыми малости некоторых величин, получаем

$$\begin{aligned} M(\bar{p}^2(x) - p^2(x))^2 &\sim \frac{1}{nc} \left\{ p^3(x) \left[ (b^{\frac{4}{3},0})^3 - 2b^{2,0} \right] + \right. \\ &\quad \left. + c^2 p^2(x)p^{(2)}(x) \left[ \frac{3}{2} (b^{\frac{4}{3},0})^2 b^{\frac{4}{3},2} - 2b^{2,2} \right] + \frac{3c^4}{4} p(x)(p^{(2)}(x))^2 (b^{\frac{4}{3},2})^2 b^{\frac{4}{3},0} \right\}. \quad (3.1) \end{aligned}$$

Для определения условий сходимости на всей области изменения  $x$  проинтегрируем (3.1)

$$\begin{aligned} M \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{p}^2(x) - p^2(x))^2 dx &\sim \frac{1}{nc} \left\{ \|p^3(x)\| \left[ (b^{\frac{4}{3},0})^3 - 2b^{2,0} \right] + \right. \\ &\quad \left. + c^2 \|p^2(x)p^{(2)}(x)\| \left[ \frac{3}{2} (b^{\frac{4}{3},0})^2 b^{\frac{4}{3},2} - 2b^{2,2} \right] + \frac{3c^4}{4} \|p(x)(p^{(2)}(x))^2\| (b^{\frac{4}{3},2})^2 b^{\frac{4}{3},0} \right\}. \quad (3.2) \end{aligned}$$

где  $\|p(x)\| = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx$ .

Величина критерия (3.2) представляет собой меру близости между искомой плотностью вероятностей  $p^2(x)$  и ее асимптотической оценкой  $\bar{p}^2(x)$ . Эта величина при конечном объеме выборки зависит от коэффициента размытости  $c$  и ядерной функции  $\Phi(u)$ .

#### 4. Анализ свойств статистики $\bar{p}^2(x)$

Рассмотрим следующую функцию [8]

$$W_1(n, c) = \frac{M \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{p}(x) - p(x))^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p^2(x) dx} \sim \frac{\frac{1}{nc} \|\Phi(u)\|^2 + \frac{c^4 \|p^{(2)}(x)\|^2}{4}}{\|p^2(x)\|}. \quad (4.1)$$

Проведем для конкретных условий анализ асимптотических выражений относительных среднеквадратических ошибок аппроксимаций (4.1). С этой целью рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} W_2(n, c) &= \frac{M \int_{-\infty}^{\infty} (\bar{p}^2(x) - p^2(x))^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} p^4(x) dx} \sim \frac{1}{nc \|p^4(x)\|} \times \\ &\times \left\{ \|p^3(x)\| \left[ \left( b^{\frac{4}{3}, 0} \right)^3 - 2b^{2, 0} \right] + c^2 \|p^2(x)p^{(2)}(x)\| \left[ \frac{3}{2} \left( b^{\frac{4}{3}, 0} \right)^2 b^{\frac{4}{3}, 2} - 2b^{2, 2} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{3c^4}{4} \|p(x)(p^{(2)}(x))^2\| \left( b^{\frac{4}{3}, 2} \right)^2 b^{\frac{4}{3}, 0} \right\}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Приведённые выше отношения зависят от  $p(x)$ , вида ядерных функций и объема  $n$  исходных статистических данных.

В качестве восстанавливаемой плотности вероятности рассмотрим нормированную функцию Лапласа

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right].$$

В качестве ядерной функции  $\Phi(u)$  будем использовать оптимальное ядро Епанечникова [1]

$$\Phi(u) = \begin{cases} \frac{3}{4\sqrt{5}} - \frac{3u^2}{20\sqrt{5}}, & |u| < \sqrt{5}, \\ 0, & |u| \geq \sqrt{5}. \end{cases}$$

В качестве коэффициента размытия  $c$  в (4.1) и (4.2) берем оптимальный коэффициент размытия [8]

$$c = \left\{ \frac{b^{2,0}}{n \left\| \left( p^{(2)}(x) \right)^2 \right\|} \right\}^{\frac{1}{5}}.$$

Тогда небольшой вычислительный эксперимент показывает, что среднеквадратические ошибки аппроксимаций (4.1) и (4.2) становятся малыми для больших значений  $n$  и стремятся к нулю при  $n \rightarrow \infty$ . При этом среднеквадратическая ошибка аппроксимации (4.2) квадрата плотности вероятности стремится к нулю быстрее, чем среднеквадратическая ошибка аппроксимации (4.1) плотности вероятности. Отсюда следует, что статистика (1.2) обладает лучшими асимптотическими свойствами, чем статистика (1.1).

## 5. Заключение

Непараметрическая оценка квадрата плотности вероятности используется при построении обучающихся алгоритмов синтеза и анализа структуры сложных систем в условиях априорной неопределенности.

В данной работе проверяется сходимость непараметрической оценки  $\bar{p}^2(x)$  с увеличением объема экспериментальных данных к искомой функции квадрата плотности вероятности  $p^2(x)$ . Доказываются: асимптотическая несмещенност, среднеквадратическая сходимость и состоятельность оценки  $\bar{p}^2(x)$ .

Вычислительная эффективность непараметрических алгоритмов обработки информации, основанных на ядерных оценках квадрата плотности вероятности, во многом определяется объемом статистических данных. Определяется критерий меры близости между искомой плотностью вероятностей  $p^2(x)$  и ее оценкой  $\bar{p}^2(x)$  и эта величина при конечном объеме выборки зависит от коэффициента размытости  $c$  и ядерной функции  $\Phi(u)$ . В условиях большого объема выборки доказывается, что статистика (1.2) обладает лучшими асимптотическими свойствами, чем статистика (1.1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Епанчиников В. А., “Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности”, *Теория вероятностей и ее применения*, **14**:1 (1969), 156 – 161.
2. Мания Г. М., *Статистическое оценивание распределения вероятностей*, ТбГУ, Тбилиси, 1974, 238 с.
3. Надарая Э. А., “Об оценке плотностей распределения случайных величин”, *Сообщ. АН ГРССР*, **32** (1964), 277 – 280.
4. Лапко А. В., Лапко В. А., *Непараметрические системы обработки неоднородной информации*, Наука, Новосибирск, 2007, 174 с.
5. Тарасенко Ф. П., Дмитриев Ю. Г., “Об одном классе непараметрических оценок нелинейных функционалов плотности”, *Теория вероятностей и ее применения*, **19**:2 (1974), 404 – 409.
6. Parzen E., “On estimation of a probability density function and mode”, *Ann. Math. Statistic*, **33** (1962), 1065 – 1076.
7. Rosenblatt M., “Remarks on some nonparametric estimates of a density function”, *Ann. Math. Statistic*, **27** (1956), 642 – 669.
8. Лапко А. В., Лапко В. А., “Свойства непараметрической оценки плотности вероятности многомерных случайных величин в условиях больших выборок”, *Информатика и системы управления*, 2012, № 2 (32), 121 – 126.

# Nonparametric estimate of quadrate of the probability densities and its properties under the large sample

© T. K. Yuldashev<sup>2</sup>

**Abstract.** Efficiency of nonparametric data processing algorithms, based on kernel estimators of square of probability density and blur factor, largely determined by the volume of statistical data. It is considered in this article the nonparametric estimate of quadrate of the probability densities of Rosenblatt-Parzen type. It is studied the asymptotic properties of the nonparametric estimate of quadrate of the probability densities. It is tested the convergence of nonparametric estimates of the probability densities with increasing amount of experimental data to the desired probability density function. It is obtained the formula of asymptotically unbiased of the desired estimates. It is proved the mean-square convergence and the solvency of quadrate density. It is produced the computer experiment to determine the dependence of mean square error of nonparametric estimate approximation of the probability densities quadrate from the volume of statistical data. The nonparametric estimate of quadrate of the probability densities, obtained in this article can be used for constructing decision algorithms when the primary source of information is statistical data.

**Key Words:** quadrate of probability density, nonparametric estimate, asymptotic properties, Rosenblatt-Parzen type estimation, kernel function

<sup>2</sup> Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru

## ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

УДК 519.63:517.958

### **К вопросу математического моделирования процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями**

© А. Р. Нафикова<sup>1</sup>, В. Н. Кризский<sup>2</sup>

**Аннотация.** В работе исследуется математическая модель задачи переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями. Приводится сравнительное со-поставление результатов компьютерного моделирования с известными моделями для случая однородных кусочно-постоянных сред. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов по исследованию процессов переноса радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели.

**Ключевые слова:** диффузия-адвекция радона, анизотропная среда, краевая задача

### **1. Введение**

Процессы тепломассопереноса описываются краевыми задачами математической физики параболического типа. Проблема переноса вещества в диффундирующих слоистых средах является предметом исследований как теоретиков, так и практиков различных областей: медицины, экологии, геологии и геофизики.

Так, в области медицины актуальны задачи достижения необходимых для лечения концентраций медицинских препаратов в тканях человека, имеющих, как правило, слоистую структуру, в необходимые интервалы времени. Известные математические модели переноса лекарственных препаратов при поверхностном или внутримышечном воздействиях имеют вид одномерной краевой задачи в кусочно-однородных слоистых средах. Но используемые модели не учитывают анизотропию диффузионных свойств тканей (например, мышечных) или возможные локальные образования измененных тканей (например, онкологических опухолей).

В области геологии и геофизики актуальными являются задачи переноса радона и дочерних продуктов его распада, измерений параметров радоновых полей, результаты которых используются при поисках месторождений радиоактивных и углеводородных ископаемых, геологическом картировании, прогнозе горных ударов и тектонических землетрясений, экологической оценке мест под строительство зданий и сооружений, оценке санитарного состояния помещений.

Математическое моделирование процессов распределения радона в грунте и его стока в приземный слой атмосферы связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка математических моделей, алгоритмов решения и программ расчета процессов распространения радона – актуальная задача, имеющая практическое значение.

<sup>1</sup> Старший преподаватель кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; albinabikbaeva@gmail.com.

<sup>2</sup> Профессор кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; Krizsky@rambler.ru.

В настоящей работе рассматривается новая математическая модель трехмерной задачи диффузии-адвекции радона, учитывая анизотропию диффузационных свойств геологической среды и геометрию локальных включений.

## 2. Постановка задачи и способ решения

Пусть среда (рис. 2.1) разделена гладкими параметрически заданными границами  $\gamma_{i,0} = \{\gamma_{i,0}(x, y) | \gamma_{i,0} \rightarrow z_i = \text{const} \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty\}$  ( $i = \overline{0, N}$ ) на горизонтальные слои  $\Omega_{0,0}, \Omega_{1,0}, \dots, \Omega_{N,0}$ , заполненные веществом, диффузационные свойства которых опи-

зываются постоянными симметричными тензорами  $D_{i,0} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,0} & d_{xy}^{i,0} & d_{xz}^{i,0} \\ d_{xy}^{i,0} & d_{yy}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} \\ d_{xz}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} & d_{zz}^{i,0} \end{pmatrix}$  и скоростями адвекции  $\nu_{0,0}, \nu_{1,0}, \dots, \nu_{N,0}$  соответственно.

Каждый слой  $\Omega_{i,0}$  содержит  $M_i$  локальных включений  $\Omega_{i,j}$  ( $j = \overline{1, M_i}$ ) с гладкими границами  $\gamma_{i,j}$ , заполненных веществом, физические свойства которых описываются по-

стоянными симметричными тензорами диффузии  $D_{i,j} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,j} & d_{xy}^{i,j} & d_{xz}^{i,j} \\ d_{xy}^{i,j} & d_{yy}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} \\ d_{xz}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} & d_{zz}^{i,j} \end{pmatrix}$  и скоростями

адвекции  $\nu_{i,j}$ ,  $i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$ .

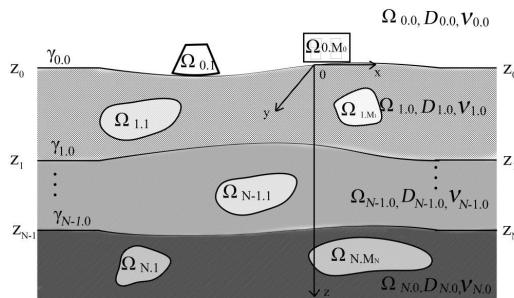


Рисунок 2.1

Горизонтально-слоистая среда с включениями

Математическая модель переноса радона в области исследования  $\Omega = \bigcup_{i=0}^N \bigcup_{j=0}^{M_i} \Omega_{i,j} \subset R^3$  может быть представлена начально-краевой задачей для уравнения в частных производных параболического типа:

$$\frac{\partial A_{i,j}(P,t)}{\partial t} = \operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} A_{i,j}(P,t)) + \nu_{i,j} \frac{\partial A_{i,j}(P,t)}{\partial z} - \lambda(A_{i,j}(P,t) - A_{i,\infty}), \quad (2.1)$$

$$P = P(x, y, z) \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i};$$

$$((D_{i,0} \bar{\nabla} A_{i,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,0} A_{i,0}(P,t))|_{\gamma_{i,0}} = \quad (2.2)$$

$$= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} A_{i+1,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i+1,0} A_{i+1,0}(P,t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1};$$

$$A_{i,0}(P,t)|_{\gamma_{i,0}} = A_{i+1,0}(P,t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \quad (2.3)$$

$$((D_{i,j} \bar{\nabla} A_{i,j}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,j} A_{i,j}(P,t))|_{\gamma_{i,j}} = \quad (2.4)$$

$$= ((D_{i,0} \bar{\nabla} A_{i,0}(P,t), \bar{n}) + \nu_{i,0} A_{i,0}(P,t))|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i};$$

$$A_{i,j}(P,t)|_{\gamma_{i,j}} = A_{i,0}(P,t)|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \quad (2.5)$$

$$(2.6)$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} A_{N,0}(P, t) = A_{N,\infty}, \lim_{z \rightarrow -\infty} A_{0,0}(P, t) = 0; \quad (2.7)$$

$$\lim_{P \in \Omega_{i,0}, \sqrt{x^2+y^2} \rightarrow \infty} A_{i,0}(P, t) = A_i(P, t), i = \overline{0, N}; \quad (2.8)$$

$$A_{i,j}(P, 0) = 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}. \quad (2.9)$$

Здесь  $A_{i,j}(P, t)$  – функция объемной активности радона (ОАР) в грунте,  $A_{i,j}(P, t) \in C_P^2(\Omega) \cap C_P^1(\gamma_{i,j}) \cap C_t^1(\Omega)$ ;  $\lambda$  – постоянная распада радона;  $A_{i,\infty}$  – ОАР, находящегося в радиоактивном равновесии с радием ( $^{226}\text{Ra}$ ) в грунте  $i$ -го слоя, которая равна  $A_{i,\infty} = K_{i,em} A_{i,Ra} \rho_{i,s} (1 - \eta_i)$ ,  $K_{i,em}$  – коэффициент эманирования радона,  $A_{i,Ra}$  – удельная активность  $^{226}\text{Ra}$ ,  $\rho_{i,s}$  – плотность твердых частиц,  $\eta_i$  – пористость грунта,  $A_i(P, t)$  – нормальное поле радона, описывающее диффузию-адвекцию радона в слоистой среде в предположении отсутствия включений. Переменная  $t \geq 0$  – время.

Если область  $\Omega_{0,0}$  – приземный слой атмосферы, то в задаче (2.1) – (2.8) следует положить  $A_{0,\infty} = 0$ . При  $M_0 > 0$  включения  $\Omega_{0,1}, \dots, \Omega_{0,M_0}$  могут описывать жилые и производственные сооружения.

В работе [1] описан способ решения задачи (2.1) – (2.8) на основе методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений. Для его реализации разработан программный комплекс расчета поля ОАР средствами компьютерной системы Maple. С помощью программного комплекса произведены численные расчеты с целью проверки правильности построенной модели и предложенного алгоритма, анализа влияния параметров сред на распределение поля радона.

