

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 16, № 4



2014

СРЕДНЕ-ВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Н. П. ОГАРЁВА

Журнал Средневолжского математического общества

Том 16, № 4

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

Главный редактор
В. Ф. Тишкун

Институт прикладной математики
им. М. В. Келдыша РАН

Заместитель главного редактора

М. Т. Терехин
Рязанский государственный
педагогический институт

Ответственный секретарь

П. А. Шаманаев
Мордовский государственный
университет им. Н. П. Огарёва

Редакционная коллегия

А. С. Андреев	Ю. Н. Дерюгин	Б. В. Логинов
Ш. А. Алимов	А. П. Жабко	С. И. Мартынов
А. М. Ахтямов	В. И. Жегалов	П. П. Матус
Ш. А. Аюпов	Т. Ш. Кальменов	О. В. Починка
И. В. Бойков	А. М. Камачкин	В. П. Радченко
П. А. Вельмисов	Е. Б. Кузнецов	И. П. Рязанцева
В. К. Горбунов	В. Н. Кризский	С. И. Спивак
В. З. Гринес	Н. Д. Кузьмичев	I. Anca–Veronica

Редакционный совет

С. М. Вдовин	Л. А. Сухарев	Н. Г. Ярушкина
Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва	Средне-Волжское математическое общество	Ульяновский государственный технический университет

САРАНСК

2014

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредители — Межрегиональная общественная организация «Средне-Волжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 16, № 4

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Издаётся в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 23-32-05

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	6
---------------------------------	---

А. В. Герасимов, Б. В. Логинов, Н. Н. Юлдашев

Задача на собственные значения для оператора Лапласа в s -мерном шаре в \mathbb{R}^{s+1} со смещениями в производных II	7
1. Введение	7
2. Вычисление 3-го элемента ЖЦ прямой задачи ($s = 2$) в условиях $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) = 0$	7
3. Присоединённые функции сопряжённой задачи при $s = 2$ без предположения непрерывности функции в точке r_0	9
3.1. Вычисление 2-го элемента жордановой цепочки	9
3.2. Вычисление 3-го элемента $\mathcal{X}^{(3)}(r)$ ЖЦ	13
4. Собственные значения, собственные и присоединенные функции при $s \geq 2$	15
4.1. Прямая задача	19
4.2. Сопряжённая задача	20

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

Н. М. Байназарова, Л. Ф. Нурисламова, И. М. Губайдуллин

Исследование чувствительности результатов кинетического моделирования к константам скорости стадий реакции	23
1. Введение	23
2. Локальный анализ чувствительности	24
3. Глобальный анализ чувствительности	25
4. Детальный механизм реакции окисления формальдегида	26
5. Результаты расчетов и обсуждение	27
6. Заключение	30

А. А. Кяшкин, Б. В. Логинов, П. А. Шаманаев

Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной	33
1. Введение	33
2. Ветвление пары чисто мнимых A -собственных значений оператора B_0	35
3. Редукция к возмущенной матричной задаче I	37

М. И. Малкин

Хаотическое поведение счетных топологических марковских цепей с мероморфной дзета-функцией	41
1. Введение	41
2. Предварительные сведения и основная теорема	42

С. Н. Нагорных

Критические параметры плотности вероятности в индуцированных шумом переходах	50
--	----

А. Р. Нафикова, В. Н. Кризский

Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радионе в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями	53
1. Введение	53
2. Постановка задачи и способ решения	53
3. Заключение	58

Г. Ф. Сафина

Исследование зависимостей частот колебаний участка трубопровода от характеристик жидкости	59
1. Введение	59
2. Прямая задача об изгибных колебаниях участка трубы с жидкостью	59
3. Влияние на собственные частоты колебаний участка трубопровода плотности и давления жидкости	60
4. Зависимость частот колебаний участка трубопровода от скорости потока жидкости	63
5. Заключение	66

А. N. Tynda, M. V. Goryacheva, O. V. Tynda

Numerical calculation of the effective dielectric permittivity of thin nanogranular films	68
1. Introduction	68
2. Statement of the problem	69
3. Numerical model implementation	70
3.1. Method of solving the basic integral equation	70
3.2. The solution of the linear equation	72
4. Conclusion	73

Т. К. Юлдашев

Приближенное решение дифференциальных уравнений с нелинейным запаздыванием и приближенное вычисление функционала качества при известном управлении	75
1. Постановка задачи	76
2. Дискретный аналог задачи 1	76
3. Однозначная разрешимость суммарного уравнения (2.4)	77
4. Сходимость функционала качества	80
5. Заключение	81
6. Приложение	82

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

И. В. Зубов, А. Ф. Зубова, С. А. Стрекопытов	
Необходимые и достаточные условия однородности интервальных полиномов	85
И. В. Зубов, В. И. Зубов, О. А. Пустовалова	
Модифицированный метод построения минимального многочле- на систем линейных алгебраических уравнений	90
Правила оформления рукописей для публикации	
в журнале «Журнал СВМО»	94
Алфавитный указатель	96

ОТ РЕДАКЦИИ

В четвертом номере 16-го тома публикуются работы ведущих ученых и молодых исследователей, многие из которых являются постоянными участниками международных научных конференций по дифференциальным уравнениям и их приложениям в математическом моделировании, проводимых Средневолжским математическим обществом и ФГБОУ ВПО «МГУ им. Н. П. Огарёва» при поддержке РФФИ.

Все статьи имеют положительные рецензии и доступны в сети Internet на сайте Elibrary.ru. Сам журнал входит в объединенный каталог «Пресса России».

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 517.9

Задача на собственные значения для оператора Лапласа в s -мерном шаре в \mathbb{R}^{s+1} со смещениями в производных II

© А. В. Герасимов¹, Б. В. Логинов², Н. Н. Юлдашев³

Аннотация. В классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых до 2-го порядка функций рассматривается задача на собственные значения для оператора Лапласа в s -мерном единичном шаре Ω со смещениями в производных по радиусам концентрических сфер радиусов $0 < r_0 < 1$ и 1 , $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ и $\frac{\partial u(r_0, \Theta)}{\partial r} = \frac{\partial u(1, \Theta)}{\partial r}$. В предыдущей работе авторов [1] были найдены собственные значения и при $s = 2$ собственные и присоединенные функции (жордановы цепочки) прямой задачи; причём их длина не превышает 3-х. В данной работе вычислены жордановы цепочки сопряжённой задачи при $s = 2$, прямой и сопряжённой задач при $s > 2$, и доказано, что в случае $s > 2$ они обрываются на вторых элементах.

Ключевые слова: оператор Лапласа, единичный шар в \mathbb{R}^{s+1} , собственные значения, собственные и присоединенные функции, жордановы цепочки, прямая и сопряжённая задачи при $s = 2$ и $s > 2$.

1. Введение

Данная работа является непосредственным продолжением предыдущей работы [1], краткое содержание которой дано в аннотации.

Следует заметить, что в работе [1] третий элемент ЖЦ вычислен в предположении кратного собственного значения. Поэтому требуется пересчет 3-го элемента ЖЦ прямой задачи.

2. Вычисление 3-го элемента ЖЦ прямой задачи ($s = 2$) в условиях $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha) = 0$, $f''(\alpha) = 0$

$$f(\alpha) = J'_n(\alpha) - J'_n(\alpha r_0) = 0, \quad (2.1)$$

$$f'(\alpha) \cong (n^2 - \alpha^2)r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2 \alpha^2 - n^2)J_n(\alpha r_0) = 0, \quad (2.2)$$

$$f''(\alpha) \cong 2(r_0 J_n(\alpha r_0) - J_n(\alpha)) + \alpha(r_0^2 - 1)J'_n(\alpha) = 0, \quad (2.3)$$

где « \cong » означает «с точностью до постоянного множителя».

$X^{(3)}(r)$ является решением неоднородного уравнения Бесселя с условиями смещения и гладкости

¹ Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева, г. Саранск; gerasimov_artyom@mail.ru.

² Профессор кафедры высшей математики, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; bvllbv@yandex.ru.

³ Доцент кафедры высшей математики, Ташкентский институт текстильной и легкой промышленности, г. Ташкент; nurilla1956@mail.ru.

$$\begin{aligned} X^{(3)''}(r) + \frac{1}{r} X^{(3)'}(r) + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) X^{(3)}(r) &= -\frac{r}{2\alpha} J'_n(\alpha r), \\ u \in C^{2+\alpha}(\Omega), \quad \Omega = \{r, \theta | r \leq 1\}, \quad \frac{\partial u(r_0, \theta)}{\partial r} &= \frac{\partial u(1, \theta)}{\partial r}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Согласно методу Лагранжа, решение (2.4) разыскивается в виде

$$X^{(3)}(r) = \begin{cases} C_{11}^{(3)}(r) J_n(\alpha r) + C_{12}^{(3)}(r) N_n(\alpha r), & 0 \leq r \leq r_0, \\ C_{21}^{(3)}(r) J_n(\alpha r) + C_{22}^{(3)}(r) N_n(\alpha r), & r_0 \leq r \leq 1, \end{cases}$$

где на левом полуинтервале

$$C_{11}^{(3)}(r) = \frac{\pi}{4\alpha} \int_0^r \rho^2 J'_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho, \quad C_{12}^{(3)}(r) = -\frac{\pi}{4\alpha} \int_0^r \rho^2 J'_n(\alpha\rho) J_n(\alpha\rho) d\rho,$$

$$C_{120}^{(3)} = 0, \text{ т.к. } |X^{(3)}(r)| < \infty.$$

Следовательно,

$$C_{11}^{(3)}(r) = -\frac{r^2}{8\alpha^2} + \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{\pi}{8\alpha^2} r^2 J'_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) + C_{110}^{(3)},$$

$$C_{12}^{(3)}(r) = -\frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n^2(\alpha r) + \frac{\pi}{8\alpha^2} r^2 J_n'^2(\alpha r).$$

Аналогично, на правом полуинтервале

$$C_{21}^{(3)}(r) = \frac{\pi}{4\alpha} \int_{r_0}^r \rho^2 J'_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho, \quad C_{22}^{(3)}(r) = -\frac{\pi}{4\alpha} \int_{r_0}^r \rho^2 J'_n(\alpha\rho) J_n(\alpha\rho) d\rho.$$

Следовательно,

$$C_{21}^{(3)}(r) = -\frac{r^2}{8\alpha^2} + \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{\pi}{8\alpha^2} r^2 J'_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) + \frac{r_0^2}{8\alpha^2} - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) + C_{210}^{(3)},$$

$$C_{22}^{(3)}(r) = -\frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n^2(\alpha r) + \frac{\pi}{8\alpha^2} r^2 J_n'^2(\alpha r) + \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n^2(\alpha r_0) - \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J_n'^2(\alpha) + C_{220}^{(3)}.$$

Таким образом, на левом полуинтервале

$$X^{(3)}(r) = -\frac{1}{4\alpha^3} r J'_n(\alpha r) - \frac{1}{8\alpha^2} r^2 J_n(\alpha r) + C_{110}^{(3)} J_n(\alpha r),$$

и на правом —

$$\begin{aligned} X^{(3)}(r) &= -\frac{1}{4\alpha^3} r J'_n(\alpha r) - \frac{1}{8\alpha^2} r^2 J_n(\alpha r) + \frac{r_0^2}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\ &+ \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J_n'^2(\alpha) N_n(\alpha r) + C_{210}^{(3)} J_n(\alpha r) + C_{220}^{(3)} N_n(\alpha r). \end{aligned}$$

Из условий непрерывности $X^{(3)}(r)$ и её производной в точке $r = r_0$ следует

$$(C_{110}^{(3)} - C_{210}^{(3)}) J_n(\alpha r_0) = C_{220}^{(3)} N_n(\alpha r_0) + \frac{r_0^2}{8\alpha^2} J_n(\alpha r_0) + \frac{r_0}{4\alpha^3} J'_n(\alpha). \quad (2.5)$$

$$(C_{110}^{(3)} - C_{210}^{(3)}) \alpha J'_n(\alpha) = C_{220}^{(3)} \alpha N'_n(\alpha r_0) + \frac{r_0^2}{8\alpha} J'_n(\alpha) + \frac{n^2}{4\alpha^4 r_0} J_n(\alpha r_0). \quad (2.6)$$

Формулы (2.5) и (2.6) позволяют определить $C_{220}^{(3)}$

$$C_{220}^{(3)} = \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J_n'^2(\alpha) - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n^2(\alpha r_0).$$

Из условия смещения в производных следует

$$\begin{aligned} (C_{110}^{(3)} - C_{210}^{(3)}) \alpha J'_n(\alpha) &= C_{220}^{(3)} \alpha N'_n(\alpha) - \frac{n^2}{4\alpha^4} J_n(\alpha) - \frac{1}{8\alpha} J'_n(\alpha) + \frac{r_0^2}{4\alpha} J'_n(\alpha) - \frac{\pi n^2}{8\alpha^3} J'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \\ &+ \frac{\pi r_0^2}{8\alpha} J_n'^2(\alpha) N'_n(\alpha r_0) + \frac{\pi n^2}{8\alpha^3} J_n^2(\alpha r_0) N'_n(\alpha) - \frac{\pi r_0^2}{8\alpha} J_n'^2(\alpha) N'_n(\alpha) + \frac{n^2}{4\alpha^4 r_0} J_n(\alpha r_0). \end{aligned}$$

Подстановка определенного выше в условие смещения производных определяет $C_{110}^{(3)}$ через $C_{210}^{(3)}$

$$C_{110}^{(3)} = C_{210}^{(3)} + \frac{r_0^2}{4\alpha^2} - \frac{1}{8\alpha^2} - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) + \frac{n^2}{4\alpha^5 r_0 J'_n(\alpha)} [J_n(\alpha r_0) - r_0 J_n(\alpha)],$$

откуда согласно

$$2n^2(r_0 J_n(\alpha) - J_n(\alpha r_0)) = -\alpha^3 r_0 (1 - r_0^2) J'_n(\alpha)$$

$$C_{110}^{(3)} = C_{210}^{(3)} - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) + \frac{2r_0^3 \alpha^3 J'_n(\alpha) - \alpha^3 r_0 J'_n(\alpha) + 2n^2 [J_n(\alpha r_0) - r_0 J_n(\alpha)]}{8\alpha^5 r_0 J'_n(\alpha)} = \\ = C_{210}^{(3)} - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) + \frac{r_0^2}{8\alpha^2}.$$

Окончательно, на $0 \leq r \leq 1$

$$X^{(3)}(r) = \frac{r_0^2 - r^2}{8\alpha^2} J_n(\alpha r) - \frac{r}{4\alpha^3} J'_n(\alpha r) - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\ + C_{210}^{(3)} J_n(\alpha r).$$

Выражение $C_{210}^{(3)}$ через $C_{110}^{(3)}$ даёт дополнительное упрощение

$$X^{(3)}(r) = -\frac{1}{4\alpha^3} r J'_n(\alpha r) - \frac{1}{8\alpha^2} r^2 J_n(\alpha r) + C J_n(\alpha r).$$

3. Присоединённые функции сопряжённой задачи при $s = 2$ без предположения непрерывности функции в точке r_0

Сопряжённая задача имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda v &= 0 \text{ в областях } \Omega_{r_0} \text{ и } \Omega \setminus \Omega_{r_0}, \\ \frac{\partial v(r_0 - 0, \theta)}{\partial r} &= \frac{\partial v(r_0 + 0, \theta)}{\partial r}, \quad \frac{\partial v(1, \theta)}{\partial r} = 0, \\ r_0[-v(r_0 + 0, \theta) + v(r_0 - 0, \theta)] &+ v(1 - 0, \theta) = 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Если же кроме того предположить непрерывность $v(r, \theta)$ в точке $r = r_0$, то возникают условия

$$v(r_0 - 0, \theta) = v(r_0 + 0, \theta), \quad \frac{\partial v(r_0 - 0, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial v(r_0 + 0, \theta)}{\partial r}, \quad v(1, \theta) = 0.$$

Однако при таком дополнительном условии оказывается, что присоединённые элементы отсутствуют.

В силу ограниченности и периодичности $v(r, \theta)$ по θ (3.7) имеет решение [1] $v(r, \theta) = \mathcal{X}^{(1)}(r)[d_{n1} \cos(n, \theta) + d_{n2} \sin(n, \theta)]$, где

$$\mathcal{X}^{(1)}(r) = \begin{cases} [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] J_n(\alpha r), & 0 \leq r < r_0, \\ J'_n(\alpha) N_n(\alpha r) - N'_n(\alpha) J_n(\alpha r), & r_0 < r \leq 1, \end{cases} \tag{3.8}$$

отвечающее собственным значениям $\lambda = \alpha^2 = \alpha^2(n)$, где α является корнями уравнения (2.1).

3.1. Вычисление 2-го элемента жордановой цепочки

Присоединенные функции 1-го порядка имеют вид $\Psi_n^{(2)}(r, \theta) = \mathcal{X}^{(2)}(r)[d_{n1} \cos(n, \theta) + d_{n2} \sin(n, \theta)]$ с условием их существования (отсутствия) $I_n^{(1)}(\alpha) = \int_0^1 \rho \mathcal{X}^{(1)}(\rho) X^{(1)}(\rho) d\rho = (n^2 - \alpha^2) r_0 J_n(\alpha) + (r_0^2 \alpha^2 - n^2) J_n(\alpha r_0) \cong f'(\alpha) = 0 (\neq 0)$.

$\mathcal{X}^{(2)}(r)$ определяется как решение граничной задачи Бесселя с правой частью (3.8)

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{(2)''}(r) + \frac{1}{r} \mathcal{X}^{(2)'}(r) + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \mathcal{X}^{(2)}(r) &= \mathcal{X}^{(1)}(r), \\ \frac{d\mathcal{X}^{(2)}(r_0 - 0)}{dr} &= \frac{d\mathcal{X}^{(2)}(r_0 + 0)}{dr}, \quad \frac{d\mathcal{X}^{(2)}(1)}{dr} = 0, \\ r_0[\mathcal{X}^{(2)}(r_0 - 0) - \mathcal{X}^{(2)}(r_0 + 0)] + \mathcal{X}^{(2)}(1) &= 0. \end{aligned}$$

Согласно методу Лагранжа вариации произвольных постоянных, применяемому отдельно в областях $0 \leq r < r_0$ и $r_0 < r \leq 1$ решение $\mathcal{X}^{(2)}(r)$ ищется в виде

$$\mathcal{X}^{(2)}(r) = \begin{cases} D_{11}^{(2)}(r)J_n(\alpha r) + D_{12}^{(2)}(r)N_n(\alpha r), & 0 \leq r < r_0, \\ D_{21}^{(2)}(r)J_n(\alpha r) + D_{22}^{(2)}(r)N_n(\alpha r), & r_0 < r \leq 1, \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} D_{11}^{(2)}(r) &= -\frac{\pi}{2}[N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] \int_0^r \rho J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho = \\ &= -\frac{\pi}{4}[N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] \left\{ \left(r^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) + r^2 J'_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) \right\} + D_{110}^{(2)}, \\ D_{12}^{(2)}(r) &= \frac{\pi}{2}[N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] \int_0^r \rho J_n^2(\alpha \rho) d\rho = \\ &= \frac{\pi}{4}[N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] \left\{ \left(r^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n^2(\alpha r) + r^2 J_n'^2(\alpha r) \right\}, \\ D_{21}^{(2)}(r) &= -\frac{\pi}{2} J'_n(\alpha) \int_{r_0}^r \rho N_n^2(\alpha \rho) d\rho + \frac{\pi}{2} N'_n(\alpha) \int_0^r \rho J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho = \\ &= -\frac{\pi}{4} J'_n(\alpha) \left\{ r^2 N_n'^2(\alpha r) + \left(r^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N_n^2(\alpha r) - r_0^2 N_n'^2(\alpha r_0) - \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N_n^2(\alpha r_0) \right\} + \\ &\quad + \frac{\pi}{4} N'_n(\alpha) \left\{ \left(r^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) + r^2 J'_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) - \right. \\ &\quad \left. - \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) - r_0^2 J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) \right\} + D_{210}^{(2)}, \\ D_{22}^{(2)}(r) &= \frac{\pi}{2} J'_n(\alpha) \int_{r_0}^r \rho J_n(\alpha \rho) N_n(\alpha \rho) d\rho - \frac{\pi}{2} N'_n(\alpha) \int_{r_0}^r \rho J_n^2(\alpha \rho) d\rho = \\ &= \frac{\pi}{4} J'_n(\alpha) \left\{ r^2 J'_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) + \left(r^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - r_0^2 J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) - \right. \\ &\quad \left. - \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) \right\} - \frac{\pi}{4} N'_n(\alpha) \left\{ r^2 J_n'^2(\alpha r) + \left(r^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n^2(\alpha r) - r_0^2 J_n'^2(\alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n^2(\alpha r_0) \right\} + D_{220}^{(2)}. \end{aligned}$$

Таким образом, при $0 \leq r < r_0$

$$\mathcal{X}^{(2)}(r) = -\frac{1}{2\alpha} [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] r J'_n(\alpha r) + D_{110}^{(2)} J_n(\alpha r), \quad 0 \leq r < r_0$$

и при $r_0 < r \leq 1$

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{(2)}(r) &= -\frac{1}{2\alpha} J'_n(\alpha) r N'_n(\alpha r) + \frac{1}{2\alpha} N'_n(\alpha) r J'_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha) N_n'^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\ &\quad + \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J'_n(\alpha) N_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\ &\quad - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4} J_n'^2(\alpha) N'_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r) - \\ &\quad - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{4} J_n'^2(\alpha) N'_n(\alpha) N_n(\alpha r) + \\ &\quad + \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N'_n(\alpha) J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + D_{210}^{(2)} J_n(\alpha r) + D_{220}^{(2)} N_n(\alpha r). \end{aligned}$$

Используя граничные условия (3.7), получаем систему линейных неоднородных алгеб-

раических уравнений для определения постоянных интегрирования $D_{110}^{(2)}$, $D_{210}^{(2)}$ и $D_{220}^{(2)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} J'_n(\alpha)D_{110}^{(2)} - J'_n(\alpha)D_{210}^{(2)} - N'_n(\alpha r_0)D_{220}^{(2)} = -\frac{1}{\pi\alpha^2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 r_0^2}\right) - \frac{1}{2\alpha r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J'_n(\alpha)N_n(\alpha r_0) + \\ + \frac{1}{2\alpha r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha r_0)N'_n(\alpha), \\ J'_n(\alpha)D_{210}^{(2)} + N'_n(\alpha)D_{220}^{(2)} = \frac{1}{\pi\alpha^2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) - \frac{\pi r_0^2}{4} J_n'^2(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0) - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n'^2(\alpha)N_n^2(\alpha r_0) + \\ + \frac{\pi r_0^2}{2} J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha)N_n'(\alpha r_0) + \frac{\pi}{2} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J'_n(\alpha)N'_n(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0) - \frac{\pi r_0^2}{4} J_n'^2(\alpha)N_n'^2(\alpha) - \\ - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n^2(\alpha r_0)N_n'^2(\alpha), \\ r_0 J_n(\alpha r_0)D_{110}^{(2)} + [J_n(\alpha) - r_0 J_n(\alpha r_0)]D_{210}^{(2)} + [N_n(\alpha) - r_0 N_n(\alpha r_0)]D_{220}^{(2)} = \\ = -\frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0)J_n(\alpha) - \frac{\pi}{4} J'_n(\alpha) \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha) + \\ + \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha)N'_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0)J_n(\alpha) + \frac{\pi}{4} N'_n(\alpha) \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha) + \\ + \frac{\pi r_0^2}{4} J_n'^2(\alpha)N_n'(\alpha r_0)N_n(\alpha) + \frac{\pi}{4} J'_n(\alpha) \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)N_n(\alpha) - \\ - \frac{\pi r_0^2}{4} N'_n(\alpha)J_n'^2(\alpha)N_n(\alpha) - \frac{\pi}{4} N'_n(\alpha) \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n^2(\alpha r_0)N_n(\alpha) + \\ + \frac{r_0^2}{2\alpha} J'_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0) - \frac{r_0^2}{2\alpha} J'_n(\alpha)N'_n(\alpha), \end{array} \right.$$

с нулевым определителем. Выражая из первых двух уравнений системы $D_{110}^{(2)}$ и $D_{210}^{(2)}$ через $D_{220}^{(2)}$ и полагая $D_{220}^{(2)} = J'_n(\alpha)D$, определяем решение $\mathcal{X}^{(2)}(r)$ с точностью до слагаемого $D\mathcal{X}^{(1)}(r)$. Таким образом, $\mathcal{X}^{(2)}(r)$ принимает вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{(2)}(r) = & -\frac{1}{2\alpha} [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] r J'_n(\alpha r) + \frac{n^2(1-r_0^2)}{\pi\alpha^4 r_0^2 J'_n(\alpha)} J_n(\alpha r) - \frac{1}{2\alpha r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) + \\ & + \frac{1}{2\alpha r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) \frac{N'_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha)N_n'^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \\ & - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J'_n(\alpha)N_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{2} J'_n(\alpha)N'_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) + \\ & + \frac{\pi}{2} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N'_n(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha)N_n'^2(\alpha)J_n(\alpha r) - \\ & - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) \frac{N_n'^2(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r) + D[N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)]J_n(\alpha r) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{(2)}(r) = & -\frac{1}{2\alpha} J'_n(\alpha)rN'_n(\alpha r) + \frac{1}{2\alpha} N'_n(\alpha)rJ'_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha)N'_n(\alpha)N'_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) + \\ & + \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N'_n(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4} J_n'^2(\alpha)N'_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r) - \\ & - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J'_n(\alpha)J_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r_0)N_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{4} J_n'^2(\alpha)N'_n(\alpha)N_n(\alpha r) + \\ & + \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) N'_n(\alpha)J_n^2(\alpha r_0)N_n(\alpha r) + \frac{1}{\pi\alpha^2 J'_n(\alpha)} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha)N_n'^2(\alpha)J_n(\alpha r) - \\ & - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2}\right) \frac{N_n'^2(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0)J_n(\alpha r) + D[J'_n(\alpha)N_n(\alpha r) - N'_n(\alpha)J_n(\alpha r)]. \end{aligned}$$

Равенство (не равенство) нулю интеграла $I_n^{(2)}(\alpha) = \int_0^1 \mathcal{X}^{(2)}(\rho)X^{(1)}(\rho)d\rho$ даёт условие существования (отсутствия) 3-го элемента ЖЦ.

$$\begin{aligned}
I_n^{(2)}(\alpha) = & -\frac{J'_n(\alpha)}{2\alpha} \int_{r_0}^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) N'_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{N'_n(\alpha)}{2\alpha} \int_0^1 \rho^2 J_n(\alpha\rho) J'_n(\alpha\rho) d\rho + \\
& + \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) \int_{r_0}^1 \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho + \\
& + \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) \int_{r_0}^1 \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho - \\
& - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) \int_{r_0}^1 \rho J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho - \\
& - \frac{\pi r_0^2}{4} J_n'^2(\alpha) N'_n(\alpha r_0) \int_{r_0}^1 \rho J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \\
& + \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'_n(\alpha) J_n^2(\alpha r_0) \int_{r_0}^1 \rho J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{\pi r_0^2}{4} J_n'^2(\alpha) N'_n(\alpha) \int_{r_0}^1 \rho J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho + \\
& + \frac{1}{\pi \alpha^2 J'_n(\alpha)} \int_{r_0}^1 \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho - \frac{n^2}{\pi \alpha^4 J'_n(\alpha)} \int_0^1 \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho - \\
& - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \frac{N_n'^2(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0) \int_0^1 \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho - \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha) N_n'^2(\alpha) \int_0^1 \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho - \\
& - \frac{N'_n(\alpha r_0)}{2\alpha} \int_0^{r_0} \rho^2 J_n(\alpha\rho) J'_n(\alpha\rho) d\rho + \frac{n^2}{\pi \alpha^4 r_0^2 J'_n(\alpha)} \int_0^{r_0} \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho - \\
& - \frac{1}{2\alpha r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N_n(\alpha r_0) \int_0^{r_0} \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho + \frac{1}{2\alpha r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \frac{N'_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n(\alpha r_0) \int_0^{r_0} \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho - \\
& - \frac{\pi r_0^2}{4} J'_n(\alpha) N_n'^2(\alpha r_0) \int_0^{r_0} \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'_n(\alpha) N_n^2(\alpha r_0) \int_0^{r_0} \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho + \\
& + \frac{\pi}{2} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) \int_0^{r_0} \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho + \\
& + \frac{\pi r_0^2}{2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) \int_0^{r_0} \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho.
\end{aligned}$$

Формулы для вычисления интегралов $\int \rho J_n^2(\alpha\rho) d\rho$ и $\int \rho J_n(\alpha\rho) N_n(\alpha\rho) d\rho$ даны в справочном издании [2]. Интегралы $\int \rho^2 J_n(\alpha\rho) N'_n(\alpha\rho) d\rho$ и $\int \rho^2 J_n(\alpha\rho) J'_n(\alpha\rho) d\rho$ вычислим методом интегрирования по частям.

$$\begin{aligned}
\int r^2 J_n(\alpha r) J'_n(\alpha r) dr &= \frac{1}{\alpha^3} \int (\alpha r)^2 J_n(\alpha r) J'_n(\alpha r) d(\alpha r) = \\
&= \frac{1}{\alpha^3} (\alpha r)^2 J_n^2(\alpha r) - \frac{1}{\alpha^3} \int J_n(\alpha r) (2\alpha r J_n(\alpha r) + (\alpha r)^2 J'_n(\alpha r)) d(\alpha r) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{r^2}{\alpha} J_n^2(\alpha r) - \frac{2}{\alpha} \int r J_n^2(\alpha r) dr - \int r^2 J_n(\alpha r) J'_n(\alpha r) dr; \\
2 \int r^2 J_n(\alpha r) J'_n(\alpha r) dr &= \frac{r^2}{\alpha} J_n^2(\alpha r) - \frac{2}{\alpha} \int r J_n^2(\alpha r) dr; \\
\int r^2 J_n(\alpha r) J'_n(\alpha r) dr &= \frac{r^2}{2\alpha} J_n^2(\alpha r) - \frac{1}{\alpha} \int r J_n^2(\alpha r) dr = \\
&= \frac{r^2}{2\alpha} J_n^2(\alpha r) - \frac{r^2}{2\alpha} \left[J_n^2(\alpha r) - \frac{n^2}{\alpha^2 r^2} J_n^2(\alpha r) + J_n'^2(\alpha r) \right] = \frac{n^2}{2\alpha^3} J_n^2(\alpha r) - \frac{r^2}{2\alpha} J_n'^2(\alpha r). \\
\int r^2 J_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) dr &= \int r^2 [J_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) - J'_n(\alpha r) N_n(\alpha r)] dr + \int r^2 J'_n(\alpha r) N_n(\alpha r) dr = \\
&= \int r^2 \frac{2}{\pi\alpha r} dr + \int r^2 J'_n(\alpha r) N_n(\alpha r) dr = \frac{2}{\pi\alpha} \int r dr + \int r^2 J'_n(\alpha r) N_n(\alpha r) dr = \\
&= \frac{r^2}{\pi\alpha} + \int r^2 J'_n(\alpha r) N_n(\alpha r) dr = \frac{r^2}{\pi\alpha} + \frac{1}{\alpha^3} \int (\alpha r)^2 J'_n(\alpha r) N_n(\alpha r) d(\alpha r) = \\
&= \frac{r^2}{\pi\alpha} + \frac{r^2}{\alpha} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{1}{\alpha^3} \int J_n(\alpha r) [2\alpha r N_n(\alpha r) + (\alpha r)^2 N'_n(\alpha r)] d(\alpha r) = \\
&= \frac{r^2}{\pi\alpha} + \frac{r^2}{\alpha} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{2}{\alpha} \int r J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) dr - \int r^2 J_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) dr; \\
2 \int r^2 J_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) dr &= \frac{r^2}{\pi\alpha} + \frac{r^2}{\alpha} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{2}{\alpha} \int r J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) dr; \\
\int r^2 J_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) dr &= \frac{r^2}{2\pi\alpha} + \frac{r^2}{2\alpha} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{1}{\alpha} \int r J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) dr = \\
&= \frac{r^2}{2\pi\alpha} + \frac{r^2}{2\alpha} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{r^2}{2\alpha} \left[J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{n^2}{\alpha^2 r^2} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) + J'_n(\alpha r) N'_n(\alpha r) \right] = \\
&= \frac{r^2}{2\pi\alpha} + \frac{n^2}{2\alpha^3} J_n(\alpha r) N_n(\alpha r) - \frac{r^2}{2\alpha} J'_n(\alpha r) N'_n(\alpha r).
\end{aligned}$$

Подстановка найденных интегралов и применение условий (2.1) и (2.2) даёт окончательный результат $I_n^{(2)}(\alpha) = \int_0^1 \mathcal{X}^{(2)}(\rho) X^{(1)}(\rho) d\rho = \frac{1}{4\pi\alpha^5 r_0} [2n^2 r_0 J_n(\alpha) - 2n^2 J_n(\alpha r_0) + \alpha^3 r_0 (1 - r_0^2) J'_n(\alpha)] = -\frac{1}{4\pi\alpha^3} [-2J_n(\alpha) + 2r_0 J_n(\alpha r_0) + \alpha(r_0^2 - 1) J'_n(\alpha)]$.

3.2. Вычисление 3-го элемента $\mathcal{X}^{(3)}(r)$ ЖКЦ

В работе [1] доказано, что одновременное выполнение условий $f^{(k)}(\alpha) = 0$, $k = 0, 1, 2, 3$ невозможно. Это означает, что ЖКЦ обрывается на 3-ем элементе, т.е. имеет длину 3.

При выполнении (2.1), (2.2) и (2.3) $\mathcal{X}^{(3)}(r)$ является решением неоднородного уравнения Бесселя с теми же краевыми условиями гладкости и смещения.

