ISSN 2079 – 6900

# ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 17, № 3

СВМО

2015

Средне-Волжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
им. Н. П. Огарёва

# Журнал Средневолжского математического общества

Том 17, № 3

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

**Главный редактор**
В. Ф. Тишкин
Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

**Заместитель главного редактора**
Н. Д. Кузьмичев
Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

**Ответственный секретарь**
П. А. Шаманаев
Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

**Редакционная коллегия**

А. С. Андреев
Ш. А. Алимов
А. М. Ахтямов
Ш. А. Аюпов
И. В. Бойков
П. А. Вельмисов
В. К. Горбунов
В. З. Гринес
Ю. Н. Дерюгин
А. П. Жабко
В. И. Жегалов
Т. Ш. Кальменов
А. М. Камачкин
Е. Б. Кузнецов
В. Н. Кризский
Б. В. Логинов
Anca Veronica Ion
С. И. Мартынов
П. П. Матус
О. В. Починка
В. П. Радченко
И. П. Рязанцева
М. С. Салахитдинов
С. И. Спивак
М. Т. Терехин

**Редакционный совет**

Н. Д. Морозкин
Башкирский государственный
университет

Л. А. Сухарев
Средне-Волжское
математическое общество

П. В. Сенин
Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарева

Н. Г. Ярушкина
Ульяновский государственный
технический университет

Саранск

2015

Научный рецензируемый журнал «Журнал Средневолжского математического общества» публикует оригинальные научные статьи и обзоры по физико-математическим и техническим отраслям наук, обзорные статьи, отражающие наиболее значимые события в математической жизни в России и за рубежом.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых комммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва».

**Журнал Средневолжского математического общества. Том 17, № 3**

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

*Адрес редакции:* 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).
*Тел.:* (834-2) 23-32-05
*E-mail для статей:* journal@svmo.ru
*E-mail для организационных вопросов:* svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru
*Web:* http://www.svmo.ru

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

© Оформление. Средне-Волжское математическое общество, 2015

# Содержание

Редакционная страница . . . . . 6

## Математика

**С. Н. Алексеенко, Д. В. Хитева**
О дифференцируемости решений лиминального диссипативного уравнения . . . . . 7

**В. З. Гринес, М. К. Носкова, О. В. Починка**
Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами на 3-многообразиях . . . . . 12

1. Введение и формулировка результатов . . . . . 12
2. Лемма о сглаживании функции . . . . . 13
3. Построение энергетической функции для диффеоморфизмов из класса $G$ . 16

**П. С. Красильников**
О явных оценках точности приближения в первой теореме Боголюбова . . . . . 18

1. Введение . . . . . 18
2. Теорема Боголюбова. Быстрое равномерное среднее. . . . . 19
3. Медленное равномерное среднее. . . . . 22
4. Гипотеза Волосова В.М. . . . . 24

**Т. Ф. Мамедова, Д. К. Егорова, Е. В. Десяев**
Анализ устойчивости математической модели Лукаса по части переменных . . . . . 30

1. Исследование устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений по части переменных на основе метода сравнения . . . 30
2. Применение метода Е.В. Воскресенского к анализу устойчивости математической модели Лукаса по части переменных . . . . . 32

**Д. Г. Рахимов**
О возмущении фредгольмовых собственных значений линейных операторов . . . . . 37

1. Введение. . . . . 37
2. Постановка задачи . . . . . 37
3. Возмущение собственных значений . . . . . 41

**Ж. Ш. Сафаров**
Одномерная обратная задача для уравнения вязкоупругости в ограниченной области . . . . . 44

1. Постановка задачи и основные результаты . . . . . 44

2. Предварительные построения . . . . . 45
3. Сведение обратной задачи к эквивалентной системе интегральных уравнений 49
4. Доказательства теорем . . . . . 51

**П. А. Шаманаев**
Об одном классе локально приводимых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде однородных векторных полиномов . . . . . 56

1. Введение . . . . . 56
2. Постановка задачи о локальной приводимости . . . . . 58
3. Достаточные условия локальной приводимости . . . . . 59
4. Пример локально приводимого дифференциального уравнения . . . . . 63

**Т. К. Юлдашев**
О разрешимости одной смешанной задачи для интегро-дифференциального уравнения фредгольма четвертого порядка с вырожденным ядром . . . . . 66

1. Постановка задачи . . . . . 66
2. Сведение задачу (1.1) – (1.3) к интегральному уравнению . . . . . 67
3. Теорема об однозначной разрешимости задачи (1.1) – (1.3) . . . . . 71
4. Заключение . . . . . 72

## Прикладная математика и механика

**Р. В. Жалнин, А. В. Максимкин, В. Ф. Масягин, А. И. Пантюшин, Е. Е. Пескова**
Об использовании WENO-ограничителя в неявной схеме для метода Галеркина с разрывными базисными функциями . . . . . 75

1. Введение . . . . . 75
2. Неявная схема для разрывного метода Галеркина . . . . . 75
3. WENO-ограничитель . . . . . 76
4. Задача о взаимодействии двух ударных волн (blast waves) . . . . . 78

## Математическое моделирование и информатика

**Е. В. Бирюкова, И. М. Губайдуллин, К. Ф. Коледина**
Математическая модель анализа 2-фазного равновесия смеси и ее реализация в информационной системе . . . . . 82

1. Введение . . . . . 82
2. Описание математической модели . . . . . 82
3. Вычислительный эксперимент . . . . . 83
4. Заключение . . . . . 84

**О. Ю. Кирьянова, И. И. Кирьянов, И. М. Губайдуллин**
Математическое моделирование реакции синтеза геранилпирофосфата . . . 86

1. Введение . . . 86
2. Атомарно-молекулярный и кинетический метод исследования механизмов сложных процессов . . . 87
3. Схема химических превращений реакции образования геранилпирофосфата. 88
4. Обсуждение результатов вычислительных экспериментов . . . 92
5. Заключение . . . 93

**М. А. Пьянков, П. М. Симонов**
Скоринг как модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг . . . 95

**А. О. Сыромясов, Н. В. Еремкина**
Математическое моделирование электростатического взаимодействия двух одинаковых сфер, окруженных ДЭС . . . 100

1. Введение . . . 100
2. Постановка задачи . . . 101
3. Метод решения . . . 102
4. Результаты . . . 104
5. Заключение . . . 106

СЕМЕНУ ИЗРАИЛЕВИЧУ СПИВАКУ - 70 ЛЕТ . . . 109

Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневожского математического общества» . . . 112

Правила верстки рукописей в системе LaTex . . . 114

Алфавитный указатель . . . 116

# От редакции

В третьем номере 17-го тома публикуются наиболее значимые работы ученых и молодых исследователей, являющихся участниками XII научной конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых (г. Саранск, 28 – 30 августа 2015 года).

Конференция проводится национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом при поддержке РФФИ грант № 15-01-20610).

Все статьи имеют положительные рецензии и доступны в сети Internet на сайте Научной Электронной Библиотеки Elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

# Математика

УДК 517.9

# О дифференцируемости решений лиминального диссипативного уравнения

© С. Н. Алексеенко [1], Д. В. Хитева [2]

**Аннотация.** В данной статье установлены условия, при которых решения лиминального диссипативного уравнения имеют третьи производные по пространственным переменным. Так же, как были получены главные условия для продления решения для вторых производных, строится уравнение со вторыми производными. Особенностью этого уравнения является то, что оно, приведенное к расширенной характеристической системе, имеет удобную для выведения глобальных оценок форму.

**Ключевые слова:** плотность дислокаций, нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка в частных производных, метод дополнительного аргумента, лиминальность.

В диссипативной механике материалов, определяемой взаимодействием дислокаций и точечных дефектов, совйства пластической деформации определяются с помощью скалярной плотности дослокаций [1]. Указанное взаимодействие приводит к переползанию краевых и скручиванию винтовых дислокаций, что во внешних силовых полях вызывает разрушение. Как было отмечено в [2], взаимодействие дислокаций с точечными дефектами присутствует в большом числе явлений и актуально для твердотельных технологий.

Основываясь на ряде физических допущений в [2] было выведено нелинейное дифференциальное уравнение для описания динамики плотности переползающих дислокаций для однокомпонентного изгиба плоской пластины

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + \left(g - \frac{\gamma}{\nu}\right)\frac{1}{\nu^3}\left(\frac{\partial \nu}{\partial x}\right)^3 + B\nu^2 - A\nu = 0, \tag{1.1}$$

где постоянные величины $\gamma$, $A$, $g$, $B$ имеют вполне определенные выражения через основные физические константы и величины. Диффиренциальное уравнение (1.1) было названо лиминальным, потому что для его решений возможны критические значения, кардинально меняющие характер поведения решений.

Примем, что $x \in R^1$. Начальное условие для уравнения (1.1) зададим в виде:

$$\nu(0, x) = \varphi(x), \qquad -\infty < x < \infty. \tag{1.2}$$

Для исследования разрешимости поставленной задачи будем применять метод дополнительного аргумента. В начале преобразуем задачу (1.1)-(1.2) к системе квазилинейных уравнений. Для этого продифференцируем (1.1) по $x$ и, введя новую неизвестную функцию $p(t, x) = \partial_x \nu(t, x)$, получим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial t} + 2p\frac{g\nu - \gamma}{\nu^4}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{3g\nu - 4\gamma}{\nu^5}p^3 - 2Bp\nu - Ap. \tag{1.3}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Магистрант кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р.Е.Алексеева, г. Нижний Новгород; geheimberater@yandex.ru

Из (1.1) "сконструируем"еще одно уравнение с тем же самым дифференциальным оператором

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} + 2p\frac{g\nu - \gamma}{\nu^4}\frac{\partial \nu}{\partial x} = -B\nu^2 + A\nu + p^2\frac{g\nu - \gamma}{\nu^4}. \tag{1.4}$$

Из (1.2) естественным образом следует начальное условие для $p$:

$$p\,(0, x) = \varphi'(x). \tag{1.5}$$

Составим для задачи (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) расширенную характеристическую систему с дополнительным аргументом

$$\frac{d\eta(s,t,x)}{ds} = 2\frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)}w_1(s,t,x), \tag{1.6}$$

$$\eta(t,t,x) = x, \tag{1.7}$$

$$\frac{dw_1(s,t,x)}{ds} = \frac{3gw_0(s,t,x) - 4\gamma}{w_0^5(s,t,x)}w_1^3(s,t,x) - 2Bw_0(s,t,x)w_1(s,t,x) + Aw_1(s,t,x), \tag{1.8}$$

$$w_1(0,t,x) = \varphi'(\eta(0,t,x)), \tag{1.9}$$

$$\frac{dw_0(s,t,x)}{ds} = Aw_0(s,t,x) - Bw_0^2(s,t,x) + \frac{gw_0(s,t,x) - \gamma}{w_0^4(s,t,x)}w_1^2(s,t,x), \tag{1.10}$$

$$w_0(0,t,x) = \varphi(\eta(0,t,x)). \tag{1.11}$$

В результате мы приходим к системе интегральных уравнений:

$$w_1 = 3g\int\limits_0^s \frac{w_1^3}{w_0^4}ds - 4\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^3}{w_0^5}ds - 2B\int\limits_0^s w_0w_1ds + A\int\limits_0^s w_1ds + \\ +\varphi'\left(x + 2\gamma\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right), \tag{1.12}$$

$$w_0 = g\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^3}ds - \gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}ds - B\int\limits_0^s w_0^2ds + A\int\limits_0^s w_0ds + \\ +\varphi\left(x + 2\gamma\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right). \tag{1.13}$$

С помощью метода последовательных приближений доказывается локальное существование дважды непрерывно дифференцируемого решения системы интегральных уравнений (1.12) - (1.13). При этом промежуток разрешимости $0 < t \le T_0$ определяется алгебраически на основании известных величин, входящих в задачу Коши (1.1) - (1.2). Функции $p(t,x) = w_1(t,t,x)$, $\nu(t,x) = w_0(t,t,x)$ дадут решение задачи (1.3), (1.4), (1.2), (1.5), а

функция $\nu(t,x)$ будет решением задачи (1.1) - (1.2). Соответствующая теорема приведена в работе [2].

Чтобы иметь возможность продлевать локальное решение, нам потребуются глобальные оценки функций $w_0$, $w_1$, их первых и вторых производных. А для этого нужно вывести удобное для получения оценок уравнение, которому удовлетворяет вторая производная по $x$ от функции $\nu(t,x)$. Особенностью этого уравнения как раз и является то, что оно, приведенное к расширенной характеристической системе, имеет удобную для выведения глобальных оценок форму [3]. Соответственно, надо доказать существование дифференцируемого решения такого уравнения и обосновать связь его решения с функциями $\nu(t,x)$ и $p(t,x)$. Этому по существу и посвящена данная работа.

В начале уточним связь функций $\nu(t,x)$ и $p(t,x)$. Дифференцируя уравнение (1.4) по $x$ и вычитая результат дифференцирования из (1.3), получим для разности $\omega(t,x) = p(t,x) - \partial_x\nu(t,x)$ уравнение

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + 2p\frac{g\nu-\gamma}{\nu^4}\frac{\partial\omega}{\partial x} = \omega\left[\frac{3g\nu-4\gamma}{\nu^5}p^2 + 2\frac{3g\nu-4\gamma}{\nu^5}p\frac{\partial\nu}{\partial x} - 2\frac{\partial p}{\partial x}\frac{g\nu-\gamma}{\nu^4} - 2B\nu + A\right]$$

с начальным условием $\omega(0,x) = 0$. Применяя к этой задаче Коши метод дополнительного аргумента, получаем, что $\omega(t,x) = 0$, следовательно

$$p(t,x) = \partial_x\nu(t,x). \tag{1.14}$$

Собственно говоря, это рассуждение входит составной частью в обоснование того, что решение системы интегральных уравнений (1.12) - (1.13) дает решение исходной задачи (1.1) - (1.2). Но в [2] на этом не было акцентировано внимание, а для данной работы оно играет сущуственную роль.

Из (1.14) следует важный вывод:

Если $\varphi \in \bar{C}^3(R^1)$, то $\nu(t,x) \in \bar{C}^{1,3}([0,T_0]\times R^1)$. И именно такая гладкость функции $\nu(t,x)$ нужна для продления решения задачи (1.1) - (1.2).

Теперь добавим к системе двух уравнений (1.3), (1.4) уравнение относительно $\vartheta = \partial_x p = \partial_{xx}\nu$. С этой целью продифференцируем (1.3) по $x$ и, заменив $\partial_x p$ на $\vartheta$, будем иметь

$$\begin{aligned}\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + 2p\frac{g\nu-\gamma}{\nu^4}\frac{\partial\vartheta}{\partial x} &= -2\frac{g\nu-\gamma}{\nu^4}\vartheta^2 + 5\frac{3g\nu-4\gamma}{\nu^5}p^2\vartheta + \\ &+(A-2B\nu)\vartheta + 4\frac{5\gamma-3g\nu}{\nu^6}p^4 - 2Bp^2.\end{aligned} \tag{1.15}$$

В качестве начального условия для $\vartheta$ возьмем

$$\vartheta|_{t=0} = \varphi''\left(\eta(0,t,x)\right). \tag{1.16}$$

Тогда к приведенной выше расширенной характеристической системе (1.6) - (1.11) добавится уравнение для функции $w_2(s,t,x)$:

$$\frac{dw_2}{ds} = -2\frac{gw_0-\gamma}{w_0^4}w_2^2 + \left[5\frac{3gw_0-4\gamma}{w_0^5}w_1^2 + A - 2Bw_0\right]w_2 + 4\frac{5\gamma-3gw_0}{w_0^6}w_1^4 - 2Bw_1^2 \tag{1.17}$$

с начальным условием

$$w_2(0,t,x) = \varphi''\left(\eta(0,t,x)\right). \tag{1.18}$$

Соответственно, к системе интегральных уравнений (1.12) - (1.13) также добавится уравнение

$$w_2 = 6g\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}ds - 8\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^5}ds + 20\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^4}{w_0^6}ds - 12g\int\limits_0^s \frac{w_1^4}{w_0^5}ds - 2B\int\limits_0^s w_1^2 ds +$$
$$+9g\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^4}w_2 ds - 12\gamma\int\limits_0^s \frac{w_1^2}{w_0^5}w_2 ds - 2g\int\limits_0^s \frac{w_2}{w_0^3}ds + \gamma\int\limits_0^s \frac{w_2}{w_0^4}ds - 2B\int\limits_0^s w_2 w_0 ds -$$
$$-A\int\limits_0^s w_2 ds + \varphi''\left(x + 2\gamma\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^4}ds - 2g\int\limits_0^t \frac{w_1}{w_0^3}ds\right). \tag{1.19}$$

С помощью метода последовательных приближений доказывается, что при $0 < t < \vartheta_2$, где

$$\vartheta_2 = min\left|M_1, M_2, \frac{kN_\varphi}{M_3}\right|, \tag{1.20}$$

$$M_1 = \frac{9N_\varphi}{\left[3|g|\frac{(10N_\varphi)^3}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^4} + 4|\gamma|\frac{(10N_\varphi)^3}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^5} + 2|B|\left(\frac{C_\varphi}{2} + N_\varphi\right)10N_\varphi + |A|10N_\varphi\right]}, \tag{1.21}$$

$$M_2 = \frac{\frac{C_\varphi}{2}}{\left[|g|\frac{(10N_\varphi)^2}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^3} + |\gamma|\frac{(10N_\varphi)^2}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^4} + 2|B|\left(\frac{C_\varphi}{2} + N_\varphi\right)^2 + |A|\left(\frac{C_\varphi}{2} + N_\varphi\right)\right]}, \tag{1.22}$$

$$M_3 = 6|g|\frac{(10N_\varphi)^2}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^4} + 8|\gamma|\frac{(10N_\varphi)^2}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^5} + 20|\gamma|\frac{(10N_\varphi)^4}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^6} + 12|g|\frac{(10N_\varphi)^4}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^5} + 2|B|\left(10N_\varphi\right)^2 +$$
$$+9|g|\frac{(10N_\varphi)^2(k+1)N_\varphi}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^4} + 12|\gamma|\frac{(10N_\varphi)^2(k+1)N_\varphi}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^5} + 2|g|\frac{(k+1)N_\varphi}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^3} +$$
$$+|\gamma|\frac{(k+1)N_\varphi}{\left(\frac{C_\varphi}{2}\right)^3} + 2|B|\left(\frac{C_\varphi}{2} + N_\varphi\right)(k+1)N_\varphi + |A|(k+1)N_\varphi, \tag{1.23}$$

$$N_\varphi = max|sup|\varphi(x)|, sup|\varphi'(x)|, sup|\varphi''(x)||, \qquad \varphi \geq C_\varphi > 0, \qquad k = const, \tag{1.24}$$

выполняются неравенства

$$|w_n^1| \leq 10N_\varphi, \qquad |w_n^0| \leq \frac{C_\varphi}{2} + N_\varphi, \qquad |w_n^0| \geq \frac{C_\varphi}{2}, \qquad |w_n^2| \leq (k+1)N_\varphi \tag{1.25}$$

и интегральное уравнение (1.19) имеет единственное дифференцируемое по $t$ и по $x$ решение $w_2(s,t,x)$.

В силу основного принципа метода дополнительного аргумента функция $\vartheta(t,x) = w_2(s,t,x)$ будет удовлетворять уравнению (1.15) и начальному условию (1.16).

Аналогичным образом, как это было проделано выше для функций $\nu(t,x)$ и $p(t,x)$, доказывается, что $\vartheta(t,x) = \partial_x p(t,x)$, а значит $\vartheta(t,x) = \partial_{xx}\nu(t,x)$.

В результате приходим к теореме, которая предназначена служить основой для вывода глобальных априорных оценок. В ее формулировке воспользуемся обозначением множества $\Delta_\Upsilon := \{(s,t) : 0 \le s \le t \le \Upsilon\}$.

Теорема. Пусть $\varphi \in \bar{C}^3(R^1)$. Тогда существует такое число $\Upsilon > 0$, что при $0 < t \le \Upsilon$ задача Коши (1.1) - (1.2) имеет решение $\nu(t,x) \in \bar{C}^{1,3}([0,\gamma] \times R^1)$, которое определяется из расширенной характеристической системы (1.6) - (1.11) в виде $\nu(t,x) = w_0(t,t,x)$. При этом $\partial_x\nu(t,x) = p(t,x) = w_1(t,t,x)$, а $\partial_{xx}\nu(t,x) = \partial_x p(t,x) = \vartheta(t,x) = w_2(t,t,x)$, где функция $w_2(s,t,x)$ удовлетворяет уравнению (1.17) и начальному условию (1.18). Гладкость функций $w_0$, $w_1$, $w_2$ определяется соотношениями $w_0 \in \bar{C}^{1,1,3}(\Delta_\Upsilon \times R^1)$, $w_1 \in \bar{C}^{1,1,2}(\Delta_\Upsilon \times R^1)$, $w_2 \in \bar{C}^{1,1,1}(\Delta_\Upsilon \times R^1)$.

Замечание. Значение $\Upsilon$ определяется величинами $g$, $\gamma$, $B$, $A$, $C_\varphi = inf\varphi$ и $N_\varphi = max\{sup|\varphi|, sup|\varphi'|, sup|\varphi''|, sup|\varphi'''|\}$.

## Список литературы


1. Косевич Д. М., *Основы механики крислаллической решетки.*, Наука, М., 1972.

2. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Хитева Д. В., “Лиминальное диссипативное уравнение плотности переползающих дислокаций для однокомпонентного изгиба плоской пластины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:1 (2014), 24 – 31.

3. Алексеенко С. Н., Нагорных С. Н., Елькина Е. А., “Исследование условий нелокальной разрешимости уравнения диссипативных стационарных структур.”, *Вестник Нижегородского университета им. Н.И.Лобачевского*, 2012, № 1, Часть 1, 122 – 128.


# On the differentiability of solutions of the liminal dissipative equation


© **S. N. Alekseenko**[3], **D. V. Khiteva**[4]



**Abstract.** There is established the conditions under which the solutions of the liminal dissipative equation have third derivatives with respect to the spatial variables. As principal conditions for a prolongation of solutions are formulated for the second derivatives, the equation for the second derivative of a solution to considered problem is constructed. The peculiarity of this equation is that its in the extended characteristic system has a convenient to deducing of global estimates form.



**Key Words:** dislocation density, nonlinear first-order partial differential equation, liminality method of an additional argument



[3] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[4] The undergraduate of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; geheimberater@yandex.ru

УДК 517.9

# Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерными базисными множествами на 3-многообразиях

© В. З. Гринес[1], М. К. Носкова[2], О. В. Починка[3]

**Аннотация.** В настоящей работе рассматриваются А-диффеоморфизмы, заданные на замкнутых ориентируемых 3-многообразиях. В предположении, что неблуждающее множество такого диффеоморфизма состоит из двумерных базисных множеств, доказывается, что он обладает энергетической функцией.

**Ключевые слова:** энергетическая функция, базисное множество, диффеоморфизм Аносова

## 1. Введение и формулировка результатов

Пусть $M$ — замкнутое ориентируемое 3-многообразие с метрикой $d$ и на нём задан диффеоморфизм $f$. Динамика диффеоморфизма $f$ во многом определяется структурой его *неблуждающего множества* $NW(f)$. Необходимым условием сохранения структуры орбит неблуждающего множества с точностью до гомеоморфизма при малых изменениях диффеоморфизма $f$ является *гиперболичность* множества $NW(f)$. Динамически гиперболичность выражается в том, что любая точка $p \in NW(f)$ обладает *неустойчивым* и *устойчивым* многообразием

$W^u(p) = \{x \in M : d(f^k(p), f^k(x)) \to 0 \text{ при } k \to +\infty\}$ и

$W^s(p) = \{x \in M : d(f^k(p), f^k(x)) \to 0 \text{ при } k \to -\infty\}$,

которые являются образами $\mathbb{R}^q, q \in \{0, \dots, n\}$ и $\mathbb{R}^{n-q}$ при инъективной иммерсии.

Условие гиперболичности неблуждающего множества и всюду плотности в нем периодических точек приводит к разложению множества $NW(f)$ в объединение конечного числа, так называемых *базисных множеств*, каждое из которых является замыканием некоторой траектории системы. Для сохранения качественного поведения траекторий на неблуждающем множестве при малых изменениях диффеоморфизма $f$ ($\Omega$-*устойчивости*), помимо гиперболичности неблуждающего множества, необходимым является условие отсутствия *циклов*, то есть наборов базисных множеств $B_1, \dots, B_k, B_{k+1} = B_1$ со свойством

$$W^s_{B_i} \cap W^u_{B_{i+1}} \neq \emptyset, \ i = 1, \dots, k.$$

Эти же условия являются и достаточными для $\Omega$-устойчивости диффеоморфизма $f$. *Энергетической функцией* $\Omega$-устойчивого диффеоморфизма $f$ называется гладкая функция, убывающая вдоль блуждающих траекторий, постоянная на базисных множествах и множество критических точек которой совпадает с множеством неблуждающих точек $NW(f)$.

Обозначим через $G$ класс $\Omega$-устойчивых диффеоморфизмов на $M$, неблуждающее множество которых состоит из базисных множеств топологической размерности равной двум. Пусть $f \in G$. В силу [1] и [2], каждая компонента связности $B$ множества $NW(f)$ является двумерным тором ручно вложенным[4] в $M$ и все компоненты связности имеют

[1] Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ; vgrines@yandex.ru

[2] Магистрант кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского

[3] Профессор кафедры фундаментальной математики НИУ ВШЭ; olga-pochinka@yandex.ru

один и тот же период $k_f \geq 1$, а отображение $f^{k_f}|_B$ топологически сопряжено с *гиперболическим автоморфизмом тора*[5]. Тор $B$ является либо аттрактором, либо репеллером[6] диффеоморфизма $f$.

Обозначим через $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) объединение всех аттракторов (репеллеров), принадлежащих $NW(f)$. Множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты и граница каждой компоненты связности $V$ множества $M \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит в точности из одной периодической компоненты $A \subset \mathcal{A}$ и одной периодической компоненты $R \subset \mathcal{R}$. При этом замыкание $cl\ V$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$. Таким образом, объемлющее многообразие $M$, допускающее диффеоморфизмы класса $G$, является объединением конечного числа подмножеств, каждое из которых гомеоморфно $\mathbb{T}^2 \times [0,1]$, и каждое базисное множество является тором, принадлежащим пересечению двух таких подмножеств. Заметим, что базисное множество диффеоморфизма $f \in G$, будучи ручным тором, может не быть гладким ни в одной точке (см., например, [4]). Тем не менее, на $M$ существует гладкая функция с таким множеством критических точек, что следует из основного результата настоящей работы.

**Теорема 1.1.** *Любой диффеоморфизм $f \in G$ обладает энергетической функцией.*

*Благодарности.* Работа выполнена при финансовой поддержке Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2015 году (проект «Динамические системы и их приложения»), Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 13-01-12452 офи-м и 15-01-03689-а) и Российского Научного фонда (грант 14-41-00044).

## 2. Лемма о сглаживании функции

В этом разделе мы сформулируем и докажем основной технический момент построения энергетической функции для диффеоморфизма $f \in G$.

**Лемма 2.1.** *Пусть $K \subset M$ — компактное подмножество замкнутого многообразия $M$ размерности $n$, $U$ — некоторая компактная окрестность множества $K$. Пусть задана непрерывная функция $\varphi : U \to [0;1]$, гладкая на $U \setminus K$ и $\varphi^{-1}(0) = K$. Тогда существует функция $g : [0;1] \to [0;1]$, такая что суперпозиция $\psi = g \circ \varphi$ гладкая на всем множестве $U$, причем функция $g$ удовлетворяет следующим свойствам:*

- *$g$ — монотонно возрастающая на $[0;1]$;*
- *$g'(0) = 0$ и $g'(c) \neq 0$, $\forall c \in (0;1]$;*
- *$g(c) = c$, $\forall c \in [\frac{1}{2};1]$.*

[4] Двумерный тор $B$ называется *ручно вложенным* в многообразие $M$, если существует гомеоморфизм на образ $g : \mathbb{T}^2 \times [-1,1] \to M$ такой, что $g(\mathbb{T}^2 \times \{0\}) = B$.

[5] *Алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый матрицей $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из множества $GL(2,\mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем $\pm 1$. То есть $\widehat{C}(x,y) = (ax+by, cx+dy)\ (mod\ 1)$. Алгебраический автоморфизм $\widehat{C}$ называется *гиперболическим*, если собственные значения $\lambda_1, \lambda_2$ матрицы $C$ удовлетворяют условиям $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$. При этом матрица $C$ также называется *гиперболической*.

[6] Множество $B$ называется *аттрактором* диффеоморфизма $f$, если существует замкнутая окрестность $U$ множества $B$ такая, что $f(U) \subset int\ U$, $\bigcap\limits_{j \geq 0} f^j(U) = B$. Аттрактор для диффеоморфизма $f^{-1}$ называется *репеллером* диффеоморфизма $f$.

Доказательство. Для $c \in (0,1]$ положим $\alpha(c) = \min\{1, d^2(\varphi^{-1}(c), K)\}$ и $\beta(c) = \max\{1, \max\limits_{x\in\varphi^{-1}([c,1])} |grad\ \varphi(x)|\}$ [7]. По построению функции $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ являются непрерывными, причем $\alpha(c)$ — неубывающая на $(0;1]$ и существует значение $c^* \in (0;1]$ такое, что $\alpha(c)$ — монотонно возрастает на $(0;c^*]$, а $\beta(c)$ — невозрастающая. Тогда функция $\gamma(c) = \frac{\alpha(c)}{\beta(c)}$ является неубывающей на полуинтервале $(0;1]$ и $\lim\limits_{c\to 0} \frac{\alpha(c)}{\beta(c)} = 0$.

Построим $C^2$-гладкую функцию $g : [0;1] \to [0;1]$, такую что

a) $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0;1)$;

b) $g(c) \le \gamma(c)$ для любого $c \in (0;\frac{1}{8})$;

c) $g'(c) \le \gamma(c)$ для любого $c \in (0;\frac{1}{8})$;

d) $g(c) = c$ для любого $c \in [\frac{1}{2};1]$.

Возьмем открытое покрытие полуинтервала $(0;1]$ множествами

$U_1 = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2} < x \le 1\}$

$U_2 = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{4} < x \le 1\}$

$U_i = \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{2^i} < x < \frac{1}{2^{i-2}}\}$, $i = 3, 4, \dots$,

и следующее локально конечное разбиение единицы[8], подчиненное этому покрытию:

$$\forall i = 2,4,\dots,\ \sigma_i(x) = \begin{cases} e^{\frac{\left(x-\frac{1}{2^{i-1}}\right)^4}{\left(x-\frac{1}{2^i}\right)\left(x-\frac{1}{2^{i-2}}\right)}}, \text{ если } x \in \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \\ 0, \text{ если } x \notin \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \end{cases}$$

$$\sigma_1(x) = \begin{cases} 1 - \sigma_2(x), \text{ если } x \in (\frac{1}{2};1]; \\ 0, \text{ если } x \notin (\frac{1}{2};1]; \end{cases}$$

$$\forall i = 3,5,\dots,\ \sigma_i(x) = \begin{cases} 1 - \sigma_{i-1}(x), \text{ если } x \in \left[\frac{1}{2^{i-1}}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \\ 1 - \sigma_{i+1}(x), \text{ если } x \in \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-1}}\right); \\ 0, \text{ если } x \notin \left(\frac{1}{2^i}, \frac{1}{2^{i-2}}\right); \end{cases}$$

Положим $\varepsilon_i = \gamma\left(\frac{1}{2^i}\right)$ для всех $i = 4,5,\dots$. Пусть $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$, $\varepsilon_3 = \dfrac{\frac{1}{2} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x)dx}{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3 dx}$. Определим функцию $g$ формулой $g(c) = \begin{cases} \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx, \text{ если } c \in (0;1]; \\ 0, \text{ если } c = 0 \end{cases}$. Заметим, что она является дважды гладкой, так как ее производная — сумма гладких функций. Покажем, что она является искомой, проверив условия a)-d).

[7] Множество $C = \varphi^{-1}([c,1])$ является компактным и, следовательно, допускает покрытие конечным числом гладких карт. Под максимумом модуля градиента функции $\varphi$ в точке $x \in C$ понимается наибольший из посчитанных в этих картах модулей градиентов этой функции.

[8] Пусть дано открытое покрытие топологического пространства $M$ открытыми множествами $U_\alpha$. *Разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{U_\alpha\}$ называется набор гладких функций $\sigma_\gamma : M \to \mathbb{R}$, обладающих следующими свойствами:

- Для всех $\gamma$, $Supp(\sigma_\gamma) \subset U_\alpha$ для некоторого $\alpha$ (где $Supp(\sigma_\gamma)$ — замыкание множества, на котором функция отлична от нуля)
- $0 \le \sigma_\gamma \le 1$ на $M$
- $\forall x \in M$ имеем $\sum\limits_\gamma \sigma_\gamma(x) = 1$

Если для любой точки $x \in M$ существует окрестность $W_x$ такая, что пересечение $W \cap Supp(\sigma_\gamma)$ непусто не более чем для конечного числа индексов $\gamma$, то такое разбиение единицы называется *локально конечным*.

a) Поскольку $g'(c) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(c)$, то $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0;1)$.

b) Для $i = 4, 5, \ldots$ последовательность $\{\varepsilon_i\}$ убывающая. Заметим, что для любого $c \in (0;1]$ существует единственный номер $i^*$ такой, что $c \in \left(\frac{1}{2^{i^*-1}}; \frac{1}{2^{i^*-2}}\right]$. Тогда $\sigma_{i^*}(c) \neq 0$ и $\sigma_i(c) = 0$ для всех $i \notin \{i^*, i^*+1\}$. Из выбора параметров $\varepsilon_i$ для $c \in (0, \frac{1}{8})$ получаем цепочку неравенств $g(c) = \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx = \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx < \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_{i^*} \sigma_i(x))dx = \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \sigma_i(x))dx < \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=1}^{\infty} \sigma_i(x))dx = \varepsilon_{i^*} \int\limits_0^c 1dx = \varepsilon_{i^*} c < \varepsilon_{i^*} = \gamma(\left(\frac{1}{2^{i^*}}\right) < \gamma(c)$.

c) Для $g'(c)$, $c \in (0, \frac{1}{4})$ справедлива следующая оценка $g'(c) = \sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(c) < \varepsilon_{i^*} \sum\limits_{i=i^*}^{\infty} \sigma_i(c) = \varepsilon_{i^*} < \gamma(c)$.

d) При $c \in [\frac{1}{2}; 1]$ верна цепочка равенств $g(c) = \int\limits_0^c (\sum\limits_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon_3 \sigma_3(x)dx + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2 \sigma_2(x)dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^c (\varepsilon_1 \sigma_1(x) + \varepsilon_2 \sigma_2(x))dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx + \varepsilon_3 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3(x)dx + \varepsilon_2 \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x)dx + \varepsilon_2 \int\limits_{\frac{1}{2}}^c (\sigma_1(x) + \sigma_2(x))dx = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx + \frac{\frac{1}{2} - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} (\sum\limits_{i=4}^{\infty} \varepsilon_i \sigma_i(x))dx - \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x)dx}{\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3 dx} \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_3(x)dx + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \sigma_2(x)dx + (c - \frac{1}{2}) = c$. Таким образом, $g(c) = c$ для $c \in [\frac{1}{2}; 1]$.

Покажем, что суперпозиция $\psi = g \circ \varphi$ является гладкой функцией на $U$.

Для начала заметим, что $grad\ \psi = g' \cdot grad\ \varphi$, это нам пригодится для дальнейших рассуждений.

Так как на множестве $U \setminus K$ функция $\psi$ является гладкой как суперпозиция гладких функций, то нам осталось показать, что функция $\psi$ — гладкая на множестве $K$.

Рассмотрим любую точку $a \in K$ и локальную карту $(U_a, h_a)$, где $h_a : U_a \to \mathbb{R}^n$ — диффеоморфизм, отображающий некоторую окрестность $U_a \in U$[9] точки $a$ в $\mathbb{R}^n$, причем точка $a$ переходит в точку $O(0,0)$. Сначала покажем дифференцируемость. Если функция $\psi_a = \psi(h_a^{-1}(x))$ дифференцируема в точке $O$, то функция $\psi$ дифференцируема в точке $a$. При этом функция $\psi_a$ дифференцируема в точке $O$ и имеет частные производные, равные нулю в этой точке, тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{s \to O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} = 0$, где $s \in \mathbb{R}^n$ и $\rho$ евклидова метрика в $\mathbb{R}^n$, определенная формулой $\rho(s_1, s_2) = \sqrt{(x_{1_1} - x_{2_1})^2 + (x_{1_2} - x_{2_2})^2 + \cdots + (x_{1_n} - x_{2_n})^2}$ для $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^2$. Проверка равенства $\lim\limits_{s \to O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} = 0$ и завершит доказательство дифференцируемости.

Введем на $\mathbb{R}^n$ метрику $d_a$ формулой $d_a(s_1, s_2) = d(h_a^{-1}(s_1), h_a^{-1}(s_2))$ для $s_1, s_2 \in \mathbb{R}^n$. В силу [5] (лекция 15), метрики $\rho$ и $d_a$ эквивалентны в некоторой компактной окрестности $U(O)$ точки $O$, то есть существуют константы $0 < c_1 \leq c_2$ такие, что

$$\forall s_1, s_2 \in U(O): \ c_1 d_a(s_1 s_2) \leq \rho(s_1, s_2) \leq c_2 d_a(s_1, s_2).$$

Для $s \in U(O)$ положим $w = h_a^{-1}(s)$ и $c = \varphi(h_a^{-1}(s)) = \varphi(w)$. Тогда $\lim\limits_{s \to O} \frac{\psi_a(s)}{\rho(s,O)} = \lim\limits_{s \to O} \frac{\psi(h_a^{-1}(s))}{c_1 d(h_a^{-1}(s), a)} = \lim\limits_{w \to a} \frac{\psi(w)}{c_1 d(w,a)} = \lim\limits_{w \to a} \frac{g(\varphi(w))}{c_1 d(w,a)} = \lim\limits_{w \to a} \frac{g(c)}{c_1 d(w,a)} < \lim\limits_{w \to a} \frac{\alpha(c)}{\beta(c) c_1 d(w,a)} \leq \lim\limits_{w \to a} \frac{d^2(w,a)}{c_1 d(w,a)} =$

[9] Окрестность выберем таким образом, чтобы $\forall w \in U_a : \varphi(w) < \frac{1}{8}$

$\lim\limits_{w\to a}\frac{d(w,a)}{c_1}=0$.

Теперь покажем, что частные производные $(\psi_a)'_{x_i}$, $i=1,\dots,n$ непрерывны в точке $O$, то есть $\lim\limits_{s\to O}(\psi_a)'_{x_i}(s)=0$, $i=1,\dots,n$, что эквивалентно $\lim\limits_{s\to O}|grad\ \psi_a(s)|=0$. Обозначим через $J_{h_a^{-1}}$ якобиан отображения $h_a^{-1}$, через $||J_{h_a^{-1}}||$ — его норму, подчиненную евклидовой норме вектора в $\mathbb{R}^2$ и через $B$ константу такую, что $||J_{h_a^{-1}}(s)||\le B$ для всех точек $s$ в некоторой окрестности точки $O$. Тогда $\lim\limits_{s\to O}|grad\ \psi_a(s)|=\lim\limits_{s\to O}|J_{h_a^{-1}}(s)\cdot g'(c)\cdot grad\ \varphi(w)|\le \lim\limits_{s\to O}||J_{h_a^{-1}}(s)||\cdot|g'(c)|\cdot|grad\ \varphi(w)|\le\lim\limits_{s\to O}B\cdot\frac{\alpha(c)}{\beta(c)}\cdot|grad\ \varphi(w)|\le\lim\limits_{w\to a}B\cdot\frac{d^2(w,a)}{|grad\ \varphi(w)|}\cdot|grad\ \varphi(w)|\le\lim\limits_{w\to a}B\cdot d^2(w,a)=0$.

Таким образом, функция $\psi$ — гладкая на $U$.

Доказательство закончено.