### 3. Сравнительное сопоставление для случая однородных сред

В соответствии с работой [2], проведен вычислительный эксперимент с диффузионно-адвективной моделью переноса радона для пятислойной горизонтально-слоистой среды с плоско-параллельными границами со следующими значениями ее параметров:  $n = 5$ ;  $\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{ с}^{-1}$ ;  $z_0 = 0 \text{ м}$ ,  $z_1 = 1 \text{ м}$ ,  $z_2 = 3 \text{ м}$ ,  $z_3 = 6 \text{ м}$ ;  $d_{0,0} = 1 \cdot 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $d_{1,0} = d_{2,0} = d_{3,0} = d_{4,0} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $v_{0,0} = 0 \text{ м/с}$ ,  $v_{1,0} = v_{2,0} = v_{3,0} = v_{4,0} = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м/с}$ ;  $\rho_{1,s} = \rho_{2,s} = \rho_{3,s} = \rho_{4,s} = 2700 \text{ кг/м}^3$ ;  $\eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = \eta_4 = 0.45$ ;  $K_{1,em} = K_{2,em} = K_{3,em} = K_{4,em} = 0.2$ ;  $A_{1,Ra} = 90 \text{ Бк/кг}$ ,  $A_{2,Ra} = 4 \text{ Бк/кг}$ ,  $A_{3,Ra} = 30 \text{ Бк/кг}$ ,  $A_{4,Ra} = 1000 \text{ Бк/кг}$ .

Сравнительный анализ результатов на вертикальном профиле  $(2, 2, z)$ ,  $z \in [0, 10]$ , соответствующих моменту времени  $t = 10^6 \text{ с}$ , приведен в табл. 1, где:  $z$  – глубина, м;  $A_{gr}$  – значения ОАР [2],  $\text{кБк}/\text{м}^3$ ;  $A_{num}$  – значения ОАР, найденные по разработанным алгоритмам,  $\text{кБк}/\text{м}^3$ ;  $\Delta$  – абсолютная погрешность, %;  $\delta$  – относительная погрешность, %.

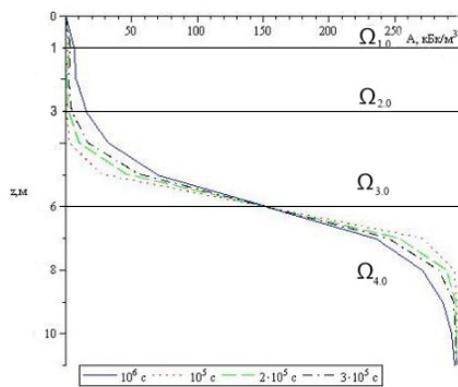


Рисунок 3.1

Кривые распределения ОАР в различные моменты времени  $t$

$z, \text{ м}$	$A_{gr}, \text{ кБк/м}^3$	$A_{num}, \text{ кБк/м}^3$	$\Delta, \%$	$\delta, \%$
1	2	3	4	5
0	0.0000	0.0001	0.01	—
1	2.3629	2.2798	8.31	3.52
2	0.4401	0.4465	0.64	1.45
3	0.9790	0.9736	0.54	0.55
4	2.8929	2.8628	3.01	1.04
5	27.6425	27.3560	28.65	1.04
6	149.4550	149.3438	11.12	0.07
7	271.0907	271.3304	23.97	0.09
8	295.2742	295.7716	49.74	0.17
9	297.1825	296.9868	19.57	0.07
10	297.2752	297.0000	27.52	0.09

Рисунок 3.2

Сравнительный анализ результатов для  $t = 10^6$  с

Данные табл. 1 показывают, что максимальная относительная погрешность не превосходит 4%. На рис. 3.1 показана динамика распределения ОАР в различные моменты времени  $t$ :  $10^5$  с;  $2 \cdot 10^5$  с;  $3 \cdot 10^5$  с;  $10^6$  с.

#### 4. Перенос радона. Анизотропный случай

Проведены численные расчеты функции распределения ОАР в кусочно-однородной плоско-параллельной горизонтально-слоистой среде с шарообразным включением  $\Omega_{4.1}$  радиуса  $R = 0.5$  м с центром в точке  $(1, 1, 7)$  (рис. 4.1). Значения параметров среды соответствуют представленным выше. Физические свойства включения заданы симмет-

рическим тензором диффузии  $D_{4.1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-5} & 0 & 0 \\ 0 & 3 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$  и скоростью адвекции

$$v_{4.1} = 4 \cdot 10^{-5} \text{ м/с.}$$

Результаты численного моделирования по вертикальному профилю  $(2, 2, z), z \in [0, 11]$  приведены на рис. 4.2. На рис. 4.2 (а) изображен график функции нормального поля радона (без учета включений) при  $t = 10^6$  с. Влияние включения на ОАР отражено на рис. 4.2 (б).

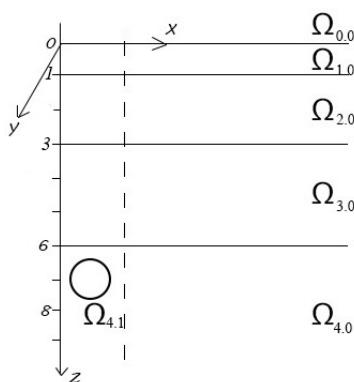


Рисунок 4.1

Геометрия среды

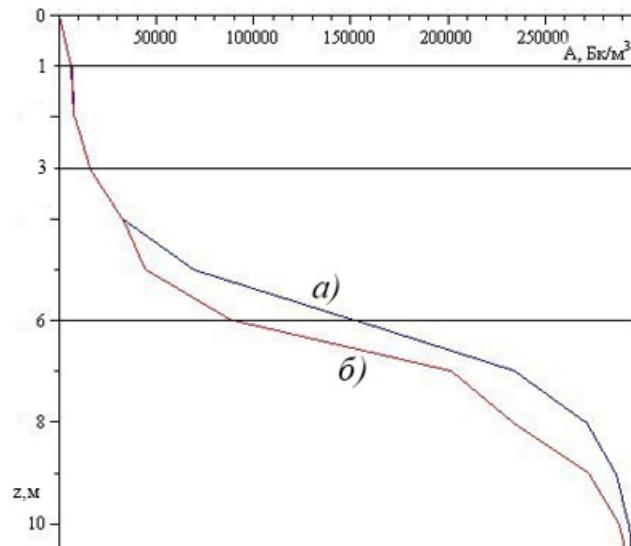


Рисунок 4.2  
График функции ОАР

Для среды, геометрия которой представлена на рис. 4.1, показана зависимость ОАР от радиуса  $R$  шарообразного включения  $\Omega_{4.1}$ :  $R = 0.5$  м и  $R = 1.5$  м с центром в точке  $(1, 1, 8)$  (рис. 4.4).

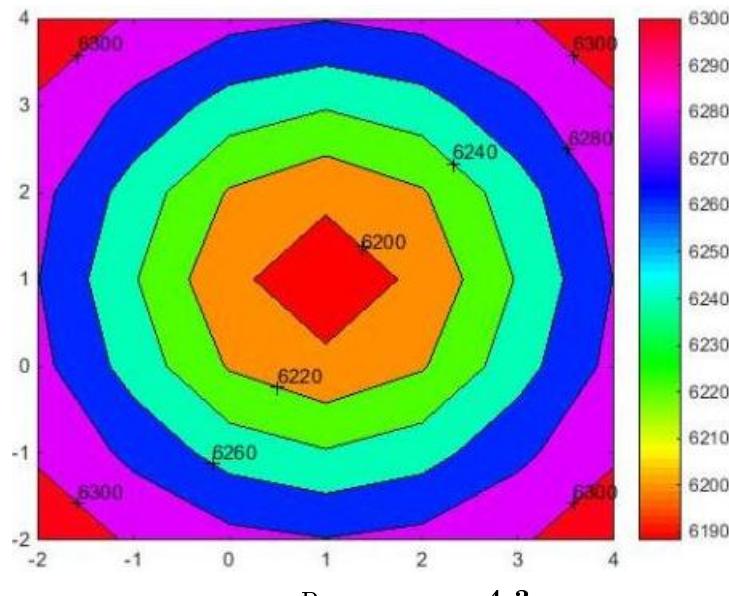


Рисунок 4.3  
Зависимость объемной активности радона от радиуса включения

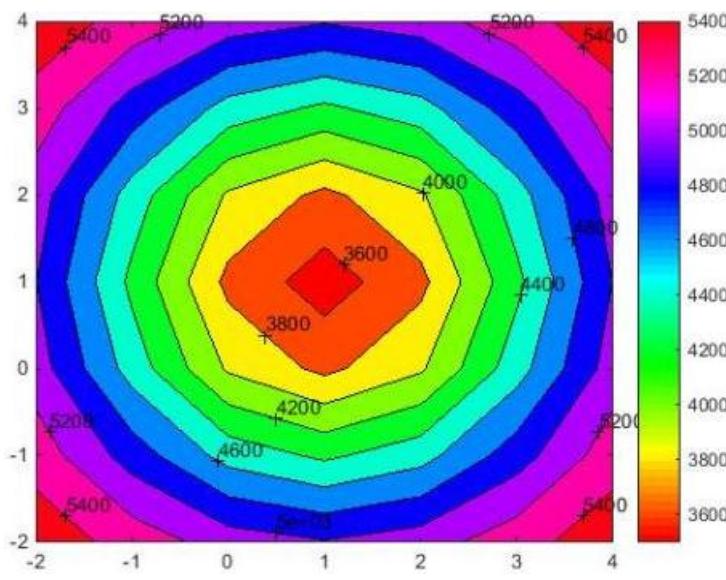


Рисунок 4.4

Зависимость объемной активности радона от радиуса включения

На рис. 4.6 (а) показан график поверхности искомой функции ОАР в изолиниях, в прямоугольнике  $x, y \in [-2; 4]$ , в плоскости  $z = 1$  м. В случае анизотропного шарообразного включения  $\Omega_{4.1}$ , диффузационные свойства которого описываются тензором  $D_{4.1} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 10^{-5} & 10^{-5} & 0 \\ 10^{-5} & 5 \cdot 10^{-5} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix}$ , график поверхности искомой функции ОАР в изолиниях имеет вид (рис. 4.6 (б)).

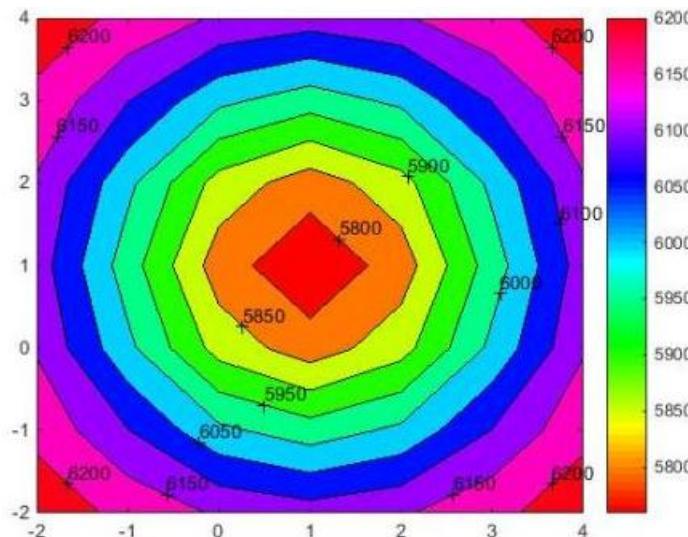


Рисунок 4.5

а) однородное включение

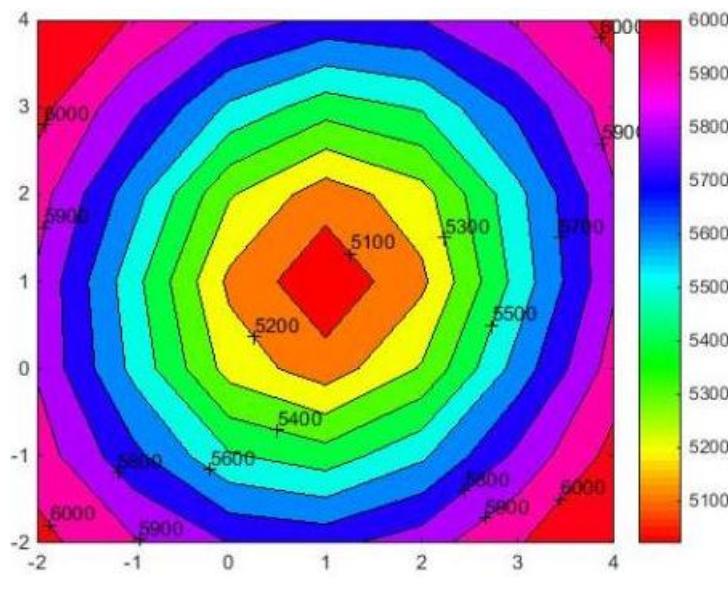


Рисунок 4.6

б) анизотропное включение

Учет анизотропии при моделировании процессов переноса радона приводит к существенному изменению поля объемной активности радона и является значимым фактором, необходимым при описании математической модели поля в реальных геологических средах.

## 5. Заключение

Проведены сравнения с известными моделями для случая однородных кусочно-постоянных сред и вычислительные эксперименты по исследованию процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями и взаимному влиянию параметров математической модели.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кризский В.Н., Нафикова А.Р., “Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями”, *Вестник Южно-Уральского государственного университета. Математическое моделирование и программирование*, 7:2 (2014), 38–45.
2. Яковлева В. С., Паровик Р. И., “Численное решение уравнения диффузии-адвекции радона в многослойных геологических средах”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, №1(2), 45–55.

# To a question of mathematical modeling of processes of transfer of radon in piecewise and anisotropic layered media with inclusions

© A. R. Nafikova<sup>3</sup>, V. N. Krizsky<sup>4</sup>

**Abstract.** In work the mathematical model of a problem of transfer of radon in piecewise and constant anisotropic layered media with inclusions is investigated. Comparative comparison of results of computer modeling to known models for a case of uniform piecewise and constant media is given. Results of computing experiments on research of processes of transfer of radon in piecewise and constant anisotropic layered media are discussed with inclusions and to mutual influence of parameters of mathematical model.

**Key Words:** diffusion and advection of radon, anisotropic media, boundary problem.

---

<sup>3</sup> Senior lecturer of chair of mathematical modeling, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; albinabikbaeva@gmail.com.

<sup>4</sup> Professor of chair of mathematical modeling, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; Krizsky@rambler.ru.

## МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ИНФОРМАТИКА

УДК 621.382.2

### **Численное моделирование вероятности включения микроплазмы с участием глубоких центров в $p-n$ -переходе**

**© В. К. Ионычев<sup>1</sup>, Р. Р. Кадеркаев<sup>2</sup>, С. М. Мурюмин<sup>3</sup>, П. А. Шаманаев<sup>4</sup>**

**Аннотация.** Моделируется влияние глубоких центров на статистическую задержку пробоя микроплазмы в  $p-n$ -переходе. Проведен численный расчет вероятности включения микроплазмы в фосфидгаллиевых  $p-n$ -переходах в случае эмиссии носителей заряда через простой двухзарядный генерационно-рекомбинационный центр и с многозарядной ловушкой. Показано, что изменение зарядового состояния глубоких центров частичным снижением обратного напряжения на  $p-n$ -переходе может приводить к особенностям распределения статистической задержки пробоя микроплазмы по длительности.

**Ключевые слова:** статистическая задержка пробоя, глубокие центры, включение микроплазмы, эмиссия носителей заряда, зарядовое состояние центра

Лавинный пробой реальных  $p-n$ -переходов локализован и носит микроплазменный характер [1]. Микроплазмы (МП), как правило, локализуются в местах скопления различного рода структурных дефектов и примесей. Микроплазменные каналы имеют диаметры порядка ширины области объемного заряда  $p-n$ -перехода при напряжении пробоя. Малые размеры микроплазменных каналов приводят к статистической задержке лавинного пробоя, на которую большое влияние могут оказывать глубокие центры (ГЦ), находящиеся в этих каналах. Если концентрация ГЦ в микроплазменных каналах мала (много меньше концентрации легирующей примеси), то эмиссия носителей заряда с ГЦ влияет на статистическую задержку пробоя [2]. При большой концентрации ГЦ, когда при их перезарядке заметно изменяется напряженность электрического поля в  $p-n$ -переходе, появляется релаксационная задержка пробоя [3]. Практическое использование этих эффектов для исследования ГЦ возможно только на основе достаточно точной количественной теории. В данной работе рассматривается влияние ГЦ на статистическую задержку пробоя при их заполнении снижением обратного напряжения на  $p-n$ -переходе. Проведен численный расчет вероятности включения микроплазмы в  $p-n$ -переходе с участием глубоких центров.

<sup>1</sup> Доцент кафедры электроники и наноэлектроники, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; microelektro@mail.ru.

<sup>2</sup> Аспирант кафедры технического сервиса машин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск.

<sup>3</sup> Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; journal@svmo.ru.