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^{(3)''}(r) + \frac{1}{r} \mathcal{X}^{(3)'}(r) + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) \mathcal{X}^{(3)}(r) &= \mathcal{X}^{(2)}(r), \\
\frac{d\mathcal{X}^{(3)}(r_0 - 0)}{dr} &= \frac{d\mathcal{X}^{(3)}(r_0 + 0)}{dr}, \quad \frac{d\mathcal{X}^{(3)}(1)}{dr} = 0, \\
r_0 [\mathcal{X}^{(3)}(r_0 - 0) - \mathcal{X}^{(3)}(r_0 + 0)] + \mathcal{X}^{(3)}(1) &= 0.
\end{aligned}$$

и имеет вид, соответственно при $0 \leq r < r_0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^{(3)}(r) &= -\frac{1}{8\alpha^2} [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] r^2 J_n(\alpha r) - \frac{1}{4\alpha^3} [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] r J'_n(\alpha r) + \\
&+ \frac{n^2(r_0^2 - 1)}{2\pi\alpha^5 r_0^2 J'_n(\alpha)} r J'_n(\alpha r) + \frac{1}{4\alpha^2 r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N_n(\alpha r_0) r J'_n(\alpha r) - \\
&- \frac{1}{4\alpha^2 r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \frac{N'_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n(\alpha r_0) r J'_n(\alpha r) + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha} J'_n(\alpha) N_n'^2(\alpha r_0) r J'_n(\alpha r) + \\
&+ \frac{\pi}{8\alpha} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'_n(\alpha) N_n^2(\alpha r_0) r J'_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4\alpha} J'_n(\alpha) N_n'(\alpha) N_n'(\alpha r_0) r J'_n(\alpha r) - \\
&- \frac{\pi}{4\alpha} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) r J'_n(\alpha r) + \frac{\pi}{8\alpha} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \frac{N_n'^2(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0) r J'_n(\alpha r) + \\
&+ \frac{\pi r_0^2}{8\alpha} J'_n(\alpha) N_n'^2(\alpha) r J'_n(\alpha r) + \frac{r_0^2}{8\alpha^2} [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] J_n(\alpha r) - N'_n(\alpha) J_n(\alpha r) + \\
&+ \frac{n^2(r_0^2 - 1)}{4\alpha^5 r_0 J'_n(\alpha)} [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] J_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \frac{J_n(\alpha r_0)}{J_n'^2(\alpha)} J_n(\alpha r) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4\alpha^2 r_0^2} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{J_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)} N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & - & \frac{1}{4\alpha^2 r_0^2} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{N'_n(\alpha)}{J'^2_n(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\
& + \frac{1}{4\alpha^2} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] J_n(\alpha r) & - & \frac{\pi}{4\alpha r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{N'_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi r_0}{8\alpha} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & + & \frac{\pi}{8\alpha r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 J_n(\alpha r_0) N_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi^2 r_0^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'_n(\alpha) N'^2_n(\alpha r_0) J_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & + & \frac{\pi^2 r_0^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'^2_n(\alpha) N'_n(\alpha) N_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi}{8\alpha r_0} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{N'^2_n(\alpha)}{J'^2_n(\alpha)} J_n^3(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & + & \frac{\pi r_0}{8\alpha} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'^2_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{n^2}{2\pi\alpha^6 J'_n(\alpha)} J_n(\alpha r) & + & \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J'_n(\alpha) N_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & - & \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'^2_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi n^2}{4\alpha^4} N'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & + & \frac{\pi r_0^2}{4\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{3\pi^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 N'_n(\alpha) J_n^2(\alpha r_0) N_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi^2 r_0^2}{4} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'_n(\alpha) N'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{r_0^2}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] J_n(\alpha r) - \frac{3\pi^2 r_0^4}{16} J'^2_n(\alpha) N'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) [N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{1}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \frac{J_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)} N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi^2 r_0^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'_n(\alpha) N'^2_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 J'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n^3(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & + & \frac{\pi^2 r_0^4}{16} J'^2_n(\alpha) N'^3_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi^2 r_0^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'^2_n(\alpha) N_n^2(\alpha r_0) [N'_n(\alpha r_0) & - & N'_n(\alpha)] J_n(\alpha r) + \\
& + \frac{1}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \frac{N'_n(\alpha)}{J'^2_n(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{\pi^2 r_0^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J_n^2(\alpha r_0) N'_n(\alpha) N'^2_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{1}{2\pi\alpha^3} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{J_n(\alpha)}{J'^2_n(\alpha)} J_n(\alpha r) & + & \frac{3\pi^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{N'^2_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n^3(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\
& + \frac{3\pi^2 r_0^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'^2_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) J_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \\
& + \frac{3\pi^2 r_0^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'_n(\alpha) N'^2_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} \frac{N'^2_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'^2_n(\alpha) J_n(\alpha r) - \frac{\pi^2 r_0^4}{16} J'^2_n(\alpha) N'^3_n(\alpha) J_n(\alpha r) - \frac{\pi^2 r_0^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'^3_n(\alpha) J_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{N'^3_n(\alpha)}{J'^2_n(\alpha)} J_n^4(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + D[N'_n(\alpha r_0) - N'_n(\alpha)] J_n(\alpha r)
\end{aligned}$$

и соответственно при $r_0 < r \leq 1$

$$\begin{aligned}
\mathcal{X}^{(3)}(r) = & - \frac{1}{4\alpha^3} J'_n(\alpha) r N'_n(\alpha r) + \frac{1}{8\alpha^2} N'_n(\alpha) r^2 J_n(\alpha r) + \frac{1}{4\alpha^3} N'_n(\alpha) r J'_n(\alpha r) - \frac{r_0^2}{8\alpha^2} N'_n(\alpha) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} N'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & + & \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & - \\
& - \frac{\pi}{8\alpha} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) r J'_n(\alpha r) - \frac{\pi^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 N'_n(\alpha) J_n^2(\alpha r_0) N_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi^2 r_0^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'_n(\alpha) N'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{8\alpha} J'_n(\alpha) N'_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) r J'_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi^2 r_0^4}{16} J'^2_n(\alpha) N'_n(\alpha) N'^2_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & + & \frac{\pi}{8\alpha} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'_n(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) r N'_n(\alpha r) & + \\
& + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha} J'^2_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) r N'_n(\alpha r) & - & \frac{\pi}{8\alpha} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'_n(\alpha) J_n^2(\alpha r_0) r N'_n(\alpha r) & - \\
& - \frac{\pi r_0^2}{8\alpha} J'^2_n(\alpha) N'_n(\alpha) r N'_n(\alpha r) & - & \frac{1}{2\pi\alpha^3 J'_n(\alpha)} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) r J'_n(\alpha r) & - \\
& - \frac{1}{4\alpha^2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \frac{J_n(\alpha r_0)}{J'_n(\alpha)} N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & - & \frac{r_0^2}{4\alpha^2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & + \\
& + \frac{\pi}{8\alpha} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \frac{N'^2_n(\alpha)}{J'^2_n(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0) r J'_n(\alpha r) & + & \frac{\pi^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{N'^2_n(\alpha)}{J'_n(\alpha)} J_n^3(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & + \\
& + \frac{\pi^2 r_0^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N'^2_n(\alpha) N'_n(\alpha r_0) J_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) & + & \frac{\pi r_0^2}{8\alpha} J'_n(\alpha) N'^2_n(\alpha) r J'_n(\alpha r) & +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\pi^2 r_0^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J'_n(\alpha) N_n'^2(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \frac{\pi^2 r_0^4}{8} J_n'^2(\alpha) N_n'^2(\alpha) N_n'(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{n^2}{2\pi\alpha^6 J_n'(\alpha)} J_n(\alpha r) + \frac{1}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \frac{N_n'(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) + \frac{r_0^2}{2\alpha^2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N_n'(\alpha) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{1}{2\pi\alpha^3} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{J_n(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)} J_n(\alpha r) + \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} \frac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'(\alpha)} J_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J_n'(\alpha) N_n'^2(\alpha) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi^2 r_0^4}{16} J_n'^2(\alpha) N_n'^3(\alpha) J_n(\alpha r) - \frac{\pi^2 r_0^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) N_n'^3(\alpha) J_n^2(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{N_n'^3(\alpha)}{J_n'^2(\alpha)} J_n^4(\alpha r_0) J_n(\alpha r) - \frac{1}{8\alpha^2} J_n'(\alpha) r^2 N_n(\alpha r) + \frac{r_0^2}{8\alpha^2} J_n'(\alpha) N_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} J_n'(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J_n'^2(\alpha) N_n'(\alpha r_0) N_n(\alpha r) - \frac{\pi n^2}{8\alpha^4} N_n'(\alpha) J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi r_0^2}{8\alpha^2} J_n'^2(\alpha) N_n'(\alpha) N_n(\alpha r) - \frac{\pi^2 r_0^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J_n'^2(\alpha) N_n'(\alpha) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 J_n^3(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) N_n'(\alpha) N_n(\alpha r) - \frac{\pi^2 r_0^4}{8} J_n'^3(\alpha) N_n'(\alpha) N_n'(\alpha r_0) N_n(\alpha r) - \\
& - \frac{\pi^2 r_0^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J_n'(\alpha) N_n'(\alpha) N_n'(\alpha r_0) J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 J_n'(\alpha) J_n^2(\alpha r_0) N_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi^2 r_0^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J_n^2(\alpha) N_n'(\alpha r_0) J_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \frac{\pi^2 r_0^4}{16} J_n'^3(\alpha) N_n'^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) - \\
& - \frac{r_0^2}{4\alpha^2} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J_n'(\alpha) N_n(\alpha r) - \frac{1}{4\alpha^2 J_n'(\alpha)} \left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi^2 r_0^2}{8} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right) J_n'(\alpha) N_n'^2(\alpha) J_n^2(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \frac{\pi^2}{16} \left(r_0^2 - \frac{n^2}{\alpha^2} \right)^2 \frac{N_n'^2(\alpha)}{J_n'(\alpha)} J_n^4(\alpha r_0) N_n(\alpha r) + \\
& + \frac{\pi^2 r_0^4}{16} J_n'^3(\alpha) N_n'^2(\alpha) N_n(\alpha r) + D[J_n'(\alpha) N_n(\alpha r) - N_n'(\alpha) J_n(\alpha r)].
\end{aligned}$$

4. Собственные значения, собственные и присоединенные функции при $s \geq 2$

В общем случае s -мерного шара в \mathbb{R}^s , $s \geq 2$ задача определения собственных функций для оператора Лапласа со смещениями в производных в классе непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций до 2-го порядка включительно определяются условиями

$$\begin{aligned}
(\Delta + \lambda)u &= \frac{1}{r^{s-1}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^{s-1} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \Delta_\Theta u + \lambda u = 0, \quad u \in C^{2+\alpha}(\Omega), \\
\frac{\partial u(r_0, \Theta)}{\partial r} &= \frac{\partial u(1, \Theta)}{\partial r}, \quad \Omega = \{r, \Theta | r \leq 1, \Theta = (\theta_1, \dots, \theta_{n-1})\},
\end{aligned} \tag{4.9}$$

где Δ_Θ – оператор Лапласа на единичной сфере S^{s-1} в \mathbb{R}^s .

Разделяя переменные $u(r, \Theta) = X(r)Y(\Theta)$, получаем уравнение для полисферических функций $\Delta_\Theta Y_{s,n} + \mu Y_{s,n} = 0$, где $\mu = n(n+s-2)$, а для функций $X(r)$ дифференциальное уравнение $r^2 X''(r) + r(s-1)X'(r) + \lambda r^2 X(r) - n(n+s-2)X(r) = 0$, сводящееся после подстановки $X(r) = r^{-\frac{s}{2}+1}x(r)$ к однородному уравнению Бесселя

$$x''(r) + \frac{1}{r}x'(r) + \left[\lambda - \frac{(n + \frac{s}{2} - 1)^2}{r^2} \right] x(r) = 0. \tag{4.10}$$

При учёте непрерывности и непрерывной дифференцируемости функции $X(r)$, а также смещения в производных, равенство нулю определителя матрицы граничных условий

определяет собственные значения $\lambda = \alpha^2$ как корни уравнения

$$\begin{aligned} f(\alpha) \equiv \alpha & \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \\ & + \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] = 0 \quad (4.11) \end{aligned}$$

с соответствующей собственной функцией $X_{n+\frac{s}{2}-1}(r) = r^{-\frac{s}{2}+1} x(r) = r^{-\frac{s}{2}+1} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)$.

Сопряженная задача

$$\begin{aligned} \Delta v + \lambda v &= 0 \text{ в областях } \Omega_{r_0} \text{ и } \Omega \setminus \Omega_{r_0} \text{ с условиями} \\ \frac{\partial v(r_0 - 0, \Theta)}{\partial r} &= \frac{\partial v(r_0 + 0, \Theta)}{\partial r}, \quad \frac{\partial v(1, \Theta)}{\partial r} = 0, \\ r_0^{s-1} & [-v(r_0 + 0, \Theta) + v(r_0 - 0, \Theta)] + v(1 - 0, \Theta) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

при разделении переменных $v(r, \Theta) = \mathcal{X}(r)Y(\Theta)$ даёт то же уравнение для полисферических функций, а для функции $\mathcal{X}(r) = r^{-\frac{s}{2}+1}\chi(r)$ однородное уравнение Бесселя.

Границные условия определяют однородную систему алгебраических уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \alpha r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \right] D_{11}^{(1)} - \\ - \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \alpha r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \right] D_{21}^{(1)} - \\ - \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \alpha r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \right] D_{22}^{(1)} = 0, \\ \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] D_{21}^{(1)} + \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] D_{22}^{(1)} = 0, \\ r_0^{\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) D_{11}^{(1)} - \left[r_0^{\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] D_{21}^{(1)} - \\ - \left[r_0^{\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] D_{22}^{(1)} = 0. \end{array} \right.$$

для определения постоянных в функции

$$\mathcal{X}_{n,s}^{(1)} = r^{-\frac{s}{2}+1} \begin{cases} D_{11}^{(1)} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r), & 0 \leq r < r_0, \\ D_{21}^{(1)} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) + D_{22}^{(1)} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r), & r_0 < r \leq 1. \end{cases}$$

Равенство определителя системы нулю даёт то же самое условие её разрешимости.

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{n,s}^{(1)}(r) &= Dr^{-\frac{s}{2}+1} \chi_{n+\frac{s}{2}-1}^{(1)}(r) = \\ &= Dr^{-\frac{s}{2}+1} \begin{cases} \left\{ \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \right. \\ \left. + \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \right\} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r), & 0 \leq r < r_0, \\ - \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) + \\ + \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r), & r_0 < r \leq 1. \end{cases} \quad (4.13) \end{aligned}$$

Т е о р е м а 4.1. В случае $s \geq 2$ задача (4.9) имеет собственное значение $\lambda = \alpha^2(n, s)$, определяемое равенством (4.11) с собственными функциями $\Phi_{n,s}^{(1)}(r, \Theta) = X_{n,s}^{(1)}(r)Y_{n,s}(\Theta) = r^{-\frac{s}{2}+1} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)Y_{n,s}(\Theta)$. Её отвечает сопряженная задача (4.12) с

теми же собственными значениями, которым соответствуют собственные функции $\Psi_{n,s}^{(1)}(r, \Theta) = \mathcal{X}_{n,s}^{(1)}(r)Y_{n,s}(\Theta) = r^{-\frac{s}{2}+1}\chi_{n,s}^{(1)}(r)Y_{n,s}(\Theta)$, где $\mathcal{X}_{n,s}^{(1)}(r)$ определяется (4.13). Условие существования (отсутствия) присоединенных элементов имеет вид

$$\begin{aligned} I_{n,s}^{(1)}(\alpha) &= r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 r_0^2 - \left(n + \frac{s}{2} - 1\right)^2 \right] - \\ &\quad - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 - \left(n + \frac{s}{2} - 1\right)^2 \right] \cong f'(\alpha) = 0 \ (\neq 0). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Доказательство. Действительно, условием существования (отсутствия) присоединенных элементов служит обращение в ноль (не равенство нулю) интеграла $I_{n,s}^{(1)}(\alpha) = \int_0^{r_0} \rho^{s-1} X^{(1)}(\rho) \mathcal{X}^{(1)}(\rho) d\rho = \int_0^{r_0} \rho x^{(1)}(\rho) \chi^{(1)}(\rho) d\rho + \int_{r_0}^1 \rho x^{(1)}(\rho) \chi^{(1)}(\rho) d\rho =$

$$\begin{aligned} &= \left\{ \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \int_0^{r_0} \rho J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha \rho) d\rho - \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \int_{r_0}^1 \rho J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha \rho) d\rho + \\ &+ \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \int_{r_0}^1 \rho J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha \rho) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha \rho) d\rho = \\ &= \left\{ \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \left[\frac{r_0^2}{2} J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha r_0) + \frac{1}{2} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) \right] - \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha) - \frac{r_0^2}{2} J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha r_0) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) \right\} + \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \times \\ &\quad \times \left\{ \frac{1}{2} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{r_0^2}{2} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \frac{1}{2} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2}\right) r_0^{2-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \left(1 - \frac{s}{2}\right) \frac{r_0^2}{2} J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha r_0^{3-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \frac{1}{2} \alpha r_0^2 J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \\ &- \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \\ &+ \frac{1}{2} \alpha r_0^{1-\frac{s}{2}} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \\ &- \frac{1}{2} \alpha \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \\ &- \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \frac{1}{2} \alpha J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \\ &- \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \frac{1}{2} \alpha \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \\ &+ \left(1 - \frac{s}{2}\right) \frac{r_0^2}{2} J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \frac{1}{2} \alpha r_0^2 J_{n+\frac{s}{2}-1}^{\prime 2}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \alpha \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \\
& + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \\
& + \frac{1}{2} \alpha \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \\
& + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \\
& + \frac{1}{2} \alpha J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \\
& - \frac{1}{2} \alpha \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \\
& - \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \frac{1}{2} \alpha r_0^2 J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) = \\
& = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) r_0^{2-\frac{s}{2}} J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \frac{1}{2} \alpha r_0^{3-\frac{s}{2}} J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \\
& + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \\
& + \frac{1}{2} \alpha r_0^{1-\frac{s}{2}} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \frac{1}{\pi \alpha} \left(1 - \frac{s}{2} \right) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \\
& - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \\
& - \frac{1}{2} \alpha \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \\
& - \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \frac{1}{2} \alpha r_0^2 J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0).
\end{aligned}$$

Условие разрешимости позволяет выполнить преобразование в полученном выражении

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \alpha r_0^2 \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \\
& + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) = \\
& = -\frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \\
& - \frac{1}{2} \alpha \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0).
\end{aligned}$$

Тогда оно примет вид

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) r_0^{-\frac{s}{2}+2} J'^2_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \\
& - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) r_0^{2-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \\
& + \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \\
& - \frac{1}{2} \alpha r_0^{-\frac{s}{2}+1} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \\
& + \frac{1}{2} \alpha \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \\
& + \frac{1}{2} \alpha r_0^{-\frac{s}{2}+1} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \frac{1}{\pi \alpha} \left(1 - \frac{s}{2} \right) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \\
& - \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \frac{1}{2} \alpha \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \\
& - \frac{r_0^2}{2} \left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) = -\frac{1}{\pi \alpha} \left(1 - \frac{s}{2} \right) r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \\
& + \frac{1}{\pi} r_0^{-\frac{s}{2}} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \frac{1}{\pi \alpha} \left(1 - \frac{s}{2} \right) J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{\alpha}{\pi\alpha^2} \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \frac{1}{\pi} r_0^{-\frac{s}{2}} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \\
&- \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) = \frac{1}{\pi\alpha^2} \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \frac{1}{\pi\alpha^2} \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \\
&+ \frac{1}{\pi} r_0^{-\frac{s}{2}} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) = \\
&= \frac{1}{\pi\alpha^2} \left\{ r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 r_0^2 - \left(n + \frac{s}{2} - 1\right)^2 \right] - \right. \\
&\left. - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 - \left(n + \frac{s}{2} - 1\right)^2 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

В то же время

$$\begin{aligned}
f'(\alpha) &= \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+2} J''_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J''_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \\
&+ \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] = r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \\
&- r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - \alpha r_0^{-\frac{s}{2}+2} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2 r_0^2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \\
&+ \alpha \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \frac{\alpha}{\alpha} \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] = \\
&= -\alpha r_0^{-\frac{s}{2}+2} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2 r_0^2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \alpha \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) - \\
&- \frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 \left[r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] = \\
&= J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \left[-\frac{1}{\alpha} r_0^{-\frac{s}{2}} \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 - \frac{1}{\alpha} \alpha^2 r_0^{-\frac{s}{2}} r_0^2 \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2 r_0^2}\right) \right] + \\
&+ J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \left[\frac{1}{\alpha} \left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{1}{\alpha} \alpha^2 \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2}\right) \right] = \\
&= -\frac{1}{\alpha} r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 r_0^2 \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2 r_0^2}\right) \right] + \\
&+ \frac{1}{\alpha} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2}\right) \right] = \\
&= -\frac{1}{\alpha} \left\{ r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 r_0^2 - \left(n + \frac{s}{2} - 1\right)^2 \right] - \right. \\
&\left. - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 - \left(n + \frac{s}{2} - 1\right)^2 \right] \right\}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $I_{n,s}^{(1)}(\alpha) \cong f'(\alpha)$.

Доказательство закончено.

Подобно вычислению собственных функций задача разыскания $\Phi_{n,s}^{(2)}(r, \Theta)$ ($\Psi_{n,s}^{(2)}(r, \Theta)$) сводится к решению граничных задач для неоднородного уравнения Бесселя с правыми частями $J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)$ (соответственно $\chi_{n,s}(\alpha r)$) и граничными условиями смещения в производных, непрерывности и непрерывной дифференцируемости в точке r_0 для прямой задачи и условиями (4.12) для сопряжённой задачи.

4.1. Прямая задача

Вычисление $X_{n,s}^{(2)}(r)$ как и ранее сводится к решению неоднородного уравнения Бесселя

$$x^{(2)\prime\prime}(r) + \frac{1}{r} x^{(2)\prime}(r) + \left[\alpha^2 - \frac{\left(n + \frac{s}{2} - 1\right)^2}{r^2} \right] x^{(2)}(r) = J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)$$

с теми же граничными условиями (4.9).

Применение метода вариации произвольных постоянных определяет $X_{n,s}^{(2)}(r)$ в следующем виде

$$X_{n,s}^{(2)}(r) = r^{-\frac{s}{2}+1}x^{(2)}(r) = -\frac{1}{2\alpha}r^{-\frac{s}{2}+2}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) + Cr^{-\frac{s}{2}+1}J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r).$$

Для выяснения существования (отсутствия) $X_{n,s}^{(3)}(r)$ требуется вычислить интеграл

$$\begin{aligned} I_{n,s}^{(2)}(\alpha) &= \int_0^1 \rho^{s-1} X^{(2)}(\rho) \mathcal{X}^{(1)}(\rho) d\rho = \int_0^{r_0} \rho x^{(2)}(\rho) \chi^{(1)}(\rho) d\rho + \int_{r_0}^1 \rho x^{(2)}(\rho) \chi^{(1)}(\rho) d\rho = \\ &= -\frac{1}{2\alpha} \left\{ \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \int_0^{r_0} \rho^2 J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho) d\rho + \frac{1}{2\alpha} \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \times \\ &\quad \times \int_{r_0}^1 \rho^2 J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho) d\rho - \frac{1}{2\alpha} \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \times \\ &\quad \times \int_{r_0}^1 \rho^2 J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha\rho) d\rho \cong -2n^2 r_0^{-\frac{s}{2}} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - 2\alpha \left(1 - \frac{s}{2}\right) r_0^{-\frac{s}{2}+1} J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) + \\ &\quad + \left[(1 - r_0^2)\alpha^3 + 2\alpha \left(1 - \frac{s}{2}\right) \right] J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \left[(1 - r_0^2) \left(1 - \frac{s}{2}\right) \alpha^2 + 2n^2 \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha). \end{aligned}$$

При этом $f''(\alpha)$ трудоёмкими вычислениями с использованием условий $f(\alpha) = 0$ и $f'(\alpha) = 0$ приводится к виду $f''(\alpha) \cong I_{n,s}^{(2)}(\alpha) + 2J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 - n^2 \right] - 2J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) r_0^{-\frac{s}{2}} \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 r_0^2 - n^2 \right] = I_{n,s}^{(2)}(\alpha) + R_{n,s}(\alpha)$.

Это означает, что вопрос о существовании $X_{n,s}^{(3)}(r)$ сводится к разрешимости системы $R_{n,s}(\alpha)$, $f'(\alpha) = 0$, т.е. к существованию решений следующей однородной системы

$$\begin{cases} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 - n^2 \right] - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) r_0^{-\frac{s}{2}} \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right)^2 + \alpha^2 r_0^2 - n^2 \right] = 0, \\ J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \left[2n \left(1 - \frac{s}{2}\right) + \alpha^2 - n^2 \right] - J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) r_0^{-\frac{s}{2}} \left[2n \left(1 - \frac{s}{2}\right) + \alpha^2 r_0^2 - n^2 \right] = 0, \end{cases} \quad (4.15)$$

с определителем $\Delta = (1 - \frac{s}{2})^2 \alpha^2 [1 - r_0^2] + 2n\alpha^2 \left(1 - \frac{s}{2}\right) [r_0^2 - 1] = \alpha^2 \left(1 - \frac{s}{2}\right) (1 - r_0^2) [1 - \frac{s}{2} - 2n] \cong 1 - \frac{s}{2} - 2n \neq 0$.

Таким образом, мы приходим к следующему утверждению

Т е о р е м а 4.2. При $s > 2$ ЖЦ имеют длину два.

З а м е ч а н и е 4.1. Однако при $s = 2$ определитель системы (4.15) обращается в ноль, что подтверждает справедливость предшествующих результатов.

4.2. Сопряжённая задача

Вычисление $X_{n,s}^{(2)}(r)$ подобно сводится к решению неоднородного уравнения Бесселя с правой частью $\mathcal{X}_{n,s}^{(1)}(r)$ и с граничными условиями (4.12) методом Лагранжа. Решение на левом промежутке

$$\begin{aligned} \mathcal{X}^{(2)}(r) &= -\frac{1}{2\alpha} \left\{ \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \right. \\ &\quad \left. + \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \right\} r J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) - \frac{1}{2} r_0^{-\frac{s}{2}} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \times \\ &\quad \times \left[\left(1 - \frac{s}{2}\right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^{-1} \left\{ \left(1 - \frac{s}{2}\right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \quad \frac{1}{2\alpha} \left(1 - \frac{s}{2} \right) r_0^{-\frac{s}{2}+1} \times \\
& \times \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^{-1} \left\{ \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \right. \\
& + \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \\
& + \frac{1}{\pi} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^{-1} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \\
& + \frac{1}{\pi\alpha^2} \left(1 - \frac{s}{2} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^{-1} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad - \\
& - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] N_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad - \\
& - \frac{\pi r_0^2}{4} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^{-1} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^2 \times \\
& \times J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad - \quad \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^{-1} \times \\
& \times \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^2 J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \quad \frac{\pi}{2} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \times \\
& \times \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \\
& + \frac{\pi r_0^2}{2} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \\
& + D \left\{ \left(1 - \frac{s}{2} \right) \left[r_0^{-\frac{s}{2}} N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] + \alpha \left[r_0^{-\frac{s}{2}+1} N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) - N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] \right\} \times \\
& \times J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r)
\end{aligned}$$

и на правом промежутке

$$\begin{aligned}
& \mathcal{X}^{(2)}(r) \quad = \quad \frac{r}{2\alpha} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad - \\
& - \frac{r}{2\alpha} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \quad \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \times \\
& \times \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \\
& + \frac{\pi r_0^2}{4} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \\
& + \frac{\pi r_0^2}{4} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \\
& + \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad - \\
& - \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) \quad \times \\
& \times N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) - \frac{\pi r_0^2}{4} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r_0) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) + \\
& + \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^{-1} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad + \\
& + \frac{1}{\pi\alpha^2} \left(1 - \frac{s}{2} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^{-1} J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad - \\
& - \frac{\pi r_0^2}{4} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^{-1} \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^2 J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) \times \\
& \times J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad - \quad \frac{\pi}{4} \left(r_0^2 - \frac{(n+\frac{s}{2}-1)^2}{\alpha^2} \right) \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^{-1} \times \\
& \times \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right]^2 J_{n+\frac{s}{2}-1}^2(\alpha r_0) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \quad +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + D \left\{ - \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha N'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) + \right. \\ & \left. + \left[\left(1 - \frac{s}{2} \right) J_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) + \alpha J'_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha) \right] N_{n+\frac{s}{2}-1}(\alpha r) \right\}. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Логинов Б.В., Юлдашев Н.Н., Герасимов А.В., “Задача на собственные значения для оператора Лапласа в s -мерном шаре со смещениями в производных”, *Журнал CBMO*, **15**:4 (2013), 136–147.
2. Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И., *Интегралы и ряды. Специальные функции*, Наука, М., 1983, 780 с.

Eigenvalue problem for the Laplace operator in s -dimensional unit ball $\Omega \subset \mathbb{R}^{s+1}$ with displacements in derivatives II

© A. V. Gerasimov⁴, B. V. Loginov⁵, N. N. Yuldashev⁶

Abstract. In the class of continuous and continuously differentiable up to the second order functions the boundary eigenvalue problem for the Laplace operator in s -dimensional unit ball Ω with displacements in derivatives along the radii $0 < r_0 < 1$ and 1 of the concentric spheres is considered, i.e. $u \in C^{2+\alpha}(\Omega)$ and $\frac{\partial u(r_0, \theta)}{\partial r} = \frac{\partial u(1, \theta)}{\partial r}$. In the previous work of the authors [1] were found eigenvalues and for $s = 2$ eigen- and adjoint functions (Jordan chains) for the direct problem; and their length does not exceed three. In this work, calculated Jordan chains for the conjugate problem when $s = 2$, the direct and conjugate problems when $s > 2$, and it is proved that if $s > 2$ they are terminated at the second elements.

Key Words: Laplace operator, unit ball in \mathbb{R}^{s+1} , eigenvalues, eigen- and adjoint functions, Jordan chains, direct and conjugate problems for $s = 2$ and $s > 2$.

⁴ Postgraduate student of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Ogarev Mordovia State University, Saransk; gerasimov_artyom@mail.ru.

⁵ Professor of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; bvllbv@yandex.ru.

⁶ Docent of Higher Mathematics Chair, Tashkent Institute of Textile and Light Industry, Tashkent; nurilla1956@mail.ru.

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 517.9

Исследование чувствительности результатов кинетического моделирования к константам скорости стадий реакции

© Н. М. Байназарова¹, Л. Ф. Нурисламова², И. М. Губайдуллин³

Аннотация. При математическом моделировании химического процесса первоочередным шагом является анализ чувствительности кинетических кривых к константам скорости стадий. Анализ чувствительности позволяет выделить важные, определяющие стадии реакции, а также редуцировать детальные кинетические схемы. В работе представлены результаты локального и глобального анализа чувствительности применительно к реакции окисления формальдегида.

Ключевые слова: кинетическая модель, реакция окисления формальдегида, анализ чувствительности, редуцирование механизма

1. Введение

Даже сравнительно простые химические процессы состоят из многих стадий и содержат большое количество промежуточных веществ. При моделировании такого процесса можно столкнуться со следующими проблемами. Во-первых, моделируемая задача, представляющая собой систему дифференциальных уравнений, может быть трудноразрешимой из-за высокой размерности системы (десятки, как правило, нелинейных уравнений) и из-за высокой или сверхвысокой жесткости задачи, обусловленная наличием быстро и медленно меняющихся фазовых переменных (поскольку различные стадии реакций протекают со скоростями, отличающимися на несколько порядков). Во-вторых, модель, как правило, содержит большое количество неопределенных (а иногда и неизвестных) кинетических параметров. Кроме того, с целью понимания поведения реакции, как правило, предпочтительны более простые модели, которые содержат ключевые стадии и вещества реакции [1]. По этим причинам, упрощение математической модели (уменьшении числа уравнений и, вместе с этим, числа параметров, определяющих поведение системы) и сокращение числа стадий является центральной проблемой в исследовании сложных реакций [2, 3, 4].

За последнее десятилетие предложено большое количество методов, нацеленных на сокращение механизмов реакций [5, 6]. В настоящей работе мы используем методы анализа чувствительности, связанные с анализом зависимостей между входными и выходными параметрами численных моделей [2, 7]. Анализ чувствительности численных моделей получил в последние годы большое распространение, что связано с развитием вычислительной

¹ Магистрант первого года обучения, Башкирский государственный университет, г. Уфа; nurzilyasha@mail.ru.

² Аспирант кафедры математического моделирования, Институт нефтехимии и катализа, г. Уфа; Nurislamova_LF@mail.ru.

³ Старший научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа, г. Уфа; IrekMars@mail.ru.

техники и компьютерного моделирования. Эти методы активно применяются при решении многих прикладных задач в сфере кинетики, экономики и в других областях (в большей степени в зарубежных работах) [8, 9].

Анализ чувствительности кинетической модели реакции к изменению констант скоростей отдельных или совокупности всех стадий дает возможность оценить, насколько сильно исследуемая функция зависит от изменений того или иного параметра; какие параметры являются определяющими в модели, а изменения каких из них оказывает незначительные влияния на решение [4], а также дает дополнительную информацию о модели, которая может использоваться для ее эффективной верификации. Существуют глобальные и локальные методы анализа зависимости решения системы кинетических уравнений от констант скоростей реакции [8]. Локальный анализ изучает влияние локальных возмущений значений входных параметров модели вокруг одного начального значения на результат моделирования. Глобальный анализ чувствительности, в отличие от локального, позволяет проанализировать поведение кинетических кривых во всей области значений параметров, количественно оценить влияние отдельных переменных и их групп и выделить существенные и несущественные параметры модели [10].

Объект исследования данной работы – реакция окисления формальдегида, детальный механизм которой включает в себя 25 стадий и 15 веществ. Целью работы является получение редуцированного механизма данной реакции, который описывает такое же поведение основных веществ реакции, как и детальный, но имеет значительно меньше реакций и веществ, причем все реакции элементарные. Редуцированный механизм будет получен применением двух методов анализа чувствительности: локального и глобального. Результаты локального анализа чувствительностей будут сравнены с данными, полученными программой Kintecus [11], которая применяется для моделирования различных химических процессов.

2. Локальный анализ чувствительности

Уравнения химической кинетики представляют собой системы обыкновенных дифференциальных уравнений и в общем виде могут быть записаны следующим образом [12]:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{k}), \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, t \in [0, t_k], \quad (2.1)$$

где \mathbf{x}, \mathbf{x}_0 – векторы текущих и начальных концентраций реагентов, \mathbf{f} – вектор-функция кинетических зависимостей, \mathbf{k} – вектор констант скоростей.

Продифференцировав ОДУ (2.1) по параметрам модели k_j , получаем систему уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial x_j}{\partial k_i} = \frac{\partial f_j}{\partial k_i} + \sum_{l=1}^N \frac{\partial f_j}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial k_i}. \quad (2.2)$$

В (2.2) $\frac{\partial x_j}{\partial k_i}$ – локальные коэффициенты чувствительности концентрации x_j к параметрам k_i в момент времени t , $i = 1, \dots, N, j = 1, \dots, M, M$ – количество веществ, N – количество стадий [4]. Системы уравнений (2.1) и (2.2) следует решать совместно при начальных условиях:

$$x_j(0) = x_j^0, \frac{\partial x_j}{\partial k_i}(0) = 0. \quad (2.3)$$

Для вычисления локальных коэффициентов чувствительности были вычислены частные производные первого порядка для всех веществам по всем константам.

В литературе подробно изучены критерии чувствительности решений системы уравнений химической кинетики (2.1) к изменению входящих в них констант скоростей реакции [4]. Значения критериев чувствительности могут быть положительными, отрицательными и обращаться в нуль. Положительное (отрицательное) значение критерия чувствительности в момент времени t означает, что при принятых значениях констант увеличение данной константы скорости приводит к возрастанию (уменьшению) значения концентрации x_j вещества в данный момент времени. Очевидно, равенство значения критерия нулю означает, что в данной временной точке малое изменение константы k_i не приводит к какому-либо изменению x_j . В данной работе в качестве критерия использовались нормированные коэффициенты чувствительности:

$$S_{ij}^{loc} = \frac{k_i \partial x_j(t, k)}{x_j(t, k) \partial k_i} = \frac{\partial \ln x_j(t, k)}{\partial \ln k_i}, \quad (2.4)$$

которые позволяют оценить влияние изменения каждой из констант k_i на любую из концентраций x_j для любого момента времени t , и оценить влияние какой-либо одной из констант на все (или часть) концентраций для любого момента времени.

3. Глобальный анализ чувствительности

Для вычисления глобальных коэффициентов чувствительности был выбран метод, предложенный Соболем И.М. [13], который основан на декомпозиции дисперсий. Он подходит для изучения нелинейных и немонотонных функций.

Предположим, что исследуемая математическая модель описывается функцией

$$y = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n), \quad (3.1)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ – входные данные, а y – выход (или целевая функция). Функция $f(\mathbf{x})$ определена и интегрируема в единичном n -мерном кубе $K^n = \{0 \leq x_1 \leq 1, \dots, x_n \leq 1\}$.

Соболь предложил разложить функцию $f(\mathbf{x})$ на слагаемые растущей размерности:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_0 + \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n f_{ij}(x_i, x_j) + \dots + f_{1,\dots,n}(x_1, \dots, x_n). \quad (3.2)$$

Глобальными показателями чувствительности называются отношения дисперсий:

$$S_{i_1, \dots, i_s} = \frac{D_{i_1, \dots, i_s}}{D}. \quad (3.3)$$

Все S_{i_1, \dots, i_s} неотрицательны, не превосходят единицы и сумма их нормирована:

$$\sum_{s=1}^n \sum_{i_1 < \dots < i_s} S_{i_1, \dots, i_s} = 1. \quad (3.4)$$

Величины $D_{i_1, \dots, i_s} = \int_K f_{i_1, \dots, i_s}^2 dx_{i_1} \dots dx_{i_s}$ называются дисперсиями, а $D = \int_K f^2(x) dx - f_0^2 = \sum_{i=1}^n D_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n D_{ij} + D_{1,\dots,n}$ – полной дисперсией. Величина D характеризует изменение $f(\mathbf{x})$ в K^n , а величина D_{i_1, \dots, i_s} определяет вклад f_{i_1, \dots, i_s} в это изменение.

В прикладных задачах чаще всего используют коэффициенты чувствительности первого порядка S_i . Коэффициент первого порядка $S_i = \frac{D_i}{D}$ характеризует вклад дисперсии индивидуального параметра x_i к полной дисперсии функции $f(\mathbf{x})$. Чем большее значение имеет коэффициент S_i , тем сильнее влияние переменной x_i на значение функции $f(\mathbf{x})$. Для полного учета влияния переменной x_i используют полные глобальные показатели чувствительности S_i^{tot} . Полные показатели чувствительности позволяет оценить влияние одного параметра на дисперсию выходного параметра модели, а также воздействие всех других возможных комбинаций параметров. Например, если модель зависит от трех параметров, полный глобальный показатель чувствительности для переменной x_1 определяется как:

$$S_1^{tot} = S_1 + S_{12} + S_{13} + S_{123}. \quad (3.5)$$

Также расчет данного показателя может быть основан на вычислении дисперсии D_{-i} , полученной в результате изменения всех параметров, за исключением x_i параметра:

$$S_i^{tot} = S_i + \sum_{j \neq i} S_{ij} + \dots = \frac{D - D_{-i}}{D}. \quad (3.6)$$

Для расчета всех дисперсий используется метод Монте-Карло. По сравнению с другими методами глобального анализа чувствительности метод Соболя имеет ряд преимуществ. Все дисперсии могут быть вычислены с помощью обычного метода Монте-Карло, не требующий явного нахождения членов разложения функции (3.2). Также не требуется информация о статистическом распределении каждого входного фактора модели. Однако данный метод является вычислительно затратным, требует большого числа запусков модели.

