ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 15, № 2

СВМО

2013

Средневолжское математическое общество

Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет
имени Н. П. Огарёва

Журнал Средневолжского математического общества

Том 15, № 2

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

Саранск

2013

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммумуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 15, № 2

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.
Корректоры: Егорова Д. К., Пескова Е. Е.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарёва

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).
Тел.: (834-2) 23-32-05
E-mail для статей: journal@svmo.ru
E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru
Web: http://www.svmo.ru

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

Краткие сообщения

От редакции

Во втором номере 15-го тома публикуются работы ведущих учёных и молодых исследователей, являющихся участниками VI международной математической школы-семинара «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е.В. Воскресенского (г. Саранск, 6 – 12 июля 2013 года). Конференция проводится национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом при поддержке РФФИ (грант № 13-01-06814). Все статьи имеют положительные рецензии, а сам журнал (кроме подписки через каталог «Почта России») доступен теперь и в сети Internet на сайте Elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 519.63:517.958

О способе решения задачи нестационарной диффузии радона в кусочно-анизотропных средах

© **А. Р. Бикбаева[1],В. Н. Кризский[2]**

Аннотация. В работе построена математическая модель диффузии радона в слоистых анизотропных средах с анизотропными включениями, которая представляет собой краевую задачу математической физики параболического типа. Предложен комбинированный способ решения задачи на основе методов интегральных преобразований, интегральных представлений и граничных интегральных уравнений.

Ключевые слова: диффузия радона, анизотропная среда, краевая задача, метод интегральных преобразований и интегральных представлений, преобразование Лапласа.

1. Введение

Радон из-за специфических особенностей является индикатором при различных геологических и геотехнических исследованиях. Динамические изменения концентрации радона в приповерхностном слое почвы отражают динамические изменения напряженно-деформированного состояния горного массива в значительном объеме, что служит основой для исследования поля вариаций эксгаляции радона как краткосрочного предвестника сейсмических событий [1]. В геологии изотопы радона используются для поиска урановых и ториевых руд, а также для геологического и экологического картирования, поиска нефтяных месторождений.

Изучение процессов распределения радона в грунте связано с решением параболических краевых задач математической физики. Разработка алгоритмов решения подобного типа задач и программ расчета данных имеет практическое значение во многих научных направлениях: сейсмология, геохимия, разведочная геофизика и т.д.

2. Постановка задачи и способ решения

Без ограничений общности рассуждений будем рассматривать горизонтально-слоистую модель среды с локальными включениями, отражающую типовую структуру нефтеносного района.

Пусть горизонтально-слоистая среда разделена гладкими параметрически заданными границами $\gamma_{0.0}, \gamma_{1.0}, \ldots, \gamma_{N-1.0}$ на горизонтальные слои $\Omega_{0.0}, \Omega_{1.0}, \ldots, \Omega_{N.0}$, заполненные веществом, диффузионные свойства которого описываются симметричными тензорами $D_{0.0}, D_{1.0}, \ldots, D_{N.0}$ соответственно.

Каждый слой $\Omega_{i.0}$ содержит M_i локальных включений $\Omega_{i.j} (j = \overline{1, M_i})$ с границами $\Omega_{i.j}$, заполненных веществом, физические свойства которого описываются постоянными симметричными тензорами диффузии $D_{i.j}, i = \overline{0, N}, j = \overline{1, M_i}$.

[1] Ассистент кафедры математического моделирования, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; albinabikbaeva@gmail.com.

[2] Зам. директора по научной работе и инновациям, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, г. Стерлитамак; Krizsky@rambler.ru.

Математическая модель переноса радона в области исследования $\mathbf{\Omega} = \bigcup_{i=0}^{N} \bigcup_{j=1}^{M_i} \Omega_{i.j} \subset \mathbb{R}^3$ может быть представлена начально-краевой задачей вида:

$$\frac{\partial A_{i.j}(P,t)}{\partial t} = div(D_{i.j}\overline{\nabla} A_{i.j}(P,t)) - \lambda(A_{i.j}(P,t) - A_{i.\infty}), P \in \Omega_{i.j}, i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M_i}; \quad (2.1)$$

$$(D_{i.0}\overline{\nabla} A_{i.0}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}} = (D_{i+1.0}\overline{\nabla} A_{i+1.0}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.2)$$

$$A_{i.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}} = A_{i+1.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.3)$$

$$(D_{i.j}\overline{\nabla} A_{i.j}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.j}} = (D_{i.0}\overline{\nabla} A_{i.0}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.j}}, i = \overline{0,N}, j = \overline{1,M_i}; \quad (2.4)$$

$$A_{i.j}(P,t)|_{\gamma_{i.j}} = A_{i.0}(P,t)|_{\gamma_{i.j}}, i = \overline{0,N}, j = \overline{1,M_i}; \quad (2.5)$$

$$\lim_{z\to\infty} A_{N.0}(P,t) = A_{N.\infty}, \lim_{z\to-\infty} A_{0.0}(P,t) = 0; \lim_{P\to\infty, z=const} A_{i.0}(P,t) = A_{\text{н}_i}(P,t), i = \overline{0,N}; \quad (2.6)$$

$$A_{i.j}(P,0) = 0, i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M_i}. \quad (2.7)$$

Здесь $A_{i.j}(P,t)$ – объемная активность радона в грунте, $P(x,y,z)$; λ – постоянная распада радона; $A_{i.\infty}$ – объемная активность радона, находящегося в радиоактивном равновесии с радием (^{226}Ra) на заданной глубине в грунте i-го слоя, которая равна $A_{i.\infty} = K_{i.em} A_{i.Ra} \rho_{i.s}(1-\eta_i))$, $K_{i.em}$ – коэффициент эманирования радона, $A_{i.Ra}$ – удельная активность ^{226}Ra, $\rho_{i.s}$ – плотность твердых частиц, η_i – пористость грунта, $A_{\text{н}_i}(P,t)$ – нормальное поле радона, описывающее диффузию радона в слоистой среде в предположении отсутствия включений. Переменная $t \geq 0$ – время.

Представим искомую функцию объемной активности радона в грунте $A_{i.j}(P,t)$ в виде суммы двух вспомогательных функций аномального $\overline{A}_{i.j}(P,t)$ и нормального $A_{\text{н}_i}(P,t)$ полей, т.е.

$$A_{i.j}(P,t) = \overline{A}_{i.j}(P,t) + A_{\text{н}_i}(P,t), i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M_i},$$

где нормальное поле радона определяется краевой задачей:

$$\frac{\partial A_{\text{н}_i}(P,t)}{\partial t} = div(D_{i.0}\overline{\nabla} A_{\text{н}_i}(P,t)) - \lambda(A_{\text{н}_i}(P,t) - A_{i.\infty}), P \in \Omega_{i.0}, i = \overline{0,N}; \quad (2.8)$$

$$(D_{i.0}\overline{\nabla} A_{\text{н}_i}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}} = (D_{i+1.0}\overline{\nabla} A_{\text{н}_{i+1}}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.9)$$

$$A_{\text{н}_i}(P,t)|_{\gamma_{i.0}} = A_{\text{н}_{i+1.0}}(P,t)|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.10)$$

$$\lim_{z\to\infty} A_{\text{н}_N}(P,t) = A_\infty, \lim_{z\to-\infty} A_{\text{н}_0}(P,t) = 0; \quad (2.11)$$

$$A_{\text{н}_i}(P,0) = 0, i = \overline{0,N}. \quad (2.12)$$

Численное решение задачи (2.8) – (2.12) в случае кусочно-однородной горизонтально-слоистой среды с плоскими границами получено в [2].

С учетом задачи (2.8) – (2.12) аномальное поле радона удовлетворяет следующей краевой задаче:

$$\frac{\partial \overline{A}_{i.j}(P,t)}{\partial t} = div(D_{i.j}\overline{\nabla A}_{i.j}(P,t)) - \lambda \overline{A}_{i.j}(P,t), P \in \Omega_{i.j}, i = \overline{0,N}, j = \overline{0,M_i}; \quad (2.13)$$

$$((D_{i.0}\overline{\nabla A}_{i.0}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}} = ((D_{i+1.0}\overline{\nabla A}_{i+1.0}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.14)$$

$$\overline{A}_{i.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}} = \overline{A}_{i+1.0}(P,t)|_{\gamma_{i.0}}, i = \overline{0,N-1}; \quad (2.15)$$

$$((D_{i.j}\overline{\nabla A}_{i.j}(P,t), \overline{n})|_{\gamma_{i.j}} = [(D_{i.0}\overline{\nabla A}_{i.0}(P,t), \overline{n}) + \psi_{i.0}(P)]|_{\gamma_{i.j}}, i = \overline{0,N}, j = \overline{1,M_i}, \quad (2.16)$$

$$\psi_{i.0}(P) = ((D_{i.0} - D_{i.j})\overline{\nabla} A_{\text{н}_i}(P,t), \overline{n});$$

$$\overline{A}_{i.j}(P,t)|_{\gamma_{i.j}} = \overline{A}_{i.0}(P,t)|_{\gamma_{i.j}}, i=\overline{0,N}, j=\overline{1,M_i}; \tag{2.17}$$

$$\lim_{P\to\infty}\overline{A}_{i.0}(P,t)=0, i=\overline{0,N}, \overline{A}_{i.j}(P,0)=0, i=\overline{0,N}, j=\overline{0,M_i}. \tag{2.18}$$

Применим к задаче (2.13) – (2.18) способ решения, описанный в работе [3], используя интегральное преобразование Лапласа

$$F(P,s)=\int\limits_0^\infty A(P,t)e^{-st}dt. \tag{2.19}$$

Получим следующую краевую задачу:

$$div(D_{i.j}\overline{\nabla}F_{i.j}(P,s))-(s+\lambda)F_{i.j}(P,s)=0, P\in\Omega_{i.j}, i=\overline{0,N}, j=\overline{0,M_i}; \tag{2.20}$$

$$(D_{i.0}\overline{\nabla}F_{i.0}(P,s),\overline{n})|_{\gamma_{i.0}} = (D_{i+1.0}\overline{\nabla}F_{i+1.0}(P,s),\overline{n})|_{\gamma_{i.0}}, i=\overline{0,N-1}; \tag{2.21}$$

$$F_{i.0}(P,s)|_{\gamma_{i.0}} = F_{i+1.0}(P,s)|_{\gamma_{i.0}}, i=\overline{0,N-1}; \tag{2.22}$$

$$(D_{i.j}\overline{\nabla}F_{i.j}(P,s),\overline{n})|_{\gamma_{i.j}} = [(D_{i.0}\overline{\nabla}F_{i.0}(P,s),\overline{n}+F_{\psi_{i.0}}(P)]|_{\gamma_{i.j}}, i=\overline{0,N-1}, j=\overline{1,M_i}, \tag{2.23}$$

$$F_{\psi_{i.0}}(P)=((D_{i.0}-D_{i.j})\overline{\nabla}F_{\text{н}_i}(P,s),\overline{n});$$

$$F_{i.j}(P,s)|_{\gamma_{i.j}} = F_{i.0}(P,s)|_{\gamma_{i.j}}, i=\overline{0,N}, j=\overline{1,M_i}; \tag{2.24}$$

$$\lim_{P\to\infty}F_{i.j}(P,s)=0, i=\overline{0,N}, \tag{2.25}$$

где функция $F_{\psi_{i.0}}(P)$ – образ функции $\psi_{i.0}(P)$ при преобразовании (2.19).

Для решения задачи (2.20) – (2.25) рассмотрим вспомогательную задачу для функции Грина $G(P,Q)$ – функции точечного источника, находящегося в произвольной точке $Q(x_q,y_q,z_q)$ и генерирующего диффузионное поле единичной интенсивности во вмещающем пространстве (в слоистой среде без включений):

$$div(D_{i.0}\overline{\nabla}G_{i.0}(P,Q))-(s+\lambda)G_{i.0}(P,Q)=-\delta(P,Q), P\in\Omega_{i.0}, i=\overline{0,N}; \tag{2.26}$$

$$(D_{i.0}\overline{\nabla}G_{i.0}(P,Q),\overline{n})|_{\gamma_{i.0}} = (D_{i+1.0}\overline{\nabla}G_{i+1.0}(P,Q),\overline{n})|_{\gamma_{i.0}}, i=\overline{0,N-1}; \tag{2.27}$$

$$G_{i.0}(P,Q)|_{\gamma_{i.0}} = G_{i+1.0}(P,Q)|_{\gamma_{i.0}}, i=\overline{0,N-1}; \tag{2.28}$$

$$\lim_{P\to\infty}G_{i.j}(P,Q)=0, i=\overline{0,N}. \tag{2.29}$$

Интегральное представление задачи (2.20) – (2.25) будет иметь вид:

$$F(P,s)=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}\int\limits_{\gamma_{i.j}}F_{i.j}(Q,s)[(D_{i.0}-D_{i.j})\overline{\nabla}G_{i.0}(P,Q),\overline{n_Q})]d\gamma_{i,jQ}+\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}\int\limits_{\gamma_{i.j}}F_{\psi_{i.0}}(Q)G_{i.0}(P,Q)d\gamma_{i,jQ}.$$

Здесь $\overline{n}_Q$ – вектор внешней нормали к границе включения в точке Q, а граничные значения функции $F_{i.j}(Q,s)$ находятся как решение системы интегральных уравнений Фредгольма второго рода:

$$F(P,s)-\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}\int\limits_{\gamma_{i.j}}F_{i.j}(Q,s)[(D_{i.0}-D_{i.j})\overline{\nabla}G_{i.0}(P,Q),\overline{n}_Q]d\gamma_{i.jQ}=\sum_{i=0}^{N}\sum_{j=1}^{M_i}\int\limits_{\gamma_{i.j}}F_{\psi_{i.0}}(Q)G_{i.0}(P,Q)d\gamma_{i.jQ}.$$

Обращение преобразования Лапласа (2.19) программно реализуется с помощью обобщенных квадратурных формул наивысшей степени точности [4].

Список литературы

1. Уткин В. И., “Газовое дыхание Земли”, *Соросовский образовательный журнал*, 1997, № 1, 57–64.

2. Яковлева В. С., Паровик Р. И., “Численное решение уравнения диффузии-адвекции радона в многослойных геологических средах”, *Вестник КРАУНЦ. Физ.-мат. науки*, 2011, № 1(2), 45–55.

3. Кризский В. Н., “О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Часть II. Нестационарные поля”, *Вестник Башкирского университета*, **14**:4 (2009), 1302–1306.

4. Матвеева Т. А., *Некоторые методы обращения преобразования Лапласа и их приложения*, дисс. ... канд. физ.-мат. наук, С.-П., 2003, 117 с.

About the method of the solution problem of non-stationary diffusion of radon in piecewise and anisotropic media

© A. R. Bikbaeva[3], V. N. Krizsky[4]

Abstract. In the work the mathematical model of diffusion of radon in layered anisotropic media with anisotropic inclusions which represents a boundary problem of mathematical physics of parabolic type is constructed. The combined method of the solution problem on the basis of methods of integral transformations, integral representations and the boundary integral equations is offered.

Key Words: diffusion of radon, anisotropic media, boundary problem, method of integral transformations and integral representations, Laplace transform.

[3] Assistant to Chair of Mathematical Modeling, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; albinabikbaeva@gmail.com.

[4] Deputy director for scientific work and innovations, Sterlitamak branch of the Bashkir State University, Sterlitamak; Krizsky@rambler.ru.

УДК 517.938.5

О классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством автоморфизмов трехцветных графов

© В. З. Гринес[1], С. Х. Капкаева[2]

Аннотация. Данная статья является продолжением работы [6], в которой найдены условия топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей, неблуждающее множество которых состоит лишь из неподвижных точек. В настоящей работе рассматривается класс сохраняющих ориентацию градиентно-подобных диффеоморфизмов, неблуждающее множество которых допускает существование периодических орбит периода большего единицы. Каждому диффеоморфизму ставится в соответствие трехцветный граф, на вершинах которого этот диффеоморфизм индуцирует взаимно-однозначное соответствие, называемое нами автоморфизмом графа. Устанавливается, что все вершины графа имеют один и тот же период относительно действия автоморфизма. В работе доказывается, что трехцветный граф, снабженный автоморфизмом, является полным топологическим инвариантом в рассматриваемом классе диффеоморфизмов

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, градиентно-подобный диффеоморфизм, топологически сопряженные диффеоморфизмы, трехцветный граф

1. Основные понятия и формулировка результатов

В настоящей работе рассматривается класс $\tilde{G}$ сохраняющих ориентацию градиентно-подобных диффеоморфизмов Морса-Смейла на замкнутом двумерном ориентируемом многообразии M^2.

Представим неблуждающее множество в виде: $\Omega_f = \Omega_0(f) \cup \Omega_1(f) \cup \Omega_2(f)$, где $\Omega_0(f)$, $\Omega_1(f)$, $\Omega_2(f)$ - множества стоковых, седловых, источниковых периодических точек диффеоморфизма f соответственно.

Каждой периодической орбите $\mathcal{O}_p$ периодической точки p диффеоморфизма f соответствует тройка чисел $(m_{\mathcal{O}_p}, q_{\mathcal{O}_p}, \nu_{\mathcal{O}_p})$ (периодические данные орбиты $\mathcal{O}_p$), где $m_{\mathcal{O}_p}$ - период $\mathcal{O}_p$, $q_{\mathcal{O}_p} = \dim\ W^u_{\mathcal{O}}$, а $\nu_{\mathcal{O}_p}$ — тип ориентации точки p (равный $+1(-1)$, если $f^m|_{W^u_p}$ сохраняет (меняет) ориентацию).

Обозначим через m_f - наименьшее натуральное число, для которого $\Omega_{f^{m_f}}$ неподвижно и любая периодическая точка диффеоморфизма f^{m_f} имеет тип ориентации $+1$. По построению $m_{\mathcal{O}_p}$ — делитель числа m_f.

Так как блуждающее множество диффеоморфизма $f \in \tilde{G}$ не имеет гетероклинических точек, то для $l^u_\sigma(l^s_\sigma)$ неустойчивой (устойчивой) сепаратрисы седла $\sigma \in \Omega_1$ существует сток $\omega \in \Omega_0$ (источник $\alpha \in \Omega_2$) такой, что $cl(l^u_\sigma) = l^u_\sigma \cup \sigma \cup \omega$ $(cl(l^s_\sigma) = l^s_\sigma \cup \sigma \cup \alpha)$ (см. предложение 2.1.3 [2]).