<sup>4</sup> Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

## 1. Численное моделирование вероятности включения микроплазмы при эмиссии носителей заряда через простые двухзарядные глубокие центры

Ранее [2] было получено выражение для функции распределения задержки пробоя по длительности (вероятность того, что в течение времени  $t$  после приложения пробивного напряжения микроплазма не включится), которое имеет вид

$$1 - P_M = \exp \left\{ -S_M N_t \left[ \frac{e_n e_p}{e_n + e_p} t \int_{-L_p}^{L_n} (P_n(x) + P_p(x)) dx + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{e_n^2}{(e_n + e_p)^2} \left( \int_{L_m}^{L_n} P_n(x) dx - \frac{e_p}{e_n} \int_{L_m}^{L_n} P_p(x) dx \right) \left( 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right) \right] \right\} \quad (1.1)$$

где  $P_M$  — вероятность включения микроплазмы за время  $t$  после подачи пробивного напряжения;  $S_M$  — сечение микроплазменного канала;  $N_t$  — концентрация ГЦ;  $e_n$ ,  $e_p$  — коэффициенты эмиссии электронов и дырок с ГЦ;  $L_n$ ,  $-L_p$  — границы ОПЗ со стороны  $n$ - и  $p$ -области;  $P_n(x)$ ,  $P_p(x)$  — вероятности запуска лавины электроном и дыркой;  $L_m$  — граница ОПЗ со стороны  $n$ -базы при напряжении заполнения глубоких центров  $V_m$ ,  $\tau = (e_p + e_n)^{-1}$ . В полулогарифмической системе координат выражение  $1 - P_M$  состоит из линейной и нелинейной частей:

$$\ln(1 - P_{M0}) = -S_M N_t \frac{e_n e_p}{e_n + e_p} \left[ \int_{-L_p}^{L_n} (P_n(x) + P_p(x)) dx \right] t, \quad (1.2)$$

$$\ln(1 - P_{Mt}) = -S_M N_t \frac{e_n^2}{(e_n + e_p)^2} \left[ \int_{L_m}^{L_n} P_n(x) dx - \frac{e_p}{e_n} \int_{L_m}^{L_n} P_p(x) dx \right] \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right]. \quad (1.3)$$

Линейный член (1.2) отражает термогенерационный механизм запуска лавины через рассматриваемый глубокий уровень, нелинейный член (1.3) — запуск лавины, обеспечиваемый реэмиссией носителей с ГЦ.

Для чисто электронной ловушки ( $e_p = 0$ ) линейное слагаемое равно нулю и функция распределения задержки пробоя имеет вид

$$1 - P_{Mt} = \exp \left[ A \left( 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right) \right], \quad (1.4)$$

$$A = -S_M N_t \int_{L_m}^{L_n} P_n(x) dx, \quad \tau = e_n^{-1}. \quad (1.5)$$

В этом случае  $A$  всегда отрицательно, что соответствует уменьшению статистической задержки пробоя. При  $e_p \neq 0$  линейное слагаемое можно исключить из рассмотрения, если измерить функцию распределения без заполнения глубоких центров. В этом случае

при малых перенапряжениях  $L_m \approx L_n$  и согласно (1.1) измеряется функция  $1 - P_{M0}$ . Таким образом, задачу можно свести к анализу функции  $1 - P_{Mt}$ , содержащей основную информацию о влиянии ГЦ на задержку пробоя, и которая так же имеет вид (1.4). Как следует из (1.3), в этом случае  $A$  может иметь как отрицательный, так и положительный знак. Последнее означает, что заполнение ГЦ основными носителями заряда увеличивает статистическую задержку пробоя микроплазмы.

В реальных  $p-n$ -переходах наряду с эмиссией носителей заряда с ГЦ имеются и другие механизмы, поставляющие носители для запуска лавины. В этом случае правая часть выражения (1.1) в показателе экспоненты должна быть дополнена еще одним, чаще всего линейным слагаемым. Его вклад также можно учесть при измерении функции распределения задержки пробоя без заполнения ГЦ (фоновый запуск).

Выражение (1.3) содержит всю основную информацию о ГЦ в микроплазменном канале, и, как уже отмечалось, изменение зарядового состояния ГЦ может приводить как к увеличению, так и к уменьшению вероятности включения МП. Это зависит от знака параметра  $A$ , в общем случае имеющего вид

$$A = -\frac{M}{L_M} \frac{e_n^2}{(e_n + e_p)^2} \left( \int_{L_m}^{L_n} P_n(x) dx - \frac{e_p}{e_n} \int_{L_m}^{L_n} P_p(x) dx \right), \quad (1.6)$$

где  $M = N_t S_M L_M$  — число ГЦ в микроплазменном канале.

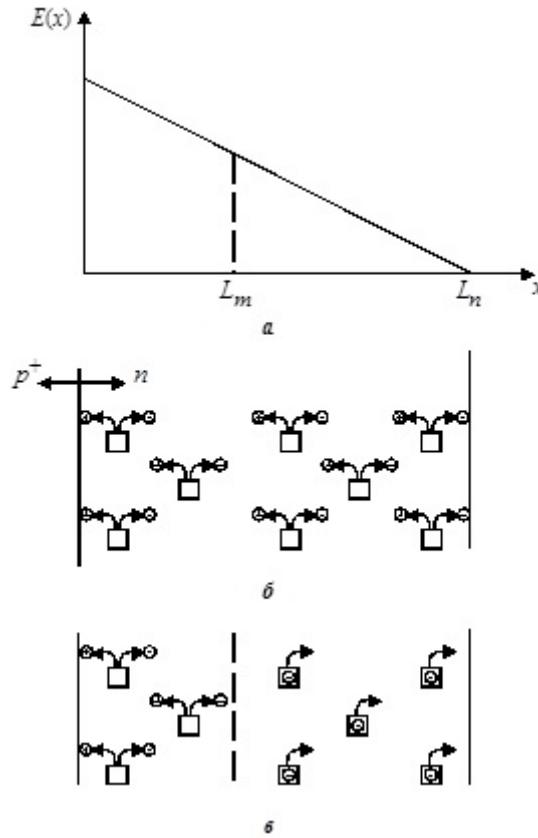


Рис. 1. Распределение электрического поля в  $p^+ - n$ -переходе (а), состояние ГЦ до заполнения электронами (б) и после (в)

Зависимость величины и знака параметра  $A$  от размеров области МП-канала, занятой заполненными ГЦ, поясняется на рис. 1, где схематически показано распределение

электрического поля в  $p^+ - n$ -переходе (рис. 1, а) и эмиссионные свойства ГЦ в пределах ОПЗ  $p - n$ -перехода. В стационарном состоянии ГЦ эмитируют электроны и дырки в равной степени (рис. 1, б). В нашем примере электроны покидают ОПЗ, проходя через область с относительно невысоким полем, следовательно, вероятность запуска лавины электроном мала. Дырки же, напротив, пролетают через область высоких полей и имеют высокую вероятность запуска лавины. Если в некоторой области от  $L_m$  до  $L_n$  ГЦ заполнить электронами (рис. 1, в), то в течение последующего времени релаксации интенсивность эмиссии электронов в этой области возрастет, а интенсивность эмиссии дырок снизится. В результате произойдет уменьшение вероятности пробоя, обусловленное изменением относительных вероятностей запуска лавины соответствующими носителями. Для того чтобы вероятность пробоя возросла, необходимо, чтобы выполнялись условия: либо  $e_n \gg e_p$  для  $p^+ - n$ -перехода, либо  $e_p \gg e_n$  для  $n - p$ -перехода.

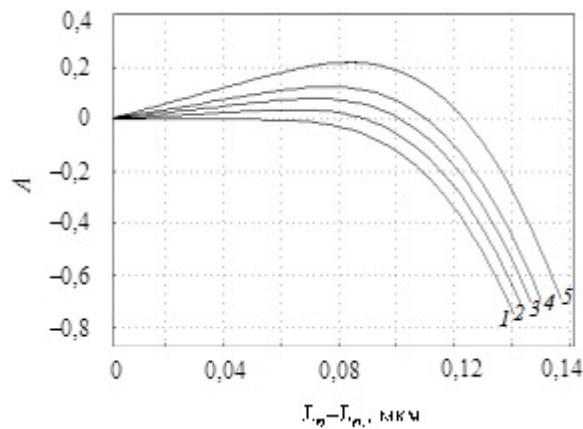


Рис. 2. Зависимости параметра  $A$  от ширины области заполнения. Градиент концентрации  $4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-4}$ ,  $T = 300 \text{ K}$ ,  $V_M = 17,80$ ,  $V - V_M = 0,7 \text{ B}$ .  $e_p/e_n$ : 1 –  $\leq 10^{-3}$ ; 2 –  $10^{-2}$ ; 3 –  $2 \cdot 10^{-2}$ ; 4 –  $3 \cdot 10^{-2}$ ; 5 –  $5 \cdot 10^{-2}$

Численный расчет функции распределения задержки пробоя МП проведен для плавного фосфидгаллиевого  $p - n$ -перехода с градиентом концентрации  $4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-4}$  и  $M = 100$ . На рис. 2 показано изменение параметра  $A$  с ростом ширины области заполнения ГЦ в канале МП. При расчетах использовались коэффициенты ионизации из работы [4]. Расчетное напряжение пробоя  $V_M$  анализируемой структуры GaP при  $T = 300 \text{ K}$  составляло 17,8 В, диаметр микроплазменного канала 0,5 мкм, длина микроплазменного канала 0,31 мкм. Как видно из рисунка, при равных коэффициентах ионизации электронов и дырок (в GaP  $\alpha_n = \alpha_p$ ) в плавном переходе увеличение статистической задержки пробоя наблюдать труднее, чем ее уменьшение. Когда коэффициенты эмиссии электронов и дырок сильно различаются ( $\frac{e_p}{e_n} \leq 10^{-3}$ ), величина  $A$  всегда отрицательна при любой степени заполнения ОПЗ, что соответствует уменьшению статистической задержки пробоя или увеличению вероятности включения МП. И только когда  $e_p$  и  $e_n$  сближаются ( $\frac{e_p}{e_n} > 10^{-3}$ ), имеется область, где  $A > 0$  и статистическая задержка пробоя увеличивается, причем наблюдается экстремум величины  $A$ , соответствующий определенной ширине области заполнения ГЦ. При заполнении глубоких центров вблизи края области пространственного заряда  $A > 0$ , но по абсолютной величине значение параметра  $A$  очень мало. Это затрудняет выделение величины  $A$  из общей функции распределения задержки пробоя. При полном заполнении ГЦ в ОПЗ со стороны  $n$ -базы при всех разумных соотношениях  $e_n$

и  $e_p / A < 0$ , так как реэмиссия электронов с ГЦ происходит уже в сильном поле и они способны с большой вероятностью запускать лавину. Несколько благоприятнее ситуация в резких асимметричных  $p-n$ -переходах. При прочих примерно одинаковых условиях значение  $A$  вблизи максимума в них в несколько раз больше. Еще легче наблюдать увеличение статистической задержки пробоя МП в случаях, когда коэффициенты ударной ионизации неосновных носителей больше, чем для основных (например, в кремниевых  $n^+ - p$ -переходах). Здесь заполнение ГЦ дырками приводит к временному уменьшению эмиссии электронов, вклад которых в запуск лавины существенно выше.

На рис. 3, а приведены расчетные кривые функции распределения задержки пробоя МП, соответствующие формуле (1.1), анализируемого  $p-n$ -перехода GaP при различных соотношениях  $e_n$  и  $e_p$ . Эти кривые содержат в себе линейный и экспоненциальный члены и постоянную величину  $A$ . Из кривых, подобных рис. 3, а, всегда можно определить постоянную времени релаксации заряда на глубоком центре  $\tau = (e_n + e_p)^{-1}$ , исключив фоновую составляющую (линейный член), измеряя кривую распределения задержек на «хвосте» при  $t > 3\tau$  или измеряя функцию распределения задержки пробоя без заполнения ГЦ.

Расчетные кривые распределения задержки пробоя МП по длительности, связанные с реэмиссией носителей заряда, приведены на рис. 3, б. Когда  $e_n \gg e_p$ , перезарядка глубокого уровня определяется лишь эмиссией электронов, которые и запускают лавину. Функция распределения задержки пробоя изменяется во времени по экспоненциальному закону с постоянной  $\tau = e_n^{-1}$ , т.е. ГЦ ведет себя как ловушка захвата для основных носителей заряда.

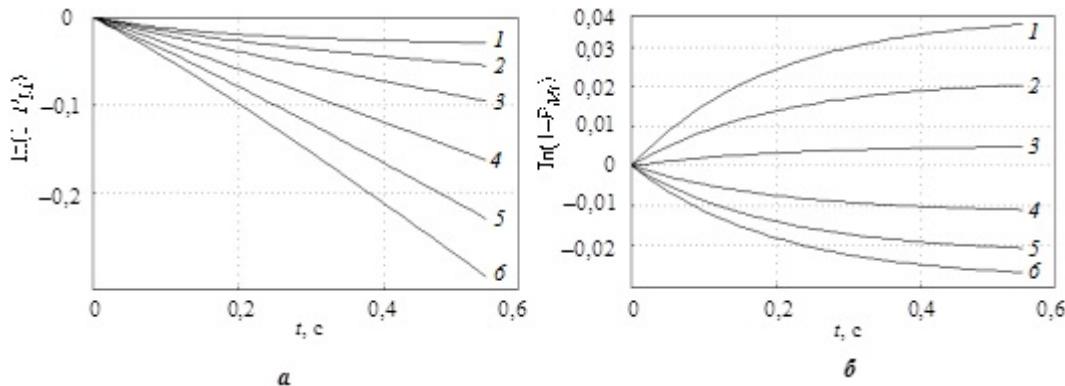


Рис. 3. Расчетные кривые распределения статистической задержки пробоя микроплазмы по длительности: а — при заполнении ГЦ; б — связанные с реэмиссией носителей заряда с ГЦ. Градиент концентрации  $4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-4}$ ,  $T = 300 K$ ,  $V_M = 17, 80 B$ ,  $V - V_M = 0,7 B$ ,  $V_M = 0 B$ ,  $N_t = 1 \cdot 10^{15} \text{ см}^{-3}$ .  $e_p/e_n$ : 1— $\leq 10^{-3}$ ; 2— $2 \cdot 10^{-3}$ ; 3— $5 \cdot 10^{-3}$ ; 4— $10^{-2}$ ; 5— $1,5 \cdot 10^{-2}$ ; 6— $2 \cdot 10^{-2}$

Таким образом, несмотря на свою громоздкость, выражение (1.1) в реальном случае сильно упрощается. Глубокие уровни в полупроводниках расположены либо выше, либо ниже середины запрещенной зоны и обладают сильной асимметрией в скоростях эмиссии электронов и дырок, даже когда коэффициенты захвата равны или одного порядка. Для глубоких уровней, расположенных в верхней половине запрещенной зоны, как правило,  $e_n \gg e_p$  и наоборот.

## 2. Численное моделирование вероятности включения микроплазмы при эмиссии носителей с многозарядной ловушкой

Многозарядная ловушка может последовательно испускать несколько электронов либо дырок. Особенности тепловой ионизации ГЦ возникают в случае, когда два близко расположенных уровня принадлежат двум различным зарядовым состояниям одного и того же центра. Эти особенности возникают из-за того, что концентрация центров в определенных зарядовых состояниях перераспределяется между двумя состояниями в процессе ионизации. Конкретный центр может быть в одном зарядовом состоянии. Электроны и дырки эмиттируют с центра последовательно, поэтому могут возникать ситуации, когда эмиссия с одного зарядового состояния ограничивает эмиссию с другого [5].

Если ГЦ имеет два энергетических уровня в запрещенной зоне, то он может находиться в трех зарядовых состояниях. Изменение числа центров в данном зарядовом состоянии возможно в результате: захвата электрона либо дырки на центр; эмиссии электрона или дырки с центра. Для центра, оказавшегося в ОПЗ, первые два процесса исключаются. Существенную роль играет один из процессов эмиссии, вследствие которого центр последовательно переходит из первого состояния во второе, а затем в третье. При этом поступательно уменьшается число носителей заряда на центре. Схема таких переходов показана на рис. 4.

Рассмотрим для определенности полупроводник  $n$ -типа. В качестве начальных условий выберем полное заполнение центров носителями заряда ( $N_{20} = N_t$ ). Все центры захватили по два электрона. При некоторой температуре, достаточной для перехода электронов с уровней в зону проводимости, концентрация центров в различных зарядовых состояниях будет изменяться.