## 3. Построение энергетической функции для диффеоморфизмов из класса $G$

В этом разделе мы докажем следующую теорему.

**Теорема 1.1.** *Любой диффеоморфизм $f\in G$ обладает энергетической функцией.*

Доказательство. Пусть $V$ — компонента связности множества $M\setminus(\mathcal{A}\cup\mathcal{R})$ такая, что $\partial V=A\cup R$, где $A\in\mathcal{A}$, $R\in\mathcal{R}$. Для доказательства теоремы 1.1. достаточно построить энергетическую функцию $\varphi: cl\ V\to[0,1]$ для $f^{k_f}$.

Согласно работе [3] существует диффеоморфизм $\chi:\mathbb{T}^2\times(0,2)\to V$ такой, что расслоение на двумерные торы $\{T_t=\chi(\mathbb{T}^2\times\{t\}), t\in(0,2)\}$ является $f^{k_f}$-инвариантным. Определим функцию $\varphi: cl\ V\to[0,2]$ следующим образом:

$$\varphi(z)=\begin{cases} t, \text{ если } z\in T_t;\\ 0, \text{ если } z\in A;\\ 2, \text{ если } z\in R;\end{cases}$$

По построению функция $\varphi$ является гладкой на $V$, непрерывной на $cl\ V$, убывающей вдоль траекторий системы, а также не имеет критических точек на множестве $M$. Положим $U_A=\chi(\mathbb{T}^2\times(0,1])\cup A$ и $\varphi_A=\varphi|_{U_A}$. Из леммы 2.1. следует, что существует функция $g_A:[0,1]\to[0,1]$, такая что функция $\psi_A=g_A\circ\varphi_A$ является энергетической функцией на $U_A$ для $f^{k_f}$. Положим $U_R=\chi(\mathbb{T}^2\times(1,2])\cup R$ и $\varphi_R=2-\varphi|_{U_R}$. Из леммы 2.1. следует, что существует функция $g_R:[0,1]\to[0,1]$, такая что функция $\psi_R=g_R\circ\varphi_R$ является энергетической функцией на $U_A$ для $f^{-k_f}$. Так как функции $g_A$ и $g_R$ являются тождественными на отрезке $[\frac{1}{2},1]$, то функция

$$\psi(z)=\begin{cases}\varphi_A(z), \text{ если } z\in U_A;\\ 2-\varphi_R(z), \text{ если } z\in U_R;\end{cases}$$

является искомой энергетической функцией на $cl\ V$ для диффеоморфизма $f^{k_f}$.

Доказательство закончено.

## Список литературы

1. Brown A. Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds. // Journal of Modern Dynamics. 2010. V. 4, 517–548.

2. Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В., “О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях.”, *Мат. зам.*, **78**:6 (2005), 813 – 826.

3. Grines V., Levchenko Y., Medvedev V., Pochinka O., "The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets", *Nonlinearity*, **28** (2015), 4081–4102.

4. Kaplan J., Mallet-Paret J., Yorke J., "The Lapunov dimension of nonwhere diffferntiable attracting torus", *Ergod. Theor. Dynam. Syst.*, **2** (1984), 261–81.

5. Постников М. М., "Лекции по геометрии. Семестр V. Риманова геометрия", *М.: Факториал*, 1998.

# Construction of an energy function for A-diffeomorphisms of two-dimensional non-wandering sets on 3-manifolds

© **V. Z. Grines**[10]; **M. K. Noskova**[11]; **O. V. Pochinka**[12]

**Abstract.** In this paper we consider the A-diffeomorphisms of closed orientable 3-manifolds. Assuming that the non-wandering set of the diffeomorphism consists of basic sets whose topological dimension is two, it is proved that it has the energy function.

**Key Words:** energy function, basic set, Anosov diffeomorphism

[10] Professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; vgrines@yandex.ru

[11] Master of the department of numerical and functional analysis, Lobachevsky State University, Nizhny Novgorod; mknoskova@yandex.ru

[12] Professor of Department of fundamental mathematics, Higher School of Economics, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru

УДК 517.928.7

# О явных оценках точности приближения в первой теореме Боголюбова

© П. С. Красильников[1]

**Аннотация.** Исследуется задача получения явных оценок точности приближений в методе усреднения стандартных по Боголюбову систем. Показано, что вид этих оценок зависит от значений некоторого параметра $\Lambda^*$, влияющего на характер сходимости временного среднего. Формулируется утверждение о явных оценках точности приближения (гипотеза Волосова). Утверждение доказано при некоторых дополнительных ограничениях на правую часть дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** временное среднее, точность приближения, метод усреднения

## 1. Введение

Известно, что в классической работе Н.Н. Боголюбова [1], в статьях И.И. Гихмана [2], М.А. Красносельского [3], в работах других авторов оценка точности приближения метода усреднения стандартной по Боголюбову системы

$$\dot{x} = \varepsilon X(x,t),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \varepsilon \ll 1 \tag{1.1}$$

имеет асимптотический характер:

$$\|x(t) - u(t)\| \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0, \quad t \in [0, L/\varepsilon]$$

Здесь $L$ – произвольный, сколь угодно большой параметр, $u(t)$ – решение усредненных уравнений

$$\dot{u} = \varepsilon \overline{X}(u), \quad \overline{X}(x) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(x,t)\,dt \tag{1.2}$$

Известно [4], что при решении прикладных задач правомерность асимптотических оценок сомнительна, так как параметр $\varepsilon$ фиксирован и редко бывает малым. Чтобы применить метод усреднения часто используют «железный закон, согласно которому тройку по сравнению с единицей можно считать величиной бесконечно большой, а одну треть – бесконечно малой» [5]. Более того, в некоторых задачах динамики спутников приходится ограничивать параметр $\varepsilon$ снизу, так как при уменьшение $\varepsilon$ меняется вид уравнений движения (меняется модель задачи). В этом случае асимптотические оценки не работают.

Явная оценка точности приближения впервые получена для периодической правой части в работе [6]:

**Теорема 1.1.** *Предположим, что $X(x,t)$ периодична по $t$ с периодом $T$, существует непрерывный и равномерно ограниченный по $t$ $(0 \leqslant t < \infty)$ градиент функции $X(x,t)$, $x \in D$, при этом решения $x(t)$, $u(t)$ определены при $0 \leqslant t < \infty$. Тогда для любого $L$ существует константа $C$, зависящая от $L$ такая, что*

$$\|x(t) - u(t)\| \leqslant C(L)\varepsilon, \quad \textit{при} \quad t \in [0, L/\varepsilon]$$

[1] Заведующий кафедрой дифференциальных уравнений, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва; krasil06@rambler.ru.

J.G. Besjes [7] усилил эти результаты: получил явное выражение для коэффициента $C(L)$ в теореме 1.1. Рассмотрел также случай произвольной зависимости правых частей от времени и получил точность приближения порядка $\sqrt{\delta(\varepsilon)}$. Здесь

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon\Lambda(\varepsilon), \quad \Lambda(\varepsilon) = \sup_{x\in D}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant L/\varepsilon}\left\|\int_0^t \left[X(x,\tau) - \overline{X}(x)\right] d\tau\right\|\right] \tag{1.3}$$

$D$ - область изменения фазовой перменной $x$.

## 2. Теорема Боголюбова. Быстрое равномерное среднее.

Современная формулировка теоремы Боголюбова имеет следующий вид. Пусть $X(x,t)$ определена в некоторой открытой, связной области $D'$ переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)^\tau$, когда $t \in [0, +\infty)$ и удовлетворяет в некоторой открытой подобласти $D \times [0, +\infty)$, $D \in D'$ следующим условиям:

1) условию непрерывности по $t$ при любых фиксированных $x$

2) условию Липшица по $x$ с независимой от $x$ и $t$ константой $\lambda$:

$$\left\|X\left(x^{(1)}, t\right) - X\left(x^{(2)}, t\right)\right\| \leqslant \lambda \left\|x^{(1)} - x^{(2)}\right\|,$$

где $\|x\| = \sqrt{\sum_k x_k^2}$

3) условию равномерного ограничения в области $D \times [0, +\infty)$, т.е.

$$\|X(x,t)\| < M, \quad M = const$$

сразу для всех $x \in D$ и $t \geqslant 0$

4) условию существования равномерного по $u \in D$ предела

$$\overline{X}(u) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{T}\int_0^T X(u,t)\, dt$$

Справедливо следующее утверждение ([1], [7]).

**Теорема 2.1.** *Если для дифференциальных уравнений* (1.1) *выполнены условия 1–4, накладывающие ограничения на правые части этих уравнений, тогда для любых наперед заданных $L > 0$ и $\rho > 0$ можно найти положительное $\varepsilon_0(L, \rho)$, такое, что если $u = u(t, \varepsilon)$ – решение задачи Коши для усредненных уравнений*

$$\dot{u} = \varepsilon\overline{X}(u), \quad u(0) = x_0,$$

*определенное в интервале $0 \leqslant t < \infty$ и принадлежащее области $D$ вместе с $\rho$-окрестностью, то для всякого $\varepsilon$ из интервала $(0, \varepsilon_0)$ и при $0 \leqslant t < L/\varepsilon$ справедливы следующие оценки точности приближения.*

*1. $X(x,t)$ – $T$–периодическая функция времени $t$, тогда*

$$\|x(t,\varepsilon) - u(t,\varepsilon)\| \leqslant \varepsilon T M(\lambda L + 2)e^{\lambda L} \tag{2.1}$$

*2. $X(x,t)$ – произвольная функция времени, тогда*

$$\|x(t,\varepsilon) - u(t,\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{\delta(\varepsilon)}\, 2L\sqrt{2\lambda M}\, e^{\lambda L} \tag{2.2}$$

*Здесь $\delta(\varepsilon)$ вычисляется по формуле* (1.3), *при этом $\delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.*

В работе [8] показано, что в случае произвольной зависимости правых частей от времени дальнейшее продвижение в вопросе получения явных оценок точности приближения зависит от значения параметра

$$\Lambda^* = \lim_{\varepsilon\to 0}\Lambda(\varepsilon) = \sup_{x\in D}\sup_{0\leqslant T\leqslant\infty}\left\|\int\limits_0^T \widetilde{X}(x,\tau)\,d\tau\right\|, \quad \widetilde{X}(x,\tau) = X(x,\tau) - \overline{X}(x)$$

Очевидно, что $\Lambda^*$ ограничивает функцию $\Lambda(\varepsilon)$ сверху.

Рассмотрим случай $\Lambda^* < \infty$. Следуя Волосову В.М.[9], введем определение

**Определение 2.1.** *Будем говорить, что временное среднее является быстрым по времени и равномерным по $x$, если существуют константы $T^*$ и $\Lambda$, не зависящие от $x$, такие, что при $T \geqslant T^*$ и любом $x \in D$ выполняется неравенство*

$$\left\|\frac{1}{T}\int\limits_0^T X(x,\tau)\,d\tau - \overline{X}(x)\right\| \leqslant \frac{\Lambda}{T}.$$

Другими словами, имеем

$$\overline{X}(x) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T X(x,\tau)\,d\tau + O\left(\frac{1}{T}\right)$$

Положим

$$S(x,T) \stackrel{def}{=} \int\limits_0^T \widetilde{X}(x,\tau)\,d\tau$$

**Теорема 2.2.** *Предположим, что равномерное среднее существует, $D$ – компактное множество. Тогда временное среднее является быстрым по времени и равномерным по $x$ тогда и только тогда, когда*

$$\sup_{x\in D}\sup_{0\leqslant T<\infty}\|S(x,T)\| = \Lambda^* < \infty. \tag{2.3}$$

Доказательство. Предположим, что выполняется условие (2.3). Тогда, если в левой части этого неравенства оставить только норму интеграла, заменив $T$ на произвольное число $T^*$, то неравенство примет вид $\|S(x,T^*)\| \leqslant \Lambda^* < \infty$. Более того, для любых $x \in D$ и любых $T \geqslant T^*$ будем иметь

$$\left\|\int\limits_0^T X(x,\tau)\,d\tau - \overline{X}(x)T\right\| \leqslant \Lambda, \tag{2.4}$$

где $\Lambda = \Lambda^*$. Поделив полученное неравенство на $T$, получим условие быстрой равномерной сходимости интеграла к своему предельному значению.

Пусть временное среднее является быстрым. Тогда существуют $\Lambda < \infty$ и $T^*$ такие, что при любых $x \in D$ и любом $T \geqslant T^*$ выполняется неравенство (2.4). Оценим сверху величину $\Lambda^*$:

$$\Lambda^* = \sup_{x\in D}\sup_{0\leqslant T<\infty}\|S(x,T)\| \leqslant \sup_{x\in D}\sup_{0\leqslant T<T^*}\|S(x,T)\| + \sup_{x\in D}\sup_{T^*\leqslant T<\infty}\|S(x,T)\|$$

Очевидно, первое слагаемое правой части неравенства ограничено в силу ограниченности интервала изменения $T$ и компактности $D$, второе слагаемое меньше $\Lambda$ в силу условия быстрой сходимости. Поэтому $\Lambda^* < \infty$.
Доказательство закончено.

Заметим, что неравенство (2.3) нарушается при резонансах, если $X(x,t)$ зависит от времени квази - периодически, а ее ряд Фурье состоит из конечного числа членов:

$$X(x,t) = X^{(0)}(x) + \sum_{\|k\|=1}^{m} X^{(k)}(x) e^{i(k,\omega)t}, \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_r)$$

Тогда интеграл $S(x,T)$ ограничен по $T$ равномерно относительно $x$, если $D$ компактно и отсутствуют резонансы:

$$\|S(x,T)\| = \left\| \int_0^T \sum_{\|k\|=1}^{m} X^{(k)}(x) e^{i(k,\omega)\tau}\, d\tau \right\| =$$
$$= \left\| \sum_{\|k\|=1}^{m} \frac{X^{(k)}(x)}{i(k,\omega)} \left(e^{i(k,\omega)T} - 1\right) \right\| \leqslant \sum_{\|k\|=1}^{m} \left\| \frac{X^{(k)}(x)}{(k,\omega)} \right\| < \infty$$

Наличие резонансов ведет к бесконечному росту соответствующих членов полинома со временем, так как

$$\lim_{z\to 0} \frac{e^{izT} - 1}{iz} = \lim_{z\to 0} \frac{e^{izT}}{i}(iT) = T$$

Как следствие, интеграл $S(x,T)$ становится неограниченной функцией времени $T$.

Таким образом, условие быстрой равномерной сходимости среднего является неявной формой записи отсутствия резонансов, когда функция $X(x,t)$ представима конечным рядом Фурье. Аналогичный вывод справедлив и для бесконечных рядов Фурье, но с некоторыми оговорками. Не останавливаясь подробно на анализе, отметим только, что в отсутствии резонансов параметр $\Lambda^*$ может принимать сколь угодно большие значения, если частоты слабо несоизмеримы, при этом спектор частот функции $X(x,t)$ имеет предельной точкой ноль. Далее, в случае неравномерной сходимости по $t$ ряда Фурье для интеграла $S(x,T)$ параметр $\Lambda^*$ может принимать бесконечно большие значения (соответствующий пример построил Пуанкаре [10]).

В дальнейшем будем рассматривать нерезонансный случай, так как при резонансе временное среднее сходится неравномерно, и, следовательно, теорема Боголюбова не работает.

Получим достаточные достаточные условия быстрой сходимости среднего. Справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.1.** *Предположим, что равномерное среднее существует, $D$ – компактное множество, и выполняется одно из следующих условий:*

*1. Несобственный интеграл*

$$S(x,\infty) = \int_0^\infty \widetilde{X}(x,\tau) d\tau$$

*сходится при любых $x \in D$.*

*2. Несобственный интеграл $S(x,\infty)$ расходится, когда $x$ принадлежит некоторому подмножеству $\widetilde{D}$ области $D$, при этом равномерно по $x \in \widetilde{D}$*

$$\sup_{0\leqslant T<\infty} \|S(x,T)\| < \infty; \tag{2.5}$$

*несобственный интеграл* $S(x,\infty)$ *сходится при любых* $x \in D \setminus \widetilde{D}$.

*Тогда равномерное среднее является быстрым, т.е.* $\Lambda^* < \infty$.

Доказательство. Пусть выполняется условие *1* леммы. Предположим противное: $\Lambda^* = \infty$. Из непрерывности $\widetilde{X}(x,t)$ по $x$ и $t$ следует ограниченность интеграла $S(x,T)$ на компактном множестве $D$, когда $T$ конечно. Поэтому на бесконечном интервале изменения времени $T$ супрерум по $x$ от непрерывной нормы $\|S(x,T)\|$ принимает бесконечно большое значение только при $T = \infty$. Следовательно, несобственный интеграл $S(x,\infty)$ расходится при некотором $x \in D$, что противоречит условию *1*. Таким образом, $\Lambda^* < \infty$, поэтому, на основании предыдущей леммы, временное среднее сходится быстро и равномерно.

Предположим, что выполняется условие *2*. Имеет место неравенство

$$\Lambda^* \leqslant \sup_{x\in\widetilde{D}} \sup_{0\leqslant T<\infty} \|S(x,T)\| + \sup_{x\in D\setminus\widetilde{D}} \sup_{0\leqslant T<\infty} \|S(x,T)\|$$

Первое слагаемое ограничено в силу неравенства (2.5), второе – в силу сходимости интеграла $S(x,\infty)$ на множестве $D \setminus \widetilde{D}$, поэтому $\Lambda^* < \infty$.
Доказательство закончено.

В заключении, отметим еще одно свойство быстрого равномерного среднего. Очевидно, что функция $\Lambda(\varepsilon)$ монотонно возрастает (хотя бы в широком смысле, т.е. не убывает) при $\varepsilon \to 0$. Справедливо также равенство

$$\Lambda^* = \lim_{\varepsilon\to 0} \Lambda(\varepsilon)$$

Если равномерное среднее сходится быстро, т.е. $\Lambda^* < \infty$, то выполняется условие полосы

$$0 \leqslant \delta(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\Lambda^*,$$

так как $0 \leqslant \Lambda(\varepsilon) \leqslant \Lambda^*$. Поэтому $\delta(\varepsilon) = O(\varepsilon)$.

## 3. Медленное равномерное среднее.

Предположим, что равномерное среднее существует и равно $\overline{X}(x)$.

**Определение 3.1.** *Будем говорить, что временное среднее является медленным по времени и равномерным по* $x$, *если стремление среднего к своему предельному значению определяется равномерным по* $x$ *равенством*

$$\overline{X}(x) = \frac{1}{T}\int_0^T X(x,\tau)\,d\tau + O\left(\frac{g(T)}{T}\right), \tag{3.1}$$

*где* $g(T)$ *– положительная скалярная функция такая, что* $g(T) \to \infty$ *при* $T \to \infty$, *при этом*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{g(T)}{T} = 0. \tag{3.2}$$

Установим связь этого определения с параметром $\Lambda^*$. С этой целью введем некоторые понятия.

Непрерывную функцию $f(x,t)$ будем называть бесконечно большой при $t \to \infty$ в области $D$, если для любого фиксированного $x \in D$ выполняется одно из следующих условий:

($i$) функция $f(x,t)$ имеет бесконечный предел

$$\lim_{t\to\infty} \|f(x,t)\| = \infty$$

($ii$) функция $f(x,t)$ не имеет предела при $t \to \infty$, но при любом сколь угодно большем $N$ существует окрестность точки $t = \infty$ в которой норма $\|f(x,t)\|$ принимает значение больше $N$ хотя бы в одной точке $t = t^*$ из этой окрестности.

Предположим, что $f(x,t)$ – функция, бесконечно большая при $t \to \infty$, $g(t) > 0$ – скалярная функция такая, что $g(t) \to \infty$ при $t \to \infty$.

Будем говорить, что $f(x,t)$ имеет *одинаковый с* $g(t)$ *порядок роста при* $t \to \infty$ *равномерно по* $x$ *в области* $B$, если для любого сколь угодно большего $\gamma > 0$ существуют константы $A_1(\gamma) \geqslant 0$, $A_2(\gamma) > 0$ такие, что при любом $x \in B$ выполняется условие полосы

$$A_1(\gamma)g(t) \leqslant \|f(x,t)\| \leqslant A_2(\gamma)g(t), \tag{3.3}$$

когда $t \in [\gamma, \infty)$. Будем писать $f(x,t) = O(g(t))$ при $t \to \infty$ равномерно по $x$.

Отметим, что условие полосы (3.3) не требует существования предела функции $f(x,t)$ при $t \to \infty$.

**Теорема 3.1.** *Предположим, что равномерное среднее существует, $D$ – компактное множество. Тогда временное среднее является медленным по времени и равномерным по $x$ тогда и только тогда, когда $\Lambda^* = \infty$.*

Доказательство. Предположим, что $\Lambda^* = \infty$. Оценим порядок малости функции

$$\Delta(x,T) = \left\| \frac{1}{T} \int\limits_0^T X(x,\tau)d\tau - \overline{X}(x) \right\| = \frac{1}{T} \|S(x,T)\|,$$

когда $T$ стремится к бесконечности. Прежде всего отметим, что в силу леммы (2.1.) несобственный интеграл $S(x,\infty)$ будет расходится на некоторой подобласти $\widetilde{D} \subseteq D$, при этом в этой подобласти имеем

$$\sup_{0\leqslant T<\infty} \|S(x,T)\| = \infty$$

Такое возможно, если для каждого $x \in \widetilde{D}$ существует неограниченный предел

$$\lim_{T\to\infty} \|S(x,T)\| = \infty.$$

Предела может и не быть, но в этом случае функция $S(x,T)$ расходится, к примеру, осциллируя со временем так, что амплитуда колебаний неограниченно возрастает, а наибольшие и наименьшие значения интеграла $S(x,T)$ стремятся соответственно к $+\infty$ и $-\infty$ при $T \to \infty$.

Несложно видеть, что $S(x,T)$ удовлетворяет определению бесконечно большой функции при $T \to \infty$. Пусть $g(T)$ – скалярная положительная функция, имеющая одинаковый с $S(x,t)$, равномерный по $x$ порядок роста при $T \to \infty$. Тогда $S(x,T) = O(g(T))$. Так как $\Delta(x,T) \to 0$ при $T \to \infty$ равномерно по $x$, то $S(x,T)$ имеет меньший порядок роста, чем функция $T$, то есть

$$\lim_{T\to\infty} \frac{g(T)}{T} = 0. \tag{3.4}$$

Такое возможно, если $g(T)$ имеет, к примеру, одно из следующих представлений:

$$g(T) = T^{\alpha},\, O < \alpha < 1;\;\; g(T) = \ln^k T;\;\; g(T) = \frac{T}{\ln^k T};\;\; g(T) = \int\limits_2^T \frac{1}{\ln^k \tau} d\tau,\, k > 0 \qquad (3.5)$$

Считаем $T > 1$ для логарифмических функций.

Итак, $\Delta(x,T)$ есть малая величина порядка $g(T)/T$, поэтому имеем равномерную по $x$ оценку (3.1).

Предположим, что имеет место оценка (3.1). Это значит, что

$$\|S(x,T)\| = T\Delta(x,T) = O(g(T)),$$

Таким образом, норма функции $S(x,T)$ удовлетворяет условию полосы (3.3). Переходя к двойному супрерому по $x \in D$ и $T \in [0,\infty]$, получим $\Lambda^* = \infty$.
Доказательство закончено.

В заключении отметим, что мы можем получить оценку малости функции $\delta(\varepsilon)$ в случае $\Lambda^* = \infty$. Действительно, справедливо равенство

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varepsilon}{\delta(\varepsilon)} = \frac{1}{\Lambda^*} = 0,$$

поэтому $\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$. Можем уточнить эту оценку, исходя из свойств медленного среднего. Для этого равномерное по $x$ равенство (3.1) представим в виде

$$J(x,h/\varepsilon) \stackrel{def}{=} \sup_{x\in D} \left\| \frac{\varepsilon}{h} \int\limits_0^{h/\varepsilon} \widetilde{X}\,(x,\tau)\, d\tau \right\| = O\left(\frac{\varepsilon}{h} g\left(\frac{h}{\varepsilon}\right)\right)$$

Учитывая, что

$$\delta(\varepsilon) = \sup_{0\leqslant h\leqslant L} hJ\left(\frac{h}{\varepsilon}\right),$$

получим

$$\delta(\varepsilon) = O\left(\varepsilon g\left(\frac{h^*}{\varepsilon}\right)\right),$$

где $h^*$ – внутренняя точка интервала $[0,L]$, в которой достигается значение супремума. Используя вид функций $g(T)$ (см. формулы (3.5)), имеем одно из возможных представлений $\delta(\varepsilon)$ (считаем, без ограничения общности, что $h^* = 1$):

$$\delta(\varepsilon) = O\left(\varepsilon^{1-\alpha}\right), 0 < \alpha < 1;\quad \delta(\varepsilon) = O\left(\varepsilon \ln^k(1/\varepsilon)\right);\quad \delta(\varepsilon) = O\left(\frac{1}{|\ln^k \varepsilon|}\right),\; k > 0 \qquad (3.6)$$

## 4. Гипотеза Волосова В.М.

Используя полученные выше оценки малости функции $\delta(\varepsilon)$, можем уточнить оценку точности приближения (2.2) в теореме Боголюбова для случая произвольной зависимости правых частей от времени.

Если равномерное среднее сходится быстро, то имеем

$$\|x(t,\varepsilon) - u(t,\varepsilon)\| \leqslant \sqrt{\varepsilon}\, 2L\, \sqrt{2\lambda M}\, e^{\lambda L}$$

Для медленного среднего оценка точности приближения (2.2) сохраняется, при этом $\delta(\varepsilon)$ сравнима по порядку малости с величиной $(\varepsilon g\,(1/\varepsilon))$ и, как следствие, может совпадать с одной из явных формул (3.6).

Заметим, эти оценки не являются наилучшими. В работах [9], [11] утверждается, что в случая быстрой сходимости временного среднего точность приближения есть величина порядка $\varepsilon$. Однако строгое доказательство этого факта отсутсвует. Поэтому следующее утверждение, дополненное предположением о точности приближения в случае медленной сходимости среднего, будем называть гипотезой Волосова.

**Гипотеза Волосова В.М.** *Если для дифференциальных уравнений* (1.1) *выполнены условия* (1) – (4) *теоремы Боголюбова, накладывающие ограничения на правые части этих уравнений, при этом временное среднее сходится быстро, то точность приближения метода усреднения будет величиной порядка* $\varepsilon$.

*Если временное среднее сходится медленно, то точность приближения – величина порядка* $\delta(\varepsilon)$, $\varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$.

Докажем гипотезу при дополнительных ограничениях на правую часть.

**Теорема 4.1.** *Предположим, что выполняются условия* (1)–(4) *теоремы Боголюбова, при этом равномерно ограничены первые производные* $X'_x(x,t)$, $S'_u(u,t)$, *а также вторые производные от* $X(x,t)$ *по* $x$, *когда* $0 \leqslant t < \infty$, $x, u \in D$. *Пусть* $x(t)$, $u(t)$ *– решения уравнений* (1.1) *и* (1.2) *соответственно, определеннные при* $0 \leqslant t < \infty$, $\rho > 0$ *– произвольное малое число такое, что на промежутке времени* $0 \leqslant t < \infty$ *решение* $u(t)$ *принадлежит вместе с* $\rho$ *– окрестностью области* $D$, $L > 0$ *– произвольно большое число. Тогда существует* $\varepsilon_0(\rho)$ *и константа* $C$ *такие, что для всякого* $\varepsilon$ *из интервала* $(0, \varepsilon_0)$ *и при* $0 \leqslant t \leqslant L/\varepsilon$ *справедливы следующие оценки точности приближения.*

1. *Пусть* $\Lambda^* < \infty$, *тогда точность приближения – величина порядка* $\varepsilon$:

$$\|x(t) - u(t)\| \leqslant \varepsilon \left(CLe^{\lambda L} + \Lambda^*\right), \quad \lambda = n \sup_{x \in D} \sup_{0 \leqslant t < \infty} \|X'_x(x,t)\|$$

2. *Если* $\Lambda^* = \infty$, *оценка точности приближения ухудшается:*

$$\|x(t) - u(t)\| \leqslant \delta(\varepsilon) \left(\lambda L n^{-1} e^{\lambda L} + 1\right), \quad \varepsilon = o(\delta(\varepsilon))$$

Доказательство. Рассмотрим, наряду с $u(t)$, “улучшенное” решение $z(t)$ усредненных уравнений (1.2):

$$z(t) = u(t) + \varepsilon S(u(t), t)$$

Дифференцируем это равенство по $t$, принимая во внимание определение $S(u,t)$:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{u} + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial t} + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial u} \dot{u} = \varepsilon \overline{X}(u) + \varepsilon \widetilde{X}(u,t) + \varepsilon^2 \frac{\partial S}{\partial u} \overline{X}(u) = \\ &= \varepsilon X(u,t) + \varepsilon^2 \frac{\partial S}{\partial u} \overline{X}(u) \end{aligned}$$

Дополним это равенство соотношением

$$\dot{x} = \varepsilon X(x,t)$$

Если теперь вычесть из него предыдущее равенство, получим

$$\dot{x} - \dot{z} = \varepsilon X(x,t) - \varepsilon X(z,t) + G(u,t),$$

где

$$G(u,t) = \varepsilon X(z,t) - \varepsilon X(u,t) - \varepsilon^2 \frac{\partial S}{\partial u} \overline{X}(u)$$

Интегрируя это равенство в пределах от нуля до $t$, имеем

$$\|x(t) - z(t)\| \leqslant \varepsilon\lambda \int\limits_0^t \|x(\tau) - z(\tau)\| d\tau + \left\| \int\limits_0^t G(u(\tau),\tau) d\tau \right\|$$

Здесь $\lambda$ – константа Липшица, имеющая, в силу ограниченности первых производных, вид

$$\lambda = n \sup_{x \in D} \sup_{0 \leqslant t < \infty} \|X'_x(x,t)\|$$

Отсюда следует, на основе леммы Гроноулла, что на промежутке времени $[0, L/\varepsilon]$ точность приближения описывается неравенством

$$\|x(t) - z(t)\| \leqslant \sup_{0 \leqslant t \leqslant L/\varepsilon} \left\| \int\limits_0^t G(u(\tau),\tau) d\tau \right\| e^{\lambda L}$$

1. Предположим, что $\Lambda^* < \infty$. Упростим первые два члена функции $G(u,t)$:

$$\varepsilon X(z,t) - \varepsilon X(u,t) = \varepsilon^2 \left( \frac{\partial X}{\partial z} \right)_0 S(u,t) + O(\varepsilon^3) \tag{4.1}$$

Здесь, при оценки остаточной суммы ряда была использована формула конечных приращений Лагранжа для каждой $i$ - ой компоненты вектора $X(x,t)$ в виде

$$\varepsilon X_i(z,t) - \varepsilon X_i(u,t) - \varepsilon^2 \left( \frac{\partial X_i}{\partial z} \right)_0 S(u,t) =$$
$$= \frac{\varepsilon}{2!} d^2 X_i(u + \varepsilon\theta S(u,t), t), \quad (dz_i = \varepsilon S_i,\ 0 < \theta < 1)$$

где $d^2 X_i$ – квадратичная, биномиальная форма переменных $dz_i$; использованы также условия равномерной ограниченности $S(u,t)$ (как следствие неравенства $\Lambda^* < \infty$) и вторых производных по $z$ от функции $X(z,t)$. Тогда имеем:

$$G(u,t) = \varepsilon^2 G^*(u,t) + O(\varepsilon^3)$$

где

$$G^*(u,t) = \left( \frac{\partial X}{\partial x} \right)_0 S(u,t) - \frac{\partial S}{\partial u}(u,t) \overline{X}(u)$$

В силу условий теоремы функция $G^*(u,t)$ равномерно ограничено сверху некоторой константой $C$, поэтому, отбрасывая члены третьего порядка малости, имеем

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant L/\varepsilon} \left\| \int\limits_0^t G(u(\tau),\tau) d\tau \right\| \leqslant \varepsilon C L$$

Отсюда следует, что

$$\Big| \|x(t) - u(t)\| - \|\varepsilon S(u(t),t)\| \Big| \leqslant \|x(t) - u(t) - \varepsilon S(u(t),t)\| \leqslant \varepsilon C L e^{\lambda L},$$

т.е.

$$\|x(t)-u(t)\| \leqslant \varepsilon\left(CLe^{\lambda L}+\Lambda^*\right)$$

2. Рассмотрим случай $\Lambda^*=\infty$. Функция $S(u,t)$ неограничена, однако на промежутке времени $[0,L/\varepsilon]$ норма $\varepsilon\|S(u,t)\|$ имеет порядок малости, равный $\delta(\varepsilon)=\varepsilon\Lambda(\varepsilon)$, т.к.

$$0 \leqslant \varepsilon\|S(u,t)\| \leqslant \delta(\varepsilon)$$

Поэтому предыдущие рассуждения сохраняют силу, но требуют уточнения. Так, в формуле (4.1) символ $O(\varepsilon^3)$ следует заменить на $O(\varepsilon^2\delta(\varepsilon))$, тогда $G(u,t)$ предстанет в виде

$$G(u,t)=\varepsilon^2\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_0(u,t)S(u,t)-\varepsilon^2\frac{\partial S}{\partial u}(u,t)(u,t)\overline{X}(u)+O(\varepsilon^2\delta(\varepsilon))$$

Первый член правой части имеет порядок малости $\varepsilon\delta(\varepsilon)$, второй – $\varepsilon^2$, третий – $\varepsilon^2\delta(\varepsilon)$. Следовательно, второй и третий члены – величины более высокого порядка малости по сравнению с первым, так как $\varepsilon=o(\delta(\varepsilon))$. Отбрасывая их, имеем

$$\|G(t)\| \leqslant \varepsilon\lambda\delta(\varepsilon)n^{-1}$$

Тогда, на асимптотически большем промежутке времени $[0,L/\varepsilon]$ норма разности решений $u(t)$, $z(t)$ удовлетворяет неравенству

$$\|x(t)-z(t)\| \leqslant n^{-1}\delta(\varepsilon)\lambda Le^{\lambda L}$$

и, следовательно,

$$\|x(t)-u(t)\| \leqslant \|x(t)-z(t)\|+\varepsilon\|S(u,t)\| \leqslant \delta(\varepsilon)\left(\lambda Ln^{-1}e^{\lambda L}+1\right)$$

Доказательство закончено.

Как следует из выше приведенных представлений функции $\delta(\varepsilon)$, возможные оценки точности приближения в случае медленной сходимости временного среднего имеют вид

$$\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon)\| \sim \varepsilon^{(1-\alpha)},\ 0<\alpha<1;$$
$$\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon)\| \sim \varepsilon\ln^k(1/\varepsilon);$$
$$\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon)\| \sim \frac{1}{|\ln^k\varepsilon|};$$
$$\|x(t,\varepsilon)-u(t,\varepsilon)\| \sim \varepsilon\int\limits_2^{\varepsilon^{-1}}\frac{1}{\ln^k\tau}d\tau,\ \ k>0$$

Доказанная теорема утверждает, что в случае быстрой сходимости временного среднего точность приближения есть величина порядка $\varepsilon$, если выполняются некоторые дополнительные условия. Наиболее обременительным из них является условие равномерной ограниченности производной $S'_u(u,t)$. Это условие выполняется, когда функция $X(x,t)$ квази-периодична с постоянным вектором частот $\omega=(\omega_1,\ldots,\omega_m)$, представима конечным рядом Фурье, отсутствуют резонансы, область $D$ компактна. Тогда $\Lambda^*<\infty$, при этом

$$\|S'_u(u,T)\| \leqslant \sum_{\|k\|=1}^{m}\left\|\frac{X_u'^{(k)}(u)}{(k,\omega)}\right\|<\infty$$

Здесь $X^{(k)}(u)$ – коэффициенты ряда Фурье функции $X(x,t)$.

Равномерная ограниченность производной $S'_u(u,T)$ сохраняется и в том случае, когда ряд Фурье бесконечен, отсутствуют резонансы и $\Lambda^* < \infty$. Действительно, условие $\Lambda^* < \infty$ гарантирует, в силу теоремы Бора, квази-периодичность интеграла $S(u,T)$ при любом $u \in D$. Тогда функция $S'_u(u,T)$ квази-периодична и, следовательно, равномерно ограничена. Равномерно ограничены также производные $X'_x(x,t)$, $X'_{xx}(x,t)$ при $x \in D$.

**Следствие 4.1.** *Предположим, что функция $X(x,t)$ квази-периодична с постоянным вектором частот, отсутствуют резонансы, при этом $\Lambda^* < \infty$. Тогда точность приближения метода усреднения есть величина порядка $\varepsilon$.*

В заключении отметим, что проблема построения явных оценок точности приближения в методе усреднения открыта, так как не доказана гипотеза Волосова во всей полноте.

**Благодарность.**

Автор признателен проф. Косенко И.И. за помощь в исследованиях: связь между параметром $\Lambda^* < \infty$ и быстрым временным средним была указана Косенко И.И. в частной беседе.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00068) в Московском авиационном институте.

## Список литературы

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., *Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний*, ГИФМЛ, М., 1963.

2. Гихман И.И., “По поводу одной теоремы Н.Н. Боголюбова”, *Укр. матем. журнал*, 1952, № 4, 215-219.

3. Красносельский М.А., Крейн С.Г., “О принципе усреднения в нелинейной механике”, *УМН*, **10**:3(65) (1955), 147–152.

4. Новожилов И.В., *Фракционный анализ*, Изд-во МГУ, М., 1995.

5. Жарков В. Н., *Внутреннее строение Земли и планет.*, Наука, М., 1983.

6. Roseau M., *Vibrations non Linéaires et théorie de la stabilité*, Springer, Verlag-Berlin-Heidelberg, 1966.

7. Besjes J.G., “On the asymptotic methods for non-linear differential equations”, *Jornal de Mécanique*, **8**:3 (1969), 357–372.

8. Красильников П.С., “О нелинейных колебаниях маятника переменной длины на вибрирующем основании”, *ППМ*, **76**:1 (2012), 36-51.

9. Волосов В.М., “Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений”, *УМН*, 1962, № 6(108), 3-126.

10. Пуанкаре А., *О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями*, ГИТТЛ, М.-Л., 1947.

11. Волосов, Моргунов Б.И., *Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем*, Изд-во МГУ, М., 1971.

# On explicit estimates of the approximation accuracy in first Bogolyubov's theorem

© **Krasil'nikov P.S.**[2]

**Abstract.** The problem of explicit estimates for the approximation accuracy in the averaging method of Bogolyubov standard systems is investigated. It is shown that estimates depends on some parameter $\Lambda^*$, which affects the convergence of the time average. We formulate a statement on the explicit estimates for the approximation accuracy (Volosov's hypothesis). Hypothesis is proved under some additional restrictions on the right-hand side of differential equations.

**Key Words:** time average, the accuracy of the approximation, the averaging method

[2] Head of Differential Equations Department, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow; krasil06@rambler.ru.

УДК 517.9

# Анализ устойчивости математической модели Лукаса по части переменных

© Т. Ф. Мамедова[1], Д. К. Егорова[2], Е. В. Десяев[3]

**Аннотация.** В работе, для анализа устойчивости системы дифференциальных уравнений, используется метод Е. В. Воскресенского, основанный на методе сравнения. Предложенный подход состоит в следующем: для исследуемых уравнений строятся уравнения сравнения, поведение решений которых известно. Затем через эталонные функции сравниваются решения этих уравнений.

**Ключевые слова:** нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, метод сравнения, модель Лукаса

## 1. Исследование устойчивости нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений по части переменных на основе метода сравнения

Рассмотрим две системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y \tag{1.1}$$

и

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t,x) \tag{1.2}$$

где A: [T, $+\infty$ ) $\to Hom(R^n, R^n)$ – непрерывное отображение.

Выясним: какими асимптотическими формулами связаны решения этих двух дифференциальных уравнений?