Обозначим через $L_\omega(L_\alpha)$ - множество сепаратрис, содержащих сток $\omega \in \Omega_0$ (источник $\alpha \in \Omega_2$) в своем замыкании. Положим $L_f = \bigcup\limits_{\omega\in\Omega_0,\alpha\in\Omega_2} L_\omega \cup L_\alpha$ множество сепаратрис диффеоморфизма f

[1] Профессор кафедры численного и функционального анализа ННГУ им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru

[2] Студентка, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kapkaevasvetlana@yandex.ru

О п р е д е л е н и е 1.1. *Для произвольной сепаратрисы $l \in L_f$ наименьшее из возможных чисел $k \in \mathbb{N}$ таких, что $f^k(l) = l$ назовем периодом сепаратрисы l, обозначим его через m_l.*

В разделе 2. настоящей статьи будет доказано, что все сепаратрисы диффеоморфизма $f \in \tilde{G}$ имеют период m_f.

Напомним следующие определения.

О п р е д е л е н и е 1.2. *Граф T называется трехцветным графом, если все его вершины имеют степень 3, а ребра раскрашены в три цвета таким образом, что в каждой вершине сходятся ребра трех разных цветов. Цвета будем обозначать буквами s, t, u. Для краткости будем называть эти ребра s-ребрами, t-ребрами и u-ребрами.*

О п р е д е л е н и е 1.3. *Два трехцветных графа T и T' назовем изоморфными, если существует взаимно-однозначное соответствие между множествами их вершин, сохраняещее отношения инцидентности и цветности (s, t, u-ребра переходят в ребра того же цвета).*

О п р е д е л е н и е 1.4. *Взаимно-однозначное отображение S_f графа $T(f)$ на себя, переводящее вершину в вершину, с сохранением отношения инцидентности и цветности, будем называть автоморфизмом графа $T(f)$.*

Проведя построения, аналогичные построениям, выполненным в работе [6], каждому диффеоморфизму $f \in G$ на поверхности M^2 поставим в соответствие трехцветный граф $T(f)$.

Пусть f, имеет хотя бы одну седловую особую точку. Удалим из поверхности M^2 замыкание объединения устойчивых и неустойчивых многообразий всех седловых точек диффеоморфизма f и обозначим получившееся множество через $\tilde{M}$, то есть $\tilde{M} = M^2 \setminus \overline{\bigcup\limits_{p \in \Omega_1} (W^u_p \cup W^s_p)}$. Тогда множество $\tilde{M}$ представляется в виде объединения открытых областей (ячеек), гомеоморфных открытому стандартному диску, то есть множеству $\{(x, y) \in R^2 : \ x^2 + y^2 < 1\}$. Для потоков этот факт был доказан Леонтович-Андроновой, для градиентно-подобных каскадов А. Н. Безденежных и В. З. Гринесом. При этом граница каждой области из множества $\tilde{M}$ содержит в точности один источник, один сток, одну или две седловые точки и некоторые из их сепаратрис. В силу того, что все сепаратрисы диффеоморфизма f имеют имеют период m_f, то все компоненты связности множества $\tilde{M}$ также имеют период m_f [3].

Пусть A - любая ячейка из множества $\tilde{M}$, α и ω - источник и сток, входящие в ее границу, произведем следующее построение.

Аналогично [6] построим t-кривую, разбивающую ячейку A на две треугольные области, в границу каждой из которых входят: три периодические точки - источник α, седло σ, сток ω, а также устойчивая сепаратриса l^s_σ (будем называть ее s-кривой) с граничными точками α и σ, неустойчивая сепаратриса l^u_σ (u-кривая) с граничными точками ω и σ и кривая $\mathcal{I}$ (t- кривая) с граничными точками α и σ. В силу того, что границами треугольных областей являются сепаратрисы l^u_σ, l^s_σ, t-кривая и диффеоморфизм f сохраняет ориентацию, то период треугольной области равен m_f [4].

[3] Периодом компоненты связности $A \in \tilde{M}$ называется наименьшее натуральное число $k \in \mathbb{N}$, такое что $f^k(A) = A$

[4] Периодом треугольной области δ называется наименьшее натуральное число $k \in \mathbb{N}$, такое что $f^k(\delta) = \delta$

Обозначим через $\mathcal{T}$ множество t-кривых, построенных во всех ячейках множества $\tilde{M}$. Положим $M_1 = \tilde{M} \setminus \mathcal{T}$, тогда M_1 представляется в виде объединения треугольных областей.

Стороной треугольной области назовем замыкание одной из s, u или t компонент связности границы.

Будем говорить, что две треугольные области, имеют общую сторону, если она принадлежит замыканиям обеих треугольников.

Построим трехцветный граф $T(f)$, соответствующий полученному разбиению M_1 на треугольники следующим образом:

1. вершины графа T взаимно-однозначно соответствуют треугольникам разбиения M_1;

2. две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t или u, если соответствующие этим вершинам треугольные области имеют общую s, t или u кривую.

П р е д л о ж е н и е 1.1. *Трехцветный граф не зависит от выбора t-кривой.*

В силу предложения 1.1. трехцветные графы $T_1(f)$ и $T_2(f)$, полученные по различным разбиениям на треугольные области, в точности совпадают.

Пусть Δ — множество всех треугольных областей диффеоморфизма f, Γ - множество всех вершин трехцветного графа $T(f)$ и $\pi : \Delta \to \Gamma$ отображение, которое ставит в соответствие каждой треугольной области диффеоморфизма f вершину графа $T(f)$.

Диффеоморфизм f индуцирует на множестве вершин графа $T(f)$ автоморфизм $S_f = \pi f \pi^{-1}$.

Так как все треугольные области имеют период m_f, то все вершины трехцветного графа имеют период m_f (доказательство этого факта приведено в разделе 2.).

Основной результат данной работы содержится в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.1. *Для того чтобы диффеоморфизмы $f \in \tilde{G}$ и $f' \in \tilde{G}$ были топологически сопряжены необходимо и достаточно, чтобы существовал изоморфизм η графов $T(f)$ и $T(f')$, сопрягающий автоморфизмы графов, то есть $S'_{f'} = \eta S_f \eta^{-1}$.*

2. Вспомогательные сведения

В этом разделе содержатся ряд предложений, формулировки и доказательства которых имеются в книге [2] и работе [1].

О п р е д е л е н и е 2.1. *Компактное $f-$инвариантное множество $A \subset M^2$ называется аттрактором дискретной динамической системы f, если оно имеет компактную окрестность $U_A : f(U_A) \subset$ int U_A и $A = \bigcap\limits_{k \geq 0} f^k(U_A)$. Окрестность U_A при этом называется захватывающей.*

Репеллер R определяется как аттрактор для f^{-1}.

В силу пункта 1 теоремы 2.2.2 [2] множество $A = W^u_{\Omega_0 \cup \Omega_1} = \bigcup\limits_{\sigma \in \Omega_1} l^u_\sigma \cup \Omega_0$ является аттрактором, а множество $R = W^s_{\Omega_2} = \Omega_2$ репеллером. В этом случае согласно построению размерность репеллера R равна 0, а размерность аттрактора равна единице.

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Аттрактор A является связным множеством.*

Предложение 2.2. *Пусть ω - сток диффеоморфизма $f \in G$. Тогда для произвольных сепаратрис $l', l'' \subset L_\omega$ верно следующее равенство $m_{l'} = m_{l''}$.*

Предложение 2.3. *Пусть σ - седловая точка диффеоморфизма $f \in G$. Тогда периодические данные орбиты $\mathcal{O}_\sigma$ имеют в точности один из следующих видов: $(m_f, 1, +1)$ или $(\frac{m_f}{2}, 1, -1)$.*

Предложение 2.4. *Любая сепаратриса $l \in L_f$ диффеоморфизма $f \in G$ имеет период m_f.*

Доказательство. В силу предложения 2.3. седловые точки могут иметь период m_f или $m_f/2$. Имеют место два случая: 1 случай - седловая точка σ имеет период m_f и тип ориентации $+1$, тогда и период сепаратрис точки σ равен m_f; 2 случай - седловая точка σ имеет период $m_f/2$ и тип ориентации -1, тогда период седловой точки σ диффеоморфизма f^2 имеет период m_f и тип ориентации $+1$ и период сепаратрис точки σ равен m_f; период сепаратрис седловой точки σ диффеоморфизма f либо $m_f/2$, либо m_f, но $m_f/2$ быть не может, так как она не неподвижна. То есть период сепаратрис точки σ при типе ориентации -1 также равен m_f.

Таким образом, все сепаратрисы $l \in L_f$ диффеоморфизма $f \in G$ имеют период m_f.
Доказательство закончено.

Следствие 2.1. *Любая треугольная область $\delta \in \Delta_f$ диффеоморфизма f имеет период m_f.*

Предложение 2.5. *Автоморфизм S_f обладает следующим свойством: все вершины трехцветного графа $T(f)$ имеют период m_f.*

Доказательство. В силу следствия 2.1. все треугольные области из множества Δ_f имеет период m_f, то есть для любой треугольной области $\delta \in \Delta$ верно, что $f^{m_f}(\delta) = \delta$ и $f^k(\delta) \neq \delta$ для любого $k < m_f$, где $k \in \mathbb{N}$. Положим $\gamma = \pi(\delta)$ вершина трехцветного графа, соответствующая треугольной области δ. Тогда $S_f^{m_f}(\gamma) = \pi f^{m_f} \pi^{-1}(\gamma) = \pi f^{m_f}(\delta) = \pi(\delta) = \gamma$. Аналогичным образом проверяется, что $f^k(\delta) \neq \delta$ для $k < m_f$, где $k \in \mathbb{N}$ Таким образом вершина $\gamma \in \Gamma$ имеет период m_f.
Доказательство закончено.

Пусть a и b инвариантные сепаратрисы диффеоморфизма f, имеющие неподвижный сток ω своей граничной точкой. Тогда существует гладкий диск B_ω такой, что $\omega \in B_\omega$ и B_ω пересекает каждую из сепаратрис в единственной точке. Компоненту связности множества $B_\omega \setminus (a \cup b)$, не содержащую других сепаратрис $l \in L_\omega$ обозначим J_*. Будем рассматривать область J, ограниченную сепаратрисами a и b такую, что $J \cap J_* \neq \emptyset$.

Предложение 2.6. *Возможно построить такую кривую $\gamma \in J$, что она пересекает каждую из инвариантных кривых a и b в единственной точке, причем $f(\gamma)$ также пересекает каждую из кривых a и b в единственной точке и $\gamma \cap f(\gamma) = \emptyset$.*

3. Необходимые обозначения

Рассмотрим диффеоморфизмы $f, f' \in \tilde{G}$, трехцветные графы которых изоморфны, то есть существует изоморфизм $\eta : T(f) \to T(f')$.

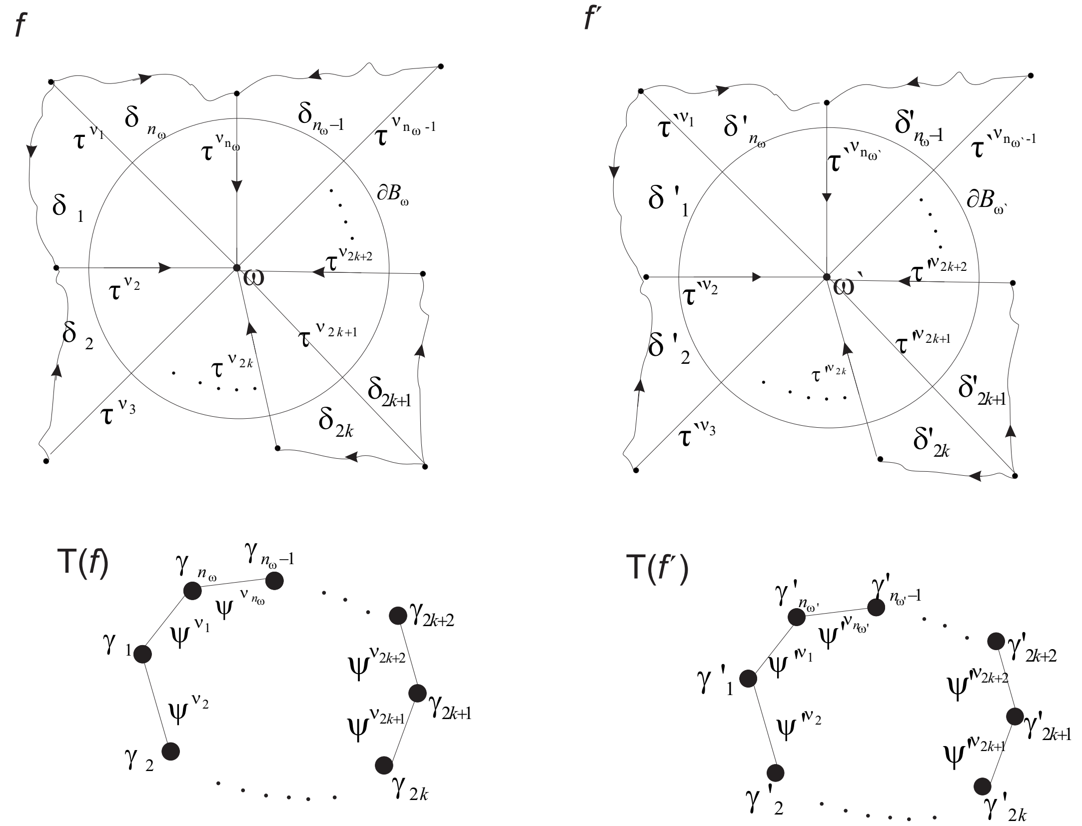
Зафиксируем произвольную треугольную область δ диффеоморфизма f, в границу этой треугольной области входит стоковая точка ω. Положим $h_\Delta = \pi'^{-1}\eta\pi$, под действием этого отображения δ перейдет в треугольную область $\delta' = h_\Delta(\delta) = \pi'^{-1}\eta\pi(\delta)$ диффеоморфизма f'. В границу треугольной области δ' входит стоковая точка диффеоморфизма f', которую мы обозначим ω'. Таким образом отображение h_Δ индуцирует отображение $h_{\Omega_0} : \Omega_0 \to \Omega_0'$, действующее по следующему правилу $h_{\Omega_0}(\omega) = \omega'$ для каждой стоковой точки $\omega \in \Omega_0$.

Для стоковой неподвижной точки ω диффеоморфизма f обозначим через $\tilde{L}_\omega$ множество всех t и u кривых, для которых ω является граничной точкой и через n_ω - число кривых принадлежащих $\tilde{L}_\omega$ [5].

Аналогично лемме 3.2.1 книги [2], устанавливается, что существует гладкий замкнутый диск $B_\omega \subset W^s_\omega$, такой что $\omega \in intB_\omega$, $f(B_\omega) \subset B_\omega$ и любая кривая $\tau^\nu_\omega \in \tilde{L}_\omega$ (где ν - цвет ребра, $\nu \in \{u,t\}$) пересекает кривую $c_\omega = \partial B_\omega$ в единственной точке. Зададим в некоторой точке кривой c_ω пару векторов ($\overrightarrow{\theta}; \overrightarrow{n}$) такую, что вектор $\overrightarrow{n}$ направлен внутрь диска B_ω, вектор $\overrightarrow{\theta}$ касается кривой c_ω и задает на ней направление обхода, при котором диск B_ω остается слева (назовем такой обход положительным). Занумеруем кривые, пересекающие c_ω: $\tau^{\nu_1}_\omega, \tau^{\nu_2}_\omega, \ldots \tau^{\nu_{n_\omega}}_\omega$ в соответствии с порядком, в котором они встречаются при выбранном обходе вдоль c_ω, начиная с некоторой кривой из множества $\tilde{L}_\omega$. Для определенности положим, что $\tau^{\nu_1}_\omega$ имеет цвет t. Обозначим через δ_{2k-1} треугольную область, в границу которой входят кривые $\tau^{\nu_{2k-1}}_\omega$ и $\tau^{\nu_{2k}}_\omega$. Аналогичным образом обозначим через δ_{2k} треугольную область, в границу которой входят кривые $\tau^{\nu_{2k}}_\omega$ и $\tau^{\nu_{2k+1}}_\omega$. Область со сторонами $\tau^{\nu_1}_\omega$ и $\tau^{\nu_{n_\omega}}_\omega$ обозначим δ_{n_ω} (рис. 3.1). Заметим, что кривые $\tau^{\nu_{2k-1}}_\omega$ и $\tau^{\nu_{2k}}_\omega$ $k = \overline{1, n_\omega/2}$ имеют разный цвет, так как они являются сторонами одной треугольной области. Из наших обозначений следует, что все $\tau^{\nu_{2k-1}}_\omega$ являются t-кривыми, $\tau^{\nu_{2k}}_\omega$ - u-кривыми.

Обозначим через $\Gamma_\omega \subset \Gamma$ множество вершин трехцветного графа $T(f)$, которым соответствуют треугольные области диффеоморфизма f, содержащие ω в своих замыканиях и положим $\gamma_i = \pi(\delta_i)$, где $i = \overline{1, n_\omega}$.

[5] По построению число n_ω четное. Действительно, число сепаратрис, содержащих ω в своем замыкании совпадает с числом ячеек множества $\tilde{M}$, также содержащих ω в своем замыкании. В каждой такой ячейке была выбрана в точности одна t-кривая. Таким образом число n_ω совпадает с удвоенным числом ячеек множества $\tilde{M}$, содержащих ω в своем замыкании.