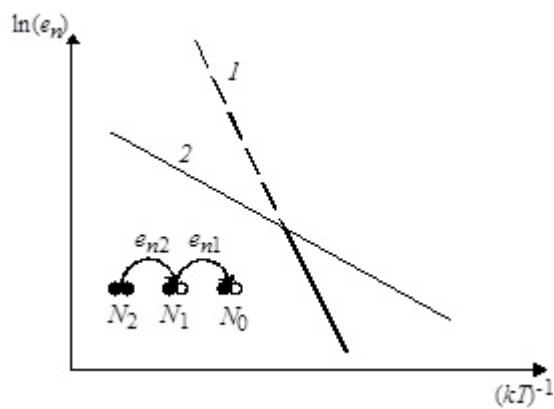


Рис. 4. Схема термических переходов и зависимость скорости термической эмиссии с двухуровневого центра от температуры.

Эмиссия электрона с уровня, соответствующего состоянию  $N_2$ , в зону проводимости переводит центр в состояние  $N_1$ . Вероятность этого процесса определяется скоростью термической эмиссии  $e_{n2}$ . Только после этого возможна эмиссия электрона из состояния  $N_1$  в зону проводимости, вероятность которого  $e_{n1}$ . Следовательно, изменение концентрации центров в состоянии  $N_2$  происходит за счет одного процесса, а в  $N_1$  — за счет двух процессов, что описывается системой кинетических уравнений:

$$\frac{dN_2}{dt} = -e_{n2}N_2, \quad \frac{dN_1}{dt} = -e_{n1}N_1 + e_{n2}N_2. \quad (2.1)$$

с начальными условиями  $N_2(0) = N_t$ ,  $N_1(0) = 0$ . При этом в процессе перезарядки центра выполняется условие  $N_2(t) + N_1(t) + N_0(t) = N_t$ . Решение системы уравнений (2.1) имеет вид

$$N_1(t) = \frac{e_{n2}N_t}{e_{n2} - e_{n1}} [\exp(-e_{n1}t) - \exp(-e_{n2}t)], \quad (2.2)$$

$$N_2(t) = N_t \exp(-e_{n2}t). \quad (2.3)$$

Скорости эмиссии электронов из зарядовых состояний  $N_2$  и  $N_1$  будут определяться как

$$G_1(t) = e_{n1}N_1(t), \quad G_2(t) = e_{n2}N_2(t).$$

При заполнении ловушек в области от  $L_m$  до  $L_n$  (см. рис. 1, а) для функции распределения задержки пробоя МП по длительности, обусловленной реэмиссией носителей с двухуровневой ловушки, получим выражение

$$1 - P_{Mt} = \exp \left\{ A \left[ \frac{e_{n2}}{e_{n2} - e_{n1}} \exp(-e_{n1}t) + \frac{e_{n2} - 2e_{n1}}{e_{n2} - e_{n1}} \exp(-e_{n2}t) - 2 \right] \right\} \quad (2.4)$$

где  $A = S_M N_t \int_{L_m}^{L_n} P_n(x)dx$  совпадает с подобным выражением (1.5) при эмиссии носителей с простой двухзарядной ловушки.

Здесь использовано выражение [1]

$$1 - P_{Mt}(t) = \exp \left[ - \int_{L_m}^{L_n} P_{01}(t)dt \right],$$

где  $P_{01}(t) = S_M \int_{L_m}^{L_n} (G_1(t) + G_2(t))P_n(x)dx$  — вероятность перехода микроплазменного канала из состояния «выключено» в состояние «включено» в единицу времени.

Для анализа выражение (2.4) удобно представить в полулогарифмической системе координат в виде

$$\phi(t) = \ln(1 - P_{Mt}) = \phi_1(t) + \phi_2(t),$$

где  $\phi_1(t) = A \left[ \frac{e_{n2}}{e_{n2} - e_{n1}} \exp(-e_{n1}t) - 1 \right]$ ,  $\phi_2(t) = A \left[ \frac{e_{n2} - 2e_{n1}}{e_{n2} - e_{n1}} \exp(-e_{n2}t) - 1 \right]$ .

Величина  $\exp(-A)$  есть вероятность того, что по истечении времени, когда установится стационарное состояние ловушки, после подачи прямоугольного импульса перенапряжения микроплазма не включится. Теоретически это время равно бесконечности.

На рис. 5 приведены результаты расчетов функции  $\phi(t)$ ,  $\phi_1(t)$  и  $\phi_2(t)$  при различных соотношениях  $e_{n1}$  и  $e_{n2}$ . Для удобства расчетов величина  $A$  принята равной 1. В диапазоне температур, когда  $e_{n1}$  и  $e_{n2}$  равны или близки друг другу, разделить два процесса перезарядки двухуровневого центра из функции распределения статистической задержки пробоя не представляется возможным (рис. 5, а, б), тем более, если экспериментальная кривая  $\phi(t)$  не достигает насыщения — величины  $2A$ . Будет обнаружен только один уровень, но с неверным значением концентрации. Чтобы раздельно определить вероятности ионизации обоих зарядовых состояний, необходимо экспериментально осуществить различные начальные заполнения этих состояний. Если скорости эмиссии с уровней сильно различаются, во всяком случае, более чем в несколько раз, то разделить эти два процесса можно путем аппроксимации кривой  $\phi(t)$  суммой экспонент и констант. В случае  $e_{n1} \gg e_{n2}$  эмиссия электронов с зарядового состояния  $N_2$  сильно лимитирует процесс

эмиссии с зарядового состояния  $N_1$  и функция распределения задержки пробоя  $\phi(t)$  имеет характерный выпуклый начальный участок (рис. 5, в).

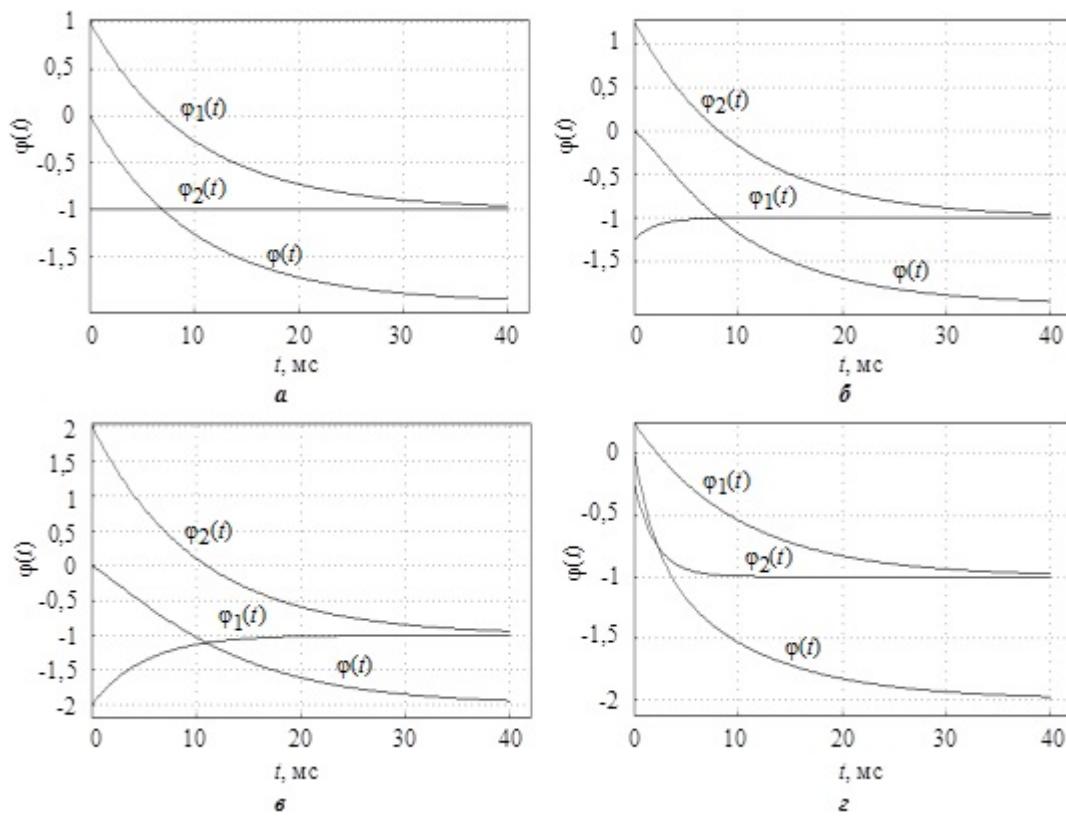


Рис. 5. Функции распределения задержки пробоя микроплазмы при эмиссии электронов с двухуровневой ловушки.  $e_{n1}/e_{n2}$ : а — 0,5; б — 2; в — 5; г — 0,2

Когда  $e_{n1}$  превышает  $e_{n2}$  более чем в десятки раз,  $\phi_1 \approx A$  и перезарядка ловушки практически определяется скоростью эмиссии носителей  $e_{n2}$  из зарядового состояния  $N_2$ , но с удвоенной концентрацией центров, т.е. с уровня соответствующего зарядовому состоянию  $N_1$  электроны эмиттируют почти мгновенно вслед за электронами из состояния  $N_2$ . При  $e_{n2} \gg e_{n1}$  функция распределения  $\phi(t)$  имеет такой же вид (рис. 5, г), что и в случае эмиссии основных носителей с уровней, принадлежащих двум различным по природе центрам [2][6]. Разделить эти два уровня большого труда не представляет, а идентифицировать уровни можно лишь по концентрации центров.

В результате работы проведен численный расчет вероятности включения МП в фосфидгаллиевом  $p-n$ -переходе при заполнении ГЦ частичным снижением обратного напряжения. Расчеты показывают, что если коэффициенты эмиссии электронов и дырок различаются более чем на три порядка величины, статистическая задержка пробоя всегда уменьшается независимо от степени и ширины области заполнения ГЦ в ОПЗ  $p-n$ -перехода. Глубокие центры будут являться ловушками захвата для основных носителей заряда и реэмиссия носителей с них всегда приводит к увеличению вероятности включения МП. Подобные расчеты особенно важны в том случае, когда надо достоверно знать, какие носители (электроны или дырки) и в какой области пространственного заряда запускают лавину. Для экспериментаторов это необходимо при расчете концентрации ГЦ в микроплазменном канале или когда измерения вероятности включения МП используются для определения зависимости коэффициентов ударной ионизации от напряженности электрического поля.

В работе также получено математическое выражение и проведены расчеты вероятности включения микроплазмы в случае эмиссии носителей заряда с двухуровневой ловушки. Показаны характерные особенности в распределении статистической задержки пробоя МП по длительности, когда два близко расположенных уровня принадлежат двум различным зарядовым состояниям одного и того же центра.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Грехов И. В., Сережкин Ю. Н., *Лавинный пробой р-п-перехода в полупроводниках*, Энергия, Л., 1980, 152 с.
2. Булярский С. В., Сережкин Ю. Н., Ионычев В. К., “Статистическая задержка пробоя микроплазмы в фосфидгаллиевых р-п-переходах”, *ФТП*, **33**:11 (1999), 1345–1349.
3. Булярский С. В., Сережкин Ю. Н., Ионычев В. К., “Определение параметров глубоких уровней по релаксационной задержке пробоя р-п-перехода”, *ФТП*, **33**:4 (1999), 494–497.
4. Logan R. A., White H. G., “Charge multiplication in GaP p-n-junctions”, *J. Appl. Phys.*, **36** (1965), 3945–3946.
5. Булярский С. В., Грушко Н. С., *Генерационно-рекомбинационные процессы в активных элементах*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1995, 399 с.
6. Ионычев В. К., Ребров А. Н., “Исследование глубоких центров в микроплазменных каналах кремниевых лавинных эпитаксиальных диодов”, *ФТП*, **43**:7 (2009), 980–984.

## Numerical modelling of probability of inclusion of microplasma c participation of the deep centers in p-n-junction

© V. K. Ionychev<sup>5</sup>, R. R. Kaderkaev<sup>6</sup>, S. M. Muryumin<sup>7</sup>, P. A. Shamanaev<sup>8</sup>

**Abstract.** Influence of the deep centers on a statistical delay of breakdown of microplasma in *p-n*-junction is modelled. The numerical computation of the probability of microplasma inclusion in GaP p-n-junction has been made in the case of the charge carriers emission through the simple two-charged and also multicharged generation-recombination center. It is established that the change of the deep levels charges by means of partial reduction of reverse voltage in p-n-junction may result in some peculiarities concerning the distribution of the statistical delay of microplasma breakdown. The duration of breakdown delay changes.

**Key Words:** static delay of breakdown, deep centers, microplasma turn-on, carriers emission, charge conditions of center

<sup>5</sup> Associate Professor of the Department of Electronics and Nanoelectronics, Ogarev Mordovia State University, Saransk; microelektro@mail.ru.

<sup>6</sup> Postgraduate student of the Department of Technical Service Machines, Ogarev Mordovia State University, Saransk.

<sup>7</sup> Associate Professor of the Department Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University, Saransk; journal@svmo.ru.

<sup>8</sup> Associate Professor of the Department Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University, Saransk. korspa@yandex.ru.

УДК 51-73

## Математическое описание процесса диффузии в пленке хитозана

© Г. Р. Карамутдинова<sup>1</sup>, И. М. Губайдуллин<sup>2</sup>, К. Ф. Коледина<sup>3</sup>,  
Е. И. Кулиш<sup>4</sup>, А. К. Ильчибаева<sup>5</sup>

**Аннотация.** В работе решена обратная задача по нахождению коэффициента диффузии по генетическому алгоритму. Проведен вычислительный эксперимент с натурными данными для разных температур прокаливаний пленки хитозан с различным составом лекарственного вещества и сделаны физико-химические выводы

**Ключевые слова:** процесс диффузии, обратная задача, генетический алгоритм

### 1. Введение

Для полимерных пленок, применяемых при лечении кожных повреждений, необходимо в течении длительного времени поддерживать требуемый уровень лекарственного вещества (ЛВ) в крови или тканях пациента [1]-[7]. В условиях, когда процессами растворения или деструкции полимера можно пренебречь, основным механизмом высвобождения ЛВ из пленки является диффузия. В этом случае, основной проблемой становится экспериментальный подбор условий, обеспечивающий контролируемый и пролонгированный выход ЛВ из полимерной матрицы-носителя — процесс долгий, затратный и не всегда эффективный. Использование современных информационных технологий с разработкой математических моделей процессов диффузии, растворения и полимеризации позволяет частично или полностью решить вышеуказанные проблемы.

В данной работе приводятся предварительные результаты математической обработки экспериментальных данных, представленных в работах [8]-[10]. В качестве полимерной матрицы-носителя в этих работах был использован полимер природного происхождения — хитозан, на основе которого можно получать лекарственно наполненные, эластичные и прочные пленки, пригодные для лечения ожоговых или хирургических ран. В качестве ЛВ были использованы некоторые представители антибиотиков аминогликозидного (амикацин) и цефалоспоринового (цефазолин) ряда, активно используемые в лечении ожоговой травмы. Пленки на основе хитозана способствуют ускоренному заживлению повреждений кожи, подавляют рост микроорганизмов, хорошо сорбируют влагу (а значит, и раневый экссудат) а кроме этого, является биоразлагаемыми, что позволяет исключить крайне болезненную процедуру смены повязки [11].

<sup>1</sup> Аспирант лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; prickraz89@mail.ru.

<sup>2</sup> Старший научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; irekmars@mail.ru.

<sup>3</sup> Исполняющий обязанности научного сотрудника лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; koledinakamila@mail.ru.

<sup>4</sup> Профессор кафедры высокомолекулярных соединений и общей химической технологии, Башкирский государственный университет, г. Уфа; onlyalena@mail.ru.

<sup>5</sup> Магистр кафедры химической кибернетики, Уфимский Государственный Нефтяной технический университет, г. Уфа

## 2. Разработка математических моделей

Как известно, для оптимального управления процессом необходимо знать закономерности поведения объекта от параметров системы, которые формулируются в виде систем математических уравнений — математической моделью процесса. Параметры модели определяются решением обратной задачи, т.е. перебором значений параметров по некоторым алгоритмам, чтобы функционал разности решений прямой задачи (определение переменных состояния объекта при известных параметрах) и наблюдаемых экспериментальных данных был достаточно малым [12]. В данной работе прямой задачей является определение концентрации остаточного содержания лекарственного вещества в пленке во времени решением дифференциального уравнений в частных производных.

Известно, что диффузией называется процесс перемещения массы вещества в пространстве вследствие тепловой миграции кинетических частиц [13]. Любые модели, которые описывают процесс диффузии, основываются на классическом уравнении теплопроводности. Для одномерной задачи этот закон формулирует пропорциональность градиента концентрации потоку диффундирующих частиц (I закон Фика) [14]:

$$\vec{j} = -D \vec{\nabla} c, \quad (2.1)$$

где  $D$  — коэффициент диффузии, характеризующий данную диффузионную систему Фика,  $\text{м}^2/\text{с}$ ,  $\vec{\nabla} c$  — градиент концентрации компонента, моль/м.