Пусть $N = \{1, 2, ..., n\}$ и $N_0 \subseteq M \subseteq M_0 \subseteq \overline{M_0} \subseteq N$,

$$R_0 = \{x : x \in R^n, x = colon(x_1, x_2, ..., x_n), x_j = 0, j \notin \overline{M_0}\}.$$

Предположим так же, что

$$|f_j(t, x_1, x_2, ..., x_n)| \le \lambda_j(t, |x_{j_1}|, ..., |x_{j_q}|),$$

$$\forall j \in N, f(t,x) = f(t, x_1, ..., x_n) = colon(f_1(t, x_1, ..., x_n), ..., f_n(t, x_1, ..., x_n)),$$

здесь

$$\lambda_j(t, r_1, ..., r_i, ..., r_q) \le \lambda_j(t, \overline{r_1}, ..., \overline{r_i}, ..., \overline{r_q}), r_i \le \overline{r_i}, i = \overline{1,q}$$

[1] Профессор кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н.П.Огарёва», г. Саранск; mamedovatf@yandex.ru.

[2] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н.П.Огарёва», г. Саранск; egorovadk@mail.ru.

[3] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики ФГБОУ ВПО «Мордовский государственный университет им. Н.П.Огарёва», г. Саранск; desyaev@rambler.ru.

при всех $t \in [T, +\infty)$.

Фундаментальная матрица $Y(t) = (y_{ij}(t)), i, j \in \overline{1, n}$ уравнения (1.1) будем считать нормирована в точке $t_0 \in [T, +\infty)$ и $Y^{-1}(t) = (y^{ji}(t))$.
Пусть непрерывные функции:

$$\mu_i : [T, +\infty) \to R^1_+, m_i : [T, +\infty) \to R^1_+$$

удовлетворяют неравенствам:

$$\mu_i(t) \geq \max_{j \in N_0} |y_{ij}(t)|, m_i(t) \geq \max\{\max_{j \in \overline{M_0}} |y_{ij}(t)|, \mu_i(t)\},$$

где $T \leq t < +\infty, i \in M_0$.
Таким образом, функции $\mu_i(t)$ будем называть эталонными функциями сравнения.
Будем считать $i_1 = 1, i_2 = 2, ..., i_q = q$.

Пусть при любом $c \geq 0$ функции

$$P_i = c \sum_{k \in \overline{M_0}} |y_{ik}(t)| + \int_{t_0}^{t} \left| \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) \right| \lambda_j(s, cm(s)) ds + \int_{t}^{+\infty} \left| \sum_{j \in N, k \in M} y_{ik}(t) y^{jk}(s) \right| \lambda_j(s, cm(s)) ds,$$

где $i = \overline{q+1, n}$ существуют при всех $t \geq t_0 \geq T, B = N \backslash M$.

Рассмотрим множество

$$\Omega = \{\varphi : \varphi \in C^{(p)}([T, +\infty), R^n), |\varphi_i(t)| \leq c_1 m_i(t), i = \overline{1, q}, |\varphi_i(t)| \leq c_2 p_i(t), i = \overline{q+1, n},$$
$$c_1, c_2 \in R^+_1, p \geq 0\}.$$

Здесь $c_1, c_2$ – фиксированные положительные числа.
Допустим,

$$I_i(t, \varphi) = \int_{t_0}^{t} \sum_{j \in N, k \in B} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds - \int_{t}^{+\infty} \sum_{j \in N, k \in M} y_{ik}(t) y^{jk}(s) f_j(s, \varphi(s)) ds, B = N \backslash M \tag{1.3}$$

существует при любых $i \in N, c \in R^1_+, \varphi \in \Omega$. Кроме того, несобственные интегралы в (1.3) сходятся равномерно по $t$ при $t \in [T, +\infty)$. [1]

**Теорема 1.1.** [2]. *Пусть для уравнений* (1.1) *и* (1.2) *выполняется условие* (1.3). *Тогда при достаточно большом* $t_0$ *для решения* $y(t : t_0 y_0), y_0 \in R_0, R_0 = \{x : x \in R^n\}$ *существует решение* $x(t : t_0, x_0), x_0 \in R_0$, *для которого следует выполнение асимптотического равенства:*

$$x_i(t) = \sum_{j \in \overline{M_0}} y_{ij}(t) \gamma_j + o(\mu_i(t)) t \to +\infty, \forall i \in M_0. \tag{1.4}$$

**Теорема 1.2.** [2]. *Пусть при условиях* (1.3) *для каждого решения уравнения* (1.2) $x(t : t_0, x_0), x_0 \in R_0$ *справедливо асимптотическое равенство:*

$$x_i(t : t_0, x_0) = o(m_i(t)),$$

*где* $t \to +\infty$ *и* $\forall\ i \in M_0$. *Следовательно, для каждого решения* $x(t : t_0, x_0), x_0 \in R_0$ (1.2) *существует решение* $y(t : t_0, y_0), y_0 \in R_0$ (1.1) *такое, что справедливо асимптотическое равенство* (1.4).

**Теорема 1.3.** [2]. *Если выполняются условия теоремы 2 и условие* (1.3) *имеет место равномерно относительно* $0 < c \leq c_0$ *и* $\frac{I_i(t,c)}{\mu_i(t)} \to 0$, $\mu_i(t) \leq k$, $k > 0$, $\forall i \in M_0$ *при* $A \to 0$, *то, если уравнение* (1.1) *устойчиво по части переменных* $\forall i \in M_0$, *то тривиальное решение уравнения* (1.2) *также устойчиво по части переменных и, если уравнение* (1.1) *неустойчиво по части переменных* $i, i \in M_0$, *то тривиальное решение уравнения* (1.2) *также неустойчиво по части переменных.*

## 2. Применение метода Е.В. Воскресенского к анализу устойчивости математической модели Лукаса по части переменных

Рассмотрим применение данного метода анализа устойчивости систем дифференциальных уравнений к математической модели Лукаса.

Математическая модель экономического роста Лукаса имеет вид [3]:

$$\begin{array}{l} \frac{d}{dt}K(t) = A(t)k(t)^{\beta}h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma} - (\mu_K + n)k(t) - c(t) \\ \frac{d}{dt}h(t) = \delta(1-u(t))h(t) - \mu_h h(t) \\ \frac{d}{dt}c(t) = \frac{c(t)}{\sigma}[\beta A(t)k(t)^{\beta-1}h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma} - (\rho + \mu_K)] \\ \frac{d}{dt}u(t) = \frac{1}{\beta-\gamma}u(t)\left\{P + \delta Q[1-u(t)] - \beta\frac{c(t)}{k(t)}\right\}. \end{array} \tag{2.1}$$

где $A(t)$ – функция, описывающая технологический прогресс, $k(t)$ – физический капитал, $\beta$ – доля физического капитала, $h(t)$ – уровень человеческого капитала, $\gamma$ – положительный параметр, $\mu_K$ – норма амортизации физического капитала, $n$ – темп изменения численности рабочей силы, $c(t)$ – удельное потребление, $\delta$ – положительный технологический параметр, $u(t)$ – доля времени индивида, посвященная производственной деятельности, $\mu_h$ – норма амортизации человеческого капитала, $\sigma$ – постоянная мера относительной несклонности к риску, $\rho$ – дисконтирующий фактор, $P = \alpha + (1-\beta)(n+\mu_K) + \delta p - \mu_h(1-\beta+\gamma)$ и $Q = (q-p) - (\beta-\gamma)$.
Для исследования тривиального решения (1.2) на устойчивость преобразуем (2.1).
Определим переменные:

$$q(t) \equiv \frac{c(t)}{k(t)}, x(t) \equiv \frac{k(t)}{A(t)^{\frac{1}{1-\beta}}h(t)^{\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}}} = k(t)A(t)^{\frac{1}{\beta-1}}h(t)^{\frac{1-\beta+\gamma}{\beta-1}}.$$

Вычисляя логарифмическую производную и подставляя темпы роста функций: $k(t), h(t), c(t)$ , а также используя (2.1), получим:

$$\frac{1}{x(t)}\frac{dx(t)}{dt} = x(t)^{\beta-1}u(t)^{1-\beta+\gamma} - \psi[1-u(t)] - q(t) - M$$

$$\frac{1}{q(t)}\frac{dq(t)}{dt} = \phi x(t)^{\beta-1}u(t)^{1-\beta+\gamma} - q(t) - \xi,$$

где

$$\psi = -\delta\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}, \xi = \frac{\rho}{\sigma} - n - \mu_K(1-\frac{1}{\sigma}), M = \frac{\alpha}{1-\beta} + n + \mu_K - \mu_h\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}, \phi = \frac{\beta}{\sigma} - 1.$$

Таким образом, получим, что модель Лукаса (2.1) примет вид:

$$\begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = x(t)^{\beta}u(t)^{1-\beta+\gamma} + \psi[1-u(t)]x(t) - q(t)x(t) - Mx(t) \\ \frac{dq(t)}{dt} = \phi x(t)^{\beta-1}u(t)^{1-\beta+\gamma}q(t) - [q(t)]^2 - \xi q(t) \\ \frac{du(t)}{dt} = \frac{1}{\beta-\gamma}u(t)\{P + \delta Q[1-u(t)] - \beta q(t)\} \\ \frac{dc(t)}{dt} = \frac{1}{\sigma}c(t)[\beta x(t)^{\beta-1}u(t)^{1-\beta+\gamma} - (\rho+\mu_K)] \end{array} \tag{2.2}$$

где

$$\psi = -\delta\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta}, \xi = \frac{\rho}{\sigma} - n - \mu_K(1-\frac{1}{\sigma}), M = \frac{\alpha}{1-\beta} + n + \mu_K - \mu_h\frac{1-\beta+\gamma}{1-\beta},$$
$$\phi = \frac{\beta}{\sigma} - 1, P = \alpha + (1-\beta)(n+\mu_K) + \delta p - \mu_h(1-\beta+\gamma), Q = (q-p) - (\beta-\gamma).$$

Запишем однородную систему обыкновенную дифференциальных уравнений, соответствующую системе (2.2):

$$\begin{array}{l} \frac{dx(t)}{dt} = (\psi - M)x(t) \\ \frac{dq(t)}{dt} = -\xi q(t) \\ \frac{du(t)}{dt} = \left(\frac{P}{\beta-\gamma} + \frac{\delta Q}{\beta-\gamma}\right)u(t) \\ \frac{dc(t)}{dt} = -\frac{\rho+\mu_K}{\sigma}c(t) \end{array} \tag{2.3}$$

Фундаментальная матрица решений системы и соответствующая ей обратная имеют вид:

$$Y(t) = \begin{pmatrix} e^{(\psi-M)t} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-\xi t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma}t} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\frac{(\rho+\mu_K)}{\sigma}t} \end{pmatrix}$$

$$Y^{-1}(s) = \begin{pmatrix} e^{-(\psi-M)s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{\xi s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-(\frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma})s} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{(\rho+\mu_K)}{\sigma}s} \end{pmatrix}$$

Здесь имеем: $N = \{1,2,3,4\}, M_0 = \{1,2,3,4\}, B = N \backslash M_0 = \{\}$.

Сделаем оценку нелинейной части системы дифференциальных уравнений (2.2). Имеем:

$$\|f_1(t,\overline{x})\| = \left\|x(t)^{\beta}u(t)^{1-\beta+\gamma} - \psi x(t)u(t) - x(t)q(t)\right\| =$$
$$= \left\|x(t)[k(t)^{\beta-1}A(t)h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma} - \psi u(t) - -\frac{c(t)}{k(t)}]\right\|.$$

Отметим, что для развитых экономик функция $A(t) \geq 1$ на рассматриваемом промежутке времени. Примем это допущение.

Кроме того, $c(t)$ – удельное потребление – положительная величина, $u(t)$ – доля времени индивида, посвященная производственной деятельности – величина, находящаяся в промежутке $[0,1]$.

Поэтому, если $\psi \geq 0$ и $1-\beta+\gamma \geq 0$, то справедливо следующее неравенство:

$$\|f_1(t,\overline{x})\| \leq \left\|x(t)k(t)^{\beta-1}h(t)^{1-\beta+\gamma}\right\|.$$

Дальнейшие рассуждения справедливы для таких функций человеческого и физического капитала, которые могут быть представлены в виде показательных функций: $ae^{bt}$, где $a, b = const$.

Предположим, что $a_1e^{b_1t}$ – функция, описывающая физический капитал, $a_2e^{b_2t}$ – функция, описывающая человеческий капитал.

Имеем:

$$\|f_1(t,\overline{x})\| \leq \left\|x(t)k(t)^{\beta-1}h(t)^{1-\beta+\gamma}\right\| = \left\|x(t)a_1a_2e^{(b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma))t}\right\|.$$

Рассмотрим условия устойчивости модели по части переменных по методу Воскресенского:

По переменной $x(t)$ достаточно, чтобы:

$$b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma)<0.$$

Итак,

$$\|f_1(t,\overline{x})\| \leq \left\|x(t)a_1a_2e^{(b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma))t}\right\| = c_1\left\|x(t)e^{-c_2t}\right\| = c_1\left|x(t)\right|e^{-c_2t} = \lambda_1(t,|x|),$$

где

$$c_1 = a_1a_2 = const,$$
$$c_2 = b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma) = const.$$

Аналогично, рассмотрим нелинейные части остальных уравнений системы (2.2).

$$\|f_2(t,\overline{x})\| = \left\|q(t)[\phi k(t)^{\beta-1}A(t)h(t)^{1-\beta+\gamma} - \frac{c(t)}{k(t)}]\right\| \leq \phi c_1\left|q(t)\right|e^{-c_2t} = \lambda_2(t,|q|).$$

По переменной $q(t)$ достаточно, чтобы:

$$1-\beta+\gamma \geq 0,$$
$$b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma)<0.$$

Аналогично,

$$\|f_3(t,\overline{x})\| \leq \lambda_3(t,|x_3|).$$

По переменной $u(t)$ достаточно, чтобы:

$$\frac{\beta}{\beta-\gamma} \leq 0.$$

$$\|f_4(t,\overline{x})\| \leq \frac{\beta}{\sigma}\left\|c(t)k(t)^{\beta-1}A(t)h(t)^{1-\beta+\gamma}u(t)^{1-\beta+\gamma}\right\| \leq \frac{\beta}{\sigma}c_1\left|c(t)\right|e^{-c_2(t)} = \lambda_4(t,|c|).$$

По переменной $c(t)$ достаточно, чтобы:

$$\begin{array}{l} b_1(\beta-1)+b_2(1-\beta+\gamma)<0, \\ 1-\beta+\gamma \geq 0 \Leftrightarrow \beta \leq 1+\gamma. \end{array}.$$

Исследуем сходимость интегралов (1.3):

$$I_1(t) = -\int_t^{+\infty} y_{11}(t)y^{11}(s)f_1(s,\varphi(s))ds,$$

$$I_2(t) = -\int_t^{+\infty} y_{22}(t)y^{22}(s)f_2(s,\varphi(s))ds$$

$$I_3(t) = -\int_t^{+\infty} y_{33}(t)y^{33}(s)f_3(s,\varphi(s))ds$$

$$I_4(t) = -\int_t^{+\infty} y_{44}(t)y^{44}(s)f_4(s,\varphi(s))ds.$$

Пусть выполняются следующие условия

$$\begin{array}{l} \psi - M < 0, (\psi - M + c_2) > 0, \\ \xi > 0, (\xi - c_2) < 0, \\ \frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma} < 0, (\frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma} + c_3) > 0, \\ \frac{\rho+\mu_K}{\sigma} > 0, (\frac{\rho+\mu_K}{\sigma} - c_2) < 0. \end{array} \tag{2.4}$$

Тогда

$$||I_1(t)|| \leq \int_0^{+\infty} e^{(\psi-M)t}e^{-(\psi-M)s}ce^{-c_2 s}ds < \infty,$$

$$||I_2(t)|| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\xi t}e^{\xi s}ce^{-c_2 s}ds < \infty,$$

$$||I_3(t)|| \leq \int_0^{+\infty} e^{\frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma}t}e^{-\frac{P+\delta Q}{\beta-\gamma}s}ce^{-c_3 s}ds < \infty,$$

$$||I_4(t)|| \leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(\rho+\mu_K)}{\sigma}t}e^{\frac{(\rho+\mu_K)}{\sigma}s}ce^{-c_2 s}ds < \infty.$$

Таким образом выражения $I_i(t)$ существуют для $i = \overline{1,4}$ и несобственные интегралы сходятся равномерно по $t$ на $[T, +\infty)$ при выполнении условий (2.4). Кроме того $I_i(t) \to 0$ при $A \to 0$ для $i = \overline{1,4}$.

Следовательно, все условия теоремы 3 выполнены и рассматриваемая математическая модель устойчива по всем переменным при наложенных допущениях.

## Список литературы


1. Е.В. Воскресенский, “Метод сравнения в нелинейном анализе”, *Сиб. мат. журн.*, **5** (1991), 3-11.

2. Е.В. Воскресенский, “Об асимптотике решений нелинейных дифференциальных уравнений”, *Укр. мат. журн.*, **43**:5 (1991), 689-691.

3. R. Lucas, “On the mechanics of economic development”, *Journal of Monetary Economics*, **22**:1 (1988), 3- 42.

4. Т.Ф. Мамедова, Д.К. Егорова, Е.В. Десяев, “Об оптимальной стабилизации программного движения при абсолютно равномерно устойчивых решениях”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **16**:1 (2014), 135-139.

5. Т.Ф. Мамедова, Д.К. Егорова, “Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:2 (2013), 55-58.

6. Т.Ф. Мамедова, Д.К. Егорова, “О стабилизации экономической системы асимптотическими методами”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **10**:2 (2008), 243-245.

# Stability analysis of a mathematical model of Lucas some of the variables.

© **T. F. Mamedova**[4], **D. K. Egorova**[5], **E. V. Desyaev**[6]

**Abstract.** In this article uses a method E. V. Voskresensky for analysis stability of the system of differential equations. It is based on the method of comparison. Here the comparison equation constructed for the test functions. We know the behavior of solutions of the comparison. Then compares the solutions of the equations by reference function.

**Key Words:** nonlinear systems of the ordinary differential equations, a method of comparing, model of Lucas

[4] Professor of Applied Mathematics, differential equations and theoretical mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; mamedovatf@yandex.ru.

[5] Assistant professor of Applied Mathematics, differential equations and theoretical mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; egorovadk@mail.ru.

[6] Assistant professor of Applied Mathematics, differential equations and theoretical mechanics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; desyaev@rambler.ru.

*УДК 517.948.67*

# О возмущении фредгольмовых собственных значений линейных операторов

© **Д. Г. Рахимов**[1]

**Аннотация.** На основе метода редукции, предложенного в статьях [6], [7], позволяющего сводить исследование случаев возмущения кратных собственных значений к простым, развит редукционный метод возмущений фредгольмовых точек дискретного спектра линейных оператор-функций спектрального параметра.

**Ключевые слова:** методы теории бифуркаций решений нелинейных уравнений, дискретный спектр, теория возмущений, уравнение разветвления, обобщенные жордановы цепочки, регуляризация

## 1. Введение.

Основы теории возмущений собственных значений линейных операторов заложены в работах Ф. Реллиха [1]. Затем эти исследования продолжены в работах Б.Ск.-Надь [2], Т. Като [3], М. И. Вишика и Л. А. Люстерника [4]. В. А. Треногин [5] исследовал эти задачи методами теории ветвления и бифуркаций. Применяя к уравнению разветвления собственного значения метод диаграммы Ньютона им были определены как точное количество собственных значений, так и зависимость этих собственных значений от малых отклонений возмущенного спектрального параметра от невозмушенного. Случай кратного собственного значения рассмотрен в предположении полноты соответствующего обобщенного жорданого набора (ОЖН). Для случая неполного ОЖН предложен метод пополнения данного набора. В дальнейшем этот метод был развит для аналитических оператор-функций Б. В. Логиновым и Ю. Б. Русаком [8]. В данной работе при использовании метода редукции, предложенного в работах [6], [7], случай кратного собственного значения сведен к простому, снято предположение полноты ОЖН и в $2^n$ раз уменьшен объем вычислений, возникающих при построении уравнения разветвления и нахождении всех возмущенных собственных значений и им соответствующих собственных элементов.

## 2. Постановка задачи

Пусть $E_1, E_2-$ некоторые банаховы пространства, $A(t) \in L\{E_1, E_2\}$ оператор-функция аналитически зависящая от спектрального параметра $t \in G \subset \mathbb{C}$.

**Определение 2.1.** *Точка $\lambda \in G$ называется регулярной точкой оператор-функции $A(t)$, если оператор $A(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $A^{-1}(\lambda) \in L\{E_1, E_2\}$. Совокупность всех регулярных точек $\rho(A)$, называют резольвентным множеством $A(t)$, а множество $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ спектром оператора $A(t)$.*

[1] Доцент кафедры прикладной математики и информатики, филиал МГУ им.М. В. Ломоносова в г. Ташкенте, г. Ташкент; Davranaka@yandex.ru.

Точка спектра $\lambda_0$ называется изолированной, если существует окрестность точки $\lambda_0$, все точки которой регулярны.

Если при некотором $\lambda$ уравнение $A(\lambda)x = 0$ имеет нетривиальное решение $x = \varphi$, то $\lambda$ называется собственным значением, а решение $\varphi$ соответствующим собственным элементом оператор-функции $A(t)$. Совокупность всех собственных значений образует дискретный спектр $\sigma_p(A)$ оператора $A(t)$. Множество всех собственных элементов соответствующих собственному значению $\lambda$ образует собственное подпространство $N(A(\lambda))$ оператора $A(\lambda)$. Собственное подпространство $N^*(A(\lambda))$ оператора $A^*(\lambda)$ называют дефектным подпространством.

Пусть $\lambda$ фредгольмова точка $\sigma_p(A)$ и $N(A(\lambda)) = \{\varphi_i\}_1^n$, $N^*(A(\lambda)) = \{\psi_i\}_1^n$. Согласно следствию из теоремы Хана-Банаха существуют системы элементов $\{\gamma_i\}_1^n \subset E_1^*$, $\{z_i\}_1^n \subset E_2$, биортогональные соответственно к $\{\varphi_i\}_1^n$, $\{\psi_i\}_1^n$. Тогда проекторы $P = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle \varphi_i$, $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \psi_i \rangle z_i$ порождают следующие разложения в прямые суммы: $E_1 = E_1^n \oplus E_1^{\infty - n}$, $E_2 = E_{2n} \oplus E_{2,\infty-n}$. Оператор $\tilde{A}(\lambda) = A(\lambda) + \sum\limits_{i=1}^{n} \langle \cdot, \gamma_i \rangle z_i$ непрерывно обратим, обратный к нему $\Gamma = \tilde{A}^{-1}(\lambda)$ ограничен (лемма Шмидта-Треногина [5]).

Справедливы равенства $\tilde{A}(\lambda)\varphi_i = z_i$, $\Gamma z_i = \varphi_i$, и $\tilde{A}^*(\lambda)\psi_i = \gamma_i$, $\Gamma^* \gamma_i = \psi_i$.

**Определение 2.2.** [5]*) Элементы $\varphi_i^{(1)} \equiv \varphi_i, \varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}$ образуют обобщенную $A(\lambda)$ -жорданову цепочку длины $p_i$, соответствующую элементу $\varphi_i$, если выполнены равенства:*

$$A(\lambda)\varphi_i^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1} A_j \varphi_i^{(s-j)}, \ s = \overline{2, p_i}, \tag{2.1}$$

*где $A_j = \frac{1}{j!} A^{(j)}(\lambda)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, при этом для всех $\psi_l \in N^*(A(\lambda))$ $\langle \sum\limits_{j=1}^{s-1} A_j \varphi_i^{(s-j)}, \psi_l \rangle = 0$, $s = \overline{2, p_i}$, и $\langle \sum\limits_{j=1}^{p_i} A_j \varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_k \rangle \neq 0$ хотя бы для одного функционала $\psi_k \in N^*(A(\lambda))$. Элементы $\varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}$ называют $A(\lambda)$ -присоединенными элементами.*

Так как уравнения (2.1) разрешимы неоднозначно, требуем, чтобы $\langle \varphi_i^{(s)}, \gamma_j \rangle = 0$, $j, i = \overline{1, n}$, $s = \overline{2, p_i}$. Этим $A(\lambda)$-присоединенные элементы $\varphi_i^{(2)}, \ldots, \varphi_i^{(p_i)}$ определяются единственным образом по рекуррентным формулам

$$\varphi_i^{(s)} = \sum_{s = s_1 l_1 + s_2 l_2 + \cdots + s_k l_k} \left[ (\Gamma A_{s_1})^{l_1} (\Gamma A_{s_2})^{l_2} \cdots \Gamma A_{s_k})^{l_k} \right] \varphi_i, \tag{2.2}$$

$$s = \overline{2, p_i}, \ i = \overline{1, n}.$$

Совокупность элементов $\{\varphi_i^{(s)}\}$, $s = \overline{2, p_i}$, $i = \overline{1, n}$, называется обобщенным $A(\lambda)$ -жордановым набором, а число $N = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$ корневым числом оператора $A(\lambda)$.

**Определение 2.3.** [5] *Оператор-функция $A(t)$ имеет в точке $\lambda$ полный ОЖН, если*

$$det \left\| \left\langle \sum_{j=1}^{p_i} A_j \varphi_i^{(p_i+1-j)}, \psi_l \right\rangle \right\| \neq 0. \tag{2.3}$$

Согласно определению ОЖН будет неполным, если хотя бы одна цепочка имеет бесконечную длину или определитель (2.3) равен нулю.

**Определение 2.4.** *Условие отсутствия общих нулей операторов* $A(\lambda_0)$ *и* $\sum\limits_{s=1}^{\infty} A_s(\lambda-\lambda_0)^s$ *назовем "условием снятия вырождения".*

Пусть далее $\varepsilon \in \mathbb{C}$ малый параметр, $|\varepsilon| \le \varrho_0$ и $A(t;\varepsilon) = \sum\limits_{k+l=0}^{\infty} A_{lk}\mu^l\varepsilon^k : E_1 \to E_2$, $\mu = t-\lambda_0$, возмущенная оператор-функция такая, что $A(t;0) = A(t)$, $\lambda_0-$ фредгольмова точка дискретного спектра оператора $A(t)$ с $N(A(\lambda_0)) = \{\varphi_{i0}\}_1^n, N^*(A(\lambda_0)) = \{\psi_{i0}\}_1^n$. Требуется найти собственные значения $\lambda_0+\mu(\varepsilon)$ оператора $A(\lambda;\varepsilon)$, такие, что $\mu(\varepsilon)\to 0$ при $\varepsilon \to 0$, и соответствующие им собственные элементы. Согласно теореме Ф.Реллиха [1] оператор $A(\lambda;\varepsilon)$ имеет в точности $n$ собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)$ (с учетом кратности) с соответствующими собственными функциями $\varphi_i(\varepsilon)$, $\psi_i(\varepsilon)$, причем кратность $\lambda_i(\varepsilon)$ неизвестна. Пусть $\{\gamma_{i0}\}_1^n, \{z_{i0}\}_1^n$ биортогональные к $\{\varphi_{i0}\}_1^n, \{\psi_{i0}\}_1^n$ системы соответственно. Для каждого $i=\overline{1,n}$ введем оператор

$$\overline{A_i(t)} = A(t) + \sum_{j\ne i} \langle\cdot,\gamma_{j0}\rangle z_{j0}. \tag{2.4}$$

Точка $\lambda_0$ является простой фредгольмовой точкой для совокупности операторов (2.4) с соответствующим собственным элементом $\varphi_{i0}$ и дефектным функционалом $\psi_{i0}$ для каждого $i=\overline{1,n}$, т.е. $dimN\left(\overline{A_i(\lambda_0)}\right) = dimN^*\left(\overline{A_i(\lambda_0)}\right) = 1$. Заменяя в разложении $A(t;\varepsilon)$ оператор $A(t)$ на $\overline{A_i(t)}$, получим операторы

$$\overline{A_i(\lambda;\varepsilon)} \equiv A(\lambda;\varepsilon) + \sum_{j\ne i} \langle\cdot,\gamma_{j0}\rangle z_{j0}. \tag{2.5}$$

**Теорема 2.1.** *Пусть выполнено условие снятия вырождения (см. определение 2.4). Если* $\lambda_i(\varepsilon)$ *и* $\varphi_i(\varepsilon)$, $\psi_i(\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$ *собственные значения и им соответствующие собственные элементы и дефектные функционалы оператора* $A(t;\varepsilon)$, *то при каждом* $i=\overline{1,n}$ *и достаточно малых* $\varepsilon$ $\lambda_i(\varepsilon)$ *является также собственным значением оператора* (2.5) *с соответствующим собственным элементом и дефектным функционалом*

$$\tilde\varphi_i(\varepsilon) = \varphi_i + \sum_{s\ne i} c_{is}\varphi_s,\ \tilde\psi_i(\varepsilon) = \psi_i + \sum_{s\ne i} d_{is}\psi_s. \tag{2.6}$$

**Доказательство.** Если $\lambda_i(\varepsilon)$ является собственным значением (2.5), то соответствующий собственный элемент ищем в виде (2.6), т.е.

$$0 = \overline{A_i(\lambda_i;\varepsilon)}\tilde\varphi_i(\varepsilon) =$$

$$= A(\lambda_i;\varepsilon)\varphi_i + \sum_{j\ne i} c_{ij}A(\lambda_i;\varepsilon)\varphi_j + \sum_{j\ne i}\langle\varphi_i,\gamma_{j0}\rangle z_{j0} + \sum_{j\ne i}\sum_{s\ne i} c_{is}\langle\varphi_s,\gamma_{j0}\rangle z_{j0}$$

или

$$0 = \sum_{j\ne i} c_{ij}A(\lambda_i;\varepsilon)\varphi_j + \sum_{j\ne i}\langle\varphi_i,\gamma_{j0}\rangle z_{j0} + \sum_{j\ne i}\sum_{s\ne i} c_{is}\langle\varphi_s,\gamma_{j0}\rangle z_{j0}.$$

После применения функционалов $\psi_{k0}, k\ne i$ имеем

$$\sum_{s\ne i} c_{is}\left[\langle\varphi_s,\gamma_{k0}\rangle + \langle A(\lambda_i;\varepsilon)\varphi_s,\psi_{k0}\rangle\right] = -\langle\varphi_i,\gamma_{k0}\rangle,\ k\ne i. \tag{2.7}$$

Здесь $A(\lambda_i;\varepsilon)\varphi_s = A(\lambda_i;\varepsilon)\varphi_i + A(\lambda_i;\varepsilon)(\varphi_s - \varphi_i) = A(\lambda_i;\varepsilon)(\varphi_s - \varphi_i)$. Тогда в силу разложений [1] $\varphi_s(\varepsilon) = \varphi_{s0} + \varepsilon\varphi_{s1} + \varepsilon^2\varphi_{s2} + \cdots$ и $A(\lambda_i;\varepsilon) = A(\lambda_0;0) + O(\varepsilon)$ получаем

$$A(\lambda_i;\varepsilon)(\varphi_s - \varphi_i) = (A(\lambda_0;0) + O(\varepsilon))(\varphi_{s0} - \varphi_{i0} + O(\varepsilon)) = O(\varepsilon).$$

Так как $\langle\varphi_i, \gamma_{k0}\rangle = 1 + O(\varepsilon)$, определитель системы (2.7) отличен от нуля, и поэтому она имеет единственное решение. Единственность $\tilde{\psi}_i(\varepsilon)$ доказывается аналогично.

**Замечание 2.1.** *Все собственные значения операторов* (2.5) *являются также собственными значениями оператора* $A(t;\varepsilon)$.

Условие снятия вырождения требуемое в теореме 2.1. является существенным. Действительно, пусть

Пусть

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_{01} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассматривается задача о возмущении собственного значения:

$$(A_0 - \lambda A_{10} - \varepsilon A_{01})\, x = 0.$$

Невозмущенная задача $(A_0 - \lambda A_{10})\, x = 0$ имеет двукратное собственное значение $\lambda_0 = 1$ с соответствующими собственные векторами $\varphi_{10} = (1,0,0)^T$, $\varphi_{20} = (0,1,0)^T$.

Выписав вековой определитель задачи $det\,(A - \lambda A_{10} - \varepsilon A_{01}) \equiv (2-\lambda)(1-\lambda)(1-2\varepsilon-\lambda) = 0$ убеждаемся в том, что в малой окрестности точки $\lambda_0 = 1$ возмущенная задача имеет два собственных значения $\lambda_1(\varepsilon) = 1$, $\lambda_1(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon$ с собственными векторами $\tilde{\varphi}_1(\varepsilon) = (1,-1,0)^T$, $\tilde{\varphi}_2(\varepsilon) = (1,-1,0)^T$ соответственно. Проверим условие снятия вырождения:

$$(A_0 - 1\cdot A_{10})(\varphi_{10} - \varphi_{20}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$A_{01}(\varphi_{10} - \varphi_{20}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0,$$

т.е. $\varphi_{10} - \varphi_{20} \in N(A - 1\cdot A_{10}) \cap N(A_{01})$. Условие снятия вырождения не выполняется.

Производим регуляризацию

$$\widetilde{A_1} = \begin{pmatrix} 1-\lambda-\varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 1-\lambda-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} + \langle\cdot, \varphi_{20}\rangle\varphi_{20} = \begin{pmatrix} 1-\lambda-\varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 2-\lambda-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{A_2} = \begin{pmatrix} 1-\lambda-\varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 1-\lambda-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix} + \langle\cdot, \varphi_{10}\rangle\varphi_{10} = \begin{pmatrix} 2-\lambda-\varepsilon & -\varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 1-\lambda-\varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}.$$

Видно, что $\lambda_1(\varepsilon) = 1$, и $\lambda_1(\varepsilon) = 1 - 2\varepsilon$ не являются собственными значениями для $\widetilde{A_1}$ и $\widetilde{A_2}$, что противоречит теореме 2.1.

## 3. Возмущение собственных значений

В случае отсутствия обобщенных жордановых цепочек, т.е. $\langle A_1\varphi_{i0},\psi_{i0}\rangle \neq 0, i=\overline{1,n}$, пусть $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ - собственный элемент оператора $\overline{A_i(\lambda_i;\varepsilon)}$ соответствующий собственному значению $\lambda_i(\varepsilon)$. Тогда $\overline{A_i(\lambda_i;\varepsilon)}\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)=0$ можно записать в виде

$$A(\lambda_0)\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)=\overline{A}(\mu_i(\varepsilon))\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)+H_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)-\sum_{j\neq i}\langle\tilde{\varphi}_i(\varepsilon),\gamma_{j0}\rangle z_{j0}, \tag{3.8}$$

где $\overline{A}(\mu_i(\varepsilon))=A(\lambda_0)-A(\lambda_i(\varepsilon))$, $H_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)=A(\lambda_i(\varepsilon))-A(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)$. Применение оператора Э.Шмидта $\tilde{A}(\lambda_0)$ , $\Gamma=\tilde{A}^{-1}(\lambda_0)$, сводит (3.8) к эквивалентной системе

$$\begin{cases}\tilde{A}(\lambda_0)\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)=\overline{A}(\mu_i(\varepsilon))\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)+H_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)+\xi_i z_{i0},\\ \xi_i=\langle\tilde{\varphi}_i(\varepsilon),\gamma_{i0}\rangle.\end{cases} \tag{3.9}$$

Записав первое уравнение системы (3.9) в виде

$$\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)=\xi_i\left[I-\Gamma\overline{A}(\mu_i(\varepsilon))-\Gamma H_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\right]^{-1}\varphi_{i0} \tag{3.10}$$

и подставив $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ во второе уравнение (3.9) получим уравнение разветвления собственного значения $\lambda_0$:

$$\langle\left[\overline{A}(\mu_i(\varepsilon))+H_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\right]\left[I-\Gamma\overline{A}(\mu_i(\varepsilon))-\Gamma H_i(\lambda_i(\varepsilon);\varepsilon)\right]^{-1}\varphi_{i0},\psi_{i0}\rangle=0. \tag{3.11}$$

или учитывая аналитичность оператора $A(t;\varepsilon)$ в окрестности точки $(\lambda_0,0)$, после разложения в степенной ряд согласно формуле (2.2)

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}L_{sli}\mu_i^s\varepsilon^l=0,\quad L_{sli}=\sum_{(s,l)=(s_1,l_1)+\dots+(s_k,l_k)}\langle A_{s_1l_1}\Gamma A_{s_2l_2}\dots\Gamma A_{s_kl_k}\varphi_{i0},\psi_{i0}\rangle. \tag{3.12}$$

При наших предположениях коэффициент $L_{10}=\langle A_1\varphi_{i0},\psi_{i0}\rangle$ отличен от нуля. Поэтому $\mu_i(\varepsilon)$ для всех $i=\overline{1,n}$ определяются из уравнения (3.12) в виде ряда по целым степеням $\varepsilon$. Определив $\mu_i(\varepsilon)$ и подставляя его в формулу (3.10), находим соответствующий собственный элемент $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ в виде ряда по целым степеням $\varepsilon$. Тем самым доказана

**Теорема 3.1.** *Если* $dimN(A(\lambda_0))=dimN^*(A(\lambda_0))=n$ *и* $\langle A_1\varphi_{i0},\psi_{i0}\rangle\neq 0$ *для всех* $i=\overline{1,n}$, *то для достаточно малых* $\varepsilon$ *существуют ровно* $n$ *простых собственных значений* $\lambda_i(\varepsilon)$ $(\lambda_i(0)=\lambda_0)$ *и соответствующие им собственные элементы* $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ *и дефектные функционалы* $\tilde{\psi}_i(\varepsilon)$, *аналитические по* $\varepsilon$.

Теперь рассмотрим случай наличия ОЖЦ $\left\{\varphi_{i0}^{(j)}\right\}_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,p_i}}$, таких, что $\langle\sum\limits_{k=1}^{p_i}A_k\varphi_{i0}^{(p_i+1-k)},\psi_{i0}\rangle\neq 0$ для всех $i=\overline{1,n}$. Это значит, что все ОЖЦ конечны. Тогда в (3.12) согласно (2.2) $L_{p_i0}=\langle\sum\limits_{k=1}^{p_i}A_k\varphi_{i0}^{(p_i+1-k)},\psi_{i0}\rangle\neq 0$.

Убывающая часть диаграммы Ньютона, построенной для уравнения разветвления (3.12) состоит либо из отрезка, соединяющего точки $(1,1)$ и $(p_i,0)$ (так будет, если все $L_{0j}$ равны нулю и $L_{11}\neq 0$), либо из двух отрезков: указанного выше и отрезка, соединяющего точки $(1,1)$ и $(0,q_i)$ где $q_i-$ номер первого отличного от нуля члена в последовательности $\{L_{0j}\}$. Первому отрезку отвечает показатель $\frac{1}{p_i-1}$, а второму

отрезку в любом случае–целочисленный показатель. Следовательно, оператор $A(\lambda,\varepsilon)$ для достаточно малых $\varepsilon$, имеет ровно $N=\sum\limits_{i=1}^{n} p_i$ ($N-$ корневое число) различных непрерывных по $\varepsilon$ собственных значений $\lambda_i(\varepsilon)$, $\lambda_i(0)=\lambda_0$, причем $n$ собственных значений представляются сходящимися рядами по целым степеням $\varepsilon$ и $N-n$ собственных значений по степеням $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. Каждому $\lambda_i(\varepsilon)$ отвечает собственный элемент $\tilde{\varphi}_i(\varepsilon)$ представимый сходящимся рядом по тем же степеням $\varepsilon$, что и соответствующие ему $\lambda_i(\varepsilon)$. Таким образом, доказан следующий результат.

**Теорема 3.2.** *Пусть при наличии ОЖЦ* $L_{p_i0}=\langle\sum\limits_{k=1}^{p_i} A_k\varphi_{i0}^{(p_i+1-k)},\psi_{i0}\rangle\neq 0$ *для всех* $i=\overline{1,n}$. *Если* $L_{0j}=0$, $j=\overline{1,\infty}$ *и* $L_{11}\neq 0$, *то существуют* $N$ *простых собственных значений и отвечающих им собственных элементов, представимых в виде рядов по степеням* $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$. *Если же* $L_{0j}=0$, $j=\overline{1,q_i-1}$, $L_{0q_i}\neq 0$, $L_{11}\neq 0$, *то существуют ровно* $N$ *собственных значений, причем* $n$ *из них с соответствующими собственными элементами представимыми по целым степеням* $\varepsilon$, *а остальные* $N-n$ *с соответствующими собственными элементами представимыми по степеням* $\varepsilon^{\frac{1}{p_i-1}}$.