Р и с у н о к **3.1**

Треугольные области в окрестности стока

Применим отображение h_Δ к треугольным областям δ_{2k-1} и δ_{2k}. Отображение π переводит треугольные области δ_{2k-1} и δ_{2k}, имеющие общую сторону $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$, в вершины $\gamma_{2k-1}=\pi(\delta_{2k-1})$ и $\gamma_{2k}=\pi(\delta_{2k})$ трехцветного графа, которые инцидентны некоторому ребру, которое обозначим $\psi^{\nu_{2k}}$. В силу изоморфизма графов вершины γ_{2k-1} и γ_{2k} графа $T(f)$ перейдут в вершины $\gamma'_{2k-1}=\eta(\gamma_{2k-1})$ и $\gamma'_{2k}=\eta(\gamma_{2k})$ графа $T(f')$, инцидентные ребру $\psi'^{\nu_{2k}}=\eta_1(\psi^{\nu_{2k}})$[6]. Вершинам γ'_{2k-1} и γ'_{2k} трехцветного графа $T(f')$ соответствуют треугольные области $\delta'_{2k-1}=\pi'^{-1}(\gamma'_{2k-1})$ и $\delta'_{2k}=\pi'^{-1}(\gamma'_{2k})$ в границу которых входит сток ω' диффеоморфизма f'. Общую сторону треугольных областей δ'_{2k-1} и δ'_{2k} обозначим через $\tau_{\omega'}^{\prime\nu_{2k}}$.

Напомним, что через L_ω мы обозначили множество сепаратрис, содержащих сток $\omega\in\Omega_0$ в своем замыкании. Стороны треугольных областей вида $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$ по определению являются неустойчивыми сепаратрисами, то есть $\tau_\omega^{\nu_{2k}}\in L_\omega$, где $k=\overline{1;n_\omega\setminus 2}$. По описанному выше правилу каждой сепаратрисе $\tau_\omega^{\nu_{2k}}$ мы поставили в соответствие сепаратрису $\tau_{\omega'}^{\prime\nu_{2k}}$, таким образом, отображение h_Δ индуцирует отображение $h_{L_\omega}: L_\omega\to L_{\omega'}$, где $\omega'=h_{\Omega_0}(\omega)$, такое что $h_{L_\omega}(\tau_\omega^{\nu_{2k}})=\tau_{\omega'}^{\prime\nu_{2k}}$

Треугольным областям δ_{2k} и δ_{2k+1}, граничащим по стороне $\tau_\omega^{\nu_{2k+1}}$, ставятся в соответствие треугольные области $\delta'_{2k}=h_\Delta(\delta_{2k})$ и $\delta'_{2k+1}=h_\Delta(\delta_{2k+1})$, граничащие по стороне $\tau_{\omega'}^{\prime\nu_{2k+1}}$, где $k=\overline{1,n_\omega/2}$.

Треугольным областям δ_{n_ω} и δ_1, граничащим по стороне $\tau_\omega^{\nu_1}$, ставятся в соответствие треугольные области $\delta'_{n_{\omega'}}=h_\Delta(\delta_{n_\omega})$ и $\delta'_1=h_\Delta(\delta_1)$, граничащие по стороне $\tau_{\omega'}^{\prime\nu_1}$.

[6] Отображение η, осуществляющее изоморфизм графов, индуцирует отбражение η_1, которое переводит ребро графа $T(f)$ в ребро графа $T(f')$ с сохранением отношения инцидентности.

Таким образом, множество вершин Γ_ω трехцветного графа $T(f)$ под действием η переходит на множество $\Gamma_{\omega'}$ трехцветного графа $T(f')$, где $\omega' = h_{\Omega_0}(\omega)$.

4. Доказательство теоремы 1.1.

Необходимость

Необходимость теоремы 1.1. следует из леммы 4.1., доказанной ниже.

Лемма 4.1. *Если диффеоморфизмы $f \in \tilde{G}$ и $f' \in \tilde{G}$ топологически сопряжены, то существует изоморфизм η графов $T(f)$ и $T(f')$, сопрягающий автоморфизмы графов, то есть $S'_{f'} = \eta S_f \eta^{-1}$.*

Доказательство. Пусть диффеоморфизмы f и f' топологически сопряжены, то есть существует гомеоморфизм h такой, что $f' = hfh^{-1}$.

Положим $\tilde{\Delta}'$ разбиение M'_1 на треугольные области, где в качестве t-кривых используются кривые $h(t)$. По полученному разбиению построим трехцветный граф $\tilde{T}(f')$.

Докажем, что $T(f)$ и $\tilde{T}(f')$ изоморфны.

Гомеоморфизм h индуцирует взаимно-однозначное соответствие $h_\Delta : \Delta \to \tilde{\Delta}'$, действующее по следующему правилу $h_\Delta(\delta) = \tilde{\delta}'$, где $\delta \in \Delta(\tilde{\delta}' \in \tilde{\Delta}')$.

Отображение $\eta = \pi' h_\Delta \pi^{-1}$ является взаимно-однозначным соответствием между множествами Γ и Γ'. Покажем, что η является изоморфизмом трехцветных графов, для этого достаточно показать, что если две вершины a, b инцидентны ребру ψ^ν (определенного цвета $\nu \in \{s,t,u\}$), то вершины $a' = \pi' h_\Delta \pi^{-1}(a)$ и $b' = \pi' h_\Delta \pi^{-1}(b)$ инцидентны некоторому ребру ψ'^ν того же цвета.

Вершинам a и b инцидентным ребру ψ^ν соответствуют две треугольные области $\delta_a = \pi^{-1}(a)$ и $\delta_b = \pi^{-1}(b)$, имеющие общую сторону τ^ν (τ того же цвета, что и ψ^ν). Области δ_a и δ_b преобразуются под действием гомеоморфизма h_Δ в треугольные области $h_\Delta(\delta_a)$ и $h_\Delta(\delta_b)$ с общей стороной τ'^ν. Это означает, что вершины a и b, инцидентные ребру ψ^ν, под действием $\eta = \pi' h_\Delta \pi^{-1}$ преобразуются в вершины $a' = \pi'(h_\Delta(\delta_a))$ и $b' = \pi'(h_\Delta(\delta_b))$ графа $T(f')$, инцидентные ребру ψ'^ν.

Таким образом $T(f)$ и $\tilde{T}(f')$ изоморфны. В силу утверждения 1.1. трехцветные графы $\tilde{T}(f')$ и $T(f')$ совпадают, следовательно $T(f)$ и $T(f')$ изоморфны.

Используя определения топологической сопряженности диффеоморфизмов f и f' распишем $S'_{f'} = \pi' \, f' \pi'^{-1} = \pi' \, hfh^{-1}\pi'^{-1} = \pi' \, h\pi^{-1}\pi \, f\pi^{-1}\pi \, h^{-1}\pi'^{-1} = \eta \, S_f \eta^{-1}$. Таким образом изоморфизм η сопрягает автоморфизмы S_f и $S'_{f'}$ графов $T(f)$ и $T(f')$.
Доказательство закончено.

Достаточность

Рассмотрим диффеоморфизмы $f, f' \in G$, трехцветные графы которых изоморфны, то есть существует изоморфизм $\eta : T(f) \to T(f')$.

Достаточность теоремы 1.1. следует из лемм 4.4., 4.5., доказанных ниже.

Зафиксируем произвольную сепаратрису $l \in L_\omega$. Для кривых $c_\omega = \partial B_\omega$ и $\tilde{c}_\omega = \partial f^{m_f}(B_\omega)$ положим, что $y = c_\omega \cap l$ и $f^{m_f}(y) = \tilde{c}_\omega \cap l$. Положим $L^l_\omega = \bigcup\limits_{k=1}^{m_f} f^k(l) \cap W^s_\omega$ (то есть множество L^l_ω - состоит из сепаратрис орбиты l, лежащих в области притяжения стока ω).

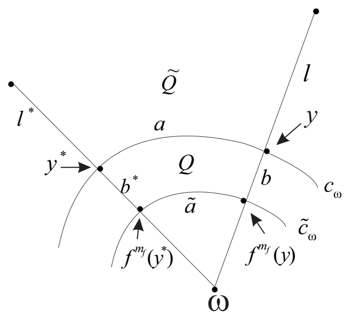


Рисунок **4.1**

Построение гомеоморфизма на границе треугольной области

Каждой стоковой периодической точке ω периода m_ω однозначно соответствует подграф T_ω графа $T(f)$, представляющий собой замкнутую кривую, гомеоморфную окружности и образованную четным числом ребер, таких, что ребра, имеющие общую вершину имеют разный цвет одного из типов u или t.

Обозначим через T^i_ω подграф, вершины которого являются образами вершин подграфа T_ω под действием автоморфизма S^i_f, а ребра имеют тип u или t. Положим $\mathcal{T}_\omega = \bigcup\limits_{i=0}^{m_\omega-1} T^i_\omega$.

Определим гомеоморфизм S_ω множества $\mathcal{T}_\omega$ на себя следующим образом. Для каждой вершины $\gamma \in \mathcal{T}_\omega$ положим: $\tilde{S}_\omega(\gamma) = S_f(\gamma)$. Пусть γ_1 и γ_2 вершины инцидентные ребру ψ^ν цвета $\nu \in \{s,t\}$. Из свойств автоморфизма S_f следует, что для вершин $S^i_f(\gamma_1)$ и $S^i_f(\gamma_2)$ найдется в точности одно ребро $\tilde{\psi}^\nu$ цвета ν, которому они инцидентны. Определим $S_\omega : \psi \to \tilde{\psi}$, полагая его произвольным гомеоморфизмом на внутренности ребра ψ и равным $\tilde{S}_\omega$ на границе.

Изоморфизм графов $\eta : T(f) \to T(f')$, сопрягающий автоморфизмы S_f и $S_{f'}$, индуцирует гомеоморфизм $\tilde{\eta} : S_\omega \to S_{\omega'}$, такой что $S_{\omega'} = \tilde{\eta} S_\omega \tilde{\eta}^{-1}$.

Положим $\gamma \in \mathcal{T}_\omega$ и q минимальное из чисел $q_f \in \{1,\cdots,m_f-1\}$ такое, что $\gamma^* = S^{q_f}_\omega(\gamma)$ и хотя бы одна из компонент связности, обозначим ее через K_ω, множества $T_\omega \setminus (\gamma \cup \gamma^*)$ не содержит образов вершины γ под действием S^i_ω для всех $i \in \{1,\cdots,m_f-1\}$.

Компонента связности K_ω, является порождающей областью для действия гомеоморфизма S_ω на множестве $\mathcal{T}_\omega$, то есть $\bigcup\limits_{i=0}^{m_f} \overline{S^i_\omega(K_\omega)} = \mathcal{T}_\omega$.

Положим $K'_{\omega'} = \tilde{\eta}(K_\omega)$, эта область является порождающей для гомеоморфизма S'_ω. В силу топологической сопряженности S_ω и $S_{\omega'}$ сопряжены и степени гомеоморфизмов $\tilde{\eta} S^{q_f}_\omega = S^{q_f}_{\omega'} \tilde{\eta}$. Граничными точками области $K'_{\omega'}$ будут точки $\gamma' = \tilde{\eta}(\gamma)$ и $\gamma'^* = S^{q_f}_{\omega'}(\gamma') = \tilde{\eta}^{-1} S^{q_f}_\omega \tilde{\eta}(\gamma')$.

Таким образом число q_f будет минимальным из чисел $q_f \in \{1,\cdots,m_f-1\}$ таким, что $\gamma'^* = S^q_\omega(\gamma')$ и хотя бы одна из компонент связности, множества $T_{\omega'} \setminus (\gamma' \cup \gamma'^*)$ не содержит образов вершины γ' под действием $S^i_{\omega'}$ для всех $i \in \{1,\cdots,m_f-1\}$.

Таким образом, доказана следующая лемма

Лемма 4.2. *Если существует изоморфизм η графов $T(f)$ и $T(f')$, сопрягающий автоморфизмы S_f и $S'_{f'}$, то числа q_f и $q_{f'}$ равны.*

В силу того, что вершинам трехцветного графа $T(f)$ соответствуют треугольные области диффеоморфизма f, то число q_f будет минимальным из возможных $q_f \in \{1,\cdots,m_f-1\}$ таких, что сепаратриса $l^* = f^{q_f}(l)$ и хотя бы одна из компонент связности множества $B_\omega \setminus (l \cup l^*)$ не содержит образов сепаратрисы $l \in L^l_\omega$ под действием

f^i для всех $i \in \{1, \cdots, m_f - 1\}$. Из леммы 4.2. следует, что $q_f = q_{f'}$ для сепаратрис из множеств L_ω и $L_{\omega'}$

Положим $M_2 = M^2 \setminus \bigcup\limits_{\sigma \in \Omega_1} W^s_\sigma$, $M'_2 = M^2 \setminus \bigcup\limits_{\sigma' \in \Omega_1} W^s_{\sigma'}$.

Лемма 4.3. *Пусть существует изоморфизм η графов $T(f)$ и $T(f')$, сопрягающий автоморфизмы S_f и $S'_{f'}$, тогда существует гомеоморфизм $\tilde{h} : M_2 \to M'_2$, такой что $\tilde{h}f = f'\tilde{h}$.*

Доказательство. Рассмотрим диффеоморфизмы $f, f' \in G$, трехцветные графы которых изоморфны, то есть существует изоморфизм $\eta : T(f) \to T(f')$.

Положим $b(b')$ замкнутый интервал, принадлежащий сепаратрисе $l(l')$, с граничными точками y и $f^{m_f}(y)$ $(y'$ и $f'^{m_f}(y'))$. Пусть $h_b : b \to b'$, произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, удовлетворяющий следующим условиям: 1. $h_b(y) = y'$; 2. $h_b(f^{m_f}(y)) = f'^{m_f}(y')$. Продолжим h_b до гомеоморфизма $h_l : l \to l'$ следующим образом: $h_l(x) = f'^{p \cdot m_f} h_b f^{-p \cdot m_f}(x)$, где $x \in l$, $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^{-p \cdot m_f}(x) \in b$.

Напомним, что $l^* = f^q(l)$ и зададим гомеоморфизм $h_{l^*} : l^* \to l'^*$ следующим образом: $h_{l^*} = f'^{q \cdot m_f} h_l f^{-q \cdot m_f}$, где $q \in \{1, \cdots, m_f - 1\}$ такое, что $f^{-q \cdot m_f}(l^*) = l$. Покажем, что h_{l^*} удовлетворяет условию $h_{l^*} f^{m_f} = f'^{m_f} h_{l^*}$. Так как $h_l f^{m_f} = f'^{m_f} h_l$, то распишем $h_{l^*} f^{m_f} = f'^{m_f \cdot q} h_l f^{-m_f \cdot q} f^{m_f} = f'^{m_f \cdot q} h_l f^{m_f} f^{-m_f \cdot q} = f'^{m_f \cdot q} f'^{m_f} h_l f^{-m_f \cdot q} = f'^{m_f} f'^{m_f \cdot q} h_l f^{-m_f \cdot q} = f'^{m_f} h_{l^*}$.

Положим b^* замкнутый интервал, принадлежащий сепаратрисе l^*, с граничными точками $y^* = c_\omega \cap l^*$ и $f^{m_f}(y^*) = \tilde{c}_\omega \cap l^*$. Отображение h_{b^*} - это ограничение h_{l^*} на b^*, то есть $h_{b^*} = h_{l^*}|_{b^*}$.

Рассмотрим произвольный замкнутый гладкий диск $B_{\omega'}$, содержащий ω', с границей $c_{\omega'} = \partial B_{\omega'}$, такой что $c_{\omega'} \cap l' = y'$ и $c_{\omega'} \cap l'^* = y'^*$. Согласно лемме 2 можно таким образом поправить $c_{\omega'}$, что $f'(B_{\omega'}) \subset B_{\omega'}$ и $f'(B_{\omega'}) \cap B_{\omega'} = \emptyset$.

Положим a - замкнутый интервал, принадлежащий кривой c_ω с граничными точками y и y^* такой, что $a \cap \bigcup\limits_{k=1}^{m_f} f^k(l) = \{l, l^*\}$. Аналогичные обозначения введем для диффеоморфизма f'. Обозначим через h_a произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $h_a : a \to a'$ такой, что $h_a(y) = y'$ и $h_a(y^*) = y'^*$.

Далее положим, что $\tilde{a}$ - это замкнутый интервал, принадлежащий кривой $\tilde{c}_\omega$ с граничными точками $f^{m_f}(y)$ и $f^{m_f}(y^*)$ такой, что $\tilde{a} \cap \bigcup\limits_{k=1}^{m_f} f^k(l) = \{l, l^*\}$. Определим отображение $h_{\tilde{a}} : \tilde{a} \to \tilde{a}$ следующим образом: положим $h_{\tilde{a}}(f^{m_f}(y)) = f'^{m_f}(y')$ и произвольной точке $\xi \in \tilde{a}$ поставим в соответствие $\xi' \in \tilde{a}'$, где $\xi' = f'^{m_f} h_{\tilde{a}} f^{-m_f}(\xi)$.

Обозначим через Q область, граница которой представляется в виде $\partial Q = a \cup \tilde{a} \cup b \cup b^*$ (рис. 3.1). Пусть $h_Q : \partial Q \to \partial Q'$ гомеоморфизм, заданный следующим образом:

$$h_Q(x) = \begin{cases} h_a(x), & \text{если } x \in a; \\ h_{\tilde{a}}(x), & \text{если } x \in \tilde{a}; \\ h_b(x), & \text{если } x \in b; \\ h_{b^*}(x), & \text{если } x \in b^*. \end{cases}$$

Тогда существует гомеоморфизм $H_Q : Q \to Q'$ такой, что $H_Q|_{\partial Q} = h_Q|_{\partial Q}$.

Положим $\tilde{Q}$ - область, ограниченная сепаратрисами l и l^* и не содержащая других сепаратрис из множества L^l_ω. Продолжим H_Q, заданный на Q на $\tilde{Q}$, следующим образом: $H_{\tilde{Q}}(x) = f'^{p \cdot m_f} H_Q f^{-p \cdot m_f}(x)$, где $x \in \tilde{Q}$, $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^{-p \cdot m_f}(x) \in Q$.

На остальных областях $\tilde{Q}_k$, в границу каждой из которых входят две сепаратрисы из множества L^l_ω и не содержащих других сепаратрис из множества L^l_ω, зададим гомеоморфизм $H_{\tilde{Q}_k} : \tilde{Q}_k \to \tilde{Q}'_k$. Положим $H_{\tilde{Q}_k} = f'^{p \cdot m_f} H_{\tilde{Q}} f^{-p \cdot m_f}$, $p \in \mathbb{Z}$ такое, что $f^{-p \cdot m_f}(\tilde{Q}_k) = \tilde{Q}$.