II закон Фика, который описывает зависимость концентрации от времени, вытекает из I закона при учете закона сохранения вещества:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \vec{\nabla}(D \vec{\nabla} c), \quad (2.2)$$

В одномерном случае:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right), \quad (2.3)$$

Если коэффициент диффузии не зависит от координаты и концентрации, то уравнение (2.3) можно упростить и оно примет вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, \quad (2.4)$$

Процессы нестационарной диффузии носят сложный характер. Математическое описание подобных процессов требует учета нелинейных нестационарных граничных условий, зависимостей коэффициента диффузии от концентрации, координаты и времени, наличия химических реакций лекарственного вещества с компонентами материала, взаимодействия ЛВ с различного вида дефектами структуры, сложных изотерм сорбции. Физические и химические процессы, сопровождающие диффузию ЛВ в пленке, приводят к нелинейным дифференциальному уравнениям, аналитическое решение которых принципиально невозможна. Поэтому актуальным представляется разработка простых и эффективных методов численного решения диффузионных уравнений, обеспечивающих не только возможность математического моделирования, но и решение обратной задачи — нахождение из экспериментальных данных коэффициента диффузии ЛВ.

Итак, уравнение диффузии представляется в виде (2.5) с граничными условиями и начальным распределением.

$$\begin{cases} \frac{\partial c}{\partial c} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}, & 0 \leq x \leq l, \\ c(x, 0) = c_0, \\ c(0, t) = c(l, t) = 0, \\ c(x, t) - ? \end{cases} \quad (2.5)$$

Использование такого сочетания граничных и начальных условий подразумевает, что полимерная пленка, предварительно насыщенная ЛВ до равновесной концентрации, помещается в какую-то среду, где ее граница в момент начала процесса десорбции ( $t=0$ ) мгновенно теряет ЛВ полностью — граничная концентрация полимера становится равной нулю и остается таковой на всем протяжении процесса десорбции.

Таким образом, поставлена прямая задача — при известном коэффициенте диффузии  $D=\text{const}$  найти концентрации во всех точках  $x$  в момент времени  $t$ .

Учитывая, что в дальнейшем математическое описание процесса диффузии не всегда будет иметь аналитическое решение, в работе поставлена сеточная задача (2.6), которая решается методом прогонки.

$$\begin{cases} \frac{c_i^j - c_i^{j-1}}{\tau} = D \frac{c_{i-1}^j - 2c_i^j + c_{i+1}^j}{h^2}, & i = 1..N-1, j = 1..K \\ c_i^0 = c_0, & i = 1..N-1 \\ c_0^j = c_N^j = 0, & j = 0..K \\ c_i^j - ?, & i = 1..N-1, j = 1..K \end{cases} \quad (2.6)$$

Универсального метода решения обратной задачи не существует. Ее решение чаще всего находят, перебирая по определенному алгоритму серию прямых задач и минимизируя выбранный критерий отклонения расчетных и экспериментальных данных [15]–[18].

$$F(\eta) = \min, \quad (2.7)$$

где  $\eta$  — разность (невязка) между экспериментальными и расчетными концентрациями ЛВ в пленке.

Большое значение при решении обратной задачи имеет правильный выбор вида функции  $F(\eta)$ . Методы математической статистики дают обоснованный вид этой функции только в том случае, когда известен закон распределения погрешности измерений. При нормальном законе распределения

$$F(\eta) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M (c_{ij}^P - c_{ij}^E)^2 \rightarrow \min, \quad (2.8)$$

где  $c_{ij}^E$  и  $c_{ij}^P$  — экспериментальные и расчетные значения концентраций ЛВ в пленке,  $L$  — количество точек эксперимента,  $M$  — количество точек разбиения пленки.

Таким образом, для получения решения обратной задачи необходимо найти решение целевой функции (2.8). Для этого использовался генетический алгоритм.

Случайным образом создается множество генотипов начальной популяции. Они оцениваются с использованием «функции приспособленности», в результате чего с каждым генотипом ассоциируется определенное значение («приспособленность»), которое определяет насколько хорошо фенотип, им описываемый, решает поставленную задачу. Из полученного множества решений с учетом значения «приспособленности» выбираются решения, к которым применяются «генетические операторы» (в большинстве случаев «скрещивание»

и «мутация»), результатом чего является получение новых решений. Для них также вычисляется значение приспособленности, и затем производится отбор («селекция») лучших решений в следующее поколение.

Этот набор действий повторяется итеративно, так моделируется «эволюционный процесс», продолжающийся несколько жизненных циклов, пока не будет выполнен критерий остановки алгоритма, например, — нахождение оптимального решения, исчерпание времени или количества поколений, отпущеных на эволюцию.

### 3. Результаты вычислительного эксперимента

Результат решения прямой задачи представлен на рисунке 3.1. Видно, что на начальном этапе из приграничных областей пленки происходит уход ЛВ и формируются концентрационные профили.

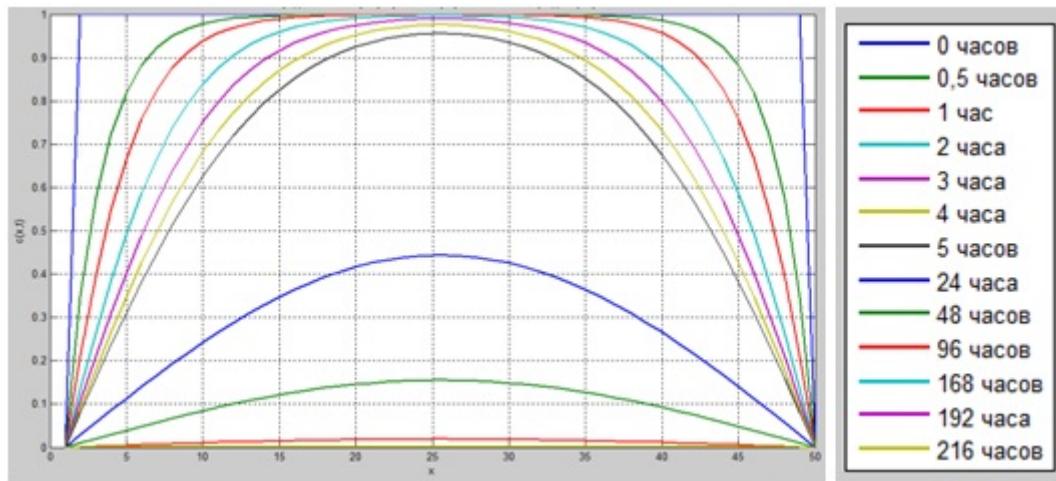


Рисунок 3.1

Распределение концентрационных профилей в пленке АМС-ХТЗ при десорбции, состав 0.01:1, время термообработки пленки 30 минут

Результаты обратной задачи представлены в графиках изменения концентрации ЛВ в пленке в зависимости от времени для пленки амикацин-хитозан и цефазолин-хитозан (Рис.3.2 - 3.6).

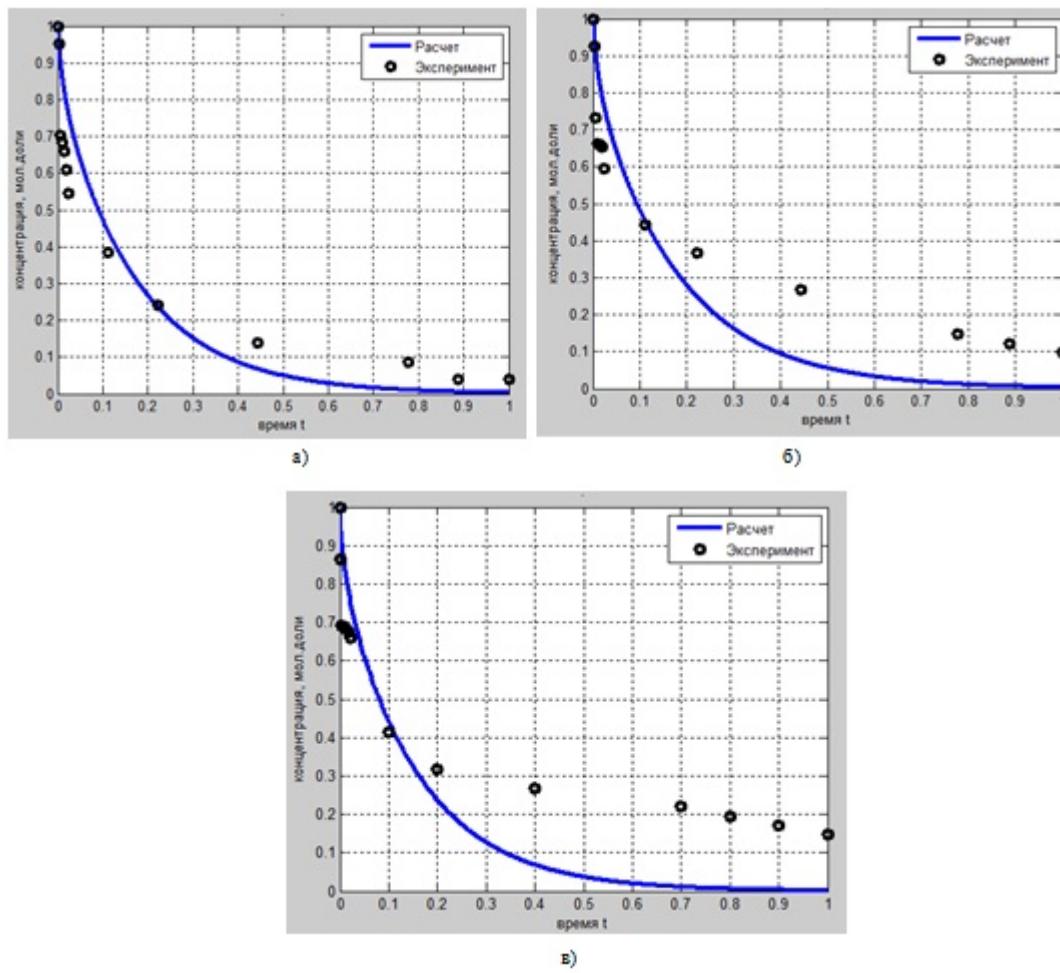


Рисунок 3.2

Графики изменения концентрации АМС в пленке в зависимости от времени, состав АМС в пленке 0,01 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки: а) 30 минут; б) 60 минут; в) 120 минут.

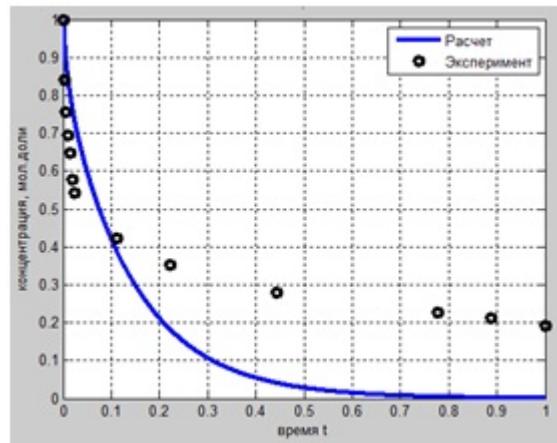


Рисунок 3.3

График изменения концентрации АМС в пленке в зависимости от времени, состав АМС в пленке 0,05 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки 30 минут.

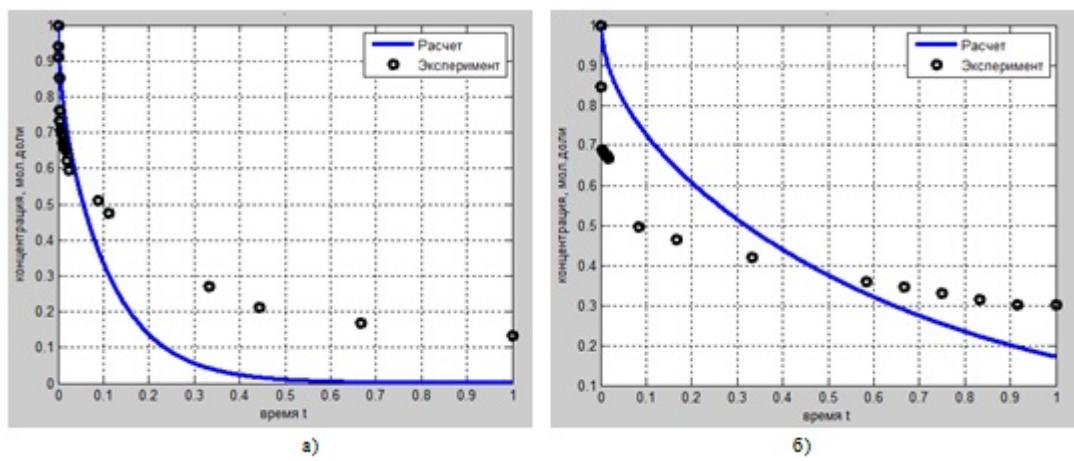


Рисунок 3.4

Графики изменения концентрации АМС в пленке в зависимости от времени, состав АМС в пленке 0,1 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки: а) 0 минут; б) 30 минут.

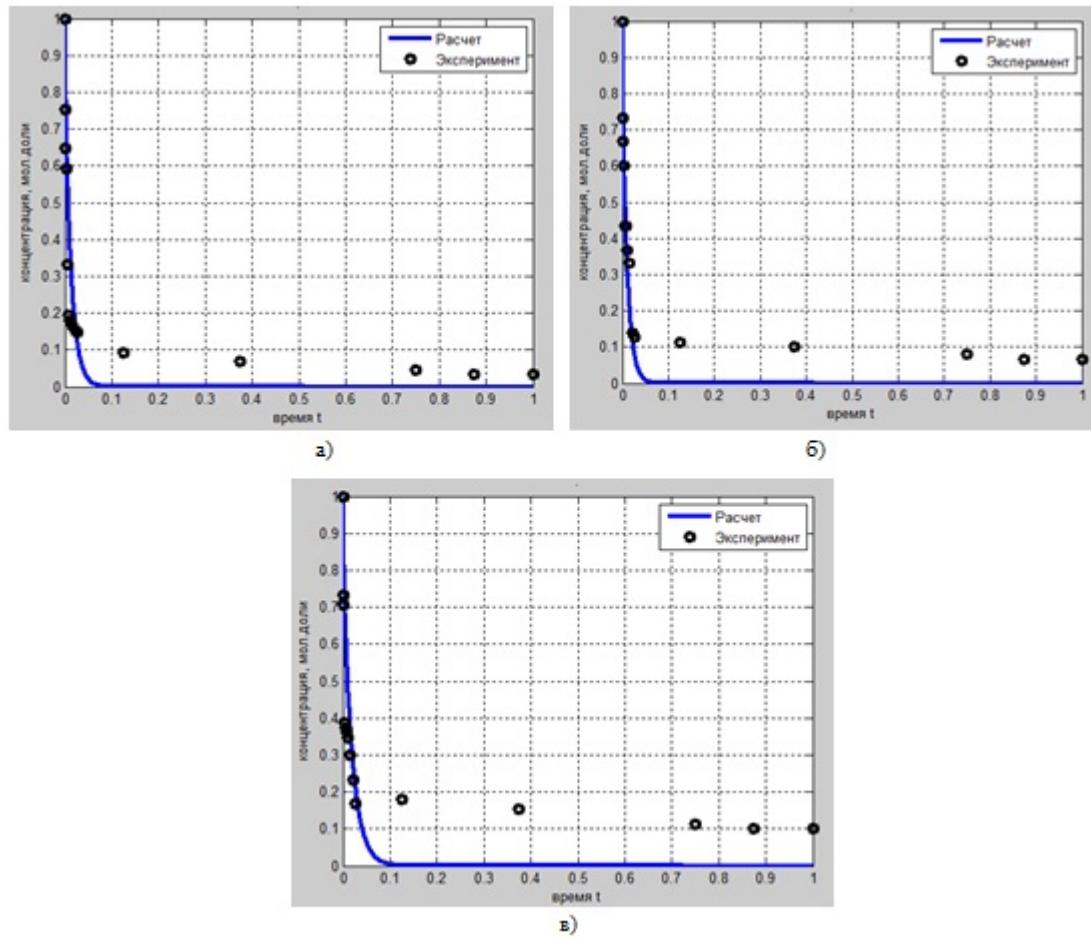
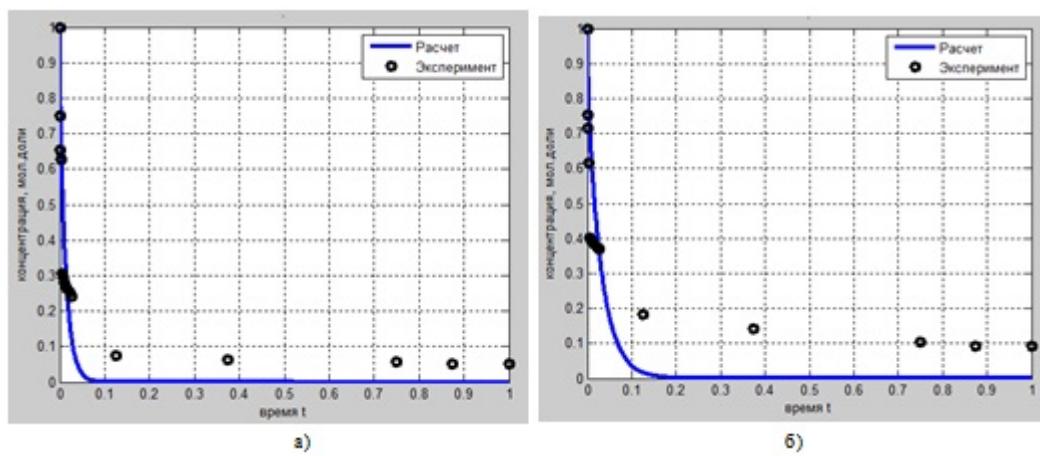


Рисунок 3.5

Графики изменения концентрации ЦФЗ в пленке в зависимости от времени, состав ЦФЗ в пленке 0,01 моль на 1 моль ХТЗ, время изотермического отжига пленки: а) 30 минут; б) 60 минут; в) 120 минут



Р и с у н о к 3.6

Графики изменения концентрации ЦФЗ в пленке в зависимости от времени, время изотермического отжига пленки 30 минут, состав ЦФЗ в пленке: а) 0,05 моль на 1 моль ХТЗ; б) 0,1 моль на 1 моль ХТЗ.