**Замечание 3.1.** *Когда* $L_{0j}=0$, $j=\overline{1,\infty}$ *и* $L_{11}=0$, *метод диаграммы Ньютона позволяет определить все собственные значения с соответствующими собственными элементами представимых сходящимися рядами по дробным степеням* $\varepsilon$, *по отличному от нуля первому коэффициенту из ряда* $\{L_{1j}\}$.

## Список литературы


1. F. Rellich. *Stőrungstheory der Spektalzerlegung.* I, Math. Ann., **113**, (1936), 600–619; II, Math. Ann., **113**, (1936), 677–685; III, Math. Ann., **116**, (1939), 555–570.

2. Sz.-Nagy *Perturbation des transformation lineaires fermees.* Acta Sci. Math. Szeged., **11**, (1951), 125-137.

3. Т. Като.*Теория возмущений линейных операторов*, Мир, Москва, 1972.

4. М. И. Вишик, Л. А. Люстерник. *Решение некоторых задач возмущений в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений.* Успехи матем. наук,(1960),**15**, no. 3,3–80.

5. М. М. Вайнберг, В. А. Треногин. *Теория ветвления решений нелинейных уравнений.* М., Наука, 1969.

6. Д.Г. Рахимов. О вычислении кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений, Жур. СВМО, 2010, № 3, стр. 106-112.

7. Д.Г. Рахимов. О регуляризации кратных собственных значений редукционным методом ложных возмущений. Вестник Самарского Государственного Университета, Естественнонаучная серия, 2012, № 6(97), стр. 35-41.

8. Б. В. Логинов, Ю. Б. Русак. *Обобщенная жордановая структура в теории ветвления.* В сб."Прямая и обратная задачи для дифференциальных уравнений в частных производных и их приложения (под ред. М. С. Салахитдинова.). "Фан Ташкент, 1978, 133–148.

# On Fredholm eigenvalues perturbations for linear operators.

© **D. G. Rakhimov**[2]

**Abstract.** In work on the basis of the reduction method, developed in works [6], [7], allowing to reduce cases of the multiple eigenvalues to simple, the problem of perturbation of the Fredholm points of a discrete spectrum of linear operator-functions is investigated.

**Key Words:** bifurcation theory methods, perturbation theory, branching equation,generalized Jordan chains, regularization

[2] Associate Professor of department of applied mathematics and informatics, Branch of the Moscow State University after M.V. Lomonosov in Tashkent, davranaka@yandex.com

УДК 517.958

# Одномерная обратная задача для уравнения вязкоупругости в ограниченной области

© Ж. Ш. Сафаров [1]

**Аннотация.** Рассматривается одномерное интегродифференциальное уравнение, которое возникает в теории вязкоупругости с плотностью $\rho = \rho(x)$ и коэффициентами Ламе $\mu = \mu(x)$, $\lambda = \lambda(x)$. Задача изучается в ограниченной по $x$ области $[0, l]$. Начальные условия равны нулю. Граничными условиями являются функция напряжений на левом конце этого отрезка в виде сосредоточенного источника возмущений, а на правом - нуль. Для прямой задачи изучается обратная задача об определении ядра, входящего в интегральный член уравнения, по дополнительной информации о функции смещений при $x = 0$. Обратная задача заменяется эквивалентной системой интегральных уравнений относительно неизвестных функций. К этой системе в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами применяется принцип сжатых отображений. Доказана теорема глобальной однозначной разрешимости и получена оценка устойчивости решения обратной задачи.

**Ключевые слова:** обратная задача, уравнение вязкоупругости, ядро интеграла, интегродифференциальное уравнение, дельта-функция, функция напряжений

## 1. Постановка задачи и основные результаты

Рассмотрим одномерное дифференциальное уравнение вязкоупругости в ограниченной по переменной $x$ области $D := \{(x,t) : 0 < x < l,\ t > 0\}$

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \tag{1.1}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u\mid_{t<0} \equiv 0,\ 0 \le x \le l, \tag{1.2}$$

$$T(x,t)\mid_{x=0} = \delta(t),\ T(x,t)\mid_{x=l} = 0, \tag{1.3}$$

где $u(x,t)$ - функция смещений, $\delta(t)$ - дельта - функция Дирака; $T$ - функция напряжений:

$$T(x,t) = \mu(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \int_0^t k(t-\tau)\mu(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau. \tag{1.4}$$

Одномерная обратная задача о нахождении ядра из одного уравнения вязкоупругости в ограниченной области с распределенными источниками возмущений рассмотрена в [1]. Методом Фурье задача сведена к системе интегральных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных функций зависящих от временной переменной. Однако, в приложениях наиболее интересными являются обратные задачи, когда данные прямой задачи представляют собой сингулярные обобщенные функции. Одна из таких задач изучена [2] где пространственную область представляет полупрямая $x > 0$. В работе [3] рассмотрена аналогичная задача в ограниченной по $x$ области $0 < x < l$, с постоянными коэффицентами Ламэ и постоянной плотностью. В данной работе рассматривается более общий случай задачи в [3] когда $\rho$, $\mu$, $\lambda$ являются функциями переменной $x$, удовлетворяющими

[1] Программист 1-категории центра информационных технологий, Ташкентский университет информационных технологий, г. Ташкент; j.safarov65@mail.ru.

условиям $\rho(x) > 0,\ \mu(x) > 0,\ \lambda(x) > 0$, причем $\rho'(+0) = \mu'(+0) = \lambda'(+0) = 0$. Обратная задача заключается в определении ядра $k(t),\ t > 0,$ входящего в (1.1) посредством формулы (1.4), если относительно решения задачи (1.1) - (1.4) известна дополнительная информация

$$u(x,t)|_{x=+0} = f(t),\ t > 0, \tag{1.5}$$

$f(t)$ - заданная функция. Как и в [4, с.53-59], здесь для исследования задачи применяется метод характеристок. Так как рассматривается только одно уравнение (а не система уравнений) функция $\lambda(x)$ не будет входить в уравнению [5].

Введем в рассмотрение новую переменную $y$ по формуле

$$y = \psi(x) := \int_0^x \frac{d\xi}{\nu(\xi)},\ \nu(x) := \sqrt{\frac{\mu(x)}{\rho(x)}}.$$

Через $\psi^{-1}(y)$ обозначим функцию, обратную к $\psi(x)$.

Основными результатами настоящей работы является следующие теоремы глобальной однозначной разрешимости обратной задачи и устойчивости решения.

**Теорема 1.1.** *Пусть* $f(t) \in C^3[0,\ 2l]$ *и* $f(+0) = -a$.

*Тогда существует единственное решение обратной задачи* (1.1)−(1.5) $k(t) \in C^2[0,\ 2l]$ *для любого* $l > 0$, *где* $a = [\mu(+0)\rho(+0)]^{-\frac{1}{2}}$

Пусть $K(h_0)$ - множество функций $k(t) \in C^2[0, 2l]$, удовлетворяющих для $t \in [0, 2l]$ неравенству $\|k(t)\|_{C^2[0,2l]} \le h_0$ с фиксированной положительной постоянной $h_0$. Эта постоянная определена в (4.10).

**Теорема 1.2.** *Пусть* $k^1(t) \in K(h_0),\ k^2(t) \in K(h_0)$ *- решения обратной задачи (1.1) - (1.6) с набором данных*

$$\left\{\rho^1(\psi^{-1}(y)),\ \mu^1(\psi^{-1}(y)),\ f^1(t)\right\},$$

$$\left\{\rho^2(\psi^{-1}(y)),\ \mu^2(\psi^{-1}(y)),\ f^2(t)\right\},$$

*соответственно. Тогда найдется такое положительное число* $C = C(h_0,\ h_{00},\ l)$, $h_{00} = \max\Big\{\|\rho^1(y)\|_{C^3[0,\ \psi^{-1}(l)]},\ \|\mu^1(y)\|_{C^3[0,\ \psi^{-1}(l)]}, \|f^1(t)\|_{C^2[0,\ 2l]}, \|\rho^2(y)\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l)]},$ $\|\mu^2(y)\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l)]},\ \|f^2(t)\|_{C^2[0,2l]}\Big\}$, *что справедлива оценка устойчивости*

$$\|k^1(t) - k^2(t)\|_{C^2[0,2l]} \le C\Big[\|\rho^1 - \rho^2\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l)]} + \|\mu^1 - \mu^2\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l)]} + \|f^1 - f^2\|_{C^2[0,2l]}\Big]. \tag{1.6}$$

Доказательства теорем приводятся в разделе 4.

## 2. Предварительные построения

Подставляя (1.4) в (1.1) перепишем равенства (1.1) − (1.3):

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \int_0^t k(t-\tau)\frac{\partial}{\partial x}\left(\mu(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}\right)d\tau, \tag{2.1}$$

$$u|_{t<0} \equiv 0, \tag{2.2}$$

$$\left[\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\int_0^t k(t-\tau)\mu(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau\right]_{x=+0}=\delta(t). \tag{2.3}$$

$$\left[\mu(x)\frac{\partial u}{\partial x}+\int_0^t k(t-\tau)\mu(x)\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}d\tau\right]_{x=l}=0. \tag{2.4}$$

Пусть

$$v(y,t):=\frac{u\left(\psi^{-1}(y),t\right)}{s(y)},\ s(y):=\sqrt{\frac{\nu(+0)\rho(+0)}{\nu\left(\psi^{-1}(y)\right)\rho\left(\psi^{-1}(y)\right)}}.$$

Тогда обратная задача $(2.1)-(2.4)$, $(1.5)$ в терминах вновь введенных функций и переменной $y$ принимает вид

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+q(y)v+\int_0^t k(t-\tau)\left(\frac{\partial^2 v(y,\tau)}{\partial y^2}+q(y)v(y,\tau)\right)d\tau, \tag{2.5}$$

$$0<y<L,\ t\in R.$$

$$v|_{t<0}\equiv 0. \tag{2.6}$$

$$\left[\frac{\partial v(y,t)}{\partial y}+\int_0^t k(t-\tau)\frac{\partial v(y,t)}{\partial y}d\tau\right]_{y=+0}=a\delta(t). \tag{2.7}$$

$$\left[\frac{\partial v(y,t)}{\partial y}+\int_0^t k(t-\tau)\frac{\partial v(y,t)}{\partial y}d\tau\right]_{y=L}=0. \tag{2.8}$$

$$v(y,t)|_{y=+0}=f(t),\ 0<y<L, \tag{2.9}$$

где введены обозначения

$$q(y)=\frac{s''(y)}{s(y)}-2\left[\frac{s'(y)}{s(y)}\right]^2,\ L:=\psi(l).$$

Обозначим

$$\left[v(y,t)+\int_0^t k(t-\tau)v(y,\tau)d\tau\right]\exp\left(-k(0)t/2\right)=w(y,t).$$

Тогда, как нетрудно видеть

$$v(y,t)=\exp\left(k(0)t/2\right)w(y,t)+\int_0^t r(t-\tau)\exp\left(k(0)\tau/2\right)w(y,\tau)d\tau,$$

где

$$r(t)=-k(t)-\int_0^t k(t-\tau)r(\tau)d\tau. \tag{2.10}$$

Относительно новых функций $w(y,t)$ и $r(t)$ уравнения $(2.5)-(2.9)$ записываются в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+H(y)w-\int_0^t h(t-\tau)w(y,\tau)d\tau,\ 0<y<L,\ t\in R, \tag{2.11}$$

$$w|_{t<0}\equiv 0, \tag{2.12}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=+0}=a\delta(t), \tag{2.13}$$

$$\left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=L} = 0, \tag{2.14}$$

$$w|_{y=+0} = f_0(t) + \int_0^t k_0(t-\tau) f_0(\tau) d\tau, \tag{2.15}$$

где

$$H(y) := q(y) + \frac{r^2(0)}{4} - r'(0),\ h(t) := r''(t)\exp\left(r(0)t/2\right),$$

$$f_0(t) := f(t)\exp\left(r(0)t/2\right),\ k_0(t) := k(t)\exp\left(r(0)t/2\right).$$

В (2.11) использовано равенство $k(0) = -r(0)$, вытекающее из (2.10).

**Л е м м а 2.1.** *Пусть* $k(t) \in C^2[0,\ \infty)$. *Тогда*

$$w(y,t) \equiv 0 \tag{2.16}$$

*для* $(y,t) \in D_1 := \{(y,t) : 0 < y < L,\ 0 < t < y\}$,

$$w(y,t) = -a - \int_0^{t-y}\int_0^{\frac{\tau}{2}} \left[H(\xi)w(\xi,\tau-\xi) - \int_0^{\tau-2\xi} h(\alpha)w(\xi,\tau-\xi-\alpha)d\alpha\right] d\xi d\tau -$$

$$-\int_{t-y}^{t}\int_{\tau-t+y}^{\frac{2\tau-t+y}{2}} \left[H(\xi)w(\xi,2\tau-t+x-\xi) - \int_0^{2\tau-t+y-2\xi} h(\alpha)w(\xi,2\tau-t+y-\xi-\alpha)d\alpha\right] d\xi d\tau, \tag{2.17}$$

*для* $(y,t) \in D_2 := \{(y,t) : 0 < y < L,\ y < t < 2L-y\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для

$$(y,t) \in D_0 := \left\{(y,t) : 0 < y < L,\ 0 < t < \frac{L}{2} - \left|y - \frac{L}{2}\right|\right\} \subset D_1$$

равенство (2.16) следует из формулы Даламбера для решения однородного уравнения (2.11) с нулевыми начальными данными (2.12).

Далее рассмотрим пучок характеристик оператора $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}$ проходящий через отрезок $(0,L)$ оси $y$. Он высекает на правой границе области $D \setminus D_0$ отрезок $(0,L)$. Представляя волновой оператор в виде произведения

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

и интегрируя равенство (2.11) вдоль отрезка фиксированной характеристики пучка, заключенного в $D \setminus D_0$, найдем, используя условие (2.12)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y}\right) w|_{y=L} =$$

$$= \int_{\frac{t}{2}}^{t} \left[H(\tau-t+L)w(\tau-t+L,\tau) - \int_0^{\tau} h(\tau-\alpha)w(\tau-t+L,\alpha)d\alpha\right] d\tau,\ t \in (0,L).$$

С учетом граничного условия (2.14) при $y = L$, из этого равенства, находим

$$w(L,t) =$$

$$= \int_0^t \int_{\frac{\tau}{2}}^{\tau} \left[ H(\tau_1 - \tau + L) w(\tau_1 - \tau + L, \tau_1) - \int_0^{\tau_1} h(\tau_1 - \alpha) w(\tau_1 - \tau + L, \alpha) d\alpha \right] d\tau_1 d\tau, \ t \in (0, L).$$

Произведя замену переменных во внутренном интеграле $\tau$ на $\xi$ по формуле $\tau_1 - \tau + l = \xi$, последнее уравнение перепишем в виде

$$w(L,t) =$$
$$= \int_0^t \int_{L-\frac{\tau}{2}}^{L} \left[ H(\xi) w(\xi, \tau - L + \xi) - \int_0^{\tau - L + \xi} h(\tau - L + \xi - \alpha) w(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \ t \in (0, L). \tag{2.18}$$

Интегрируя уравнение (2.11) вдоль характеристики $dy/dt = 1$, получаем

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial y} \right) w(y,t) =$$
$$= \int_{\frac{L+y-t}{2}}^{x} \left[ H(\xi) w(\xi, \xi + t - y) - \int_0^{\xi + t - y} h(\xi + t - y - \alpha) w(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi, \ (y,t) \in D_1 \backslash D_0.$$

Далее, используя формулу (2.18), находим уравнение для $w(y,t)$ в области $D_1 \backslash D_0$:

$$w(y,t) =$$
$$= \int_0^{t+y-L} \int_{L-\frac{\tau}{2}}^{l} \left[ H(\xi) w(\xi, \tau - L + \xi) - \int_0^{\tau - L + \xi} h(\tau - L + \xi - \alpha) w(\xi, \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau +$$
$$+ \int_{t+y-L}^{t} \int_{\frac{L+t+y-2\tau}{2}}^{t+y-\tau} \Bigg[ H(\xi) w(\xi, \xi + 2\tau - t - y) -$$
$$- \int_0^{\xi + 2\tau - t - y} h(\xi + 2\tau - t - y - \alpha) w(\xi, \alpha) d\alpha \Bigg] d\xi d\tau.$$

При выполнении условии леммы, последнее уравнение является однородным уравнением вольтерровского типа с непрерывным ядром. Отсюда

$$w(y,t) \equiv 0, \ (y,t) \in D_1 \backslash D_0$$

и формула (2.16) установлена.

Рассмотрим область

$$D_2 := \{(y,t) : 0 < y < L, \ y < t < 2L - y\}.$$

Интегрируя (2.2) вдоль соответствующей характеристики, находим

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y} \right) w|_{y=0} = - \int_0^{\frac{t}{2}} \left[ H(\xi) w(\xi, t - \xi) - \int_0^{t - 2\xi} h(\alpha) w(\xi, t - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi, \ t \in (0, 2L).$$

В сочетании с граничным условием (2.3) при $y = 0$ это равенство позволяет вычислить $w(y,t)$ при $y = 0$:

$$w(0,t) = -a - \int_0^t \int_0^{\frac{\tau}{2}} \left[ H(\xi) w(\xi, \tau - \xi) - \int_0^{\tau - 2\xi} h(\alpha) w(\xi, \tau - \xi - \alpha) d\alpha \right] d\xi d\tau, \ t \in (0, 2L).$$

Используя последнее равенство, получаем для $w(y,t)$ интегральное уравнение (2.17). Переходя в этом уравнении к пределу при $t \to y+0$, заметим прежде всего, что

$$w(y, y+0) = -a, y \in (0, L). \tag{2.19}$$

Это значит, что решение задачи (2.2) – (2.3) терпит разрыв первого рода при переходе через характеристической линии $t = y$. При этом скачок функции равен $-a$. Уравнение (2.17) является в области $D_2$ уравнением вольтерровского типа. Поэтому решение его единственно в классе функций, принадлежащих пространству $C(D_2)$, и может быть получено методом последовательных приближений. Существование решения в этом классе вытекает из принадлежности $k(t)$ классу $C^2[0, 2L]$. Более того, непосредственным дифференцированием уравнения (2.17) нетрудно убедиться, что его решение принадлежит классу $C^2(D_2)$.

## 3. Сведение обратной задачи к эквивалентной системе интегральных уравнений

**Лемма 3.1.** *При выполнении условий теоремы обратная задача (2.11) - (2.15) для $(y,t) \in D_2$ эквивалентна задаче нахождения вектор - функций $w(y,t)$, $w_t(y,t)$, $w_{tt}(y,t)$, $h(t)$, $k_0(t)$, $k_0'(t)$, $k_0''(t)$ из системы, составленной из равенства (2.18) и следующих уравнений:*

$$w_t(y,t) = \frac{a}{2}\int_0^y H(\frac{t+y-2\beta}{2})d\beta -$$
$$-\int_0^{\frac{t-y}{2}}\left[H(\xi)w(\xi, t-y-\xi) - \int_0^{t-y-2\xi} h(\alpha)w(\xi, t-y-\xi-\alpha)d\alpha\right]d\xi -$$
$$-\int_0^y\int_{y-\beta}^{\frac{t+y-2\beta}{2}}\Big[H(\xi)w_t(\xi, t+y-2\beta-\xi) + ah(t+y-2\beta-2\xi) -$$
$$-\int_0^{t+y-2\beta-2\xi} h(\alpha)w_t(\xi, t+y-2\beta-\xi-\alpha)d\alpha\Big]d\xi d\beta, \tag{3.1}$$

$$w_{tt}(y,t) = \frac{a}{4}\left(H(\frac{t+y}{2}) + H(\frac{t-y}{2})\right) -$$
$$-\frac{ay}{2}h(t-y) - \frac{1}{2}\int_0^y H(\frac{t+y-2\beta}{2})B(\frac{t+y-2\beta}{2})d\beta -$$
$$-\int_0^{\frac{t-y}{2}}\left[H(\xi)w_t(\xi, t-y-\xi) + ah(t-y-2\xi) - \int_0^{t-y-2\xi} h(\alpha)w_t(\xi, t-y-\xi-\alpha)d\alpha\right]d\xi -$$
$$-\int_0^y\int_{y-\beta}^{\frac{t+y-2\beta}{2}}\Big[H(\xi)w_{tt}(\xi, t+y-2\beta-\xi) - B(\xi)h(t+y-2\beta-2\xi) -$$
$$-\int_0^{t+y-2\beta-2\xi} h(\alpha)w_{tt}(\xi, t+y-2\beta-\xi-\alpha)d\alpha\Big]d\xi d\beta, \tag{3.2}$$

$$h(t) = H'(\frac{t}{2}) - \frac{1}{a}H(\frac{t}{2})B(\frac{t}{2}) - \frac{2}{a}f_0'''(t) -$$

$$-\frac{2}{a}\left[f''(0)-\frac{3}{a}\left[f'(0)\right]^2\right]k_0(t)-\frac{4}{a}f'(0)k_0'(t)+2k_0''(t)-\frac{2}{a}\int_0^t k_0(\tau)f_0'''(t-\tau)d\tau-$$

$$-\frac{2}{a}\int_0^{\frac{t}{2}}\left[H(\xi)w_{tt}(\xi,t-\xi)-h(t-2\xi)B(\xi)-\int_0^{t-2\xi}h(\alpha)w_{tt}(\xi,t-\xi-\alpha)d\alpha\right]d\xi, \tag{3.3}$$

$$k_0(t)=-r(0)+\left(\frac{r^2(0)}{2}-r'(0)\right)t+\int_0^t(t-\tau)k_0''(\tau)d\tau, \tag{3.4}$$

$$k_0'(t)=\frac{r^2(0)}{2}-r'(0)+\int_0^t k_0''(\tau)d\tau, \tag{3.5}$$

$$k_0''(t)=-h(t)+\left(\frac{r^2(0)}{4}-r'(0)\right)k_0(t)-\int_0^t h(t-\tau)k_0(\tau)d\tau. \tag{3.6}$$

*Неизвестные числа в этих равенствах выражаются через значения в нуле заданной функции* $f(t)$ *и ее производных, понимаемые как правый предел, следующим образом:*

$$r(0)=-\frac{2}{a}f'(0),\ r'(0)=\frac{1}{2a}\left[-f''(0)+\frac{2}{a}\left[f'(0)\right]^2+aq(0)\right]. \tag{3.7}$$

Для доказательства леммы заметим, что интегральное уравнение (2.18) выведено из соотношений (2.12) - (2.14). Заменяя во внешнем интеграле последнего слагаемого в (2.18) переменное интегрирование $\tau$ на $\beta$ по формуле $t-\tau=\beta$ и дифференцируя его последовательно два раза по переменной $t$, получим соответственно уравнения (3.1), (3.2). При этом для получения уравнение (3.1) использовано соотношение (2.19), а для (3.2) - соотношение (2.19) и равенство

$$w_t(y,y)=\frac{a}{2}\int_0^y H(\xi)d\xi=:B(y),$$

вытекающее из (3.1). Далее в уравнении (2.18) положим $y=0$ и воспользуемся условием (2.15). Тогда, имеем

$$f_0(t)+\int_0^t k_0(\tau)f_0(t-\tau)d\tau=$$

$$=-a-\int_0^t\int_0^{\frac{\tau}{2}}\left[H(\xi)w(\xi,\tau-\xi)-\int_0^{\tau-2\xi}h(\alpha)w(\xi,\tau-\xi-\alpha)d\alpha\right]d\xi d\tau, t\in(0,2L).$$

Отсюда, в частности, следует необходимое условие разрешимости обратной задачи

$$f(0)=-a.$$

Дифференцируя предыдущее интегральное уравнение, находим

$$f_0'(t)-ak_0(t)+\int_0^t k_0(\tau)f_0'(t-\tau)d\tau=$$

$$=-\int_0^{\frac{t}{2}}\left[H(\xi)w(\xi,t-\xi)-\int_0^{t-2\xi}h(\alpha)w(\xi,t-\xi-\alpha)d\alpha\right]d\xi, t\in(0,2L). \tag{3.8}$$

Полагая здесь $t=0$ и используя равенство $r(0)=-k(0)$, вытекающее из (2.10), получаем $r(0)=-2f'(0)$. Дифференцируя (3.8), имеем

$$f_0''(t)+k_0(t)f_0'(0)-ak_0'(t)+\int_0^t k_0(\tau)f_0''(t-\tau)d\tau=$$

$$= aH(\frac{t}{2}) - \int_0^{\frac{t}{2}} \left[ H(\xi) w_t(\xi, t-\xi) + ah(t-2\xi) - \int_0^{t-2\xi} h(\alpha) w_t(\xi, t-\xi-\alpha) d\alpha \right] d\xi, \ t \in (0, 2L). \tag{3.9}$$

В этом равенстве, также полагая $t = 0$ и произведя элементарные вычисления, выразим $r'(0)$, через известные числа по формулам (3.7). Нетрудно заметить, что уравнение (3.3) получится в результате дифференцирования равенство (3.9). Для замыкания системы интегральных уравнений (2.18), (3.1) – (3.3) используются очевидные равенства (3.4) – (3.6). При выполнении условий теоремы, справедливость обратных преобразований устанавливается обычным приемом [6].

Тем самым лемма 2 доказана.

## 4. Доказательства теорем

Запишем систему уравнений (2.8) и (3.1) – (3.6) в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi \tag{4.1}$$

где

$$\varphi = [\varphi_1(y,t), \varphi_2(y,t), \varphi_3(y,t), \varphi_4(t), \varphi_5(t), \varphi_6(t), \varphi_7(t)] =$$

$$[w(y,t), w_t(y,t), w_{tt}(y,t) + \frac{ay}{2} h(t-y), h(t) + \frac{2}{a} \left[ f''(0) - \frac{3}{a} [f'(0)]^2 \right] k_0(t) + \frac{4}{a} f'(0) k_0'(t) - 2k_0''(t),$$

$$k_0(t), k_0'(t), k_0''(t) + h(t) - \left( \frac{r^2(0)}{4} - r'(0) \right) k_0(t) \Big]$$

– векторная функция с компонентами $\varphi_i, i = \overline{1,7}$, а оператор $A$ определен на множестве функций $\varphi \in C[D_2]$ и в соответствии с равенствами (2.8) и (3.1) – (3.6) имеет вид $A = (A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7)$ :

$$A_1\varphi = \varphi_{01} - \int_0^{t-y} \int_0^{\frac{\tau}{2}} \Big[ H(\xi)\varphi_1(\xi, t-\xi) - \frac{1}{3} \int_0^{t-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) -$$

$$- \frac{4}{a} f'(0)\varphi_6(\alpha)] \varphi_1(\xi, t-\xi-\alpha) d\alpha \Big] d\xi d\tau - \int_{t-y}^{t} \int_{\tau-t+y}^{\frac{2\tau-t+y}{2}} \Big[ H(\xi)\varphi_1(\xi, 2\tau-t+y-\xi) -$$

$$- \frac{1}{3} \int_0^{2\tau-t+y-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - \frac{4}{a} f'(0)\varphi_6(\alpha)] \varphi_1(\xi, 2\tau-t+y-\xi-\alpha) d\alpha \Big] d\xi d\tau, \tag{4.2}$$

$$A_2\varphi = \varphi_{02} - \int_0^{\frac{t-y}{2}} \Big[ H(\xi)\varphi_1(\xi, t-y-\xi) -$$

$$- \frac{1}{3} \int_0^{t-y-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - \frac{4}{a} f'(0)\varphi_6(\alpha)] \varphi_1(\xi, t-y-\xi-\alpha) d\alpha \Big] d\xi -$$

$$- \int_0^{y} \int_{y-\beta}^{\frac{t+y-2\beta}{2}} \Big[ H(\xi)\varphi_2(\xi, t+y-2\beta-\xi) - \frac{1}{3} [2\varphi_7(t+y-2\beta-2\xi) + \varphi_4(t+y-2\beta-2\xi) +$$

$$+ 3q_{00}\varphi_5(t+y-2\beta-2\xi) - \frac{4}{a} f'(0)\varphi_6(t+y-2\beta-2\xi] - \frac{1}{3} \int_0^{t+y-2\beta-2\xi} [2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) -$$

$$\frac{4}{a} f'(0)\varphi_6(\alpha)] \varphi_2(\xi, t+y-2\beta-\xi-\alpha) d\alpha \Big] d\xi d\beta, \tag{4.3}$$

$$A_3\varphi = \varphi_{03} - \int_0^{\frac{t-y}{2}} \Bigg[ H(\xi)\varphi_2(\xi, t-y-\xi) + \frac{a}{3}[2\varphi_7(t-y-2\xi) + \varphi_4(t-y-2\xi) + 3q_{00}\varphi_5(t-y-2\xi) -$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t-y-2\xi)] - \frac{1}{3}\int_0^{t-y-2\xi}[2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) -$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)]\varphi_2(\xi, t-y-\xi-\alpha)d\alpha\Bigg]d\xi - \int_0^y \int_{y-\beta}^{\frac{t+y-2\beta}{2}} \Bigg[ H(\xi)\varphi_2(\xi, t+y-2\beta-\xi) -$$

$$\frac{ay}{6}[2\varphi_7(t+y-2\beta-2\xi) + \varphi_4(t+y-2\beta-2\xi) + 3q_{00}\varphi_5(t+y-2\beta-2\xi) -$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t+y-2\beta-2\xi)] - \frac{1}{3}B(\xi)[2\varphi_7(t+y-2\beta-\xi) + \varphi_4(t+y-2\beta-\xi) + 3q_{00}\varphi_5(t+y-2\beta-\xi) -$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t+y-2\beta-\xi)] - \frac{1}{3}\int_0^{t+y-2\beta-2\xi}[2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) -$$

$$-\frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)][\varphi_3(\xi, t+y-2\beta-\xi-\alpha) + \frac{a\xi}{6}[2\varphi_7(t+y-2\beta-2\xi-\alpha) +$$

$$+\varphi_4(t+y-2\beta-2\xi-\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(t+y-2\beta-2\xi-\alpha) - \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t+y-2\beta-2\xi-\alpha)]d\alpha\Bigg]d\xi d\beta, \quad (4.4)$$

$$A_4\varphi = \varphi_{04} - \frac{2}{a}\int_0^t \varphi_5(\tau)f_0'''(t-\tau)d\tau + 2\int_0^{\frac{t}{2}} \Bigg[ [H(\xi)\varphi_3(\xi, t-\xi) + \frac{a\xi}{6}[2\varphi_7(t-2\xi) + \varphi_4(t-2\xi) +$$

$$+q_{00}\varphi_5(t-2\xi) - \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t-2\xi)] - \frac{B(\xi)}{3}[2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)] -$$

$$-\frac{1}{3}\int_0^{t-2\xi}[2\varphi_7(\alpha) + \varphi_4(\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(\alpha) - \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\alpha)][\varphi_3(\xi, t-\xi-\alpha) +$$

$$+\frac{a\xi}{6}[2\varphi_7(t-2\xi-\alpha) + \varphi_4(t-2\xi-\alpha) + 3q_{00}\varphi_5(t-2\xi-\alpha) - \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t-2\xi-\alpha)]d\alpha\Bigg]d\xi, \quad (4.5)$$

$$A_5\varphi = \varphi_{05} + \frac{1}{3}\int_0^t (t-\tau)[\varphi_7(\tau) - \varphi_4(\tau) + q_0\varphi_5(\tau) + \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\tau)]d\tau, \quad (4.6)$$

$$A_6\varphi = \varphi_{06} + \frac{1}{3}\int_0^t [\varphi_7(\tau) - \varphi_4(\tau) + q_0\varphi_5(\tau) + \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(\tau)]d\tau, \quad (4.7)$$

$$A_7\varphi = \varphi_{07} - \frac{1}{3}\int_0^t [2\varphi_7(t-\tau) + \varphi_4(t-\tau) + q_0\varphi_5(t-\tau) - \frac{4}{a}f'(0)\varphi_6(t-\tau)]\varphi_5(\tau)d\tau, \quad (4.8)$$

где введено обозначение

$$\varphi_0(y,t) = (\varphi_{01}, \varphi_{02}, \varphi_{03}, \varphi_{04}, \varphi_{05}, \varphi_{06}, \varphi_{07}) :=$$

$$\Bigg[-a, \frac{a}{2}\int_0^y H(\frac{t+y-2\beta}{2})d\beta, \frac{a}{4}\left(H(\frac{t+y}{2}) + H(\frac{t-y}{2})\right) - \frac{1}{2}\int_0^y H(\frac{t+y-2\beta}{2})\times$$

$$\times B(\frac{t+y-2\beta}{2})d\beta, H'(\frac{t}{2}) - \frac{1}{a}H(\frac{t}{2})B(\frac{t}{2}) - \frac{2}{a}f_0'''(t),$$

$$-r(0)+\left(\frac{r^2(0)}{2}-r'(0)\right)t, \frac{r^2(0)}{2}-r'(0), 0\Big].$$

$$q_0 := \frac{5}{2a}f''(0)-\frac{6}{a^2}[f'(0)]^2-\frac{1}{2}q(0),\ q_{00} := -\frac{1}{3a}f''(0)+\frac{2}{a^2}[f'(0)]^2-\frac{1}{3}q(0).$$

Обозначим через $C_\sigma$ банахова пространство непрерывных функций, порожденных семейством весовых норм

$$||\varphi||_\sigma = \max\{\sup_{(y,t)\in D_2}|\varphi_i(x,t)e^{-\sigma t}|, i=\overline{1,3}, \sup_{t\in[0,2L]}|\varphi_j(t)e^{-\sigma t}|, j=\overline{4,7}\}, \sigma\geq 0.$$

Очевидно, что при $\sigma = 0$ это пространство является пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее $\|\varphi\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma t}\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi\|, \tag{4.9}$$

нормы $\|\varphi\|_\sigma$ и $\|\varphi\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T\in(0,\infty)$. Число $\sigma$ будем выбрать позже. Пусть $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|) := \{\varphi : \|\varphi-\varphi_0\|\leq\|\varphi_0\|\}$ - шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке $\varphi_0$ некоторого весового пространства $C_\sigma(\sigma\geq 0)$, в котором

$$\|\varphi_0\| = \max(\|\varphi_{01}\|, \|\varphi_{02}\|, \|\varphi_{03}\|, \|\varphi_{04}\|, \|\varphi_{05}\|, \|\varphi_{06}\|, \|\varphi_{07}\|).$$

Нетрудно заметить, что для $Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$ имеет место оценка

$$\|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi_0\|_\sigma + \|\varphi_0\| \leq 2\|\varphi_0\|.$$

Пусть $\varphi(x,t)\in Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma>0$ оператор $A$ переводит шар в шар, т.е. $A\varphi\in Q_\sigma(\varphi_0,\|\varphi_0\|)$ . На самом деле, с помощью равенств $(4.2)-(4.8)$ составляя норму разностей, для $(y,t)\in D_2$ имеем

$$\|A\varphi-\varphi\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2}|(A\varphi-\varphi)e^{-\sigma t}| \leq \frac{\|\varphi_0\|}{\sigma}\alpha_0,$$

$$\|(A\varphi^1-A\varphi^2)_1\|_\sigma = \sup_{(x,t)\in D_2}|(A\varphi^1-A\varphi^2)_1 e^{-\sigma t}| \leq \frac{\|\varphi^1-\varphi^2\|_\sigma}{\sigma}\beta_0$$

где

$$\alpha_0 := max\Bigg(L\Big[3H_0+4\|\varphi_0\|(3+3q_{00}+\frac{4}{a}|f'(0)|)L\Big], 2\Big[\frac{H_0}{2}+L(H_0+1+2q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{3}{4}+9L\|\varphi_0\|)\Big],$$

$$2\Big[H_0(1+\frac{L}{4})+(1+q_00+\frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{a}{2}+\frac{aL^2}{8}+\frac{B_0L}{4}+\|\varphi_0\|(2L+1+\frac{aL}{2}(1+q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)))\cdot 3L^2\Big],$$

$$2\Big[\frac{2}{a}F_0+2H_0+(1+q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{1}{2}+B_0+2\|\varphi_0\|(4+a(1+q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)))L\Big],$$

$$\frac{2(2a+aq_0+4|f'(0)|)\cdot 2L}{3a}, \frac{2(2a+aq_0+4|f'(0)|)}{3a},$$

$$2\Big[\frac{(r(0)+2r_{00}L)(3a+2q_0+4)}{3}+\frac{2}{9a^2}L^2\|\varphi_0\|(3a+2q_0+4)(2a+q_0+4)\Big]\Bigg)$$

$$\beta_0 := max\Bigg(L\Big[\frac{3H_0}{2}+2\|\varphi_0\|(3+3q_{00}+\frac{4}{a}|f'(0)|)L\Big], \Big[\frac{H_0}{2}+L(H_0+1+2q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{3}{4}+18L\|\varphi_0\|)\Big],$$

$$\left[H_0(1+\frac{L}{4})+(1+q_00+\frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{a}{2}+\frac{aL^2}{8}+\frac{B_0L}{4}+2\|\varphi_0\|(2L+1+\frac{aL}{2}(1+q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)))\cdot 3L^2\right],$$

$$\left[\frac{2}{a}F_0+2H_0+(1+q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)(\frac{1}{2}+B_0+2\|\varphi_0\|(4+a(1+q_{00}+\frac{4}{3a}|f'(0)|)))L\right], \frac{2L(2a+aq_0+4|f'(0)|)}{3a}$$

$$\left(2+2r_0+4|f'(0)|\right), \left[\frac{(r(0)+2r_{00}L)(3a+2q_0+4)}{3}+\frac{4}{9a^2}L^2\|\varphi_0\|(3a+2q_0+4)(2a+q_0+4)\right]\Bigg).$$

Как следует из проделанных оценок если число $\sigma$ выбрано из условия $\sigma > max(\alpha_0, \beta_0)$, то оператор $A$ является сжимающим на $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, согласно принципу Банаха, уравнение (4.1) имеет и притом единственное решение в $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ при любом фиксированном $T > 0$.

Так как $k_0(t) = k(t)\exp(r(0)t/2)$, то по найденной функции $k_0(t)$ функция $k(t)$ находится по формуле

$$k(t) = k_0(t)\exp(-r(0)t/2).$$

Теорема 1.1 доказана.

Докажем теперь теорему 1.2. Так как условия теоремы 1.1 выполнены, то решение (4.1) принадлежит множеству $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ и $\|\varphi_i\|_\sigma \le 2\|\varphi_0\|$, $i = \overline{1,7}$. Таким образом,

$$\max_{t\in[0,2l]} |k(t)| \le 2\|\varphi_0\|\exp(|r(0)|l) := h_0. \tag{4.10}$$

Пусть $\varphi^j$, $j = 1,2$ - вектор функций, которые являются решениями (4.1) с набором данных $\left\{\rho^j(\psi^{-1}(y)), \mu^j(\psi^{-1}(y)),\ f^j(t)\right\}$, $j = 1,2$, соответственно, т.е. справедливы уравнения $\varphi^j = A\varphi^j$ для $j = 1,2$. Известные функции $\rho^j[\psi^{-1}(y)]$, $\mu^j[\psi^{-1}(y)]$, $j = 1,2$ в свободные члены этих интегральных уравнений входят соответствующим образом через сложные функции $H^j(y)$, $q^j(y)$, $s^j(y)$, $j = 1,2$. Переходя в этих выражениях к разностям $\rho^1-\rho^2$, $\mu^1-\mu^2$, подобно тому как это сделано в книге [7, с.95-110], из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 1, для $\sigma \ge \sigma^*$ получим оценку

$$\left\|\varphi^1-\varphi^2\right\|_\sigma \le C_0\gamma + \frac{\sigma^*}{\sigma}\left\|\varphi^1-\varphi^2\right\|_\sigma, \tag{4.11}$$

где

$$\gamma := \|\rho^1-\rho^2\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l]} + \|\mu^1-\mu^2\|_{C^3[0,\psi^{-1}(l]} + \|f^1-f^2\|_{C^2[0,2l]}$$

и постоянная $C_0$ зависит от тех параметров, что и $C$ в теореме 2. Из неравенств (4.9) и (4.11) следует оценка

$$\left\|k_0^1-k_0^2\right\| \le C_1\gamma,$$

с постоянной $\sigma C_0/(\sigma-\sigma^*)$. Тогда, рассматривая уравнение (4.9) для $\{k^1, k_0^1\}$, $\{k^2, k_0^2\}$ и используя (4.11), получим оценку (1.6).