4. Детальный механизм реакции окисления формальдегида

Детальный механизм реакции окисления формальдегида является большой системой, которая включает в себя 15 веществ и 25 стадий реакций. Химические реакции и константы скорости при температуре 952 К приведены в таблице 1. В основу расчетов была положена схема реакции, приведенная в Kintecus V 5.20 [11].

На основе закона действующих масс с учетом матрицы стехиометрических коэффициентов составлена математическая модель в виде системы обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений [12, 15]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{dt} &= F_i = \sum_{j=1}^N S_{ij} \cdot w_j, \quad i = 1, \dots, M \\ w_j &= k_j \prod_{i=1}^M (x_i)^{\alpha_{ij}} - k_{-j} \prod_{i=1}^M (x_i)^{\beta_{ij}}, \\ x_i(0) &= x_i^0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где x_i – концентрации веществ, участвующих в реакции; M – количество веществ; N – количество стадий; S_{ij} – стехиометрическая матрица; w_j – скорость j -ой стадии; k_j, k_{-j} – константы скорости прямой и обратной реакции, соответственно; α_{ij}, β_{ij} – отрицательные элементы S_{ij} , положительные элементы S_{ij} .

Таблица 1: Схема химических превращений и константы скоростей реакций

№	Стадия	k_i	№	Стадия	k_i
1	$HCO + O_2 \rightarrow HO_2 + CO$	$6.02 \cdot 10^{10}$	14	$HO_2 + M \rightarrow H + O_2 + M$	$2.83 \cdot 10^5$
2	$HO_2 + CH_2O \rightarrow H_2O_2 + HCO$	$3.43 \cdot 10^{10}$	15	$O + H_2 \rightarrow OH + H$	$1.82 \cdot 10^{11}$
3	$H_2O_2 + M \rightarrow 2OH + M$	$4.01 \cdot 10^6$	16	$O + CH_2O \rightarrow OH + HCO$	$6.02 \cdot 10^{13}$
4	$OH + CH_2O \rightarrow H_2O + HCO$	$9.64 \cdot 10^{13}$	17	$H + H_2O_2 \rightarrow HO_2 + H_2$	$7.83 \cdot 10^{11}$
5	$OH + H_2O_2 \rightarrow H_2O + HO_2$	$3.07 \cdot 10^{12}$	18	$H + H_2O_2 \rightarrow H_2O + OH$	$3.55 \cdot 10^{12}$
6	$H_2O_2 \rightarrow H_2O_2^-$	$1.05 \cdot 10^2$	19	$O + H_2O_2 \rightarrow OH + HO_2$	$6.02 \cdot 10^{10}$
7	$HO_2 \rightarrow HO_2^-$	$1.05 \cdot 10^1$	20	$HCO \rightarrow H + CO$	$4.60 \cdot 10^{-12}$
8	$HO_2 + HO_2 \rightarrow H_2O_2 + O_2$	$1.81 \cdot 10^{12}$	21	$OH + H_2 \rightarrow H_2O + H$	$6.02 \cdot 10^{12}$
9	$OH + CO \rightarrow CO_2 + H$	$1.99 \cdot 10^{11}$	22	$CH_2O + O_2 \rightarrow HCO + HO_2$	$1.75 \cdot 10^4$
10	$HO_2 + CO \rightarrow CO_2 + OH$	$7.23 \cdot 10^8$	23	$H + HO_2 \rightarrow 2OH$	$3.01 \cdot 10^{12}$
11	$H + CH_2O \rightarrow H_2 + HCO$	$1.63 \cdot 10^{12}$	24	$H + HO_2 \rightarrow H_2O + O$	$3.01 \cdot 10^{13}$
12	$H + O_2 \rightarrow OH + O$	$3.32 \cdot 10^{10}$	25	$H + HO_2 \rightarrow H_2 + O_2$	$2.71 \cdot 10^{13}$
13	$H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$	$3.63 \cdot 10^{15}$			

Начальные концентрации в моль/см³: $CH_2O = 1.124 \cdot 10^{-7}$, $O_2 = 2.109 \cdot 10^{-6}$, $CO = 4.699 \cdot 10^{-6}$, $M = 1.1772 \cdot 10^{-5}$, остальные начальные концентрации равны нулю.

5. Результаты расчетов и обсуждение

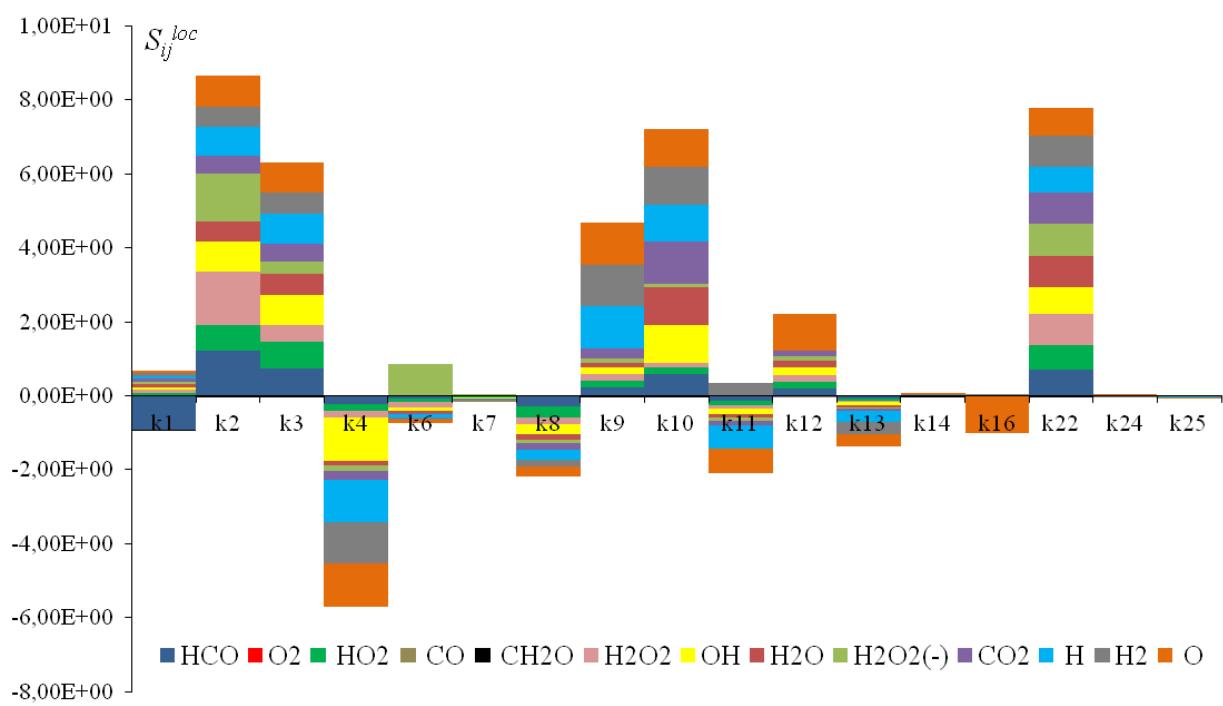
Для проведения локального и глобального анализа чувствительности была реализована программы в среде Visual Studio [16, 17]. Для решения прямой кинетической задачи была выбрана библиотека программ-решателей систем ОДУ на языке Си SADEL [18, 19], задаваемая точность вычислений – 10^{-9} .

В таблице 2 представлены нормированные коэффициенты чувствительности для веществ HO_2 и O в момент времени 0.005 сек. Полученные результаты анализа чувствительности хорошо согласуются с данными, полученными по расчетам Kintecus, максимальная относительная погрешность составляет 0.34%.

На 5.1 представлена гистограмма с накоплением нормированных локальных коэффициентов чувствительностей. Приведены данные по константам, для которых значения нормированного коэффициента чувствительности составляло не менее 0.01 (наиболее влиятельные стадии процесса). На основании локального анализа из модели были исключены 5, 15, 17-21, 23 стадии.

Таблица 2: Локальные коэффициенты чувствительности реакции окисления формальдегида

	$\partial \ln[H_2O_2]/\partial \ln k_i$	$\partial \ln[O]/\partial \ln k_i$		
	<i>Kintecus</i>	Наш расчет	<i>Kintecus</i>	Наш расчет
k_1	$7.49E - 02$	$7.23E - 02$	$7.89E - 02$	$7.94E - 02$
k_2	$6.83E - 01$	$6.68E - 01$	$8.28E - 01$	$8.09E - 01$
k_3	$7.01E - 01$	$6.99E - 01$	$8.36E - 01$	$8.33E - 01$
k_4	$-2.10E - 01$	$-2.09E - 01$	$-1.16E + 00$	$-1.16E + 00$
k_5	$-4.23E - 05$	$-4.22E - 05$	$-2.06E - 04$	$-2.05E - 04$
k_6	$-7.31E - 02$	$-7.30E - 02$	$-8.91E - 02$	$-8.89E - 02$
k_7	$-1.88E - 02$	$-1.88E - 02$	$-1.93E - 02$	$-1.93E - 02$
k_8	$-3.05E - 01$	$-3.05E - 01$	$-2.95E - 01$	$-2.96E - 01$
k_9	$2.10E - 01$	$1.75E - 01$	$1.16E + 00$	$1.12E + 00$
k_{10}	$1.64E - 01$	$1.64E - 01$	$1.03E + 00$	$1.03E + 00$
...
k_{20}	$6.71E - 14$	$2.06E - 16$	$1.48E - 11$	$1.10E - 15$
k_{21}	$1.68E - 05$	$1.68E - 05$	$1.97E - 04$	$1.97E - 04$
k_{22}	$6.86E - 01$	$6.86E - 01$	$7.42E - 01$	$7.42E - 01$
k_{23}	$-8.48E - 05$	$-8.45E - 05$	$-8.06E - 04$	$-8.02E - 04$
k_{24}	$-9.27E - 04$	$-9.25E - 04$	$3.11E - 02$	$3.10E - 02$
k_{25}	$-5.30E - 03$	$-5.29E - 03$	$-1.29E - 02$	$-1.29E - 02$



Р и с у н о к 5.1

Нормированные локальные коэффициенты чувствительности в момент времени 0.005 сек

Результаты, относящиеся к локальным критериям чувствительности, справедливы для

бесконечно малых изменений констант k_i . В случае нелинейности модели и при наличии неопределенности во входных данных желательно в дополнение проводить глобальный анализ чувствительности [20].

В нашей работе для ранжирования влияния всех констант скоростей стадий на изменение расчетных концентрации вещества использовались полные глобальные показатели чувствительности S_i^{tot} [21]. Интегралы высокой кратности для расчета показателей чувствительности мы вычисляли методом Монте-Карло в узлах интегрирования, генерируемых в n -мерном единичном кубе ($n = 2^{12}$). Мы предполагали, что константы скорости являются независимыми друг от друга. Поскольку отсутствовала информация об распределении входных параметров, значения параметров для вычисления коэффициентов чувствительности отбирались из равномерного распределения. Для равномерного распределения возможных значений констант скоростей использовались точки ЛП τ -последовательности, предложенные Соболем И.М [22].

Для схемы, приведенной в таблице 1, мы провели глобальный анализ чувствительности расчетных значений концентраций веществ на вариацию констант скоростей стадий. Константа каждой стадии варьировалась в пределах 3% от своего значения. На 5.2 приведены результаты для момента времени $t = 0.005$ сек, приведены только те стадии, для которых значения коэффициентов чувствительности составляло не менее 0.01 .

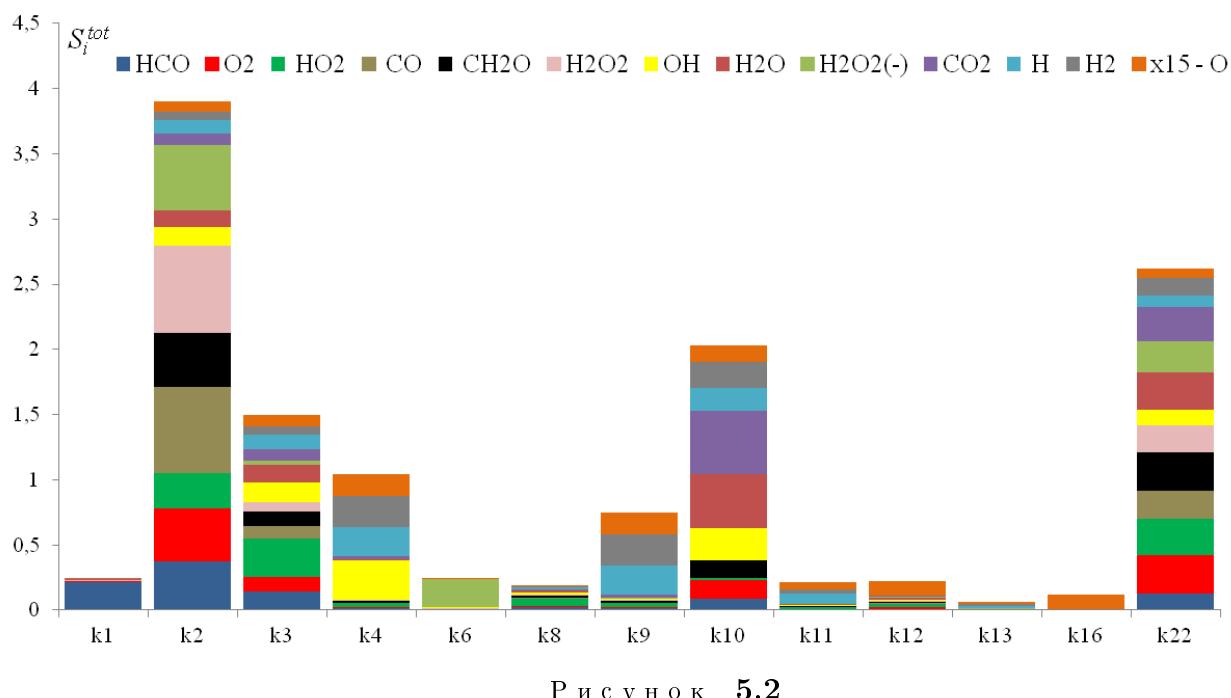


Рисунок 5.2

Полные глобальные коэффициенты чувствительности в момент времени 0.005 сек

Таким образом, на основании глобального анализа, к исключенным константам были добавлены константы под номерами 7, 14, 24 и 25. Стадии, которые являются определяющими в процессе реакции согласно обоим методам – 2, 3, 4, 9, 10, 22. Редуцированный механизм представлен в таблице 3.

Данный механизм имеет такое же описание поведения всех веществ реакции, как и детальный (5.3). $\text{CH}_2\text{O}'$, $\text{H}_2\text{O}_2'$, CO_2' - кинетические кривые для редуцированного механизма. Таким образом, 12 стадий были исключены из рассмотрения без существенного изменения результатов кинетического моделирования. Эти результаты были получены с учетом того, что ненужными в моделировании считались те параметры, для которых значения коэффициентов чувствительности были менее 0.01. Задавая то или иное значение

Таблица 3: Редуцированный механизм

№	Стадия
1	$HCO + O_2 \rightarrow HO_2 + CO$
2	$HO_2 + CH_2O \rightarrow H_2O_2 + HCO$
3	$H_2O_2 + M \rightarrow 2OH + M$
4	$OH + CH_2O \rightarrow H_2O + HCO$
6	$H_2O_2 \rightarrow H_2O_2^-$
8	$HO_2 + HO_2 \rightarrow H_2O_2 + O_2$
9	$OH + CO \rightarrow CO_2 + H$
10	$HO_2 + CO \rightarrow CO_2 + OH$
11	$H + CH_2O \rightarrow H_2 + HCO$
12	$H + O_2 \rightarrow OH + O$
13	$H + O_2 + M \rightarrow HO_2 + M$
16	$O + CH_2O \rightarrow OH + HCO$
22	$CH_2O + O_2 \rightarrow HCO + HO_2$

или набора значений для коэффициентов, можно определять степень упрощения механизма и точность результатов моделирования.

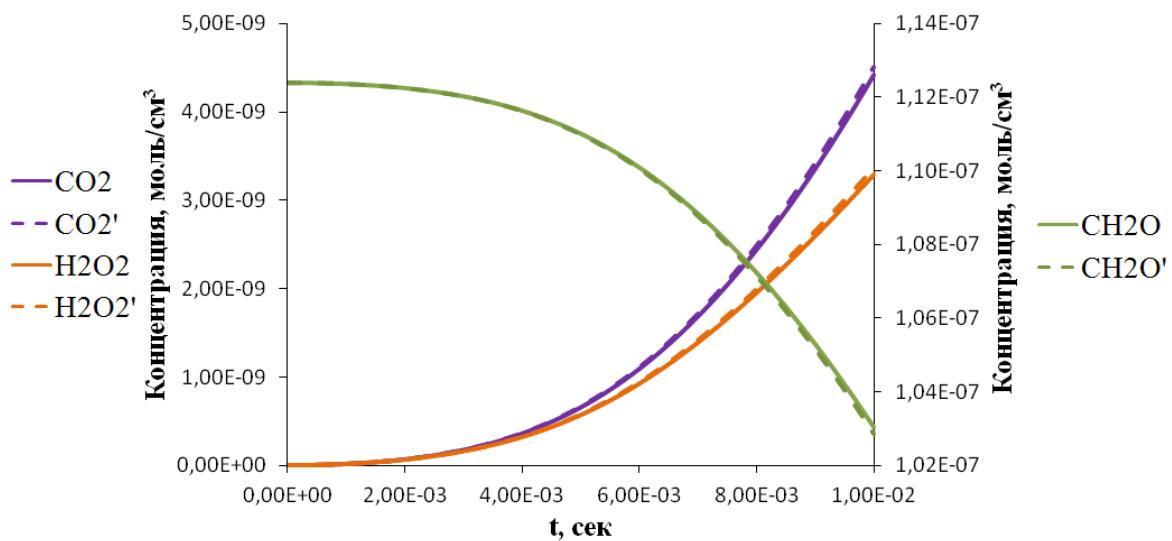


Рисунок 5.3

Сравнение поведения концентраций для редуцированного и детализированного механизмов

6. Заключение

На примере реакции окисления формальдегида была представлена процедура упрощения кинетической схемы реакции путем последовательного применения методов локально-го и глобального анализа чувствительности. Разработан редуцированный механизм, позволяющий адекватно описать кинетику окисления формальдегида без снижения точности моделирования, который при этом содержит в два раза меньшее количество стадий по сравнению с детальным механизмом. На основании анализа определены определяю-

ющие стадии процесса, влияющие на общую динамику изменения концентраций целевых веществ реакции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондратьев В. Н., *Кинетика и механизм газофазных реакций*, Наука, М., 1974, 558 с.
2. Tomlin S., Pillinc M., Turanyi T., Merkin J., Brindley J., “Mechanism Reduction for the Oscillatory Oxidation of Hydrogen: Sensitivity and Quasi-Steady-State Analyse”, *Combustion and Flame*, 1992, № 91, 107–130.
3. KLindstedt R. P., Maurice L. Q., “Detailed Chemical Kinetic Model for Aviation Fuels”, *Journal of Propulsion and Power*, **16**:2 (2000), 187–195.
4. Полак Л. С. и др., *Применение вычислительной математики в химической и физической кинетике*, Наука, М., 1969, 279 с.
5. Pepiot P., Pitsch H., “Systematic Reduction of Large Chemical Mechanisms”, *4th Joint Meeting of the U.S. Sections of the Combustion Institute*, 2005.
6. Nancy J. B., Guoping Li, “Mechanism Reduction Via Principal Component Analysis”, *Int J Chem Kinet*, **29** (1997), 393–414.
7. Turanyi T., “Sensitivity analysis of complex kinetic systems. Tools and applications.”, *Journal of Mathematical Chemistry*, 1990, № 5(3), 203–248..
8. Saltelli A., Ratto M., Tarantola S., Campolongo F., “Sensitivity Analysis for Chemical Models”, *Chem Rev.*, 2005, № 105(7), 2811–2828..
9. Helton J. C., “Uncertainty and Sensitivity Analysis for Models of Complex Systems”, *Computational Methods in Transport: Verification and Validation*, 2008, № 62, 207–228.
10. Tomlin A. S., Ziehn T., “The Use of Global Sensitivity Methods for the Analysis, Evaluation and Improvement of Complex Modelling Systems”, *In Coping with Complexity: Model Reduction and Data Analysis*, 2011, № 75, 9–36.
11. “<http://www.kintecus.com/>”.
12. Быков В. И., *Моделирование критических явлений в химической кинетике*, КомКнига, М., 2006, 328 с.
13. Соболь И. М., “Об оценке чувствительности нелинейных математических моделей”, *Математическое моделирование*, **2**:1 (1990), 112–118.
14. Sobol’ I. M., “Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates.”, *Mathematics and Computers in Simulation*, 2001, № 55(1-3), 271–280.
15. Байназарова Н. М., Нурисламова Л. Ф., Губайдуллин И. М., “Анализ чувствительности кинетических кривых к изменению констант скоростей реакции модели реакции гидроалюминирования олефинов”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:1 (2013), 34–40.

16. Байназарова Н. М., Нурисламова Л. Ф., Губайдуллин И. М., “Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014617100. Глобальный анализ чувствительности и неопределенности кинетической системы. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11 июля 2014 г., г. Москва”.
17. Байназарова Н. М., Нурисламова Л. Ф., Губайдуллин И. М., “Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2014617098. Вычисление локальных показателей чувствительности кинетической системы. Зарегистрировано в Реестре программ для ЭВМ 11 июля 2014 г., г. Москва.”.
18. Жук Д. М., Маничев В. Б., Сахаров М. К., “SADEL – библиотека «сверхточных» решателей для программного комплекса ПА10 (SADEL-PA10)”, В сб. научных трудов МЭС, 2012.
19. Губайдуллин И. М., Маничев В. Б., Нурисламова Л. Ф., “Редуктивный подход при моделировании сложных задач химической кинетики”, Журнал Средневолжского математического общества, 4:4 (2012), 26–33.
20. Saltelli A., Chan K., Scott M., *Sensitivity Analysis*, Wiley, 2000, 494 с.
21. Saltelli A., “Making best use of model evaluations to compute sensitivity indices”, *Computer Phys Communications*, 2002, № 145, 280–297.
22. Соболь И. М., “Равномерно распределенные последовательности с дополнительным свойством равномерности”, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 16:5 (1976), 1332–1337.

Sensitivity analysis of the results of kinetic modeling to the rate constants of the reaction steps

© N. M. Baynazarova⁴, L. F. Nurislamova⁵, I. M. Gubaydullin⁶

Abstract. In mathematical modeling of chemical processes prime step is the sensitivity analysis of the kinetic curves to the rate constants of steps. The analysis of the kinetic model sensitivity to variation of the rate constants of individual or all steps makes it possible to estimate the effect of a certain parameter on the function under consideration and differentiate between key parameters of the model and those that exert a negligible effect on the solution. Sensitivity analysis can be applied to reduce the system. The results of the local and global sensitivity analysis with respect to the oxidation of formaldehyde.

Key Words: kinetic model, oxidation reaction of formaldehyde, sensitivity analysis, reduction mechanism

⁴ Graduate of the second year the Department of mathematical modelling, Bashkir State University, Ufa; Nurzilyasha@mail.ru.

⁵ Second year postgraduate student, Institute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; Nurislamova_LF@mail.ru.

⁶ Senior Research Associate in the Laboratory of Mathematical Chemistry, Institute of petrochemistry and catalysis of the Russian Academy of Sciences, Ufa; IrekMars@mail.ru.

УДК 517.988.67

Комментарии к задаче о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа в дифференциальных уравнениях с вырожденным оператором при производной

© А. А. Кяшкин¹, Б. В. Логинов², П. А. Шаманаев³

Аннотация. Методами теории ветвления решений нелинейных уравнений исследована задача о возмущении n -кратной пары чисто мнимых собственных значений при бифуркации Пуанкаре-Андронова-Хопфа при наличии обобщенных жордановых цепочек.

Ключевые слова: бифуркация Андронова-Хопфа, возмущение критической пары собственных значений.

1. Введение

В банаховых пространствах E_1, E_2 в обозначениях и терминологии [1, 2] задача о ветвлении периодических решений при бифуркации Андронова-Хопфа с необратимым оператором при производной описывается дифференциальным уравнением

$$A \frac{dx}{dt} = B(\lambda)x - R(x, \lambda), \quad R(0, \lambda) \equiv 0, \quad B(\lambda) = B_0 + \varepsilon B_1 + \varepsilon^2 B_2 + \dots, \quad \varepsilon = \lambda - \lambda_0, \quad (1.1)$$

где A и $B_0 = B(\lambda_0)$ - плотно заданные линейные фредгольмовы операторы, $N(A) = \text{span}\{\phi_j\}_1^n, N^*(A) = \text{span}\{\psi_j\}_1^n; N(B_0) = \text{span}\{\hat{\phi}_k\}_1^n, N^*(B_0) = \text{span}\{\hat{\psi}_k\}_1^n$ - их подпространства нулей и дефектных функционалов, $\{\sigma_l\}_1^m, \langle \phi_j, \sigma_l \rangle = \delta_{jl}, \{\zeta_l\}_1^m, \langle \zeta_l, \psi_j \rangle = \delta_{lj}; \{\hat{\sigma}_s\}_1^n, \langle \hat{\phi}_k, \hat{\sigma}_s \rangle = \delta_{ks}, \{\hat{\zeta}_s\}_1^n, \langle \hat{\zeta}_s, \hat{\psi}_k \rangle = \delta_{sk}$ - соответствующие биортогональные системы, $\|R(x, \lambda_0 + \varepsilon)\| = o(\|x\|)$. Предполагается, что операторы A и B_0 не имеют общих нуль-элементов, а также условия: 1° $D_B \subset D_A$ и A подчинен B_0 , т. е. $\|Ax\| \leq \|B_0x\| + \|x\|$ на D_{B_0} или $D_A \subset D_{B_0}$ и B_0 подчинен A , т. е. $\|B_0x\| \leq \|Ax\| + \|x\|$ на D_A , что позволяет свести обсуждение к ограниченным операторам.

Определение 1.1. Число λ_0 называется точкой бифуркации (усиленной бифуркации) Андронова-Хопфа уравнения (1.1), если существует окрестность $O_\varepsilon(\lambda_0)$, такая, что для некоторой последовательности $\lambda_k \subset O_\varepsilon(\lambda_0), \lambda_k \rightarrow \lambda_0$ (любого $\lambda \in O_\varepsilon(\lambda_0)$) уравнение (1.1) имеет $\frac{2\pi}{\alpha + \mu_k}$ -периодическое ($\frac{2\pi}{\alpha + \mu(\varepsilon)}$ -периодическое) малое по норме E_1 решение $x = x_k(t)$ ($x = x_\lambda(t)$), причем $M_k = \max_t \|x_k(t)\| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$ ($M_\lambda = \max_t \|x_\lambda(t)\| \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow \lambda_0$).

Здесь исследуется ветвление чисто мнимых A -собственных значений оператора B_0 и отвечающих им периодических собственных элементов (периодических решений) линеаризованных задач I и II соответственно при возмущении $B(\varepsilon)$ оператора B_0 .

$$(I) : A \frac{dx}{dt} = (B_0 + B(\varepsilon))x \quad \text{и} \quad (II) : A \frac{dx}{dt} = (B_0 + B(\varepsilon))x - h(t)$$

¹ Аспирант кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; andrey_kjashkin@list.ru.

² Профессор кафедры "Высшая математика", Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru

³ Доцент кафедры прикладной математики, дифференциальных уравнений и теоретической механики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

в следующих предположениях [1],[3-5] :

1°. Число α является \mathcal{A} -собственным значением матричного оператора $\mathcal{B}(\alpha)$, т. е. $\mathcal{B}(\alpha)U_k = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix} = 0$, $\mathcal{B}^*(\alpha)V_k = \begin{pmatrix} B_0^* & -\alpha A_0^* \\ \alpha A_0^* & B_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{pmatrix} = 0$, $k = \overline{1, n}$, с $2n$ -мерным подпространством нуль-элементов

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}(\alpha)) = \text{span} \left\{ \Phi_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ u_{2k} \end{pmatrix}, \Phi_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{2k} \\ -u_{1k} \end{pmatrix}, k = \overline{1, n} \right\}, \quad (1.2)$$

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}^*(\alpha)) = \text{span} \left\{ \Psi_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} -v_{2k} \\ v_{1k} \end{pmatrix}, \Psi_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ v_{2k} \end{pmatrix}, k = \overline{1, n} \right\}. \quad (1.3)$$

При этом числа $\pm k\alpha$, $k = 0, 1, 2, \dots$ не являются \mathcal{A} -собственными значениями матричного оператора $\mathcal{B}(\alpha) \neq 0$.

2°. \mathcal{A} -жордановы цепочки элементов $\Phi_{ik}^{(1)}, \Psi_{ik}^{(1)}$, $i = 1, 2$, $k = \overline{1, n}$, оператор-функций $\mathcal{B}(\alpha + \mu) \equiv \mathcal{B}(\alpha) - \mu\mathcal{A} = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{B}^*(\alpha + \mu) \equiv \mathcal{B}^*(\alpha) - \mu\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} B_0^* & -\alpha A^* \\ \alpha A^* & B_0^* \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ -A^* & 0 \end{pmatrix}$, определенные равенствами $\mathcal{B}(\alpha)\Phi_{jk}^{(s)} = \mathcal{A}\Phi_{jk}^{(s-1)}$, $\mathcal{B}^*(\alpha)\Psi_{jk}^{(s)} = \mathcal{A}^*\Psi_{jk}^{(s-1)}$, имеют конечные длины p_k , т. е. образуют полный канонический обобщенный жорданов (\mathcal{A} -жорданов) набор (ОЖН) [1]. Без ограничения общности в силу разрешимости определяющих уравнений это означает, что

$$\langle \mathcal{A}\Phi_{ik}^{(s)}, \Psi_{jl}^{(1)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{sp_k}, \quad \langle \Phi_{ik}^{(1)}, \mathcal{A}^*\Psi_{jl}^{(s)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{sp_l}, \quad (1.4)$$

$$s = \overline{1, p_k(p_l)}, \quad i, j = 1, 2, \quad k, l = \overline{1, n},$$

или, эквивалентно, в координатной форме

$$\begin{aligned} \langle Au_{1k}^{(s)}, v_{2l}^{(1)} \rangle &= \langle Au_{2k}^{(s)}, v_{1l}^{(1)} \rangle, \quad s = \overline{1, p_k}, \quad \langle Au_{1k}^{(s)}, v_{1l}^{(1)} \rangle + \langle Au_{2k}^{(s)}, v_{2l}^{(1)} \rangle = \delta_{kl}\delta_{sp_k}, \\ \langle u_{1k}^{(1)}, A^*v_{2l}^{(s)} \rangle &= \langle u_{2k}^{(1)}, A^*v_{1l}^{(s)} \rangle, \quad s = \overline{1, p_l}, \quad \langle u_{1k}^{(1)}, A^*v_{1l}^{(s)} \rangle + \langle u_{2k}^{(1)}, A^*v_{2l}^{(s)} \rangle = \delta_{kl}\delta_{sp_l}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

$$k, l = \overline{1, n}.$$

Согласно [3-10], [12-14] в силу леммы о биортогональности обобщенных жордановых цепочек (ОЖЦ) и линейности оператор-функций $\mathcal{B}(\alpha) - \mu\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}^*(\alpha) - \mu\mathcal{A}^*$ этот набор всегда может быть выбран триангоническим, то есть

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{ik}^{(s)}, \Gamma_{jl}^{(\sigma)} \rangle &= \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{s\sigma}, \quad \Gamma_{jl}^{(\sigma)} = \mathcal{A}^*\Psi_{jl}^{(p_l+1-\sigma)}; \quad \langle Z_{ik}^{(s)}, \Psi_{jl}^{(\sigma)} \rangle = \delta_{ij}\delta_{kl}\delta_{s\sigma}, \\ Z_{ik}^{(s)} &= \mathcal{A}\Phi_{ik}^{(p_k+1-s)}, \quad j = 1, 2, \quad s(\sigma) = \overline{1, p_k(p_l)}, \quad k, l = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

или в координатной форме

$$\begin{aligned} \langle u_{1k}^{(s)}, A^*v_{1l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle + \langle u_{2k}^{(s)}, A^*v_{2l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle &= \delta_{kl}\delta_{s\sigma} \sim \langle Au_{1k}^{(p_k+1-s)}, v_{1l}^{(\sigma)} \rangle + \langle Au_{2k}^{(p_k+1-s)}, v_{2l}^{(\sigma)} \rangle = \delta_{kl}\delta_{s\sigma}; \\ \langle u_{1k}^{(s)}, A^*v_{2l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle &= \langle u_{2k}^{(s)}, A^*v_{1l}^{(p_l+1-\sigma)} \rangle \sim \langle Au_{1k}^{(p_k+1-s)}, v_{2l}^{(\sigma)} \rangle = \langle Au_{2k}^{(p_k+1-s)}, v_{1l}^{(\sigma)} \rangle. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Следуя [11], в этой работе далее исследуются уравнения (I) и (II) на основе кратко представленного аппарата обобщенных жордановых цепочек.

З а м е ч а н и е 1.1. Применение норм подчиненности операторов A и B_0 позволяет доказать, что предположение 1 является необходимым условием существования бифуркации Андронова-Хопфа для уравнения (1.1).