Покажем, что $H_{\tilde{O}_k}$ удовлетворяет условию $H_{\tilde{O}_k} f^{m_f} = f'^{m_f} H_{\tilde{O}_k}$. Так как $H_{\tilde{O}} f^{m_f} = f'^{m_f} H_{\tilde{O}}$, то распишем $H_{\tilde{O}_{k^*}} f^{m_f} = f'^{p \cdot m_f} H_{\tilde{O}_k} f^{-p \cdot m_f} f = f'^{p \cdot m_f} H_{\tilde{O}_k} f^{m_f} f^{-p \cdot m_f} = f'^{p \cdot m_f} f'^{m_f} H_{\tilde{O}_k} f^{-p \cdot m_f} = f'^{m_f} f'^{p \cdot m_f} H_{\tilde{O}_k} f^{-p \cdot m_f} = f'^{m_f} H_{\tilde{O}_k}$.

Определим гомеоморфизм $\tilde{h} : M^2 \setminus \bigcap\limits_{\sigma \in \Omega_1} W^s_\sigma \to M^2 \setminus \bigcap\limits_{\sigma' \in \Omega_1} W^s_{\sigma'}$, так что $\tilde{h}$ совпадает с h_ω для всех $\omega \in \Omega_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится понятие схемы диффеоморфизма, введенное в [2].

Положим $V_f = W^s_{\Omega_0} \setminus \Omega_0$ - пространство орбит диффеоморфизма f, названное в [2] характеристическим многообразием и $\hat{V}_f = V_f / f$ - характеристическим пространством орбит для диффеоморфизма f. В силу [2] (предложение 2.1.5, теорема 2.1.3) многообразие $\hat{V}_f$ гомеоморфно двумерному тору $\mathbb{T}^2$. Обозначим через $p_{\hat{V}_f} : V_f \to \hat{V}_f$ естественную проекцию, являющуюся накрытием, индуцирущим отображение $\zeta_f : \pi_1(\hat{V}_f) \to \mathbb{Z}$, которое состоит из нетривиальных гомоморфизмов в группу $\mathbb{Z}$ на фундаментальной группе каждого тора из множества $\hat{V}_f$.

Для любой седловой точки $\sigma \in \Omega_1$ положим $\hat{W}^u_\sigma = p_{\hat{V}_f}(W^u_\sigma \setminus \sigma)$ и $\mathbb{W}^u_f = \bigcup_{\sigma \in L_{\Omega_1}} W^u_\sigma$ и введем автоморфизм $\varphi_f = p_{\hat{V}_f} f p^{-1}_{\hat{V}_f} : \hat{V}_f \to \hat{V}_f$.

Набор $S_f = (\hat{V}_f, \mathbb{W}^u_f, \zeta_f, \varphi_f)$ назовем схемой диффеоморфизма f.

О п р е д е л е н и е 4.1. *Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов назовем эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \to \hat{V}_{f'}$, такой что:*

1. $\zeta_f([c]) = \zeta_{f'}([\hat{\varphi}(c)])$ *для любой замкнутой кривой* $c \subset \hat{V}_f$
2. *для любой седловой точки* $\sigma \in \Omega_1$ *существует* $\sigma' \in \Omega'_1$, *такая что* $\widehat{\varphi}(\hat{W}^u_\sigma) = \hat{W}^u_{\sigma'}$;
3. $\hat{\varphi}\hat{\varphi}_f = \hat{\varphi}_{f'}\hat{\varphi}$

Следующая лемма устанавливает взаимосвязь схемы и трехцветного графа:

Л е м м а 4.4. *Если диффеоморфизмы f, f' имеют изоморфные трехцветные графы T_f, T'_f, то их схемы S_f, $S_{f'}$ эквивалентны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 4.3. существует гомеоморфизм $\tilde{h} : M^2 \setminus \bigcup\limits_{\sigma \in \Omega_1} W^s_\sigma \to M^2 \setminus \bigcup\limits_{\sigma' \in \Omega_1} W^s_{\sigma'}$, сопрягающий ограничения диффеоморфизмов на этих множества. Отображение $\hat{\varphi} = p'_{\hat{V}_{f'}} \tilde{h} p^{-1}_{\hat{V}_f}$ является гомеоморфизмом, осуществляющим эквивалентность схем $\hat{V}_f$ и $\hat{V}_{f'}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Обратимся к лемме 4.5., доказанной в книге [2].

Л е м м а 4.5. *Диффеоморфизмы $f, f' \in G$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы S_f и $S_{f'}$ эквивалентны.*

Теперь доказательство достаточности условий теоремы 1.1. следует из лемм 4.4., 4.5.

Список литературы

1. Безденежных А. Н., Гринес В. З., “Динамические свойства и топологическая классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях”, *Методы качественной теории дифференциальных уравнений: межвуз. тематич. сб. науч. тр.*. Т. Ч. 2, ред. Е. А. Леонтович-Андронова, ГГУ, Горький, 1987, 24–32.

2. Гринес В. З., Починка О. В, *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ Регулярная и хаотическая динамика, Ижевский институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.

3. Леонтович Е., Майер А. О, “О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории”, *Доклады академии наук СССР*, **4**, 103 (1955), 557–560.

4. Ошемков А. А., Шарко В. В., “О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях”, *Математический сборник*, **8**, 189 (1998), 93-140.

5. Peixoto M. M., “On the classification of flows on 2-manifolds”, *Dynamical systems*, 1973, 389-419.

6. Капкаева С. Х., “О топологической сопряженности градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей посредством трехцветного графа”, *Журнал СВМО*, **4**, 14 (2012), 34-43.

On classification of gradient-like diffeomorphisms on surfaces by means automorphisms of three-color graphs.

© V. Z. Grines[7], S. H. Kapkaeva[8]

Abstract. This article is a continuation of the paper [6], in which the conditions of topological conjugacy of gradient-like diffeomorphisms are found, under suggestion that wandering set consists of only fixed points. In this paper we consider the class of orientation preserving gradient-like diffeomorphisms whose nonwandering set admits an existence of periodic orbits of period greater than one. To each diffeomorphism we appreciate three-color graph equipped by an automorphism given on the set of vertices of the graph. It is stated that all vertices of the graph have the same period under action of the automorphism. It is proved that the three-color graph equipped with the automorphism, is a complete topological invariant in the considered class of diffeomorphisms
Key Words: Morse-Smale diffeomorphisms, gradient-like diffeomorphisms, topological conjugate diffeomorphisms, three-color graph.

[7] Professor, Lobachevsky State University of Nizhni Novgorod, Nizhni Novgorod; vgrines@yandex.ru.
[8] Student, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; kapkaevasvetlana@yandex.ru.

УДК 517.938

Об одной модели быстрого кинематического динамо

© Е. В. Жужома[1] , В. С. Медведев[2], А. Е. Шишенкова[3]

Аннотация. В статье строится диффеоморфизм, имеющий положительную энтропию и сохраняющий объем, трехмерной сферы. При этом, в пространстве консервативных диффеоморфизмов имеется окрестность, в которой диффеоморфизмы имеют положительную топологическую энтропию.

Ключевые слова: Топологическая энтропия, консервативный диффеоморфизм, кинематическое динамо, динамика магнитных полей

Предметом теории кинематического динамо является происхождение магнитных полей в электропроводящих средах, которые играют большую роль в динамике астрофизических процессов [3]. Одним из аспектов быстрого кинематического динамо является изучение движений жидкости, которые вызывают экспоненциальный рост магнитного поля при малой магнитной диффузии [2]. В упрощенной форме вопрос сводится к существованию консервативного диффеоморфизма $f : M \to M$ риманова многообразия M такого, что энергия магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$, заданного на M, растет экспоненциально под действием итераций диффеоморфизма f. При этом предполагается, что магнитная вязкость, входящая в соответствующее уравнение диффузии, достаточно близка к нулю, и мы также должны учитывать процесс рассеивания магнитного поля, которое формально представляется как решение уравнения диффузии. Для типичных магнитных полей известно, что условия, связанные с диффузией (при малой магнитной вязкости) выполняются, если диффеоморфизм f достаточно хаотичен (например, имеет ненулевую топологическую энтропию) [7].

В статье строится диффеоморфизм, имеющий положительную энтропию и сохраняющий объем, трехмерной сферы. При этом, в пространстве консервативных диффеоморфизмов имеется окрестность, в которой диффеоморфизмы имеют положительную топологическую энтропию.

Рассмотрим на декартовой плоскости $\mathbb{R}^2$ круг $D^2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 1\}$, и отображение $w : D^2 \to \mathbb{R}^2$, образующее подкову Смейла [10]. Именно, отображение w есть композиция сжатия вдоль оси Ox, растяжения вдоль оси Oy, сгибания (непринципиально, в какую сторону) полученного эллипса и сдвига так, чтобы пересечение $D^2 \cap w(D^2)$ представляло собой объединение двух непересекающихся полос, симметричных относительно оси Oy.

Известно [1], [9], что w можно продолжить до отображения всей плоскости $\mathbb{R}^2$ так, чтобы это продолжение было тождественным вне некоторой окрестности круга D^2. Ясно, что за счет сжатия и растяжения можно добиться того, чтобы якобиан $J(w)$ отображениям w на D^2 равнялся $\frac{1}{2}$. Далее мы будем предполагать эти условия выполненными.

Обозначим через $sh_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ сдвиг $(x;y) \longrightarrow (x+\frac{1}{2};y)$ вдоль оси Ox, и через $S_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ – центральную симметрию относительно начала координат $(0;0)$, $S_0(x;y) = (-x;-y)$. Снова за счет сжатия-растяжения и сгиба можно добиться выполнения следующих условий:

---

[1] Профессор кафедры математического анализа, теории и методики обучения, Нижегородский государственный педагогический университет, Нижний Новгород; zhuzhoma@mail.ru.

[2] Старший научный сотрудник кафедры математического анализа, НИИ ПМК при ННГУ им. Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; medvedev@unn.ac.ru

[3] Доцент кафедры высшей математики, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

1. пересечение $D^2 \cap sh_0 \circ w(D^2)$ состоит из двух непересекающихся полос;

2. $w(D^2) \cap (S_0 \circ w(D^2)) = \emptyset$.

Первое условие означает, что отображение $sh_0 \circ w = w_0$ образует подкову Смейла. Второе условие означает, что подкова $w(D^2)$ не пересекается со своим образом относительно центральной симметрии S_0. Отметим, что $S_0 \circ w(D^2)$ также образует конфигурацию подковы.

Обозначим через $R_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ вращение

$$\begin{cases} \bar{x} &= x \cos \pi t - y \sin \pi t \\ \bar{y} &= x \sin \pi t + y \cos \pi t \end{cases}$$

плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол πt против часовой стрелки. Положим

$$w_t = R_{2t} \circ w_0 \circ R_{-t} : D^2 \to \mathbb{R}^2.$$

Это отображение можно интерпретировать как образование подковы в направлении, перпендикулярном прямой $y = \tan \pi t \cdot x$, с последующим поворотом R_t на угол πt против часовой стрелки.

Пусть $S^1 = [0;1]/(0 \sim 1)$ – окружность, наделенная естественной параметризацией $[0;1] \to [0;1]/(0 \sim 1) = S^1$. Отображение $E_2 : S^1 \to S^1$ вида $t \to 2t \; mod, 1$ является растягивающимся эндоморфизмом окружности степени два [8]. Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ вложенный полноторий $S^1 \times D^2 \subset \mathbb{R}^3$, и отображение $F : S^1 \times D^2 \to \mathbb{R}^3$ вида

$$(t; (x; y)) \longmapsto (E_2(t); w_t(x; y)), \qquad t \in S^1, \quad (x; y) \in D^2.$$

Положим $D_t = \{t\} \times D^2 \subset S^1 \times D^2$, $\mathbb{R}^2_t = \{t\} \times \mathbb{R}^2$. В силу определения отображения F,

$$F(D_t) \subset \mathbb{R}^2_{E_2(t)} = \mathbb{R}^2_{2t \, mod \, 1}.$$

Лемма 1.6. *Отображение $F : S^1 \times D^2 \to F(S^1 \times D^2)$ является диффеоморфизмом на свой образ.*

Доказательство. Предположим, что $F(t_1; z_1) \cap F(t_2; z_2) \neq \emptyset$. Тогда $F(D_{t_1}) \cap F(D_{t_2}) \neq \emptyset$. Из определения F вытекает равенство $E_2(t_2) = E_2(t_1)$, то есть, $2t_1 \; mod \; 1 = 2t_2$. Так как отображение w_t является диффеоморфизмом на свой образ, то $t_1 \neq t_2$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $t_2 = t_1 + \frac{1}{2}$. Имеем, $F(D_{t_1}) = R_{2t_1} \circ w_0 \circ R_{-t_1}(D_{t_1})$,

$$F(D_{t_2}) = F(D_{t_1 + \frac{1}{2}}) = R_{2t_1 + 1} \circ w_0 \circ R_{-t_1 - \frac{1}{2}}(D_{t_1}) = R_1 \circ R_{2t_1} \circ w_0 \circ R_{-t_1 - \frac{1}{2}}(D_{t_1}).$$

Поскольку R_1 есть поворот на угол π, то подковы $F(D_{t_1})$ и $S_0 \circ F(D_{t_1})$ должны пересекаться, что противоречит условию 2.

Доказательство закончено.

Отметим, что поскольку якобиан $J(w)$ отображениям w на D^2 равен $\frac{1}{2}$, то якобиан отображения F равен $J(F) = J(w) \cdot DE_2 = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. Поэтому F является консервативным диффеоморфизмом на свой образ. Стандартным образом пополним пространство $\mathbb{R}^3$ бесконечно удаленной точкой $\{\infty\}$ так, что объединение $\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ отождествляется с 3-мерной сферой S^3.

Из техники, развитой в работах [4], [5], вытекает, что f продолжается до диффеоморфизма сферы $f : S^3 \to S^3$, причем можно продолжение осуществить так, чтобы сохранялось свойство консервативности.

Полноторий $S^1 \times D^2$, вложенный в S^3, будем называть *базовым*, и обозначим через $\mathcal{B}$. Положим

$$\Omega = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} f(\mathcal{B}).$$

Множество Ω инвариантно относительно f [1] и не пусто, поскольку содержит в $D_0 = \{0\} \times D^2 \subset \mathcal{B}$ инвариантное нетривиальное (нульмерное) множество Ω_0 подковы Смейла [**??**]. Обозначим через $Diff^1(S^3)$ пространство диффеоморфизмов 3-сферы S^3, наделенное C^1 топологией.

Лемма 1.7. *Множество Ω гиперболическое, и ограничение $f|_\Omega$ диффеоморфизма f на Ω имеет положительную (топологическую) энтропию. Более того, в пространстве $Diff^1(S^3)$ имеется окрестность $U(f)$ диффеоморфизма f такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ имеет гиперболическое инвариантное множество $\Omega_g \subset \mathcal{B}$, причем диффеоморфизмы $f|_\Omega$, $g|_{\Omega_g}$ сопряжены и ограничение $g|_{\Omega_g}$ имеет положительную энтропию.*

Доказательство. По построению, якобиан отображения $f|_\mathcal{B} : S^1 \times D^2 \to \mathbb{R}^3$ равен $J(f) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Поэтому f имеет гиперболическую структуру (не только на Ω) на $\mathcal{B}$. Отсюда следует, что множество Ω гиперболическое. Известно, что ограничение $f|_{\Omega_0} : \Omega_0 \to \Omega_0$ имеет положительную энтропию [1]. Отсюда и [6] вытекает, что ограничение $f|_\Omega$ также имеет положительную энтропию. Поскольку гиперболические множества обладают устойчивостью относительно малых C^1 возмущений, то существует окрестность $U(f)$ с требуемыми свойствами, так как энтропия является инвариантом сопряженности.
Доказательство закончено.

В заключение рассмотрим на $S^1 \times D^2$ магнитное поле $\vec{\boldsymbol{B}}$, образованное единичными векторами, которые являются касательными векторами к кривым $S^1 \times \{z\}$, $z \in D^2$. Кривые $S^1 \times \{z\}$ считаются ориентированными в направлении возрастания параметра. Ясно, что $\vec{\boldsymbol{B}}$ можно продолжить на всю сферу S^3 до единичного (и, следовательно, бездивергентного) векторного поля. Мы предполагаем, что $\vec{\boldsymbol{B}}$ имеет нулевую диффузию (то есть, рассеивание магнитной энергии не происходит). Так как эти кривые $S^1 \times \{z\}$ под действием f растягиваются в два раза, то под действием f поле $\vec{\boldsymbol{B}}$ переходит в поле $f_*(\vec{\boldsymbol{B}})$ со следующим свойством: существует постоянная $\lambda > 1$ такая, что векторы поля $f_*(\vec{\boldsymbol{B}})$ имеют длину не менее, чем в λ раз большую нежели длина векторов поля $\vec{\boldsymbol{B}}$. Аналогичное свойство имеет место для длин векторов поля $f_*^{n+1}(\vec{\boldsymbol{B}})$ относительно поля $f_*^n(\vec{\boldsymbol{B}})$. Если не учитывать диссипацию энергии, то отсюда следует, что энергия векторного поля $f_*^n(\vec{\boldsymbol{B}})$ растет экспоненциально с показателем $\ln\lambda > 0$. Таким образом, диффеоморфизм $f : S^3 \to S^3$ является быстрым недиссипативным кинематическим динамо относительно магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$. С другой стороны, в работе [7] доказано, что для типичных магнитных полей с ненулевой (топологической) энтропией энергия также растет экспоненциально с учетом диссипации энергии при неограниченно большом магнитном числе Рейнольдса (т.е., при сколь угодно малой магнитной вязкости). Отсюда и леммы 1.7. следует, что существует близкий к f (в C^1 топологии) диффеоморфизм $f_0 : S^3 \to S^3$, который является быстрым (диссипативным) кинематическим динамо относительно магнитного поля $\vec{\boldsymbol{B}}$.

Авторы благодарят РФФИ, грант 12-01-00672-а, за финансовую поддержку.

Список литературы

1. Аносов Д.В., Солодов В.В., “Гиперболические множества. В сб. серии «Современные проблемы математики»”, *Фундаментальные направления (Итоги науки и техники)*, **66** (1991), 12–99.