Рассчитанные значения коэффициентов диффузии представлены в таблице 1.

Таблица 1: Значения коэффициентов диффузии лекарственного вещества из хитозановых пленок

Состав пленки	Концентрация ЛВ в пленке, моль/моль ХТЗ	Время изотермического отжига пленки, мин	$D$ , $\text{м}^2/\text{сек}$
ХТЗ-ЦФЗ	1:0.01	30	$5,49309 * 10^{-10}$
ХТЗ-ЦФЗ	1:0.01	60	$3,1816 * 10^{-10}$
ХТЗ-ЦФЗ	1:0.01	120	$3,21904 * 10^{-10}$
ХТЗ-ЦФЗ	1:0.05	30	$3,89225 * 10^{-10}$
ХТЗ-ЦФЗ	1:0.1	30	$2,25011 * 10^{-10}$
ХТЗ-АМС	1:0.01	30	$2,99704 * 10^{-11}$
ХТЗ-АМС	1:0.01	60	$1,70557 * 10^{-11}$
ХТЗ-АМС	1:0.01	120	$1,73611 * 10^{-11}$
ХТЗ-АМС	1:0.05	30	$2,14956 * 10^{-11}$
ХТЗ-АМС	1:0.1	0	$2,81797 * 10^{-11}$
ХТЗ-АМС	1:0.1	30	$3,71335 * 10^{-12}$

Из данных таблицы можно сделать следующие выводы.

Во-первых, видно, что чем большее время отжигаются пленки, тем меньшее значение имеет коэффициент диффузии, при этом, наиболее сильное уменьшение коэффициента диффузии происходит в первые 30 минут отжига. При времени изотермического отжига больше 60 минут коэффициент диффузии АМС фактически не изменяется и приобретает определенное значение, примерно равное  $1,7 * 10^{-11} \text{ m}^2/\text{с}$ . Для ЦФЗ это значение равно  $3,2 * 10^{-10} \text{ m}^2/\text{с}$ . Таким образом, смысла отжигать пленку больше 60 минут нет.

Во-вторых, чем большее мольное соотношение ЛВ в пленке, тем меньше значение коэффициента диффузии, тем медленнее происходит выход ЛВ из пленки. Таким образом, увеличение содержания ЛВ в пленке способствует пролонгированию его выхода.

И, в-третьих, во всех случаях, наблюдается хорошая корреляции экспериментальных определенных [8]-[9] и расчетных значений коэффициентов диффузии.

Таким образом, разработанная в данной работе модель позволяет рассчитать значения коэффициентов диффузии, хорошо коррелирующие с экспериментальными данными, что свидетельствует о корректности используемых подходов для описания кинетики выхода ЛВ из полимерной пленки. Некоторое различие в значениях коэффициентов диффузии, рассчитанных в данной работе и в работах [8]-[10] очевидно связано с тем, что подходы к расчетам несколько различны. В нашей работе порядок коэффициентов диффузии составляет  $10^{-10}..10^{-12} \text{ m}^2/\text{сек}$ , а в работах [8]-[9] —  $10^{-10}..10^{-11} \text{ cm}^2/\text{сек}$ .

Уточнение полученных результатов планируется в последующих работах. Но важно отметить следующий момент: рассчитанные в работе коэффициенты диффузии получены с использованием математического моделирования на основе физико-химических законов. И при этом расчетные значения описывают процесс на протяжении всего времени экспериментального наблюдения.

Дальнейшее сочетание натурного и вычислительного эксперимента для новых наборов экспериментальных данных позволит создать информационно-вычислительную аналитическую систему разработки эффективных лечебных полимерных плёнок.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Harrison K., “Introduction to polymeric drug delivery”, Woodhead Publishing Limited (Cambridge England), *Biomedical polymers edited by Mike Jenkins*, 2007, 33–56.
2. Bajpai A. K., Shukla S. K., Bhanu S., Kankane S., “Responsive polymers in controlled drug delivery”, *Progr. Polym. Sci.*, **33**:1 (2008), 1088–1118.
3. Jia Ma, “Processing of polymer-based systems for improved performance and controlled release” (London), *PhD Thesis*, 2011, 208 c.
4. Vilar G., Tulla-Puche J. E., Albericio F., “Polymers and drug delivery systems”, *Current Drug Delivery*, **9**:4 (2012), 367–394.
5. Uhrich K. E., Cannizzaro S. M., Langer R. S., Shakesheff K. M., “Polymeric systems for controlled drug release”, *Chem. Rev.*, **10**:4 (1999), 3181–3198.
6. Shaik M. R., Korsapati M., Panati D., “Polymers in controlled drug delivery systems”, *Int. J. Pharm. Sci.*, **2**:4 (2012), 112–116.
7. Kumaresan S. Soppimath, Tejraj M. Aminabhavi, Anand Rao R. Kulkarni, Walter E. Rudzinski, “Biodegradable polymeric nanoparticles as drug delivery devices”, *J. of Controlled Release*, **70**:1 (2001), 1–20.
8. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Транспортные свойства пленок хитозан амикацин”, *Химическая физика*, **33**:8 (2014), 76 с.
9. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Колесов С. В., “Особенности транспортных свойств лекарственных хитозановых пленок”, *Высокомолекулярные соединения. Серия А.*, **56**:3 (2014), 282–288.
10. Кулиш Е. И., Шуршина А. С., Чернова В. В., Захаров В. П., “О роли лекарственных веществ – низкомолекулярных электролитов – в модификации хитозановой матрицы.”, *Высокомолекулярные соединения. Серия Б.*, **57**:3 (2015), 220 с.

11. Скрябина К.Г., Вихоревой Г.А., Варламова В.П., *Хитин и хитозан: Получение, свойства и применение*, Наука, Москва, 2002, 368 с.
12. Губайдуллин И.М., "Информационно-аналитическая система решения многопараметрических обратных задач химической кинетики", ГОУВПО "Башкирский государственный университет" (Уфа), *диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук*, 2012, 241 с..
13. Хельмут Мерер, *Диффузия в твердых телах*, ИД Интеллект, 2011, 536 с.
14. Галлямов М.О., *Диффузия в полимерах: Визуализация решений типичных задач диффузии*, КРАСАНД, М., 2014, 248 с.
15. Губайдуллин И.М., Рябов В.В., Тихонова М.В., "Применение индексного метода глобальной оптимизации при решении обратных задач химической кинетики", *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*, **12**:1 (2011), 137–145.
16. Губайдуллин И.М., Коледина К.Ф., Спивак С.И., "Последовательно-параллельное определение кинетических параметров", *Журнал Средневолжского математического общества*, **11**:2 (2009), 14–25.
17. Коледина К.Ф., Губайдуллин И.М., "Программный комплекс для решения обратных задач химической кинетики и его реализация в виде виртуального испытательного стенда", *Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана*, 2013, № 7, 385–398.
18. Gubaydullin I., Koledina K., Sayfullina L., "Mathematical modeling of induction period of the olefins hydroalumination reaction by diisobutylaluminiumchloride catalyzed with Cp<sub>2</sub>ZrCl<sub>2</sub>", *Engineering Journal*, **18**:1 (2014), 13–24.

## The mathematical description of the diffusion process a chitosan film.

© G. R. Karamutdinova<sup>6</sup>, I. M. Gubaydullin<sup>7</sup>, K. F. Koledina<sup>8</sup>, E. I. Kulish<sup>9</sup>, A. K. Ilchibaeva<sup>10</sup>

**Abstract.** In the work problem is solved by the determination of the diffusion coefficient on the genetic algorithm. Computational experiments with field data for various calcination temperature of the film with different chitosan drug composition and physicochemical made conclusions

**Key Words:** diffusion process, inverse problem, genetic algorithm

<sup>6</sup> PhD student Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis, RAS, Ufa; pickraz89@math.mrsu.ru.

<sup>7</sup> Senior researcher of laboratory of mathematical chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis, RAS, Ufa; irekmars@mail.ru.

<sup>8</sup> Acting gregoriant laboratory of mathematical chemistry, Institute of Petrochemistry and Catalysis, RAS, Ufa; koledinakamila@mail.ru.

<sup>9</sup> Professor of the department of macromolecular compounds and general chemical technology, Bashkir State University, Ufa; onlyalena@mail.ru.

<sup>10</sup> Master of chemical cybernetics, Ufa State Oil Technical University, Ufa

УДК 51-77, 330.45

# Принцип максимума в задаче управления рекламными расходами с распределенным запаздыванием

© И. В. Лутошкин,<sup>1</sup> Н. Р. Ямалтдинова<sup>2</sup>

**Аннотация.** Строится динамическая, непрерывная относительно времени, модель оптимального управления рекламными расходами с учетом эффекта запаздывания реакции потребителей на рекламные воздействия и ранее совершенные покупки. Решается задача максимизации прибыли фирмы на плановом периоде при ограничении, отражающем реакцию целевой аудитории. Проблема формулируется в виде системы уравнений типа Вольтерра.

**Ключевые слова:** управление рекламными расходами; распределенная отдача от рекламы; эффект рекламного воздействия; эффект воздействия предыдущих продаж; оптимальное управление; интегральные уравнения типа Вольтерра

## 1. Введение

Для разработки фирмой грамотной рекламной стратегии по оптимизации затрат на рекламу в плановом периоде, необходимо знать, каким образом реклама воздействует на потенциальных покупателей. При этом нужно учесть, что между однократным рекламным сообщением и совершением некоторыми потребителями покупок может образовываться лаг запаздывания. Это может объясняться различными причинами. Например, если ознакомление с информацией о товаре произошло не напрямую, а через третьи лица, которые в свою очередь таким же образом могли познакомиться с продуктом спустя промежуток времени после запуска рекламного сообщения. Также после ознакомления с рекламным объявлением потребителю зачастую необходимо время для того, чтобы обдумать необходимость приобретения прорекламированного товара, а после принятия решения о покупке – время до ее совершения.

Для построения модели также важно учесть влияние совокупности других факторов, стимулирующих потребителей повторно приобретать продукт данной фирмы, например, его качество, сформировавшаяся привычка и др. При этом влияние ранее совершенной покупки на текущую так же может со временем возрастать на начальном этапе до определенного момента, после чего ослабевает, и влияние в большей степени оказывают более поздние покупки.

Также отметим, что влияния рекламного воздействия и (или) предыдущих продаж падают со временем практически до нуля, с какого-то момента оказывая ничтожно малое воздействие на текущие продажи. Поэтому имеет смысл рассматривать фиксированный интервал для лагов наиболее существенного влияния рекламного воздействия и(или) предыдущих продаж на текущую выручку.

На сегодняшний день существуют различные подходы к управлению рекламными расходами. Выделяя подходы, основанные на математическом моделировании, можно отметить: вероятностные модели, учитывающие охват, частоту показа [1]; регрессионные эконометрические модели [2]; динамические дискретные и непрерывные модели [3], [4]. Однако существующие непрерывные модели управления рекламными расходами предполагают учет только мгновенной реакции от воздействия. В настоящей работе предлагается

<sup>1</sup> Заведующий кафедрой экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск; lutoshkiniv@ulsu.ru.

<sup>2</sup> Аспирант кафедры экономико-математических методов и информационных технологий, Ульяновский государственный университет, г. Ульяновск

развитие динамической непрерывной модели управления рекламными расходами, предложенной в работах [5], [6]. При этом в модели учитываются распределенные эффекты воздействия рекламы и предыдущих продаж фирмы.

## 2. Постановка проблемы

Обозначим через  $x(t)$  выручку (выпуск) фирмы и  $u(t)$  величину рекламных затрат в момент времени  $t$ . Очевидно, что выручка  $x(t)$  определяется множеством факторов на рынке: репутация фирмы (зарабатывается некоторое время), уровень воздействия на спрос через свою рекламу  $u$  (реклама имеет эффект последействия), различные воздействия конкурентов, общая экономическая ситуация. Учет всех возможных факторов является очень сложной задачей, в дальнейшем, сделав упрощения, будем предполагать, что объем спроса ограничен только возможностями фирмы, экономическая ситуация стабильна, воздействия конкурентов принципиально не меняются на временном промежутке планирования, выполняется локальное равновесие на рынке: спрос равен предложению (выпуску).

Таким образом, можно предположить, что текущая выручка фирмы определяется только двумя факторами: накопленное рекламное воздействие  $v(t)$  к моменту  $t$  и репутация фирмы  $y(t)$  в момент  $t$ , которые можно связать соотношениями:

$$v(t) = \int_{\tau_{0u}}^{\tau_{1u}} G_u(\tau) u(t - \tau) d\tau; \quad (2.1)$$

$$y(t) = \int_{\tau_{0x}}^{\tau_{1x}} G_x(\tau) x(t - \tau) d\tau; \quad (2.2)$$

$$x(t) = f(v(t), y(t)). \quad (2.3)$$

Здесь  $[\tau_{0u}; \tau_{1u}]$  – временной интервал, на протяжении которого накапливается рекламное воздействие,  $[\tau_{0x}; \tau_{1x}]$  – временной интервал, на котором накапливается воздействие от предыдущих продаж (накопленная репутация фирмы),  $G_u(\tau)$ ,  $G_x(\tau)$  - функции, определяющие характер воздействия предыдущих рекламных затрат и предыдущих продаж соответственно. В общем случае величины  $\tau_{0u}$ ,  $\tau_{1u}$ ,  $\tau_{0x}$ ,  $\tau_{1x}$  являются функциями времени  $t$ , при этом  $\tau_{0u} < \tau_{1u} \leq t$ ,  $\tau_{0x} < \tau_{1x} \leq t$ .

Определение вида функций  $f(v, y)$ ,  $G_u(\tau)$ ,  $G_x(\tau)$  – проблема эконометрического анализа, учитывающая общую ситуацию на рынке, вид производимой продукции или представляемых услуг фирмой, относительную ограниченность спроса, наличие конкуренции и т.д. При этом, некоторые общие предположения относительно характера данных функций можно привести.

В частности, функция  $f(v, y)$  практически всегда предполагается монотонно возрастающей по своим переменным. Предположение о монотонном росте является справедливым, когда переменные  $v$  и  $y$  имеют относительно небольшое значение, т.е. фирма не насытила рынок своей продукцией (услугами), реклама воспринимается потребителями позитивно. Однако по мере роста рекламных воздействий на потребителей реакция переходит из позитивной в негативную [1], [5], [6] и функция  $f(v, y)$  становится невозрастающей (иногда убывающей) в этой области по переменной  $v$ . Относительно характера зависимости по переменной  $y$  можно высказать предположение об убывающем приросте, что связано с насыщением рынка, с производственными ограничениями. Последнее позволяет потребовать свойство вогнутости функции  $f(v, y)$  по переменной  $y$ .