2. Ветвление пары чисто мнимых A -собственных значений оператора B_0

Выполним комплексификацию уравнения (I), рассматривая его в пространствах $\mathcal{E}_k = E_k + iE_k$, $k = 1, 2$, учитывая, что оператор $B(\varepsilon)$ в силу его линейности также допускает достаточно гладкое расширение на эти пространства. Тогда элементы $u_k = u_{1k} + iu_{2k}$, \bar{u}_k и $v_k = v_{1k} + iv_{2k}$, \bar{v}_k являются A -собственными элементами оператора B_0 , т. е. собственными элементами следующих задач на собственные значения

$$B_0 u_k = i\alpha A u_k, \quad B_0 \bar{u}_k = -i\alpha A \bar{u}_k, \quad B_0^* v_k = -i\alpha A^* v_k, \quad B_0^* \bar{v}_k = i\alpha A^* \bar{v}_k, \quad k = \overline{1, n}. \quad (2.1)$$

Им отвечают A -и A^* -жордановы наборы (A -и A^* -ЖН) \equiv ОЖН), $\{u_k^{(j)}\}$, $\{\bar{u}_k^{(j)}\}$ и $\{v_k^{(j)}\}$, $\{\bar{v}_k^{(j)}\}$, в которых обобщенные жордановы цепочки определяются уравнениями $(B_0 - i\alpha A)u_k^{(j)} = Au_k^{(j-1)}$, $(B_0 + i\alpha A)\bar{u}_k^{(j)} = -A\bar{u}_k^{(j-1)}$; $(B_0^* + i\alpha A^*)v_k^{(j)} = -A^*v_k^{(j-1)}$, $(B_0^* - i\alpha A^*)\bar{v}_k^{(j)} = A^*\bar{v}_k^{(j-1)}$, $j = \overline{2, p_k}$, $k = \overline{1, n}$ и соответственно (1.6) и (1.7) могут быть выбраны удовлетворяющими условиям биортогональности

$$\langle u_k^{(j)}, \vartheta_s^{(l)} \rangle = \delta_{jl}\delta_{ks}, \quad \langle z_k^{(j)}, v_s^{(l)} \rangle = \delta_{ks}\delta_{jl}, \quad z_k^{(k)} = Au_k^{(p_k+1-j)}, \quad \vartheta_s^{(l)} = A^*v_s^{(p_s+1-l)}. \quad (2.2)$$

Выполнением подстановки А. Пуанкаре $t = \frac{\tau}{\alpha+\mu}$, $x(t) = y(\tau)$, где $\mu = \mu(\varepsilon)$ - подлежащая определению малая добавка к частоте колебаний, задача I сводится к определению 2π -периодических решений уравнения

$$\mathcal{B}_0 y = \mu \mathcal{C}y + B(\varepsilon)y, \quad \mathcal{B}_0 y = (\mathcal{B}_0 y)(\tau) \equiv B_0 y(\tau) - \alpha A \frac{dy}{d\tau}, \quad \mathcal{C}y = (\mathcal{C}y)(\tau) \equiv A \frac{dy}{d\tau}. \quad (2.3)$$

Здесь предполагаемый фредгольмовым оператор $(\mathcal{B}_0 y)(\tau)$ и остальные операторы отображают пространство \mathcal{Y} 2π -периодических непрерывно-дифференцируемых функций τ со значениями в $\mathcal{E}_1 = E_1 + iE_1$ в пространство \mathcal{Z} 2π -периодических функций τ со значениями в $\mathcal{E}_2 = E_2 + iE_2$. Дуальность между \mathcal{Y} и \mathcal{Y}^* (\mathcal{Z} и \mathcal{Z}^*) определяется специального вида функционалами

$$\langle \langle y, f \rangle \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \langle y(\tau), f(\tau) \rangle d\tau, \quad y \in \mathcal{Y}, \quad f \in \mathcal{Y}^* \quad (y \in \mathcal{Z}, f \in \mathcal{Z}^*).$$

Подпространства $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$, $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$ нулей операторов \mathcal{B}_0 и \mathcal{B}_0^* $2n$ -мерны

$$\mathcal{N}(\mathcal{B}_0) = \text{span}\{\varphi_k^{(1)} = \varphi_k^{(1)}(\tau) = u_k e^{i\tau}, \bar{\varphi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n, \quad \mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*) = \text{span}\{\psi_k^{(1)} = \psi_k^{(1)}(\tau) = v_k e^{i\tau}, \bar{\psi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n,$$

биортогональные им элементы выбираются как A^* - и A -образы последних элементов ОЖЦ $A^* \psi_k^{(p_k)} = A^* v_k^{(p_k)} e^{i\tau} = \gamma_k^{(1)}$ и $A^* \varphi_j^{(p_j)} = A^* u_j^{(p_j)} e^{i\tau} = z_k^{(1)}$. Отвечающие базисным элементам подпространств $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0)$ и $\mathcal{N}(\mathcal{B}_0^*)$ ОЖЦ имеют вид $\varphi_k^{(j)} = u_k^{(j)} e^{i\tau}$, $\psi_k^{(j)} = v_k^{(j)} e^{i\tau}$ с соответствующими условиями биортогональности

$$\langle \langle \varphi_k^{(j)}, \gamma_s^{(l)} \rangle \rangle = \delta_{ks}\delta_{jl}, \quad \langle \langle z_k^{(j)}, \psi_s^{(l)} \rangle \rangle = \delta_{ks}\delta_{jl}, \\ \gamma_s^{(l)} = \theta_s^{(l)} e^{i\tau} = A^* v_s^{(p_s+1-l)} e^{i\tau}, \quad z_k^{(j)} = z_k^{(j)} e^{i\tau} = A \varphi_k^{(p_k+1-j)} e^{i\tau}. \quad (2.4)$$

Л е м м а 2.1. [6,8-10] Соотношения биортогональности (2.4) определяют проекции

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} \langle \langle \cdot, \gamma_k^{(j)} \rangle \rangle \varphi_k^{(j)} = \langle \langle \cdot, \gamma \rangle \rangle \phi, \quad \bar{\mathbf{P}} = \langle \langle \cdot, \bar{\gamma} \rangle \rangle \bar{\psi}, \\ \mathbb{P} &= \mathbf{P} + \bar{\mathbf{P}} : \mathcal{E}_1 \rightarrow \mathcal{E}_1^{2K} = K(\mathcal{B}, A) = \text{span}\{\varphi, \bar{\varphi}\}, \\ \mathbf{Q} &= \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} \langle \langle \cdot, \psi_k^{(j)} \rangle \rangle z_k^{(j)} = \langle \langle \cdot, \psi \rangle \rangle z, \quad \bar{\mathbf{Q}} = \langle \langle \cdot, \bar{\psi} \rangle \rangle \bar{z}, \\ \mathbb{Q} &= \mathbf{Q} + \bar{\mathbf{Q}} : \mathcal{E}_2 \rightarrow \mathcal{E}_{2,2K} = \text{span}\{z_k^{(j)}, \bar{z}_k^{(j)}\}, \end{aligned}$$

где $\varphi = (\varphi_1^{(1)}, \dots, \varphi_1^{(p_1)}, \dots, \varphi_n^{(1)}, \dots, \varphi_n^{(p_n)})$, векторы γ , ψ и z определяются аналогично, порождающие разложения пространств \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 в прямые суммы $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_1^{2K} + \mathcal{E}_1^{\infty-2K}$, $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_{2,2K} + \mathcal{E}_{2,\infty-2K}$, $K = \sum_{s=1}^n p_s$ - корневое число.

При этом справедливы соотношения сплетения

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0 \mathbf{P} &= \mathbf{Q} \mathcal{B}_0, \quad \mathcal{B}_0 \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{Q}} \mathcal{B}_0 \text{ на } D(\mathcal{B}), \quad A \mathbf{P} = \mathbf{Q} A, \quad A \bar{\mathbf{P}} = \bar{\mathbf{Q}} A \text{ на } D(A), \\ \mathcal{B}_0 \varphi &= \mathcal{A}_B z, \quad \mathcal{B}_0 \bar{\varphi} = \mathcal{A}_B \bar{z}, \quad A \varphi = \mathcal{A}_A z, \quad A \bar{\varphi} = \mathcal{A}_A \bar{z}, \quad A^* \psi = \mathcal{A}_A \gamma, \quad A^* \bar{\psi} = \mathcal{A}_A \bar{\gamma}, \end{aligned}$$

где \mathcal{A}_B и \mathcal{A}_A - клеточно-диагональные матрицы $\mathcal{A}_B = (B_1, \dots, B_n)$ и $\mathcal{A}_A = (A_1, \dots, A_n)$

$$\text{с } p_k \times p_k \text{-клетками } B_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad A_k = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операторы A и \mathcal{B}_0 , действуют в инвариантных парах подпространств $\mathcal{E}_1^{2K}, \mathcal{E}_{2,2K}$ и $\mathcal{E}_1^{\infty-2K}, \mathcal{E}_{2,\infty-2K}$; $\mathcal{B}_0 : D_{\mathcal{B}_0} \cap \mathcal{E}_1^{\infty-2K} \rightarrow \mathcal{E}_{2,\infty-2K}$, $A : \mathcal{E}_1^{2K} \rightarrow \mathcal{E}_{2,2K}$ являются изоморфизмами.

Вводя регуляризатор Шмидта $\tilde{\mathcal{B}}_0 = \mathcal{B}_0 + \sum_{k=1}^n \langle \langle \cdot, \gamma_k^{(1)} \rangle \rangle z_k^{(1)} + \sum_{k=1}^n \langle \langle \cdot, \bar{\gamma}_k^{(1)} \rangle \rangle \bar{z}_k^{(1)}$, запишем уравнение (2.3) в виде системы

$$\tilde{\mathcal{B}}_0 y = \mu \mathcal{C} y + B(\varepsilon) y + \sum_{k=1}^n (\xi_{k1} z_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1} \bar{z}_k^{(1)}), \quad \xi_{s\sigma} = \langle \langle y, \gamma_s^{(\sigma)} \rangle \rangle, \quad \bar{\xi}_{s\sigma} = \langle \langle y, \bar{\gamma}_s^{(\sigma)} \rangle \rangle, \sigma = \overline{1, p_s}, s = \overline{1, n}. \quad (2.5)$$

Полагая $y = w + v$, $v = \xi \cdot \varphi + \bar{\xi} \cdot \bar{\varphi} \in E_1^{2k}$, находим

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{B}}_0 w + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \tilde{\mathcal{B}}_0 \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \tilde{\mathcal{B}}_0 \bar{\varphi}_k^{(j)}) - \mu \mathcal{C} w - B(\varepsilon) w = \\ = \mu \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \mathcal{C} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \mathcal{C} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} [\xi_{kj} B(\varepsilon) \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} B(\varepsilon) \bar{\varphi}_k^{(j)}]. \end{aligned}$$

Обращая оператор $\tilde{\mathcal{B}}_0$, $\tilde{\mathcal{B}}_0^{-1} = \Gamma_0$ [1], получим

$$\begin{aligned} w - \mu \Gamma_0 \mathcal{C} w - \Gamma_0 B(\varepsilon) w = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu \Gamma_0 \mathcal{C} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \\ + \Gamma_0 B(\varepsilon) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}). \end{aligned}$$

Отсюда следует

$$w = \left[I - \mu \Gamma_0 \mathcal{C} - \Gamma_0 B(\varepsilon) \right]^{-1} \left\{ - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \varphi_k^{(j)}) + \mu \Gamma_0 \mathcal{C} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) + \right. \\ \left. + \Gamma_0 B(\varepsilon) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj} \varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj} \bar{\varphi}_k^{(j)}) \right\}.$$

Далее $[I - \mu\Gamma_0\mathcal{C} - \Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1} = [I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1} = = (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}[I - \Gamma_0B(\varepsilon)(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}]^{-1}$ и

$$(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1} \left\{ - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu\Gamma_0\mathcal{C} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) \right\} = \\ = \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu\Gamma_0\mathcal{C}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}).$$

Следовательно,

$$w = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}) + \mu\Gamma_0\mathcal{C}(I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{k1}\varphi_k^{(1)} + \bar{\xi}_{k1}\bar{\varphi}_k^{(1)}) + \\ + (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)[I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}). \quad (2.6)$$

Теперь подстановка $y = w + \xi \cdot \varphi + \bar{\xi} \cdot \bar{\varphi}$ с определенным по формуле (2.6) w во вторые равенства системы (2.5) в силу соотношений (2.4) при условии принадлежности присоединенных (корневых) элементов прямому дополнению $\mathcal{E}_{1,\infty-2K}$ к подпространству собственных элементов \mathcal{E}_1^{2n} и учете формул (2.7)

$$\begin{aligned} \Gamma_0\mathcal{C}\varphi_k^{(1)} &= i\Gamma_0\tilde{\mathcal{B}}_0\varphi_k^{(2)} = i\varphi_k^{(2)}, \quad (\Gamma_0\mathcal{C})^2\varphi_k^{(1)} = (\Gamma_0\mathcal{C})\varphi_k^{(2)} = i^2\varphi_k^{(3)}, \dots \\ (\Gamma_0\mathcal{C})^s\varphi_k^{(1)} &= i^s\varphi_k^{(s+1)} \text{ при } s < p_k, \quad (\Gamma_0\mathcal{C})^{p_k}\varphi_k^{(1)} = i^{p_k}\varphi_k^{(p_k+1)} = i^{p_k}\varphi_k^{(1)}, \\ (\Gamma_0\mathcal{C})^s\varphi_k^{(1)} &= i^s\varphi_k^{(s-\lceil \frac{s}{p_k} \rceil p_k)} \text{ при } s > p_k, \quad \psi_k^{(1)} = \Gamma_0^*\gamma_k^{(1)}, \quad \psi_k^{(s)} = \Gamma_0^*\gamma_k^{(p_k+1-s)}, \end{aligned} \quad (2.7)$$

дает уравнение разветвления в корневом подпространстве (в конструкции Э. Шмидта) для определения $\mu = \mu(\varepsilon)$ в виде определителя $\det[t(\mu, \varepsilon)]$ однородной системы линейных алгебраических уравнений и комплексно сопряженной к ней.

$$\begin{aligned} t_{k1}(\mu, \varepsilon) &\equiv -\frac{(i\mu)^{p_k}}{1-(i\mu)^{p_k}} \xi_{k1} - \\ -\langle \langle (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon) [I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}), \psi_k^{(1)} \rangle \rangle &= 0, \\ t_{k\sigma}(\mu, \varepsilon) &\equiv \xi_{k\sigma} - \frac{(i\mu)^{\sigma-1}}{1-(i\mu)^{p_k}} \xi_{k1} - \\ -\langle \langle (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon) [I - (I - \mu\Gamma_0\mathcal{C})^{-1}\Gamma_0B(\varepsilon)]^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{kj}\varphi_k^{(j)} + \bar{\xi}_{kj}\bar{\varphi}_k^{(j)}), \psi_k^{(p_k+1-\sigma)} \rangle \rangle &= 0, \\ k &= \overline{1, n}, \quad \sigma = \overline{1, p_k}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

3. Редукция к возмущенной матричной задаче I

В п. 2 нами был выбран более сложный подход решения задачи I для установления прямых связей с бифуркацией Пуанкаре-Андронова-Хопфа. Безусловно, более простым вариантом исследования задачи I является ее редукция к возмущенной матричной задаче на собственные значения

$$\begin{pmatrix} B_0 + B(\varepsilon) & (\alpha + \mu)A \\ -(\alpha + \mu)A & B_0 + B(\varepsilon) \end{pmatrix} U = \left[\begin{pmatrix} B_0 + B(\varepsilon) & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 + B(\varepsilon) \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix} \right] U = 0, \quad \mu = \mu(\varepsilon). \quad (3.1)$$

Следует выяснить как изменится $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix}$ -собственное значение α оператора $\mathcal{B} = \begin{pmatrix} B_0 & \alpha A \\ -\alpha A & B_0 \end{pmatrix}$ при возмущении $B(\varepsilon)$ оператора B_0 . Таким образом, рассматривается задача на собственные значения

$$\left[\mathcal{B}(\alpha) + \begin{pmatrix} B(\varepsilon) & 0 \\ 0 & B(\varepsilon) \end{pmatrix} - \mu \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A & 0 \end{pmatrix} \right] U = 0, \quad \mathbf{B} = \mathcal{B}(\alpha) = \begin{pmatrix} B_0 & 0 \\ 0 & B_0 \end{pmatrix} - \alpha \mathcal{A},$$

$$\mathbf{B}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_1 \end{pmatrix} \varepsilon + \begin{pmatrix} B_2 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix} \varepsilon^2 + \dots,$$

то есть

$$\mathcal{B}(\alpha)U = [-\mathbf{B}(\varepsilon)U + \mu \mathcal{A}]U = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{B}U = -\mathbf{B}(\varepsilon)U + \mu \mathcal{A}U, \quad U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Согласно [3-5] обобщенный жорданов набор линейной по малому параметру μ оператор-функции $\mathbf{B} - \mu \mathcal{A}$ всегда может быть выбран трианоническим, то есть для него справедливы формулы (1.6) или в координатной форме (1.7). Вводя регуляризатор Шмидта $\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^n \langle \cdot, \Gamma_{jk}^{(1)} \rangle Z_{jk}^{(1)}$, $\Gamma = \tilde{\mathbf{B}}^{-1}$, и, полагая

$$U = W + V, \quad V = \xi_1 \Phi_1 + \xi_2 \Phi_2, \quad \xi_1 = (\xi_{i1}^1, \xi_{i1}^2, \dots, \xi_{i1}^{p_1}, \dots, \xi_{in}^1, \xi_{in}^2, \dots, \xi_{in}^{p_n});$$

$$\Phi_1 = (\Phi_{i1}^1, \Phi_{i1}^2, \dots, \Phi_{i1}^{p_1}, \dots, \Phi_{in}^1, \Phi_{in}^2, \dots, \Phi_{in}^{p_n}), \quad i = 1, 2,$$

(векторы Γ_i , Ψ_i , Z_i , $i = 1, 2$, определяются аналогично), запишем (3.2) в виде системы

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}W + \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{1k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)}) - \mu \mathcal{A}W - \mu \mathcal{A} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)}) + \\ + \mathbf{B}(\varepsilon) \left(W + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \tilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(j)}) \right) = \sum_{k=1}^n (\xi_{1k}^j Z_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j Z_{2k}^{(j)}), \quad (3.3) \\ \xi_{1k}^j = \langle U, \Gamma_{1k}^{(j)} \rangle = \langle W, \Gamma_{1k}^{(j)} \rangle + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} \langle (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}), \Gamma_{ik}^j \rangle, \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Обращая в первом уравнении оператор $\tilde{\mathbf{B}}$, получаем

$$W = [I - \mu \Gamma \mathcal{A} + \Gamma \mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1} \left\{ - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) + \mu \Gamma \mathcal{A} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) - \right. \\ \left. - \Gamma \mathbf{B}(\varepsilon) \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) \right\}.$$

Так как $[I - \mu \Gamma \mathcal{A} + \Gamma \mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1} = [I - (I - \mu \Gamma \mathcal{A})^{-1} \Gamma \mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1} (I - \mu \Gamma \mathcal{A})^{-1}$ и $(I - \mu \Gamma \mathcal{A})^{-1} \left\{ - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) + \mu \Gamma \mathcal{A} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) \right\} = \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) + \mu \Gamma \mathcal{A} (I - \mu \Gamma \mathcal{A})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{1k}^1 \Phi_{1k}^{(1)} + \xi_{2k}^1 \Phi_{2k}^{(1)})$, следовательно

$$\begin{aligned} W = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=2}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}) + \mu \Gamma \mathcal{A} (I - \mu \Gamma \mathcal{A})^{-1} \sum_{k=1}^n (\xi_{1k}^1 \Phi_{1k}^{(1)} + \xi_{2k}^1 \Phi_{2k}^{(1)}) - \\ - (I - \mu \Gamma \mathcal{A})^{-1} \Gamma \mathbf{B}(\varepsilon) [I - (I - \mu \Gamma \mathcal{A})^{-1} \Gamma \mathbf{B}(\varepsilon)]^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^{p_k} (\xi_{1k}^j \Phi_{1k}^{(j)} + \xi_{2k}^j \Phi_{2k}^{(j)}). \quad (3.4) \end{aligned}$$

Подстановка определенного по формуле (3.4) W во вторые уравнения системы (3.3) при учете формул

$$\begin{aligned} \Gamma\mathcal{A}\Phi_{1k}^{(1)} &= \Gamma\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{1k}^{(2)} = \Phi_{1k}^{(2)}, \quad (\Gamma\mathcal{A})^2\Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(3)}, \dots, \quad (\Gamma\mathcal{A})^s\Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(s+1)} \text{ при } s < p_k, \\ &\quad (\Gamma\mathcal{A})^{p_k}\Phi_{1k}^{(1)} = \Phi_{1k}^{(p_k+1)} = \Phi_{1k}^{(1)}, \\ \Gamma\mathcal{A}\Phi_{2k}^{(1)} &= \Gamma\widetilde{\mathbf{B}}\Phi_{2k}^{(2)} = \Phi_{2k}^{(2)}, \quad (\Gamma\mathcal{A})^2\Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(3)}, \dots, \quad (\Gamma\mathcal{A})^s\Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(s+1)} \text{ при } s < p_k, \\ &\quad (\Gamma\mathcal{A})^{p_k}\Phi_{2k}^{(1)} = \Phi_{2k}^{(p_k+1)} = \Phi_{2k}^{(1)}, \\ (\Gamma\mathcal{A})^s\Phi_{ik}^{(1)} &= \Phi_{ik}^{(s-\left[\frac{s}{p_k}\right]p_k)} \text{ при } s > p_k, \quad i = 1, 2, \end{aligned}$$

как и ранее, дает однородную систему $2K$ -порядка линейных алгебраических уравнений, равенство определителя которой нулю является уравнением разветвления в корневом подпространстве относительно $\mu = \mu(\varepsilon)$.

З а м е ч а н и е 3.1. 1°. В предыдущей нашей работе [11] мы назвали УРК именем однородную систему, а не ее определитель.

2°. Возникающая здесь система записана в векторной форме в двумерном пространстве.

3°. Задача II служит предметом нашей будущей работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вайнберг М. М., Треногин В. А., *Теория ветвлений решений нелинейных уравнений*, "Наука", М., 1964, 524 с., Engl. transl. Wolter Noordorf, Leyden, 1974
2. Треногин В. А., "Периодические решения и решения типа перехода абстрактных уравнений реакции-диффузии. Вопросы качественной теории дифференциальных уравнений.", COAH CCCP, "Наука", Новосибирск, 1988, 133-140.
3. Логинов Б. В., Русак Ю. Б., "Обобщенная жорданова структура в теории ветвлений", "Прямые и обратные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными", сб. н. работ, ред. М. С. Салахитдинов, Изд-во "Фан" АН Узб. ССР, Ташкент, 1978, 133-148.
4. Русак Ю. Б., *Обобщенная жорданова структура в теории ветвлений*, кандидатская диссертация, Инст. математики им. В. М. Романовского АН Узб. ССР. Ташкент, 1979, 126 с.
5. Русак Ю. Б., "Обобщенная жорданова структура аналитической оператор-функции и сопряженной к ней", *Известия Акад. Наук Узб. ССР, физ-мат.*, 1978, № 2, 15-19.
6. Loginov B. V., Rousak Yu. B., "Generalized Jordan structure in the problem of the stability of bifurcating solutions", *Nonlinear Analysis: TMA*, **17**:3 (1991), 219-232.
7. Loginov B. V., "Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation", *Nonlinear Analysis: TMA*, **28**:12 (1997), 2035-2047.
8. Loginov B. V., "Branching equation in the root subspace", *Nonlinear Analysis: TMA*, **32**:3 (1998), 439-448.
9. Loginov B. V., Kim-Tyan L. R., Rousak Yu.B., "On the stability of periodic solutions for differential equations with a fredholm operator at the highest derivative", *Nonlinear analysis*, **67**:5 (2007), 1570-1585.

10. Коноплева И.В., Логинов Б.В., Русак Ю.Б., “Симметрия и потенциальность уравнений разветвления в корневых подпространствах в неявно заданных стационарных и динамических бифукационных задачах”, *Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки.*, 2009, 115-124.
11. Кяшкин А. А., Логинов Б. В., Шаманаев П. А., “Комментарии к задачам о возмущениях линейного уравнения малым линейным слагаемым и спектральных характеристик фредгольмова оператора”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **15**:3 (2013), 100-107.
12. Loginov B. V., “On the determination of branching equation by its group symmetry”, *Doklady Mathematics*, **331**:6 (1993), 667.
13. Loginov B. V., “Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov-Hopf bifurcation”, *Nonlinear Analysis*, **28**:12 (1997), 2033-2047.
14. Loginov B. V., Trenogin V. A., “Branching equation of Andronov-Hopf bifurcation under group symmetry conditions”, *Chaos (Woodbury, N. Y.)*, **7**:2 (1997), 229-238.

Comments to the problem on branching of periodical solutions at Andronov-Hopf bifurcation in differential equations with degenerated operator before the derivative

© A. A. Kyashkin⁴, B. V. Loginov⁵, P. A. Shamanaev⁶

Abstract. By the methods of branching theory of solutions to nonlinear equations it is investigated the perturbation problem for n -multiple pair of pure imaginary eigenvalues at the presence of generalized Jordan chains at Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation.

Key Words: Andronov-Hopf bifurcation, perturbation of the critical pairs of eigenvalues.

⁴ Graduate student of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; andrey_kjashkin@list.ru.

⁵ Professor of the Chair "Higher Mathematics", Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru

⁶ Associate Professor of Applied Mathematics, Differential Equations and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.

УДК 517.938

Хаотическое поведение счетных топологических марковских цепей с мероморфной дзета-функцией

© М. И. Малкин¹

Аннотация. В данной статье рассматриваются счетные топологические марковские цепи (ТМЦ). Предполагается, что любая степень матрицы переходов ТМЦ имеет конечный след и, тем самым, для ТМЦ корректно определена динамическая дзета-функция Артина-Мазура. Кроме того, предполагается, что выполнены два условия: 1) радиус сходимости дзета-функции у подсистем ТМЦ, соответствующих подматрицам с достаточно большими номерами состояний, больше радиуса сходимости $r(A)$ дзета-функции исходной ТМЦ с матрицей переходов A , и 2) дзета-функция ТМЦ мероморфна в некотором диске радиуса, большего $r(A)$. Данные условия являются естественными, т.к. выполняются для счетных ТМЦ, являющихся символическими моделями одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией. В работе показано, что при данных условиях для неразложимой ТМЦ её матрица переходов является $r(A)$ -положительной, и, как следствие, дзета-функция ТМЦ имеет простые полюса на окружности $|z| = r(A)$ комплексной плоскости, а ТМЦ обладает основными эргодическими свойствами конечных ТМЦ (в частности, у неё существует единственная мера максимальной энтропии).

Ключевые слова: топологические марковские цепи, дзета-функция, топологическая энтропия

1. Введение

В данной статье продолжено исследование (см. [8]) динамических и эргодических свойств счетных топологических марковских цепей. Топологические марковские цепи служат символическими моделями для различных классов динамических систем с гиперболической структурой, включая неравномерно гиперболические и частично гиперболические системы, когда фазовое пространство таких систем обычно допускает марковское разбиение (возможно, счётное). К таким классам систем относятся системы, удовлетворяющие аксиоме А С.Смейла, гиперболические бильярды, геометрические модели аттрактора Лоренца, одномерные кусочно-монотонные отображения с положительной топологической энтропией и др. (см. [1], [3], [4], [10], [2], [6]). В частности, Ф. Хоффбауэр доказал (см. [5]), что для кусочно-монотонного, кусочно-непрерывного отображения f интервала I с положительной топологической энтропией можно построить конечную или счётную ТМЦ (Ω_A, σ) с матрицей переходов A , такую, что $f : I \rightarrow I$ топологически сопряжено с отображением сдвига $\sigma : \Omega_A \rightarrow \Omega_A$. Тем самым, изучение топологических и эргодических свойств одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией можно свести к рассмотрению счётных топологических марковских цепей.

В отличие от конечных топологических марковских цепей, пространство Ω_A счетной ТМЦ некомпактно и поэтому возникают проблемы при обобщении результатов теории марковских цепей, в основном — теории Перрона-Фробениуса. Для неразложимой бесконечной матрицей переходов A соответствующая ТМЦ топологически транзитивна, и в этом случае, как показали Д. Вер-Джонс и Б.М. Гуревич (см. [15], [13], [14]) удается частично обобщить результаты теории Перрона-Фробениуса. Однако для ТМЦ с бесконечной матрицей переходов, даже в случае её неразложимости, могут не выполняться

¹ Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород; malkin@unn.ru

важные эргодические свойства, известные для конечных ТМЦ, такие, как существование и единственность меры с максимальной энтропией. Как следует из работы Б.М. Гуревича, свойством бесконечной матрицы, отвечающим за возможность такого обобщения для счетных ТМЦ, является R -положительность матрицы переходов, где R — параметр сходимости матрицы, совпадающий (см. [14], [8]) с радиусом сходимости $r(A)$ дзета-функции и со значением $\exp(-h_{top}(A))$, где $h_{top}(A)$ — топологическая энтропия ТМЦ. Мы доказываем в данной статье, что это важное свойство R -положительности имеет место для ТМЦ, у которых дзета-функция обладает естественными свойствами, и, в частности, для ТМЦ, являющихся символическими моделями кусочно-монотонных, кусочно-непрерывных одномерных отображений с положительной топологической энтропией.

В статье рассматриваются счетные ТМЦ с неразложимыми матрицами переходов A . Условия, накладываемые на матрицы переходов, следующие. Предполагается, что любая степень матрицы переходов имеет конечный след и, тем самым, для ТМЦ корректно определена динамическая дзета-функция Артина-Мазура $\zeta_A(z)$. Кроме того, предполагается, что радиус сходимости дзета-функции у подсистем ТМЦ, соответствующих подматрицам с достаточно большими номерами состояний, больше радиуса сходимости $r(A)$ дзета-функции исходной ТМЦ; точнее, предполагается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(\hat{A}|_n) > r(A), \quad (*)$$

где $\hat{A}|_n$ — это подматрица матрицы A , у которой (бесконечное) индексное множество есть $\{n, n+1, \dots\}$. Данное условие означает, что "хвостовая" подматрица матрицы переходов становится всё более разреженной, когда индексы принимают достаточно большие значения. Второе условие, которое мы будем предполагать выполненным, состоит в следующем:

$$\zeta_{\hat{A}|_n}(z) \text{ мероморфна в диске } |z| < r(A) + \varepsilon \text{ для некоторого } \varepsilon > 0 \text{ при всех } n \quad (**)$$

Отметим, что указанные условия являются естественными, т.к. они выполняются для счетных ТМЦ, являющихся символическими моделями одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией. Более того, для таких отображений условие $(**)$ на самом деле выполняется в более сильной форме (см. [5]), а именно, можно показать мероморфность указанных дзета-функций в открытом единичном диске. В настоящей работе показано, что при данных условиях матрица переходов является R -положительной. Тем самым, для ТМЦ имеют место сильные хаотические (эргодические) свойства и в частности, в ТМЦ обладает единственной мерой с максимальной энтропией, причем эта мера может быть эффективно вычислена в терминах собственных векторов матрицы ТМЦ. Другими словами, мероморфность дзета-функции гарантирует возможность существенного продвижения в теории Перрона-Фробениуса в случае бесконечных матриц. Кроме того, в работе показано, что дзета-функция $\zeta_A(z)$ имеет простые полюса на окружности $|z| = r(A)$ и получена аппроксимационная оценка числа периодических точек больших периодов.

2. Предварительные сведения и основная теорема

Рассмотрим бесконечную матрицу $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^\infty$ из нулей и единиц. Данной матрице следующим образом ставится в соответствие счетная топологическая марковская цепь (ТМЦ). Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \dots\}$ — множество символов (алфавит) и пусть $\Omega_A \subset \mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$ — множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей $\underline{x} = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ натуральных чисел, для которых при всех $n \in \mathbf{Z}$ выполняется

$$a_{x_n, x_{n+1}} = 1.$$

Метрика ρ на пространстве Ω_A вводится так:

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|}} \left| \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \right|. \quad (2.1)$$

ТМЦ (Ω_A, σ) есть топологическое (метрическое) пространство Ω_A , на котором действует отображение сдвига $\sigma: \Omega_A \rightarrow \Omega_A$, задаваемое формулой $\sigma(\underline{x}) = \underline{y}$, где $y_n = x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, метрика ρ согласована с топологией прямого (тихоновского) произведения на пространстве $\mathbf{N}^\mathbf{Z}$; здесь предполагается, что множество \mathbf{N} наделено дискретной топологией.

Таким образом, пространство Ω_A некомпактно. Чтобы компактифицировать Ω_A , рассмотрим расширенный алфавит с дополнительным символом ∞ , т.е. $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$. Метрика на $\bar{\mathbf{N}}$ задается по формуле $d(n, m) = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \right|$, где естественно предполагается, что $\frac{1}{\infty} = 0$. Далее рассматривается замыкание пространства Ω_A в $\bar{\mathbf{N}}^\mathbf{Z}$, т.е. $\bar{\Omega}_A = \text{Clos}(\Omega_A)$. Легко видеть, что на пространство $\bar{\Omega}_A$ корректно продолжается метрика ρ , задаваемая формулой (1), и, кроме того, $\bar{\Omega}_A$ является σ -инвариантным.

Мы всюду без ограничения общности предполагаем, что A — бесконечная матрица из нулей и единиц, не имеющая ни нулевых строк, ни нулевых столбцов (иначе соответствующий символ следует исключить из алфавита). Далее, мы предполагаем, что для матрицы A определены (конечны) все положительные степени, т.е. A^k , и.е. $a_{i,j}^{(k)} < +\infty$ при любых i, j, k . Для $I \subset \mathbf{N}$ мы обозначаем через $A|_I$ подматрицу матрицы A с индексным множеством I . Для простоты записи мы обозначаем через $A|_n$ конечную подматрицу $A|_{\{1, 2, \dots, n\}}$, а через $\hat{A}|_k$ — бесконечную подматрицу $A|_{\{k, k+1, \dots\}}$.

Матрица A называется неразложимой, если для любых $i, j \in \mathbf{N}$ найдется натуральное число k такое, что $a_{i,j}^{(k)} > 0$. В противном случае матрица A разложима. Точно так же, как и в случае конечных ТМЦ (см., например, [11]), доказывается, что неразложимость матрицы A эквивалентна транзитивности системы (Ω_A, σ) . Для неразложимой матрицы A обозначим через $d = d(A)$ её индекс цикличности (период). В случае $d > 1$ множество индексов \mathbf{N} можно разбить на d подмножеств I_1, I_2, \dots, I_d так, что для любых двух индексов $i \in I_s, j \in I_t$ будет существовать $k > 0$, удовлетворяющее условию $a_{i,j}^{(k)} > 0$, в том и только в том случае, когда $k \equiv (s-t)\text{mod } d$.

Пусть $h(A)$ — топологическая энтропия сдвига σ на компактификации $\bar{\Omega}_A$. Для конечной матрицы B обозначим через $h(B)$ топологическую энтропию ограничения $h(\sigma|\Omega_B)$. Б.М. Гуревич показал (см. [13], [14]), что для неразложимой матрицы A существует последовательность конечных неразложимых подматриц $A|_{J_n}$, такая, что

$$J_n \subset J_{n+1} \text{ для всех } n, \quad \bigcup J_n = \mathbf{N} \quad (2.2)$$

и выполняется

$$h(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A|_{J_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A|_n). \quad (2.3)$$

В работе [7] доказано, что равенство $h(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} h(A|_n)$ справедливо и для разложимых матриц. Для разложимой матрицы A и индекса $i \in \mathbf{N}$ обозначим через $I(i)$ максимальное подмножество (возможно, пустое) $J \subset \mathbf{N}$ такое, что $i \in J$ и матрица $A|_J$ неразложима, т.е.

$$I(i) = \{j \in \mathbf{N}: \exists k_1 > 0, \exists k_2 > 0 \text{ т.ч. } a_{ij}^{(k_1)} > 0, a_{ji}^{(k_2)} > 0\}.$$

Обозначим для простоты матрицу $A|_{I(i)}$ через A_i . Заметим, что если множество $I(i)$ конечно, то $\bar{\Omega}_{A_i} = \Omega_{A_i}$, где запись $\bar{\Omega}_{A_i}$ означает замыкание множества Ω_{A_i} в пространстве $\bar{\Omega}_A$.

В работе [7] показано также, что неблуждающее множество компактификации $(\overline{\Omega}_A, \sigma)$ имеет следующее разложение (в формулировке использовано обозначение $(\infty) = (\dots \infty \infty \infty \dots) \in \overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$):

Т е о р е м а 2.1. *Неблуждающее множество отображения сдвига σ на компактификации $\overline{\Omega}_A$ представляется в виде*

$$NW(\sigma|\overline{\Omega}_A) = (\bigcup \overline{\Omega}_{A_i}) \bigcup P,$$

где $P = (\infty)$, когда индексное множество $I(i)$ конечно для всех i , и $P = \emptyset$ в противном случае.

Нам потребуются некоторые соотношения для производящих функций, ассоциированных с матрицей A . Для произвольных индексов i, j эти функции определяются следующим образом):

$$T_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k; \quad F_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_{i,j}^{(k)} z^k; \quad L_{i,j}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} l_{i,j}^{(k)} z^k \quad (2.4)$$

где $a_{i,j}^{(0)} = \delta_{i,j}; f_{i,j}^{(0)} = l_{i,j}^{(0)} = 0; a_{i,j}^{(1)} = f_{i,j}^{(1)} = l_{i,j}^{(1)} = a_{i,j}$

$$a_{i,j}^{(k+1)} = \sum_n a_{i,n}^{(k)} a_{n,j}; \quad f_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n \neq j} a_{i,n} f_{n,j}^{(k)}; \quad l_{i,j}^{(k+1)} = \sum_{n \neq i} l_{i,n}^{(k)} a_{n,j}$$

Справедливы соотношения (см. [15]):

$$T_{i,i}(z) = 1/(1 - F_{i,i}(z)) = 1/(1 - L_{i,i}(z)) \quad (2.5)$$

$$T_{i,j}(z) = T_{i,i}(z) \cdot L_{i,j}(z) = F_{i,j}(z) \cdot T_{j,j}(z), \quad (i \neq j) \quad (2.6)$$

$$F_{i,j}(z) = z a_{i,j} (1 - F_{j,j}(z)) + z \sum_{k=0}^{\infty} a_{i,k} F_{k,j}(z); \quad L_{i,j}(z) = z \sum_{k=0}^{\infty} L_{i,k}(z) a_{k,j} + z a_{i,j} (1 - L_{i,i}(z)) \quad (2.7)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} L_{i,k}(z) F_{k,i}(z) = z \frac{dF_{ii}(z)}{dz} - F_{ii}(z) \cdot (1 - F_{ii}(z)) \quad (2.8)$$

Мы будем также обозначать данные функции $T_{i,j}(A, z), F_{i,j}(A, z), L_{i,j}(A, z)$, когда требуется подчеркнуть зависимость от A . Напомним некоторые свойства неразложимых матриц (см. [15]). Для любых $i, j \in \mathbf{N}$ существует предел $\lim(a_{i,j}^{(k)})^{-1/k}$, когда $k \rightarrow \infty$, находясь в таком подмножестве индексов I_m , для которого не все степени $a_{i,j}^{(k)}$ равны нулю. Этот предел, скажем, R , не зависит от i, j и, кроме того, он равен радиусу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} z^k$. Число $R = R(A)$ называется *параметром сходимости* матрицы A .