2. Арнольд В.И., Хесин Б.А., *Топологические методы в гидродинамике*, МЦНМО, М., 2007.

3. Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б., “О происхождении магнитных полей в астрофизике (Турбулентные механизмы "динамо")”, *Успехи физ. наук*, **106** (1972), 431–457.

4. Жужома Е.В., Исаенкова Н.В., “О нульмерных соленоидальных базисных множествах”, *Матем. сб.*, **202 3** (2011), 47–68.

5. Bothe H., “The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds”, *Math. Nachr.*, **112** (1983), 69–102.

6. Bowen R., “Topological entropy and Axiom A.”, *Global Analysis, Proc. Sympos. Pure Math., Amer. Math. Soc.*, **14** (1970), 23–42.

7. Klapper I., Young L.-S., “Rigorous bounds of the fast dynamo growth rate involving topological entropy”, *Comm. Math. Phys.*, **173** (1975), 623–646.

8. Shub M., “Endomorphisms of compact differentiable manifolds”, *Amer. Journ. Math.*, **91** (1969), 175–199.

9. Smale S., “Diffeomorphisms with many periodic points”, *Differential and Combinatorial Topology*, 1965, 63–80.

10. Smale S., “Differentiable dynamical systems”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 741–817.

A model of fast kinematic dynamo

© E.V. Zhuzhoma[4], V.S. Medvedev[5], A. E. Shishenkova[6]

Abstract. We construct a diffeomorphism having a positive entropy, and the stored volume, three-dimensional sphere. Thus, in the space conservative diffeomorphisms of a neighborhood in which the diffeomorphisms have positive topological entropy.

Key Words: Topological entropy, a conservative diffeomorphism, kinematic dynamo, dynamics of magnetic fields

[4] Professor of mathematical analysis, theory and methodology of training, Nizhny Novgorod State Pedagogical University, Nizhny Novgorod; zhuzhoma@mail.ru.

[5] Senior Staff Scientist, Institute of Applied Mathematics and Cybernetics, Nizhny Novgorod; medvedev@unn.ac.ru.

[6] Assistant professor of department of higher mathematic, Agriculture Academy of Nizhniy Novgorod, Nizhnii Novgorod, vgrines@yandex.ru

УДК УДК

Доказательство теоремы о локальной разрешимости квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины

© С. Н. Алексеенко[1], Л. Е. Платонова[2]

Аннотация. Для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка с начальными условиями, заданными в декартовых координатах, доказана теорема локальной разрешимости задачи Коши. Теорема не включает в себя условных предположений о характере поведения характеристик.

Ключевые слова: квазилинейное дифференциальное уравнение первого порядка, задача Коши, метод дополнительного аргумента.

Основным объектом исследования в данной работе является квазилинейное уравнение в частных производных первого порядка

$$a_1(x_1, x_2, z)\partial_1 z + a_2(x_1, x_2, z)\partial_2 z = f(x_1, x_2, z), \tag{1.1}$$

где $\partial_i z = \frac{\partial z}{\partial x_i}$, $i = 1, 2$, a_1, a_2, f – непрерывно дифференцируемые функции. Решение ищется в некоторой окрестности линии L, которая задается уравнением $x_2 = \varphi(x_1)$, $-\infty < x_1 < +\infty$. Соответственно, задача Коши ставится следующим образом:

$$z|_L = \gamma(x_1), \quad x_1 \in (-\infty; +\infty). \tag{1.2}$$

Функции $\varphi(x_1)$, $\gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty; +\infty)$, где $\overline{C}^2(-\infty; +\infty)$ – множество дважды непрерывно дифференцируемых функций, ограниченных вместе со своими 1-ой и 2-ой производными на $(-\infty; +\infty)$. Пусть $N_\gamma = \max\limits_{(-\infty;+\infty)} |\gamma(x_1)|$.

В рамках данной работы рассмотрен случай, когда линия L и область определения неизвестной функции $z(x_1, x_2)$ содержится во множестве

$$\Omega_\beta = \left\{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty, \min_{(-\infty;+\infty)}(\varphi(x_1) - \beta_0) \leqslant x_2 \leqslant \max_{(-\infty;+\infty)}(\varphi(x_1) + \beta_0)\right\}, \beta_0 \in \mathbb{R}.$$

Принципиальная особенность изучаемой задачи состоит в том, что наряду с поиском неизвестной функции $z(x_1, x_2)$ ищется и область определения решения. Соответственно, постоянная β_0 должна быть достаточно велика, чтобы искомая область определения $z(x_1, x_2)$ входила в Ω_β. Обозначим эту заранее неизвестную область определения решения задачи (1.1), (1.2) через Ω_ε. Так как в данной статье речь идет о локальной разрешимости, то область Ω_ε представляет собой некоторую окрестность кривой L. Примем для определенности, что все заданные функции a_1, a_2, f определены в области $Q_\rho = \Omega_\beta \times [-\rho N_\gamma, \rho N_\gamma]$, где коэффициент ρ выбирается исходя из вида функций a_1, a_2, f. Сформулируем условия на L, при выполнении которых справедливы нижеприведенные выкладки и утверждения.

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева, г. Н.Новгород; sn-alekseenko@yandex.ru

[2] Старший преподаватель кафедры математического анализа, теории и методики обучения математике, Нижегородский государственный педагогический университет имени К.Минина, г. Н.Новгород; fluff13@yandex.ru

Область определения решения Ω_ε будем искать в виде полосы шириной ε в направлении Ox_2, прилегающей к L с одной стороны, точнее

$$\Omega_\varepsilon = \{(x_1, x_2) : -\infty < x_1 < +\infty,\ \varphi(x_1) \leqslant x_2 \leqslant \varphi(x_1) + \varepsilon\}, \Omega_\varepsilon \subset \Omega_\beta.$$

Параметр ε подлежит определению, ограничение на величину ε является одним из основных условий разрешимости задачи (1.1), (1.2). А возможность определения ε "конструктивно", исходя из данных задачи, представляет собой одно из основных преимуществ метода дополнительного аргумента.

В работе [5] для задачи Коши (1.1), (1.2) с помощью метода дополнительного аргумента [1], [3] была разработана схема, позволяющая свести вопрос о разрешимости задачи (1.1), (1.2) в исходных координатах к определению интервала разрешимости системы 15 интегральных уравнений вида

$$U(s, x_1, x_2) = \gamma(W_2(x_1, x_2)) + \int\limits_0^s f(x_1 - \mu_1, H_2(\delta, x_1, x_2), U(\delta, x_1, x_2))\, d\delta, \tag{1.3}$$

$$U_1 = \gamma'(W_2(x_1, x_2)) W_{21} + \int\limits_0^s (f_1(1 - \mu_{11}) + f_2 H_{21} + f_U U_1)\, d\delta, \tag{1.4}$$

$$U_2 = \gamma'(W_2(x_1, x_2)) W_{22} + \int\limits_0^s (f_1(-\mu_{12}) + f_2 H_{22} + f_U U_2)\, d\delta, \tag{1.5}$$

$$\mu_1 = \int\limits_s^{W_1(x_1,x_2)} a_1(x_1 - \mu_1, H_2, U(\delta, x_1, x_2))\, d\delta, \tag{1.6}$$

$$H_2 = x_2 - \int\limits_s^{W_1(x_1,x_2)} a_2(x_1 - \mu_1, H_2, U(\delta, x_1, x_2))\, d\delta, \tag{1.7}$$

$$\mu_{11} = a_1 W_{11} + \int\limits_s^{W_1(x_1,x_2)} (a_{11}(1 - \mu_{11}) + a_{12} H_{21} + a_{1U} U_1)\, d\delta, \tag{1.8}$$

$$\mu_{12} = a_1 W_{12} + \int\limits_s^{W_1(x_1,x_2)} (a_{11}(-\mu_{12}) + a_{12} H_{22} + a_{1U} U_2)\, d\delta, \tag{1.9}$$

$$H_{21} = -a_2 W_{11} - \int\limits_s^{W_1(x_1,x_2)} (a_{21}(1 - \mu_{11}) + a_{22} H_{21} + a_{2U} U_1)\, d\delta, \tag{1.10}$$

$$H_{22} = 1 - a_2 W_{12} - \int\limits_s^{W_1(x_1,x_2)} (a_{21}(-\mu_{12}) + a_{22} H_{22} + a_{2U} U_2)\, d\delta, \tag{1.11}$$

$$W_1 = \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12} dx_2, \tag{1.12}$$

$$\mu_2 = \int\limits_0^{W_1(x_1,x_2)} a_1(x_1 - \mu_1, H_2, U(\delta, x_1, x_2))\, d\delta, \tag{1.13}$$

$$W_{11} = J^{-1}\Bigg(-\varphi' + \int\limits_0^{W_1(x_1,x_2)} \Big(\varphi'\left(a_{11}(1-\mu_{11}) + a_{12}H_{21} + a_{1U}U_1\right) - \\ - \left(a_{21}(1-\mu_{11}) + a_{22}H_{21} + a_{2U}U_1\right)\Big)d\delta\Bigg), \tag{1.14}$$

$$W_{12} = J^{-1}\Bigg(1 + \int\limits_0^{W_1(x_1,x_2)} \Big(\varphi'\left(a_{11}(-\mu_{12}) + a_{12}H_{22} + a_{1U}U_2\right) - \\ - \left(a_{21}(-\mu_{12}) + a_{22}H_{22} + a_{2U}U_2\right)\Big)d\delta\Bigg), \tag{1.15}$$

$$1-\mu_{21} = J^{-1}\Bigg(a_2 + \int\limits_0^{W_1(x_1,x_2)} \Big(a_1\left(a_{21}(1-\mu_{11}) + a_{22}H_{21} + a_{2U}U_1\right) - \\ - a_2\left(a_{11}(1-\mu_{11}) + a_{12}H_{21} + a_{1U}U_1\right)\Big)d\delta\Bigg), \tag{1.16}$$

$$-\mu_{22} = J^{-1}\Bigg(-a_1 + \int\limits_0^{W_1(x_1,x_2)} \Big(a_1\left(a_{21}(-\mu_{12}) + a_{22}H_{22} + a_{2U}U_2\right) - \\ - a_2\left(a_{11}(-\mu_{12}) + a_{12}H_{22} + a_{1U}U_2\right)\Big)d\delta\Bigg). \tag{1.17}$$

В системе (1.3) – (1.17), которая была названа в [5] резольвентной, U, U_1, U_2, μ_1, H_2, μ_{11}, μ_{12}, H_{21}, H_{22}, W_1, W_{11}, W_{12}, μ_2, μ_{21} μ_{22} новые неизвестные функции.

В работе [5] анонсирована теорема о существовании и единственности решения задачи Коши (1.1), (1.2), в которой сформулирован весь используемый набор условий.

Теорема 1.1. *Пусть* $a_1(x_1,x_2,z)$, $a_2(x_1,x_2,z)$, $f(x_1,x_2,z)$ *непрерывно дифференцируемые функции по всем аргументам в области* Q_ρ *;* L *— линия, несущая начальные данные:* $x_2 = \varphi(x_1)$ *;* $\varphi(x_1), \gamma(x_1) \in \overline{C}^2(-\infty;+\infty)$ *; выполнено основное условие разрешимости* $|J| \geq K_J$ *. Тогда существует такое число* $\varepsilon_0 > 0$ *, что при* $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ *, задача Коши* (1.1), (1.2) *имеет единственное решение* $z \in \overline{C}^1(\Omega_\varepsilon)$ *, которое при* $s = \omega$ *совпадает с функцией* $u(s,x_1,x_2) = U(s,x_1,x_2)$ *, определяемой из резольвентной системы* (1.3) *–* (1.17).

Замечание 1.1. $\varepsilon_0 = \min\left(\dfrac{9}{10\,(10\zeta_1\sigma_1+\sigma_2)}; \dfrac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \dfrac{10\zeta_1}{\xi_1+10\zeta_1\xi_2}; \dfrac{10\zeta_1}{\xi_3+10\zeta_1\xi_2}\right)$,

$$\zeta_1 = K_0\left(K_{\varphi'}+1\right) + K_0\left(K_{a_1}+K_{a_2}\right)\left(1+K_{\varphi'}+K_{\gamma'}\right) + 2 + X_2 + N_\gamma,$$
$$\sigma_1 = K_0\left(M_{a_1}K_{\varphi'}+M_{a_2}\right)\left(K_{a_1}+K_{a_2}+1\right) + K_{\gamma'}K_0\left(M_{a_2}K_{a_1}+M_{a_1}K_{a_2}\right) + M_{a_1} + M_{a_2} + M_f,$$
$$\sigma_2 = K_{a_1}+K_{a_2}+K_f,\ \xi_1 = cK_{\varphi'}\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)K_{a_1}+K_{a_2}\right) + 10\zeta_1\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)K_{a_{11}}+K_{f_1}+K_{a_{21}}\right),$$
$$\xi_2 = 10\zeta_1\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)M_{a_1}+M_{a_2}+M_f\right), \xi_3 = c\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)K_{a_1}+K_{a_2}\right),$$
$$J = a_2 - a_1\varphi',\ K_J = K_0^{-1}.$$

Содержащиеся в формулировке теоремы и в замечании к ней константы определены ниже как максимумы известных функций и их производных. Данная статья посвящена доказательству теоремы, анонсированной в [5].

В силу установленного в [5] факта, что функция, определяемая из резольвентной системы (1.3) – (1.17), при $s = W_1$ дает решение задачи (1.1), (1.2), для доказательства теоремы надо установить существование решения резольвентной системы интегральных уравнений, его единственность.

С этой целью воспользуемся методом последовательных приближений. За начальные приближения возьмем: $H_1^0 = x_1$, $H_2^0 = x_2$, $U^0 = \gamma\left(W_2^0\right)$, $W_1^0 = 0$, $W_2^0 = x_1$, $H_{11}^0 = 1$, $H_{12}^0 = 0, H_{21}^0 = 0, H_{22}^0 = 1, U_1^0 = \gamma'$, $U_2^0 = 0, W_{11}^0 = 0, W_{12}^0 = 0, W_{21}^0 = 1$, $W_{22}^0 = 0$.

Перед тем, как записать последовательные приближения к резольвентной системе, условимся верхним индексом "n" обозначать, что у известных функций, зависящих от искомых функций как от аргументов, вместо искомых функций взяты их n - ые итерации. Кроме этого в верхнем пределе интегрирования вместо W_1^n будем писать $W_1\backslash n$. С учетом этих соглашений

$$\mu_1^{n+1} = \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} a_1^n d\delta, \tag{1.18}$$

$$H_2^{n+1} = x_2 - \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} a_2^n d\delta, \tag{1.19}$$

$$U^{n+1} = \gamma\left(x_1 - \mu_2^{n+1}\right) + \int\limits_0^s f^n d\delta, \tag{1.20}$$

$$W_1^{n+1} = \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}^n dx_2, \tag{1.21}$$

$$\mu_2^{n+1} = \int\limits_0^{W_1\backslash n+1} a_1^n d\delta, \tag{1.22}$$

$$1 - \mu_{11}^{n+1} = 1 - a_1^{n+1} W_{11}^{n+1} - \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} \left(a_{11}^n\left(1 - \mu_{11}^n\right) + a_{12}^n H_{21}^n + a_{1U}^n U_1^n\right) d\delta, \tag{1.23}$$

$$\mu_{12}^{n+1} = a_1^{n+1} W_{12}^{n+1} + \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} \left(a_{11}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{12}^n H_{22}^n + a_{1U}^n U_2^n\right) d\delta, \tag{1.24}$$

$$H_{21}^{n+1} = -a_2^{n+1} W_{11}^{n+1} - \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} \left(a_{21}^n\left(1 - \mu_{11}^n\right) + a_{22}^n H_{21}^n + a_{2U}^n U_1^n\right) d\delta, \tag{1.25}$$

$$H_{22}^{n+1} = 1 - a_2^{n+1} W_{12}^{n+1} - \int\limits_s^{W_1\backslash n+1} \left(a_{21}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{22}^n H_{22}^n + a_{2U}^n U_2^n\right) d\delta, \tag{1.26}$$

$$U_1^{n+1} = \gamma'\left(x_1 - \mu_2^{n+1}\right) \cdot \left(1 - \mu_{21}^{n+1}\right) + \int\limits_0^s \left(f_1^n\left(1 - \mu_{11}^n\right) + f_2^n H_{21}^n + f_U^n U_1^n\right) d\delta, \tag{1.27}$$

$$U_2^{n+1} = \gamma'\left(x_1 - \mu_2^{n+1}\right) \cdot \left(-\mu_{22}^{n+1}\right) + \int\limits_0^s \left(f_1^n\left(-\mu_{12}^n\right) + f_2^n H_{22}^n + f_U^n U_2^n\right) d\delta, \tag{1.28}$$

$$\begin{gathered} W_{11}^{n+1} = \Big(J_{n+1}\Big)^{-1}\Big(-\varphi'\left(\mu_2^{n+1}\right) + \int\limits_0^{W_1\backslash n+1} \Big(\varphi'\left(\mu_2^n\right)\left(a_{11}^n\left(1-\mu_{11}^n\right) + a_{12}^n H_{21}^n + a_{1U}^n U_1^n\right) - \\ - \left(a_{21}^n\left(1-\mu_{11}^n\right) + a_{22}^n H_{21}^n + a_{2U}^n U_1^n\right)\Big) d\delta\Big), \end{gathered} \tag{1.29}$$

$$\begin{gathered} W_{12}^{n+1} = \Big(J_{n+1}\Big)^{-1}\Big(1 + \int\limits_0^{W_1\backslash n+1} \Big(\varphi'\left(\mu_2^n\right)\left(a_{11}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{12}^n H_{22}^n + a_{1U}^n U_2^n\right) - \\ - \left(a_{21}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{22}^n H_{22}^n + a_{2U}^n U_2^n\right)\Big) d\delta\Big) \end{gathered} \tag{1.30}$$

$$\begin{gathered} 1 - \mu_{21}^{n+1} = \Big(J_{n+1}\Big)^{-1}\Big(a_2^{n+1} + \int\limits_0^{W_1\backslash n+1} \Big(a_1^n\left(a_{21}^n\left(1-\mu_{11}^n\right) + a_{22}^n H_{21}^n + a_{2U}^n U_1^n\right) - \\ - a_2^n\left(a_{11}^n\left(1-\mu_{11}^n\right) + a_{12}^n H_{21}^n + a_{1U}^n U_1^n\right)\Big) d\delta\Big), \end{gathered} \tag{1.31}$$

$$\begin{gathered} -\mu_{22}^{n+1} = \Big(J_{n+1}\Big)^{-1}\Big(-a_1^{n+1} + \int\limits_0^{W_1\backslash n+1} \Big(a_1^n\left(a_{21}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{22}^n H_{22}^n + a_{2U}^n U_2^n\right) - \\ - a_2^n\left(a_{11}^n\left(-\mu_{12}^n\right) + a_{12}^n H_{22}^n + a_{1U}^n U_2^n\right)\Big) d\delta\Big). \end{gathered} \tag{1.32}$$