## Список литературы

1. Janno J. and von Wolfersdorf L., “Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity”, *Math. methods in Appl. Sciences*, **20**:4 (1997), 291 - 314.

2. Дурдиев Д. К, Тотиева Ж. К., "Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **16**:2 (2013), 72 - 82.

3. Дурдиев Д. К, Сафаров Ж. Ш., "Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области", *Мат.заметки.*, **97**:6 (2015), 855–867.

4. Романов В. Г., *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984, 264 с.

5. Туаева Ж. Д., "Многомерная математическая модель сейсмики с памятью", *Исследования по дифференц. уравнениям и мат. моделированию. Владикавказ: ВНЦ РАН*, 2008, 297–306.

6. Дурдиев Д. К., "Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении", *Сиб. журн. индустр. матем.*, **12**:3 (2009), 28–40.

7. Яхно В. Г., *Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости*, Наука, Новосибирск, 1990, 304 с.

# The one-dimensional inverse problem for the equation of viscoelasticity in a bounded domain.

© **J. Sh. Safarov** [2]

**Abstract.** One-dimensional integro-differential equation, which arises in the theory of viscoelasticity with density $\rho = \rho(x)$ and Lame coefficients $\mu = \mu(x)$, $\lambda = \lambda(x)$ is considered. This problem is studied in a bounded domain with respect to $x$, exactly on segment $[0, l]$. The initial conditions are zero. The boundary conditions are a function of the stress at the left end of segment $[0, l]$ in the form of a concentrated source of perturbation, and on the right - zero. For the direct problem we study the inverse problem of determining the kernel belonging to the integral term of the equation, for supplementary information about the function of the displacement at $x = 0$. The inverse problem is replaced by an equivalent system of integral equations for the unknown functions. To the system in the space of continuous functions with weighted norms, the principle of contraction mappings is applied. Theorems global unique solvability and stability of the solution of the inverse problem are proved.

**Key Words:** inverse problem, equation of viscoelasticity, the kernel of the integral, integro-differential equation, delta function, stress function

[2] Programmer 1 category Center of Information Technologies, Tashkent University of Information Technologies, Tashkent; j.safarov65@mail.ru.

УДК 517.9

# Об одном классе локально приводимых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде однородных векторных полиномов

© П. А. Шаманаев [1]

**Аннотация.** В статье получено расширение класса локально приводимых нелинейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с возмущениями в виде однородных векторных полиномов к линейным системам с постоянной матрицей. Метод доказательства основан на построении нелинейного ляпуновского преобразования, связывающего соответствующие решения линейной и нелинейной систем. Доказательство существования нелинейного ляпуновского преобразования основано на применении теоремы о неподвижной точки оператора, в частности принципа сжимающих отображений. Используя полученные в статье достаточные условия продолжимости решений вправо на бесконечный полуинтервал и влево на конечный интервал, а так же оценки норм решений нелинейных систем, показано, что нелинейный оператор, на основе которого построено нелинейное ляпуновское преобразование является оператором сжатия. Рассмотрен пример нелинейного дифференциального уравнения, для которого достаточные условия локальной приводимости являются необходимыми.

**Ключевые слова:** локальная приводимость, нелинейные ляпуновские преобразования, нелинейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, оператор сжатия, неподвижная точка оператора, продолжимость решений.

## 1. Введение

Для линейных систем дифференциальных уравнений понятие приводимости введено в знаменитой работе А.М.Ляпунова "Общая задача об устойчивости движения"[1]. В случае нелинейных систем дифференциальных уравнений понятие приводимости будем понимать в смысле определения Е.В.Воскресенского, приведенного в работе [2].

Рассмотрим множество всех систем дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, а вектор-функция $f(t,x)$ такая, что

$$f \in \mathbb{C}^{(k,l)}(\mathcal{T} \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), k \geq 0,\, l \geq 1,\ \mathcal{T} = [T, +\infty),\ f(t,0) \equiv 0. \tag{1.2}$$

Не ограничивая общности будем считать $T \geq 0$.

Предположим, что у систем вида (1.1) существует совокупность решений, определенных при всех $t \geq T$, причем эти решения заполняют некоторую область $D$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$D = \Big\{(t,x)\ :\ t \in \mathcal{T},\ x \in X_t,\ X_t \subseteq \mathbb{R}^n\Big\},$$

где $X_t\ (t \in \mathcal{T})$ – области, содержащие окрестность нуля, причем существует шар $S_p \subset \mathbb{R}^n$, фиксированного радиуса $p > 0$, такой, что $S_p \subset X_t$ при всех $t \in \mathcal{T}$.

[1] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарева, г. Саранск; korspa@yandex.ru

Если у системы вида (1.1) решения $x(t:t_0,x_0)$, где $(t_0,x_0)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^n$, определены при всех $t\geq T$, то множество всех систем дифференциальных уравнений вида (1.1) обозначим символом $\mathbf{\Xi}$ [2], [3].

Если же у системы вида (1.1) существует совокупность решений $x(t:t_0,x_0)$, определенных при всех $t\geq T$, лишь только при $(t_0,x_0)\in D$, то множество всех систем дифференциальных уравнений вида (1.1) обозначим символом $\mathbf{\Omega}$.

Очевидно, что если $X_t=\mathbb{R}^n$ при всех $t\in\mathcal{T}$, то в этом случае $D=\mathcal{T}\times\mathbb{R}^n$. Откуда следует, что для любых $(t_0,x_0)\in\mathcal{T}\times\mathbb{R}^n$ все решения систем из множества $\mathbf{\Omega}$ определены при всех $t\geq T$. Следовательно, множества $\mathbf{\Omega}$ и $\mathbf{\Xi}$ систем дифференциальных уравнений совпадают. В общем случае $\mathbf{\Xi}\subseteq\mathbf{\Omega}$.

Рассмотрим преобразование $x=\varphi(t,y)$ из ляпуновской группы $(\mathbf{LG},\mathbf{\Xi})$ (см. [2]) на множестве $\mathbf{\Omega}$. При каждом фиксированном $t\in\mathcal{T}$ это преобразование представляет собой взаимно однозначное отображение

$$x=\varphi_t(y),\quad x,\,y\in\mathbb{R}^n.$$

Так как отображение $\varphi_t$ является взаимно однозначным отображением пространства $\mathbb{R}^n$ на себя, то

$$x=\varphi_t(y),\quad y\in V_t,\quad x\in U_t=\varphi_t\big(V_t\big),\tag{1.3}$$

(где $V_t\subset\mathbb{R}^n$ – область, содержащая окрестность нуля) также является взаимно однозначным отображением области $V_t$ на область $U_t$.

В работе [9] введено определение локальной приводимости систем дифференциальных уравнений. Дополним его следующим образом

**Определение 1.1.** *Две системы из множества $\mathbf{\Omega}$ назовем локально приводимыми, если существует преобразование $\varphi\in(\mathbf{LG},\mathbf{\Xi})$ такое, что при каждом фиксированном $t\in\mathcal{T}$ диффеоморфизм*

$$\varphi_t:V_t\mapsto U_t,\tag{1.4}$$

*(здесь, $X_t\supset V_t$, $U_t$ – области, содержащие окрестности нуля, причем существует шар $S_p\subset\mathbb{R}^n$ фиксированного радиуса $p>0$, такой, что $S_p\subset V_t$, $U_t$ при всех $t\in\mathcal{T}$), переводит точки $y\in V_t$, принадлежащие решениям одной системы, в соответствующие точки $x\in U_t$ другой системы.*

**Замечание 1.1.** *Пусть $X_t=\mathbb{R}^n$ при всех $t\in\mathcal{T}$, и кроме этого, $V_t$ и $U_t$ при всех $t\in\mathcal{T}$ также совпадают со всем пространством $\mathbb{R}^n$ Тогда, если две системы дифференциальных уравнений являются локально приводимыми согласно определению (1.1.), то, все решения одной системы переводятся преобразованием $\varphi\in(\mathbf{LG},\mathbf{\Xi})$ в решения другой системы, а это означает, что эти системы являются приводимыми в смысле работ* [2], [3].

**Замечание 1.2.** *Если $\mathbf{\Omega}$ является множеством всех линейных систем дифференциальных уравнений, то из локальной приводимости двух систем из $\mathbf{\Omega}$ следует их приводимость по Ляпунову.*

В работах [4], [5] и [9] получены достаточные условия приводимости нелинейных систем дифференциальных уравнений. Достаточные условия локальной приводимости нелинейных систем дифференциальных уравнений приведены в работах [9], [10]–[14].

## 2. Постановка задачи о локальной приводимости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений из $\mathbf{\Omega}$ вида

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P(t,x), \tag{2.1}$$

где $P(t,x)$ – однородный векторный полином степени $q \geq 1$ относительно $x$, причем вектор-функция $P(t,x)$ является непрерывной по $t$ ($t \in \mathcal{T}$). Применяя обозначения из работы [6], получим

$$P(t,x) = \begin{pmatrix} P_1^{(q)}(t,x) \\ \dots \\ P_n^{(q)}(t,x) \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

$$P_i^{(q)}(t,x) = \sum_{|p|=q} \psi_p^{(i)}(t) x^p, \qquad i = 1, \dots, n, \tag{2.3}$$

здесь $x^p = x_1^{p_1} \dots x_n^{p_n}$, $\psi_p^{(i)}(t) = \psi_{p_1,\dots,p_n}^{(i)}(t)$, $|p| = p_1 + \dots + p_n$, $p = (p_1, \dots, p_n)$, $p_i \in \mathbb{N}_0$, $\mathbb{N}_0$ – множество неотрицательных целых чисел.

Предположим, что справедливы оценки

$$|\psi_p^{(i)}(t)| \leq \psi(t) \leq C \quad \forall \ t \geq T, \quad i = 1, \dots, n; \quad |p| = q,$$

где $C \in R$.

Ставится задача о локальной приводимости системы дифференциальных уравнений (2.1) к линейной системе

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \tag{2.4}$$

где $y \in \mathbb{R}^n$, $A$ – постоянная $(n \times n)$ – матрица.

Введем следующие обозначения: $\Lambda$ — максимальное число из вещественных частей собственных значений матрицы $A$; $\lambda$ — минимальное число из вещественных частей собственных значений матрицы $A$; $m_1 + 1$ — максимальный порядок жордановой клетки матрицы $A$, соответсвующий собственному значению, вещественная часть которого равна $\lambda$; $m_2 + 1$ — максимальный порядок жордановой клетки матрицы $A$, соответсвующий собственному значению, вещественная часть которого равна $\Lambda$.

Пусть $Y(t-s)$ — матрица Коши линейной системы (3.2), нормированная в нуле. Тогда для нее справедливы оценки [7, с.302]

$$||Y(t-s)|| \leq K_1 e^{\Lambda(t-s)} \rho^{m_2}(t-s) \qquad t \geq s, \tag{2.5}$$

$$\|Y(t-s)\| \leq K_2 e^{\lambda(t-s)} \rho^{m_1}(t-s) \qquad t \leq s, \tag{2.6}$$

где $K$ – константа;

$$\rho^\beta(t) = \begin{cases} 1 & \text{если } |\,t\,| < 1, \\ |\,t\,|^\beta & \text{если} |\,t\,| \geq 1. \end{cases} \tag{2.7}$$

где $\beta$ — целое неотрицательное число.

## 3. Достаточные условия локальной приводимости

Сформулируем достаточные условия, которые позволяют получить более широкий класс систем вида (2.1), обладающие продолжимыми решениями вправо на полуинтервал $[t_0, +\infty)$, по сравнению с условиями леммы 2.1 работы [10].

**Лемма 3.1.** *Пусть при* $\Lambda < 0$ *выполняется условие*

$$|t^{q\,m_2}\psi(t)| \le d_1 \quad \forall\, t \ge T, \tag{3.1}$$

*а при* $\Lambda \ge 0$ *сходится интеграл*

$$\int\limits_T^{+\infty} e^{(q-1)\Lambda\tau}\tau^{qm_2}\psi(\tau)d\tau. \tag{3.2}$$

*Тогда решения* $x(t\!:\!t_0, x_0)$ *системы (2.1), начальные данные которых* $(t_0, x_0) \in D_1$, *где*

$$D_1 = \{(t,v):\ (q-1)K_1||v||^{q-1} \int\limits_t^{+\infty} e^{(q-1)\Lambda(\tau-t)}\tau^{qm_2}\psi(\tau)d\tau < 1\}, \tag{3.3}$$

*продолжимы вправо при всех* $t \ge t_0$, *причем для них справедлива оценка*

$$\|x(t\!:\!t_0, x_0)\| \le K_{D_1}e^{\Lambda(t-t_0)}\rho^{m_2}(t-t_0)||x_0||, \qquad t \ge t_0. \tag{3.4}$$

*где*

$$K_{D_1} = \frac{1}{\left[1-(q-1)K_1||v||^{q-1}\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{(q-1)\Lambda(\tau-t_0)}\tau^{qm_2}\psi(\tau)d\tau\right]^{q-1}}.$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 2.1 из работы [10]

**Лемма 3.2.** *Пусть* $0 < \lambda < \Lambda < q\lambda$. *Тогда решения* $x(t\!:\!t_0, x_0)$ *системы (2.1), начальные данные которых* $(t_0, x_0) \in D_2$, *где*

$$D_2 = \{(t,v):\ (q-1)K_2||v||^{q-1} \int\limits_T^{t} e^{(q-1)\lambda(\tau-t)}\tau^{qm_1}\psi(\tau)d\tau < 1\}, \tag{3.5}$$

*продолжимы влево при всех* $t \le t_0$, *причем для них справедлива оценка*

$$\|x(t\!:\!t_0, x_0)\| \le K_{D_2}e^{\lambda(t-t_0)}\rho^{m_1}(t-t_0)||x_0||, \qquad t \le t_0. \tag{3.6}$$

*где*

$$K_{D_2} = \frac{1}{\left[1-(q-1)K_2||v||^{q-1}\int\limits_{T}^{t_0} e^{(q-1)\lambda(\tau-t_0)}\tau^{qm_1}\psi(\tau)d\tau\right]^{q-1}}.$$

Доказательство. Запишем решение $x(t:t_0,x_0)$ системы (2.1) в интегральной форме

$$x(t)=Y(t-t_0)x_0-\int\limits_t^{t_0}Y(t-s)P(s,x(s))ds,\quad t\le t_0. \tag{3.7}$$

Учитывая оценку (2.6), получим

$$\begin{aligned}\|x(t:t_0,x_0)\| &\le K_2e^{\lambda(t-t_0)}\rho^{m_1}(t-t_0)||x_0||+\\ &+ K_2\int\limits_t^{t_0}e^{\lambda(t-\tau)}\rho^{m_1}(t-\tau)\psi(\tau)\,\|x(\tau:t_0,x_0)\|^q\,d\tau.\end{aligned} \tag{3.8}$$

Преобразуем неравенство (3.8) следующим образом

$$\|x(t:t_0,x_0)\|\,e^{-\lambda(t-t_0)}\frac{1}{\rho^{m_1}(t-t_0)}\le K_2||x_0||+$$

$$+K_2\int\limits_t^{t_0}e^{(q-1)\lambda(\tau-t_0)}\rho^{qm_1}(\tau-t_0)\psi(\tau)\left[||x(\tau:t_0,x_0)||e^{-\lambda(\tau-t_0)}\frac{1}{\rho^{m_1}(\tau-t_0)}\right]^q d\tau. \tag{3.9}$$

Вводя вспомогательную функцию

$$\xi(t)=\|x(t:t_0,x_0))\|\,e^{-\lambda(t-t_0)}\frac{1}{\rho^{m_1}(t-t_0)}, \tag{3.10}$$

и делая замену в неравенстве (3.9), получим

$$\xi(t)\le K_2||\xi_0||+K_2\int\limits_t^{t_0}e^{(q-1)\lambda(\tau-t_0)}\tau^{qm_1}\psi(\tau)[\xi(\tau)]^q d\tau,\quad t\le t_0.$$

Далее, проводя рассуждения аналогично доказательству леммы Бихари ([8, с.112]) в случае $t\le t_0$ и полагая в обозначениях работы [8] $\Phi(u)=u^m$, получим

$$\xi(t)\le K_{D_2}\xi_0,\quad t\le t_0.$$

Делая обратную замену по формуле (3.10), получим оценку (3.6). Лемма 3.2. доказана.

В работе [10] приведены достаточные условия локальной приводимости систем (2.1) и (3.2), требующие при $q\Lambda-\lambda<0$ выполнения условия

$$t^{m_1+q\,m_2}\psi(t)\to 0\quad t\to+\infty, \tag{3.11}$$

а при $q\Lambda-\lambda\ge 0$ сходимость интеграла

$$\int\limits_T^{+\infty}e^{(q\Lambda-\lambda)s}s^{m_1+qm_2}\psi(s)ds. \tag{3.12}$$

Сформулируем достаточные условия, позволяющие получить более широкий класс локально приводимых систем вида (2.1).

**Теорема 3.1.** *Пусть справедливы все условия лемм 3.1. и 3.2. Тогда, для того чтобы системы (2.1) и (3.2) были локально приводимыми достаточно выполнения одного из условий*

*1) при* $q\Lambda < \lambda \leq \Lambda < 0$ *справедлива оценка*

$$|t^{m_1+q\,m_2}\psi(t)| \leq C_1 < \frac{\lambda - q\Lambda}{K_2} \quad \forall\ t \geq T, \tag{3.13}$$

*2) при* $q\Lambda - \lambda \geq 0$ *и* $\Lambda - q\lambda \geq 0$ *сходится интеграл (3.12),*

*3) при* $0 < \lambda < \Lambda < q\lambda$ *справедлива оценка*

$$|t^{qm_1+m_2}\psi(t)| \leq C_2 < \frac{q\lambda - \Lambda}{K_1 C_2} \quad \forall\ t \geq T. \tag{3.14}$$

Доказательство. В случае выполнения условия 2), доказательство проводится аналогично рассуждениям работы [10].

Пусть справедливо условие 1) $q\Lambda < \lambda \leq \Lambda < 0$.

Определим вектор-функцию $\varphi_0(s,t,v)$ следующим образом

$$\varphi_0(s,t,v) = \begin{cases} x(s:t,v), & \text{при } \ ||v|| < R(t) \\ x\left(s:t, \dfrac{v}{||v||}R(t)\right), & \text{при } \ ||v|| \geq R(t), \end{cases} \tag{3.15}$$

где

$$R(t) = \left[\frac{-\Lambda}{K_1 d_1}\right]^{q-1} e^{\Lambda t}.$$

Из определения множества $D_1$ в лемме 3.1. следует, что

$$\varphi_0(s,t,v) = x(s:t,v), \qquad \text{если } \ (t,v) \in D_1. \tag{3.16}$$

Применим принцип линейного включения [7, с.557] к разности решений $x^{(1)}(t:t_0,u)$ и $x^{(2)}(t:t_0,v)$ системы (2.1). Учитывая оценку (3.4), получим

$$\|x^{(1)}(t:t_0,u) - x^{(2)}(t:t_0,v)\| \leq K_2 e^{\Lambda(t-t_0)}\rho^{m_2}(t-t_0)||u-v||, \qquad t \geq t_0. \tag{3.17}$$

Тогда вектор-функция $\varphi_0(s,t,v)$, определенная по формуле (3.15), удовлетворяет условию Липшица по переменной $v$ во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ [7, с.555]

$$||\varphi_0(s,t,v) - \varphi_0(s,t,u)|| \leq K_2 e^{\Lambda(t-t_0)}\rho^{m_2}(t-t_0)||u-v||, \qquad t \geq t_0, \quad \forall\, u,\, v \in \mathbb{R}^n. \tag{3.18}$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $t$ рассмотрим оператор

$$\Phi v = -\int\limits_t^{+\infty} Y(t-s)P(s,\varphi_0(s,t,v))ds, \tag{3.19}$$

где $\varphi_0$ – определен по формуле (3.15).

Покажем, что оператор $\Phi$ является оператором сжатия в $\mathbb{R}^n$. Пусть $u$, $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда, учитывая условие 1) теоремы и (3.18), получим

$$||\Phi u - \Phi v|| \leq K_2 e^{(\lambda - q\Lambda)t} \int\limits_t^{+\infty} e^{(q\Lambda-\lambda)s} s^{m_1+qm_2}\psi(s)ds||u-v||.$$

Учитывая оценку (3.13), получим

$$||\Phi u - \Phi v|| \le \theta_1 ||u - v||, \quad \theta_1 = \frac{K_2 C_1}{\lambda - q\Lambda} < 1, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим случай 3) $0 < \lambda \le \Lambda < q\lambda$.

Определим вектор-функцию $\varphi_0(s,t,v)$ по формуле (3.15), где

$$R(t) = \left(\frac{\lambda}{K_2}\right)^{\frac{1}{q-1}} \left[\int\limits_T^t e^{(q-1)\lambda(\tau - t)} \tau^{qm_1} \psi(\tau) d\tau\right]^{-\frac{1}{q-1}}.$$

Из определения множества $D_2$ в лемме 3.2. следует, что

$$\varphi_0(s,t,v) = x(s:t,v), \qquad \text{если} \;\; (t,v) \in D_2.$$

В пространстве $\mathbb{R}^n$ при каждом фиксированном $t$ рассмотрим оператор

$$\Phi v = -\int\limits_T^t Y(t-s) P(s, \varphi_0(s,t,v)) ds. \tag{3.20}$$

Покажем, что оператор $\Phi$ является оператором сжатия в $\mathbb{R}^n$. Пусть $u$, $v \in \mathbb{R}^n$. Тогда, учитывая условие 3) теоремы и (3.18), получим

$$||\Phi u - \Phi v|| \le K_1 e^{(\Lambda - q\lambda)t} \int\limits_T^t e^{(q\lambda - \Lambda)s} s^{qm_1 + m_2} \psi(s) ds ||u - v||.$$

Учитывая оценку (3.14), получим

$$||\Phi u - \Phi v|| \le \theta_2 ||u - v||, \quad \theta_2 = \frac{K_1 C_2}{q\lambda - \Lambda} < 1, \quad \forall\, u, v \in \mathbb{R}^n.$$

Следовательно, оператор $\Phi$ является оператором сжатия в $\mathbb{R}^n$. Кроме того, оператор $\Phi$ переводит $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$.

Так как $\mathbb{R}^n$ — банахово пространство, то все условия теоремы п.10.1 [7, с.506] выполнены, и следовательно, при любом $u \in \mathbb{R}^n$ уравнение

$$v = u + \Phi v \tag{3.21}$$

имеет в $\mathbb{R}^n$ единственное решение и оно может быть получено методом последовательных приближений, начинающихся с любого элемента $v^{(0)} \in \mathbb{R}^n$.

Полагая $L = I - \Phi$, где $I$ — тождественный оператор в $\mathbb{R}^n$, запишем уравнение (3.21) в виде

$$Lv = u.$$

Так как оно имеет единственное решение при любом $u \in \mathbb{R}^n$, то существует [7] обратный оператор $L^{-1}$ такой, что

$$L^{-1} u = v.$$

Положим

$$\varphi(t,v) \equiv Lv \qquad \forall\; t \ge T, \tag{3.22}$$

$$\varphi^{-1}(t,u) \equiv L^{-1}u \qquad \forall\ t \geq T. \tag{3.23}$$

Следовательно, преобразование $\varphi$ при каждом фиксированном $t \geq T$ является взаимно-однозначным отображением [7], причем

$$\|\varphi(t,u)\| \leq c_1\|u\|, \quad u \in \mathbb{R}^n, t \geq T.$$

$$\|\varphi^{-1}(t,v)\| \leq c_2\|v\|, \quad v \in \mathbb{R}^n, t \geq T.$$

Кроме этого, преобразования $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ являются непрерывными по первой и непрерывно-дифференцируемыми по второй переменным [9].

Заметим, что преобразование $y = \varphi(t,x)$ при $(t,x) \in D_1$ в случае 1) и $(t,x) \in D_2$ в случае 3) устанавливает взаимно-однозначное соответствие между решениями систем (2.1) и (3.2).

Таким образом, преобразования (3.22) и (3.23) удовлетворяют определению 1.1 и является ляпуновскими. Следовательно, системы (2.1) и (3.2) являются локально приводимы. Теорема 3.1 доказана.

## 4. Пример локально приводимого дифференциального уравнения

**Пример 4.1.** *Рассмотрим дифференциальное уравнение*

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x + \psi(t)x^q, \quad t \geq 0, \tag{4.1}$$

*где* $x \in R$, $q \geq 2$, $\alpha$ *– вещественный параметр,* $\psi(t)$ *– скалярная функция, непрерывная по* $t \in [0,+\infty)$, $0 < \psi(t) \leq C$ *при всех* $t \geq 0$, $C$ *– константа.*

Решение задачи Коши с начальным условием $x(t_0) = x_0$ для уравнения (4.1) имеет вид

$$x(t:t_0,x_0) = \frac{x_0\, e^{\alpha\,(t-t_0)}}{\left[1-(q-1)x_0^{q-1}\int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\,(q-1)(s-t_0)}\psi(s)ds\right]^{\frac{1}{q-1}}} \tag{4.2}$$

Из формулы (4.2) следует, что существуют как продолжимые, так и непродолжимые решения вправо на полуинтервал $[t_0,+\infty)$. Для того, чтобы решения уравнения (4.1) были продолжимы вправо на полуинтервал $[t_0,+\infty)$, необходимо и достаточно, что бы выполнялось условие

$$1-(q-1)x_0^{q-1}\int\limits_{t_0}^{t} e^{\alpha\,(q-1)(s-t_0)}\psi(s)ds > 0, \quad \forall\ t \geq t_0. \tag{4.3}$$

Из условия (4.3), следует, что для продолжимости вправо решений при всех $t \geq t_0$, необходимо и достаточно, что бы начальные данные $(t_0,x_0)$ удовлетворяли условию

$$(q-1)x_0^{q-1}\int\limits_{t_0}^{+\infty} e^{\alpha\,(q-1)(s-t_0)}\psi(s)ds < 1. \tag{4.4}$$

В предположении справедливости условия (4.4), исследуем на локальную приводимость уравнение (4.1) к уравнению

$$\frac{dy}{dt} = \alpha y, \tag{4.5}$$

Для этого проверим выполнимость условий леммы 3.1. и теоремы 3.1.

Для уравнения (4.1) найдем $\Lambda = \lambda = \alpha$, $m_1 = m_2 = 0$. Сравнивая условие (4.4) с условиями (3.1), (3.3) и (3.3) леммы 3.1., заключаем, что условия леммы выполняются и являются как достаточными, так и необходимыми, для существования продолжимых решений вправо на полуинтервал $[t_0, +\infty)$ дифференциального уравнения (4.1).

Для проверки условий теоремы рассмотрим отдельно случаи когда $\alpha < 0$, $\alpha = 0$ и $\alpha > 0$.

Пусть $\alpha < 0$. Этот случай соответствует условию 1) $q\Lambda < \lambda \leq \Lambda < 0$ теоремы, причем оценка (3.13) принимает вид

$$|\psi(t)| \leq C_1 < -(q-1)\alpha \quad \forall\, t \geq T, \tag{4.6}$$

Следовательно, для локальной приводимости дифференциальных уравнений (4.1) и (4.5) достаточно выполнения оценки (4.6).

Пусть $\alpha = 0$. Этот случай соответствует условию 2) $\lambda \leq 0 \leq \Lambda < q\Lambda$ и интеграл (3.12) принимает вид

$$\int\limits_T^{+\infty} \psi(s)ds. \tag{4.7}$$

Тогда, для локальной приводимости дифференциальных уравнений (4.1) и (4.5) при всех $q \geq 2$ достаточно сходимости интеграла (4.7).

Пусть $\alpha > 0$. Этот случай так же соответствует условию 2) теоремы и интеграл (3.12) принимает вид

$$\int\limits_T^{+\infty} e^{\alpha\,(q-1)s}\psi(s)ds. \tag{4.8}$$

Следовательно, при условии сходимости интеграла (4.8) дифференциальные уравнения (4.1) и (4.5) являются локально приводимыми при всех $q \geq 2$ .

## Список литературы


1. А. М. Ляпунов, *Общая задача об устойчивости движения*, ОНТИ, Л.; М., 1935, 336 с.

2. Е. В. Воскресенский, “О приводимости нелинейных дифференциальных уравнений”, *Изв. вузов. Математика.*, 1998, № 9, 33–37.

3. Е. В. Воскресенский, “Ляпуновские группы преобразований”, *Изв. вузов. Математика.*, 1994, № 7, 13–19.

4. Е. В. Воскресенский, “Группы преобразований Ляпунова”, *Укр. мат. журн.*, **45**:12 (1993), 1595–1600.

5. Е. В. Воскресенский, *Асимптотические методы: теория и приложения*, СВМО, Саранск, 2000, 300 с.

6. Ю. Н. Бибиков, *Курс обыкновенных дифференциальных уравнений*, Высш. шк., М., 1991, 303 с.

7. Б. Ф. Былов, Р. Э. Виноград, Д. М. Гробман, В. В. Немыцкий, *Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости*, Наука, М., 1966, 576 с.

8. Б. П. Демидович, *Лекции по математической теории устойчивости*, Наука, М., 1967, 472 с.

9. П. А. Шаманаев, *Ляпуновские преобразования и устойчивость движения*, дисс. ... канд. физ.-матем. наук, Саранск, 1997, 16 с.

10. П. А. Шаманаев, "О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущением в виде однородных векторных полиномов", *Труды Средневолжского математического общества*, **5**:1 (2003), 145–151.

11. П. А. Шаманаев, "О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями высших порядков", *Труды Средневолжского математического общества*, **6**:1 (2004), 232-237.

12. П. А. Шаманаев, "О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями в виде однородных векторных полиномов к линейным системам с переменной матрицей", *Труды Средневолжского математического общества*, **7**:1 (2005), 256-262..

13. П. А. Шаманаев, "О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями порядка выше первого к линейным системам с переменной матрицей", *Труды Средневолжского математического общества*, **8**:1 (2006), 330-336.

14. П. А. Шаманаев, "О локальной приводимости систем дифференциальных уравнений с возмущениями в виде векторных полиномов к линейным системам с постоянной матрицей", *Труды Средневолжского математического общества*, **9**:1 (2007), 259-264.

# On a class of locally reducible nonlinear systems of ordinary differential equations with perturbations in the form of homogeneous vector polynomials

© **P. A. Shamanaev**[2]

**Abstract.** The article received a extension of the class is locally reducible nonlinear systems of ordinary differential equations with perturbations in the form of homogeneous vector polynomials to linear systems with constant matrix. The method of proof is based on constructing a nonlinear Lyapunov transformation, linking the corresponding solutions of linear and nonlinear systems. The proof of the existence of a nonlinear Lyapunov transformation based on the application of the theorem on a fixed point operator, in particular the contraction mapping principle. Using the information in the article sufficient conditions of extendibility decisions right on the endless pollinterval and left on the final interval, as well as estimates for the norms of solutions of nonlinear systems, the author showed that the nonlinear operator based nonlinear Lyapunov transformation is an operator of compression. The article considers the example of a nonlinear differential equation, for which sufficient conditions for local reducibility are necessary.

**Key Words:** local reducibility, nonlinear Lyapounov transformations, nonlinear systems of ordinary differential equations, compression operator, a fixed point of the operator, extendibility of solutions

[2] Associate Professor of the Department of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics, Ogarev Mordovia State University, Saransk; korspa@yandex.ru

УДК 517.968

# О разрешимости одной смешанной задачи для интегро-дифференциального уравнения фредгольма четвертого порядка с вырожденным ядром

© Т. К. Юлдашев [1]

**Аннотация.** Изучена однозначная разрешимость смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром. Разработан метод вырожденного ядра для случая интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в частных производных четвертого порядка. Отличительной чертой данной работы является то, что удалось получить приближенную формулу вычисления решения рассматриваемой смешанной задачи. Нелинейная смешанная задача сведена к системе интегральных уравнений со сложной правой частью. Система интегральных уравнений рассмотрена как система алгебраических уравнений при выполнении определенного условия. Найден метод решения системы алгебраических уравнений, позволяющий выявлять неизвестных функций в правой части данной системы. Получено нелинейное интегральное уравнение типа Вольтерра второго рода по второму аргументу. Доказана теорема об однозначной разрешимости смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром. При этом использован метод последовательных приближений.

**Ключевые слова:** смешанная задача, интегро-дифференциальное уравнение, уравнение типа Фредгольма, вырожденное ядро, алгебраическая система уравнений, однозначная разрешимость

## 1. Постановка задачи

Рассматривается в области $\Omega \equiv \Omega_T \times \Omega_l$ интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма вида

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x\, \partial t^3} - \lambda \int\limits_0^T K(t,s)u(s,x)ds =$$

$$= p_1(t) \cdot \int\limits_0^T u(s,x)ds + p_2(t) \cdot f\left(x, \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(s,y)u(s,y)dyds\right) \tag{1.1}$$

со смешанными условиями

$$u(0,x) = \varphi_1(x),\ u(T,x) = \varphi_2(x),\ u_t(0,x) = \varphi_3(x),\ x \in \Omega_l, \tag{1.2}$$

$$u(t,0) = \psi(t),\ t \in \Omega_T, \tag{1.3}$$

где $p_k(t) \in C(\Omega_T)$, $k = 1,2$, $f(x,\gamma) \in C(\Omega_l) \times R)$, $\varphi_k(x) \in C^1(\Omega_l)$, $k = \overline{1,3}$, $K(t,s) = \sum\limits_{i=1}^n a_i(t)b_i(s)$, $0 < a_i(t), b_i(s) \in C(\Omega_T)$, $\psi(t) \in C(\Omega_T)$, $\Omega_T \equiv [0,T]$, $\Omega_l \equiv [0,l]$, $\lambda$ – параметр, $0 < \int\limits_0^T \int\limits_0^l |H(t,x)|dxdt < \infty$.

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru

В настоящей работе предлагается методика изучения смешанной задачи для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром.

Под решением смешанной задачи (1.1) – (1.3) понимаем функцию $u(t,x) \in C^{3,1}(\Omega)$, удовлетворяющую уравнению (1.1) и смешанным условиям (1.2) и (1.3).

Отметим, что математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, часто приводит к изучению смешанных задач для уравнений, не имеющих аналогов в классической математической физике. Теория смешанных задач для уравнений в частных производных в силу ее прикладной важности в настоящее время является одним из важнейших разделов теории дифференциальных уравнений. Представляют большой интерес с точки зрения физических приложений дифференциальные уравнения в частных производных высоких порядков [1].

Изучению уравнений в частных производных четвертого порядка посвящено большое количество работ (см., напр. [2] – [7]). В частности, в работе [3] изучены вопросы полной классификации и приведения к каноническому виду для общего случая дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка. Здесь получены конкретные типы уравнений в частных производных четвертого порядка, которые представляют интерес для теоретического исследования. Отсюда мы заключаем, что следует исследовать уравнению (1.1). Данная работа является дальнейшим развитием и совершенствованием методики работ [8] – [15].

## 2. Сведение задачу (1.1) – (1.3) к интегральному уравнению

С помощью обозначения

$$c_i(x) = \int_0^T b_i(s)u(s,x)ds \tag{2.1}$$

уравнение (1.1) перепишется в следующем виде

$$\frac{\partial^4 u(t,x)}{\partial x\, \partial t^3} = \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t)\cdot c_i(x) + p_1(t)\cdot \int_0^T u(s,x)ds + p_2(t)\cdot f(x,\gamma),$$

где $\gamma = \int\limits_0^T \int\limits_0^l H(s,y)u(s,y)dyds$ является неизвестной константой.

Путем интегрирования по $x$ из последнего равенства получаем

$$\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} = E(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i(t) \int_0^x c_i(y)dy + p_1(t)\cdot \int_0^x \int_0^T u(s,y)dsdy + p_2(t)\cdot \int_0^x f(y,\gamma)dy, \tag{2.2}$$

где $E(t)$ – непрерывная на отрезке $\Omega_T$ функция, которая будет определено ниже.

Использование обобщенной функции Грина с учетом условий (1.2) в (2.2) дает

$$u(t,x) = h(t,x) + \int_0^T G(t,s)E(s)ds +$$

$$+\lambda\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\int\limits_0^x c_i(y)dy+q_1(t)\cdot\int\limits_0^x\int\limits_0^T u(s,y)dsdy+q_2(t)\cdot\int\limits_0^x f(y,\gamma)dy, \tag{2.3}$$

где

$$h(t,x)=\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)\varphi_1(x)+\frac{t^2}{T^2}\varphi_2(x)+\left(t-\frac{t^2}{T^2}\right)\varphi_3(x),$$

$$G(t,s)=\begin{cases}\frac{sT-ts}{2T^2}(ts+sT-2tT), 0\le s\le t,\\ -\frac{t^2}{2T^2}(T-s)^2, t\le s\le T,\end{cases}$$

$$\mu_i(t)=\int\limits_0^T G(t,s)a_i(s)ds,\ q_k(t)=\int\limits_0^T G(t,s)p_k(s)ds, k=1,2.$$

Учет условия (1.3) в (2.2) дает интегральное уравнение Фредгольма первого рода относительно функции $E(t)$

$$\int\limits_0^T G(t,s)E(s)ds=g(t), \tag{2.4}$$

где $g(t)=\psi(t)-h(t,0)$.

По характеру постановки задач: $\psi(0)=\varphi_1(0)$, то есть $\psi(0)=h(0,0)$. Предположим, что выполняется следующее условие

$$\psi(t)=h(t,0),\ t\in\Omega_T. \tag{2.5}$$

Тогда уравнение (2.4) примет вид

$$\int\limits_0^T G(t,s)E(s)ds=0,$$

то есть из правой части (2.3) исчезнет второе слагаемое:

$$u(t,x)=h(t,x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)\int\limits_0^x c_i(y)dy+q_1(t)\cdot\int\limits_0^x\int\limits_0^T u(s,y)dsdy+q_2(t)\cdot\int\limits_0^x f(y,\gamma)dy. \tag{2.6}$$

Отметим, что условие (2.5) выполнимое. Если $\varphi_2(0)=\varphi_3(0)=0$, то оно еще упрощается

$$\psi(t)=\left(1-\frac{t^2}{T^2}\right)\varphi_1(0).$$

Ясно, что $E(t)=0,\ t\in(0,T)$. Подставляя (2.6) в (2.1), имеем

$$c_i(x)=\int\limits_0^T b_i(s)\,[h(s,x)+$$

$$+\lambda\sum_{j=1}^{n}\mu_j(s)\int\limits_0^x c_j(y)dy+q_1(s)\cdot\int\limits_0^x\int\limits_0^T u(\theta,y)d\theta dy+q_2(s)\cdot\int\limits_0^x f(y,\gamma)dy\Bigg]\,ds. \tag{2.7}$$

Примем обозначения

$$A_{ij} = \int\limits_0^T b_i(s)\mu_j(s)ds,$$

$$B_i(x) = \int\limits_0^T b_i(s)\left[h(s,x) + q_1(s)\cdot\int\limits_0^x\int\limits_0^T u(\theta,y)d\theta dy + q_2(s)\cdot\int\limits_0^x f(y,\gamma)dy\right]ds. \qquad (2.8)$$

Тогда из (2.7) получаем относительно $c_i(x)$ следующую систему интегральных уравнений (СИУ)

$$c_i(x) - \lambda\sum_{j=1}^n A_{ij}\int\limits_0^x c_j(y)dy = B_i(x),\ i=\overline{1,n}. \qquad (2.9)$$

СИУ (2.9) решим при выполнении следующего условия

$$c_i(x) = -\frac{1}{\omega}c_i'(x), 0<\omega = const,\ i=\overline{1,n}. \qquad (2.10)$$

Из условия (2.1) с учетом начального условия (1.3) получим

$$c_i(0) = \int\limits_0^T b_i(s)\cdot\psi(s)ds.$$

С учетом последнего подставим (2.10) в СИУ (2.9). Тогда получим относительно $c_i(x)$ следующую систему алгебраических уравнений (САУ)

$$c_i(x) + \frac{\lambda}{\omega}\sum_{j=1}^n A_{ij}\cdot c_j(x) = \overline{B}_i(x),\ i=\overline{1,n}. \qquad (2.11)$$

где

$$\overline{B}_i(x) = B_i(x) + \frac{\lambda}{\omega}\sum_{j=1}^n A_{ij}\int\limits_0^T b_i(s)\cdot\psi(s)ds. \qquad (2.12)$$

Система алгебраических уравнений (2.11) однозначно разрешима при любых конечных $\overline{B}_i(x)$, если выполняется следующее условие

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\frac{\lambda}{\omega}A_{11} & \frac{\lambda}{\omega}A_{12} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{1n} \\ \frac{\lambda}{\omega}A_{21} & 1+\frac{\lambda}{\omega}A_{22} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\lambda}{\omega}A_{n1} & \frac{\lambda}{\omega}A_{n2} & \dots & 1+\frac{\lambda}{\omega}A_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (2.13)$$

Определитель $\Delta(\lambda)$ в (2.13) есть многочлен относительно $\lambda$ степени не выше $n$. Уравнение $\Delta(\lambda)=0$ имеет не более $n$ различных корней. Эти корни являются собственными числами ядра интегро-дифференциального уравнения (1.1). Другие значения $\lambda$ являются регулярными, при которых условие (2.13) выполняется. Для регулярных значений $\lambda$ система (2.11) имеет единственное решение при любой конечной и ненулевой правой части. В настоящей работе для таких регулярных значений параметра $\lambda$ устанавливается однозначная разрешимость поставленной смешанной задачи (1.1) – (1.3).