Неразложимая матрица A с параметром сходимости R называется *R-рекуррентной*, если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{i,j}^{(k)} R^k$ расходится, т.е. $T_{i,j}(R) = \infty$. Если, кроме того, $a_{i,j}^{(k)} R^k$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то A называется *R-положительной* (и это определение корректно, т.к. не зависит от i, j в силу неразложимости матрицы A). При доказательстве основной теоремы будет использован такой результат из [7].

Л е м м а 2.1. *Пусть A — R -рекуррентная матрица и пусть $B = A|_J$ — её R -рекуррентная подматрица. Тогда $B = A$.*

Далее мы будем предполагать, что для любого k след $N_k(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i}^{(k)}$ конечен. Легко видеть, что $N_k(A)$ равно числу неподвижных точек отображения $\sigma^k|\Omega_A$. Для системы (Ω_A, σ) дзета-функция Артина-Мазура $\zeta_A(z)$ определяется следующим образом:

$$\zeta_A(z) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k(A)z^k}{k}\right). \quad (2.9)$$

Другое представление дзета-функции дается формулой :

$$\zeta_A(z) = \prod_{orb} (1 - z^{p(orb)})^{-1} \quad (2.10)$$

где бесконечное произведение берется по всем периодическим орбитам системы (Ω_A, σ) , а $p(orb)$ обозначает период соответствующей орбиты. Из этого представления вытекает следующая лемма.

Л е м м а 2.2. *Для бесконечной матрицы A выполняется:*

$$\zeta_A(z) = \prod \zeta_{A_i}(z),$$

где произведение берется по всем максимальным неразложимым подматрицам $A_i = A|_{I(i)}$.

Пусть $r(A)$ — радиус сходимости ряда (11), т.е. $r(A) = (\overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{N_k(A)})^{-1}$. Из определений радиуса и параметра сходимости с помощью приведенных лемм нетрудно получить следующий результат.

Л е м м а 2.3. *Если A — неразложимая бесконечная матрица, то $r(A) \leq R(A) < 1$.*

Обобщением на разложимые матрицы является следующая лемма.

Л е м м а 2.4. *Для бесконечной матрицы A выполняется*

$$r(A) \leq \exp(-h(A)). \quad (2.11)$$

Для произвольной матрицы B (над \mathbf{C}) обозначим через $B_{i,j}^*$ подматрицу, которая получается из B удалением i -й строки и j -го столбца. Аналогично, для подмножеств $I, J \subset \mathbf{N}$ пусть $B_{I,J}^*$ обозначает матрицу, которая получается из B удалением строк и столбцов с индексами, принадлежащими I и J соответственно. Из этих определений нетрудно получить соотношение:

$$\zeta_A(z) = \zeta_{A_{i,i}^*}(z) \cdot T_{ii}(z). \quad (2.12)$$

Теперь рассмотрим бесконечные подматрицы $\hat{A}|_n = A|_{\{n, n+1, \dots\}}$. Очевидно, что $r(\hat{A}|_n) \leq r(\hat{A}|_{n+1})$ при всех n . Мы будем использовать естественное ограничение на матрицу A , определяемое условием:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r(\hat{A}|_n) > r(A). \quad (*)$$

Основная теорема о совпадении инвариантов энтропийного типа для счетных ТМЦ с матрицей переходов, удовлетворяющей условию $(*)$, состоит в следующем (см. [8]).

Т е о р е м а 2.2. *Если матрица переходов A удовлетворяет условию $(*)$, то*

$$r(A) = \exp(-h(A)) = \lim_{n \rightarrow \infty} r(A|_n) = \inf_j R_{j,j}(A) = \inf_i R(A_i) = \inf_i r(A_i),$$

и более того, все нижние грани в указанных соотношениях достигаются.

Теперь мы будем предполагать, что выполнено и второе условие — условие $(**)$

$$\zeta_{\hat{A}|_n}(z) \text{ мероморфна в диске } |z| < r(A) + \varepsilon \text{ для некоторого } \varepsilon > 0 \text{ при всех } n \quad (**)$$

При этих условиях докажем основную теорему данной работы.

Т е о р е м а 2.3. *Пусть A — неразложимая матрица периода d с параметром сходимости R и пусть для A выполняются условия $(*)$ и $(**)$. Тогда*

- i) A является R -положительной матрицей;
- ii) дзета-функция $\zeta_A(z)$ имеет ровно d полюсов на окружности $|z| = R$, а именно, $z_j = R \exp(2\pi i j/d)$, $j = 0, 1, \dots, d-1$, и все эти полюса простые.

Доказательство. Пусть n_0 — наименьшее натуральное число, для которого $r(\hat{A}|_{n_0}) > r(A) = R$. Тогда $\zeta_{\hat{A}|_{n_0}}(R) \neq \infty$, и $\zeta_A(R) = \infty$, поскольку R — полюс дзета-функции $\zeta_A(z)$. Из условия $(**)$ следует, что

$$\zeta_{\hat{A}|_{n_0-1}}(R) = \infty \text{ и } \zeta_{\hat{A}|_{n_0}}(R) \neq \infty$$

Обозначим $B = \hat{A}|_{n_0-1}$, тогда $r(B) = R$. Поскольку матрица B удовлетворяет условию $(*)$, из теоремы 2.2. следует, что существует неразложимая подматрица B_{i_0} матрицы B , обладающая такими свойствами

$$R(B_{i_0}) = r(B_{i_0}) = R, \quad \zeta_{B_{i_0}}(R) = \infty$$

Сначала покажем, что матрица B_{i_0} является R -рекуррентной. Пусть $C = B_{i_0}$, а подматрица $C_{1,1}^*$ получена из C удалением первой строки и первого столбца. Таким образом, $C_{1,1}^*$ есть подматрица матрицы $\hat{A}|_{n_0}$, и поэтому $\zeta_{C_{1,1}^*}(R) < \infty$. Из соотношения (2.12) имеем $T_{1,1}(C, z) = \zeta_C(z)/\zeta_{C_{1,1}^*}(z)$ для всех z из диска $|z| < r(C) = R$. Следовательно, $\lim_{x \uparrow R} T_{1,1}(C, x) = \infty$. Таким образом, ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_{1,1}^{(k)} R^k$ расходится, что означает R -рекуррентность матрицы C . Поскольку C — подматрица матрицы A , отсюда следует, что $T_{i,i}(A, R) = \infty$ для некоторого i (а значит, в силу неразложимости, для всех i).

Из леммы 2 следует, что C не может быть собственной подматрицей матрицы A . Таким образом, $C = A$ и $n_0 = 2$. Следовательно, $r(\hat{A}|_2) = r(A_{1,1}^*) > R$, и поэтому функция

$$T_{1,1}(A, z) = \zeta_A(z)/\zeta_{A_{1,1}^*}(z) \tag{2.13}$$

продолжается до мероморфной функции в открытом единичном диске. Более того, функции $\zeta_A(z)$ и $T_{1,1}(z)$ имеют на окружности $|z| = R$ одни и те же полюсы с одинаковыми кратностями. В частности, особенность $z = R$ функции $T_{1,1}(z)$ есть полюс и поэтому последовательность $a_{11}^{(k)} R^k$ не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$. Таким образом, матрица A является R -положительной.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Сначала рассмотрим случай, когда A — апериодическая матрица, и пусть z_0 — полюс дзета-функции $\zeta_A(z)$ на окружности

$|z| = R$. Тогда из равенства (2.13) следует, что z_0 — полюс функции $T_{1,1}(z)$, а из (5) следует, что z_0 — полюс функции $1 - F_{1,1}(z)$. Таким образом,

$$1 = \left| \sum_{k=0}^{\infty} f_{1,1}^{(k)} z_0^k \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} f_{1,1}^{(k)} R^k = 1$$

, поскольку A является R -рекуррентной по доказанному выше. Отсюда следует, что $z_0^k = R^k$ для всех k таких, что $f_{1,1}^{(k)} \neq 0$. Теперь мы можем доказать, что НОД $\{k : f_{1,1}^{(k)} \neq 0\} = 1$. От противного, если этот НОД равен некоторому $k_0 > 1$, то ряд $F_{1,1}(z)$ имеет ненулевые коэффициенты лишь при степенях z , кратных k_0 . Но это означало бы, что ряд

$$T_{1,1}(z) = \frac{1}{1 - F_{1,1}(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} (F_{1,1}(z))^k$$

имеет ненулевые коэффициенты лишь при этих степенях z . Однако это противоречит аperiодичности матрицы A . Таким образом, существуют положительные целые k_1, \dots, k_t такие, что НОД $(k_1, \dots, k_t) = 1$ и $z_0^{k_i} = R^{k_i}, i = 1, \dots, t$. Поэтому $k_1 m_1 + \dots + k_t m_t = 1$ для некоторых целых m_1, \dots, m_t , и значит,

$$z_0 = z_0^{k_1 m_1 + \dots + k_t m_t} = (z_0^{k_1})^{m_1} \cdots (z_0^{k_t})^{m_t} = R^{k_1 m_1 + \dots + k_t m_t} = R$$

Следовательно, дзета-функция $\zeta_A(z)$ имеет единственный полюс на окружности $|z| = R$, и этот полюс есть R . Осталось показать что полюс $z = R$ простой. Из (10),(11) и соотношения $F_{1,1}(R) = 1$ имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \uparrow R} (R - x) \zeta_A(x) &= \zeta_{A_{1,1}^*}(R) \cdot \lim_{x \uparrow R} (R - x) T_{1,1}(x) = \\ \zeta_{A_{1,1}^*}(R) / \lim_{x \uparrow R} \frac{1 - F_{1,1}(x)}{R - x} &= \zeta_{A_{1,1}^*}(R) / \left(\frac{dF_{1,1}(x)}{dx} \Big|_{x=R-0} \right) \end{aligned}$$

Поскольку производная $\frac{dF_{1,1}(x)}{dx}$ в точке R не равна нулю для R -положительной матрицы (см. критерий R -положительности в работе [15]), доказательство в аperiодическом случае завершено.

Пусть теперь A — периодическая матрица периода d и пусть I_0, I_1, \dots, I_{d-1} её индексные множества такие, что $\sigma(\Omega_j) = \Omega_{(j+1)\text{mod } d}$, где $\Omega_j = \{x = (x_n) \in \Omega_A : x_0 \in I_j\}, j = 0, 1, \dots, d-1$. Тогда σ топологически сопрягает $\sigma^d|\Omega_j$ с $\sigma^d|\Omega_{j+1}$. Отсюда следует, что $\zeta_A(z) = \zeta_{A^d|_{I_j}}(z^d)$ при всех j . Поскольку матрица $A^d|_{I_j}$ аperiодична, результат следует из доказанного результата в аperiодическом случае.

Доказательство закончено.

Следствие 2.1. В условиях теоремы 7

$$\lim_{k \rightarrow \infty} N_{kd}(A) R^{kd} = d$$

Доказательство. Напомним следующее утверждение из работы [9]: если дзета-функция $\zeta(z)$ продолжается до мероморфной функции в некотором диске $\text{disc } |z| < R + \varepsilon$, где R — радиус сходимости $\zeta(z)$, и если z_1, \dots, z_s — её полюса на окружности $|z| = R$ с кратностями a_1, \dots, a_s , то $N_k = a_1 z_1^{-k} + \dots + a_s z_s^{-k} + o((R + \varepsilon)^{-k})$. Таким образом, следствие вытекает из теоремы 7 и данного утверждения.

Доказательство закончено.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 12-01-00672.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. R. Bowen., *Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. Lecture Notes Math.* 470, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975.
2. W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.
3. Л. А. Бунимович, Н. И. Чернов, Я. Г. Синай, “Марковские разбиения двухмерных гиперболических биллиардов”, *УМН*, **45** (1990), 97-134.
4. Y. Guivarch, J. Hardy, “Theorem limites pour une classe de chaines de Marcov et applications aux classes de chaines de Marcov et applications aux difféomorphismes d’Anosov”, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, **24** (1988), 73-98.
5. F. Hofbauer, “On intrinsic ergodicity of piecewise monotone transformations with positive entropy”, *Israel J. Math.*, **34** (1979), 213-236.
6. M. Malkin, “On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval”, *Selecta Mathematica Sovietica*, **8** (1989), 131-139.
7. М.И. Малкин, “Разложение неблуждающего множества для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей”, *Журнал СВМО*, **15**:2 (2013), 49-54.
8. М.И. Малкин, “Инварианты энтропийного типа для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей”, *Журнал СВМО*, **15**:4 (2013), 148-155.
9. J. Milnor, W. Thurston, *On iterated maps of the interval. Lec. Notes Math.* 1342, Springer-Verlag, New York, 1988.
10. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, *Труды ММО*, **44** (1982), 150-212.
11. А.Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.
12. M.-C. Li, M. Malkin, “Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps”, *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353-3372.
13. Б.Н. Гуревич, “Топологическая энтропия счетной цепи Маркова”, *ДАН СССР*, **187** (1969), 715-718.
14. Б.Н. Гуревич, “Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве счетного графа”, *192* (1970), 963-965.
15. D. Vere-Jones, “Ergodic properties of nonnegative matrices”, *Pacific Journ. Math.*, **22** (1967), 361-386.

Chaotic behavior countable topological Markov chains with meromorphic zeta function

© M. I. Malkin²

Abstract. Countable topological Markov chains (TMC) are considered. It is assumed that any power of the transition matrix of TMC has finite trace and thus, for TMC, the dynamical Artin-Mazur zeta function is well-defined. Furthermore, it is assumed that the following two conditions are satisfied: 1) the radius of convergence of zeta functions for subsystems of TMC corresponding to submatrices with sufficiently large indexes is greater than $r(A)$, the radius of convergence of zeta function of original TMC, and 2) zeta function is meromorphic in a disk of radius greater than $r(A)$. These conditions are natural because they take place for countable TMC which are the symbolic models of one-dimensional piecewise-monotone maps with positive topological entropy. We show that under these conditions, the transition matrix of irreducible TMC is $r(A)$ -positive and, as a consequence, zeta function of TMC has simple poles on the circle $|z| = r(A)$ of the complex plane, and so, TMC has principal ergodic properties of finite TMC (in particular, there exists a unique measure of maximal entropy).

Key Words: topological Markov chains, zeta function, topological entropy

² Associate Professor of Department of differential equations and mathematical Analysis, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru.

УДК 517.9

Критические параметры плотности вероятности в индуцированных шумом переходах

© С. Н. Нагорных¹

Аннотация. В развитие теории индуцированных шумом переходов [1] рассматриваются необходимые и достаточные условия существования решения уравнения Фоккера-Планка (плотности вероятности) в виде дельта-функции в точке бифуркации уравнения Ферхольста, критические параметры и связь с теоремой Лиувилля.

Ключевые слова: критические параметры, плотность вероятности, уравнение Фоккера-Планка, уравнение Ферхольста

Известна работа [1], в которой один критический параметр λ плотности вероятности (ПВ) в индуцированных шумом $\frac{\sigma^2}{2}$ переходах (ИШП) найден из условия $P'_S(x) = 0$ в виде $\lambda = \frac{\sigma^2}{2}$, где $P_S(x)$ - стационарная ПВ, или решение уравнения Фоккера-Планка (УФП). Другое критическое значение параметра $\lambda = 0$ найдено из смены граничных значений интегралов в классификации Гихмана-Скорохода при $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$ для ПВ также являющейся решением УФП. Это значение соответствует точке бифуркации $\lambda = 0, x = 0$ уравнения Ферхольста:

$$\dot{x} = \lambda x + x^2 \quad (1.1)$$

где: x -плотность, например.

Однако решение УФП в $x = 0$ не существует. В [1] ПВ, или решение УФП в $x = 0$ принято в виде дельта-функции $\delta(x)$. В данной работе ищем условия, в том числе критические значения параметров, при которых ПВ, то есть решение УФП в точке $x = 0$ может быть взято в виде $\delta(x)$.

Пусть известно $P_S(x)$ по Стратановичу:

$$P_S(x) = Nx^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}-1} \exp\left(\frac{-2x}{\sigma^2}\right), \quad (1.2)$$

где: $N = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right)^{\frac{2\lambda}{\sigma^2}} / \Gamma\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2}\right)$, $\Gamma\left(\frac{2\lambda}{\sigma^2}\right)$ -гамма-функция.

Представим (1.2) в виде произведения $a_\epsilon(x)\phi(x)$ согласно [2]:

$$a_\epsilon(x) = x^{\epsilon-1}\epsilon\chi(x) \quad (1.3)$$

$$\phi(x) = \frac{\left(\frac{\epsilon}{\lambda}\right)^\epsilon}{\Gamma(\epsilon+1)} \exp\left(-\frac{\epsilon}{\lambda}x\right), \quad (1.4)$$

где параметр ПВ $\epsilon = \frac{2\lambda}{\sigma^2}$, $\chi(x)$ -функция Хевисайда, $\Gamma(\epsilon+1) = \epsilon\Gamma(\epsilon)$ - гамма функция. Пробной назовем бесконечногладкую финитную функцию $\phi(x)$.

Найдем предел линейного функционала вида:

$$T_\epsilon[\phi(x)] = \int a_\epsilon(x)\phi(x)dx \quad (1.5)$$

при $\epsilon \rightarrow 0$ или вида:

$$T_\epsilon[\phi(x)] = \epsilon \int_0^M x^{\epsilon-1}\phi(x)dx \quad (1.6)$$

¹ Доцент кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; algoritm@sandy.ru

Верхний предел М обусловлен финитностью $\phi(x)$. В силу непрерывности и дифференцируемости $\phi(x)$ (1.4) можно найти в точке $v_x \in (0, x)$

$$\phi(x) = \phi(0) + x\phi'(v_x) \quad (1.7)$$

и переписать (1.6):

$$T_\epsilon[\phi(x)] = \phi(0)\epsilon \int_0^M x^{\epsilon-1} dx + \epsilon \int_0^M x^\epsilon \phi'(v_x) dx \quad (1.8)$$

Первый интеграл стремится к единице при $\epsilon \rightarrow 0$. Второй интеграл в силу $|\phi'(x)| < N, N < \infty$ сходится к нулю. Имеем:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} T_\epsilon[\phi(x)] = \phi(0) \quad (1.9)$$

Выражение (1.9) означает, что $a_\epsilon(x)$ слабо сходится к $\delta(x)$ при $\epsilon \rightarrow 0$. В силу (1.7) из (1.5) имеем:

$$P_S(x) = \delta(x) \quad (1.10)$$

Таким образом необходимо (1.10), чтобы $P_S(x)$ (1.2) было асимптотическим решением УФП в точке $x = 0, \lambda = 0$ (1.1).

Пусть известно решение УФП в виде:

$$P(x, t) = \delta(x - b(t)) \quad (1.11)$$

Тогда достаточно задать уравнение более общего вида, чем (1.1):

$$\frac{db(t)}{dt} = v(b(t), t) + v_1(b(t), t) \quad (1.12)$$

Дифференцируя (1.10) по времени t , получаем:

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = -\dot{b}(t) \frac{\partial}{\partial x} \delta(x - b(t)) \quad (1.13)$$

В силу независимости от x вносим $\dot{b}(t)$ под знак $\frac{\partial}{\partial x}$. С учетом выкальзывающего свойства $\delta(x)$ множитель $\dot{b}(t)$ становится зависимым от x , что дает УФП [1]:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial I}{\partial x}, I = P(x, t)[(v(x(t), t) + v_1(x(t), t)], \quad (1.14)$$

где $v = f(x, t)$ - явления переноса или рождения и смерти типа (1.1)

$$v_1 = \frac{\sigma^2}{2} \frac{1}{p(x, t)} \frac{\partial(p(x, t)\xi^2(x, t))}{\partial x}, \quad (1.15)$$

где $\xi^2(x, t)$ - коэффициент диффузии.

Сформулируем (1.1-1.15) в виде теоремы Хорстхемке-Саичева: для существования и пересечения по x решения $P_S(x)$ УФП по Стратановичу в точке $x = 0$ со стационарным решением уравнения Ферхюльста в точке бифуркации $x = 0, \lambda = 0$ необходимо и достаточно, чтобы оно имело вид $\delta(x)$ или $\delta(x - b(t))$ в стационарном или нестационарном случае соответственно.

Следствие 1.2. При $\frac{\partial p}{\partial t} = 0, I = 0$ в точке $x_0 \neq 0$ $P_S(x) = \delta(x - x_0)$.

Следствие 1.3. При $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ и (1.14) типа Стратановича [1] наоборот имеем (1.12), например, вида

$$\dot{x} = (\lambda - \frac{\sigma^2}{2})x - x^2(1 + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial \ln P}{\partial x}|_{x=x_0}) \quad (1.16)$$

с точкой бифуркации $\lambda = \frac{\sigma^2}{2}, x = 0$. Эта точка аналогична точке бифуркации ПВ $P'_S(x) = 0$ с критическим значением параметра $\lambda = \frac{\sigma^2}{2}$.

Следствие 1.4. При $\lambda \rightarrow 0$ и $\frac{\sigma^2}{2} \rightarrow \infty$ вероятностная несовместностьлечет: $\lambda = \lambda_0 + \sigma\xi$, где λ_0 - параметр, ξ - белый шум. Для трех ПВ (1.10), (1.2) локализация максимальной вероятности возникает при $\lambda_0 \rightarrow 0$, то есть в окрестности точки бифуркации (1.1) или (1.16), что согласуется с теоремой Кифера [3].

Следствие 1.5. При $\frac{\partial p(x,t)}{\partial t} = 0, I(p(x,t), x(t), t) = 0$ (1.14) получается $P_S(x)$ вида (1.2).

Следствие 1.6. При расширении $P_S(x,t)$ до $P_S(x, \bar{p}, t)$, в стационарном случае следует теорема Лиувилля, где \bar{p} - импульс из гамильтоновой механики.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Хорстхемке В., Лефевр Р., *Индукционные шумом переходы*, Мир., 1987, 397 с.
2. Лапинова С. А., Саичев А. И., Филимонов В. А., *Современные методы прикладной математики (Обобщенные функции и асимптотические методы)*, Нижегородский университет, 2006, 148 с.
3. Кифер Ю. И., “О малых случайных возмущениях некоторых гладких динамических систем”, *Изв. АН СССР*, **38** (1974), 1091.

Critical Parameters of Probability Density in Noise-Induced Transitions.

© S. N. Nagornykh²

Abstract. Under development of the noise-induced transitions theory all necessary and sufficient conditions of Fokker-Plank equations solutions are considered as delta-function in bifurcation point of Verhulst equation in connection of Liouville theorem. The critical parameters of probability density are estimated.

Key Words: Critical parameters, probability density, Fokker-Plank equations, Verhulst equation.

² Docent of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; algoritm@sandy.ru

УДК 519.63:517.958

Математическое моделирование процессов диффузии-адвекции радона в кусочно-постоянных анизотропных слоистых средах с включениями

© А. Р. Нафикова¹, В. Н. Кризский²

Аннотация. В работе построена математическая модель диффузии-адвекции радона в слоистых анизотропных средах с анизотропными включениями, которая представляет собой краевую задачу математической физики параболического типа. Предложен комбинированный способ решения задачи на основе методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений. Построен алгоритм расчета поля объемной активности радона.

Ключевые слова: диффузия-адвекция радона, анизотропная среда, краевая задача, метод интегральных преобразований и интегральных представлений, преобразование Лапласа

1. Введение

Радон, в силу своих специфических особенностей, является индикатором при различных геологических и геотехнических исследованиях. Динамические изменения концентрации радона в приповерхностном слое почвы отражают динамические изменения напряженно-деформированного состояния горного массива, что служит основой для исследования вариаций поля радона как краткосрочного предвестника сейсмических событий [1]. В геологии изотопы радона используются для поиска урановых и ториевых руд, для экологического картирования при выборе площадок под строительство промышленных и жилых сооружений. Повышенная концентрация радона над залежами углеводородов используется для поиска и оконтуривания нефтяных и газовых месторождений.

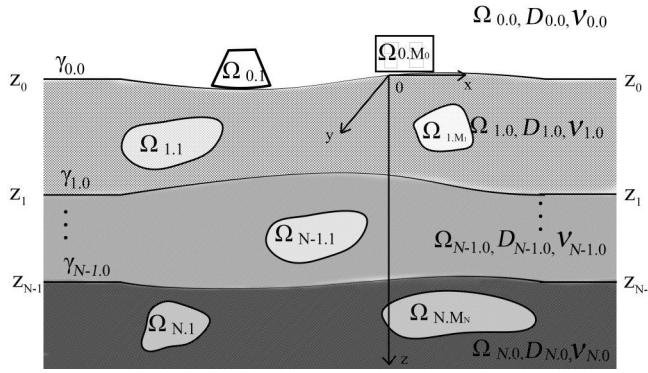
Изучение процессов распределения радона в грунте и его стока в приземный слой атмосферы связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка алгоритмов решения подобного типа задач и расчета полей объемной активности радона имеет практическое значение в таких направлениях, как сейсмология, геохимия, разведочная геофизика и т.д.

2. Постановка задачи и способ решения

Будем рассматривать горизонтально-слоистую модель среды с локальными включениями, отражающую типовую структуру нефтеносного района (см. рисунок).

¹ Старший преподаватель кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; albinabikbaeva@gmail.com.

² Зам. директора по научной работе и инновациям, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; Krizsky@rambler.ru.



Горизонтально-слоистая среда с включениями

Пусть среда разделена гладкими параметрически заданными границами $\gamma_{i,0} = \{\gamma_{i,0}(x, y) | \gamma_{i,0} \rightarrow z_i \text{ при } \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty\}$ ($i = \overline{0, N}$) на горизонтальные слои $\Omega_{0,0}, \Omega_{1,0}, \dots, \Omega_{N,0}$, заполненные веществом, диффузационные свойства которого описываются симметричными тензорами $D_{i,0} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,0} & d_{xy}^{i,0} & d_{xz}^{i,0} \\ d_{xy}^{i,0} & d_{yy}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} \\ d_{xz}^{i,0} & d_{yz}^{i,0} & d_{zz}^{i,0} \end{pmatrix}$ и скоростями адвекции $\nu_{0,0}, \nu_{1,0}, \dots, \nu_{N,0}$ соответственно.

Каждый слой $\Omega_{i,0}$ содержит M_i локальных включений $\Omega_{i,j}$ ($j = \overline{1, M_i}$) с границами $\gamma_{i,j}$, заполненных веществом, физические свойства которого описываются постоянными симметричными тензорами диффузии $D_{i,j} = \begin{pmatrix} d_{xx}^{i,j} & d_{xy}^{i,j} & d_{xz}^{i,j} \\ d_{xy}^{i,j} & d_{yy}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} \\ d_{xz}^{i,j} & d_{yz}^{i,j} & d_{zz}^{i,j} \end{pmatrix}$ и скоростями адвекции $\nu_{i,j}$, $i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$.

Математическая модель переноса радиона в области исследования $\Omega = \bigcup_{i=0}^N \bigcup_{j=1}^{M_i} \Omega_{i,j} \subset \mathbb{R}^3$ может быть представлена начально-краевой задачей вида:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial A_{i,j}(P, t)}{\partial t} &= \operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} A_{i,j}(P, t)) + \nu_{i,j} \frac{\partial A_{i,j}(P, t)}{\partial z} - \lambda(A_{i,j}(P, t) - A_{i,\infty}), \\
 P &= P(x, y, z) \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \\
 ((D_{i,0} \bar{\nabla} A_{i,0}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,0} A_{i,0}(P, t))|_{\gamma_{i,0}} &= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} A_{i+1,0}(P, t), \bar{n}) + \\
 &\quad + \nu_{i+1,0} A_{i+1,0}(P, t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\
 A_{i,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}} &= A_{i+1,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\
 ((D_{i,j} \bar{\nabla} A_{i,j}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,j} A_{i,j}(P, t))|_{\gamma_{i,j}} &= ((D_{i,0} \bar{\nabla} A_{i,0}(P, t), \bar{n}) + \\
 &\quad + \nu_{i,0} A_{i,0}(P, t))|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \\
 A_{i,j}(P, t)|_{\gamma_{i,j}} &= A_{i,0}(P, t)|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \\
 \lim_{z \rightarrow \infty} A_{N,0}(P, t) &= A_{N,\infty}, \lim_{z \rightarrow -\infty} A_{0,0}(P, t) = 0; \\
 \lim_{P \in \Omega_{i,0}, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty} A_{i,0}(P, t) &= A_i(P, t), i = \overline{0, N}; \\
 A_{i,j}(P, 0) &= 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}.
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь $A_{i,j}(P, t)$ – объемная активность радона в грунте; λ – постоянная распада радона; $A_{i,\infty}$ – объемная активность радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием (^{226}Ra) в грунте i -го слоя, которая равна $A_{i,\infty} = K_{i,em} A_{i,Ra} \rho_{i,s} (1 - \eta_i)$, $K_{i,em}$ – коэффициент эманирования радона, $A_{i,Ra}$ – удельная активность ^{226}Ra , $\rho_{i,s}$ – плотность твердых частиц, η_i – пористость грунта, $A_i(P, t)$ – нормальное поле радона, описывающее диффузию-адвекцию радона в слоистой среде в предположении отсутствия включений. Переменная $t \geq 0$ – время.

Если область $\Omega_{0,0}$ – приземный слой атмосферы, то в задаче (2.1) следует положить $A_{0,\infty} = 0$. При $M_0 > 0$ включения $\Omega_{0,1}, \dots, \Omega_{0,M_0}$ могут описывать жилые и производственные сооружения.

Представим исходную функцию объемной активности радона в грунте $A_{i,j}(P, t)$ в виде суммы двух вспомогательных функций нормального $A_i(P, t)$ и аномального $\bar{A}_{i,j}(P, t)$ полей, т.е.

$$A_{i,j}(P, t) = A_i(P, t) + \bar{A}_{i,j}(P, t), i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}, \quad (2.2)$$

где нормальное поле радона определяется краевой задачей:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i(P, t)}{\partial t} &= \operatorname{div}(D_{i,0} \bar{\nabla} A_i(P, t)) + \nu_{i,0} \frac{\partial A_i(P, t)}{\partial z} - \lambda(A_i(P, t) - A_{i,\infty}), \\ P &\in \Omega_{i,0}, i = \overline{0, N}; \\ ((D_{i,0} \bar{\nabla} A_i(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,0} A_i(P, t))|_{\gamma_{i,0}} &= \\ ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} A_{i+1}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i+1,0} A_{i+1}(P, t))|_{\gamma_{i,0}}, i &= \overline{0, N-1}; \\ A_i(P, t)|_{\gamma_{i,0}} &= A_{i+1,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ \lim_{z \rightarrow \infty} A_N(P, t) &= A_\infty^N; \lim_{z \rightarrow -\infty} A_0(P, t) = 0; \\ \lim_{P \in \Omega_i, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty} A_i(P, t) &= \widetilde{A}_i(z, t), i = \overline{0, N}; A_i(P, 0) = 0, i = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где $\widetilde{A}_i(z, t)$ – объемная активность радона в кусочно-однородной горизонтально-слоистой среде с плоско-параллельными границами $z = z_i, i = \overline{0, N-1}$ и коэффициентами диффузии $\widetilde{d}_i = d_{zz}^{i,0}, i = \overline{0, N}$. Способ определения $\widetilde{A}_i(z, t)$ описан в [2].

С учетом задачи (2.3) аномальное поле радона удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{A}_{i,j}(P, t)}{\partial t} &= \operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} \bar{A}_{i,j}(P, t)) + \nu_{i,j} \frac{\partial \bar{A}_{i,j}(P, t)}{\partial z} - \lambda \bar{A}_{i,j}(P, t), \\ P &\in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}; \\ ((D_{i,0} \bar{\nabla} \bar{A}_{i,0}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,0} \bar{A}_{i,0}(P, t))|_{\gamma_{i,0}} &= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} \bar{A}_{i+1,0}(P, t), \bar{n}) + \\ &+ \nu_{i+1,0} \bar{A}_{i+1,0}(P, t))|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ \bar{A}_{i,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}} &= \bar{A}_{i+1,0}(P, t)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ ((D_{i,j} \bar{\nabla} \bar{A}_{i,j}(P, t), \bar{n}) + \nu_{i,j} \bar{A}_{i,j}(P, t))|_{\gamma_{i,j}} &= [(D_{i,0} \bar{\nabla} \bar{A}_{i,0}(P, t), \bar{n}) + \\ &+ \nu_{i,0} \bar{A}_{i,0}(P, t) + \psi_{i,0}(P, t)]|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}, \\ \psi_{i,0}(P, t) &= ((D_{i,0} - D_{i,j}) \bar{\nabla} A_i(P, t), \bar{n}) + (\nu_{i,0} - \nu_{i,j}) A_i(P, t); \quad (*) \\ \bar{A}_{i,j}(P, t)|_{\gamma_{i,j}} &= \bar{A}_{i,0}(P, t)|_{\gamma_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}; \\ \lim_{P \rightarrow \infty} \bar{A}_{i,0}(P, t) &= 0, i = \overline{0, N}; \bar{A}_{i,j}(P, 0) = 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M_i}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Сделаем в задаче (2.4) замену вида:

$$\bar{A}_{i,j}(P, t) = e^{-\lambda t} u_{i,j}(P', t), \quad (2.5)$$

где $P' = (x, y, z')$, $z' = z + \nu_{i,j} t$.

Получим задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,j}(P', t)}{\partial t} &= \operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} u_{i,j}(P', t)), P' \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}; \\ ((D_{i,0} \bar{\nabla} u_{i,0}(P', t), \bar{n}) + \nu_{i,0} u_{i,0}(P', t))|_{\gamma'_{i,0}} &= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} u_{i+1,0}(P', t), \bar{n}) + \\ &\quad + \nu_{i+1,0} u_{i+1,0}(P', t))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ ((D_{i,j} \bar{\nabla} u_{i,j}(P', t), \bar{n}) + \nu_{i,j} u_{i,j}(P', t))|_{\gamma'_{i,j}} &= ((D_{i,0} \bar{\nabla} u_{i,0}(P', t), \bar{n}) + \\ &\quad + \nu_{i,0} u_{i,0}(P', t) + \psi_{i,0}(P', t))|_{\gamma'_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M}; \\ u_{i,j}(P', t)|_{\gamma'_{i,0}} &= u_{i,0}(P', t)|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M}; \\ \lim_{P' \rightarrow \infty} u_{i,0}(P', t) &= 0, i = \overline{0, N}; \\ u_{i,j}(P', 0) &= 0, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Применим к задаче (2.6) способ решения, описанный в работе [3], используя интегральное преобразование Лапласа

$$F(P', s) = \int_0^\infty u(P', t) e^{-st} dt \quad (2.7)$$

с формулой обращения

$$u(P', t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(P', s) e^{st} ds. \quad (2.8)$$

Получим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(P', s)) - s F_{i,j}(P', s) &= 0, P' \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{0, M}; \\ ((D_{i,0} \bar{\nabla} F_{i,0}(P', s), \bar{n}) + \nu_{i,0} F_{i,0}(P', s))|_{\gamma'_{i,0}} &= ((D_{i+1,0} \bar{\nabla} F_{i+1,0}(P', s), \bar{n}) + \\ &\quad + \nu_{i+1,0} F_{i+1,0}(P', s))|_{\gamma'_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ F_{i,0}(P', s)|_{\gamma_{i,0}} &= F_{i+1,0}(P', s)|_{\gamma_{i,0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ ((D_{i,j} \bar{\nabla} F_{i,j}(P', s), \bar{n}) + \nu_{i,j} F_{i,j}(P', s))|_{\gamma'_{i,j}} &= ((D_{i,0} \bar{\nabla} F_{i,0}(P', s), \bar{n}) + \\ &\quad + \nu_{i,0} F_{i,0}(P', s) + F_{\psi_{i,0}}(P', s))|_{\gamma'_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M}, \\ F_{\psi_{i,0}}(P') &= ((D_{i,0} - D_{i,j}) \bar{\nabla} F_i(P', s), \bar{n}) + (\nu_{i,0} - \nu_{i,j}) F_i(P', s); \\ F_{i,j}(P', s)|_{\gamma'_{i,j}} &= F_{i,0}(P', s)|_{\gamma'_{i,j}}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M}; \\ \lim_{P' \rightarrow \infty} F_{i,j}(P', s) &= 0, i = \overline{0, N}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

где функции $F_{\psi_{i,0}}(P')$ и $F_i(P', s)$ – есть образы функций $\psi_{i,0}(P', t)$ и $A_i(P', t)$ при преобразовании (2.7) соответственно.