Решение системы уравнений (1.3) – (1.17) в области Ω_ε будем искать в предположении $|U| \leqslant K_U$, и, кроме того, $|f| \leqslant K_f$, $|\gamma| \leqslant K_\gamma$. Пусть $\varepsilon = \max\limits_{x_1, x_2 \in \Omega_\varepsilon} |x_2 - \varphi(x_1)|$; $X_2 = \max\limits_{x_1 \in (-\infty;+\infty)} \{|\varphi(x_1) - \beta_0|, |\varphi(x_1) + \beta_0|\}$. С учетом того, что: $|a_i^m| \leqslant K_{ai}, |f^m| \leqslant K_f$, $\left|a_{ij}^m\right| \leqslant K_{aij}, \left|a_{iHj}^m\right| \leqslant K_{aiHj}$, $|a_{iU}^m| \leqslant K_{aiU}, |f_{Hi}^m| \leqslant K_{fHi}, |f_U^m| \leqslant K_{f_U}, |\gamma(\mu_2^m)| \leqslant N_\gamma, |\gamma'(\mu_2^m)| \leqslant$ $\leqslant K_{\gamma'}$, $|\varphi'(\mu_2^m)| \leqslant K_{\varphi'}, \dfrac{1}{|J_m|} = \dfrac{1}{|a_2^m - a_1^m \varphi'(\mu_2^m)|} \leqslant \dfrac{1}{K_{a_2} + K_{\varphi'} K_{a_1}} = K_0$, где $1 \leqslant m \leqslant n$. Обозначим $v^n = \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|W_{11}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|W_{12}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|\mu_1^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_2^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|U^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|1 - \mu_{11}^n| +$ $+ \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|\mu_{12}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_{21}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|H_{22}^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|U_1^n| + \max\limits_{\Omega_\varepsilon}|U_2^n|$,
$\zeta_1 = K_0\left(K_{\varphi'} + 1\right) + K_0\left(K_{a_1} + K_{a_2}\right)\left(1 + K_{\varphi'} + K_{\gamma'}\right) + 2 + X_2 + N_\gamma$, $\sigma_2 = K_{a_1} + K_{a_2} + K_f$,
$\sigma_1 = K_0\left(M_{a_1} K_{\varphi'} + M_{a_2}\right)\left(K_{a_1} + K_{a_2} + 1\right) + K_{\gamma'} K_0\left(M_{a_2} K_{a_1} + M_{a_1} K_{a_2}\right) + M_{a_1} + M_{a_2} + M_f$. Для каждого уравнения системы (1.18)–(1.32) выпишем оценки для последовательных прибли-

жений:

$$
\begin{gathered}
\left|\mu_1^{n+1}\right| \leqslant \left|W_1^{n+1}\right| K_{a_1},\\
\left|H_2^{n+1}\right| \leqslant X_2 + \left|W_1^{n+1}\right| K_{a_2},\\
\left|\mu_2^{n+1}\right| \leqslant \left|W_1^{n+1}\right| K_{a_1},\\
\left|U^{n+1}\right| \leqslant N_\gamma + \left|W_1^{n+1}\right| K_f,\\
\left|W_1^{n+1}\right| \leqslant \varepsilon \left\|W_{12}^n\right\|,\\
\left|1-\mu_{11}^{n+1}\right| \leqslant 1 + K_{a_1}\left|W_{11}^{n+1}\right| + M_{a_1}\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|1-\mu_{11}^n\right\| + \left\|H_{21}^n\right\| + \left\|U_1^n\right\|\right),\\
\left|\mu_{12}^{n+1}\right| \leqslant K_{a_1}\left|W_{12}^{n+1}\right| + M_{a_1}\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|\mu_{12}^n\right\| + \left\|H_{22}^n\right\| + \left\|U_2^n\right\|\right),
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
\left|H_{21}^{n+1}\right| \leqslant K_{a_2}\left|W_{11}^{n+1}\right| + M_{a_2}\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|1-\mu_{11}^n\right\| + \left\|H_{21}^n\right\| + \left\|U_1^n\right\|\right),\\
\left|H_{22}^{n+1}\right| \leqslant 1 + K_{a_2}\left|W_{12}^{n+1}\right| + M_{a_2}\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|\mu_{12}^n\right\| + \left\|H_{22}^n\right\| + \left\|U_2^n\right\|\right),\\
\left|U_1^{n+1}\right| \leqslant K_{\gamma'}\left|1-\mu_{21}^{n+1}\right| + M_f\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|1-\mu_{11}^n\right\| + \left\|H_{21}^n\right\| + \left\|U_1^n\right\|\right),\\
\left|U_2^{n+1}\right| \leqslant K_{\gamma'}\left|\mu_{22}^{n+1}\right| + M_f\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|\mu_{12}^n\right\| + \left\|H_{22}^n\right\| + \left\|U_2^n\right\|\right),\\
\left|W_{11}^{n+1}\right| \leqslant K_0K_{\varphi'} + K_0\left(K_{\varphi'}M_{a_1} + M_{a_2}\right)\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|1-\mu_{11}^n\right\| + \left\|H_{21}^n\right\| + \left\|U_1^n\right\|\right),\\
\left|W_{12}^{n+1}\right| \leqslant K_0 + K_0\left(K_{\varphi'}M_{a_1} + M_{a_2}\right)\left|W_1^{n+1}\right|\left(\left\|\mu_{12}^n\right\| + \left\|H_{22}^n\right\| + \left\|U_2^n\right\|\right),\\
\left|1-\mu_{21}^{n+1}\right| \leqslant K_0K_{a_2} + K_0\left|W_1^{n+1}\right|\left(K_{a_1}M_{a_2} + K_{a_2}M_{a_1}\right)\left(\left\|1-\mu_{11}^n\right\| + \left\|H_{21}^n\right\| + \left\|U_1^n\right\|\right),\\
\left|\mu_{22}^{n+1}\right| \leqslant K_0K_{a_1} + K_0\left|W_1^{n+1}\right|\left(K_{a_1}M_{a_2} + K_{a_2}M_{a_1}\right)\left(\left\|\mu_{12}^n\right\| + \left\|H_{22}^n\right\| + \left\|U_2^n\right\|\right).
\end{gathered}
$$

Складывая левые и правые части в получившихся неравенствах и учитывая введенные обозначения, получим: $v^{n+1} \leqslant \zeta_1 + \varepsilon\left(\sigma_1\left(v^n\right)^2 + \sigma_2 v^n\right)$. Потребуем, чтобы $\zeta_1 + \varepsilon\left(\left(10\zeta_1\right)^2\sigma_1 + 10\zeta_1\sigma_2\right) \leqslant 10\zeta_1$, тогда $\varepsilon \leqslant \dfrac{9}{10\left(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2\right)}$. Таким образом, если $v^n \leqslant 10\zeta_1$,то $v^{n+1} \leqslant \zeta_1 + \varepsilon\sigma_1\left(v^n\right)^2 + \varepsilon\sigma_2 v^n \leqslant 10\zeta_1$. То есть мы получили, что v^{n+1} — конечна при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \dfrac{9}{10\left(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2\right)}$, тогда из $\left|W_{11}^{n+1}\right| + \left|W_{12}^{n+1}\right| + \left|\mu_1^{n+1}\right| + \left|H_2^{n+1}\right| +$ $+ \left|U^{n+1}\right| + \left|1-\mu_{11}^{n+1}\right| + \left|\mu_{12}^{n+1}\right| + \left|H_{21}^{n+1}\right| + \left|H_{22}^{n+1}\right| + \left|U_1^{n+1}\right| + \left|U_2^{n+1}\right| \leqslant 10\zeta_1$ следует, что $\left|W_{11}^{n+1}\right|, \left|W_{12}^{n+1}\right|, \left|\mu_1^{n+1}\right|, \left|H_2^{n+1}\right|, \left|U^{n+1}\right|, \left|1-\mu_{11}^{n+1}\right|, \left|\mu_{12}^{n+1}\right|, \left|H_{21}^{n+1}\right|, \left|H_{22}^{n+1}\right|, \left|U_1^{n+1}\right|, \left|U_2^{n+1}\right|$ — ограничены, а значит, $\left|W_{11}^{n+1}\right|, \left|W_{12}^{n+1}\right|$ — ограничены. Тогда $\left|W_1^{n+1}\right| \leqslant \varepsilon\left\|W_{12}^{n+1}\right\|$, $\left|W_1^{n+1}\right| \leqslant 10\zeta_1\varepsilon$, а, следовательно, $\left|\mu_2^{n+1}\right| \leqslant 10\zeta_1\varepsilon K_{a_1}$.

Таким образом все рассматриваемые $n+1$-ые приближения ограничены в области Ω_ε, где $\varepsilon \leqslant \min\left(\dfrac{9}{10\left(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2\right)}; \dfrac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}\right)$. Мы получили, что последовательность, составленная из последовательных приближений ограничена в области Ω_ε.

Получим выражения для разности $n+1$ и n приближений для каждой из функций $\mu_1^n, H_2^n, 1-\mu_{11}^n, \mu_{12}^n, H_{21}^n, H_{22}^n, U^n, U_1^n, U_2^n, W_1^n, W_{11}^n, W_{12}^n, \mu_2^n, 1-\mu_{21}^n, \mu_{22}^n$. Получим систему из 15 неравенств, сложив которые будем иметь:

$$
\begin{aligned}
&\left|\mu_1^{n+1}-\mu_1^n\right| + \left|H_2^{n+1}-H_2^n\right| + \left|U^{n+1}-U^n\right| + \left|W_1^{n+1}-W_1^n\right| + \left|W_{11}^{n+1}-W_{11}^n\right| + \left|W_{12}^{n+1}-W_{12}^n\right| +\\
&+ \left|\mu_2^{n+1}-\mu_2^n\right| + \left|\mu_{21}^{n+1}-\mu_{21}^n\right| + \left|\mu_{22}^{n+1}-\mu_{22}^n\right| + \left|\mu_{11}^{n+1}-\mu_{11}^n\right| + \left|\mu_{12}^{n+1}-\mu_{12}^n\right| + \left|H_{21}^{n+1}-H_{21}^n\right| +\\
&+ \left|H_{22}^{n+1}-H_{22}^n\right| + \left|U_1^{n+1}-U_1^n\right| + \left|U_2^{n+1}-U_2^n\right| \leqslant \varepsilon\big(\chi_1\left\|\mu_1^n-\mu_1^{n-1}\right\| + \chi_2\left\|H_2^n-H_2^{n-1}\right\| +\\
&+ \chi_3\left\|U^n-U^{n-1}\right\| + \chi_4\left\|W_1^n-W_1^{n-1}\right\| + \chi_5\left\|W_{11}^n-W_{11}^{n-1}\right\| + \chi_6\left\|W_{12}^n-W_{12}^{n-1}\right\| +\\
&+ \chi_7\left\|\mu_2^n-\mu_2^{n-1}\right\| + \chi_8\left\|\mu_{21}^n-\mu_{21}^{n-1}\right\| + \chi_9\left\|\mu_{22}^n-\mu_{22}^{n-1}\right\| + \chi_{10}\left\|\mu_{11}^n-\mu_{11}^{n-1}\right\| + \chi_{11}\left\|\mu_{12}^n-\mu_{12}^{n-1}\right\| +\\
&+ \chi_{12}\left\|H_{21}^n-H_{21}^{n-1}\right\| + \chi_{13}\left\|H_{22}^n-H_{22}^{n-1}\right\| + \chi_{14}\left\|U_1^n-U_1^{n-1}\right\| + \chi_{15}\left\|U_2^n-U_2^{n-1}\right\|\big) \leqslant\\
&\leqslant \varepsilon\chi\big(\left\|\mu_1^n-\mu_1^{n-1}\right\| + \left\|H_2^n-H_2^{n-1}\right\| + \left\|U^n-U^{n-1}\right\| + \left\|W_1^n-W_1^{n-1}\right\| + \left\|W_{11}^n-W_{11}^{n-1}\right\| +\\
&+ \left\|W_{12}^n-W_{12}^{n-1}\right\| + \left\|\mu_2^n-\mu_2^{n-1}\right\| + \left\|\mu_{21}^n-\mu_{21}^{n-1}\right\| + \left\|\mu_{22}^n-\mu_{22}^{n-1}\right\| + \left\|\mu_{11}^n-\mu_{11}^{n-1}\right\| + \left\|\mu_{12}^n-\mu_{12}^{n-1}\right\| +
\end{aligned}
$$

$\left\|H_{21}^n - H_{21}^{n-1}\right\| + \left\|H_{22}^n - H_{22}^{n-1}\right\| + \left\|U_1^n - U_1^{n-1}\right\| + \left\|U_2^n - U_2^{n-1}\right\|\big)$, $\chi = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant 15} \chi_i$, где χ_i – постоянные.

Обозначая $V^{n+1} = colon\big(\mu_1^{n+1}, H_2^{n+1}, U^{n+1}, W_1^{n+1}, W_{11}^{n+1}, W_{12}^{n+1}, \mu_2^{n+1}, \mu_{21}^{n+1}, \mu_{22}^{n+1}, \mu_{11}^{n+1}, \mu_{12}^{n+1}, H_{21}^{n+1}, H_{22}^{n+1}, U_1^{n+1}, U_1^{n+1}\big)$, $\|V^{n+1} - V^n\| = \left|\mu_1^{n+1} - \mu_1^n\right| + \left|H_2^{n+1} - H_2^n\right| + \left|U^{n+1} - U^n\right| + \left|W_1^{n+1} - W_1^n\right| + + \left|W_{11}^{n+1} - W_{11}^n\right| + \left|W_{12}^{n+1} - W_{12}^n\right| + \left|\mu_2^{n+1} - \mu_2^n\right| + \left|\mu_{21}^{n+1} - \mu_{21}^n\right| + \left|\mu_{22}^{n+1} - \mu_{22}^n\right| + \left|\mu_{11}^{n+1} - \mu_{11}^n\right| + \left|\mu_{12}^{n+1} - \mu_{12}^n\right| + \left|H_{21}^{n+1} - H_{21}^n\right| + \left|H_{22}^{n+1} - H_{22}^n\right| + \left|U_1^{n+1} - U_1^n\right| + \left|U_2^{n+1} - U_2^n\right|$, получим $\|V^{n+1} - V^n\| \leqslant \varepsilon\chi \|V^n - V^{n-1}\|$. Подберем ε таким образом, чтобы $\varepsilon\chi < 1$ $\left(0 \leqslant \varepsilon \leqslant \min\left(\dfrac{9}{10\,(10\zeta_1\sigma_1 + \sigma_2)}; \dfrac{9N_\gamma}{10\zeta_1 K_f}; \dfrac{1}{\chi+1}\right)\right)$, чтобы $V^n = V^0 + V^1 - V^0 + V^2 - V^1 + + ... + V^n - V^{n-1}$ можно было оценить суммой.

Введем обозначения:

$$I_1 = \left\|\left(\mu_1^0, H_2^0, U^0, W_1^0, W_{11}^0, W_{12}^0, \mu_2^0, \mu_{21}^0, \mu_{22}^0, \mu_{11}^0, \mu_{12}^0, H_{21}^0, H_{22}^0, U_1^0, U_1^0\right)\right\|,$$
$$I_2 = \left\|\left(\mu_1^1, H_2^1, U^1, W_1^1, W_{11}^1, W_{12}^1, \mu_2^1, \mu_{21}^1, \mu_{22}^1, \mu_{11}^1, \mu_{12}^1, H_{21}^1, H_{22}^1, U_1^1, U_1^1\right)\right\|,$$

тогда $\|V^0\| \leqslant I_1$, $\|V^i - V^{i-1}\| \leqslant \varepsilon^{i-1}\chi^{i-1} I_2, 1 \leqslant i \leqslant n$.

Имеем для ряда $V^0 + V^1 - V^0 + V^2 - V^1 + \ldots + V^n - V^{n-1} + \ldots$ оценку его частичной суммы: $\|V^n\| \leqslant \|V^0\| + \|V^1 - V^0\| + \|V^2 - V^1\| + ... + \|V^n - V^{n-1}\| \leqslant I_1 + \dfrac{I_2}{1 - \varepsilon\chi}$. Следовательно, ряд $\sum\limits_{i=0}^{\infty} V^i$ сходится.

Единственность следует из того факта, что для разности двух возможных решений u_I и u_{II} уравнения (9) будет выполняться неравенство $\|u_{II} - u_I\| \leqslant \varepsilon\chi_3 \|u_{II} - u_I\|$, где $\varepsilon\chi_3 < 1$.

Определили функции $\mu_1, H_2, U, W_1, W_{11}, W_{12}, \mu_2, \mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{11}, \mu_{12}, H_{21}, H_{22}, U_1, U_2$. Система (1.18)–(1.32) решена.

Для завершения доказательства теоремы в соответствии с общей схемой, изложенной в [5] необходимо доказать, что $1 - \mu_{11} = \frac{\partial(x_1-\mu_1)}{\partial x_1}$, $-\mu_{12} = \frac{\partial(x_1-\mu_1)}{\partial x_2}$, $H_{21} = \frac{\partial H_2}{\partial x_1}$, $H_{22} = \frac{\partial H_2}{\partial x_2}$, $U_1 = \frac{\partial U}{\partial x_1}$, $U_2 = \frac{\partial U}{\partial x_2}$, $W_{11} = \frac{\partial W_1}{\partial x_1}$, $W_{12} = \frac{\partial W_1}{\partial x_2}$, $1 - \mu_{21} = \frac{\partial(x_1-\mu_2)}{\partial x_1}$, $-\mu_{22} = \frac{\partial(x_1-\mu_2)}{\partial x_2}$.