Сначала решения САУ (2.11) записываем в виде

$$c_i(x) = \frac{\Delta_i(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)},\ i = \overline{1, n}, \tag{2.14}$$

где

$$\Delta_i(\lambda, x) = \begin{vmatrix} 1+\frac{\lambda}{\omega}A_{11} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{1(i-1)} & \overline{B}_1(x) & \frac{\lambda}{\omega}A_{1(i+1)} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{1n} \\ \frac{\lambda}{\omega}A_{21} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{2(i-1)} & \overline{B}_2(x) & \frac{\lambda}{\omega}A_{2(i+1)} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\lambda}{\omega}A_{n1} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{n(i-1)} & \overline{B}_n(x) & \frac{\lambda}{\omega}A_{n(i+1)} & \dots & 1+\frac{\lambda}{\omega}A_{nn} \end{vmatrix}.$$

Среди элементов определителей $\Delta_i(\lambda, x)$ находятся функции $\overline{B}_i(x)$. В свою очередь, функции $\overline{B}_i(x)$ содержать в себя неизвестную функцию $u(t, x)$ и в составе функции $f(x, \gamma)$. В самом деле, эта неизвестная функция находилась в правой части САУ (2.11). Чтобы вывести её из знака определителя выражение в (2.12) с учетом (2.8) запишем в следующем виде

$$\overline{B}_i(x) = B_{1i}(x) + \int_0^x \int_0^T u(\theta, y)d\theta dy \cdot B_{2i} + \int_0^x f(y, \gamma)dy \cdot B_{3i},$$

где $B_{1i}(x) = \int_0^T h(s, x) \cdot b_i(s)ds + \frac{\lambda}{\omega}\sum_{j=1}^n A_{ij}\int_0^T b_i(s) \cdot \psi(s)ds$,

$B_{k+1i} = \int_0^T q_k(s) \cdot b_i(s)ds$, $k = 1, 2$.

В этом случае, согласно свойству определителя имеем

$$\Delta_i(\lambda, x) = \Delta_{1i}(\lambda, x) + \int_0^x \int_0^T u(\theta, y)d\theta dy \cdot \Delta_{2i}(\lambda) + \int_0^x f(y, \gamma)dy \cdot \Delta_{3i}(\lambda),$$

где

$$\Delta_{ki}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1+\frac{\lambda}{\omega}A_{11} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{1(i-1)} & \overline{B}_{k1} & \frac{\lambda}{\omega}A_{1(i+1)} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{1n} \\ \frac{\lambda}{\omega}A_{21} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{2(i-1)} & \overline{B}_{k2} & \frac{\lambda}{\omega}A_{2(i+1)} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\lambda}{\omega}A_{n1} & \dots & \frac{\lambda}{\omega}A_{n(i-1)} & \overline{B}_{kn} & \frac{\lambda}{\omega}A_{n(i+1)} & \dots & 1+\frac{\lambda}{\omega}A_{nn} \end{vmatrix},$$

$k = \overline{1, 3}$, $\Delta_{1i}(\lambda) = \Delta_{1i}(\lambda, x)$, $\overline{B}_{1i} = \overline{B}_{1i}(x)$.

Тогда (2.14) приобретает вид

$$c_i(x) = \frac{\Delta_{1i}(\lambda, x)}{\Delta(\lambda)} + \int_0^x \int_0^T u(\theta, y)d\theta dy \cdot \frac{\Delta_{2i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)} + \int_0^x f(y, \gamma)dy\frac{\Delta_{3i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)},\ i = \overline{1, n}. \tag{2.15}$$

Подставляя (2.15) в (2.6), имеем следующее интегральное уравнение

$$u(t, x) = \Phi(t, x) + \int_0^x \left[ q_1(t) \cdot \int_0^x \int_0^T u(s, y)dsdy + q_2(t) \cdot f(y, \gamma) + \right.$$

$$\left. + \alpha_1(t) \cdot \int_0^y \int_0^T u(s, z)dsdz + \alpha_2(t) \cdot \int_0^y f(z, \gamma)dz \right] dy, \tag{2.16}$$

где

$$\Phi(t,x) = h(t,x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \int_0^x \frac{\Delta_{1i}(\lambda, y)}{\Delta(\lambda)} dy,$$

$$\gamma = \int_0^T \int_0^l H(s,\xi) u(s,\xi) d\xi ds, \ \alpha_k(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t) \frac{\Delta_{k+1i}(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \ k = 1, 2.$$

## 3. Теорема об однозначной разрешимости задачи (1.1) – (1.3)

Для произвольной функции $l(t,x) \in C(\Omega)$ расматривается следующая норма

$$\left\| l(t,x \right\|_C = \max \Big\{ \big| l(t,x) \big| : (t,x) \in \Omega \Big\}.$$

**Теорема 3.1.** *Пусть:*

1) *Выполняются условия* (2.5), (2.10) *и* (2.13);

2) $\beta = \max \Big\{ \big| \Phi(t,x) \big| : (t,x) \in \Omega \Big\} < \infty$;

3) $M = \max \left\{ \left| \int_0^x \left[ q_2(t) \cdot f(y,\gamma) + \alpha_2(t) \int_0^y f(z,\gamma) dz \right] dy \right| : (t,x) \in \Omega \right\} < \infty$;

4) $\Big| f(x,\gamma_1) - f(x,\gamma_2) \Big| \le L(x) \Big| \gamma_1 - \gamma_2 \Big|$, $0 < L(x) \in C(\Omega_l)$;

5) $\rho = \delta_2 + \delta_1 \cdot \delta_3 < 1$, *где* $\delta_1 = \int_0^T \int_0^l \Big| H(t,x) \Big| dx dt < \infty$,

$\delta_2 = \max \left\{ \int_0^x |q_1(t) + \alpha_1(t) l| \, dy : (t,x) \in \Omega \right\} < \infty$.

$\delta_3 = \max \left\{ \int_0^x \left| q_2(t) \cdot L(y) + \alpha_2(t) \int_0^y L(z) dz \right| dy : (t,x) \in \Omega \right\} < \infty$.

*Тогда в области* $\Omega$ *существует единственное решение смешанной задачи* (1.1) – (1.3).

Доказательство. Рассмотрим следующий итерационный процесс для уравнения (2.16)

$$u_0(t,x) = 0, \ u_{k+1}(t,x) = \Phi(t,x) +$$

$$+ \int_0^x \left[ q_1(t) \cdot \int_0^T u_k(s,y) ds + \alpha_1(t) \int_0^y \int_0^T u_k(s,z) ds dz \right] dy +$$

$$+ \int_0^x \left[ q_2(t) \cdot f(y,\gamma_k) + \alpha_2(t) \int_0^y f(z,\gamma_k) dz \right] dy, \ k = 0, 1, 2, \dots, \tag{3.1}$$

где $\gamma_k = \int_0^T \int_0^l H(s,\xi) u_k(s,\xi) d\xi ds$.

В силу условий теоремы, из (3.1) получаем следующие оценки

$$\Big\| u_1(t,x) - u_0(t,x) \Big\|_C \le \beta + M, \tag{3.2}$$

$$\Big\| u_{k+1}(t,x) - u_k(t,x) \Big\|_C \le$$

$$\leq \max\left\{\int\limits_0^x \Big[|q_1(t)|\cdot\int\limits_0^T \Big\|u_k(s,y)-u_{k-1}(s,y)\Big\|_C ds+\right.$$

$$\left.+|\alpha_1(t)|\cdot\int\limits_0^y\int\limits_0^T \Big\|u_k(s,z)-u_{k-1}(s,z)\Big\|_C dsdz\Big]dy\ :(t,x)\in\Omega\right\}+$$

$$+\delta_1\max\left\{\int\limits_0^x \Big[|q_2(t)|\cdot L(y)\cdot\Big\|u_k(t,y)-u_{k-1}(t,y)\Big\|_C+\right.$$

$$\left.+|\alpha_2(t)|\int\limits_0^y L(z)\cdot\Big\|u_k(t,z)-u_{k-1}(t,z)\Big\|_C dz\Big]dy\ :(t,x)\in\Omega\right\}\leq$$

$$\leq\rho\cdot\Big\|u_k(t,x)-u_{k-1}(t,x)\Big\|_C. \tag{3.3}$$

Из оценок (3.2) и (3.3) следует, что оператор в правой части (2.16) является сжимающим. Следовательно, в области $\Omega$ смешанная задача (1.1) – (1.3) имеет единственное решение.

## 4. Заключение

В заключении отметим, что теория интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма в частных производных в настоящее время является одним из важнейших разделов современной теории уравнений математической физики. Рассмотрено нелинейное интегро-дифференциальное уравнение Фредгольма в частных производных четвертого порядка, для решения которого не применим метод Фурье разделения переменных. Доказана теорема об однозначной разрешимости смешанной задачи (1) – (3). Главной особенностью этого уравнения, которая позволяет свести данное уравнение к более простому и удобному для вычисления виду, является то, что ядро вырожденное. Данная работа может быть применена при теоретических исследованиях по интегро-дифференциальным уравнениям математической физики.

## Список литературы

1. Алгазин С. Д., Кийко И. А., *Флаттер пластин и оболочек*, Наука, М., 2006, 248 с.

2. Абзалимов Р. Р., Саляхова Е. В., “Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений четвертого порядка с разделенными краевыми условиями”, *Известия вузов. Математика*, 2008, № 11, 3 – 11.

3. Джураев Т. Д., Сопуев А., *К теории дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка*, Фан, Ташкент, 2000, 144 с.

4. Мамедов И. Г., “Фундаментальное решение начально-краевой задачи для псевдопараболического уравнения четвертого порядка с негладкими коэффициентами”, *Владикав. мат. журнал*, **12** (2010), 17 – 32.

5. Мукминов Ф. Х., Биккулов И. М., “О стабилизации нормы решения одной смешанной задачи для параболических уравнений 4-го и 6-го порядков в неограниченной области”, *Мат. сборник*, **195**:3 (2004), 115 – 142.

6. Смирнов М. М., *Модельные уравнения смешанного типа четвертого порядка*, ЛГУ, Л., 1972, 123 с.

7. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для нелинейного уравнения в частных производных четвертого порядка с отражающим отклонением”, *Вестник Южно-УралГУ. Серия: Математика. Механика. Физика*, 2011, № 10 (227), 40 – 48.

8. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журн. СВМО*, **14**:2 (2012), 137 – 142.

9. Юлдашев Т. К., “О разрешимости смешанной задачи для линейного параболо-гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма”, *Журн. СВМО*, **15**:3 (2013), 158 – 163.

10. Юлдашев Т. К., “Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка”, *Вестн. СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **34**:1 (2014), 56 – 65.

11. Юлдашев Т. К., “Двойная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения Фредгольма эллиптического типа”, *Вестн. СамГТУ. Серия: Физ.-мат. науки*, **35**:2 (2014), 39 – 49.

12. Юлдашев Т. К., Шабадиков К. Х., “Обратная задача для гиперболического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма”, *Таврическ. вестн. информатики и математики*, **24**:1 (2014), 73 – 81.

13. Юлдашев Т. К., Лоскутова А. Г., “Обратная задача для эллиптического интегро-дифференциального уравнения Фредгольма”, *Журн. СВМО*, **16**:3 (2014), 87 – 93.

14. Юлдашев Т. К., “Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных третьего порядка”, *Изв. вузов. Математика*, 2015, № 9, 74 – 79.

15. Юлдашев Т. К., Новоселов О. В., “Об одном интегро-дифференциальном уравнении Фредгольма в частных производных четвертого порядка с вырожденным ядром”, *Журн. СВМО*, **17**:1 (2015), 128 – 134.

# On solvability of a mixed problem for fredholm integro-differential equation of fourth order with degenerate kernel

© T. K. Yuldashev[2]

**Abstract.** It is studying the one value solvability of a mixed value problem for a nonlinear partial Fredholm integro-differential equation of the fourth order with degenerate kernel. It is developed the method of degenerate kernel to the case of partial Fredholm integro-differential equations of the fourth order. A distinctive feature of this work is that it was possible to obtain an approximate calculation formula for solving the considering mixed value problem. The nonlinear mixed value problem is reduced to a system of integral equations with complex right-hand side. The system of integral equations is considered as a system of algebraic equations under certain condition. It is founded a method for solving the system of algebraic equations that can be identify unknown functions in the right-hand side of the system. It is obtained the nonlinear Volterra integral equation of the second kind with respect to the second argument. It is proved the theorem of one value solvability of the mixed value problem for a nonlinear partial Fredholm integro-differential equation of the fourth order with degenerate kernel. In this it is used the method of successive approximations.

**Key Words:** mixed value problem, integro-differential equation, Fredholm type equation. degenerate kernel, system of algebraic equations, one valued solvability

[2] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru

Прикладная математика и механика

*УДК 519.63*

# Об использовании WENO-ограничителя в неявной схеме для метода Галеркина с разрывными базисными функциями

© **Р. В. Жалнин** [1], **А. В. Максимкин** [2], **В. Ф. Масягин** [3], **А. И. Пантюшин** [4], **Е. Е. Пескова** [5]

**Аннотация.** В работе развивается методика на основе неявной схемы для разрывного метода Галеркина. Предложено использование WENO-ограничителя для подавления осцилляций решния на разрывах. На примере решения задачи «blast waves» показана состоятельность предложенной методики.

**Ключевые слова:** разрывный метод Галеркина, неявная схема, уравнения газовой динамики, WENO-ограничитель

## 1. Введение

Данная работа являет продолжением работ [1, 2], где исследовалась неявная методика для разрывного метода Галеркина, основанная на представлении системы сеточных уравнений в «дельта-форме». В данной работе исследуется методика, основанная на решении нелинейной системы сеточных уравнений методом Ньютона. Для подавления нефизических осцилляций решения вблизи разрывов предлагается использование WENO-ограничителя [3].

## 2. Неявная схема для разрывного метода Галеркина

Рассмотрим одномерную систему уравнений газовой динамики в переменных Эйлера

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \tag{2.1}$$

[1] Заведующий кафедрой прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; zhrv@mrsu.ru.

[2] Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; maksimkinav@appmath.mrsu.ru.

[3] Преподаватель кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; masyaginvf@appmath.mrsu.ru.

[4] Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; pantyushinai@appmath.mrsu.ru.

[5] Ассистент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; peskovaee@appmath.mrsu.ru.

где

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho E \end{pmatrix}, \; F(U) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix},$$

$$E = \epsilon + \frac{u^2}{2}, \; p = \rho\epsilon(\gamma - 1).$$

Здесь $\rho$ – плотность, $p$ – давление, $u$ – скорость, $\epsilon$ – удельная внутренняя энергия, $\gamma$ – показатель аддиабаты. Система (2.1) рассматривается вместе с соответствующими начальными и граничными условиями.

Рассмотрим неявную схему для метода Галеркина с разрывными базисными функциями [4], предложенную в работе [1]:

$$M\frac{U^{n+1} - U^n}{\tau} - L(U^{n+1}) = 0, \tag{2.2}$$

где $U^n$ – вектор, составленный из коэффициентов разложения вектора $U$ по базису пространства полиномов, в котором ищется решение [1].

Полученная нелинейная система (2.2) решается методом Ньютона. При этом на каждом шаге метода Ньютона необходимо решать систему линейных алгебраических уравнений

$$\left(\frac{1}{\tau}M - \left(\frac{\partial L}{\partial U}\right)_s\right)(\Delta U)_s = -\left(M\frac{(U^{n+1})_s - U^n}{\tau} - L((U^{n+1})_s)\right), \; s = 0, 1, \ldots \tag{2.3}$$

относительно $(\Delta U)_s = (U^{n+1})_{s+1} - (U^{n+1})_s$, где $(U^{n+1})_0 = U^n$. Для решения системы (2.3) использовался решатель GMRES из библиотеки HYPRE [5, 6].

Обозначим решение системы (2.2), полученное в результате ньютоновских итераций, как $U^*$. Вследствие того, что построенная схема обладает порядком точности выше первого, необходимо использовать ограничители для подавления осцилляций решения на разрывах. Поэтому значение $U^{n+1}$ на новом временном слое находится следующим образом:

$$U^{n+1} = \Lambda\Pi_h U^*, \tag{2.4}$$

где $\Lambda\Pi_h$ – ограничитель.

## 3. WENO-ограничитель

В качестве ограничителя будем использовать WENO-ограничитель, описанный в работе [3]. Для его применения необходимо выделить так называемые «плохие» ячейки. Процедура их определения следующая.

Вычислим среднее значение решения в каждой ячейке сетки

$$\bar{u}_i = \frac{1}{\Delta x}\int\limits_{I_i} u dx \tag{3.1}$$

и введем в рассмотрение переменные

$$\tilde{u}_i = u^-_{i+1/2} - \bar{u}_i, \; \tilde{\tilde{u}}_i = \bar{u}_i - u^+_{i+1/2}. \tag{3.2}$$

Затем, обозначив

$$\Delta_+\bar{u}_i = \bar{u}_{i+1} - \bar{u}_i, \; \Delta_-\bar{u}_i = \bar{u}_i - \bar{u}_{i-1}, \tag{3.3}$$

вычислим

$$\tilde{u}_i^m = minmod(\tilde{u}_i, \Delta_+\bar{u}_i, \Delta_-\bar{u}_i),\ \tilde{\tilde{u}}_i^m = minmod(\tilde{\tilde{u}}_i, \Delta_+\bar{u}_i, \Delta_-\bar{u}_i), \tag{3.4}$$

где

$$minmod(a_1, a_2, a_3) = \begin{cases} s\min(a_1, a_2, a_3), & \text{если } s = sign(a_1) = sign(a_2) = sign(a_3); \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \tag{3.5}$$

Далее, если $\tilde{u}_i^m \neq \tilde{u}_i$ или $\tilde{\tilde{u}}_i^m \neq \tilde{\tilde{u}}_i$, то ячейка с номером $i$ помечается, как «плохая».

После определения ячеек, требующих применения ограничителя, выполняется следующая процедура [3].

Предположим, что для ячейки $I_i$ требуется применение ограничителя. Рассмотрим полиномы $p_{i-1}(x)$, $p_i(x)$, $p_{i+1}(x)$, определяющие решение уравнения (2.1) в ячейках $I_{i-1}$, $I_i$, $I_{i+1}$, соответственно. Положим

$$\bar{\bar{p}}_{i-1} = \frac{1}{\Delta x_i}\int\limits_{I_i} p_{i-1}(x)dx,\ \bar{\bar{p}}_i = \frac{1}{\Delta x_i}\int\limits_{I_i} p_i(x)dx,\ \bar{\bar{p}}_{i+1} = \frac{1}{\Delta x_i}\int\limits_{I_i} p_{i+1}(x)dx. \tag{3.6}$$

И в качестве нового полинома в ячейке $I_i$ возьмем полином

$$p_i^N(x) = \Lambda\Pi_h p_i(x) = \omega_0\check{p}_{i-1} + \omega_1 p_i + \omega_2\check{p}_{i+1}, \tag{3.7}$$

где

$$\check{p}_{i-1} = p_{i-1}(x) - \bar{\bar{p}}_{i-1} + \bar{\bar{p}}_i,\ \check{p}_{i+1} = p_{i+1}(x) - \bar{\bar{p}}_{i+1} + \bar{\bar{p}}_i, \tag{3.8}$$

а весовые коэффициенты удовлетворяют условию $\omega_0 + \omega_1 + \omega_2 = 1$.

Данные весовые коэффициенты вычисляются согласно классической схеме WENO [7, 8]:

$$\omega_j = \frac{\alpha_j}{\sum\limits_{k=0}^{2}\alpha_k}, \quad j = 0, 1, 2, \tag{3.9}$$

где

$$\alpha_k = \frac{\gamma_k}{(10^{-6} + \beta_k)^2}, \quad k = 0, 1, 2. \tag{3.10}$$

Аналогично работам [7, 8] $\beta_k$ будем называть индикатором гладкости и вычислять следующим образом:

$$\beta_k = \sum_{l=0}^{2}\int\limits_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} \Delta x_{i-1+k}^{2l-1}\left(\frac{\partial^l p_k(x)}{\partial x^l}\right)^2 dx. \tag{3.11}$$

Возникает вопрос выбора коэффициентов $\gamma_0$, $\gamma_1$, $\gamma_2$. Исходя из описанной выше схемы на них не накладывается никаких дополнительных ограничений. В работе [3] предлагается использовать следующие значения:

$$\gamma_0 = 0.001,\ \gamma_1 = 0.998,\ \gamma_2 = 0.001, \tag{3.12}$$

гарантирующие сохранение исходного порядка точности и отсутствие осцилляций на разрывах. В данной работе использованы такие же значения.

## 4. Задача о взаимодействии двух ударных волн (blast waves)

В качестве тестовой задачи была выбрана задача о взаимодействии двух ударных волн с начальными данными [9]:

$$U(x,0) = \begin{cases} U_L, & 0 \le x < 0.1, \\ U_M, & 0.1 \le x < 0.9, \\ U_R, & 0.9 \le x \le 1, \end{cases} \tag{4.1}$$

где

$$\begin{aligned} &\rho_L = \rho_M = \rho_R = 1, \\ &v_L = v_M = v_R = 0, \\ &p_L = 10^3, p_M = 10^{-2}, p_R = 10^2, \end{aligned}$$

а на концах отрезка [0,1] задавались граничные условия отражения.

На рисунке 4.1 представлены результаты расчетов на сетках с числом ячеек 200, 400, 800 (численные потоки вычислялись как точное решение задачи Римана на границе между ячейками [10]). Для сравнения, в качестве точного решения рассматривались результаты расчета методом Годунова на сетке с числом ячеек 20000. В таблице 1 представлены погрешности и порядки сходимости. Погрешность решения оценивалась в следующей норме:

$$||U_h - U_T||_{L_1} = \int\limits_a^b |U_h - U_T|\, dx,$$

где $U_h$ – вычисленные значения сеточной функции, $U_T$ – точные значения искомого решения.

Как видно из графика и таблицы, при измельчении сетки наблюдается сходимость численного решения к точному, порядок сходимости выше первого.

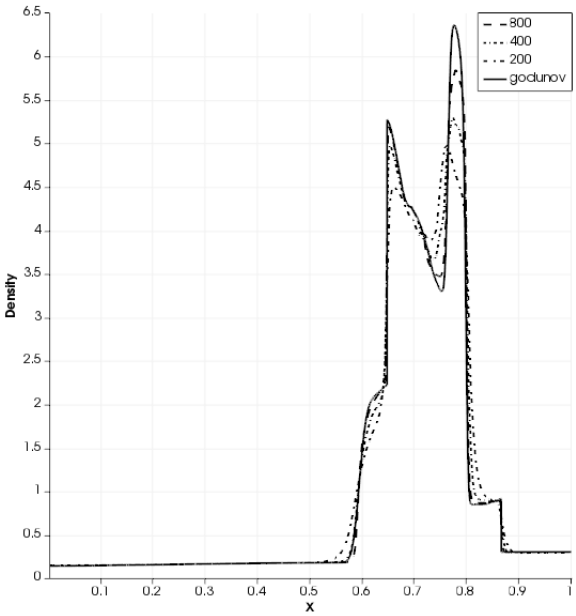



Рисунок **4.1**

На рисунке 4.2 представлены графики плотности полученные при расчетах с разными способами вычисления численных потоков (точное решение задачи Римана, потоки Куранта–Изахсона–Рисса, потоки Лакса-Фридрихса).

Таблица 1: Порядок сходимости (N – количество ячеек сетки)

| $N$ | $\|\|\cdot\|\|_{L_1}$ | Order, $\|\|\cdot\|\|_{L_1}$ |
|---|---|---|
| 100 | 0.2882971 | – |
| 200 | 0.2130803 | 0.4362 |
| 400 | 0.1173680 | 0.8604 |
| 800 | 0.05131574 | 1.1936 |

Рисунок **4.2**

Во всех расчетах для решателя GMRES размерность пространства Крылова задавалась равной 20.

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что предложенная неявная схема с использованием WENO-ограничителя состоятельна и демонстрирует хорошую точность.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 14-01-31260 мол_а).*

# Список литературы


1. Р. В. Жалнин, А. В. Максимкин, В. Ф. Масягин, А. И. Пантюшин, Е. Е. Пескова, В. Д. Сальников, В. Ф. Тишкин, “Исследование порядка точности неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения задач газовой динамики”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **17**:1 (2015), 48 – 54.

2. Р. В. Жалнин, В. Ф. Масягин, В. Д. Сальников, Е. Е. Пескова, “Решение задач газовой динамики с использованием неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями”, *Аналитические и численные методы моделирования естетвенно-научных и социальных проблем: сб. ст. IX Междунар. науч.-техн. конф.* (Россия, г. Пенза, 28–31 октября 2014 г.), Изд-во ПГУ, Пенза, 2014, 100 – 104.

3. X. Zhong, C.-W. Shu, “A simple weighted essentially nonoscillatory limiter for Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods”, *Journal of Computational Physics*, **232** (2013), 397 – 415.

4. B. Cockburn, “An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection - Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations”, *Lecture Notes in Mathematics*, **1697** (1998), 151 – 268.

5. E. Chow, A. J. Cleary, R. D. Falgout, “Design of the hypre Preconditioner Library”, *Proc. of the SIAM Workshop on Object Oriented Methods for Inter-operable Scientific and Engineering Computing* (Workshop held at the IBM T.J. Watson Research Center, Yorktown Heights, NY, October 21-23, 1998), SIAM, Philadelphia, PA, 1998.

6. R. D. Falgout, J. E. Jones, U. M. Yang, “The Design and Implementation of hypre, a Library of Parallel High Performance Preconditioners”, *Numerical Solution of Partial Differential Equations on Parallel Computers, A.M. Bruaset and A. Tveito, eds.* (UCRL-JRNL-205459), Springer-Verlag, 2006, 267 – 294.

7. G. Jiang, C.-W. Shu, “Efficient implementation of weighted ENO schemes.”, *Journal of Computational Physics*, **126** (1995), 202 – 228.

8. Р. В. Жалнин, Н. В. Змитренко, М. Е. Ладонкина, В. Ф. Тишкин, “Численное моделирование развития неустойчивости Рихтмайера–Мешкова с использованием схем высокого порядка точности”, *Матем. моделирование*, **19**:10 (2007), 61 – 66.

9. P. Woodward, P. Colella, “The numerical simulation of two-dimensional fluid flow with strong shocks”, *Journal of Computational Physics*, **5** (1984), 836 – 848.

10. С. К. Годунов, “Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики”, *Матем. сб.*, **47(89)**:3 (1959), 271 – 306.

# About the use of WENO-limiter in the implicit scheme for the Discontinuous Galerkin method

© **R. V. Zhalnin**[6], **A. V. Maksimkin**[7], **V. F. Masyagin**[8], **A. I. Pantyushin**[9], **E. E. Peskova**[10]

**Abstract.** The paper studies a technique based on the implicit scheme for discontinuous Galerkin method. WENO-limiter used to suppress oscillations on discontinuities. The «blast waves» problem solved for showing the viability of the proposed method.

**Key Words:** DG, implicit schemes, gas dynamic equations, WENO-limiter

[6] Head of of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovian State University, Saransk; zhrv@mrsu.ru.

[7] Postgraduate Student of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovian State University, Saransk; maksimkinav@appmath.mrsu.ru.

[8] Assistaint Lecturer of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovian State University, Saransk; masyaginvf@appmath.mrsu.ru.

[9] Postgraduate Student of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovian State University, Saransk; pantyushinai@appmath.mrsu.ru.

[10] Assistaint Lecturer of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Department, Ogarev Mordovian State University, Saransk; peskovaee@appmath.mrsu.ru.

Математическое моделирование и информатика

УДК 519.6

# Математическая модель анализа 2-фазного равновесия смеси и ее реализация в информационной системе

© Е. В. Бирюкова[1], И. М. Губайдуллин[2] К. Ф. Коледина[3]

**Аннотация.** Данная работа посвящена математическому моделированию анализа парожидкостного равновесия многокомпонентных углеводородных смесей. Целью работы является разработка математической модели описания фазового состояния систем природных углеводородов. Реализована информационно-вычислительная система для расчета, включающая в себя определение составов и количественного соотношения паровой и жидкой фаз при заданных давлении, температуре и общем составе смеси. База данных включает в себя множества взаимосвязанных факторов установления термодинамического равновесия, последовательные и параллельные алгоритмы расчета парожидкостного равновесия в многокомпонентных углеводородных системах, содержащих воду. Проведен анализ существующих экспериментальных исследований, посвященных моделированию термодинамических свойств нефтей и природных газов в пористой среде. Проведены вычисления для экспериментальных данных из литературы.

**Ключевые слова:** анализ парожидкостного равновесия, информационно-вычислительная система, многокомпонентные углеводородные системы

## 1. Введение

Методы прогнозирования и анализа фазовых превращений природных углеводородов базируются на комплексном использовании результатов измерений, лабораторных исследований и математического описания соответствующих процессов. При проектировании разработки и эксплуатации месторождений нефти и газа математическое моделирование фазового состояния систем природных углеводородов включает в себя определение составов и количественного соотношения равновесных паровой и жидкой фаз при заданных давлении, температуре и общем составе смеси [1]. Данная работа основана на разработанном математическом описании анализа фазового состояния систем природных углеводородов [2].

## 2. Описание математической модели

При заданных термобарических условиях, необходимо определить мольные доли и составы жидкой и газовой фаз, на которые разделится исходная смесь по модели:

[1] Студентка факультета математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет, г. Уфа; lenka.birukova@mail.ru

[2] Ст. науч. сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; irekmars@mail.ru

[3] Научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; koledinakamila@mail.com

$$\begin{cases} f_{i,L} - f_{i,V} = 0, i = \overline{1,N} \\ x_i * L + i_i * V - z_i = 0, i = \overline{1,N} \\ \sum_{i=1}^{N} y_i - 1 = 0 \\ L + V = 1 \end{cases} \tag{2.1}$$

В системе первые $N$ уравнений описывают условия термодинамического равновесия - равенство летучестей компонентов в сосуществующих паровой и жидкой фазах. Следующие $N$ уравнений описывают материальный баланс компонентов в фазах. Летучести компонентов в паровой $f_{i,V}$ и жидкой $f_{i,L}$ фазах рассчитываются на основе известных термодинамических соотношений с использованием уравнений состояния фаз [3].

Для решения задачи была применена разработанная информационно-вычислительная система (ИВС) [2].

Рисунок **2.1**

Информационно-вычислительная система анализа прожидкостного равновесия в многокомпонентных углеводородных системах

Был сформулирован алгоритм расчета равновесия системы пар-жидкость [2]

## 3. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим применение разработанного метода на примере экспериментальных данных из литературы [1]. Данные замеров показали, что в залежи Б начальное давление

равно 59,1 МПа, а температура составляет 125 °С. В таблице 1 представлен компонентный состав исследованного пластового флюида.

Таблица 1. Компонентный состав пластового флюида залежи Б.

| Компонент | Содержание | |
|---|---|---|
| | % мол | % масс |
| Азот | 0,10 | 0,06 |
| Диоксид углерода | 1,81 | 1,71 |
| Метан | 65,82 | 22,73 |
| Этан | 7,41 | 4,80 |
| Пропан | 5,04 | 4,79 |
| изо-Бутан | 1,85 | 2,32 |
| н-Бутан | 1,96 | 2,46 |
| изо-Пентан | 1,23 | 1,91 |
| н-Пентан | 0,86 | 1,34 |
| $C_6$ | 1,74 | 3,22 |
| $C_7$ | 2,19 | 4,72 |
| $C_8$ | 1,38 | 3,40 |
| $C_9$ | 1,51 | 4,18 |
| $C_{10+}$ | 7,10 | 42,37 |
| Всего | 100 | 100 |

Используя разработанный выше алгоритм мы получили результаты, представленные в Таблице 2.

Таблица 2. Состав газовой и жидкой фаз по результатам разработанного алгоритма флюида залежи Б

| Компонент | % мол | |
|---|---|---|
| | Газовая фаза | Жидкая фаза |
| Азот | 0,13 | 0,04 |
| Диоксид углерода | 1,38 | 2,44 |
| Метан | 72,5 | 55,79 |
| Этан | 4,06 | 12,43 |
| Пропан | 1,20 | 10,78 |
| изо-Бутан | 0,22 | 4,28 |
| н-Бутан | 1,77 | 4,63 |
| изо-Пентан | 0,06 | 2,98 |
| $C_6$ | 1,26 | 2,45 |
| $C_7$ | 1,02 | 3,94 |
| $C_8$ | 0,3 | 2,99 |
| $C_9$ | 0,1 | 3,56 |
| $C_{10+}$ | 0,04 | 17,68 |
| Всего | 82,5 | 126,1 |

Результаты будут проанализированы с литературными данными.

## 4. Заключение

Таким образом, в работе реализована математическая модель для расчета парожидкостного равновесия многокомпонентных углеводородных систем, разработана

информационно-вычислительная система анализа равновесия. Методика апробирована на экспериментальных данных из литературных источников.

## Список литературы


1. Брусиловский А.И., “Фазовые превращения при разработке месторождений нефти и газа”, *Грааль*, 2002, 575.

2. Бирюкова Е.В., Коледина К.Ф., “Информационно-вычислительная система анализа парожидкостного равновесия в многокомпонентных углеводородных системах”, *в сборнике: ITIDS+RRS'2014*, 2014, 170-174.

3. Новиков А. А., Чухарева Н.В., “Физико-химические основы процессов транспорта и хранения нефти и газа”, *Учебное пособие*, 2005, 111.

4. Губайдуллин И.М., Линд Ю.Б., Коледина К.Ф., “Методология распараллеливания при решении многопараметрических обратных задач химической кинетики”, *Вычислительные методы и программирование: новые вычислительные технологии*, 2012, № Т. 13 № 2 (26), 28-36.


# Mathematical model analysis of 2-phase equilibrium mixture and its implementation in the information system

© **E. V. Biryukova**[4], **I. M. Gubaydullin**[5], **K. F. Koledina**[6]

**Abstract.** This paper is devoted to mathematical modeling of the vapor-liquid equilibrium analysis of multicomponent hydrocarbon mixtures. The aim is to develop a mathematical model describing the phase of the systems of natural hydrocarbons. Implemented data-processing system to calculate, including the determination of the composition and the quantitative ratio of the vapor and liquid phases at a given pressure, temperature and composition of the total mixture. The database includes a plurality of interconnected factors thermodynamic equilibrium, serial and parallel algorithms for calculating vapor-liquid equilibria in multicomponent hydrocarbon systems containing water. The analysis of existing experimental studies on the modeling of the thermodynamic properties of oil and natural gas in a porous medium. Carried out calculations to experimental data from the literature.

**Key Words:** analysis of the vapor-liquid equilibrium, information computer system, hydrocarbon multi-component system

[4] Student of Department of Mathematics and Information Technologies, Bashkir State University, Ufa; lenka.birukova@mail.ru

[5] Senior Research Associate of Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; koledinakamila@mail.com

[6] Scientific employee of Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; koledinakamila@mail.com

УДК 517.6

# Математическое моделирование реакции синтеза геранилпирофосфата

© О. Ю. Кирьянова[1], И. И. Кирьянов[2], И. М. Губайдуллин[3]

**Аннотация.** Изучение кинетики биологических систем играет основную роль в математическом моделировании процессов, которые протекают в системах с определенной скоростью, в конкретной последовательности. Исследование кинетического поведения сложной системы сводится к построению математической модели, в которой скорости изменения концентраций составных компонентов выражаются через скорости отдельных элементарных реакций, в которых одни элементы превращаются в другие. В данной работе рассматривается теоретическое исследование синтеза геранилпирофосфата. Создана математическая модель, позволяющая представить течение процесса биосинтеза геранилпирофосфата при изменении факторов, влияющих на его протекание.

**Ключевые слова:** геранилпирофосфат, математическое моделирование, мевалоновый путь

## 1. Введение

Сочетание классических методов математического моделирования с бурно развивающимися современными информационными технологиями позволяет не только оптимально управлять химическими процессами, но и также исследовать сложные физико-биологические закономерности, которые невозможно исследовать экспериментальными, натурными опытами. В основе процессов обмена клетки со средой и внутреннего метаболизма лежит сложная сеть организованных определенным образом во времени и пространстве различных реакций. В результате этих процессов изменяются концентрации различных веществ, численность отдельных клеток, биомасса организмов. Основные исходные предпосылки при описании кинетики в биологических системах в общем такие же, как и в химической кинетике.

Математическое описание изменения концентраций участвующих в реакции веществ на основе схем химических превращений представляют собой кинетическую модель [1], [2], которая также включает в себя энергетические показатели отдельных стадий. На основе кинетической модели можно установить реакционную способность любого вещества, в любой момент времени в сложных химических реакциях [3], [4].

Целью настоящей работы является исследование механизма образования геранилпирофосфата (одного из простейших терпеноидов) на основе разработки его кинетической модели, которая включает в себя математическое описание биологических процессов, идентификацию параметров модели.

[1] Аспирант лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа;olga.kiryanova27@gmail.com.

[2] Аспирант лаборатории структурной химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; ilya.lsc@gmail.com

[3] Ст. науч. сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; IrekMars@mail.ru.

## 2. Атомарно-молекулярный и кинетический метод исследования механизмов сложных процессов

Исследование сложного химического механизма основывается на 3 подходах: экспериментальный, атомарно-молекулярный (квантово-химический), кинетический. Кинетический подход применяется для идентификации модели на основе экспериментальных данных. Кинетическая модель – это функциональная зависимость скорости реакции или скорости превращения веществ от условий ее протекания (концентрации реагентов, температуры, давления и др.) [5]. Кинетические уравнения составляются на основе схем реакции. Адекватность модели зависит от схем химических превращений (детализированной схемы). Преодоление энергетического барьера, необходимое для начала реакции, можно рассчитать с помощью квантово-химического расчета. Поэтому перед разработкой кинетических моделей желательно провести квантово-химический расчет. Одной из решаемых задач является оптимизация структуры молекул, которая позволяет изучить структуры молекул и их энергии в свободном состоянии (вакууме). Решение данной задачи заключается в многократном вычислении волновой функции энергии молекулы и вариации структурных параметров для достижения структуры, которая соответствует минимуму полной энергии молекулы. Полученная оптимизированная структура молекулы описывает молекулу в свободном состоянии (в вакууме/разреженном идеальном газе, при температуре абсолютного нуля). Чаще всего оптимизация геометрии приводит в точку локального минимума. Чтобы произошла химическая реакция между двумя частицами (атомами, молекулами, ионами), необходимо их столкновение. Но не каждое столкновение частиц приводит к их взаимодействию. Это происходит лишь в том случае, если частицы сближаются на расстояние, при котором происходит перераспределение электронной плотности. При этом происходит разрушение одних и образование других связей. При образовании химической связи электронная структура получившихся частиц принимает конфигурацию, соответствующую наибольшей энергии связи.