Для решения задачи (2.9) рассмотрим вспомогательную задачу для функции Грина $G(P, Q)$ – функции точечного источника, находящегося в произвольной точке $Q(x_q, y_q, z_q)$

и генерирующего диффузионное поле единичной интенсивности во вмещающем пространстве (в слоистой среде без включений):

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(D_{i.0}\bar{\nabla}G_{i.0}(P', Q)) - sG_{i.0}(P', Q) &= -\delta(P', Q), P' \in \Omega_{i.0}, i = \overline{0, N}; \\ ((D_{i.0}\bar{\nabla}G_{i.0}(P', Q), \bar{n}) + \nu_{i.0}G_{i.0}(P', Q))|_{\gamma'_{i.0}} &= ((D_{i+1.0}\bar{\nabla}G_{i+1.0}(P', Q), \bar{n}) + \\ &\quad + \nu_{i+1.0}G_{i+1.0}(P', Q))|_{\gamma'_{i.0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ G_{i.0}(P', Q)|_{\gamma'_{i.0}} &= G_{i+1.0}(P', Q)|_{\gamma'_{i.0}}, i = \overline{0, N-1}; \\ \lim_{P' \rightarrow \infty} G_{i.j}(P', Q) &= 0, i = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Согласно [3], интегральное представление задачи (2.9) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} F(P', s) &= \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i.j}} F_{i.j}(Q, s)[(\nu_{i.0} - \nu_{i.j})G_{i.0}(P', Q) + \\ &\quad + ((D_{i.0} - D_{i.j})\bar{\nabla}G_{i.0}(P', Q), \bar{n}_Q)]d\gamma_{i.j_Q} + \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i.j}} F_{\psi_{i.0}}(Q)G_{i.0}(P', Q)d\gamma_{i.j_Q}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Здесь \bar{n}_Q – вектор внешней нормали к границе включения в точке Q , а граничные значения функции $F_{i.j}(Q, s)$ находятся как решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода, формируемой из (2.9) при $P' \in \gamma_{i.j}$:

$$\begin{aligned} F_{i.j}(P', s) - \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i.j}} F_{i.j}(Q, s)[(\nu_{i.0} - \nu_{i.j})G_{i.0}(P', Q) + \\ &\quad + ((D_{i.0} - D_{i.j})\bar{\nabla}G_{i.0}(P', Q), \bar{n}_Q)]d\gamma_{i.j_Q} = \sum_{i=0}^N \sum_{j=1}^{M_i} \int_{\gamma'_{i.j}} F_{\psi_{i.0}}(Q)G_{i.0}(P', Q)d\gamma_{i.j_Q}, P' \in \gamma_{i.j}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким образом, алгоритм решения исходной задачи (2.1) имеет вид:

Шаг 1. Определяем нормальное поле радона $\tilde{A}_i(z, t)$ в горизонтально-слоистой кусочно-однородной среде с плоско-параллельными границами $z = z_i = \text{const}, i = \overline{0, N-1}$, коэффициентами диффузии $d_i = d_{zz}^{i.0}, i = \overline{0, N}$ и скоростями адвекции $\nu_{i.0}, i = \overline{0, N}$ по алгоритму, описанному в работе [2].

Шаг 2. Если границы слоев $z = \gamma_{i.0}(x, y) = z_i = \text{const}$, то есть среда имеет плоско-параллельные границы, то решение задачи (2.3) для нормального поля радона найдено: $A_i(P, t) = \tilde{A}_i(z, t)$. Иначе следует решить задачу (2.3), например, методом интегральных уравнений, формируя их по участкам $\gamma_{i.0}(x, y) \neq z_i$.

Шаг 3. Вычисляем функции $\psi_{i.0}(P', t)$ на границах включений $\gamma_{i.j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$ по формуле (*).

Шаг 4. Для каждого из значений параметра s множества квадратурных узлов численного обращения преобразования Лапласа (в соответствии с алгоритмом в [4]) по формуле (2.8):

Шаг 4.1. Находим образы $F_{\psi_{i.0}}(P')$ функций $\psi_{i.0}(P, t)$ при преобразованиях (2.5) и (2.7).

Шаг 4.2. Находим решение задачи (2.10) для функции Грина. Оно может быть получено аналитически для случая однородных слоев с плоско-параллельными границами с помощью интегрального преобразования Ханкеля-Вебера.

Шаг 4.3. Формируем систему (2.12) и находим ее решение - граничные значения функции $F_{i,j}(Q, s)$.

Шаг 4.4. По формуле (2.11) определяем решение задачи (2.9) - функцию $F_{i,j}(P', s)$.

Шаг 4.5. Формируем слагаемое квадратурной формулы для интеграла (2.8), вычисляя функции $u(P', t)$.

Шаг 5. Находим аномальное поле $\bar{A}_{i,j}(P, t)$ по формуле (2.5).

Шаг 6. Решение исходной задачи (2.1) - функцию $A_{i,j}(P, t)$ - получаем по формуле (2.2).

3. Заключение

Построена математическая модель диффузии-адвекции радона в слоистых анизотропных средах с анизотропными включениями, которая представляет собой краевую задачу математической физики параболического типа. Предложен комбинированный способ решения задачи на основе методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений. Построен алгоритм расчета поля объемной активности радона.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уткин В. И., “Газовое дыхание Земли”, *Соросовский образовательный журнал*, 1997, № 1, 57–64.
2. Яковлева В. С., Паровик Р. И., “Численное решение уравнения диффузии-адвекции радона в многослойных геологических средах”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, № 1(2), 45–55.
3. Кризский В. Н., “О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть II. Нестационарные поля”, *Вестник Башкирского университета*, 14:4 (2009), 1302–1306.
4. Матвеева Т. А., *Некоторые методы обращения преобразования Лапласа и их приложения*, дисс. . . . канд. физ.-мат. наук, С.-П., 2003, 117 с.

Mathematical modeling of processes of diffusion and advection of radon in piecewise and anisotropic layered media with inclusions

© A. R. Nafikova³, V. N. Krizsky⁴

Abstract. In the work the mathematical model of diffusion of radon in layered anisotropic media with anisotropic inclusions which represents a boundary problem of mathematical physics of parabolic type is constructed. The combined method of the solution problem on the basis of methods of integral transformations, integral representations and the boundary integral equations is offered.

Key Words: diffusion-advection of radon, anisotropic media, boundary problem, method of integral transformations and integral representations, Laplace transform

³ Senior lecturer to chair of mathematical modeling, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; albinabikbaeva@gmail.com.

⁴ Deputy director for scientific work and innovations, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; Krizsky@rambler.ru.

УДК 534.113

Исследование зависимостей частот колебаний участка трубопровода от характеристик жидкости

© Г. Ф. Сафина¹

Аннотация. При различных закреплениях участка трубопровода с жидкостью исследованы зависимости частот его изгибных колебаний от параметров жидкости. Показано, что при увеличении плотности, давления жидкости, а также скорости потока жидкости частоты колебаний участка трубы уменьшаются. Приведены примеры, таблицы, построены графики зависимостей, частотные голографы при различных видах закреплений участка трубы.

Ключевые слова: трубопровод с жидкостью, частоты колебаний, зависимости, характеристики жидкости, плотность, давление, скорость, частотные голографы

1. Введение

Колебания трубопровода с жидкостью изучались во многих работах (см., например, [1]–[6]). Так, в [1] по методу Бубнова–Галеркина были найдены первые два собственных значения для краевой задачи с уравнением (2.1) и краевыми условиями $w = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$ на концах трубы. В работе [2] в случае, когда не учитывается внутреннее давление ($p_0 = 0$), исследована зависимость тонов колебаний от скорости при граничных условиях защемления по концам трубы и шарнирных ее опираниях. В отличие от этой работы, в настоящей работе исследовано влияние скорости потока жидкости на частоты колебаний участка трубы между ее закреплениями не только при заделке и шарнирном опирании, но и при других, в том числе и упругих, видах закреплений. Кроме того, учтено внутреннее давление жидкости (случай $p_0 \neq 0$). Построены также частотные голографы при различных видах закреплений участка трубы.

2. Прямая задача об изгибных колебаниях участка трубы с жидкостью

Уравнение малых свободных колебаний трубы с протекающей жидкостью имеет вид [1] – [3]:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (m + \tilde{m}) \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2\tilde{m}V_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t} + \tilde{m} \left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2 \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.1)$$

Здесь

$$I = \frac{\pi}{4}(r^4 - r_1^4), \quad m = \pi(r^2 - r_1^2)\rho, \quad \tilde{m} = \pi r_1^2 \rho_0,$$

где I — момент инерции трубчатого сечения, EI — жесткость трубы, p_0 — критическое внутреннее давление, m и \tilde{m} — массы трубы и жидкости, приходящиеся на единицу длины l трубы, r и r_1 — радиусы внешнего и внутреннего поперечного сечения, V_0 — скорость движения жидкости, ρ — плотность материала трубы, ρ_0 — плотность жидкости.

¹ Доцент кафедры математического моделирования и информационной безопасности Нефтекамского филиала Башкирского государственного университета, г. Нефтекамск; safinagf@mail.ru

Напомним необходимый для дальнейшего изложения способ получения собственных частот [6].

После введения безразмерных переменных $\tilde{x} = x/l$, $\tilde{w} = w/r$, $\tilde{t} = t/\tau$, где $\tau = l^2(\frac{m+\tilde{m}}{EI})^{1/2}$, и выражения прогиба к задаче в виде $\tilde{w}(\tilde{x}, \tilde{t}) = X(\tilde{x})e^{i\omega\tilde{t}}$, уравнение (2.1) примет вид обыкновенного линейного дифференциального уравнения 4 порядка с постоянными коэффициентами:

$$X^{(4)} + a X'' + 2b i \omega X' - \omega^2 X = 0, \quad (2.2)$$

в котором

$$a = \frac{\tilde{m} l^2}{E I} \left(\frac{p_0}{\rho_0} + V_0^2 \right); \quad b = \frac{\tilde{m} V_0 l}{(E I (m + \tilde{m}))^{1/2}}.$$

Линейно независимыми решениями уравнения (2.2) являются функции

$$X_j = X_j(\tilde{x}, \omega) = e^{\lambda_j \tilde{x}}, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad (2.3)$$

где $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ — корни соответствующего характеристического уравнения, которые мы будем считать различными.

В общем случае, который учитывает заделку, свободное опирание, свободный конец, плавающую заделку, различные виды упругого закрепления трубопровода, краевые условия как известно [5] представляются в следующем виде:

$$\begin{aligned} U_1(X) &= a_1 X(0) + a_4 X'''(0) = 0, & U_2(X) &= a_2 X'(0) + a_3 X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= b_1 X(1) + b_4 X'''(1) = 0, & U_4(X) &= b_2 X'(1) + b_3 X''(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Уравнение частот получается из условия равенства нулю характеристического определителя $\Delta(\omega_k)$. При известных параметрах системы (труба — жидкость) и краевых условиях собственные частоты колебаний трубопровода находятся как корни уравнения $\Delta(\omega_k) = 0$.

3. Влияние на собственные частоты колебаний участка трубопровода плотности и давления жидкости

Исследуем влияние на значения собственных частот колебаний трубы таких параметров жидкости, как давление, скорость и плотность.

Рассмотрим вначале зависимость значений собственных частот колебаний трубы от изменения внутреннего давления в трубопроводе при условии не протекания жидкости (т.е. при $V_0 = 0$). В этом случае в дифференциальном уравнении (2.2) коэффициент $b = 0$. Зададим следующие параметры системы (труба - жидкость):

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.0095 \text{ м}, & r &= 0.01 \text{ м}, & l &= 5 \text{ м}, & \rho &= 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ V_0 &= 0 \text{ м/с}, & \rho_0 &= 10^3 \text{ кг/м}^3, & E &= 6.9 \cdot 10^9 \text{ Н/м}^2. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь в качестве материала трубы рассматривается металлопластик, а в качестве жидкости — вода. Определим максимальное значение внутреннего давления p_0 , которое может привести к разрыву трубы. Это значение определяется формулой [4]

$$p_{\max} = \sigma (r - r_1)/r. \quad (3.2)$$

Для принятых выше параметров $r - r_1 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$, $\sigma = 1800 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ значение максимально допустимого давления равно $p_{\max} = 90 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

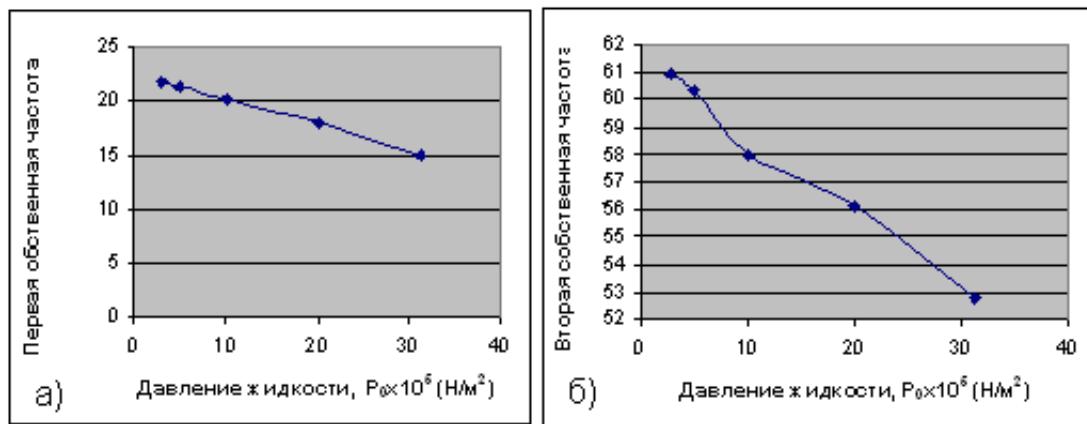
Поставим к уравнению (2.2) краевые условия в виде

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X(0) - X'''(0) = 0, & U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X(1) + X'''(1) = 0, & U_4(X) &= X''(1) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Эти краевые условия означают упругие закрепления обоих концов трубы пружинами с относительными жесткостями, равными единице. Будем вычислять значения собственных частот колебаний трубы с жидкостью, меняя давление p_0 , которое оказывает жидкость на стенки трубы, оставляя остальные параметры системы неизменными. Как изменятся при этом собственные частоты колебаний трубы?

Результаты решений уравнения $\Delta(\omega_k) = 0$ при параметрах системы (3.1) и краевых условиях (3.3) рассмотрим на диаграммах и таблицах.

На рисунке 1 (а) дана зависимость первой собственной частоты колебаний трубы от внутреннего давления жидкости. Видно, что с увеличением давления, первая собственная частота ω_1 уменьшается. На рисунке 1 (б) подобная зависимость рассмотрена для второй собственной частоты колебаний трубопровода.



Зависимость значений первой (а), второй (б) собственных частот колебаний от давления жидкости для задачи (2.2), (3.3) при параметрах (3.1) системы (труба-жидкость)

Такое изменение касается не только первых двух собственных частот, но и всего спектра частот колебаний трубы с жидкостью. В таблице 1 приведены значения пяти собственных частот колебаний трубы, соответствующие увеличивающимся значениям внутреннего давления жидкости в трубе для рассматриваемой выше задачи.

Таблица 4: Зависимость собственных частот колебаний трубы от давления жидкости для задачи (2.2), (3.3) при параметрах (3.1) системы (труба-жидкость)

	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	$\omega_5, \text{с}^{-1}$
$p_0 = 2.9 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	21.82	60.92	120.08	199.00	297.67
$p_0 = 5 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	21.39	60.35	119.46	198.35	297.00
$p_0 = 10 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	20.35	58.00	118.00	198.83	295.44
$p_0 = 20 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	18.04	56.14	114.99	193.71	292.25
$p_0 = 31.3 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$	15.03	52.78	111.53	190.18	288.66

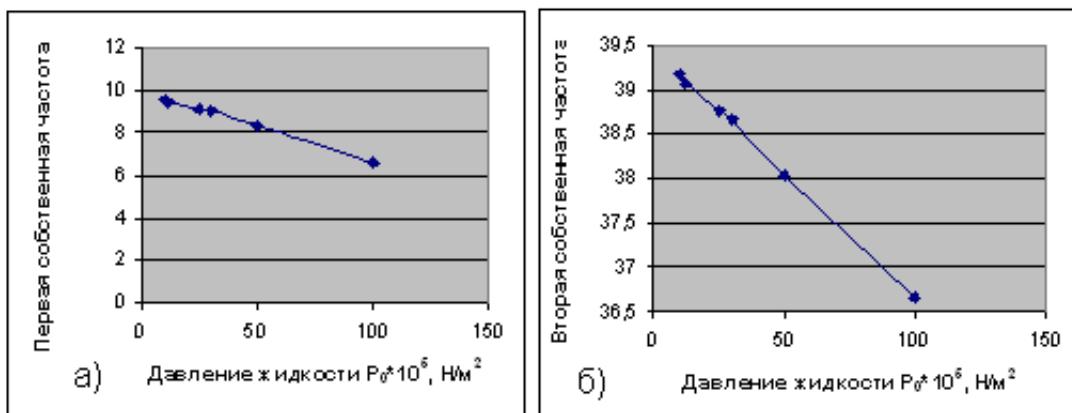
Установлено, что подобная зависимость собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления жидкости справедлива при любых параметрах системы (труба-жидкость). Кроме того, увеличение внутреннего давления жидкости ведет к уменьшению спектра частот колебаний трубы не только при упругих закреплениях трубы, но и при других видах закреплений (свободных опорах, плавающих заделках и т. п.). На рисунке 2 (а, б), например, показаны зависимости первой и второй собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления жидкости при шарнирных опорах трубы

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X(0) = 0, & U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X(1) = 0, & U_4(X) &= X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

и при параметрах

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.01 \text{ м}, & r &= 1.08 r_1, & l &= 1 \text{ м}, & \rho &= 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ V_0 &= 0 \text{ м/с}, & \rho_0 &= 10^3 \text{ кг/м}^3, & E &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2 \end{aligned} \quad (3.5)$$

системы (труба-жидкость). Параметры (3.5) определяют в качестве материала трубы — сталь, в качестве жидкости — воду. Максимальное значение давления, которое может привести к разрыву трубы равно $p_{\max} = 422 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$ (при $r - r_1 = 8 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ и $\sigma = 5700 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$).



Зависимость значений первой (а), второй (б) собственных частот от давления жидкости для задачи (2.2), (3.4) при параметрах (3.5) системы (труба-жидкость)

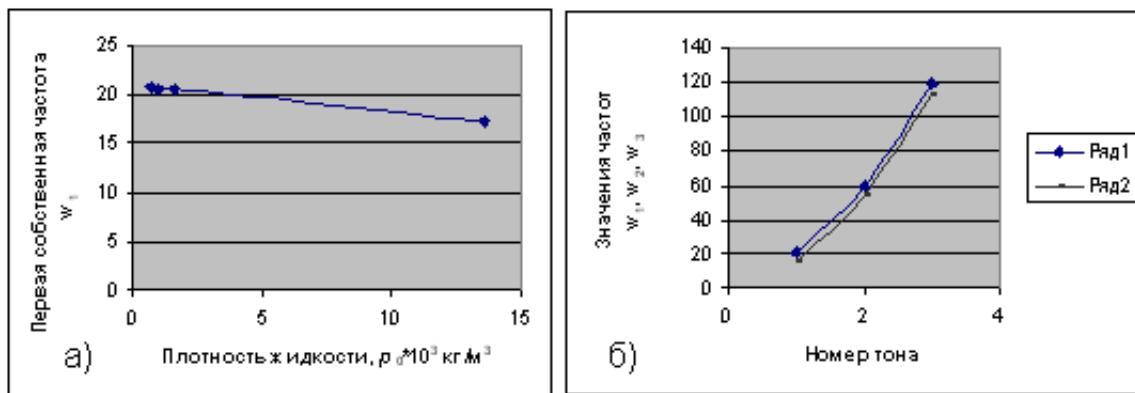
Заметим также, что обратная зависимость значений собственных частот колебаний трубы от внутреннего давления справедлива и в случае протекания жидкости по трубе.

Исследуем теперь влияние на спектр частот колебаний трубы плотности жидкости. Рассмотрим задачу (2.2), (3.3) при следующих параметрах системы

$$\begin{aligned} r_1 &= 0.0095 \text{ м}, & r &= 0.01 \text{ м}, & l &= 5 \text{ м}, & \rho &= 7.8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ V_0 &= 5 \text{ м/с}, & E &= 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2, & p_0 &= 1.78 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Будем вычислять собственные значения частот колебаний при увеличении плотности жидкости и неизменных значениях остальных параметров системы. Результаты, полученные по решениям прямых задач, продемонстрируем снова на графиках и таблицах. Для указанной выше задачи на рисунке 4 (а) показан график зависимости значений первой собственной частоты ω_1 колебаний трубопровода от различных значений ρ_0 плотности жидкости.

По графику видно, что при увеличении плотности жидкости первая собственная частота колебаний трубопровода уменьшается. Вычисления показывают, что увеличение плотности жидкости ведет к уменьшению не только первой собственной частоты колебаний трубопровода, но и всех значений из спектра частот его колебаний.



Зависимость первой собственной частоты колебаний трубы от плотности жидкости (а) и изменение значений первых трех тонов колебаний трубы при различных значениях плотности жидкости (б)

На рисунке 4 (б), например, рассмотрен график изменения значений первых трех собственных частот колебаний трубы в зависимости от плотности потока жидкости. Здесь ряду 1 соответствуют значения первых трех частот при $\rho_0 = 0.71 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, ряду 2 — при $\rho_0 = 13.6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Таким образом, получаем, что увеличение как давления, так и плотности жидкости ведут к уменьшению значений частот колебаний участка трубопровода.

4. Зависимость частот колебаний участка трубопровода от скорости потока жидкости

Исследуем теперь зависимость частот колебаний участка трубы от скорости потока жидкости.

Рассмотрим задачу с уравнением (2.2) и краевыми условиями

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X(0) - 3X'''(0) = 0, & U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X(1) + 3X'''(1) = 0, & U_4(X) &= X''(1) = 0, \end{aligned} \quad (4.1)$$

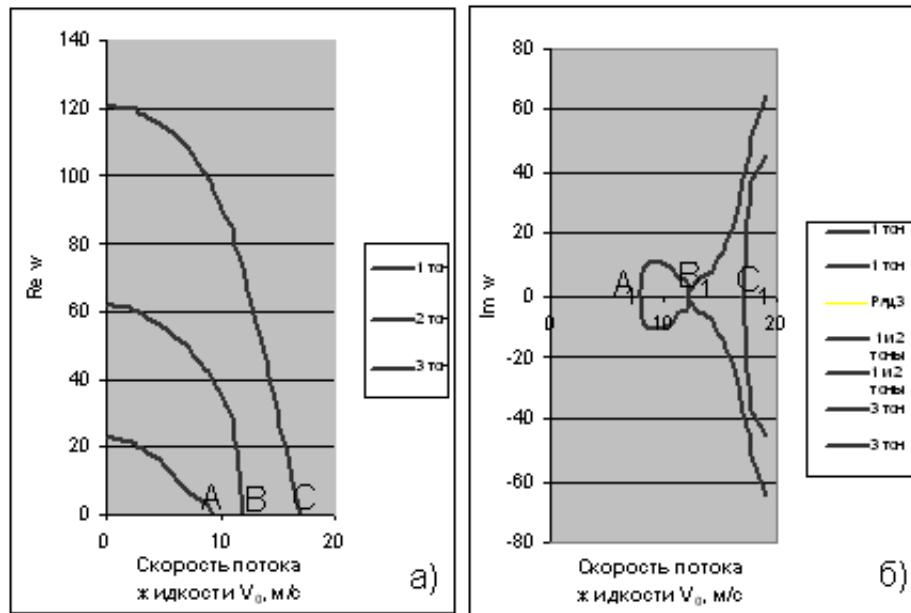
которые означают упругие закрепления обоих концов трубы пружинами с относительными жесткостями на изгиб, равными трем. Пусть имеются параметры (3.5) системы при давлении жидкости $p_0 = 170 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Рассмотрим влияние скорости потока жидкости на собственные формы колебаний трубы при неизменных значениях остальных параметров системы. Исследования показывают, что увеличение скорости V_0 потока жидкости ведет к уменьшению значений собственных частот изгибных колебаний трубы.

Известно [2], что если «для какой-либо собственной частоты, мнимая часть равна нулю, и одновременно действительная часть равна нулю, то это отвечает порогу дивергенции, т.е. наличию статической потери устойчивости». Исследуя изменения действительной и

мнимой частей собственных частот ω_j можно также установить порог флаттера для данной упругой системы.

На рисунке 3 представлены значения $\operatorname{Re} \omega_j$ и $\operatorname{Im} \omega_j$ для первых трех тонов колебаний системы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.2), (4.1) при параметрах системы (3.1) и внутреннем давлении жидкости $p_0 = 0.5 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2$. На оси ординат рисунка 3 (а) отложены значения $\operatorname{Re} \omega_j$ системы (труба-жидкость) при упругих закреплениях (4.1) в отсутствии течения жидкости $\omega_1 = 21.203$, $\omega_2 = 61.502$, $\omega_3 = 120.729$.



Частотные годографы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.2), (4.1) при параметрах (3.1) системы (труба-жидкость)

Остановимся на частотных годографах рисунка 3 подробнее. Видим, что увеличение скорости V_0 потока жидкости ведет к уменьшению значений собственных частот. При достижении значения скорости $V_0 = 9.4 \text{ м/с}$ находим, что $\operatorname{Re} \omega_1 = 0$ (точка A), кроме того по рисунку 3 (б) значение $\operatorname{Im} \omega_1 = 0$ (точка A_1). Таким образом, мы имеем порог дивергенции для первой формы колебаний ω_1 , (точки A и A_1). При дальнейшем возрастании скорости потока жидкости можно отметить на оси абсцисс точки, отвечающие порогу дивергенции для второй формы (точки B и B_1) и третьей формы (C и C_1) колебаний трубы.

Дальнейшее же увеличение скорости потока за точкой B приводит к флаттеру, объединяющему первую и вторую формы колебаний. Таким образом, здесь мы имеем классический флаттер для рассматриваемой задачи при увеличении скорости потока жидкости. Собственные частоты ω_j становятся комплексно сопряженными, что и отражено на рисунке 3 (б).

Если, как и в работе [2], рассматривать безразмерную скорость u (считая при этом внутреннее давление p_0 жидкости равным нулю), то для трубы с защемленными концами и на свободных опорах получаются те же результаты, что и в указанной работе. А именно, для трубы с защемленными концами порог дивергенции для первого тона колебаний отвечает значению $u = 2\pi$, а порог флаттера соответствует величине u , чуть меньшей 3π . Причем при отсутствии течения жидкости имеем $\omega_1 = 22.373$, $\omega_2 = 61.673$,

$\omega_3 = 120.903$, что отвечает квадратам соответствующих собственных значений задачи для балки с защемленными концами [5].

Для трубы же как балки с шарнирно опертыми концами порог дивергенции отвечает значениям $u = \pi j$, где $j = 1, 2, 3$ и т.д., а порог флаттера соответствует величине u , несколько превышающей 2π .

Обратные зависимости значений собственных частот колебаний трубы с жидкостью при упругих закреплениях аналогичны подобной зависимости при защемлениях и шарнирных опорах указанной выше работы с разницей в значениях порогов дивергенций и флаттера. Например, для задачи (2.2), (4.1) при параметрах (3.1) системы имеем: порог дивергенции для первой формы колебаний соответствует величине u , чуть большей 2π , а порог флаттера соответствует u , несколько превышающей 3π .

Аналогичные результаты получены в исследованиях спектра частот колебаний трубопровода при упругих закреплениях трубы пружинами с другими относительными жесткостями на изгиб.

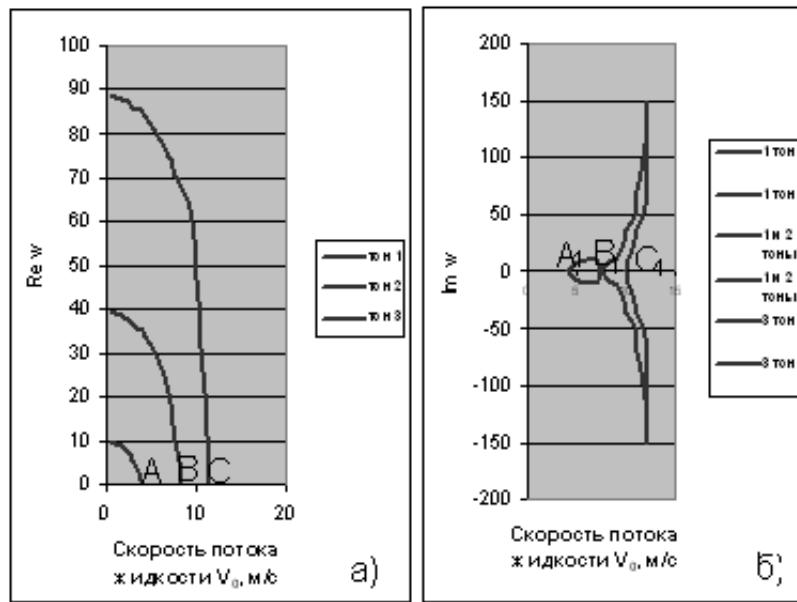
Проведенные вычисления позволяют сделать вывод о том, что при различных видах упругих закреплений пороги дивергенции отвечают следующим значениям u безразмерной скорости: $2\pi < u < 3\pi$ — порог дивергенции для первой собственной частоты, $3\pi < u < 4\pi$ — для второй собственной частоты, $4\pi < u < 5\pi$ — для третьей собственной частоты и т.д.; порог флаттера соответствует значению u , несколько превышающей 3π .

Проведены также исследования по влиянию скорости потока жидкости на спектр частот колебаний трубы при таких закреплениях, как свободные опоры, заделки. Получено, что и при этих видах закреплений увеличение скорости потока жидкости ведет к уменьшению значений форм колебаний трубы. Например, на рисунке 4 (а, б) приведены частотные годографы для трубы со свободными концами

$$\begin{aligned} U_1(X) &= X'''(0) = 0, & U_2(X) &= X''(0) = 0, \\ U_3(X) &= X'''(1) = 0, & U_4(X) &= X''(1) = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

при параметрах (3.1) системы (труба-жидкость).

Здесь точками A и A_1 , B и B_1 , C и C_1 отмечены пороги дивергенции соответственно для первой, второй, третьей форм колебаний. Этим же порогам отвечают соответственно следующие значения скорости потока жидкости $V_0 = 4.1\text{м/с}$, $V_0 = 7.5\text{м/с}$, $V_0 = 11.3\text{м/с}$. Флаттеру, объединяющему первую и вторую формы колебаний отвечает скорость $V_0 = 7.5\text{м/с}$.



Частотные годографы в зависимости от скорости потока жидкости для задачи (2.2), (4.2) при параметрах (3.1) системы (труба-жидкость)

Если же увеличивать одновременно скорость потока жидкости и плотность, то темп падения частот колебаний будет резче. Например, для задачи (2.2), (3.3) при параметрах системы (3.6) будем увеличивать не только плотность жидкости, но и ее скорость. Результаты вычислений прямых задач представлены в таблице 2.

Таблица 5: Зависимость собственных частот колебаний трубы от скорости и плотности потока жидкости для задачи (2.2), (3.3) при параметрах (3.6) системы (труба-жидкость)

	ω_1	ω_2	ω_3
$\rho_0 = 0.71 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, V_0 = 1 \text{ м/с}$	20.92	59.94	119.05
$\rho_0 = 1.59 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, V_0 = 10 \text{ м/с}$	18.82	57.56	116.89

Таким образом, увеличение скорости потока жидкости при любых закреплениях концов трубопровода ведет к уменьшению собственных частот его изгибных колебаний.

5. Заключение

В работе исследовано влияние характеристик жидкости на частоты изгибных колебаний участка трубопровода. Установлено, что при любых закреплениях трубопровода увеличение таких параметров жидкости, как давление, скорость потока жидкости, плотность жидкости ведет к уменьшению значений собственных частот колебаний.

Исследования проведены при различных видах закреплений участка трубопровода, в том числе и свободных опорах, заделках, различных видах упругих закреплений. Приведены таблицы и графики указанных зависимостей, а также частотные годографы, подтверждающие результаты исследований.

Таким образом, установлено, как на значения собственных частот колебаний участка трубы с жидкостью влияют меняющиеся характеристики потока жидкости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильгамов М. А., *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*, Наука, М., 1969.
2. Вольмир А. С., *Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости*, Наука, М., 1979.
3. Томпсон Дж. М. Т., *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ.*, Мир, М., 1985.
4. Биргер И. А., Мавлютов Р. Р., *Сопротивление материалов*, Наука, М., 1986.
5. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х т. / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко, Машиностроение, М., 1968.
6. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф., “Определение виброзащитного закрепления трубопровода”, *Прикладная механика и техническая физика*, **49 №1** (2008), 139–147.

Research of dependences of frequencies of fluctuations pipeline site from characteristics liquids

© G F. Safina²

Abstract. At various fixing pipeline site with liquid dependences are investigated frequencies of its flexural fluctuations from liquid parameters. It is shown, that at increase in density, liquid pressure, and also speeds of a stream of liquid of frequency of fluctuations site of a pipe decrease. Examples, tables are given, schedules of dependences, frequency godograf are constructed at different types fixing of a site of a pipe.

Key Words: the pipeline with liquid, frequencies of fluctuations, dependences, liquid characteristics, density, pressure, speed, frequency godograf

² Associate professor of mathematical modeling and information security of Neftekamsk branch The Bashkir state university; Neftekamsk Safinagf@mail.ru

УДК 517.9

Numerical calculation of the effective dielectric permittivity of thin nanogranular films

© A. N. Tynda¹, M. V. Goryacheva², O. V. Tynda³

Аннотация. In this paper we develop a numerical method of solving volume integral equation of the effective dielectric permittivity based on the "dead layer" model. This model links the effective dielectric permittivity to the electric field distribution inside the granule and the "dead layer" the ferroelectric dielectric permittivity, the dielectric permittivity of the "dead layer" and the surrounding granule environment, respectively.

Ключевые слова: effective dielectric permittivity; ferroelectric thin films; the Fredholm integral equation; numerical method

1. Introduction

During recent years much progress has been made in the investigation of ferroelectric materials. Ferroelectrics that are characterized by a switchable macroscopic spontaneous polarization have attracted significant interest [12, 7, 4].

In theory, the performance of many electronic devices could be dramatically enhanced by incorporating ferroelectric materials into their structures. Ferroelectrics have a lot to offer: the reversible remanent polarization can be used for both non-volatile binary data storage and for altering local electric fields in field-effect transistors [1, 3]; the high dielectric permittivities in these materials can be used for efficient dynamic charge storage in DRAM memory elements [13]; and the degree to which the permittivity can be altered using bias electric fields (the tunability) makes ferroelectrics extremely useful for smart tunable antennae, as well as for photonic and plasmonic devices where field-controlled variations in refractive index are needed. For detailed information see [8]. Ferroelectric piezoelectricity is used in sensors, actuators, and transducers; its pyroelectricity is employed in infrared detectors [6].

In nowadays, the most successful direction is to obtain, investigate and apply the ferroelectrics in the form of thin films, superlattices and nanocomposites. It becomes essential to bring ferroelectricity into the nanometer scale. In practice, though, it is a frustrating irony that the key functional properties that make ferroelectric materials so attractive in the first place are almost universally observed to be degraded when in the form of a thin film, as is usually needed for the kinds of devices mentioned [8]. Much experimental and theoretical effort has been devoted to determine the critical thickness of ferroelectric thin films and elucidate its origin [6].

During the transition to the nanoscale we must consider the size effect impact. The size effect is defined as the dependence of the effective permittivity of a film sample on the thickness of the film [12]. The effective permittivity ε_{eff} is the most important electrodynamic characteristic of any nanostructured environment.

Despite having been first observed around half a century ago, the reason why the permittivity of ferroelectrics is so radically affected at reduced dimensions is still not understood. Most research points to the existence of a parasitic low permittivity layer, assumed to be associated with the ferroelectric-electrode boundary and often called the "dead layer" [5].

¹ Assist. prof. of Higher and Applied Mathematics depart., Penza state university, Russia; tynda@pnzgu.ru

² Researcher of Laser Zentrum Hannover e.V., Germany; goryacheva.nanolab@gmail.com

³ Post-graduate student, Penza state university, Russia; olgat91@yandex.ru

The «dead layers» do not possess ferroelectric properties. The dynamic ferroelectric polarization is supposed to be equal to zero in the dead layer at the same time the nonferroelectric polarization exists in the dead layers [12].

The «dead layer» thickness can be considered as the critical size of the ferroelectric film, when the ferroelectricity vanishes. In works [9] it is assumed that the thickness of the «dead layer» is determined by the correlation parameter α . The estimating of α can be found by processing the experimental data obtained from inelastic neutron scattering [13].

It can be concluded that the dynamic polarization freezing at the ferroelectric-electrode boundary can be taken into account by introducing the "dead layer which blocks the ferroelectric polarization.

2. Statement of the problem

As a rule, ferroelectric films that we obtain nowadays are polycrystalline. A polycrystalline film is a complex of ferroelectric granules, having size of the order of tens nanometers. On the surface of each grain there is a thin «dead layer». «Dead layer» thickness estimates about 2 nm, and its dielectric permittivity equals 40 nm.