Чтобы показать, что $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1} \to 1 - \mu_{11}$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2} \to -\mu_{12}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \to H_{21}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \to H_{22}$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_1} \to U_1$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_2} \to U_2$ сложим выражения для $\left|(1-\mu_{11}) - \frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right|$, $\left|(-\mu_{12}) - \frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2}\right|$, $\left|H_{21} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|$, $\left|H_{22} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}\right|$, $\left|U_1 - \frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|$, $\left|U_2 - \frac{\partial U^n}{\partial x_2}\right|$. Вводя обозначения

$$\widehat{V} = \widehat{V}\left(1 - \mu_{11}, \mu_{12}, H_{21}, H_{22}, U_1, U_2\right), \tilde{V}^n = \tilde{V}\left(\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2}, \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}, \frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}, \frac{\partial U^n}{\partial x_1}, \frac{\partial U^n}{\partial x_2}\right),$$

$$\left\|\widehat{V} - \tilde{V}^n\right\| = \left\|(1-\mu_{11}) - \frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right\| + \left\|(-\mu_{12}) - \frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2}\right\| + \\ + \left\|H_{21} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right\| + \left\|H_{22} - \frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}\right\| + \left\|U_1 - \frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right\| + \left\|U_2 - \frac{\partial U^n}{\partial x_2}\right\|,$$

получим $\left|\widehat{V} - \tilde{V}^n\right| \leqslant 10\zeta_1\varepsilon\left(M_{a_1} + M_{a_2} + M_f\right) \cdot \left\|\widehat{V} - \tilde{V}^{n-1}\right\| + \Pi_n,$ где

$$\Pi_n = \left(K_{a_1} + K_{a_2}\right) \cdot \left(\left|W_{11} - \frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right| + \left|W_{12} - \frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right|\right) + L_{\gamma'}\left|\mu_2 - \mu_2^n\right| \cdot \left(\left|1 - \mu_{21}\right| + \left|\mu_{22}\right|\right) +$$
$$+ K_{\gamma'} \cdot \left(\left|\left(1 - \mu_{21}\right) - \frac{\partial\left(x_1 - \mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right| + \left|\left(-\mu_{22}\right) - \frac{\partial\left(x_1 - \mu_2^n\right)}{\partial x_2}\right|\right) + \left(L_{a_1} + L_{a_2}\right)\left(\left\|\mu_1 - \mu_1^{n-1}\right\| +\right.$$
$$\left. + \left\|H_2 - H_2^{n-1}\right\| + \left\|U - U^{n-1}\right\|\right) \cdot \left(\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right| + \left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right|\right) +$$
$$+ \left(M_{a_1} + M_{a_2}\right) \cdot \left|W_1 - W_1^n\right| \cdot \Big(\left\|1 - \mu_{11}\right\| + \left\|H_{21}\right\| + \left\|U_1\right\| + \left\|\mu_{12}\right\| + \left\|H_{22}\right\| + \left\|U_2\right\|\Big) +$$
$$+ \left|W_1^n\right|\left(\left(\left\|\frac{\partial\left(x_1 - \mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial\left(x_1 - \mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_2}\right\|\right)\left(L_{a_{11}} + L_{a_{21}}\right) +\right.$$
$$\left. + \left(\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right)\left(L_{a_{12}} + L_{a_{22}}\right) + \left(\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right)\left(L_{a_{1U}} + L_{a_{2U}}\right)\right) \cdot$$

$$\cdot\left(\left\|\mu_1 - \mu_1^{n-1}\right\| + \left\|H_2 - H_2^{n-1}\right\| + \left\|U - U^{n-1}\right\|\right) + |s|\left(\left(\left\|\frac{\partial\left(x_1 - \mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_1}\right\| +\right.\right.$$
$$\left. + \left\|\frac{\partial\left(x_1 - \mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_2}\right\|\right) L_{f_1} + \left(\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right) L_{f_2} +$$
$$\left. + \left(\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\| + \left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_2}\right\|\right) L_{f_U}\right)\left(\left\|\mu_1 - \mu_1^{n-1}\right\| + \left\|H_2 - H_2^{n-1}\right\| + \left\|U - U^{n-1}\right\|\right).$$

Покажем, что $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$, $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}$, $\frac{\partial\left(x_1 - \mu_2^n\right)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\left(x_1 - \mu_2^n\right)}{\partial x_2}$ ограничены. Для $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$ будем иметь следующее

$$\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right| = \left|\lim_{\Delta x_1 \to 0}\frac{W_1^n\left(x_1 + \Delta x_1, x_2\right) - W_1^n\left(x_1, x_2\right)}{\Delta x_1}\right| =$$
$$= \left|\lim_{\Delta x_1 \to 0}\frac{1}{\Delta x_1}\Big(\int\limits_{\varphi(x_1 + \Delta x_1)}^{x_2} W_{12}^{n-1} dx_2 - \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}^{n-1} dx_2\Big)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \left\|W_{12}^{n-1}\right\|\left|\lim_{\Delta x_1 \to 0}\frac{-\left(\varphi(x_1 + \Delta x_1) - \varphi(x_1)\right)}{\Delta x_1}\right| = \left\|W_{12}^{n-1}\right\| \cdot \left|\varphi'(x_1)\right| \leqslant \left\|W_{12}^{n-1}\right\| K_{\varphi'}.$$

Ранее было доказано, что $\left|W_1^n\right|$ ограничена, отсюда $\left|W_{11}^n\right|$ и $\left|W_{12}^n\right|$ ограничены. Можно сказать, что $\left|W_{12}^n\right| \leqslant \varepsilon c$. Мы получили, что $\left\|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right\| \leqslant \varepsilon c K_{\varphi'}$.

Для $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}$ будем иметь следующее

$$\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right| = \left|\lim_{\Delta x_2 \to 0}\frac{W_1^n\left(x_1, x_2 + \Delta x_2\right) - W_1^n\left(x_1, x_2\right)}{\Delta x_2}\right| =$$
$$= \left|\lim_{\Delta x_2 \to 0}\frac{1}{\Delta x_2}\left(\int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2 + \Delta x_2} W_{12}^{n-1}\left(x_1; \delta\right) d\delta - \int\limits_{\varphi(x_1)}^{x_2} W_{12}^{n-1}\left(x_1; \delta\right) d\delta\right)\right| \leqslant \left\|W_{12}^{n-1}\right\|.$$

Отсюда имеем $\left\|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}\right\| \leqslant \varepsilon c$.

Теперь покажем ограниченность $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}$.

$$\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right|=\left|\lim_{\Delta x_1\to 0}\frac{x_1+\Delta x_1-\mu_2^n\left(x_1+\Delta x_1,x_2\right)-x_1+\mu_2^n\left(x_1,x_2\right)}{\Delta x_1}\right|.$$

$$\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right|=\left|a_1^{n-1}\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}+\int\limits_s^{W_1\setminus n}\left(a_{11}^{n-1}\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_1}+a_{12}^{n-1}\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}+a_{1U}^{n-1}\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right)d\delta\right|\leqslant$$
$$\leqslant K_{a_1}\left|\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right|+\left|W_1^n\right|M_{a_1}\left(\left\|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_1}-1\right\|+\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\|\right),$$

$$\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right|\leqslant\varepsilon cK_{a_1}K_{\varphi'}+10\zeta_1\varepsilon M_{a_1}\left(\left\|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^{n-1}\right)}{\partial x_1}-1\right\|+\left\|\frac{\partial H_2^{n-1}}{\partial x_1}\right\|+\left\|\frac{\partial U^{n-1}}{\partial x_1}\right\|\right).\tag{1.33}$$

Выведем оценки для $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}, \frac{\partial U^n}{\partial x_1}$. Сложив неравенства для $\left\|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right\|$, $\left\|\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right\|$, $\left\|\frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right\|$, и введя обозначения, $v_1^n=\max\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right|+\max\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|+\max\limits_{\Omega_\varepsilon}\left|\frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|$, $\xi_1=cK_{\varphi'}\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)K_{a_1}+K_{a_2}\right)$, $\xi_2=10\zeta_1\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)M_{a_1}+M_{a_2}+M_f\right)$, получим $v_1^n\leqslant\varepsilon\left(\xi_1+\xi_2v_1^{n-1}\right)$. Найдем такое ε, чтобы $\varepsilon\left(\xi_1+10\zeta_1\xi_2\right)\leqslant 10\zeta_1$, то есть $\varepsilon\leqslant\dfrac{10\zeta_1}{\xi_1+10\zeta_1\xi_2}$.

Таким образом, если $v_1^{n-1}\leqslant 10\zeta_1$, то $v_1^n\leqslant 10\zeta_1$. Мы получили, что v_1^n — конечна при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\dfrac{10\zeta_1}{\xi_1+10\zeta_1\xi_2}$, тогда из $\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|+\left|\frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|\leqslant 10\zeta_1$ следует, что $\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}\right|$, $\left|\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}\right|$, $\left|\frac{\partial U^n}{\partial x_1}\right|$ — ограничены. Таким образом, мы получили, что $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1}, \frac{\partial H_2^n}{\partial x_1}, \frac{\partial U^n}{\partial x_1}$ ограничены. С учетом формулы (1.33), получим: $\left|\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right|\leqslant\varepsilon cK_{a_1}K_{\varphi'}+\left(10\zeta_1\right)^2\varepsilon M_{a_1}$, $\left\|\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}\right\|\leqslant\varepsilon\left(cK_{a_1}K_{\varphi'}+\left(10\zeta_1\right)^2M_{a_1}\right)$.

Аналогично показывается, что при $0\leqslant\varepsilon\leqslant\dfrac{10\zeta_1}{\xi_3+10\zeta_1\xi_2}$ ограничены $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2}, \frac{\partial H_2^n}{\partial x_2}, \frac{\partial U^n}{\partial x_2}$, а, следовательно, и $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_2}$. Здесь ζ_1,ξ_2 определены выше, а $\xi_3=c\left(\left(K_{\gamma'}+1\right)K_{a_1}+K_{a_2}\right)$.

В силу $W_{11}^n\to W_{11}$, что $\frac{\partial W_1}{\partial x_1}=W_{11}$ и $\left|W_1^n-W_1\right|\leqslant\varepsilon_1$, так как $W_1^n\to W_1$, получим $\left|W_{11}-\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}\right|\leqslant\varepsilon_1$. Это и означает, что $W_{11}=\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$.

Равенства $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}=W_{12}$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}=1-\mu_{21}$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_2}=-\mu_{22}$ доказываются аналогично.

Так как $W_{11}^n\underset{n\to\infty}{\to}W_{11}$, $W_{12}^n\underset{n\to\infty}{\to}W_{12}$, $x_1-\mu_{21}^n\underset{n\to\infty}{\to}x_1-\mu_{21}$, $-\mu_{22}^n\underset{n\to\infty}{\to}-\mu_{22}$ и a_1^n, a_2^n, $\gamma'\left(x_1-\mu_2^n\right)$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_1}$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_2^n\right)}{\partial x_2}$, $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_1}$, $\frac{\partial W_1^n}{\partial x_2}$ — ограничены, то $\forall\tilde{\varepsilon}_{\max}>0\ \exists N\in\mathrm{N}\ \forall n\geq N$ $\left\|\Pi_n\right\|<\tilde{\varepsilon}_{\max}$.

Значит, $\left\|\widehat{V}-\tilde{V}^n\right\|\leqslant 10\zeta_1\varepsilon\left(M_{a_1}+M_{a_2}+M_f\right)\left\|\widehat{V}-\tilde{V}^{n-1}\right\|+\tilde{\varepsilon}_{\max}$.

Обозначим $A_{\max}=10\zeta_1\varepsilon\left(M_{a_1}+M_{a_2}+M_f\right)$, причем $A_{\max}<1$. Тогда записанное выше неравенство запишется следующим образом $\left\|\widehat{V}-\tilde{V}^n\right\|\leqslant A_{\max}\left\|\widehat{V}-\tilde{V}^{n-1}\right\|+\tilde{\varepsilon}_{\max}$. Из данного неравенства вытекает, что для любого $p \in \mathbb{N}$ будет выполняться неравенство $\left\|\widehat{V} - \tilde{V}^{n+p}\right\| \leqslant A_{\max}^{p+1}\left\|\widehat{V} - \tilde{V}^{n-1}\right\| + \frac{\tilde{\varepsilon}_{\max}}{1-A_{\max}}$. Так как $A_{\max} < 1$, то, переходя к пределу при $n \to \infty$, получим: $\left\|\widehat{V} - \tilde{V}^{n}\right\| \leqslant \delta$, где $\delta = \dfrac{\tilde{\varepsilon}_{\max}}{1-A_{\max}}$.

Мы доказали, что $\tilde{V}^n$ в пространстве $C^1(\Omega_\varepsilon)$ сходится по норме $\left\|\tilde{V}^n\right\|$ при $n \to \infty$, то есть $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1} \to 1-\mu_{11}$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2} \to -\mu_{12}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \to H_{21}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \to H_{22}$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_1} \to U_1$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_2} \to U_2$ в пространстве $C^1(\Omega_\varepsilon)$ сходится по норме $\left\|\tilde{V}^n\right\|$.

В результате для последовательностей $\left\{x_1-\mu_1^n\right\}$, $\left\{H_2^n\right\}$, $\left\{U^n\right\}$ установлены следующие свойства: $x_1-\mu_1^n \to x_1-\mu_1 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $H_2^n \to H_2 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $U^n \to U \in C^1(\Omega_\varepsilon)$. В силу полноты и замкнутости $C^1(\Omega_\varepsilon)$ получаем, что $x_1-\mu_1 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $H_2 \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, $U \in C^1(\Omega_\varepsilon)$, а значит и обладают частными производными по s, x_1, x_2, причем $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_1} \to \frac{\partial(x_1-\mu_1)}{\partial x_1} \equiv 1-\mu_{11}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_1} \to \frac{\partial H_2}{\partial x_1} \equiv H_{21}$, $\frac{\partial\left(x_1-\mu_1^n\right)}{\partial x_2} \to \frac{\partial(x_1-\mu_1)}{\partial x_2} \equiv -\mu_{12}$, $\frac{\partial H_2^n}{\partial x_2} \to \frac{\partial H_2}{\partial x_2} \equiv H_{22}$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_1} \to \frac{\partial U}{\partial x_1} \equiv U_1$, $\frac{\partial U^n}{\partial x_2} \to \frac{\partial U}{\partial x_2} \equiv U_2$. Тем самым теорема полностью доказана.

Список литературы

1. Алексеенко С. Н., “Применение метода дополнительного аргумента к исследованию разрешимости "одноосной"задачи Коши для квазилинейных уравнений в частных производных первого порядка”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2009, № 11, 40–49.

2. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Построение основной разрешающей системы интегральных уравнений для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка в случае параметрического задания начальных данных”, *Математический вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона*, 2011, № 13, 61–70.

3. Иманалиев М. И., Алексеенко С. Н., “К теории нелинейных уравнений с дифференциальным оператором типа полной производной по времени”, *Докл. АН*, **329**:5 (1993), 543–546.

4. Иманалиев М. И., Панков П. С., Алексеенко С. Н., “Метод дополнительного аргумента”, *Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. Специальный выпуск*, 2006, № 1, 60–64.

5. Алексеенко С. Н., Платонова Л. Е., “Дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка общего вида с начальными данными в декартовых координатах на линии бесконечной длины”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **14**:3 (2012), 21–28.

The proof of a local solvability theorem for a quasi-linear first-order partial differential equation of the common type with initial data in Cartesian coordinates on an infinite length line

© **S. N. Alekseenko**[3], **L. E. Platonova**[4]

Abstract. The Cauchy problem for a quasi-linear first order partial differential equation in case when initial data is given on an infinite length smooth line with non-vertical gradient is reduced to a system in 15 integral equations. The local solvability of this system of integral equations is proved. Connections between unknown functions of the integral equations and the unknown function and its derivatives of the primary Cauchy problem is established, because at a deriving of the system of integral equations the partial derivatives of a seeking function were taking as new unknown functions, so the inverse passage is necessary and not trivial. As a result, the local solvability theorem is proved. The local solvability conditions do not include conditional assumptions about behavior of the characteristic lines.

Key Words: quasi-linear first order partial differential equation, Cauchy problem, method of an additional argument.

[3] The professor of the applied mathematics chair, Nizhniy Novgorod State Technical University, Nizhniy Novgorod; sn-alekseenko@yandex.ru

[4] The assistant lecture of the mathematical analysis chair, Nizhniy Novgorod State Pedagogical University, Nizhniy Novgorod; fluff13@yandex.ru

В Средневолжском математическом обществе

УДК 681.3; 519.711

Популяция автоматов — модель сложной системы

© В. А. Воробьев[1], Ю. В. Березовская[2], А. Ю. Кочнев[3]

Аннотация. Описана модель коллективного поведения автоматов — популяция автоматов. Для моделирования динамики популяции применяется Каузальная Сеть. Позициям сети соответствуют состояния автоматов. Маркировка сети задаёт число автоматов, находящихся в соответствующих состояниях. Переходы отображают события, возникающие в результате совместных действий элементов популяции. На переходах сети заданы их вероятности. Это позволяет автоматически получить систему дифференциальных уравнений динамики средних с задержками времени. Система решается численно.

Ключевые слова: популяция автоматов, каузальная сеть, сеть Петри, динамика средних, моделирование.

1. Введение

Популяция автоматов — это система из N взаимодействующих автоматов (не обязательно одинаковых), в которых смена состояний отдельного автомата обусловлена состояниями некоторых других автоматов. А именно, состояния «воздействующих» автоматов влияют на «изменяемые» автоматы и переводят их в новые состояния, причём способ передачи воздействий и связи между автоматами не рассматриваются. Предполагается, что 1) все N_i автоматов в состоянии i равномерно распределены по системе и вероятность найти в любом месте автомат в состоянии i равна $\frac{N_i}{N}$ (сильное перемешивание); 2) все потоки событий в системе простейшие.