Наименьшая энергия активированных исходных частиц, необходимая для того, чтобы могла произойти реакция, называется энергией активации [6]. Для расчета энергии активации используется уравнение Эйринга-Поляни[7]:

$$k = \frac{k_B \cdot T}{h} \cdot e^{\frac{-\Delta G}{R \cdot T}} \tag{2.1}$$

где $\Delta\ G$ – энергия Гиббса (Дж/моль); $k_B$ – постоянная Больцмана (Дж/К); $h$ постоянная Планка (Дж*с). Данное уравнение можно переписать следующим образом:

$$k = \frac{k_B \cdot T}{h} \cdot e^{\frac{\Delta S}{R}} \cdot e^{\frac{-\Delta H}{R \cdot T}} \tag{2.2}$$

где $k$ – константа скорости реакции ($^{-}1$); $T$ – абсолютная температура (К); $\Delta\ H$ – энтальпия активации (Дж); $R$ – универсальная газовая постоянная (8,31 Дж/(моль*К)); $\Delta\ S$ энтропия активации (Дж/(моль*К)). В данной работе был проведен расчет оптимизированных структур молекул с последующим определением свободной энергии Гиббса отдельно взятой молекулы и реакции в целом.

## 3. Схема химических превращений реакции образования геранилпирофосфата.

Механизм исследуемой реакции образования геранилпирофосфата условно можно разделить на 3 стадии:

1-я стадия – синтез мевалоновой кислоты:

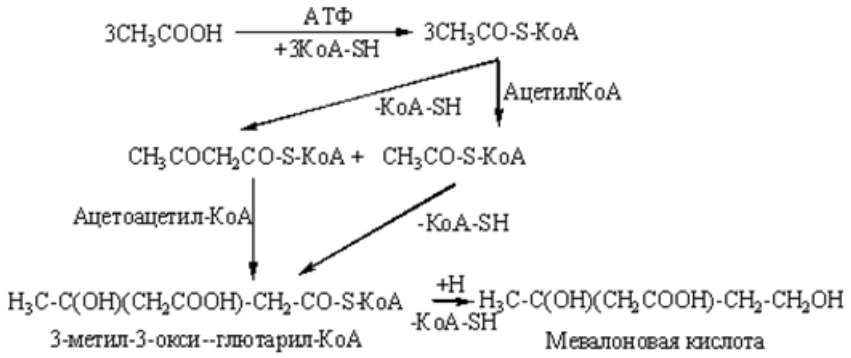



Рисунок **3.1**

Схема синтеза мевалоновой кислоты

2-я стадия - образование изопренового интермедиата (интермедиат - промежуточное химическое соединение, участвующее в синтезе внутри системы):

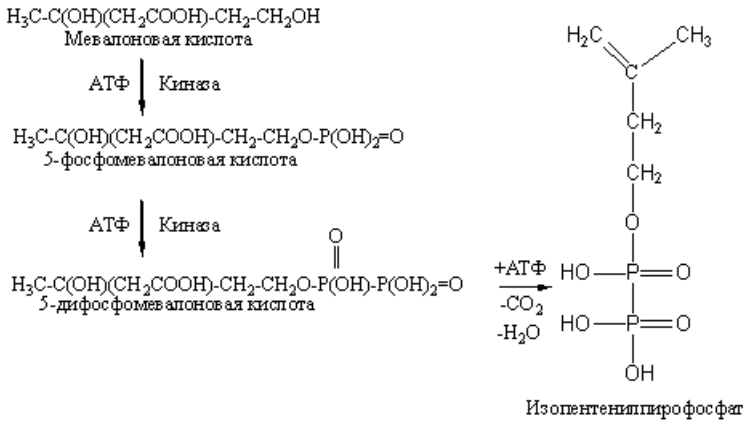



Рисунок **3.2**

Схема образования изопренового интермедиата

3-я стадия - образование ациклического монотерпена:

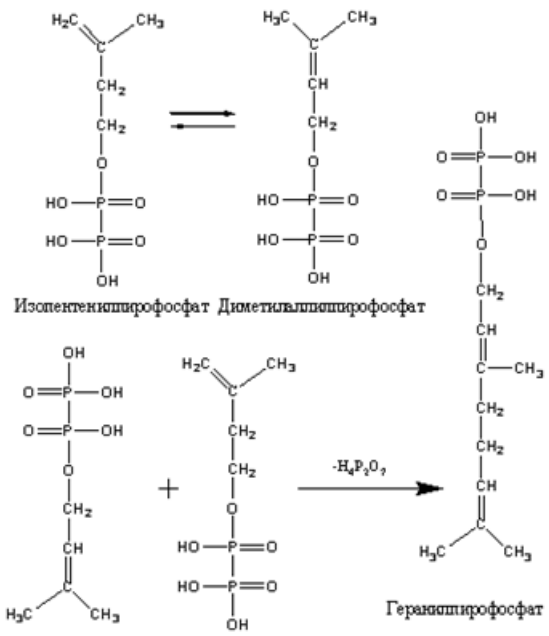



Рисунок **3.3**

Схема образования геранилпирофосфата

С точки зрения химических превращений, уравнения реакции представляются в следующем виде:

1. $C_2H_4O_2 + C_{21}H_{36}O_{16}N_7P_3S \xrightarrow{\text{АТФ}} C_{23}H_{38}O_{17}N_7P_3S + H_2O$
2. $C_{23}H_{38}O_{17}N_7P_3S + C_{23}H_{38}O_{17}N_7P_3S \xrightarrow[\text{Кляйзена}]{\text{конденсация}} C_{21}H_{36}O_{16}N_7P_3S + C_{25}H_{40}O_{18}N_7P_3S$
3. $C_{25}H_{40}O_{18}N_7P_3S + C_{23}H_{38}O_{17}N_7P_3S + H_2O \rightarrow C_{21}H_{36}O_{16}N_7P_3S + C_{27}H_{44}O_{20}N_7P_3S$
4. $C_{27}H_{44}O_{20}N_7P_3S + 4H \cdot C_{21}H_{29}O_{17}N_7P_3 \rightarrow C_{21}H_{36}O_{16}N_7P_3S + C_6H_{12}O_4 + C_{21}H_{29}O_{17}N_7P_3$
5. $C_6H_{12}O_4 + C_{10}H_{16}O_{13}N_5P_3 \xrightarrow{\text{АТФ}} C_6H_{14}O_{10}P_2 + C_{10}H_{14}O_7N_5P$
6. $C_6H_{14}O_{10}P_2 \xrightarrow{\text{НАДФ}} H_2O + CO_2 + C_5H_{12}O_7P_2$
7. $C_5H_{12}O_7P_2 \xrightarrow{\text{АТФ,изомераза}} C_5H_{12}O_7P_2(\text{изомер})$
8. $C_5H_{12}O_7P_2 + C_5H_{12}O_7P_2 \rightarrow C_{10}H_{20}O_7P_2 + H_4P_2O_7$

Рисунок **3.4**

Уравнения химических превращений

где:
$X_1 = C_2\ H_4\ O_2$ (уксусная кислота)
$X_2 = C_{21}\ H_{36}\ O_{16}\ N_7\ P_3\ S$ (кофермент А)(CoA)
$X_3 = C_{23}\ H_{38}\ O_{17}\ N_7\ P_3\ S$ (ацетилкофермент А)(Acetyl-CoA)
$X_4 = H_2\ O$ (вода)
$X_5 = C_{25}\ H_{40}\ O_{18}\ N_7\ P_3\ S$ (ацетоацетил-кофермент А)
$X_6 = C_{27}\ H_{44}\ O_{20}\ N_7\ P_3\ S$ (3-метил-3-окси-глютарил-кофермент А)
$X_7 = C_{21}\ H_{29}\ O_{17}\ N_7\ P_3$ (никотинамидаденининуклеотид фосфат (НАДФ))(NADPH))
$X_8 = C_6\ H_{12}\ O_4$ (мевалоновая кислота)
$X_9 = C_{10}\ H_{16}\ O_{13}\ N_5\ P_3$ (аденозинтрифосфат (АТФ)) (ATP)

$X_{10} = C_{10}\ H_{14}\ O_7\ N_5\ P$ (аденозинмонофосфат (АМФ)) (AMP)
$X_{11} = C\ O_2$ (углекислый газ)
$X_{12} = C_5\ H_{12}\ O_7\ P_2$ (изопентинилпирофосфат) (IPP)
$X_{13} = C_5\ H_{12}\ O_7\ P_2$ (диметилаллилпирофосфат) (DMAPP)
$X_{14} = C_6\ H_{14}\ O_{10}\ P_2$ (дифосфат мевалоновой кислоты)
$X_{15} = C_{10}\ H_{20}\ O_7\ P_2$ (геранилпирофосфат) (GPP)
$X_{16} = H_4\ O_7\ P_2$ (дифосфорная кислота)
$X_{17} = C_{21}\ H_{33}\ O_{17}\ N_7\ P_3$ (никотинамидаденининуклеотид фосфат (НАДФ) с катионами H)

На начальном этапе, более подробно были исследованы 6, 7 и 8 реакции. Рассмотрим реакцию распада дифосфата мевалоновой кислоты под действием АТФ. В механизме образования геранилпирофосфата 6-я стадия. Данная стадия выбрана по причине достаточно простых структур молекулы воды, углекислого газа и изопентилпирофосфата.

$$X_{14} -> X_4 + X_{11} + X_{12} \tag{3.1}$$

Энергия Гиббса веществ, участвующих в реакции:
реакция 6: Дифосфат мевалоновой кислоты ( $X_{14}$ ) - -988.405024 (Хартри/моль)
Вода( $X_4$ ) - -75.329719 (Хартри/моль)
Углекислый газ ( $X_11$ ) - -185.994961 (Хартри/моль)
Изопентилпирофосфат ( $X_12$ ) - -727.068757 (Хартри/моль)
Энергия Гиббса (Хартри/моль) реакции определяется как:

$$\Delta G = (-75.329719 + (-185.9949) + (-727.068757)) - (-988.405024) = 0.021587 \tag{3.2}$$

Переведем полученное значение энергии в ккал/моль:

$$\Delta G = 0.021587 \cdot 627.5095 = 13.546 \tag{3.3}$$

Тогда константа скорости реакции будет равна согласно уравнению :

$$k_6 = \frac{1.380662 \cdot 10^(-23) \cdot 298.15}{6.626176 \cdot 10^(-34)} \cdot e^{\frac{-13/546 \cdot 1000}{1.987 \cdot 298.15}} = 729.33(c^{-1}) \tag{3.4}$$

Ниже представлены свободные энергии реагентов и веществ реакций 7,8.

$$k_7 = 1.06e + 8(c^{-1}) \tag{3.5}$$

$$k_8 = 1.29e + 45(c^{-1}) \tag{3.6}$$

Определив некоторые константы скоростей, (в нашем случае шестой, седьмой и восьмой стадий), и сделав ряд допущений, не искажающих качество исследований, можно перейти непосредственно к решению системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений (задачи Коши), представляющих кинетическую модель реакции синтеза геранилпирофосфата, согласно закону действующих масс.

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = W_1, \\ \frac{dx_2}{dt} = -W_1 + W_2W_3 + W_4, \\ \frac{dx_3}{dt} = W_1 - 2W_2 - W_3, \\ \frac{dx_4}{dt} = W_1 - W_3 + W_6, \\ \frac{dx_5}{dt} = W_2 - W_3, \\ \frac{dx_6}{dt} = W_3 - W_4, \\ \frac{dx_7}{dt} = W_4, \\ \frac{dx_8}{dt} = W_4 - W_5, \\ \frac{dx_9}{dt} = -W_5, \\ \frac{dx_{10}}{dt} = W_5, \\ \frac{dx_{11}}{dt} = W_6, \\ \frac{dx_{12}}{dt} = W_6 - W_7 - W_8, \\ \frac{dx_{13}}{dt} = W_7 - W_8, \\ \frac{dx_{14}}{dt} = W_5 - W_6, \\ \frac{dx_{15}}{dt} = W_8, \\ \frac{dx_{16}}{dt} = W_8, \\ \frac{dx_{17}}{dt} = -W_4 \end{cases} \tag{3.7}$$

$$\begin{cases} W_1 = k_1 \cdot X_1 \cdot X_2, \\ W_2 = k_2 \cdot {X_2}^2, \\ W_3 = k_3 \cdot X_3 \cdot X_4 \cdot X_5, \\ W_4 = k_4 \cdot X_6 \cdot X_{17}, \\ W_5 = k_5 \cdot X_8 \cdot X_9, \\ W_6 = k_6 \cdot X_{14}, \\ W_7 = k_7 \cdot X_12, \\ W_8 = k_8 \cdot X_{12} \cdot X_{13}, \end{cases} \tag{3.8}$$

Начальные данные для задачи Коши: Начальные константы скоростей реакций:

$$k_6(0) = 729.33(c^{-1})$$

$$k_7 = 1.06e^8(c^{-1})$$

$$k_8 = 1.29e^{45}(c^{-1})$$

$$k_i(0) = 1(c^{-1}), i = 1 - 5$$

Начальные концентрации веществ:

$$x_1(0) = 1,$$

$$x_2(0) = 1,$$

$$x_9(0) = 1,$$

$x_{17}(0) = 1$ , остальные $x_(i) = 0$ .

Система была решена в программном комплексе ПА10 с применением библиотеки сверхточных решателей SADEL методом Маничева-Ильинского [8].

## 4. Обсуждение результатов вычислительных экспериментов

На рисунке 4.1 представлен график динамики изменения концентраций веществ $X_1$, $X_3$, $X_6$, $X_9$ с течением времени. Вещества $X_1$, $X_9$ являются исходными в данном процессе, они полностью расходуются в ходе реакции. Обращает на себя тот факт, что $X_9$, прежде чем активно вступать в реакцию проходит индукционный период. Так как $X_9$ вступает в реакцию с веществом $X_8$, которое образуется в результате реакции 4, то можно количественно определить временной интервал образования вещества $X_8$. Индукционный период наблюдается и для продукта $X_{16}$ биологического процесса. До некоторого времени (которое можно количественно установить) вещество $X_3$ является продуктом реакции (стадии) 1, но далее оно полностью расходуется в реакция образования ацетил-кофермента А и 3-метил-3-окси-глютарил-кофермента А. Таким образом, разработав кинетическую модель, можно проследить поведение всех компонентов в ходе биологического процесса: какой из них, в какое время активно вступает в реакцию; когда наступает, активная (максимальная) фаза отдельных стадий; наблюдать весь жизненный цикл биологических соединений. Кинетические кривые изменения биологических соединений качественно согласуется с литературными данными [9].

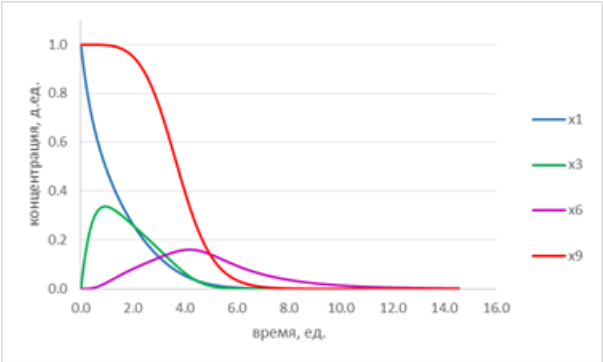



Рисунок **4.1**

Кинетические кривые изменения исходных реагентов и продуктов синтеза геранилпирофосфата

Как видно из рисунка 4.2, в районе 5 секунд прекращается активное изменеие концентрации веществ $X_{10}$, $X_{16}$ и $X_{17}$. Можно считать, что с определенного момента времени, в биологической системе устанавливается равновесное состояние, и введение дополнительного количества веществ не имеет смысла, так как не приведет к изменению процесса.

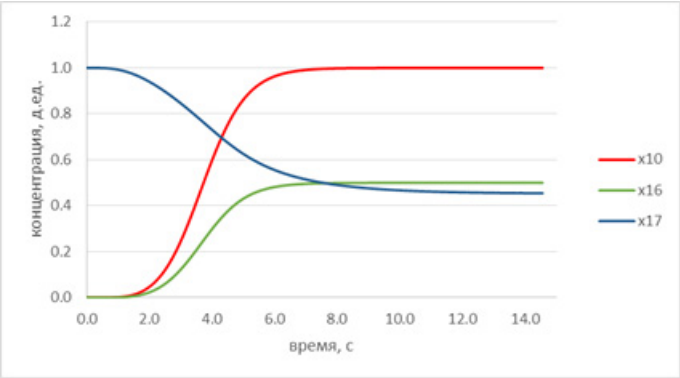



Рисунок **4.2**

Установление стационарного состояния по продуктам синтеза геранилпирофосфата

## 5. Заключение

Исследуемый объект, механизм реакции синтеза геранилпирофосфата представляет собой сложный биологический процесс. Участвующие в реакции биологические соединения имеют сложную химическую структуру. На данный момент, проведены теоретические расчеты констант скоростей реакции 6-8 стадий. Естественно, необходимо рассчитать все оставшиеся константы и определить энергетические параметры для создания адекватной модели реакции.

Разработана кинетическая модель механизма образования геранилпирофосфата. Проведены первые вычислительные эксперименты и сделаны предварительные, важные физико-биологические выводы, которые в дальнейшим требует своего уточнения и добавления. Проведена большая подготовительная работа, для успешного проведения натурного эксперимента и дальнейшего исследования механизмов образования более сложных терпенов, образующихся на основе геранилпирофосфата. Данные результаты позволяют определить области допустимых параметров проведения натурного биологического эксперимента, т.е организации экспериментального подхода - планирование оптимального биологического натурного эксперимента. Проведенные расчеты позволят сэкономить затраты и сократить время исследования механизмов сложных биологических процессов, и в конечном итоге получить оптимальное управление реакций мевалонового пути [10].

## Список литературы

1. Григорьева Н. Г., Джемилев У. М., Кутепов Б. И., Балаев И. В., Губайдуллин И. М., Хазипова А. Н., Галяутдинова Р. Р., “Разработка кинетической модели димеризации $\alpha$-метил-стирола на цеолите типа $Y$”, *Химическая промышленность сегодня*, **9** (2004), 31–36.

2. Gubaydullin I. M., Koledina K. F., Nurislamova L. F., “Kinetic Model of Isolated Reactions of the Catalytic Hydroalumination of Olefins”, *Reaction Kinetics, Mechanisms and Catalysis.*, **DOI: 10.1007/s11144-015-0876-6** (2015).

3. Лаврентьева Ю. С., Губайдуллин И. М., Кадикова Р. Н., Рамазанов И. Р., “Исследование реакционной способности олефиновых и ацетиленовых соединений в реакции циклоалюминирования на основе ее кинетической модели.”, *Вестник Башкирского университета*, **16**:3 (2011), 668–671.

4. Новичкова А. Н., Бобренева Ю. О., Губайдуллин И. М., Коледина К. Ф., “Информационные системы моделирования реакционной способности алкенов в реакции гидроалюминирования олефинов триизобутилалюминием”, *Электротехнические и информационные комплексы и системы*, **10**:3 (2014), 55–61.

5. Царева З. М., Орлова Е. И., *Теоретические основы химической технологии: Учебное пособие.*, Киев, Виша школа., 1986.

6. Кудрявцев А. А.,, *Составление химических уравнений. 4 издание переработанное*, Москва, Химия, 1968.

7. Chapman S., Cowling T. G., *J. Phys. Chem. A.*, 1991.

8. Жук Д. М., Маничев В. Б., Ильинский А. О., “Методы и алгоритмы решения дифференциально-алгебраических уравнений для моделирования систем и объектов во временной области.”, *Информационные технологии*, **7-8** (2010).

9. Breitmaier E., *Wiley-VCH*, 2014, 214.

10. Ruzicka L., “The Isoprene Rule and the Biogenesis of Terpenic Compounds”, *Experimentia*, **9** (1953), 357-396.

# Sensitivity analysis to changes in the kinetic curves of the reaction rate constants for the reaction of olefins hydroalumination

© **O. Y. Kiryanova**[4], **I. I. Kiryanov**[5], **I. M. Gubaidullin**[6]

**Abstract.** The study of kinetics of biological systems plays the major role in mathematical modelling of processes, which are occur with definite velocity, in the concrete sequence. The research of kinetic behavior of a complex system reduces to the construction of a mathematical model. The variation of concentration velocity of each component in this model expressed in terms of velocity of an elementary reaction. The aim of a current paper was theoretical study of synthesis of geranyl pyrophosphate. Moreover, the mathematical model was constructed which allows us describe the biosynthesis of geranyl pyrophosphate dependent on variation of affecting factors.

**Key Words:** geranyl pyrophosphate, mathematical modelling, mevalonic path

[4] Postgraduate student of Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; olga.kiryanova27@gmail.com.

[5] Postgraduate student of Laboratory of Structural Chemistry, Institute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; ilya.lsc@gmail.com

[6] Senior Research Associate of Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; IrekMars@mail.ru.

*УДК 517.86*

# Скоринг как модель формирования оптимального портфеля ценных бумаг

© **М. А. Пьянков**[1], **П. М. Симонов**[2]

**Аннотация.** Данная модель позволяет не только сформировать оптимальный портфель ценных бумаг, но и осуществлять мониторинг в связи с изменением конъюнктуры фондового рынка. Модель основана на модели скоринга. Скоринг представляет собой процесс оценивания, построения рейтинга и выделения рейтинговых классов некоторых объектов в пределах однородной группы на основе расчета комплексного оценочного показателя для каждого объекта, с учетом количественных и качественных факторов, влияющих на качество объекта, и значимости данных факторов для лиц, принимающих решения. Предполагаемая модель скоринга обеспечивает комплексный учет факторов, прямо и косвенно влияющих на привлекательность ценной бумаги, в том числе ликвидности и фундаментальных показателей деятельности эмитентов. На примере российского фондового рынка сформированы оптимальные портфели ценных бумаг на основе моделей Марковица, Шарпа, Эстрады, Недосекина с нечеткой постановкой задачи и модели скоринга Синявской, и проведен сравнительный анализ портфелей.

**Ключевые слова:** скоринг, модель, доходность, риски, ликвидность, российский фондовый рынок, агрегированный показатель, портфель ценных бумаг

Скоринг ценных бумаг является альтернативой традиционным методам финансового анализа фондовых рынков и позволяет получить единый обобщенный показатель инвестиционной привлекательности каждой ценной бумаги на основе ее многокритериальной оценки с использованием как биржевой статистики и отчетности эмитентов, так и экспертных суждений [1]. Модели скоринга применяются в экономической практике при оценке кредитоспособности физических и юридических лиц [2], риска банкротства и решении других задач.

Модель скоринга Синявской [3] обеспечивает комплексный учет факторов, прямо и косвенно влияющих на привлекательность ценной бумаги, в том числе ликвидности и фундаментальных показателей деятельности эмитентов.

Нами были подобраны факторы и экспертные оценки. Математическая форма модели приняла вид:

$$Y = \alpha_{ret} \sum_{i=1}^{N_{ret}} \beta_i^{ret} \overline{X_i^{ret}} + \alpha_{risk} \sum_{i=1}^{N_{risk}} \beta_i^{risk} \overline{X_i^{risk}} + \alpha_L \sum_{i=1}^{N_L} \beta_i^L \overline{X_i^L},$$

где:

$Y$ — показатель инвестиционной привлекательности ценной бумаги;

$\alpha_{ret}$, $\alpha_{risk}$, $\alpha_L$, – степени значимости для инвестора соответственно доходности, риска и ликвидности;

$\overline{X_i^{ret}}$, $\overline{X_i^{risk}}$, $\overline{X_i^L}$ — нормированные значения показателей, влияющих соответственно на доходность, риск и ликвидность;

$\beta_i^{ret}$, $\beta_i^{risk}$, $\beta_i^L$ — степень значимости $i$-го показателя соответствующей группы.

Данная модель скоринга включает следующие факторы, влияющие на доходность, риски и ликвидность:

[1] Аспирант кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь; pyankov.psu@yandex.ru

[2] Профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике, Пермский государственный национальный исследовательский университет, г. Пермь; simpm@mail.ru

**доходность** — доходность акции, показатель $Dividend/Price$;

**риск** — $P/BV$ (отношение рыночной капитализации к величине собственного капитала), $P/E$ (отношение рыночной капитализации к прибыли), финансовый леверидж, максимальная просадка;

**ликвидность** — среднемесячный объем обращения.

По таблице рейтинговых классов (таблица 1) определяется рейтинговый класс для каждой ценной бумаги в зависимости от агрегированного показателя $Y$.

Таблица 1. Таблица рейтинговых классов.

| Значение индекса $Y$ | Торговая рекомендация | Рейтинговый класс | Степень уверенности в торговой операции | Описание рейтингового класса |
|---|---|---|---|---|
| $\mu_2 \leqslant Y < \mu_1$ | Покупка ценной бумаги | $A+$ | 100% | Высокие инвестиционные качества акции |
| $\mu_3 \leqslant Y < \mu_2$ | Частичная покупка | $A$ | $\dfrac{Y-\mu_3}{\mu_2-\mu_3} \times 100\%$ | Ценные бумаги имеют не плохие инвестиционные качества, но изменяющиеся рыночные условия могут привести к ухудшению их |
| $\mu_4 \leqslant Y < \mu_3$ | Удержание ценной бумаги | $B+$ | 100% | Продажа ценных бумаг не принесет выгоды, а удержание возможно принесет некоторую пользу |
| $\mu_5 \leqslant Y < \mu_4$ | Частичная продажа | $B$ | $\dfrac{Y-\mu_5}{\mu_4-\mu_5} \times 100\%$ | Ценные бумаги имеют не лучшие инвестиционные качества |
| $0 \leqslant Y < \mu_5$ | Продажа ценной бумаги | $C$ | 100% | Низкие инвестиционные качества |

Значения $\mu_1$, $\mu_2$, $\mu_3$, $\mu_4$, $\mu_5$ определяются с помощью экспертных оценок.

Оптимальная доля акций классов $A+$, $A$ нового портфеля ценных бумаг определяется по следующей формуле:

$$\gamma_i^{A+} = \frac{Y_i^{A+}}{\sum\limits_{m=1}^{s} Y_m^{A+} + \sum\limits_{t=1}^{w} Y_t^A H_t^A},$$

где:

$\gamma_i^{A+}$ — оптимальная доля в инвестиционном портфеле $i$-й ценной бумаги, относящиеся к рейтинговому классу $A+$;

$Y_i^{A+}$ — индекс инвестиционной привлекательности этой ценной бумаги;

$s$ — количество ценных бумаг, относящиеся к рейтинговому классу $A+$;

$m$ — номера ценных бумаг, относящихся к рейтинговому классу $A+$;

$w$ — количество ценных бумаг, относящиеся к рейтинговому классу $A$;

$t$ — номера ценных бумаг, относящихся к рейтинговому классу $A$;

$Y_m^{A+}$ — индексы инвестиционной привлекательности ценных бумаг, относящихся к рейтинговому классу $A+$;

$Y_t^A$ — индексы инвестиционной привлекательности ценных бумаг, относящихся к рейтинговому классу $A$;

$H_t^A$ — степень уверенности в торговой операции ценной бумаги, относящейся к рейтинговому классу $A$.

Модель скоринга позволяет не только сформировать оптимальный портфель ценных бумаг, но и осуществлять мониторинг в связи с изменением конъюнктуры фондового рынка. Ценные бумаги, попадающие в рейтинговый класс $B$, продаются частично. Для того, чтобы установить оптимальную долю в портфеле ценных бумаг класса $B$ используется следующая формула:

$$\gamma_i^B = \frac{Y_i^B H_i^B}{\sum\limits_{m=1}^{s} Y_m^{A+} + \sum\limits_{t=1}^{w} Y_t^A + \sum\limits_{r=1}^{R} Y_r^{B+} + \sum\limits_{u=1}^{v} Y_u^B H_u^B},$$

где:

$R$ — количество ценных бумаг, входящих в рейтинговый класс $B+$;

$r$ — номера ценных бумаг, относящихся к рейтинговому классу $B+$;

$v$ — количество ценных бумаг, относящихся к рейтинговому классу $B$;

$u$ — номера ценных бумаг, относящихся к рейтинговому классу $B$;

$Y_r^{B+}$ — индексы инвестиционной привлекательности ценных бумаг, относящихся к рейтинговому классу $B+$;

$Y_u^B$ — индексы инвестиционной привлекательности ценных бумаг, относящихся к рейтинговому классу $B$;

$H_u^B$ — степень уверенности в торговой операции $u$-й ценной бумаги из класса $B$.

На основе акций российского фондового рынка ММВБ за 2014 год были сформированы портфели ценных бумаг на основе моделей Марковица, Шарпа, Эстрады, Недосекина с нечеткой постановкой задачи и модели скоринга Синявской. Оптимальные доли акций в портфелях приведены в таблице 2.

Доходность у всех пяти портфелей ценных бумаг зафиксирована на уровне 2,5%.

На основе критериев эффективности управления портфелями коэффициента Альфа Дженсена, коэффициента Шарпа, коэффициента “Информационное отношение” и коэффициента Калмар был проведен сравнительный анализ портфелей ценных бумаг (таблица 3).

По критерию коэффициента Альфа Дженсена лучшим портфелем стал портфель, построенный по модели Шарпа, по критерию коэффициента Шарпа — портфель Недосекина, по критерию коэффициента “Информационное отношение” — портфель Шарпа. По критериям коэффициента Калмар, максимальной просадки и риска лучшим стал портфель построенный на основе модели скоринга Синявской.

Таблица 2. Оптимальные доли акций в портфелях ценных бумаг.

| **Компании** | **Марковиц** | **Шарп** | **Эстрады** | **Недосекин** | **Синявская** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Polyus Gold International** | - | 8,16% | - | - | - |
| **АЛРОСА** | - | 14,04% | 4,28% | - | - |
| **ВТБ** | - | - | 2,43% | - | 10,32% |
| **ЛУКОЙЛ** | - | - | - | - | 12,04% |
| **Магнит** | 38,45% | - | 0,15% | 48,45% | 3,16% |
| **ММК** | - | 9,13% | 4,31% | - | - |
| **НЛМК** | - | 6,75% | 51,92% | - | 0,99% |
| **Новатэк** | - | 3,93% | - | - | 5,9% |
| **Норникель** | - | - | - | - | 14,21% |
| **ПИК** | 40,86% | 26,86% | 8,51% | 51,55% | 14,61% |
| **Северсталь** | - | 9,18% | 14,87 | - | - |
| **Сургутнефтегаз (прив.)** | - | 0,33% | - | - | 13,15% |
| **Татнефть** | - | - | - | - | 4,67% |
| **Татнефть (прив.)** | 20,68% | 5,22% | - | - | 10,46% |
| **ФосАгро** | - | 16,39% | 13,53% | - | - |
| **Черкизово** | - | - | - | - | 10,48% |

Таблица 3. Сравнительный анализ портфелей ценных бумаг.

| | **Марковица** | **Шарпа** | **Эстрады** | **Недосекин** | **Синявская** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Jensen's alpha** | -0,00138 | 0,0009653 | -0,001327 | -0,000185 | 0,0002569 |
| **Sharpe ratio** | 0,006790 | -0,103523 | 0,010498 | 0,027569 | 0,015124 |
| **Information ratio** | -0,08383 | 0,066511 | 0,016959 | 0,043698 | 0,056119 |
| **Calmar ratio** | -1,24887 | -1,144775 | -0,682925 | -1,328881 | -1,441247 |
| **Макс. просадка** | -18,73% | -16,51% | -19,35% | -15,20% | -10,25% |
| **Риск** | 0,43% | 0,35% | 0,39% | 0,47% | 0,31% |

И так, модель скоринга Синявской может быть использована на слаборазвитых рынках, например, на российском фондовом рынке, так как учитывает фактор ликвидности. В модель может быть включено большое количество факторов как количественных, так и качественных.

В зависимости от степени терпимости к риску инвестор может выбирать коэффициенты значимости доходности, риска и ликвидности. С помощью модели скоринга можно осуществлять мониторинг портфеля ценных бумаг с изменением конъюнктуры рынка.

## Список литературы


1. Недосекин А. О., *Нечетко-множественный анализ риска фондовых инвестиций*, Изд-во «Сезам», СПб., 2002, 181 с.

2. Скоринг оценка заемщиков — физических лиц [Электронный ресурс]. URL: http://www.franklin-grant.ru/ru/services/banks-scoring-consumer.asp. (дата обращения: 28.06.2015).

3. Синявская О. А., *Аудит и финансовый анализ.*, 2002, № 1, 418–427.


# Scoring as a model of forming the optimal portfolio securities

© **M. A. Pyankov**[3], **P. M. Simonov**[4]

**Abstract.** This model allows us not only to generate optimal portfolio of securities, but also to monitor due to changes in stock market trends. The model is based on the scoring model. Scoring is the process of estimating, construction of ranking and selection of rating classes of certain objects within a homogeneous group based on the calculation of complex estimate for each object, taking into account quantitative and qualitative factors affecting the quality of the object, and the importance of these factors for the decision makers. Estimated scoring model provides a comprehensive account of factors directly and indirectly affect the attractiveness of securities, including liquidity and fundamentals of the issuers. For example, the Russian stock market formed the optimal portfolios based on the model of Markowitz, Sharpe, Estrada, Nedosekina fuzzy formulation of the problem and the scoring model of Siniavskaya, and a comparative analysis of portfolios.

**Key Words:** scoring model, profitability, risk, liquidity, the Russian stock market, aggregate, portfolio of securities

[3] Aspirant of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, Perm, pyankov.psu@yandex.ru

[4] Professor of the Department of Information Systems and Mathematical Methods in Economics, Perm State National Research University, Perm, simpm@mail.ru

УДК 517.956.223:537.213

# Математическое моделирование электростатического взаимодействия двух одинаковых сфер, окруженных ДЭС

© А. О. Сыромясов[1], Н. В. Еремкина[2]

**Аннотация.** Найдено распределение электрического потенциала в среде с двумя одинаковыми неподвижными сферическими частицами, которые окружены широкими двойными электрическими слоями. Решение получено с использованием теории нелинейных тензорных функций тензорного аргумента и может быть обобщено на произвольное количество сферических частиц.

**Ключевые слова:** двойной электрический слой, уравнение Пуассона – Больцмана, уравнение Гельмгольца, мультиполь, асимптотические методы, теория нелинейных тензорных функций тензорного аргумента

## 1. Введение

В последние годы исследование взаимодействия взвешенных частиц в сплошной среде становится все более актуальным. Это связано с тем, что чистые вещества, в отличие от различных дисперсных систем, в природе и в технике встречаются редко [8].

Данные системы можно изучать экспериментально, что связано с большими затратами. В связи с этим для исследования дисперсных сред широко применяется математическое моделирование. Оно не исключает необходимость натурных исследований, однако позволяет значительно снизить потребность в проведении экспериментов, что влечет за собой экономию времени и денежных средств.

Между частицами, взвешенными в среде, может возникать электростатическое взаимодействие. Как правило, оно происходит опосредованно – при перекрытии двойных электрических слоев (ДЭС), образующихся вокруг частиц взвеси. Описание ДЭС приводит к системе нелинейных уравнений в частных производных [5], для упрощения которой выдвигаются те или иные дополнительные предположения.

Так, если среда представляет собой сильный электролит, то двойные слои вокруг частиц являются относительно тонкими [1]. В этом случае сначала решается задача о распределении электрического потенциала вблизи одиночной частицы, а взаимодействие сводится к возникновению расклинивающего давления в зоне слабого перекрытия слоев [2].

С практической точки зрения интересен и противоположный вариант: несущая среда представляет собой слабый электролит (таковы, например, многие органические вещества). В этом случае двойные слои вокруг частиц весьма широки, а описывающие их уравнения линеаризуются [9]. Вследствие большой протяженности ДЭС совершенно недостаточно описывать электрическое поле в окрестности каждой частицы по отдельности. Необходимо решать задачу о распределении потенциала с граничными условиями на поверхности многих частиц одновременно.

Цель настоящей работы – исследование математической модели взаимодействия двух одинаковых неподвижных сферических частиц в сплошной среде, окруженных широкими

[1] Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск, syal1@yandex.ru

[2] Студент факультета математики и информационных технологий, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск

ДЭС. Решение задачи о взаимодействии представлено в виде разложения по базисным функциям. Для поиска коэффициентов разложения применены асимптотические методы, а также теория нелинейных тензорных функций тензорного аргумента [3].

## 2. Постановка задачи

Рассматривается неподвижная сплошная среда, в которой расположены две неподвижные сферические частицы $\Omega(1)$ и $\Omega(2)$ радиуса $a$. Вектор $\vec{r}$ длины $r = |\vec{r}|$ соединяет центры частиц. Для удобства введем декартову прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в центре первой частицы и осью $Ox_3$, сонаправленной с $\vec{r}$. Обозначим единичные орты координатных осей через $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, соответственно. Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ задает положение произвольной точки пространства относительно центра первой частицы, а вектор $\vec{x} - \vec{r}$ – относительно центра второй (рис. 2.1).

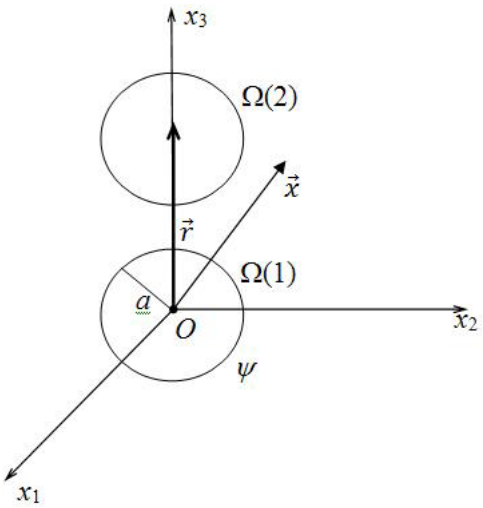



Рисунок **2.1**

Искомой величиной является потенциал $\psi$ электрического поля в среде. Вне частиц он удовлетворяет линеаризованному уравнению Пуассона – Больцмана (уравнению Гельмгольца):

$$\Delta\psi = \kappa^2\psi. \tag{2.1}$$

Здесь $\Delta$ – оператор Лапласа. Величина $\kappa^{-1}$ есть характерная толщина двойного слоя [9].

На поверхности каждой из частиц потенциал постоянен и равен $\psi_a$, вдали от частиц он стремится к нулю:

$$\begin{aligned} &\psi|_{\partial\Omega(1)} = \psi|_{\partial\Omega(2)} = \psi_a, \\ &\psi \to 0, |\vec{x}| \to \infty. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Задача состоит в отыскании функции $\psi(\vec{x})$, удовлетворяющей уравнению (2.1) и граничным условиям (2.2).

## 3. Метод решения

Хорошо известно обращающееся в нуль на бесконечности решение уравнения (2.1), обладающее сферической симметрией:

$$\psi = C_0\Lambda_0, \tag{3.1}$$

где зависящий от $\vec{x}$ мультиполь определяется как

$$\Lambda_0(\vec{x}) = \frac{e^{-\kappa|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}, \tag{3.2}$$

а константа $C_0$ находится из граничных условий. Если потенциал принимает значение $\psi_a$ при $|\vec{x}| = a$, то

$$C_0 = a\psi_a e^{\kappa a}. \tag{3.3}$$

Для отыскания распределения потенциала вокруг двух частиц было бы логично использовать бисферическую систему координат; подобный подход применяется, например, при решении уравнения Лапласа с граничными условиями на двух сферических поверхностях. Однако известно, что в уравнении Гельмгольца переход к бисферическим координатам не приводит к разделению переменных [6]. Кроме того, с помощью одного и того же метода хотелось бы моделировать взаимодействие произвольного конечного числа частиц. Поэтому использование системы координат, в которой координатные изоповерхности совпадают с границами лишь *двух* частиц, не может решить задачу.