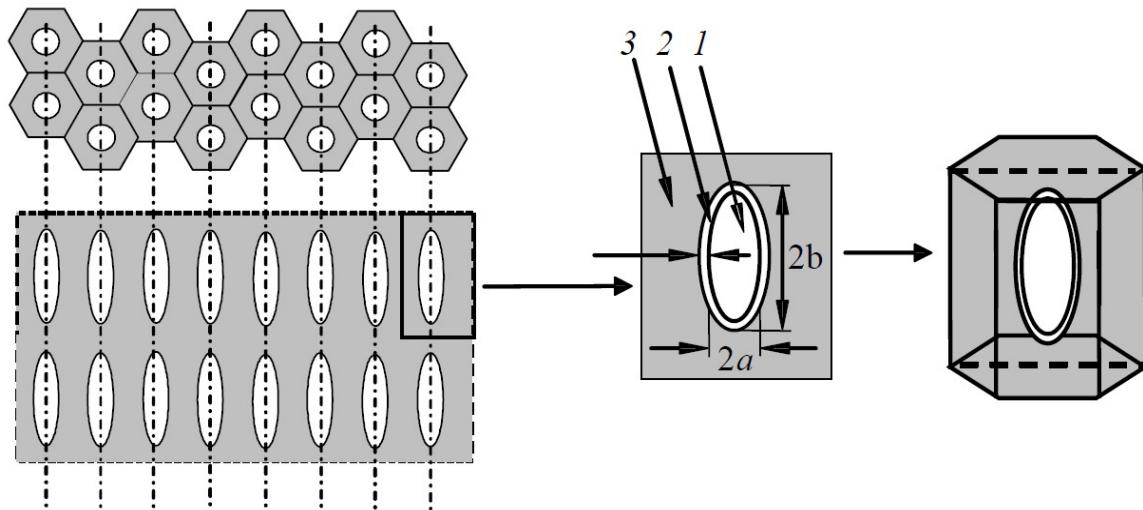


Рис. 1: The structure of a dielectric medium with the elliptic nanogranules.

Figure 1 illustrates a schematic structure of a dielectric medium with ferroelectric elliptic granules and its elementary cell.

The ferroelectric granular dimensions are in the order of tens of nanometres. The «dead layer» on the surface of each granule allows to take into consideration the dynamic polarization «freezing» [9].

Here 1 is the ferroelectric with dielectric permittivity $\varepsilon_1 = \varepsilon_f$, 2 is the "dead layer" with dielectric permittivity $\varepsilon_2 = \varepsilon_d$, 3 is the dielectric with dielectric permittivity ε_3 .

To find the electric field distribution in each of three media we solve the Laplace equation in the corresponding coordinates with the standard boundary conditions at the interface of two media.

For spherical and elliptic granules such distributions were obtained in the works [9, 10, 11].

The ferroelectric granules can be of any shape: prisms, columns, or polyhedra. For estimations a complex polyhedral granule can be replaced by a spherical granule, and a columnar

one - by an elliptical granule. This change will result in a slight error in the evaluation of the film dielectric properties. The work [11] considers the problem of determining the effective dielectric permittivity of the ferroelectric polycrystalline film with spherical granules in it. However, the most common are the films of the columnar structure [9].

Now suppose that a single granule is not in a homogeneous medium with ε_3 , but in some effective environment with ε_{eff} , which is the totality of the surrounding densely packed granules.

If $\varepsilon_3 = \varepsilon_{eff}$, we get the following integral equation for effective dielectric permittivity of thin nanogranular films:

$$\varepsilon_{eff} E_{ext} = \frac{1}{V_0} \left[\iiint_{V_1} \varepsilon_1 E_{1z}(\varepsilon_{eff}) dV_1 + \iiint_{V_2} \varepsilon_2 E_{2z}(\varepsilon_{eff}) dV_2 \right]. \quad (2.1)$$

Here $E_{ext}(r)$ is the external electric field, $E_{1z}(r)$ is the electric field distribution inside the granule, $E_{2z}(r)$ is the electric field distribution inside the "dead layer" V_1 is the granule volume, excluding the «dead layer» volume, V_2 is the "dead layer" volume, $V_0 = V_1 + V_2$ is complex volume, $\varepsilon_1(r)$ is the dielectric constant of the ferroelectric, $\varepsilon_2(r)$ is the dielectric constant of the "dead layer" $\varepsilon_3(r)$ is the dielectric constant of the medium around the granule. Note that $\varepsilon_2 < (\varepsilon_3 = \varepsilon_{eff}) \leq \varepsilon_1$.

Most theoretical models of the dielectric permittivity mainly consider the volume fraction and the component permittivities; some of them take into consideration the component distribution in space and granule shapes. And only a few of them study the interface connections, but this requires the definition of an additional values variety. Theoretical connections, which consider additional factors, are rarely announced in the literature, due to the their high complexity or the inability to construct adequate numerical models.

In this work, based on a «dead layer» model, we build a numerical method for the effective permittivity calculation.

The effective permittivity is defined in dependence of electrical fields distribution within the components and its permittivities, volume fractions, granule shapes and inner interactions.

3. Numerical model implementation

3.1. Method of solving the basic integral equation

Let us consider the basic integral equation (2.1), allowing to determine the effective dielectric permittivity $\varepsilon_{eff}(r) = \varepsilon_{eff}(x, y, z)$ in case of various forms of ferroelectric granules. The equation is based on the generalized model of the "dead layer" mentioned above.

The equation (2.1) is a nonlinear volume homogeneous Fredholm equation of the second kind. To solve the equation (2.1), we introduce a nonlinear operator

$$(F\varepsilon_{eff})(r) \equiv \varepsilon_{eff}(r)E_{ext}(r) - \frac{1}{V_0} \left[\begin{aligned} & \iiint_{V_1} K(r, x_1, y_1, z_1, \varepsilon_{eff}(x_1, y_1, z_1)) dx_1 dy_1 dz_1 + \\ & + \iiint_{V_2} H(r, x_1, y_1, z_1, \varepsilon_{eff}(x_1, y_1, z_1)) dx_1 dy_1 dz_1 \end{aligned} \right], \quad (3.1)$$

where $r = (x, y, z)$, K and H are the integral kernels which depend on the sets $\{\varepsilon_1, E_{1z}, \varepsilon_{eff}\}$ and $\{\varepsilon_2, E_{2z}, \varepsilon_{eff}\}$, respectively.

The equation (2.1) can be written in an operator form as follows:

$$(FX)(r) = 0. \quad (3.2)$$

In order to construct an iterative-projection method to equation (3.2), we first linearize the operator (3.1) according to a modified Newton-Kantorovich scheme [2]:

$$X_{m+1} = X_m - [F'(X_0)]^{-1}(F(X_m)), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (3.3)$$

where $X_0(x, y, z)$ is the initial approximation, for example, the dielectric constant of the ferroelectric $\varepsilon_1(x, y, z)$. Then, the effective dielectric constant could be determined as the following limit of sequence:

$$\varepsilon_{eff}(r) = \lim_{m \rightarrow \infty} X_m(r). \quad (3.4)$$

The derivative $F'(X_0)$ of the nonlinear operator F at the point X_0 is defined as follows:

$$\begin{aligned} F'(X_0) &= \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{F(X_0 + \omega X) - F(X_0)}{\omega} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \left((X_0(r) + \omega X(r))E_{ext}(r) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{V_0} \left[\iiint_{V_1} K(r, r_1, X_0(r_1) + \omega X(r_1)) dV_1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \iiint_{V_2} H(r, r_1, X_0(r_1) + \omega X(r_1)) dV_2 \right] - X_0(r)E_{ext}(r) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{V_0} \left[\iiint_{V_1} K(r, r_1, X_0(r_1)) dV_1 + \iiint_{V_2} H(r, r_1, X_0(r_1)) dV_2 \right] \right) = \\ &= X(r)E_{ext}(r) - \\ &\quad - \frac{1}{V_0} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\omega} \left[\iiint_{V_1} \left[K(r, r_1, X_0(r_1) + \omega X(r_1)) - K(r, r_1, X_0(r_1)) \right] dV_1 + \right. \\ &\quad \left. + \iiint_{V_2} \left[H(r, r_1, X_0(r_1) + \omega X(r_1)) - H(r, r_1, X_0(r_1)) \right] dV_2 \right]. \end{aligned}$$

Here $r = (x_1, y_1, z_1)$, $dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1$.

Implementing the limit transition under the integral sign, we finally get:

$$\begin{aligned} F'(X_0(r)) &= X(r)E_{ext}(r) - \frac{1}{V_0} \left[\iiint_{V_1} K_\varepsilon(r, r_1, X_0(r_1)) X(r_1) dV_1 + \right. \\ &\quad \left. + \iiint_{V_2} H_\varepsilon(r, r_1, X_0(r_1)) X(r_1) dV_2 \right], \quad (3.5) \end{aligned}$$

here

$$K_\varepsilon = \frac{\partial K(r, x_1, y_1, z_1, X)}{\partial X} \Big|_{X=X_0}, \quad H_\varepsilon = \frac{\partial H(r, x_1, y_1, z_1, X)}{\partial X} \Big|_{X=X_0}.$$

Thus, we obtain the operator form of Newton-Kantorovich scheme as follows:

$$F'(X_0(t))\Delta X_{m+1}(t) = -F(X_m), \quad \Delta X_{m+1} = X_{m+1} - X_m, \quad (3.6)$$

or in the extended form

$$\begin{aligned} \Delta X_{m+1}(r)E_{ext}(r) - \frac{1}{V_0} & \left[\iiint_{V_1} K_\varepsilon(r, r_1, X_0(r_1))\Delta X_{m+1}(r_1)dV_1 + \right. \\ & \left. + \iiint_{V_2} H_\varepsilon(r, r_1, X_0(r_1))\Delta X_{m+1}(r_1)dV_2 \right] = -X_m(r)E_{ext}(r) + \\ & + \frac{1}{V_0} \left[\iiint_{V_1} K(r, r_1, X_m(r_1))dV_1 + \iiint_{V_2} H(r, r_1, X_m(r_1))dV_2 \right]. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Simplify (3.7):

$$\begin{aligned} X_{m+1}(r)E_{ext}(r) - \frac{1}{V_0} & \left[\iiint_{V_1} K_\varepsilon(r, r_1, X_0(r_1))X_{m+1}(r_1)dV_1 + \right. \\ & \left. + \iiint_{V_2} H_\varepsilon(r, r_1, X_0(r_1))X_{m+1}(r_1)dV_2 \right] = \Phi_m(r), \quad m = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (3.8)$$

here

$$\begin{aligned} \Phi_m(r) = \frac{1}{V_0} & \left[\iiint_{V_1} \left[K(r, r_1, X_m(r_1)) - K_\varepsilon(r, r_1, X_0(r_1))X_m(r_1) \right] dV_1 + \right. \\ & \left. + \iiint_{V_2} \left[H(r, r_1, X_m(r_1)) - H_\varepsilon(r, r_1, X_0(r_1))X_m(r_1) \right] dV_2 \right]. \end{aligned}$$

The equations (3.8) are now linear Fredholm equations of the second kind with respect to the unknown function $X_{m+1}(r)$. Note that the kernels K_ε and H_ε remain constant during each iteration m .

Thus, solving the equations (3.8), we get a sequence of approximate functions $X_{m+1}(r)$. And then, using formula (3.4), we obtain the approximation of the effective dielectric permittivity $\varepsilon_{eff}(r)$ with an accuracy, depending on m .

3.2. The solution of the linear equation

At each step of the iteration process (3.8) we have to solve numerically the linear integral equations. These equations could be solved, for example, by the method of successive approximations combined with the spline-approximation of the exact solutions or the method of the direct spline-collocation.

Applying the first approach we obtain the successive approximations for each $m = 0, 1, \dots$ as follows:

$$\begin{aligned} X_{m+1}^0(r) &= \frac{\Phi_m(r)}{E_{ext}(r)}, \\ X_{m+1}^{n+1}(r) &= \frac{\Phi_m(r)}{E_{ext}(r)} + \frac{1}{V_0 E_{ext}(r)} \left[\iiint_{V_1} K_\varepsilon(r, r_1, X_0(r_1)) X_{m+1}^n(r_1) dV_1 + \right. \\ &\quad \left. + \iiint_{V_2} H_\varepsilon(r, r_1, X_0(r_1)) X_{m+1}^n(r_1) dV_2 \right], \quad n = 0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (3.9)$$

The solution of the equation (3.2) by iteration with the number $m + 1$ is determined as the limit

$$X_{m+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} X_{m+1}^n(r). \quad (3.10)$$

To calculate integrals (3.9) we implement a transition to a spherical coordinate system or the other one (depending on the ferroelectric granule shape) so that the integration domains V_1 and V_2 move into cuboids \bar{V}_1 and \bar{V}_2 .

Then, the integration domains \bar{V}_1 and \bar{V}_2 are divided into parts $\Delta_{k,l,j}$ by planes parallel to the coordinate ones:

$$\begin{aligned} \Delta_{k,l,j} &= \{(t_1, t_2, t_3) : t_{1,k-1} \leq t_1 \leq t_{1,k}, t_{2,l-1} \leq t_2 \leq t_{2,l}, t_{3,j-1} \leq t_3 \leq t_{3,j}\}, \\ k, l, j &= \overline{1, N}, \end{aligned}$$

where

$$t_{1,i} = \left(\frac{i}{N} \right)^{\gamma_1} T, \quad t_{2,i} = \left(\frac{i}{N} \right)^{\gamma_2} T, \quad t_{3,i} = \left(\frac{i}{N} \right)^{\gamma_3} T, \quad i = \overline{0, N},$$

The parameters γ_1 , γ_2 and γ_3 are responsible for the grid non-uniformity for each of the coordinates and are chosen according to the behavior nature of the equation kernel along each of the coordinate axes.

In each of the areas $\Delta_{k,l,j}$ we introduce additional nodes for use of composite quadrature formulas of the Gauss-Christoffel type. These nodes are the zeroes of the Legendre polynomials that are displayed in each coordinate on the on the parallelepiped edges $\Delta_{k,l,j}$.

The approximate solution is a spline composed of the Lagrange interpolation polynomials, constructed on these nodes.

4. Conclusion

The work is focused on the numerical calculation of the effective dielectric permittivity of the dielectric medium with ferroelectric granules of different shapes in it.

The scientific novelty of this work is a newly developed numerical algorithm for determining the effective dielectric permittivity of thin nanogranular films and ferroelectric composites. The algorithm is based on a non-linear volume integral equation (2.1). The iterative-projection method we perform here can be applied to any form of granules. For granules of the forms different from spherical and ellipsoidal you need a slight modification of the algorithm when approximate the integrals in (3.9).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. T. Holmgaard, Z. Chen et al., *Appl. Phys. Lett.*, **94** (2009), 051111.
2. L.V. Kantorovich, G.P. Akilov, *Functional Analysis*, Pergamon, 2nd edition, 1982.
3. L. Liao, H.J. Fan, B. Yan, Z. Zhang, L.L. Chen, B.S. Li, G.Z. Xing, Z.X. Shen, T. Wu, X.W. Sun, J. Wang, T. Yu, *ACS Nano*, **3** (2009), 700.
4. M.E. Lines, A.M. Glass, *Principles and Applications of Ferroelectrics and Related Materials*, Clarendon Press (Oxford Eng.), 1977.
5. M.S. Majdoub, R. Maranganti, P. Sharma, *Phys. Rev.*, **B 79** (2009), 115412.
6. P. Muralt, *J. Micromech. Microeng.*, **10** (2000), 136-146.
7. M. Ohring, *Materials Science of Thin Films, Deposition and Structure*, Academic Press. 2nd ed., San Diego, London, 2002.
8. O.G. Vendik, S.P. Zubko, N.Yu. Medvedeva, *J. Appl. Phys.*, **105** (2009), 053515.
9. O.G. Vendik, N.Yu. Medvedeva, S.P. Zubko,, *Phys. Solid State*, **51:7** (2009), 1492-1493.
10. O.G. Vendik, N.Yu. Medvedeva, S.P. Zubko,, *Phys. Solid State*, **34:4** (2008), 322-326.
11. O.G. Vendik, N.Yu. Medvedeva, S.P. Zubko,, *Phys. Solid State*, **33:4** (2008), 231-234.
12. Y. Wang, M. Niranjan, K. Janicka, J. Velev, M. Zhuravlev, S. Jaswal, E. Tsymbal, *Phys. Rev.*, **B 82** (2010), 094114.
13. B.W. Wessels, *Ann. Rev. Mat. Res.*, **37** (2007), 659.

УДК 519.3:62-50

Приближенное решение дифференциальных уравнений с нелинейным запаздыванием и приближенное вычисление функционала качества при известном управлении

© Т. К. Юлдашев¹

Аннотация. Рассмотрены вопросы о приближенном решении дифференциальных уравнений с нелинейным запаздыванием при начальном условии и о приближенном вычислении функционала качества при известном управлении. В поставленной задаче управление ограничено по модулю константой и нелинейно входит в уравнение и в функционал качества. Использован случай, когда переменные принимают натуральные значения. Задача заменяется с её дискретным аналогом. Для каждого набора заданной координаты и управления начальная задача сведена к суммарному уравнению с запаздыванием. Доказано существование и единственность решения этого суммарного уравнения. При этом использован метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений. Получена оценка для допускаемой погрешности по состоянию приближенного решения начальной разностной задачи. Далее доказано, что последовательность дискретных управлений является минимизирующей последовательностью для искомой задачи. В качестве примера составлена простейшая динамическая модель производственного процесса предприятия, которая имеет вид рассматриваемого уравнения.

Ключевые слова: Дифференциальное уравнение, нелинейное запаздывание, начальное условие, оптимальное управление, приближенное решение, динамическая модель экономики.

Современные методы решения задач управления в значительной степени основываются на концепции оптимальности, что определяет широкое применение методов и алгоритмов теории оптимизации при проектировании и совершенствовании систем управления. Многие задачи управления формулируются как конечномерные оптимизационные задачи. К таким задачам относятся и задачи адаптивных систем управления [1] – [5].

Разработка математических методов и создание на их основе пакетов прикладных программных комплексов, ориентированных на автоматизацию проектно-конструкторских и научно-исследовательских работ с применением современных компьютеров, являются в настоящее время важнейшими задачами. Успешному решению этой задачи в значительной мере способствует разработка эффективных численных методов и программных средств для решения задач динамики и управления. При приближенном решении задач оптимального управления различными системами используются широкий спектр разных методов (см., напр. [6] – [11]).

В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с нелинейным запаздывающим аргументом при начальным условии и с нелинейным критерием оптимальности.

¹ Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск, tursunbay@rambler.ru

1. Постановка задачи

Пусть управляемый процесс на отрезке D_T описывается нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$\begin{aligned} y'(t) = p(t)u(t) + \beta(t)q\left[t - \tau(t, u(t), y'(t))\right] \times \\ \times y\left[t - \tau(t, u(t), y'(t))\right] + f(t, y(t)) \end{aligned} \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-\eta; t_0], \quad (1.2)$$

где $p(t)$, $\beta(t)$ и $q(t)$ – заданные положительные непрерывные функции, ограниченные сверху числом 1, $f(t, y) \in C(D_T \times Y)$, $0 < \tau(t, u(t), y'(t))$ – запаздывающая функция, такая, что $t - \tau(t, u(t), y'(t)) \leq t_0 - \eta$, $0 < \eta = const$, $0 < u(t) \in C(D_T)$ – управляющая функция, Y – отрезок на положительной полуоси, $D_T \equiv [t_0; T]$, $0 < t_0 < T < \infty$.

Задача 1. Найти состояние $y^*(t)$ – решение начальной задачи (1.1), (1.2) при известных управляющих воздействиях

$$u^*(t) \in \{u^* : |u^*(t)| \leq M_0, t \in D_T\},$$

что доставляют минимум функционалу

$$J[u(t)] = \int_{t_0}^T \tau(t, u(t), y'(t)) dt.$$

2. Дискретный аналог задачи 1

Вместо дифференциального уравнения (1.1) рассмотрим его разностный аналог

$$\begin{aligned} \Delta y(n) = p(n)u(n) + \beta(n)q\left[n - \tau(n, u(n), \Delta y(n))\right] \times \\ \times y\left[n - \tau(n, u(n), \Delta y(n))\right] + f(n, y(n)) \end{aligned} \quad (2.1)$$

при начальном условии

$$y(n) = \phi(n), \quad n \in D_1, \quad (2.2)$$

где $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$, целочисленные функции $p(n)$, $\beta(n)$, $q(n)$, $f(n, y)$ определены для всех $n \in D_N$, целочисленная функция $\phi(n)$ определена для всех $n \in D_1 \equiv \{n_0 - \eta \leq n \leq n_0\}$, $\eta > 0$, $n \in D_N \equiv \{n_0 \leq n \leq N\}$, а n_0 , n и N – натуральные числа.

Задача 2. Найти состояние $y^*(n)$ – решение начальной задачи (2.1), (2.2) при известных управляющих воздействиях

$$u^*(n) \in \{u^* : |u^*(n)| \leq M_0, n \in D_N\},$$

что доставляют минимум функционалу

$$J[u(n)] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \tau(n, u(n), \Delta y(n)). \quad (2.3)$$

В данной работе вместо задачи 1 будем рассматривать дискретную задачу 2.

Разностная начальная задача (2.1), (2.2) на множестве эквивалентна суммарному уравнению

$$\begin{aligned} y(n) \equiv \Theta(n, y) = \phi(n_0) + \\ + \sum_{m=n_0}^{n-1} \left[p(m)u(m) + \beta(m)q[m - \tau(m, u(m), \Delta y(m))] \right] \times \\ \times y[m - \tau(m, u(m), \Delta y(m))] + f(m, y(m)). \end{aligned} \quad (2.4)$$

3. Однозначная разрешимость суммарного уравнения (2.4)

Мы используем следующие обозначения: $Bnd(M)$ – класс целочисленных функций, ограниченных по норме с положительным числом M ; $Lip\{L_{|u,v,\dots}\}$ – класс функций, удовлетворяющих условию Липшица по переменным u, v, \dots с положительным коэффициентом L .

В качестве нормы на множестве D_N для произвольной целочисленной функции $x(n)$ мы будем брать евклидову норму

$$\|x(n)\| = \max \{|x(n)| : n \in D_N\}.$$

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполняются следующие условия:

1. $f(n, y) \in Bnd(M_1) \cap Lip\{L_{1|y}\}$, $0 < L_1 = const$;
 2. $\tau(n, u, y) \in Lip\{L_{2|y}\}$, $0 < L_2 = const$;
 3. $\max\{|\phi(n_0)|; \|p(n)\|; \|y(n)\|\} = \gamma_0 = const < \infty$;
 4. $|q(n_1) - q(n_2)| \leq L_{01}|n_1 - n_2|$, $0 < L_{01} = const$;
 5. $|y(n_1) - y(n_2)| \leq L_{02}|n_1 - n_2|$, $0 < L_{02} = const$;
 6. $\rho = \max\{\gamma_1; \gamma_2\} < 1$, $\gamma_1 = \max\{q_0 + L_1; (q_0 + L_1)(N - n_0 - 1)\}$,
- $$\gamma_2 = \max\{L_2(\gamma_0 L_{01} + q_0 L_{02}); L_2(\gamma_0 L_{01} + q_0 L_{02})(N - n_0 - 1)\},$$
- $$q_0 = \max\{q(n) : n \in D_N\}.$$

Тогда суммарное уравнение (2.4) при фиксированных значениях управления $u(n)$ имеет единственное решение на множестве D_N .

Доказательство. Используем метод последовательных приближений в сочетании его с методом сжимающих отображений (см., напр. [12] – [14]). Рассмотрим следующий итерационный процесс Пикара:

$$\begin{cases} y_0(n) = \phi(n_0) + \sum_{m=n_0}^{n-1} p(m)u(m), \\ y_{k+1}(n) = \Theta(n, y_k), k = 0, 1, 2, \dots; \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{k+1}(n) = p(n)u(n) + \beta(n)q[n - \tau(n, u(n), \Delta y_k(n))] \times \\ \times y_k[n - \tau(n, u(n), \Delta y_k(n))] + f(n, y_k(n)). \end{aligned} \quad (3.2)$$

В силу первого условия теоремы для нулевого приближения из (3.1) справедлива следующая оценка

$$\|y_0(n)\| \leq \gamma_0 + \gamma_0 M_0 < \infty. \quad (3.3)$$

В силу условий теоремы, с учетом (3.3) из (3.1) для первого приближения имеем оценку

$$\begin{aligned} \|y_1(n) - y_0(n)\| &\leq \sum_{m=n_0}^{n-1} \left\| y_0 \left[m - \tau(m, u(m), \Delta y_0(m)) \right] \right\| + \\ &+ \sum_{m=n_0}^{n-1} \|f(m, y_0)\| \leq [\gamma_0(1 + M_0) + M_1](N - n_0 - 1) < \infty. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Аналогично для произвольного натурального числа $k > 1$ из (3.1) по индукции получаем

$$\begin{aligned} \|y_{k+1}(n) - y_k(n)\| &\leq \sum_{m=n_0}^{n-1} \left[\left\| q \left[m - \tau(m, u(m), \Delta y_k(m)) \right] \right\| \times \right. \\ &\times \left\| y_k \left[m - \tau(m, u(m), \Delta y_k(m)) \right] - y_{k-1} \left[m - \tau(m, u(m), \Delta y_{k-1}(m)) \right] \right\| + \\ &+ \left\| y_{k-1} \left[m - \tau(m, u(m), \Delta y_k(m)) \right] \right\| \times \\ &\times \left. \left\| q \left[m - \tau(m, u(m), \Delta y_k(m)) \right] - q \left[m - \tau(m, u(m), \Delta y_{k-1}(m)) \right] \right\| \right] + \\ &+ \sum_{m=n_0}^{n-1} \|f(m, y_k(m)) - f(m, y_{k-1}(m))\|. \end{aligned}$$

Отсюда, в силу условий теоремы, имеем

$$\begin{aligned} \|y_{k+1}(n) - y_k(n)\| &\leq \\ &\leq \left\{ q_0 \left\| y_k \left[n - \tau(n, u(n), \Delta y_k(n)) \right] - y_{k-1} \left[n - \tau(n, u(n), \Delta y_k(n)) \right] \right\| + \right. \\ &+ q_0 \left\| y_{k-1} \left[n - \tau(n, u(n), \Delta y_k(n)) \right] - y_{k-1} \left[n - \tau(n, u(n), \Delta y_{k-1}(n)) \right] \right\| + \\ &+ \gamma_0 L_{01} \left| \tau(n, u(n), \Delta y_k(n)) - \tau(n, u(n), \Delta y_{k-1}(n)) \right| + \\ &\left. + L_1 \|y_k(n) - y_{k-1}(n)\| \right\} (N - n_0 - 1) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \|y_{k+1}(n) - y_k(n)\| &\leq (N - n_0 - 1) [(q_0 + L_1) \|y_k(n) - y_{k-1}(n)\| + \\ &+ (\gamma_0 L_{01} + q_0 L_{02}) \left| \tau(n, u(n), \Delta y_k(n)) - \tau(n, u(n), \Delta y_{k-1}(n)) \right|] \leq \\ &\leq [(q_0 + L_1) \|y_k(n) - y_{k-1}(n)\| + \\ &+ L_2 (\gamma_0 L_{01} + q_0 L_{02}) \|\Delta y_k(n) - \Delta y_{k-1}(n)\|] (N - n_0 - 1), \end{aligned} \quad (3.5)$$

где $q_0 = \max \{q(n) : n \in D_N\}$.

Аналогично из (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \|\Delta y_{k+1}(n) - \Delta y_k(n)\| &\leq (q_0 + L_1) \|y_k(n) - y_{k-1}(n)\| + \\ &+ L_2 (\gamma_0 L_{01} + q_0 L_{02}) \|\Delta y_k(n) - \Delta y_{k-1}(n)\|. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из (3.5) и (3.6) следует, что

$$\begin{aligned} & \|y_{k+1}(n) - y_k(n)\| + \|\Delta y_{k+1}(n) - \Delta y_k(n)\| \leq \\ & \leq \gamma_1 \|y_k(n) - y_{k-1}(n)\| + \gamma_2 \|\Delta y_k(n) - \Delta y_{k-1}(n)\| \leq \\ & \leq \rho [\|y_k(n) - y_{k-1}(n)\| + \|\Delta y_k(n) - \Delta y_{k-1}(n)\|], \end{aligned} \quad (3.7)$$

где $\gamma_1 = \max \left\{ q_0 + L_1; (q_0 + L_1)(N - n_0 - 1) \right\}$,

$\gamma_2 = \max \left\{ L_2 (\gamma_0 L_{01} + q_0 L_{02}); L_2 (\gamma_0 L_{01} + q_0 L_{02})(N - n_0 - 1) \right\}$,

$q_0 = \max \{q(n) : n \in D_N\}$.

Из (3.4) и (3.7) следует, что оператор в правой части (2.4) является сжимающим. Следовательно, суммарное уравнение (2.4) при фиксированных значениях управления $u(n)$ имеет единственное решение на множестве D_N .

Доказательство заканчено.

Теорема 3.2. Пусть выполняются условия теоремы 3.1. Если $2\rho < 1$, то при фиксированных значениях управления $u(n)$ справедлива оценка

$$\|\Delta y(n) - \Delta y_k(n)\| \leq \frac{\rho^k \left\{ M_1 + [\gamma_0 (1 + M_0) + M_1] (N - n_0 - 1) \right\}}{2(1 - 2\rho)}. \quad (3.8)$$

Доказательство. Для разности $y(n) - y_k(n)$ с учетом (3.4) и (3.7) имеем оценку

$$\begin{aligned} & \|y(n) - y_k(n)\| \leq \\ & \leq \|y(n) - y_{k+1}(n)\| + \|y_{k+1}(n) - y_k(n)\| \leq \\ & \leq \rho [\|y_k(n) - y_{k-1}(n)\| + \|\Delta y_k(n) - \Delta y_{k-1}(n)\|] + \\ & + \rho^k [\gamma_0 (1 + M_0) + M_1] (N - n_0 - 1). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Аналогично получаем, что

$$\begin{aligned} & \|\Delta y(n) - \Delta y_k(n)\| \leq \\ & \leq \rho [\|y_k(n) - y_{k-1}(n)\| + \|\Delta y_k(n) - \Delta y_{k-1}(n)\|] + M_1 \rho^k. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Из (3.9) и (3.10) следует оценка

$$\begin{aligned} & \|y(n) - y_k(n)\| + \|\Delta y(n) - \Delta y_k(n)\| \leq \\ & \leq 2\rho [\|y_k(n) - y_{k-1}(n)\| + \|\Delta y_k(n) - \Delta y_{k-1}(n)\|] + \\ & + \rho^k \left\{ M_1 + [\gamma_0 (1 + M_0) + M_1] (N - n_0 - 1) \right\}. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} & \|x(n) - x_k(n)\| \leq 2\rho \|x(n) - x_k(n)\| + \\ & + \frac{\rho^k}{2} \left\{ M_1 + [\gamma_0 (1 + M_0) + M_1] (N - n_0 - 1) \right\}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

где $\|x(n) - x_k(n)\| = \max \{ \|y(n) - y_k(n)\|; \|\Delta y(n) - \Delta y_k(n)\| \}$ или

$$\|\Delta x(n) - \Delta x_k(n)\| \leq \frac{\rho^k \left\{ M_1 + [\gamma_0 (1 + M_0) + M_1] (N - n_0 - 1) \right\}}{2(1 - 2\rho)}. \quad (3.12)$$

Так как $\|\Delta y(n) - \Delta y_k(n)\| \leq \|\Delta x(n) - \Delta x_k(n)\|$, то из (3.12) следует оценка (3.8).

Доказательство заканчено.

Следствие 3.1. Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда имеет место следующее соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\Delta y(n) - \Delta y_k(n)\| = 0. \quad (3.13)$$

4. Сходимость функционала качества

С учетом последовательностей функций (3.1) и (3.2) функционал (2.3) запишем в виде

$$J[u_k(n)] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \tau(n, u(n), \Delta y_k(n)). \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия теоремы 3.2. Тогда имеет место следующее предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |J[u(n)] - J_k[u(n)]| = 0. \quad (4.2)$$

Доказательство. В силу условий теоремы, с учетом (3.8) из (2.3) и (4.1) получаем следующую оценку

$$|J[u(n)] - J_k[u(n)]| \leq \frac{L_2 \rho^k \left\{ M_1 + \left[\gamma_0 (1 + M_0) + M_1 \right] (N - n_0 - 1) \right\} (N - n_0 - 1)}{2(1 - 2\rho)}.$$

Так как $2\rho < 1$, то из последней оценки следует справедливость (4.2).

Доказательство заканчено.

Пусть $u^*(n)$ – оптимальное допустимое управление в задаче 2. Предполагается, что для этого оптимального управления справедлива следующая оценка

$$\|u^*(n) - u_k^*(n)\| \leq \delta_k(n), \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} \delta_k(n) = 0. \quad (4.3)$$

Из (1.1), (2.1) – (3.2) и (4.1) приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \Delta y^*(n) &= p(n)u^*(n) + \beta(n)q[n - \tau(n, u^*(n), \Delta y^*(n))] \times \\ &\quad \times y[n - \tau(n, u^*(n), \Delta y^*(n))] + f(n, y^*(n)); \end{aligned} \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} &+ \sum_{m=n_0}^{n-1} [p(m)u^*(m) + \beta(m)q[m - \tau(m, u^*(m), \Delta y^*(m))] \times \\ &\quad \times y^*[m - \tau(m, u^*(m), \Delta y^*(m))] + f(m, y^*(m))]; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \Delta y_{k+1}^*(n) &= p(n)u^*(n) + \beta(n)q[n - \tau(n, u^*(n), \Delta y_k^*(n))] \times \\ &\quad \times y_k^*[n - \tau(n, u^*(n), \Delta y_k^*(n))] + f(n, y_k^*(n)); \end{aligned} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} y_0^*(n) = \phi(n_0) + \sum_{m=n_0}^{n-1} p(m)u^*(m), \\ y_{k+1}^*(n) = \Theta(n, y_k^*), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \end{cases} \quad (4.7)$$

$$J[u^*(n)] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \tau(n, u^*(n), \Delta y^*(n)); \quad (4.8)$$

$$J_k[u^*(n)] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \tau(n, u^*(n), \Delta y_k^*(n)); \quad (4.9)$$

$$J_k[u_k^*(n)] = \sum_{n=n_0}^{N-1} \tau(n, u_k^*(n), \Delta y_k^*(n)). \quad (4.10)$$

Т е о р е м а 4.2. Пусть выполняются условия теоремы 4.1. Если

$$\tau(n, u^*, y^*) \in Lip\left\{L_2|_{u^*, y^*}\right\}$$

и выполняется условие (4.3), то имеет место следующее соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |J[u^*(n)] - J_k[u_k^*(n)]| = 0. \quad (4.11)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Формулы (3.13) и (4.2) в случае (4.4) — (4.9) выглядят так

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\Delta y^*(n) - \Delta y_k^*(n)| = 0, \quad (4.12)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |J[u^*(n)] - J_k[u^*(n)]| = 0. \quad (4.13)$$

Рассмотрим оценку разности $|J[u_k^*(n)] - J_k[u_k^*(n)]|$. В силу условия теоремы, из (4.9) и (4.10) получаем

$$|J[u_k^*(n)] - J_k[u_k^*(n)]| \leq L_2 [\|u^*(n) - u_k^*(n)\| + \|\Delta y^*(n) - \Delta y_k^*(n)\|]. \quad (4.14)$$

С учетом (4.3) и (4.12) из (4.14) получаем, что справедливо соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |J[u_k^*(n)] - J_k[u_k^*(n)]| = 0. \quad (4.15)$$

Так как

$$|J[u^*(n)] - J_k[u_k^*(n)]| \leq |J[u^*(n)] - J_k[u^*(n)]| + |J[u_k^*(n)] - J_k[u_k^*(n)]|,$$

то, переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$, с учетом (4.13) и (4.15) получаем (4.11).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

5. Заключение

Аналитическое решение задач оптимального управления процессами, описываемыми дифференциальными уравнениями с нелинейным запаздывающим аргументом, очень сложно. Поэтому на практике используются приближенные методы построения программного и синтезирующего оптимального управления. В данной работе рассматриваются вопросы приближенного решения задачи оптимального управления для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с нелинейным запаздывающим аргументом при начальным условии и с нелинейным критерием оптимальности. При этом используются итерации (4.7) и (4.10). Доказывается сходимость последовательности функционала качества (4.10). В качестве примера для уравнения (1.1) составляется математическая модель экономики производственного предприятия.