Исходя из эконометрического анализа зависимости текущих продаж от накопленных рекламных воздействий и накопленной репутации фирмы [1], [5], [6] можно сделать некоторые предположения относительно вида функций  $G_u$ :

- в ретроспективе реклама вызывает увеличение спроса до какого-то определенного момента времени  $\tau_u^*$ , после чего воздействие рекламы начинает ослабевать, пока вовсе не исчезнет;
- исключается возможность проявления антирекламы, т.е. рекламные затраты фирмы не вызывают снижение спроса на товар.

Таким образом, функция  $G_u$  неотрицательна, имеет единственный локальный (он же глобальный) максимум, который в виде выручки определяет наибольшую отдачу от рекламных затрат. Если при этом функция дифференцируема, то предположения эквивалентны следующей группе условий:

$$\begin{aligned} G_u(\tau) &\geq 0, \forall \tau \in [0; +\infty); \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_u(\tau) = 0; \\ G'_u(\tau) &\geq 0, \tau \in [0; \tau_u^*); G'_u(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_u^*; +\infty). \end{aligned}$$

Аналогичным образом можно рассмотреть влияние предыдущих продаж на текущие продажи, приняв следующие условия относительно функции  $G_x$ :

- потребитель, приобретя товар (воспользовавшись услугой) в данной фирме, может пожелать снова приобрести товары этой фирмы (то, как быстро он вернется за очередной покупкой, зависит от специфики товара, срока службы и т.д.);
- как правило, опыт первых покупок со временем забывается, уступая место недавнему опыту;
- в отличие от рекламы, которая позиционирует товар только с положительной стороны и подогревает интерес к товару на начальном этапе, собственный опыт потребителей не однозначен: в одном случае клиенты могут отказаться от дальнейших покупок товара после первого приобретения, тогда функция  $G_x$  изначально монотонно убывает; в другом случае они могут обеспечивать до какого-то момента  $\tau_x^*$  увеличивающийся приток новых покупок до насыщения, после чего происходит спад, в этом случае функция  $G_x$  имеет точку глобального максимума, которой соответствует наибольшая отдача от прошлых продаж.

Таким образом, функция  $G_x$  будет удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} G_x(\tau) &\geq 0, \forall \tau \in [0; +\infty); \lim_{\tau \rightarrow +\infty} G_x(\tau) = 0; \\ G'_x(\tau) &\geq 0, \tau \in [0; \tau_x^*); G'_x(\tau) \leq 0, \tau \in (\tau_x^*; +\infty). \end{aligned}$$

При этом, может иметь место условие: момент максимальной отдачи в ретроспективе  $\tau_x^* = 0$ .

Финансовым результатом хозяйственной деятельности любой фирмы является прибыль или убыток. Очевидно, что в каждый момент времени  $t$  прибыль  $\pi$  определяется стандартным условием  $\pi(x(t), u(t)) = x(t) - c(x(t), t)$ , где  $c$  - затраты, связанные с получением выручки  $x$ , в момент  $t$ . Функция  $c(x, t)$  - включает в себя постоянные издержки, в общем случае определяемые времененным трендом, и переменные издержки, связанные с выпуском продукции (предоставлением услуг). Рекламные расходы  $u$  с точки зрения бухгалтерского учета являются издержками и должны входить в затраты фирмы, но с экономической точки зрения реклама стимулирует спрос, тем самым увеличивает выручку  $x$ .

Таким образом, функционал  $\Pi(x(\cdot), u(\cdot))$ , представляющий собой суммарную прибыль на временном интервале планирования  $[0, T]$ , определяется:

$$\Pi(T) = \int_0^T \pi(x(t), u(t)) dt = \int_0^T (f(y(t), v(t)) - u(t) - c_1(x(t), t)) dt.$$

Здесь  $c_1(x, t)$  включает в себя постоянные издержки и издержки, связанные с выручкой (выпуском)  $x$  без учета рекламных издержек. Заметим, что в большинстве случаев, включающих в анализ факторы прибыли и издержек, переменные издержки рассматриваются прямо пропорциональными выпуску, чаще всего с постоянным коэффициентом. В этом случае функционал прибыли может рассматриваться в виде

$$\Pi(T) = \int_0^T ((1 - \mu)f(y(t), v(t)) - u(t)) dt, \quad (2.4)$$

где  $\mu$  – норма издержек на единицу выпуска.

Фирмы по разному подходят к определению рекламного бюджета [2], однако затраты на рекламу, если планируются расходы на определенный временной промежуток, практически всегда имеют пороговое значение. Можно выделить наиболее типичный вариант ограничений фирмы по распределению рекламного бюджета – фиксированная сумма рекламного бюджета в единицу времени:

$$0 \leq u(t) \leq b, \quad t \in [0; T]; \quad (2.5)$$

Основная задача фирмы – максимизировать прибыль при наличии тех или иных ограничений. Предположим, что при  $t \leq 0$  известна функция дохода  $\hat{x}(t)$  и функция рекламных издержек  $\hat{u}(t)$ . Тогда можно сформулировать следующую оптимизационную динамическую задачу: максимизировать функционал (2.4) при ограничениях на рекламный бюджет (2.5) и интегральном уравнении (2.3) с условиями (2.1), (2.2).

### 3. Принцип максимума

Сведем проблему (2.1)-(2.5) к задаче оптимального управления с интегральными уравнениями в виде системы уравнений типа Вольтерра. Введем функции  $\phi_u(t)$ ,  $\phi_x(t)$ :

$$\phi_u(t) = \begin{cases} \int_{t-\tau_{1u}}^{t-\tau_{0u}} G_u(t-s)\hat{u}(s)ds, & 0 \leq t \leq \tau_{0u}, \\ \int_{t-\tau_{1u}}^0 G_u(t-s)\hat{u}(s)ds, & \tau_{0u} \leq t \leq \tau_{1u}, \\ 0, & \tau_{1u} \leq t; \end{cases}$$

$$\phi_x(t) = \begin{cases} \int_{t-\tau_{1x}}^{t-\tau_{0x}} G_x(t-s)\hat{x}(s)ds, & 0 \leq t \leq \tau_{0x}, \\ \int_{t-\tau_{1x}}^0 G_x(t-s)\hat{x}(s)ds, & \tau_{0x} \leq t \leq \tau_{1x}, \\ 0, & \tau_{1x} \leq t; \end{cases}$$

а также функции  $\bar{G}_x(t-s)$ ,  $\bar{G}_u(t-s)$ :

$$\bar{G}_x(t-s) = \begin{cases} G_x(t-s), & \tau_{0x} \leq t \leq \tau_{1x}, \quad 0 \leq s \leq t - \tau_{0x}, \\ G_x(t-s), & \tau_{1x} \leq t, \quad t - \tau_{0x} \leq s \leq t, \\ 0, & \text{иначе}; \end{cases}$$

$$\bar{G}_u(t-s) = \begin{cases} G_u(t-s), & \tau_{0u} \leq t \leq \tau_{1u}, \quad 0 \leq s \leq t - \tau_{0u}, \\ G_u(t-s), & \tau_{1u} \leq t, \quad t - \tau_{0u} \leq s \leq t, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Используя введенные функции, накопленные репутация фирмы, рекламное воздействие, прибыль можно представить в виде:

$$y(t) = \phi_x(t) + \int_0^t \bar{G}_x(t-s)x(s)ds = \phi_x(t) + \int_0^t \bar{G}_x(t-s)f(y(s), v(s))ds, \quad (3.1)$$

$$v(t) = \phi_u(t) + \int_0^t \bar{G}_u(t-s)u(s)ds, \quad (3.2)$$

$$\Pi(t) = \int_0^t ((1-\mu)f(y(s), v(s)) - u(s))ds. \quad (3.3)$$

Задача максимизации  $\Pi(T)$  при условиях (3.1), (3.2), (3.3) эквивалентна задаче максимизации (2.4) при условиях (2.5), (2.3), (2.1), (2.2) и представляет собой задачу оптимального управления с интегральными уравнениями Вольтерра. Применим для данной задачи принцип максимума Понтрягина [7].

Введем модифицированную функцию Гамильтона-Понтрягина

$$H(s, y, v, u) = (1-\mu)f(y, v) - u + p_y(s)\bar{G}_x(0)f(y, v) + p_v(s)\bar{G}_u(0)u + \int_s^T \left( p_y(t)\frac{\partial \bar{G}_x(t-s)}{\partial t}f(y, v) + p_v(t)\frac{\partial \bar{G}_u(t-s)}{\partial t}u \right) dt. \quad (3.4)$$

Так как функция Гамильтона-Понтрягина (3.4) является линейной по переменной  $u$ , то максимум функции достигается на границе ограничений управления, и имеет смысл рассмотреть множитель  $h$  при переменной  $u$ , который можно назвать функцией переключения управления. Функция переключения  $h(s)$  определяет релейный характер управления и на основе знака этой функции можно для фирмы рассчитать оптимальные вложения в рекламу. Вид функции  $h(s)$  определяется соотношением:

$$h(s) = p_v(s)\bar{G}_u(0) - 1 + \int_s^T \left( p_v(t)\frac{\partial \bar{G}_u(t-s)}{\partial t} \right) dt. \quad (3.5)$$

В этом случае оптимальное управление находится из условия

$$u(s) = \begin{cases} b, & h(s) > 0, \\ 0, & h(s) < 0. \end{cases}$$

Очевидно, что для определения оптимальной рекламной стратегии необходимо найти сопряженную функцию  $p_v(s)$ . Следуя [7], составим систему уравнений для нахождения сопряженных переменных  $p_v$ ,  $p_y$ :

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial f(y(s), v(s))}{\partial y} \left( 1 - \mu + p_y(s)\bar{G}_x(0) + \int_s^T \left( p_y(t)\frac{\partial \bar{G}_x(t-s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad p_y(T) = 0, \quad (3.6)$$

$$\dot{p}_v = -\frac{\partial f(y(s), v(s))}{\partial v} \left( 1 - \mu + p_y(s)\bar{G}_x(0) + \int_s^T \left( p_y(t)\frac{\partial \bar{G}_x(t-s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad p_v(T) = 0. \quad (3.7)$$

Таким образом, для определения оптимальной стратегии рекламных расходов необходимо решить краевую задачу (3.6), (3.7), (3.1), (3.2) с начальными условиями  $y(0) = \phi_x(0)$ ,  $v(0) = \phi_u(0)$ . Решение данной краевой задачи представляет из себя довольно сложную

проблему, так как в общем случае система не имеет аналитического решения и требуется применение численных методов решения интегро-дифференциальных уравнений.

Также к задаче максимизации  $\Pi(T)$  при условиях (3.1), (3.2), (3.3) можно применять метод параметризации, расширенный на данный класс задач в работах [8], [9].

Отдельный интерес представляет случай, когда функция  $f(y, v)$  линейна по переменным, т.е.  $f(y, v) = \alpha_1 y + \alpha_2 v$ . Тогда система интегральных уравнений (3.6), (3.7) не зависит от решений системы (3.1), (3.2) и сопряженные переменные для оптимальной стратегии могут быть найдены непосредственно из системы

$$\begin{aligned}\dot{p}_y &= -\alpha_1 \left( 1 - \mu + p_y(s)\bar{G}_x(0) + \int_s^T \left( p_y(t) \frac{\partial \bar{G}_x(t-s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad p_y(T) = 0, \\ \dot{p}_v &= -\alpha_2 \left( 1 - \mu + p_y(s)\bar{G}_x(0) + \int_s^T \left( p_y(t) \frac{\partial \bar{G}_x(t-s)}{\partial t} \right) dt \right), \quad p_v(T) = 0.\end{aligned}$$

И в этом случае оптимальная стратегия  $u(s)$  определяется после подстановки решения  $p_v(s)$  в функцию переключения  $h(s)$ .

#### 4. Вычислительный эксперимент

Для тестирования предлагаемой модели были взяты статистические данные компании ОАО "Мегафон": поквартальные данные по продажам  $x(t)$  и рекламным затратам  $u(t)$  за период с 30 июня 2004 г. по 30 сентября 2013 г. в млн. рублей.

На первом этапе для выявления статистической связи между факторами и определения лагов запаздывания проводился корреляционный анализ. Степень тесноты статистической связи определялась между  $x(t)$  и  $u(t-\tau)$ , а также  $x(t)$  и  $x(t-\tau)$ ,  $\tau = 0, 1, 2, \dots$ . Расчеты коэффициентов корреляции Пирсона и автокорреляции показали сильную линейную связь между  $x(t)$  и  $x(t-1)$ ,  $x(t-2)$ ,  $u(t)$ ,  $u(t-1)$ ,  $u(t-2)$ . Соответствующие выборочные значения представлены в табл.1.

Таблица 1. Выборочные коэффициенты корреляции Пирсона и автокорреляции

$\tau$	0	1	2
$corr(x(t), x(t-\tau))$	1	0,92	0,73
$corr(x(t), u(t-\tau))$	0,83	0,79	0,62

Из табл.1 видно, что статистические связи между рекламой и продажами, а также между текущими и предыдущими продажами ослабевают по мере увеличения величины лага, что соответствует ранее сделанным предположениям. В ходе проверки значимости параметров связи по  $t$ -критерию Стьюдента с вероятностью ошибки 3% была отвергнута гипотеза о том, что при нормальном распределении связь выручки и рекламных затрат отсутствует. С вероятностью существенно меньшей процента, - что отсутствует связь между выручкой и предыдущими продажами. Таким образом, исходя из анализа существенности связи, были определены начальные ( $\tau_{0u} = 0$ ,  $\tau_{0x} = 1$ ) и конечные ( $\tau_{1u} = 2$ ,  $\tau_{1x} = 2$ ) лаги запаздывания.

На следующем этапе было сделано предположение о линейном виде правой части в соотношении (2.3):

$$x(t) = \alpha_1 y(t) + \alpha_2 v(t) = \alpha_1 \int_1^2 G_x(\tau)x(t-\tau)d\tau + \alpha_2 \int_0^2 G_u(\tau)u(t-\tau)d\tau.$$

Анализ линейной дискретной (по лагам запаздывания) регрессионной модели показал, что отдача от рекламного воздействия со временем убывает, т.е. реакция на рекламу принимает максимальное значение практически сразу после выхода рекламного сообщения и оказывает меньшее влияние на последующие продажи. Также монотонно убывающим является влияние предыдущих продаж, т.е. воздействие максимальная отдача от предыдущих продаж приходится на первый лаг, а затем с течением времени оказывается все меньшее воздействие на потребителя. Таким образом, учитывая сделанные выше предположения относительно функций  $G_u(\tau)$  и  $G_x(\tau)$ , выберем параметрическое представление этих функций в виде:

$$G_u(\tau) = g_{1u} \exp(g_{2u}\tau), \quad G_x(\tau) = g_{1x} \exp(g_{2x}\tau).$$

На основе предположений и результатов регрессионного анализа, интегральное уравнение (2.3) было преобразовано:

$$x(t) = \int_1^2 \tilde{g}_{1u} \exp(g_{2u}\tau) x(t-\tau)d\tau + \int_0^2 \tilde{g}_{1x} \exp(g_{2x}\tau) u(t-\tau)d\tau.$$

Параметры модели  $\tilde{g}_{1u}$ ,  $g_{2u}$ ,  $\tilde{g}_{1x}$ ,  $g_{2x}$  определялись методами регрессионного анализа по статистике ОАО "Мегафон" (оценки обозначим  $\hat{g}_{1u}$ ,  $\hat{g}_{2u}$ ,  $\hat{g}_{1x}$ ,  $\hat{g}_{2x}$ ), в результате уравнение текущих продаж для компании ОАО "Мегафон" принял вид

$$x(t) = \int_1^2 3,04953 \exp(-0,9672\tau) x(t-\tau)d\tau + \int_0^2 2,87153 \exp(-7,87152\tau) u(t-\tau)d\tau.$$

Также исходя из значений статистических данных, были определены функции  $\hat{x}(t)$  и  $\hat{u}(t)$  как результат точечной аппроксимации:

$$\hat{x}(t) = 1,472t + 68,45, \quad \hat{u}(t) = -0,09t + 2,06.$$

Принимая во внимание, что компания ОАО "Мегафон" является непроизводственной компанией, дополнительные издержки, связанные с увеличением объема услуг, представляют относительно небольшую величину. Это позволяет в функционале (2.4) положить  $\mu = 0$ .

Полученная модель в дальнейшем анализировалась на основе численных схем при  $T = 4$  (планирование на год) и  $b = 2,4$  (ограничение на бюджет). В частности, в решении задачи Коши для прямой задачи и для сопряженных переменных использовался численный метод решения интегро-дифференциальных уравнений, основанный на вычислительной схеме Эйлера. При этом интеграл, находящийся в правой части интегро-дифференциального уравнения вычислялся методом трапеций.