В связи с вышеизложенным для моделирования парного электростатического взаимодействия частиц взвеси обобщим выражение (3.1). Подробнее, в решение следует включить мультиполи, зависящие не только от $\vec{x}$, но и от $\vec{x} - \vec{r}$. Кроме того, функций вида (3.2) не хватает для одновременного удовлетворения всех граничных условий (2.2), поэтому используем в разложении потенциала и мультиполи более высокого порядка:

$$\begin{aligned}\psi = C_0(1)\Lambda(\vec{x}) + C_j(1)\Lambda_j(\vec{x}) + C_{jk}(1)\Lambda_{jk}(\vec{x}) + C_{jkl}(1)\Lambda_{jkl}(\vec{x}) + \ldots + \\ +C_0(2)\Lambda(\vec{x}-\vec{r}) + C_j(2)\Lambda_j(\vec{x}-\vec{r}) + C_{jk}(2)\Lambda_{jk}(\vec{x}-\vec{r}) + C_{jkl}(1)\Lambda_{jkl}(\vec{x}-\vec{r})\ldots\end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь и далее применяется соглашение Эйнштейна: по повторяющимся буквенным индексам производится свертка – суммирование в пределах от 1 до 3. Мультиполи высших порядков определяются равенствами

$$\Lambda_{j\ldots k}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_j}\cdots\frac{\partial}{\partial x_k}\Lambda_0(\vec{x}) \tag{3.5}$$

и являются решениями (2.1), стремящимися к нулю при $|\vec{x}| \to \infty$. Ряд (3.4) бесконечен; ранг мультиполя, на котором будет оборвана сумма, зависит от выбранной точности. Постоянные тензорные коэффициенты $\vec{C}(N)$ следует найти из условий (2.2). Здесь и далее $N = 1, 2$ означает номер частицы.

С увеличением точности разложения и ранга мультиполей число компонент $C_{j\ldots k}(N)$ растет со скоростью геомерической прогрессии: так, тензор четвертого ранга имеет $3^4 = 81$ компоненту. Уменьшить число неизвестных позволяет такое соображение. Согласно (3.4), $C_{j\ldots k}(N)$ сворачиваются с мультиполями, которые по определению (3.5) симметричны. Поэтому и сами $C_{j\ldots k}(N)$ также симметричны по всем своим индексам.

Для дальнейших упрощений используется теория нелинейных тензорных функций [3].

Решение задачи (2.1)–(2.2) должно иметь ту же симметрию, что и граничные условия. Но для них $Ox_3$ служит поворотной осью бесконечного порядка, через которую проходят

две зеркальные плоскости $Ox_1x_3$ и $Ox_2x_3$. Эти элементы симметрии отвечают группе $\infty \cdot m$ (в обозначениях Шубникова), базисом которой служат $\vec{b} = \vec{e}_3$ и $\vec{\delta} = \vec{e}_1^2 + \vec{e}_2^2 + \vec{e}_3^2$. Произведения векторов на себя понимаются как тензорные, а компоненты $\vec{\delta}$ суть символы Кронекера $\delta_{ij}$:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j, \\ 0, \ i \neq j. \end{cases}$$

С учетом симметрии по индексам тензорные коэффициенты, разложенные по такому базису, выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_i(N) &= A(N)b_i, \\
C_{ij}(N) &= B(N)\delta_{ij} + D(N)b_ib_j, \\
C_{ijk}(N) &= E(N)(\delta_{ij}b_k + \delta_{ik}b_j + \delta_{jk}b_i) + F(N)b_ib_jb_k, \\
C_{ijkl}(N) &= G(N)(\delta_{ij}\delta_{kl} + \delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{ik}\delta_{il}) + H(N)(\delta_{ij}b_kb_l + \delta_{ik}b_jb_l + \delta_{il}b_jb_k + \delta_{jk}b_ib_l + \\
&\quad + \delta_{jl}b_ib_k + \delta_{kl}b_ib_j) + K(N)b_ib_jb_kb_l, \ldots
\end{aligned}$$

Поскольку мультиполи $\Lambda_{j\cdots k}$ удовлетворют уравнению (2.1), справедливы равенства:

$$\delta_{lm}\Lambda_{j\cdots klm} = \kappa^2\Lambda_{j\cdots k}.$$

Следовательно, слагаемые, содержащие символ Кронекера, не дают принципиально нового вклада в сумму (3.4). Поэтому можно считать, что

$$C_i(N) = CB(N)b_i, \ C_{ij}(N) = CC(N)b_ib_j, \ C_{ijk}(N) = CD(N)b_ib_jb_k, \ldots$$

Тогда формула (3.4) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\psi \ = \ & C_0(1)\Lambda_0(\vec{x}) + CB(1)\Lambda_3(\vec{x}) + CC(1)\Lambda_{33}(\vec{x}) + CD(1)\Lambda_{333}(\vec{x}) + CE(1)\Lambda_{3333}(\vec{x}) + \\
& + CF(1)\Lambda_{33333}(\vec{x}) + CG(1)\Lambda_{333333}(\vec{x}) + CH(1)\Lambda_{3333333}(\vec{x}) + \ldots \\
& + C_0(2)\Lambda_0(\vec{x} - \vec{r}) + CB(2)\Lambda_3(\vec{x} - \vec{r}) + CC(2)\Lambda_{33}(\vec{x} - \vec{r}) + \\
& + CD(2)\Lambda_{333}(\vec{x} - \vec{r}) + CE(1)\Lambda_{3333}(\vec{x} - \vec{r}) + CF(2)\Lambda_{33333}(\vec{x} - \vec{r}) + \\
& + CG(2)\Lambda_{333333}(\vec{x} - \vec{r}) + CH(2)\Lambda_{3333333}(\vec{x} - \vec{r}) + \ldots
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Отметим, что такой же подход (разложение решения по базисным функциям и использование теории нелинейных тензорных функций для построения коэффициентов разложения) может быть использован для описания двойных электрических слоев вокруг частиц, образующих периодическую решетку [7].

Неизвестными в (3.6) остаются лишь скалярные функции $C_0(N)$, $CB(N)$, $CC(N)$ и т.д. Будем искать их в виде разложения по целым неотрицательным степеням двух малых безразмерных параметров

$$\varepsilon = \frac{a}{r}, \ \delta = \kappa r = \frac{r}{\kappa^{-1}}, \tag{3.7}$$

где $\varepsilon$ отвечает за относительную удаленность частиц друг от друга, а $\delta$ – за относительную толщину ДЭС по сравнению с межчастичным расстоянием. Поскольку $\delta < 1$, двойные электрические слои весьма широки.

Например, $C_0(N)$ раскладывается по степеням этих параметров следующим образом:

$$\begin{aligned}
C_0(N) \ = \ & C_{000}(N) + C_{001}(N)\delta + C_{002}(N)\delta^2 + C_{003}(N)\delta^3 + C_{004}\delta^4 + \ldots \\
& + C_{010}(N)\varepsilon + C_{011}(N)\varepsilon\delta + C_{002}(N)\varepsilon\delta^2 + C_{003}(N)\varepsilon\delta^3 + C_{004}\varepsilon\delta^4 + \ldots \\
& + C_{020}(N)\varepsilon^2 + C_{021}(N)\varepsilon^2\delta + C_{022}(N)\varepsilon^2\delta^2 + C_{023}(N)\varepsilon^2\delta^3 + C_{024}\varepsilon^2\delta^4 + \ldots
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Отметим, что $C_0(N)$ – единственные скалярные функции, разложение которых начинается с выражения, содержащего множитель $\varepsilon^0\delta^0$. Это позволяет при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ осуществлять переход к решению задачи об одиночной сфере (3.1)–(3.3).

Для поиска коэффициентов $C_{000}(N)$, $C_{010}(N)$ и им подобных применяется следующий алгоритм.

1. Формула (3.4) подставляется в каждое из условий (2.2) на поверхности частиц. Для большего удобства при использовании соотношения на границе $\Omega(2)$ делается замена $\vec{x} \mapsto \vec{x} + \vec{r}$. Условие затухания поля вдали от частиц удовлетворяется автоматически благодаря тому, что функции (3.5) на бесконечности обращаются в нуль.

2. Найденные выражения и $\psi_a$ умножаются на $ae^{\kappa a}$ – этот множитель фигурирует в решении задачи об одиночной сфере (3.3) и, судя по всему, будет также присутствовать в решении задачи о двух частицах.

3. В полученных выражениях следует избавиться от степеней координаты $x_3$ выше первой, а также от величин $r$, $\kappa$. Для этого используются соотношения

$$x_3^2 = a^2 - x_1^2 - x_2^2,\ r = \frac{a}{\varepsilon},\ \kappa = \frac{\varepsilon\delta}{a}.$$

   Первое из них справедливо на поверхности частиц, остальные два получаются из (3.7). Теперь формулы, описывающие распределение потенциала на $\partial\Omega(1)$ и $\partial\Omega(2)$, содержат лишь малые параметры, радиус частиц $a$, координаты вектора $\vec{x}$ (причем $x_3$ – не выше, чем в первой степени) и неизвестные скалярные функции $C_0(N)$, $CB(N)$, $CC(N)$ и т.д.

4. Мультиполи и искомые функции раскладываются по степеням малых параметров, при этом для $C_0(N)$, $CB(N), \ldots$ используются соотношения вида (3.8).

5. Согласно (2.2), каждое из полученных выражений приравнивается к величине

$$\Psi = a\psi_a e^{\kappa a}.$$

   Это приводит к системе линейных уравнений на коэффициенты $C_{000}(N)$, $C_{001}(N)$,..., $CB_{010}(N)$ и т.д. Ее решение и является искомым. При повышении выбранной точности количество слагаемых в сумме (3.4) будет увеличиваться, а значит, будет расти и число неизвестных в системе.

Изложенный алгоритм был реализован в системе Wolfram Mathematica.

## 4. Результаты

Параметры (3.7) независимы, и задача может быть решена при разных соотношениях между ними; при этом предположение об относительном порядке малости параметров должно быть выдвинуто заранее – до разложения искомых величин по их степеням. Нами были рассмотрены три варианта соотношения между $\varepsilon$ и $\delta$.

1. Указанные параметры имеют одинаковый порядок: $\varepsilon \sim \delta$. Задача была решена с точностью $O(\sqrt{(\varepsilon^8)^2 + (\delta^8)^2})$. Соответственно, в разложения не включались слагаемые, содержащие множители $\varepsilon^5\delta^4$, $\varepsilon^2\delta^8$ и т.д. – их суммарный порядок малости больше 8.

2. $\delta \sim \epsilon^2$. Задача была решена с точностью $O(\varepsilon^8)$. Слагаемые с множителями $\varepsilon\delta^4$, $\varepsilon^3\delta^3$ и т.п. исключались из рассмотрения, поскольку их порядок малости по $\varepsilon$ в данном случае превышает 8.

3. Аналогично предыдущему варианту, $\epsilon \sim \delta^2$. В этом случае неизвестные величины были найдены с точностью $O(\delta^8)$.

Вне зависимости от относительного порядка малости безразмерных параметров (3.7) решение задачи обладает следующими свойствами.

Во-первых, при $\varepsilon \to 0$ и $\delta \to 0$ искомое распределение потенциала переходит в распределение вокруг двух невзаимодействующих частиц (3.1)–(3.3): $C_0(1) = C_0(2) = \Psi$, остальные коэффициенты равны 0.

Во-вторых, выполняются соотношения:

$$C_0(2) = C_0(1),\ CB(2) = -CB(1),\ CC(2) = CC(1),\ CD(2) = -CD(1), \ldots$$

т.е. значения коэффициентов, соответствующих мультиполям четного порядка, равны, а соответствующих мультиполям нечетного порядка – противоположны. При указанных соотношениях становятся справедливыми равенства

$$\psi(\vec{x}) = \psi(\vec{r} - \vec{x}).$$

Аналогично [4], это объясняется симметрией изучаемой конфигурации частиц относительно середины отрезка, соединяющего их центры.

При $\varepsilon \sim \delta$ искомые разложения таковы:

$$\begin{aligned}
C_0(1) &= \Psi\Big(1 - \varepsilon + \varepsilon\delta - \frac{\varepsilon\delta^2}{2} + \frac{\varepsilon\delta^3}{6} - \frac{\varepsilon\delta^4}{24} + \frac{\varepsilon\delta^5}{120} - \frac{\varepsilon\delta^6}{720} + \frac{\varepsilon\delta^7}{5040} + \varepsilon^2 - 3\varepsilon^2\delta + 3\varepsilon^2\delta^2 - \\
&- \frac{11\varepsilon^2\delta^3}{6} + \frac{5\varepsilon^2\delta^4}{6} - \frac{37\varepsilon^2\delta^5}{120} + \frac{7\varepsilon^2\delta^6}{72} - \varepsilon^3 + 5\varepsilon^3\delta - \frac{55\varepsilon^3\delta^2}{6} + \frac{55\varepsilon^3\delta^3}{6} - \\
&- \frac{51\varepsilon^3\delta^4}{8} + \frac{1249\varepsilon^3\delta^5}{360} + 2\varepsilon^4 - 7\varepsilon^4\delta + \frac{55\varepsilon^4\delta^2}{3} - \frac{57\varepsilon^4\delta^3}{2} + \frac{175\varepsilon^4\delta^4}{6} - 3\varepsilon^5 + \\
&+ 12\varepsilon^5\delta - \frac{97\varepsilon^5\delta^2}{3} + \frac{395\varepsilon^5\delta^3}{6} + 5\varepsilon^6 - 21\varepsilon^6\delta + \frac{1783\varepsilon^6\delta^2}{30} - 9\varepsilon^7 + 37\varepsilon^7\delta + 15\varepsilon^8\Big), \\
CB(1) &= \Psi a\Big(\varepsilon^2 - \frac{\varepsilon^2\delta^2}{2} + \frac{\varepsilon^2\delta^3}{3} - \frac{\varepsilon^2\delta^4}{8} + \frac{\varepsilon^2\delta^5}{30} - \frac{\varepsilon^2\delta^6}{144} - \varepsilon^3 + \varepsilon^3\delta - \frac{2\varepsilon^3\delta^3}{3} + \frac{2\varepsilon^3\delta^4}{3} - \\
&- \frac{2\varepsilon^3\delta^5}{5} + \varepsilon^4 - 3\varepsilon^4\delta + \frac{31\varepsilon^4\delta^2}{10} - \frac{251\varepsilon^4\delta^4}{120} - 3\varepsilon^5 + 5\varepsilon^5\delta - \frac{124\varepsilon^5\delta^2}{15} + \frac{94\varepsilon^5\delta^3}{15} + \\
&+ 4\varepsilon^6 - 9\varepsilon^6\delta + \frac{107\varepsilon^6\delta^2}{6} - 8\varepsilon^7 + 18\varepsilon^7\delta + 14\varepsilon^8\Big), \\
CC(1) &= \Psi a^2\Big(-\frac{\varepsilon^3}{2} + \frac{\varepsilon^3\delta^2}{12} - \frac{\varepsilon^3\delta^4}{48} + \frac{\varepsilon^3\delta^5}{90} + \frac{\varepsilon^4}{2} - \frac{\varepsilon^4\delta}{2} + \frac{\varepsilon^4\delta 2}{6} - \frac{\varepsilon^5}{2} + \frac{3\varepsilon^5\delta}{2} - \\
&- \frac{43\varepsilon^5\delta^2}{28} + \frac{2\varepsilon^5\delta^3}{3} + 2\varepsilon^6 - \frac{5\varepsilon^6\delta}{2} + \frac{53\varepsilon^6\delta^2}{14} - \frac{5\varepsilon^7}{2} + 5\varepsilon^7\delta + 6\varepsilon^8\Big), \\
CD(1) &= \Psi a^3\Big(\frac{\varepsilon^4}{6} - \frac{\varepsilon^4\delta^2}{60} + \frac{\varepsilon^4\delta^4}{720} - \frac{\varepsilon^5}{6} + \frac{\varepsilon^5\delta}{6} - \frac{\varepsilon^5\delta^2}{15} + \frac{\varepsilon^5\delta^3}{90} + \frac{\varepsilon^6}{6} - \frac{\varepsilon^6\delta}{2} + \\
&+ \frac{55\varepsilon^6\delta^2}{108} - \frac{5\varepsilon^7}{6} + \frac{5\varepsilon^7\delta}{6} + \varepsilon^8\Big),
\end{aligned} \tag{4.1}$$

$$
\begin{aligned}
CE(1) &= \Psi a^4\Big(-\frac{\varepsilon^5}{24}+\frac{\varepsilon^5\delta^2}{336}+\frac{\varepsilon^6}{24}-\frac{\varepsilon^6\delta}{24}+\frac{\varepsilon^6\delta^2}{56}-\frac{\varepsilon^7}{24}+\frac{\varepsilon^7\delta}{8}+\frac{\varepsilon^8}{4}\Big),\\
CF(1) &= \Psi a^5\Big(\frac{\varepsilon^6}{120}-\frac{\epsilon^6\delta^2}{2160}-\frac{\varepsilon^7}{120}+\frac{\varepsilon^7\delta}{120}+\frac{\varepsilon^8}{120}\Big),\\
CG(1) &= \Psi a^6\Big(-\frac{\varepsilon^7}{720}+\frac{\varepsilon^8}{720}\Big),\\
CH(1) &= \frac{a^7\varepsilon^8}{5040}\Psi.
\end{aligned}
$$

Решение в Wolfram Mathematica показало, что при $\delta \sim \varepsilon^2$ или $\varepsilon \sim \delta^2$ разложения скалярных функций отличаются от приведенных выше только исключением слагаемых более высокого порядка, как это и предполагалось ранее. Например, при $\delta \sim \varepsilon^2$ разложение $CF(1)$ имеет вид:

$$CF_0(1) = \Psi a^5\Big(\frac{\varepsilon^6}{120}-\frac{\varepsilon^7}{120}+\frac{\varepsilon^8}{120}\Big).$$

На рис. 4.1 изображены эквипотенциальные линии функции $\psi$ в плоскости $Ox_1x_3$. При их построении были использованы выражения (3.6) и (4.1), причем значения параметров составляли $\Psi = 1$, $\varepsilon = 1/4$, $\delta = 1/3$, $a = 1$.

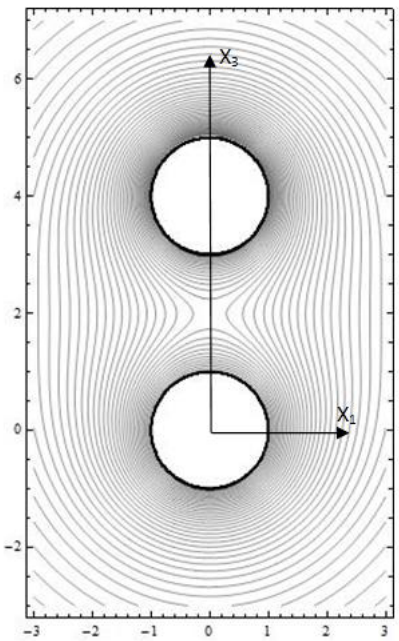



Рисунок **4.1**

Как видно, распределение потенциала симметрично относительно плоскости $Ox_2x_3$ (ось $Ox_3$ на рисунке). Плоскость $x_3 = r/2$ также является зеркальной.

## 5. Заключение

В статье представлен метод решения задачи о распределении электрического потенциала вокруг сферических частиц, внедренных в сплошную среду. Этот метод включает в себя следующие этапы:

- Разложение искомого решения уравнения (2.1) по базисным функциям. При этом все такие функции (мультиполи) суть частные производные некоторого «фундамен-

тального» решения, имеющего простую структуру (обладающего сферической симметрией). Это возможно сделать, поскольку указанное уравнение является линейным с постоянными коэффициентами.

- Привлечение теории нелинейных тензорных функций и использование симметрии граничных условий задачи для построения тензорных коэффициентов разложения. В результате задача сводится к отысканию скалярных функций, фигурирующих в выражении коэффициентов, через тензоры базиса.

- Для отыскания скалярных функций мультиполи в окрестности каждой частицы раскладываются в ряд по малым параметрам (3.7). Эти асимптотические ряды подставляются в граничные условия задачи, после чего скалярные функции также находятся в виде ряда по степеням малых параметров.

Изложенный метод был применен для решения задачи о двух идентичных частицах, при этом были рассмотрены разные варианты соотношения между фигурирующими в асимптотических разложениях параметрами $\varepsilon$ и $\delta$.

Однако такой же подход позволит описывать двойные электрические слои вокруг произвольного конечного числа сферических частиц (быть может, разных радиусов).

## Список литературы


1. Дерягин Б., Ландау Л., “Теория устойчивости сильно заряженных лиофобных золей и слипания сильно заряженных частиц в растворах электролитов”, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, **15**:11 (1945), 663–681.

2. Духин С. С., Дерягин Б. В., Семенихин Н. М., “Взаимодействие двух идентичных сферических коллоидных частиц на больших расстояниях”, *Докл. АН СССР*, **192**:2 (1970), 357–360.

3. Лохин В. В., Седов Л. И., “Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов”, *Прикладная математика и механика*, **27**:3 (1963), 393–417.

4. Мартынов С. И., *Взаимодействие частиц в суспензии*, Издательство Казан. матем. общества, Казань, 1998, 135 с.

5. Остроумов Г. А., *Взаимодействие электрических и гидродинамических полей. Физические основы электрогидродинамики*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, М., 1979, 320 с.

6. Полянин А. Д., *Справочник по линейным уравнениям математической физики*, ФИЗМАТЛИТ, М., 2001, 576 с.

7. Сыромясов А. О., “Электрогидродинамика структурированной суспензии”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **8**:1 (2006), 301–306.

8. Фридрихсберг Д. А., *Курс коллоидной химии*, изд. 4, испр. и доп., Лань, СПб., 2010, 416 с.

9. Verwey E. J. W., Overbeek J. Th. G., *Theory of the stability of lyophobic colloids*, Elsevier publishing company, Inc., New York – Amsterdam – London – Brussels, 1948, i–xii, 1–205 pp.

# Mathematical modelling of electrostatic interaction among two identical spheres surrounded by double electric layers

© **A. O. Syromyasov** [3], **N. V. Eremkina**[4]

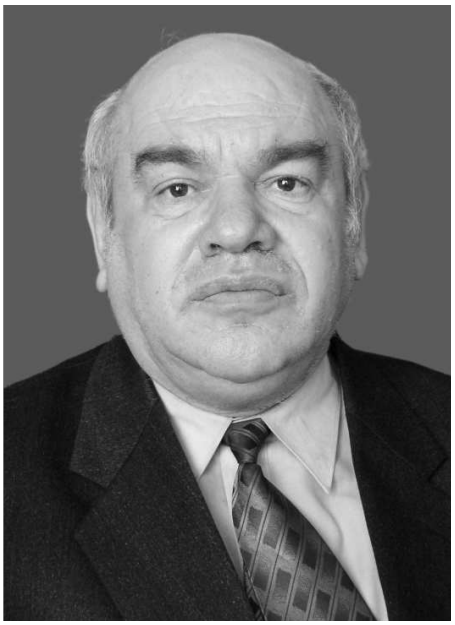
**Abstract.** The distribution of electric potential in a medium containing two identical spherical particles surrounded by wide double electric layers is discussed. The solution is obtained by using the theory of nonlinear tensor functions and may be generalized on the arbitrary number of particles.

**Key Words:** double electric layer, Poisson – Boltzmann equation, Helmholtz equation, multipole, asymptotic methods, theory of nonlinear tensor functions

[3] Associate professor, Department of Applied mathematics, differential equations and theoretical mechanics, Ogarev Mordovia State University, Saransk, syal1@yandex.ru

[4] Student, Faculty of Mathematics and Information Technologies, Ogarev Mordovia State University, Saransk

# СЕМЕНУ ИЗРАИЛЕВИЧУ СПИВАКУ - 70 ЛЕТ



Спивак Семен Израилевич, доктор физико-математических наук, профессор, Соросовский профессор, зав. кафедрой математического моделирования Башкирского государственного университета, заведующий лабораторией математической химии Института нефтехимии и катализа РАН, заслуженный деятель науки Республики Башкортостан.

Родился 4 февраля 1945 г. в г.Днепропетровске, Украина. Отец - Спивак Израиль Яковлевич, учитель математики, мать - ПлоткинаЭлькаГеселевна, инженер-химик-технолог. В 1962 г. окончил с серебряной медалью СШ№80 Днепропетровска. Будучи старшеклассником, стал принимать активное участие в математических олимпиадах, в 1962 г. дошел до финальной части 1-ой Всесибирской физико-математической Олимпиады (Новосибирский Академгородок), организованной по инициативе академика М.А. Лаврентьева. По результатам Олимпиады был принят на механико-математический факультет Новосибирского государственного университета.

Специализировался по кафедре дифференциальных уравнений, заведующим которой в те годы был выдающийся математик академик Сергей Львович Соболев. Непосредственным руководителем в студенческие годы стал ученик С.Л.Соболева, в будущем известный специалист по качественной теории дифференциальных уравнений Тоддей Иванович Зеленяк.

По рекомендации С.Л.Соболева группа студентов мехмата НГУ была направлена на специализацию в отдел математического моделирования Института катализа Сибирского отделения АН СССР, что предопределило научную судьбу С.И.Спивака. В 1967 г. после окончания университета, он направлен на работу в Институт катализа, где работал до 1976 г. сначала в должности стажера-исследователя, затем младшего научного сотрудника отдела математического моделирования. В те годы Институт катализа был основным центром по становлению математического моделирования в химии в СССР, Учителями С.И. Спивака стали выдающиеся ученые в области химической технологии, катализа, химической кинетики академик Георгий Константинович Боресков и член-корреспондент АН СССР Михаил Гаврилович Слинько. Основной темой научных исследований С.И.Спивака стали обратные задачи химической кинетики и термодинамики для сложных реакций. В годы работы в Институте катализа им были развиты методы определения интервалов вариации констант скоростей химических реакций, описывающих измерений в пределах их погрешности. Развитие этих работ стало результатом участия С.И.Спивака в научном семинаре академика Леонида Витальевича Канторовича. Задачи интерпретации кинетических измерений были сформулированы С.И.Спиваком как задачи математического программирования,введено понятие значимости измерений как решение соответствующих двойственных задач. Работа в химическом институте способствовала тому, что все теоретические результаты использовались при интерпретации конкретных измерений по реальным промышленно значимым каталитическим процессам. Результатом этих работ стала

защита в 1976 г. кандидатской диссертации «Методы построения кинетических моделей каталитических стационарных реакций», диссертация была защищена в Совете Института катализа по специальности «Процессы и аппараты химической технологии» на соискание ученой степени кандидата технических наук.

В 1976 г. С.И.Спивак переезжает на работу в Уфу, в Научно-исследовательский Институт нефтехимических производств, где работает сначала в должности старшего научного сотрудника отдела математического моделирования, а затем заведующего сектором математической интерпретации измерений. Параллельно читается система спецкурсов по математическому моделированию и оптимизации сложных химических процессов на математическом факультете Башкирского государственного университета. В 1985 г. в Институте химической физики АН СССР защищается докторская диссертация «Информативность эксперимента и проблема неединственности решения обратных задач химической кинетики» уже на соискание степени доктора физико-математических наук по специальности «Химическая физика».

Как уже отмечалось, сразу по приезду в г. Уфу С.И. Спивак начал сотрудничество с математическим факультетом Башкирского государственного университета. И совершенно естественным был его переход в 1986 г. на постоянную работу в Башкирский государственный университет на должность заведующего кафедрой математического моделирования. В этой должности он работает и по сей день. В 1988 г. ему было присвоено ученое звание профессора по кафедре математического моделирования.

В 1992 г. НИИнефтехим был преобразован Институт нефтехимии и катализа в начале Академии наук Республики Башкортостан, а позже РАН. В Институте создана лаборатория математической химии, заведующим которой С.И.Спивак является с момента основания по настоящее время.

Одним из главных результатов последних лет стало возникновение и развитие на кафедре математического моделирования под руководством С.И.Спивака направления по финансовой и актуарной математике. Это направление развивается совместно с Лондонским Институтом Актуариев, при непосредственном участии Правительственного Актуария Великобритании К.Дейкена. Создана система курсов по финансовой математике (одна из первых в стране), совместно с Лондонским Институтом Актуариев организован первый в регионе Дипломный актуарный курс (DiplomaActuarialCourse).

Широкий научный кругозор, разнообразие научных интересов, свойства характера (общительность, доброжелательность и энергия) стимулировали работу С.И.Спивака с учениками. Уже к моменту защиты докторской диссертации он был руководителем нескольких кандидатских диссертаций. Сегодня под его руководством создана научная школа по математическому моделированию в химии и задачам финансовой математике. Среди его учеников 9докторов и около 50 кандидатов наук. И сегодня в его научном семинаре много талантливой молодежи.

Спивак С.И. много пишет и выступает. Он автор нескольких монографий, свыше 800 научных статей в самых разных аспектах математического моделирования в химии, биологии, теории финансов, последнее время даже в теологии. Докладывал свои результаты на многих Международных, Всесоюзных, Российских конференциях самого высокого уровня.

Активное научная и научно-преподавательская деятельность нашла свое признание в присвоении С.И.Спиваку в 1998 г. почетного звания «Заслуженный деятель науки Республики Башкортостан». Начиная с 1995 года, четыре раза он становился лауреатом гранта «Соросовский профессор». Спивак С.И. является иностранным членом и членом правления Немецкого общества прикладной математики и механики (GAMM), членом Лондонского Института Актуариев, Американского актуарного общества, Международной Ассоциации Математической химии и технологии.

Спивак С.И. известен в Республике Башкортостан и своей общественной деятельностью. На волне демократических преобразований в России в 1988 г. он стал организатором одного из первых тогда в СССР Еврейских культурных центров. Сегодня он председатель Совета Еврейской общины Республики Башкортостан, член Совета Федерации Еврейских общин России, член Совета Ассоциации народов Башкортостана.

Спивак С.И. - активный участник научных семинаров, конференций и школ-семинаров по математическому моделированию, регулярно проводимых Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва.Сложно переоценить деятельность Семена Израилевича в качестве члена редакционной коллегии научного журнала «Журнал Средневолжского математического общества».

Он любящий и любимый муж, отец и дед. У него много самых разных интересов в науке, литературе, искусстве, истории, религии. Общительность и оптимизм вселяют надежды на новые интересные результаты во всех этих направлениях. Желаем Семену Израилевичу крепкого здоровья, творческих успехов и счастья!

*Н.Д. Морозкин, П.В. Сенин, В.Ф. Тишкин, Ю.Н. Дерюгин,*

*З. Ю. Фазуллин, И. И. Чучаев, П. А. Вельмисов, И. П. Рязанцева,*

*В. А. Горбунов, И. В. Бойков, В. З. Гринес, В. Н. Кризский,*

*С. А. Мустафина, И. М. Губайдуллин, А. М. Ахтямов, М. Т. Терехин,*

*Л. А. Сухарев, Р. В. Жалнин, П. А. Шаманаев, Т. Ф. Мамедова,*

*С. М. Мурюмин, Д. К. Егорова, А. Н. Тында, Е. В. Десяев*

# Правила оформления рукописей в журнал «Журнал Средневожского математического общества»

К рассмотрению принимаются рукописи на русском и английском языках, не опубликованные и не предназначенные к публикации в другом издании.

Объем рукописи не должен превышать 12 страниц для научной статьи и 20 страниц для обзорной статьи.

Текст статьи необходимо подготовить в издательской системе TeX с использованием макрорасширения LaTeX. Компиляцию статьи необходимо производить с помощью MiKTeX, дистрибутив которого можно получить на официальном сайте — http://www.miktex.org.

В редакцию следует направлять исходный текст статьи (формат LaTeX), файлы с рисунками (формат EPS) и откомпилированный вариант статьи (формат PDF).

Статья должна содержать следующие разделы:

— коды УДК;

— название статьи;

— информация о каждом из авторов: ФИО, e-mail, должность и место работы (официальное название организации);

— аннотация;

— ключевые слова;

— текст статьи;

— список литературы.

Если статья на русском языке, то название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова необходимо так же предоставить и на английском языке. Если статья написана на английском языке, то отдельно представляются коды УДК, название статьи, информацию о каждом из авторов, аннотацию, ключевые слова на русском языке.

Аннотация должна быть четко структурирована, изложение материала должно следовать логике описания результатов в статье. Текст должен быть лаконичен и четок, свободен от второстепенной информации, отличаться убедительностью формулировок.

Рекомендуется включать в аннотацию следующие аспекты содержания статьи: предмет, цель работы, метод или методологию проведения работы, результаты работы, область применения результатов, выводы.

Предмет и цель работы указываются в том случае, если они не ясны из заглавия статьи; метод или методологию проведения работы целесообразно описывать в том случае, если они отличаются новизной или представляют интерес с точки зрения данной работы.

Результаты работы описывают предельно точно и информативно. Приводятся основные теоретические и экспериментальные результаты, фактические данные,обнаруженные взаимосвязи и закономерности. При этом отдается предпочтение новым результатам и данным долгосрочного значения, важным открытиям, выводам, которые опровергают существующие теории, а также данным, которые, по мнению автора, имеют практическое значение.

Выводы могут сопровождаться рекомендациями, оценками, предложениями, гипотезами, описанными в статье.

Сведения, содержащиеся в заглавии статьи, не должны повторяться в тексте авторского резюме.

Следует избегать лишних вводных фраз (например, «автор статьи рассматривает...»). Исторические справки, если они не составляют основное содержание документа, описание ранее опубликованных работ и общеизвестные положения в авторском резюме не приводятся.

В тексте авторского резюме следует употреблять синтаксические конструкции, свойственные языку научных и технических документов, избегать сложных грамматических конструкций.

При написании аннотации необходимо помнить следующие моменты:

– необходимо следовать хронологии статьи и использовать ее заголовки в качестве руководства;

– не включать несущественные детали;

– использовать техническую (специальную) терминологию вашей дисциплины, четко излагая свое мнение и имея также в виду, что вы пишете для международной аудитории;

– текст должен быть связным с использованием слов «следовательно», «более того», «например», «в результате» и т.д. («consequently», «moreover», «for example»,» the benefits of this study», «as a result» etc.), либо разрозненные излагаемые положения должны логично вытекать один из другого;

– необходимо использовать активный, а не пассивный залог, т.е. «The study tested»,но не «It was tested in this study».

На английском языке приводится авторское резюме (аннотация), которое является кратким резюме большей по объему работы, имеющей научный характер.

Объем аннотации должен быть в среднем от 100 до 250 слов.

Раздел Ключевые слова должен содержать от 5 до 15 слов и четко указывать на основное содержание статьи. Не следует приводить в качестве ключевых слов общие понятия, так как поиск по ключевому слову не приведет читателя к нахождению интересующей его информации. Однако данное слово может входить в значимое словосочетание.

Авторам статей необходимо придерживаться следующей структуры статей:

• Введение - краткое изложение состояния рассматриваемого вопроса и постановки задачи, решаемой в статье.

• Материалы и методы решения задачи и принятые допущения.

• Результаты – основное содержание статьи.

• Обсуждение полученных результатов и сопоставление их с ранее известными.

• Заключение – выводы и рекомендации.

Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB (см. Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTex). Список литературы должен содержать только те источники, на которые имеются ссылки в тексте работы. Источники располагаются в порядке их упоминания в статье. В оригинальных статьях допускается до 20, в обзорных – до 60 источников.

Подробные Технические инструкции по оформлению рукописей в системе LaTex содержатся на сайте журнала по адресу http://journal.svmo.ru/page/rules.

# Правила верстки рукописей в системе LaTex

*Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.*

Текст доклада должен быть набран в издательской системе TEX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте *http://www.svmo.ru*.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой **\input** в преамбуле). Например,

**\input{voskresensky.tex}**

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

*Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду* **\headerRus**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

**\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\ footnote { Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\ footnote {Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}**

*Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду* **\headerEn**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

**\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}**

*Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду* **\headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **\headerRus**.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **\sect** с одним параметром:

**\sect{Заголовок}**

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды **\R**, **\Rn**, **\C**, **\Z**, **\N** и т.д.

Для вставок букв $\phi$ и $\epsilon$ необходимо использовать команды **\phi**, **\epsilon** соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами **\px{i}** и **\pxtog{u}{i}**.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды **\textrm**, **\textit**. Например, для вставок формул $\Gamma_i$, $Д_i$ в текст статьи необходимо набрать команды **\textrm{Г}_i**, **\textit{Д}_i**.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвторaНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

**\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}**

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

**\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_ри-сунком}**

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

**\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}**

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

**\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}**

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

**Внимание! Новые правила.** *Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение* **thebibliography**. *Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле amsbib.pdf. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл svmobib.sty (прилагается).*

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд **\RBibitem{метка для ссылки на источник}**.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду **\cite** или **\pgcite** (параметры см. в преамбуле).

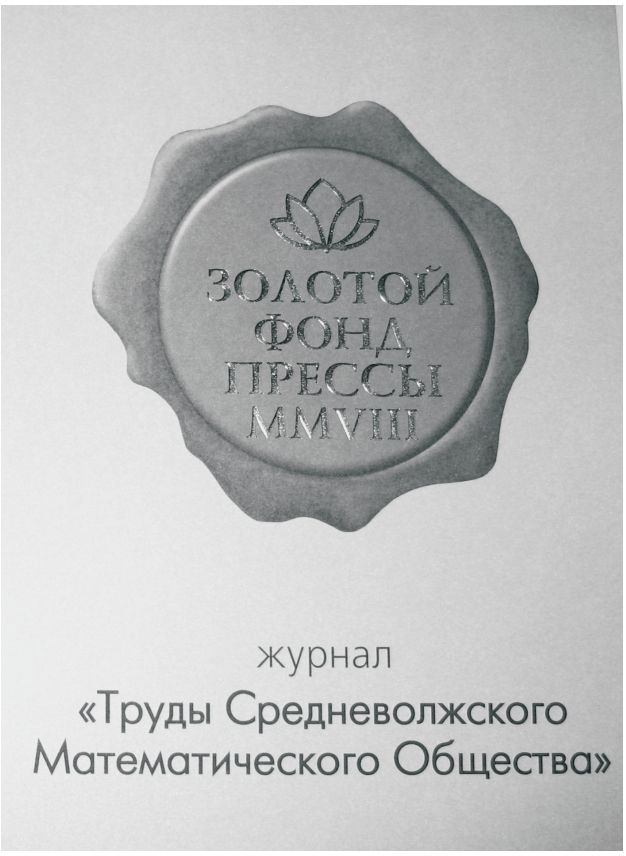
Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTEX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте *http://www.miktex.org*.

# Алфавитный указатель


| | | | |
|---|---|---|---|
| Алексеенко С. Н. | 7 | Масягин В. Ф. | 75 |
| Бирюкова Е. В. | 82 | Носкова М. К. | 12 |
| Гринес В.З. | 12 | Пантюшин А. И. | 75 |
| Губайдуллин И. М. | 82, 86 | Пескова Е. Е. | 75 |
| Десяев Е. В. | 30 | Починка О. В. | 12 |
| Егорова Д. К. | 30 | Пьянков М. А. | 95 |
| Еремкина Н. В. | 100 | Рахимов Д. Г. | 37 |
| Жалнин Р. В. | 75 | Сафаров Ж. Ш. | 44 |
| Кирьянова О. Ю. | 86 | Симонов П. М. | 95 |
| Кирьянов И. И. | 86 | Спивак С. И. | 109 |
| Коледина К. Ф. | 82 | Сыромясов А. О. | 100 |
| Красильников П. С. | 18 | Хитева Д. В. | 7 |
| Максимкин А. В. | 75 | Шаманаев П. А. | 56 |
| Мамедова Т. Ф. | 30 | Юлдашев Т. К. | 66 |

**В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».**




**С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».**

*Уважаемые читатели и подписчики!*

*Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.*

*Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.*

# Для заметок

# Для заметок

# Для заметок