6. Приложение

Обоснование постановки задачи. Рассмотрим производственный процесс одного предприятия в условиях рыночных отношений. Пусть $y(t)$ – объем продукции предприятия, реализованной к моменту времени t . Его доход к данному моменту времени t составит

$$y(t) = p(t)u(t), \quad (6.1)$$

где $p(t)$ – рыночная цена реализации продукции производимой предприятием в момент времени t .

Из (6.1) видно, что если цена реализации продукции возрастает, то и доход предприятия тоже возрастает к данному моменту времени t . Но, повышение цены может отрицательно отражаться в скорости реализации товара, производимой предприятием.

Путем дифференцирования формулы (6.1) по времени t находим скорость реализации продукции

$$y'(t) = p'(t)u(t) + p(t)u'(t), \quad (6.2)$$

где $p'(t)$ – тенденция формирования ценообразования.

Нас интересует случай, когда $y'(t) > 0$, т. е. с каждым днем больше продукции реализуются. Из формулы (6.2) видно, что это зависит от тенденции формирования ценообразования $p'(t)$ и скорости выпуска продукции $u'(t)$. Но, $p'(t)$ определяется из равновесия спроса и предложения на рынке к моменту времени t .

Скорость выпуска продукции определяется из следующего соотношения

$$u'(t) = \alpha(t)z(t - \tau(t)), \quad (6.3)$$

где $z(t)$ – функция инвестиций, направленных на расширение производства, $\alpha(t)$ – коэффициент эффективности использования инвестиций, $0 < \alpha(t) < 1$, $0 < t_0 < \tau(t) < t$. Если функция запаздывания $\tau(t)$ меньше будет, то это способствует тому, что скорость выпуска продукции больше становится. Если $\tau(t) = t$, то процесс инвестирования будет останавливаться. Очевидно, что запаздывание $\tau(t)$ зависит от объема продукции $u(t)$ и скорости реализации производимой предприятием продукции $y'(t)$ к моменту времени t

$$\tau(t) = \tau(t, u(t), y'(t)).$$

Тогда формула (6.3) приобретает вид

$$u'(t) = \alpha(t)z\left(t - \tau(t, u(t), y'(t))\right), \quad (6.4)$$

Величина инвестиций $z(t)$ является частью дохода

$$z(t) = q(t)y(t), \quad (6.5)$$

где $q(t)$ – доля прибыли в составе дохода, $0 < q(t) < 1$. Величина $q(t)$ характеризует рентабельность производства.

Подставляя (6.5) в (6.4), получаем

$$u'(t) = \alpha(t)q\left(t - \tau(t, u(t), y'(t))\right)y\left(t - \tau(t, u(t), y'(t))\right). \quad (6.6)$$

Из формулы (6.6) следует, что величина скорости выпуска продукции взаимосвязана с величиной рентабельности производства. Запаздывание τ характеризуется величиной

продукции, накопленных в складах предприятия, и скоростью выпуска продукции к данному моменту времени t .

Подстановка (6.6) в (6.2) дает нам следующее дифференциальное уравнение

$$y'(t) = p'(t)u(t) + \beta(t)q\left(t - \tau(t, u(t), y'(t))\right)y\left(t - \tau(t, u(t), y'(t))\right), \quad (6.7)$$

где $\beta(t) = p(t)\alpha(t)$, $0 < \beta(t) < 1$, $0 < q(t) < 1$ – известные функции, $y(t)$ – неизвестная функция, $u(t)$ – функция управления,

$$t - \tau(t, u(t), y'(t)) \geq t_0 - \eta, \quad 0 < \eta = const.$$

В уравнении (6.7) учтем фактор внешнего воздействия $f(t)$. Отметим, что фактор внешнего воздействия чаще всего зависит от дохода самого предприятия. Если не учтем малых и случайных внешних факторов, то дифференциальное уравнение (6.7) приобретает вид

$$\begin{aligned} y'(t) = p'(t)u(t) + \beta(t)q\left[t - \tau(t, u(t), y'(t))\right] \times \\ \times y\left[t - \tau(t, u(t), y'(t))\right] + f(t, y(t)). \end{aligned}$$

На большом временном отрезке $[t - \tau(t, u(t), y'(t)); t]$ максимизировать доход предприятия практически невозможно. Поэтому этот вопрос решается путем минимизации функции запаздывания $\tau(t, u(t), y'(t))$ управлением объемом продукции на отрезке времени D_T .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Александров А.Г., *Оптимальные и адаптивные системы*, Высшая школа, М., 1989, 263 с.
2. Андреев Ю.Н., *Управление конечномерными линейными объектами*, Наука, М., 1976, 424 с.
3. Вязгин В. А., Федоров В. В., *Математические методы автоматизированного проектирования*, Высшая школа, М., 1989, 184 с.
4. Кротов В. Ф., Гурман В. И., *Методы и задачи оптимального управления*, Наука, М., 1973, 448 с.
5. Куропаткин П. В., *Оптимальные и адаптивные управление*, Наука, М., 1980, 228 с.
6. Евтушенко Ю. Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, Наука, М., 1982, 432 с.
7. Срочко В. А., *Итерационные методы решения задач оптимального управления*, Физматлит, М., 2000, 160 с.
8. Тятошкун А. И., *Численные методы и программные средства оптимизации управляемых систем*, СО "Наука", Новосибирск, 1992, 193 с.
9. Федоренко Р. П., *Приближенное решение задач оптимального управления*, Наука, М., 1978, 488 с.

10. Юлдашев Т.К., “Об одной задаче оптимального управления для нелинейного псевдогиперболического уравнения”, *Моделирование и анализ информационных систем*, **20**:5 (2013), 78 – 89.
11. Юлдашев Т.К., “Приближенное решение задачи оптимального управления для нелинейного псевдопараболического уравнения”, *Вестн. ВоронежГУ. Серия: Системный анализ и информационные технологии*, 2014, № 1, 45 – 51.
12. Yuldashev T. K., “On a summery equation with weak nonlinear right-hand side”, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **15**:1 (2007), 95 – 98.
13. Yuldashev T. K., “On solvability and stability of solutions of linear integral and summary equations of first kind”, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **17**:1 (2008), 41 – 56.
14. Yuldashev T. K., “On a solvability of nonlinear evolution summary equations with nonlinear deviation”, *Proc. of Jangjeon Math. Society*, **11**:1 (2008), 83 – 88.
15. Yuldashev T. K., “On a solvability of nonlinear summary equation of the third kind”, *Proc. of Jangjeon Math. Soc.*, **16**:1 (2013), 151 – 155.
16. Yuldashev T. K., “On a first order quasilinear partial difference equation”, *Advanced Studies in Contemporary Mathematics*, **23**:4 (2013), 677 – 680.

Approximate solving of differential equations with nonlinear delay and approximate calculation of functionality of quality at known operating influences

© T. K. Yuldashev²

Abstract. It is considered the questions of approximate solving of differential equations with nonlinear delay and of approximate calculation of functionality of quality at known operating influences. This problem is involved the control bounded by a constant and is contained it as nonlinear function into equation and into functionality of quality. It is considered the case when the variables are integer values. The problem is changed to its discrete analog. For each set of given coordinate and controls the initial value problem is reduced to a summary equation with nonlinear delay. It is proved the existence and uniqueness of solution of the summary equation. It is used the method of successive approximations, combined it with the method of compressing maps. It is estimated the permissible error with respect to state of approximation solution of initial value difference problem. Further it is proved that discrete control sequence is minimizing for the considering problem. As an example it is constructed a simple dynamical model of the economy in the form of differential equations with delay time, which is considered in this paper. This model takes into account the relationship of volume of production and income in certain conditions of market pricing.

Key Words: Differential equation, nonlinear delay, initial value condition, optimal control, approximate solution, dynamical model of economics.

² Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929

Необходимые и достаточные условия однородности интервальных полиномов

© И. В. Зубов¹, А. Ф. Зубова², С .А. Стрекопытов³

Аннотация. В работе рассматривается вопрос о робастной устойчивости и неустойчивости характеристического полинома матрицы линейной динамической системы. Предлагаемый подход позволяет исследовать робастную устойчивость и неустойчивость множества семейств, полученных при пропорциональном изменении интервалов вещественных и мнимых частей коэффициентов полиномов исходного семейства.

Ключевые слова: устойчивость, полином, динамическая система, коэффициент, интервальное семейство

При исследовании поведения линейной динамической системы часто ставится задача об определении робастной устойчивости семейства систем с интервальными ограничениями на коэффициенты характеристического полинома. Эта задача эффективно решается с помощью теоремы Харитонова и графического критерия Ципкина-Поляка. Более полную информацию об исследуемой системе может дать приведенный ниже подход. Он решает вопрос не только о робастной устойчивости, но и робастной неустойчивости интервального семейства полиномов в смысле принадлежности всех полиномов семейства классу (n, k) - эквивалентности. Более того, этот подход позволяет определить робастную устойчивость и неустойчивость множества семейств, полученных при пропорциональном изменении интервалов вещественных и мнимых частей коэффициентов полиномов исходного семейства.

Рассмотрим интервальное семейство полиномов с комплексными коэффициентами вида:

$$\Phi(S) = \begin{cases} f(S) = A_0 + A_1S + \dots + A_nS^n, \\ A_i = a_i + jb_i, |a_i - a_i^0| \leq \alpha_i\gamma, \\ |b_i - b_i^0| \leq \beta_i\mu, \alpha_i \geq 0, \beta_i \geq 0, \gamma > 0, \mu > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Рассмотрим номинальный годограф при $-\infty < \omega < \infty$:

$$f_0(j\omega) = g_0(\omega) + jh_0(\omega) \quad (1.2)$$

$$\begin{cases} g_0(\omega) = a_0^0 - b_1^0\omega - a_2^0\omega^2 + b_3^0\omega^3 + a_4^0\omega^4 - \dots, \\ h_0(\omega) = b_0^0 + a_1^0\omega - b_2^0\omega^2 - a_3^0\omega^3 + b_4^0\omega^4 + \dots \end{cases} \quad (1.3)$$

Для номинального годографа (2) рассмотрим нормировочные функции:

$$\begin{cases} R(\omega) = \alpha_0 + \frac{\mu}{\gamma}\beta_1|\omega| + \alpha_2\omega^2 + \frac{\mu}{\gamma}\beta_3|\omega|^3 + \alpha_4\omega^4 + \dots, \\ T(\omega) = \beta_0 + \frac{\gamma}{\mu}\alpha_1|\omega| + \beta_2\omega^2 + \frac{\gamma}{\mu}\alpha_3|\omega|^3 + \beta_4\omega^4 + \dots \end{cases} \quad (1.4)$$

¹ Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

² Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

³ Доцент кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

Покажем, что множество значений $S(\omega)$ годографов $f(j\omega)$ интервального полинома (1) является прямоугольником:

$$S(\omega) = \begin{cases} f(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega); \\ |x - g_0(\omega)| \leq \gamma R(\omega), \\ |y - h_0(\omega)| \leq \mu T(\omega). \end{cases} \quad (1.5)$$

В стандартных обозначениях $x(\omega) = g(\omega)$; $y(\omega) = h(\omega)$ и неравенства (5) можно записать точнее:

$$\begin{cases} g_0(\omega) - \gamma R(\omega) \leq g(\omega) \leq g_0(\omega) + \gamma R(\omega), \\ h_0(\omega) - \mu T(\omega) \leq h(\omega) \leq h_0(\omega) + \mu T(\omega). \end{cases} \quad (1.6)$$

Чтобы доказать неравенства (6) сделаем очевидные преобразования с границами первого неравенства из (6):

Для $\omega > 0$:

$$\begin{aligned} g_0(\omega) - \gamma R(\omega) &= (a_0^0 - b_1^0 \omega - a_2^0 \omega^2 + b_3^0 \omega^3 + a_4^0 \omega^4 - \dots) - \\ &\quad - \gamma(\alpha_0 + \beta_1 \frac{\mu}{\gamma} \omega + \alpha_2 \omega^2 + \beta_3 \frac{\mu}{\gamma} \omega^3 + \alpha_4 \omega^4 + \dots) = \\ &= (a_0^0 - \gamma \alpha_0) - (b_1^0 + \beta_1 \mu) \omega - (a_2^0 + \gamma \alpha_2) \omega^2 + \\ &\quad + (b_3^0 - \beta_3 \mu) \omega^3 + (a_4^0 - \gamma \alpha_4) \omega^4 - \dots = \underline{g_1}(\omega). \end{aligned}$$

Аналогично при $\omega \geq 0$:

$$\begin{aligned} g_0(\omega) + \gamma R(\omega) &= (a_0^0 + \gamma \alpha_0) - (b_1^0 - \beta_1 \mu) \omega - (a_2^0 - \gamma \alpha_2) \omega^2 + \\ &\quad + (b_3^0 + \beta_3 \mu) \omega^3 + (a_4^0 + \gamma \alpha_4) \omega^4 - \dots = \underline{g_1}(\omega). \end{aligned}$$

Для $\omega \leq 0$:

$$\begin{aligned} g_0(\omega) - \gamma R(\omega) &= (a_0^0 - b_1^0 \omega - a_2^0 \omega^2 + b_3^0 \omega^3 + a_4^0 \omega^4 - \dots) - \\ &\quad - \gamma(\alpha_0 - \beta_1 \frac{\mu}{\gamma} \omega + \alpha_2 \omega^2 - \beta_3 \frac{\mu}{\gamma} \omega^3 + \alpha_4 \omega^4 \dots) = \\ &= (a_0^0 - \gamma \alpha_0) - (b_1^0 - \beta_1 \mu) \omega - (a_2^0 + \alpha_2 \gamma) \omega^2 + \\ &\quad + (b_3^0 + \beta_3 \mu) \omega^3 + (a_4^0 - \gamma \alpha_4) \omega^4 - \dots = \\ &= (a_0^0 - \gamma \alpha_0) + (b_1^0 - \beta_1 \mu) |\omega| - (a_2^0 + \alpha_2 \gamma) \omega^2 - \\ &\quad - (b_3^0 + \beta_3 \mu) |\omega|^3 + (a_4^0 - \gamma \alpha_4) \omega^4 - \dots = \underline{g_2}(\omega) \end{aligned}$$

$$g_0(\omega) + \gamma R(\omega) = (a_0^0 + \gamma \alpha_0) + (b_1^0 + \beta_1 \mu) |\omega| -$$

$$-(a_2^0 - \alpha_2 \gamma) \omega^2 - (b_3^0 - \beta_3 \mu) |\omega|^3 = \overline{g}_2(\omega)$$

Теперь рассмотрим границы второго неравенства из (6). Для $\omega \geq 0$:

$$h_0(\omega) - \mu T(\omega) = (b_0^0 - \mu \beta_0) + (a_1^0 - \gamma \alpha_1) \omega - (b_2^0 + \mu \beta_2) \omega^2 -$$

$$-(a_3^0 + \gamma \alpha_3) \omega^3 + (b_4^0 - \mu \beta_4) \omega^4 + \dots = \underline{h}_1(\omega)$$

Аналогично при $\omega \leq 0$:

$$h_0(\omega) + \mu T(\omega) = (b_0^0 + \mu \beta_0) + (a_1^0 + \gamma \alpha_1) \omega - (b_2^0 - \mu \beta_2) \omega^2 -$$

$$-(a_3^0 - \gamma \alpha_3) \omega^3 + (b_4^0 + \mu \beta_4) \omega^4 + \dots = \overline{h}_1(\omega)$$

Для $\omega \leq 0$:

$$h_0(\omega) - \mu T(\omega) = (b_0 - \mu \beta_0) + (a_1^0 + \gamma \alpha_1) \omega - (b_2^0 + \mu \beta_2) \omega^2 -$$

$$-(a_3^0 - \gamma \alpha_3) \omega^3 + (b_4^0 - \mu \beta_4) \omega^4 + \dots = \underline{h}_2(\omega)$$

$$h_0(\omega) + \mu T(\omega) = (b_0 + \mu \beta_0) + (a_1^0 - \gamma \alpha_1) \omega - (b_2^0 - \mu \beta_2) \omega^2 -$$

$$-(a_3^0 + \gamma \alpha_3) \omega^3 + (b_4^0 + \mu \beta_4) \omega^4 + \dots = \overline{h}_2(\omega)$$

Таким образом, доказано, что семейство значений $S(\omega)$ годографов $f(i\omega)$ находится при $-\infty < \omega < \infty$ в прямоугольнике $[\underline{g}_1, \overline{g}_1] \times [\underline{h}_1, \overline{h}_1]$ при $\omega \geq 0$ и в прямоугольнике $[\underline{g}_2, \overline{g}_2] \times [\underline{h}_2, \overline{h}_2]$ при $\omega \leq 0$, т. е. доказаны неравенства (5) и (6).

Заметим, что при $\omega = 0$ значения $S(\omega)$ семейства годографов $f(j\omega)$ остаются прямоугольником:

$$S(0) = [a_0^0 - \gamma \alpha_0, a_0^0 + \gamma \alpha_0] \times [b_0^0 - \mu \beta_0, b_0^0 + \mu \beta_0].$$

Условие $0 \notin S(\omega)$ и (5) для выполнения принципа исключения нуля в комплексном случае. Эквивалентно тому, что

$$\left| \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} \right| > \gamma, \quad \left| \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)} \right| > \mu.$$

Определение 1.1. Назовем при $\alpha_0 > 0, \beta_0 > 0, \alpha_n > 0, \beta_n > 0$, функцию $Z(\omega)$

$$Z(\omega) = \frac{g_0(\omega)}{R(\omega)} + j \frac{h_0(\omega)}{T(\omega)},$$

определенную на всей вещественной оси, сложным нормированным номинальным годографом или кратко - сложным годографом.

Т е о р е м а 1.1. Для робастной устойчивости комплексного интервального полинома $\Phi(S)$ степени n при $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$, необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1.

$$\begin{cases} \max((a_0^0)^2 - (\gamma\alpha_0)^2, (b_0^0)^2 - (\mu\beta_0)^2) > 0, \\ \max((a_n^0)^2 - (\gamma\alpha_n)^2, (b_n^0)^2 - (\mu\beta_n)^2) > 0. \end{cases}$$

2. $Z(\omega)$ при $-\infty < \omega < \infty$ проходит последовательно $2n$ квадратов не пересекая прямоугольника с вершинами $(\pm\gamma, \pm\mu)$.

Из определения выше следует, что сложный годограф $Z(\omega)$ является ограниченным при $-\infty < \omega < \infty$, и функции $ReZ(\omega)$, $ImZ(\omega)$ могут иметь скачок первой производной при $\omega = 0$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Полином степени n с вещественными или комплексными коэффициентами, не имеющий нулевых и чисто мнимых корней

$$\varphi(s) = a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n, \quad a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0,$$

принадлежит классу (n, k) - эквивалентности, если k его корней, с учетом их кратности, лежат в правой полуплоскости.

Назовем интервальный полином $\Phi(S)$ интервальным полиномом класса (n, k) - эквивалентности, если любой полином из этого семейства принадлежит классу (n, k) - эквивалентности.

Т е о р е м а 1.2. Для того, чтобы комплексный интервальный полином $\Phi(S)$ степени n был интервальным полиномом класса (n, k) - эквивалентности при $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$, необходимо и достаточно выполнение двух условий: 1.

$$\begin{cases} \max((a_0^0)^2 - (\gamma\alpha_0)^2, (b_0^0)^2 - (\mu\beta_0)^2) > 0, \\ \max((a_n^0)^2 - (\gamma\alpha_n)^2, (b_n^0)^2 - (\mu\beta_n)^2) > 0. \end{cases}$$

2. Годограф $Z(\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до ∞ проходит последовательно против часовой стрелки ровно $n - 2k$ полуоборотов, не пересекая прямоугольника с вершинами $(\pm\gamma, \pm\mu)$.

З а м е ч а н и е 1.1. При $k = 0$ речь идет об устойчивых интервальных семействах, при $k > 0$ о неустойчивых.

З а м е ч а н и е 1.2. За счет изменения двух независимых параметров γ и μ можно исследовать на робастную устойчивость и неустойчивость интервальные полиномы с комплексными коэффициентами, варьируя величину интервалов по реальней и мнимой частям коэффициентов, что дает две степени свободы.

З а м е ч а н и е 1.3. За счет потери ограниченности и непрерывности сложного годографа $Z(\omega)$ можно отбросить условие на масштабные множители: $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, $\alpha_n > 0$, $\beta_n > 0$ заменив их условиями:

$$\sum_{\substack{2r+1 \leq n \\ 2m \leq n}}^n (\alpha_{2m} + \beta_{2r+1}) > 0, \quad \sum_{\substack{2r+1 \leq n \\ 2m \leq n}} (\alpha_{2r+1} + \beta_{2m}) > 0$$

или одним условием $T(\omega)R(\omega) > 0$.

З а м е ч а н и е 1.4. Если γ и μ зависимы линейно, т. е. $\mu = k\gamma$, то можно указать γ_{\max} , что интервальный полином $\Phi(S)$ robustno устойчив или неустойчив при $\gamma < \gamma_{\max}$. В этом случае нормировочные функции $R(\omega)$ и $T(\omega)$ не зависят от γ и μ , γ_{\max} определяется по формуле $\gamma_{\max} = \min(\gamma^*, \gamma_\infty)$, где $2\gamma^*$, $2k\gamma^*$ - размеры наибольшего прямоугольника, вписанного в сложный годограф $Z(\omega)$. В условиях теоремы (годограф $Z(\omega)$ - ограниченный и непрерывный) число γ_∞ определяется формулой $\gamma_\infty = \frac{|b_n|}{k\beta_n}$ при нечетном n и $\gamma_\infty = \frac{|a_n|}{k\alpha_n}$ при четном n . Если же сложный годограф:

$Z(\omega)$ неограничен, но непрерывен, то $\gamma_{\max} = \min(\gamma^*, \gamma^0)$;

$Z(\omega)$ неограничен из-за разрыва при $\omega = 0$, а в окрестности $\omega = \infty$ $Z(\omega)$ ограниченная функция, то $\gamma_{\max} = \min(\gamma^*, \gamma_{\infty})$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 10-08-000624.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Г.А. Зеленков В.В. Дикусар Н.В. Зубов, *Методы анализа robustной устойчивости и неустойчивости*, ВЦ РАН, М, 2007, 234 с.
- Б.Т. Поляк П.С. Щербаков, *Robustnaya ustoychivost' i upravlenie*, Наука, М, 2002, 303 с.
- А.В. Зубов Н.В. Зубов В.Н. Лаптинский, *Dinamika управляемых систем*, СПбГУ, СПб, 2008, 337 с.

The interval family of polynomials with complex coefficients

© I. V. Zubov ⁴, A. F. Zubova ⁵, S. A. Strecopitov ⁶

Abstract. In work is considers the question about robust stability and instability of characteristic polynomials of matrix linear dynamical system. The proposing approach ia allows to investigate robust stability and instability of multitude families, giving with proportion change of intervals substantial and insubstantial parts coefficient polynomial first family.

Key Words: stability, polynomial, dynamical system, coefficient, interval family

⁴ Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁵ Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

⁶ Docent chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddemidova@mail.ru

УДК 517.929

Модифицированный метод построения минимального многочлена систем линейных алгебраических уравнений

© И. В. Зубов¹, В. И. Зубов², О. А. Пустовалова³

Аннотация. В статье приводится модифицированный метод построения минимального многочлена с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Предлагаемый подход, не изменяя основной идеи метода, дает возможность в высшей степени сократить число вычислений. Если ранее для построения коэффициентов минимального многочлена матрицы n -ого порядка при использовании метода необходимо было искать решение систем линейных алгебраических уравнений порядка $n^2 \times m$, $n < m$, то в модифицированном методе для этого достаточно искать решение систем линейных алгебраических уравнений порядка $n \times m$, $n < m$.

Ключевые слова: минимальный многочлен, алгебраическое уравнение, матрица, коэффициент, собственное число

Для вычисления коэффициентов минимального многочлена матрицы A известно всего несколько подходов, которые условно можно разделить на аналитические и вычислительные методы [1,3]. К первой группе можно отнести приведение матрицы к форме Жордана и к форме Смита. Во вторую группу входит метод Данилевского приведения матрицы к форме Фробениуса. Однако оба подхода первой группы фактически вычисляют собственные числа этой матрицы, что является отдельной и непростой задачей. Предпочтительнее использовать методы, не требующие вычисления спектра. Метод Данилевского дает коэффициенты характеристического многочлена, если он совпадает с минимальным, иначе матрица Фробениуса будет юлочной и один из блоков дает коэффициенты минимального полинома.

Для краткости напомним суть метода построения минимального многочлена путем решения системы линейных алгебраических уравнений изложенного в работе [2].

Пусть A - вещественная, постоянная матрица размера $n \times n$. Поставим задачу поиска минимального многочлена этой матрицы, т. е. многочлена наименьшей степени анулирующего матрицу A с коэффициентом при старшей степени равным единице. Таким образом минимальный многочлен имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0. \quad (1.1)$$

причем выполняется матричное тождество:

$$A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \dots + c_1A + c_0E = 0 \quad (1.2)$$

Заметим, что вещественные матрицы размера $n \times n$ образуют вещественное линейное пространство размерности n^2 , где можно использовать все результаты, полученные в линейной алгебре [1].

Исходя из этого, можно сформулировать очевидное утверждение.

Т е о р е м а 1.1. Степень минимального многочлена равна $k+1$, если матрицы

$$A^k, A^{k-1}, \dots, A, A^0; A^0 = E \quad (1.3)$$

¹ Профессор кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

² Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

³ Аспирант кафедры теории управления; СПбГУ, г. Санкт-Петербург; ddemidova@mail.ru

- линейно независимы, а матрицы

$$A^{k+1}, A^k, A^{k-1}, \dots, A, E \quad (1.4)$$

тоже линейно зависимы.

Доказательство. Действительно, если матрицы (1.4) линейно зависимы, то существует вещественные числа c_0, c_1, \dots, c_{k+1} не все равные нулю такие, что выполняется матричное тождество:

$$\sum_{i=0}^{k+1} c_i A^i = 0, \quad]qquad A^0 = E. \quad (1.5)$$

Из этого множества следует, что $c_{k+1} \neq 0$, ибо в противном случае это будет означать, что матрицы (1.3) - линейно зависимы. Отсюда вытекает, что справедливо матричное равенство:

$$A^{k+1} + \frac{c_k}{c_{k+1}} A^k + \dots + \frac{c_1}{c_{k+1}} A + \frac{c_0}{c_{k+1}} E = 0. \quad (1.6)$$

Таким образом, коэффициенты этого матричного тождества, являются коэффициентами минимального многочлена. Заметим, что в силу теоремы Кэли-Гамильтона матрицы (1.4) линейно зависимы при $k = n - 1$.

Доказательство закончено.

Введем понятие развернутой матрицы B_k для матричной совокупности (1.3). Эта матрица размера $n^2 \times (k+1)$ столбцы которой составлены из столбцов A_{im} , $i = \overline{1, n}$ матриц A^m , $m = \overline{k, 0}$ записанных один под другим подряд, начиная с первого столбца этой матрицы (A_{1m}) , кончая последним (A_{nm}) :

$$B_k = \begin{pmatrix} A_{1k} & A_{1k-1} & \dots & E_1 \\ A_{2k} & A_{2k-1} & \dots & E_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{nk} & A_{nk-1} & \dots & E_n \end{pmatrix} = (A_k, \dots, A_0), \quad A_m = \begin{pmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ \vdots \\ A_{nm} \end{pmatrix}, \quad m = \overline{k, 0}. \quad (1.7)$$

Очевидно, что линейная независимость матриц (1.3) эквивалентна линейной независимости столбцов матрицы B_k , т. к. справедливо соотношение

$$b_k C = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^k c_i A^i = 0, \quad C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T. \quad (1.8)$$

Это означает, что линейная независимость матриц (1.3) эквивалентна тому, что матрица B_k размера $n^2 \times (k+1)$, является матрицей полного ранга, т. е. ее ранг равен $k+1$.

Отсюда вытекает, что теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 1.2. Пусть k наименьшее из чисел ($k \in \overline{0, n-1}$) при котором система линейных алгебраических уравнений

$$B_k C = A_{k+1}, \quad C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T, \quad (1.9)$$

имеет решение, тогда минимальный многочлен матрицы A имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - c_k \lambda^k - c_{k-1} \lambda^{k-1} - \dots - c_1 \lambda - c_0 = 0. \quad (1.10)$$

Справедливо и обратное утверждение о том, что коэффициенты минимального многочлена (1.10) $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T$, являются решениями системы линейных алгебраических уравнений (1.9).

Доказательство. Разрешимость уравнения (1.9) означает разрешимость матричного тождества

$$A^{k+1} = c_k A^k + c_{k-1} A^{k-1} + \dots + c_1 A + c_0 E. \quad (1.11)$$

Так как k является минимальным из чисел $\overline{0, n-1}$, то многочлен (1.10), является минимальным многочленом.

С другой стороны, если многочлен (1.10), является минимальным многочленом, то справедливо матричное тождество (1.11), которое эквивалентно разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (1.9).

Доказательство закончено.

Замечание 1.1. Итак, методика построения минимального многочлена заключается в поиске решения $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T$ системы линейных алгебраических уравнений (1.9) для наименьшего целого числа $k, k = \overline{1, n}$. При этом величины $-c_k, -c_{k-1}, \dots, -c_0$ будут коэффициентами минимального многочлена (1.10). Заметим, что в силу теоремы Кели - Гамильтона матричное уравнение (1.11) всегда имеет решение.

Замечание 1.2. Если решение уравнения (1.9) при наименьшем из чисел $k = \overline{0, n}$ удовлетворяет условию $c_0 = 0$, то матрица A - вырожденная. Более того, если в этом решении p первых компонент нулевые $c_0 = c_1 = \dots = c_{p-1} = 0$, то кратность нулевого собственного числа матрицы A не меньше чем p .

Замечание 1.3. Если матрицы (1.3) линейно независимы, а матрицы (1.4) линейно зависимы, то матрица $B_k^T B_k$ является положительно определенной, а матрица $B_{k+1}^T B_{k+1}$ неотрицательной и имеет одно собственное число равное нулю. Как известно [1], для прямоугольной матрицы A размера $n \times t$ ранг r сингулярной матрицы $A^T A$ совпадает с рангом матрицы A , а ее сингулярные числа ρ_i неотрицательные. Причем, если, например, $t \leq n$, то число нулевых ρ_i равно $t - r$. Таким образом, чтобы найти коэффициенты минимального многочлена не обязательно искать решения системы (1.9) при $k = 0, 1, 2, \dots$, а достаточно проверить при каком числе k матрица $B_{k+1}^T B_{k+1}$ становится неотрицательной (при меньших величинах k эта матрица является положительно определенной). Это сильно сократит число вычислений и для получения коэффициентов минимального многочлена необходимо найти решение только одной системы алгебраических уравнений (1.9) именно для этого числа k .

По аналогии с идеями, изложенными выше можно сформулировать следующее очевидное утверждение.

Теорема 1.3. Пусть k наименьшее из чисел ($k \in \overline{0, n-1}$) при котором система линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{j=0}^k A_{ij} c_j = A_{ik+1}, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.12)$$

имеют одно и то же решение $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T$, тогда минимальный многочлен матрицы A имеет вид (1.10).

Доказательство. То, что системы уравнений (1.12) имеют одно и то же решение означает, что k наименьшее из чисел ($k \in \overline{0, n-1}$) при котором система линейных алгебраических уравнений (1.9) имеет решение. Это означает, что выполняются все условия теоремы 2.

Доказательство закончено.

Замечание 1.4. Хотя доказанное утверждение достаточно очевидно, но из него можно сделать важный вывод, который позволяет построить оптимальный алгоритм построения коэффициентов минимального многочлена. Действительно на первом этапе достаточно найти решение всего лишь одной из систем линейных алгебраических уравнений (1.12) для первого из чисел $k = \overline{0, n}$ и проверить является ли это решение решением для всех остальных систем линейных алгебраических уравнений (1.12) при данной величине k . Если это так, то коэффициенты минимального многочлена найдены. В противном случае необходимо выбрать ту систему линейных алгебраических уравнений (1.12) к которой это решение не подходит и продолжать искать решение этой системы при $k = k + 1$. Нетрудно видеть, что, в конце концов, мы найдем коэффициенты минимального многочлена или коэффициенты характеристического многочлена в случае его совпадения с минимальным.

Работа выполнена при поддержке РФФИ грант № 10-08-000624.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.В. Воеводин Ю.А. Кузнецов, *Матрицы и вычисления*, Наука, М, 1984.
2. В.В. Дикусар Г.А. Зеленков Н.В. Зубов, “Построение минимального многочлена с помощью решения системы линейных алгебраических уравнений систем”, **29(1)** (2007), 109-115.
3. Г.А. Зеленков, *Аналитические и численные методы построения характеристического многочлена*, Монография, МГА им. адм. Ф.Ф. Ушакова, Новороссийск, 2007.

The modify method of building minimum multitude of systems linear algebraic equations

© I. V. Zubov ⁴, V. I. Zubov ⁵, O. A. Pustovalova ⁶

Abstract. The article provides modified method of constructing the minimal polynomial using solving systems of linear algebraic equations. proposed approach , without changing the basic idea of the method enables the highest power to reduce the number of calculations. If earlier to build coefficients of the minimal polynomial of the matrix n - th order with using the method it was necessary to seek the solution of linear systems algebraic equations of order $n^2 \times m$, $n < m$, then modified method it is enough to look for the solution of systems of linear algebraic equations of order $n \times m$, $n < m$

Key Words: minimum polynomial, algebraical equation, matrix, coefficient, own number

⁴ Professor chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddeomidova@mail.ru

⁵ Post-graduate chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddeomidova@mail.ru

⁶ Post-graduate chair theory of control; SPbGU, t. Saint-Petersburg; ddeomidova@mail.ru

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе ТЕХ (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой \input в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду \headerRus. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\ footnote { Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\ footnote {Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду \headerEn. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду \headerFirstEn с такими же параметрами, как для команды \headerRus.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды \sect с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами \subsection, \subsubsection и \paragraph.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами \proof и \proofend (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв ϕ и ϵ необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtou{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , Δ_i в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\Delta}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_ри-сунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}`

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение `thebibliography`. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробностисмотрите в прилагаемом файле `amsbib.pdf`. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл `smtobib.sty` (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\RBibitem{метка для ссылки на источник}`.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcrite` (параметры см. в преамбуле).

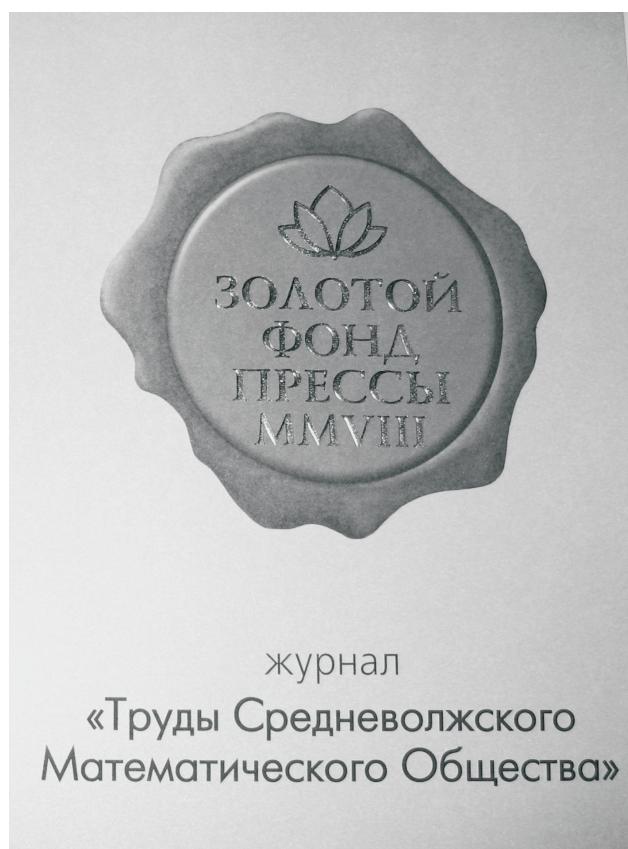
Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiK_EX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Байназарова Н. М.	23	Нафикова А. Р.	53
Герасимов А. В.	7	Нурисламова Л. Ф.	23
Губайдуллин И. М.	23	Пустовалова О. А.	90
Зубов В. И.	90	Сафина Г. Ф.	59
Зубов И. В.	85, 90	Стрекопытов С. А.	85
Зубова А. Ф.	85	Шаманаев П. А.	33
Кризский В. Н.	53	Юлдашев Н. Н.	7
Кяшкин А. А.	33	Юлдашев Т. К.	75
Логинов Б. В.	7, 33	Goryacheva M. V.	68
Малкин М. И.	41	Tynda A. N.	68
Нагорных С. Н.	50	Tynda O. V.	68

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



журнал
«Труды Средневолжского
Математического Общества»

С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в Объединенном каталоге «Пресса России» – 94016.

Для заметок

Для заметок

Для заметок