Численный анализ проводился с различными шагами дискретизации временного параметра. Во всех случаях решение задачи приводило к следующей структуре оптимального управления:

$$u(t) = \begin{cases} 2,4, & 0 \leq t < \tau, \\ 0, & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

Ниже в табл. 2 приведены результаты расчетов при оцененных значениях параметров  $\hat{g}_{1u} = 2,87153$ ,  $\hat{g}_{2u} = -7,87152$ ,  $\hat{g}_{1x} = 3,04953$ ,  $\hat{g}_{2x} = -0,9672$ .

Таблица 2. Результаты решения при различных шагах дискретизации

шаг дискретизации	суммарная прибыль	$\tau$
0,001	640,119	3,57
0,0005	640,136	3,64
0,00025	640,142	3,70
0,000125	640,143	3,74

Решения, приведенные в табл. 2, подтверждают эмпирическое представление об оптимальной стратегии рекламных вложений: на первоначальном этапе производится максимальное вложение в рекламу, а в конце периода планирования финансирование рекламных расходов прекращается.

Для проверки устойчивости полученного результата модели были проведены вариации параметров: каждый из найденных параметров  $\hat{g}_{1u}$ ,  $\hat{g}_{2u}$ ,  $\hat{g}_{1x}$ ,  $\hat{g}_{2x}$  варьировался на 10% в сторону уменьшения и увеличения, а затем находилось оптимальное решение при этих значениях параметров.

Ниже в табл.3 приведены решения при различных значениях параметров и фиксированном шаге дискретизации 0,000125.

Таблица 3. Результаты решения при различных параметрах

$\tilde{g}_{1u}$	$g_{2u}$	$\tilde{g}_{1x}$	$g_{2x}$	суммарная прибыль	$\tau$
$\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	640,143	3,742
1, 1 $\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	640,410	3,742
0, 9 $\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	639,876	3,742
$\hat{g}_{1u}$	1, 1 $\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	640,184	3,738
$\hat{g}_{1u}$	0, 9 $\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	639,870	3,745
$\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	1, 1 $\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	700,438	3,748
$\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	0, 9 $\hat{g}_{1x}$	$\hat{g}_{2x}$	586.203	3,736
$\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	1, 1 $\hat{g}_{2x}$	731,984	3,740
$\hat{g}_{1u}$	$\hat{g}_{2u}$	$\hat{g}_{1x}$	0, 9 $\hat{g}_{2x}$	571,539	3,743

Из табл. 3 следует, что вариация параметров не сильно изменяет момент переключения управления, что позволяет достаточно устойчиво давать оценку оптимального управления. Также анализ табл. 3 позволяет сделать вывод, что наиболее существенно на модельное значение прибыли влияют оценки параметров функции  $G_x(\cdot)$ , это означает, что эконометрическое оценивание параметров этой функции следует проводить более тщательно.

Таким образом, проведенный численный анализ показал, что предлагаемая модель может быть применима для формирования эффективной стратегии управления рекламными расходами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Лутошкин И. В., “Моделирование отдачи от частоты рекламных воздействий”, *Прикладная эконометрика*, **19**:3 (2010), 101–111.
- Берннт Э. Р., *Практика эконометрики: классика и современность: Учебник для студентов вузов, обучающихся по специальностям 060000 экономики и управления/ Пер. с англ. под ред. проф. С.А. Айвазяна/ Э.Р.Берннт, ЮНИТИ-ДИАНА, М., 2005.*
- Jian Huang, Mingming Ltng, Liping Liang, “Recent Developments in Dynamic Advertising Research”, *European Journal of Operational Research*, **220**:3 (2012), 591–609.
- Дыхта В. А., Самсонюк О. Н., *Оптимальное импульсное управление с приложениями*, Физматлит, М., 2000.

5. Лутошкин И.В., Ямалтдинова Н.Р., "Иновационные технологии управления на основе динамического моделирования рекламного бюджета", Труды 5-й всеросс. научно-практ. конф. с международным участием "Региональная инновационная экономика: сущность, элементы, проблемы формирования" (Ульяновск, 2014), 43–46.
6. Лутошкин И.В., Ямалтдинова Н.Р., "Модель оптимизации рекламных расходов с учетом распределенного запаздывания", Сборник трудов 4-й Международной научно-практ. конф. "Математика, статика и информационные технологии в экономике, управлении и образовании" (Тверь, 2015), 84–89.
7. Дмитрук А.В., Осмоловский Н.П., "Необходимые условия слабого минимума в задачах с интегральными уравнениями", Труды 12 всероссийского совещания по проблемам управления (Москва, 2014), 709–713.
8. Лутошкин И.В., Дергунов И.Е., "Метод параметризации для оптимизации систем, представляемых интегро-дифференциальными уравнениями", *Журнал Средневолжского математического общества*, **12**:4 (2010), 116–126.
9. Лутошкин И.В., "Оптимизация нелинейных систем с интегро-дифференциальными связями методом параметризации", *Известия ИГУ. Сер. "Математика"*, **4**:1 (2011), 44–56.

## The maximum principle to the control problem of advertising expenses with distributed lag

© I. Lutoshkin,<sup>3</sup> N. Yamaltdinova<sup>4</sup>

**Abstract.** There is constructed the dynamic optimal control problem of promotion expenses, taking into account distributed lags of advertising and accumulated firm goodwill. There is solved the problem of maximizing a total profit of a company for the planning period under the restriction, reflects the reaction of the target audience. In this case initial problem is formulated as a system of equations of Volterra type.

**Key Words:** promotion expenses control; model with distributed lag of advertising; accumulated firm goodwill; optimal control; integral equations of Volterra type

---

<sup>3</sup> Head of Economic and Mathematical Methods and Information Technologies Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; lutoshkiniv@ulsu.ru.

<sup>4</sup> Graduate student of Economic and Mathematical Methods and Information Technologies Chair, Ulyanovsk State University, Ulyanovsk

## ПАМЯТИ АЛЕКСАНДРЫ ФЕДОРОВНЫ ЗУБОВОЙ

22 августа 2015 г. на 84 году жизни скончалась Зубова Александра Федоровна - доктор технических наук, профессор кафедры теории управления Санкт-Петербургского государственного университета, профессор кафедры дифференциальных уравнений математического факультета Мордовского государственного университета им. Н. П. Огарева.

Зубова А. Ф. видный специалист в области теории колебаний и устойчивости, а так же надежности процессов и аппаратов химической технологии. Она опубликовала свыше 154 работ, в том числе трёх монографий: «Надежность машин и аппаратов химических производств» (1971, 1978), «Математические методы исследования колебательных систем» (1989) и двенадцати учебных пособий: «Расчет вероятностных характеристик функционирования целлюлозно-бумажного оборудования» (1981), «Методы приближенных вычислений ЦБП» (1981), «Математические методы динамики функционирования машин и аппаратов ЦБП» (1983), «Автоматизация расчетов колебаний и устойчивости в химической технике» (1985), «Основы автоматизированных расчетов надежности машин и аппаратов химической технологии» (1987), «Математические основы надежности процессов и аппаратов химической технологии» (1988), «Автоматизация расчетов устойчивости решений уравнения Хилла» (1990), «Автоматизация расчетов надежности и устойчивости процессов и аппаратов химической технологии» (1990), «Основы контроля качества и надежности процессов и аппаратов химической технологии» (1994), «Математические методы исследования надежности колебательных систем» (2002), «Математические методы моделирования промышленных процессов и технологий» (2004), «Математические методы исследования надежности колебательных систем в технике и технологических процессах» (2007).

Зубовой получены фундаментальные результаты, направленные на решение проблем автоматизации проектирования машин и аппаратов химической технологии с целью повышения надежности, имеющие важное народнохозяйственное значение. Она разработала метод расчета вероятностных характеристик функционирования дублированной системы машин и технологических линий с восстановлением резерва (ненагруженный резерв) при произвольном законе распределения вероятности безотказной работы и восстановления. Нашла новый принцип построения критериев устойчивости и колебательности. Разработала алгоритмы расчета свободных колебаний крутильных коленчатых валов оппозитных компрессоров и алгоритмы расчета зон устойчивости и неустойчивости для решения уравнений Матье и Хилла и так же даны рекомендации для проектирования технологических процессов химической технологии. Результаты её исследований были использованы при создании прикладного программного обеспечения. Её методы нашли самое широкое применение при конструировании, создании и эксплуатации машин и аппаратов химической технологии в текстильной, легкой, химической и других отраслях промышленности.



Монография Зубовой А. Ф. «Надежность машин и аппаратов химических производств» (1-ое изд. «Машиностроение», Л., 1971; 2-ое изд., перераб. и дополн. «Машиностроение», Л., 1978) является одним из ведущих руководств при чтении учебного курса «Надежность машин и аппаратов». Зубовой А. Ф. разработан ряд новых методов в теории колебаний и надежности процессов и аппаратов химической технологии, позволяющих на стадии проектирования провести исследования, обеспечивающие заданные надежностные характеристики функционирования процессов и аппаратов химической технологии. Научные результаты, полученные Зубовой А. Ф. широко известны как у нас, так и за рубежом. Методы А. Ф. Зубовой эффективны и в приложении к задачам автоматизации проектирования различных объектов в промышленности, биологии, медицине, энергетике.

В течении 14 лет Александра Федоровна Зубова работала на кафедре дифференциальных уравнений Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева. За время научной и учебной деятельности на кафедре она разработала новые спецкурсы по теории колеблемости решений уравнения Маттье, Хилла и оптимальному управлению, разработала новую тематику курсовых, дипломных и докторских диссертационных работ. По её инициативе на математическом факультете был открыт совет по защите кандидатских, а затем и докторских диссертаций. А.Ф. Зубова активно принимала участие в работе межрегиональной общественной организации «Средне-Волжское математическое общество».

С 2009 года А.Ф. Зубова входила в редакционную коллегию научного рецензируемого журнала «Журнал Средневолжского математического общества».

Александра Федоровна Зубова была очень добрым человеком, она постоянно делилась своими знаниями, постоянно оказывала помощь и поддержку студентам, аспирантам и всем, кто к ней обращался. Богаты жизненный опыт Александры Федоровны, её интеллектуальность, трудолюбие, скромность и требовательность к себе снискали уважение всех, кто её знал. Она мать шестерых детей, трое из которых доктора физико-математических наук, а трое других – кандидаты физико-математических наук. Она была исключительно заботливой мамой и женой.

Светлая память об Александре Федоровне Зубовой навсегда сохранится в сердцах тех, кому довелось работать или общаться с ней.

Щенников В. Н., Чучаев И. И., Жалнин Р. В.,  
Ширяев В. Д., Смольянов А. Г., Сухарев Л. А.,  
Афиногентова Е. В., Башмаков И. Г., Косов А. А.,  
Курносов Г. А., Смолкин Г. А., Учватова Н. Н.,  
Никонов В. Н., Сафонкин В. И., Мурюмин С. М.,  
Мамедова Т. Ф., Шаманаев П. А., Павлов А. В.,  
Бояркин Д. И., Артемьева Е. Н., Черноиванова Е. А.,  
Щенникова Е. В.

# Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневожского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Объем рукописи не должен превышать 12 страниц для научной статьи и 20 страниц для обзорной статьи.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX. Компиляцию статьи необходимо производить с помощью MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте — <http://www.miktex.org>.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы:

- коды УДК;
- название статьи;
- информация о каждом из авторов: ФИО, e-mail, должность и место работы (официальное название организации);
- аннотация;
- ключевые слова;
- текст статьи;
- список литературы.

Если статья на русском языке, то название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова необходимо так же предоставить и на английском языке. Если статья написана на английском языке, то отдельно представляются коды УДК, название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова на русском языке.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаясь убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описывают предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные, обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выходы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– не включать несущественные детали;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example»,» the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать один из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т.е. «The study tested», но не «It was tested in this study».

На английском языке приводится авторское резюме (аннотация), которое является кратким резюме большей по объему работы, имеющей научный характер.

Объем аннотации должен быть в среднем от 100 до 250 слов.

Раздел Ключевые слова должен содержать от 5 до 15 слов и четко указывать на основное содержание статьи. Не следует приводить в качестве ключевых слов общие понятия, так как поиск по ключевому слову не приведет читателя к нахождению интересующей его информации. Однако данное слово может входить в значимое словосочетание.

Авторам статей необходимо придерживаться следующей структуры статей:

● Введение - краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье.

● Материалы и методы решения задачи и принятые допущения.

● Результаты – основное содержание статьи.

● Обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.

● Заключение – выводы и рекомендации.

Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB (см. Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTex). Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье. В оригинальных статьях допускается до 20, в обзорных – до 60 источников.

Подробные Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTex содержатся на сайте журнала по адресу <http://journal.svmo.ru/page/rules>.

# Правила верстки рукописей в системе LaTex

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.*

Текст доклада должен быть набран в издательской системе ТЕХ (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой \input в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду \headerRus. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\ footnote { Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\ footnote {Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду \headerEn. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду \headerFirstEn с такими же параметрами, как для команды \headerRus.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды \sect с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами \subsection, \subsubsection и \paragraph.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами \proof и \proofend (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв  $\phi$  и  $\epsilon$  необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных  $\frac{\partial}{\partial x_i}$  и  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  вставляются командами `\px{i}` и `\pxtou{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул  $\Gamma_i$ ,  $\Delta_i$  в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\Delta}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия\_АвтораНомер\_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень\_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_ри-сунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Внимание! Новые правила.** Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение `thebibliography`. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробностисмотрите в прилагаемом файле `amsbib.pdf`. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл `svtobib.sty` (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\RBibitem{метка для ссылки на источник}`.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcrite` (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

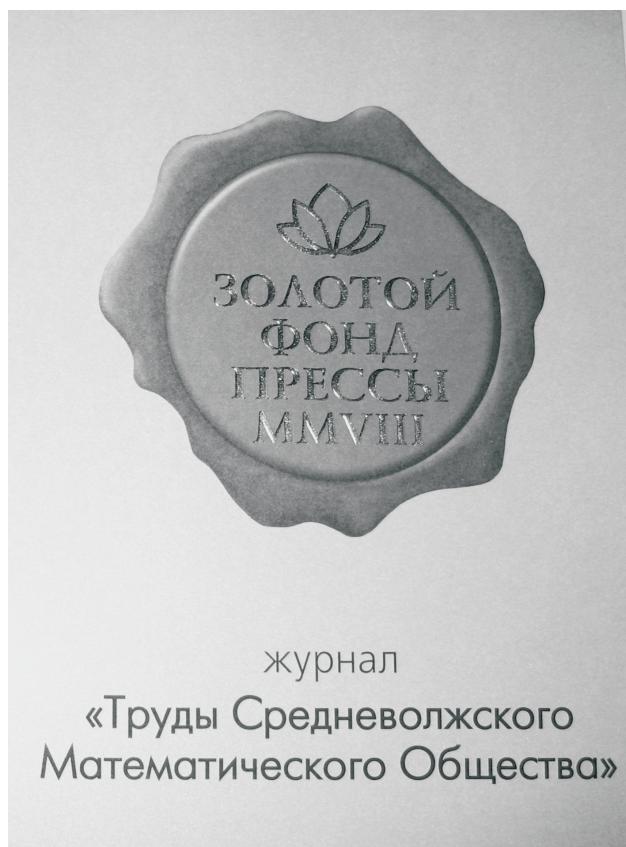
Компиляция журнала производится при помощи MiK<sub>T</sub>E<sub>X</sub> 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

## Алфавитный указатель

Губайдуллин И. М.	87	Малкин М. И.	31
Гуревич Е. Я.	7	Митрякова Т. М.	37
Долгоносова А. Ю.	14	Мурюмин С. М.	78
Жужома Е. В.	24	Нагорных С. Н.	41
Жукова Н. И.	14	Нафикова А. Р.	70
Ильчибаева А. К.	87	Осипов Г. В.	24
Ионычев В. К.	78	Починка О. В.	37
Исаенкова Н. В.	24	Саблюков Д. С.	41
Кадеркаев Р. Р.	78	Сафонов К. А.	31
Карамутдинова Г. Р.	87	Шаманаев П. А.	78
Коледина К. Ф.	87	Щенников А. В.	45
Кризский В. Н.	70	Щенников В. Н.	45
Кулиш Е. И.	87	Щенникова Е. В.	45
Лутошкин И. В.	96	Юлдашев Т. К.	60

Ямалтдинова Н. Р. 96

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.