Популяции автоматов моделируют разнообразные массовые объекты: биологические, экономические и технические системы, параллельные программы [1]. С этой целью автоматы должны иметь стохастические характеристики — вероятности переходов в каждом такте. Поскольку число состояний популяции чрезвычайно велико, вычисления проводятся не для всех возможных состояний популяции, а для среднего числа автоматов в различных состояниях. Таким образом, полученный случайный процесс представляет динамику популяции «в среднем». Трудность состоит в том, что в известном методе динамики средних [2] все компоненты независимы друг от друга. Следует учесть взаимодействия между автоматами. Отсутствие метрики в популяции позволяет исследовать такие случайные системы, используя достижения теории параллельных процессов [1, 3]. В настоящей работе развиты идеи из [1, 3], опираясь на теорию сетей Петри и марковских процессов.

[1] Профессор кафедры программирования и высокопроизводительных вычислений, Северный (Арктический) федеральный университет имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; vva100@atnet.ru.

[2] Старший преподаватель кафедры программирования и высокопроизводительных вычислений, САФУ имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; myumla.myu@gmail.com

[3] Заведующий отделением ИТ-образования, САФУ имени М. В. Ломоносова, г. Архангельск; derxyz@yandex.ru

2. Каузальная сеть

2.1. Определение каузальной сети

Каузальная сеть (К-сеть) — это маркированная сеть Петри, в которой для каждого перехода задана интенсивность события-перехода, как функция от маркировки входных позиций перехода. Вид этих функций зависит от предметной области и задаётся отдельно в каждом конкретном случае. Потоки событий-переходов простейшие, т.е. стационарные (интенсивности меняются медленно), ординарные и без последействия.

Определение 2.1. *Каузальная сеть — это двудольный граф* $\boldsymbol{G} = \langle Q, D, \boldsymbol{In}, \boldsymbol{Out}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{R} \rangle$ *, где*

$Q = \{q_i \mid i = 0, 1, \ldots, n\}$ *— множество позиций, соответствующее множеству состояний, на которых определены все автоматы;*

$D = \{d_j \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$ *— множество переходов автоматов из состояния в состояние;*

$\boldsymbol{In}$ *— функция предшествования, ставит в соответствие каждой паре* (q_i, d_j) *неотрицательное число* $k_{ij} \geq 0$ *, где* k_{ij} *— вес дуги из позиции* q_i *в переход* d_j *, если соответствующей дуги нет,* $k_{ij} = 0$ *(* $^*d_j$ *— множество входных позиций перехода);*

$\boldsymbol{Out}$ *— функция следования, ставит в соответствие каждой паре* (d_j, q_i) *неотрицательное число* $k_{ij} \geq 0$ *, где* k_{ji} *— вес дуги из перехода* d_j *в позицию* q_i *, если соответствующей дуги нет,* $k_{ji} = 0$ *(* d_j^* *— множество выходных позиций перехода);*

$\boldsymbol{M}_t = \{N_{it} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ *— вектор маркировки, своими компонентами задающий число автоматов, находящихся в момент времени* t *в каждом из состояний множества* Q *;*

$\boldsymbol{R} = \{p_j(\boldsymbol{M}_t(^*d_j)) \mid j = 1, \ldots, m\}$ *— вектор-функция интенсивностей переходов, определяющая среднее число срабатываний перехода* d_j *в течение одного такта или число таких срабатываний в единицу времени, зависящее от маркировки множества* $^*d_j$ *.*

Позиция $q_0 \in Q$ называется внешней, имеет сколь угодно большое или единичное (если надо) значение маркера N_0, не меняет его при переходах и может не изображаться на рисунке графа. Состояния автоматов и позиции множества $\{q_i \mid i = 1, \ldots, n\}$ назовём собственными. Граф $\mathbf{G}$ изображает причинно следственные связи между состояниями автоматов и интенсивности этих связей.

В отличие от канонической сети Петри множество весовых коэффициентов дуг К-сети — это положительные действительные числа, приписанные входным и выходным дугам j-того перехода: k_{ij} или k_{ji}, соответственно. Точно также мы будем допускать действительные числа в качестве маркеров N_i для позиций. Это позволит маркировать сеть вероятностями состояний автоматов и вообще избавиться от целых чисел. В таких случаях будем считать популяцию счётным множеством.

2.2. Описание К-сети

Описание К-сети состоит в описании двух ее частей:

1. статическая часть — маркировка $\mathbf{M}_0$ в начальный момент времени $t = 0$;
2. динамическая часть — описание переходов.

Каждый переход d_j описывается выражениями:

1. перечисление множества $^*d_j$ с коэффициентами k_{ij};
2. перечисление множества d_j^* с коэффициентами k_{ji};
3. интенсивность $p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j))$ перехода;
4. тип перехода,

5. задержки во времени.

В общем случае описание перехода это выражение вида:

$^*d_j > d_j^* : p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j)) :$ тип, задержки.

Внешнее состояние в описании не присутствует, так что допустимы переходы с неполной левой или правой частью.

3. Каузальные модели популяций

Как и сеть Петри, К-сеть может использоваться для моделирования сложных систем, состоящих из множества взаимодействующих элементов — популяций. Абстрагируясь от природы популяции, будем называть её элементы автоматами. А саму динамическую модель, построенную на основе К-сети, будем называть каузальной моделью (К-моделью). Этот последний термин подчёркивает динамический характер и модельную функцию К-сети.

3.1. К-модель мобилизации

Проще всего пояснить основные идеи популяционного моделирования на примере. Рассмотрим, например, замкнутую «популяцию», которую представим как популяцию автоматов-особей с двумя состояниями L (live, живая) и D (dead, мёртвая). Вероятность гибели особи (перехода из L в D) в течение одного такта равна p. Живая особь, может поглотить одну мёртвую и разделиться на двух живых или, иначе говоря, оживить мёртвую особь. Вероятность этого события в течение одного такта равна q. Временем на поглощение и деление можно пренебречь по сравнению со временем поиска добычи. В популяции определены два перехода: гибель, независимая от состояния популяции, и восстановление, возможное только при наличии одной живой и одной мёртвой особи.

При описании К-моделей общего вида мы использовали обозначение N_i для числа автоматов, находящихся в состоянии i. Чтобы не загромождать запись уравнений буквой N, её можно опускать, и тогда имя состояния будет обозначать и число автоматов в этом состоянии как это показано на Рис.3.1 и принято в элементарной алгебре. С той же целью экономии обозначений мы записываем функцию времени $X(t)$ в виде X_t или вообще без индекса.

Предложенная К-модель имеет множество различных интерпретаций. Это и модель заселения мест (D) экологической ниши живыми (L) организмами, и модель замены отказавших узлов системы (D) исправными узлами (L), это и модель спасения раненых на поле боя живыми бойцами, это, наконец, модель мобилизации призывников (D) теми, кто уже призван в армию (L), причём призывники активно избегают призыва — «умирают». Последняя интерпретация позволяет называть описанную популяцию моделью мобилизации, как это принято в экономической литературе. Автоматы этой модели мы будем называть особями.

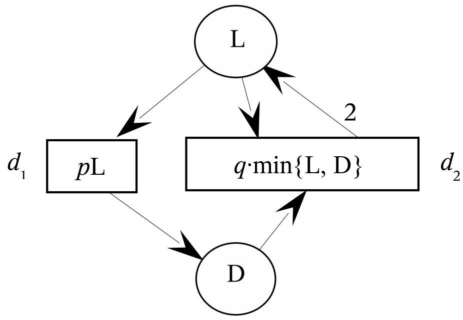


Рисунок **3.1**

Каузальная сеть линейной модели мобилизации

Зададим описание К-сети для модели мобилизации представленной на Рис.3.1. Описание переходов:

$L_0 = L_{beg}$, $D_0 = D_{beg}$;

$L > D : pL$: линейный;

$L : D > 2L : q \cdot \min\{L, D\}$: линейный.

Интерпретация предложенного описания популяции зависит от единицы времени. Если единица времени достаточно мала, то $p \ll 1$ и $q \ll 1$ — вероятности срабатывания переходов в течение такта, а pL и $q \cdot \min\{L, D\}$ — среднее число автоматов, изменяющих состояние за такт. Если единица времени велика, то p и q — интенсивности переходов одного автомата, а величины pL или $q \cdot \min\{L, D\}$ — это интенсивности переходов на всём множестве автоматов.

3.2. Динамика К-модели

Граф, который мы назвали К-сетью, — это статическая модель популяции автоматов. Она задаёт только причинно следственные связи между элементами системы автоматов. Динамическая модель популяции — К-модель — определяется функционированием К-сети. Функционирование К-сети подобно несущей сети Петри с учётом интенсивностей переходов, а именно: переход d_j срабатывает только тогда, когда маркировка его входа такова, что $\mathbf{M}(^*d_j) \geq \mathbf{In}(d_j)$. Один переход К-сети описывает множество допустимых изменений состояний автоматов, заданное интенсивностью. В нашем примере: $L \geq 1$ и $\min\{L, D\} \geq 1$. При срабатывании перехода маркировка на его входе уменьшается, а на выходе увеличивается согласно интенсивностям. В нашем примере переход $L > D : pL$ уменьшает маркировку L и увеличивает маркировку D на pL, а переход: $L : > 2L : q \cdot \min\{L, D\}$: линейный уменьшает D на $q \cdot \min\{L, D\}$ и увеличивает L на $q \cdot \min\{L, D\}$.

Пусть $N_t = \sum_{i=1}^{n} N_{it}$ — численность популяции в момент t, $P_{it} = \frac{N_{it}}{N_t}$ — доля автоматов, находящихся в момент t в состоянии N_i. При $N_t \to \infty$ величина P_{it} — это вероятность пребывания автомата в i-том состоянии. Вектор-функция

$$\mathbf{P}_t = \{P_{it} \mid i = 1, \ldots, n\}$$

задаёт динамику популяции в среднем или её *поведение*.

3.3. Уравнения динамики средних для замкнутой популяции

Пусть $R = d_1, d_2, d_3, d_4, \ldots, d_s$ — допустимая последовательность переходов К-сети. Рассмотрим только тот случай, когда сеть такова, что каждый из её переходов неоднократно найдётся в последовательности R при достаточно длительном наблюдении. Вектор $\mathbf{R}$ длины m, в котором j-тая компонента это число вхождений перехода d_j в последовательность R, называется *характеристикой* последовательности R или *характеристикой динамики* К-сети. Взяв период наблюдения К-сети за единицу времени, мы отождествим характеристику $\mathbf{R}$ и вектор-функцию

$$\mathbf{R} = \{p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j)) \mid j = 1, \ldots, m\}$$

интенсивностей переходов. Пусть теперь $\mathbf{R}$ — вектор-столбец длины m, характеризующий динамику (число переходов) К-сети за единичное время. Тогда вектор-столбец $\mathbf{R}\Delta t$ — характеристика динамики за время Δt.

Функции $\mathbf{In}$ и $\mathbf{Out}$ для К-сети задаются $(n \times m)$-матрицами инциденций, где строкам соответствуют позиции сети (кроме внешней), а столбцам — переходы. Элементы этих матриц значения k_{ij} и k_{ji}, соответственно. Вектор столбец $\mathbf{R}$ соответствует длине строки матриц $\mathbf{In}$ и $\mathbf{Out}$. Наглядно это демонстрирует Таблица 1. Динамика К-сети (К-модель)

Таблица 1: Матричное описание К-модели мобилизации

$\mathbf{In}$	d_1	d_2
L	1	1
D	0	1

$\mathbf{Out}$	d_1	d_2
L	0	2
D	1	0

$\mathbf{D}$	d_1	d_2
L	-1	1
D	1	-1

$\mathbf{R} = \{p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j)) \mid j = 1, 2\}$
pL
$q \cdot min\{L, D\}$

задаётся матричным уравнением К-сети, аналогичным фундаментальному уравнению сети Петри:

$$\Delta\mathbf{M} = \mathbf{Out} \bullet \mathbf{R}\Delta t - \mathbf{In} \bullet \mathbf{R}\Delta t = (\mathbf{Out} - \mathbf{In}) \bullet \mathbf{R}\Delta t = \mathbf{D} \bullet \mathbf{R}\Delta t$$

где:

$\mathbf{Out} - \mathbf{In} = \mathbf{D}$ — оператор изменения маркировки сети или $\mathbf{D}$-оператор (от Derivative — производная);

$\Delta\mathbf{M}$ — вектор-столбец длины n — изменение маркировки сети при срабатывании любой допустимой последовательности переходов с характеристикой $\mathbf{R}\Delta t$;

$\bullet$ — матричное умножение.

Устремим Δt к нулю, и заменим его на дифференциал dt. Тогда и $\Delta\mathbf{M}$ станет величиной более высокого порядка малости по отношению к $\mathbf{M}$: $\Delta\mathbf{M} = o(\mathbf{M})$ и её тоже можно заменить на dM. Теперь можно перейти к дифференциальному виду, и записать дифференциальное уравнение динамики средних К-сети в векторном виде:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \mathbf{D} \bullet \mathbf{R}$$

Приравняв производную нулю, получим уравнение для стационарного режима:

$$\mathbf{D} \bullet \mathbf{R} = 0$$

Кроме этих уравнений для замкнутых популяций справедлива нормировка

$$\sum_{i=1}^{n} P_{it} = 1 \text{ или, что то же, } \sum_{i=1}^{n} N_{it} = N$$

Особенностью полученных линейных систем является тот факт, что уравнения в них могут быть расщепляемыми.

В нашем примере с популяцией особей имеем систему

$$\frac{dL}{dt} = q \cdot min\{L, D\} - pL$$

$$\frac{dD}{dt} = pL - q \cdot min\{L, D\}$$

где каждое из уравнений расщепляется на два различных уравнения, действующих в зависимости от соотношения значений L и D. Поскольку популяция замкнута и $N = L + D = const$, эти два дифференциальных уравнения сводятся к одному

$$\frac{dL}{dt} = q \cdot min\{L, N - L\} - pL$$

которое расщепляется на два уравнения и интегрируется.

3.4. Классификация К-моделей

К-модели классифицируются по нескольким критериям.

Во-первых, следует выделить линейные и нелинейные модели взаимодействий. Эти модели отличаются видом функций интенсивностей переходов $p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j))$.

Во-вторых, о сложности модели можно судить по числу состояний и автоматов, участвующих в одном акте взаимодействия и в переходе.

В-третьих, К-модели различаются по составу моделируемой популяции.

Все эти различия решающим образом влияют на моделирование популяций и, следовательно, требуют более содержательного описания.

3.4..1 Линейные и нелинейные взаимодействия

Линейные взаимодействия таковы, что интенсивности $p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j))$ пропорциональны минимальным маркерам N_{it} в $\mathbf{M}_t(^*d_j)$. Линейные модели адекватны в тех случаях, когда интенсивность перехода является имманентным свойством каждого отдельного автомата. Так в нашей гипотетической популяции способность восстанавливать мертвую особь присуща только части особей, находящихся в состоянии L, но если уж эта способность есть, то она реализуется, и эта реализация единственна в данном такте.

Нелинейные популяции таковы, что $p_j(\mathbf{M}_t(^*d_j))$ зависит от степеней и произведений маркировок N_{it} из $\mathbf{M}_t(^*d_j)$. Нелинейная модель адекватна, если интенсивность перехода пропорциональна вероятности возможных благоприятных сочетаний, причём все эти сочетания и соответствующие переходы могут быть реализованы в одном такте с заданной вероятностью. Так, в модели мобилизации следовало бы учесть вероятность «встречи» одной живой и одной мёртвой особи, точнее попадания мёртвой особи в поле зрения живой. Тогда интенсивность восстановления пропорциональна величине $\frac{L \cdot M}{N}$.

3.4..2 Простые популяции

Сложность популяции задаётся числом взаимодействующих автоматов в каждом переходе. Полезно выделить наиболее простые случаи.

Простые популяции таковы, что взаимодействуют только пары автоматов. Каждый переход инициируется одним или двумя состояниями, а простой $\mathbf{D}$-оператор состоит из нулей и единиц, может быть с разными знаками. В столбцах матрицы D находится не более двух единиц, как в примере с «особями».

3.4..3 Простые растворы и смеси

Автоматизируем подсчёт интенсивностей переходов в простых К-моделях популяций. Будем полагать, что моделируемые популяции *сильно перемешаны*, т.е. каждый автомат в любом состоянии i может оказаться в любом месте с одинаковой вероятностью $\frac{N_i}{N}$ независимо от расстояния до него.

Что касается *линейных* взаимодействий, то формулы для интенсивностей переходов, представленные в п. 3.1 в комментариях не нуждаются и их вычисление всегда можно провести автоматически. Однако *нелинейные* взаимодействия допускают различные интерпретации и способы вычисления интенсивностей. Для простоты рассмотрим только простые нелинейные популяции, поскольку результаты легко обобщаются на нелинейные популяции общего вида. Выделим два типа простых нелинейных взаимодействий: *раствор* и *смесь*.

Взаимодействие типа *раствор* предполагает равномерное размещение взаимодействующих автоматов во множестве мощности N мест, большинство из которых — места, не содержащие взаимодействующих автоматов. Примерами в биологии являются популяции, которые не собираются в одном месте для воспроизводства. Проблемой таких популяций является низкая вероятность встречи, если ареал расселения велик по сравнению с численностью популяции. Вероятность встречи самца и самки может оказаться меньше чем вероятность смерти отдельной особи, и популяция вымирает из-за малой численности в большом ареале расселения.

Взаимодействие типа *смесь* происходит в ограниченной области как, например, птичьи базары, пассажиры в трамвае или покупатели в магазине. Так что вероятность взаимодействия данной пары не зависит от общего числа мест, а зависит только от количества автоматов собравшихся вместе для взаимодействий.

Ясно, что в сложных системах различные взаимодействия могут происходить по-разному: и линейно, и как в растворе, и как в смеси. Поэтому характеристики: линейный, раствор и смесь относятся не ко всей популяции, а отдельно к каждому переходу. Рассмотрим интенсивности переходов для различных типов взаимодействий.

Пусть тройка (i, j, k) обозначает переход автомата из состояния j в состояние k под воздействием автомата, находящегося в состоянии i, а $p(i, j, k)$ — вероятность такого перехода. При этом число автоматов в состоянии i не изменяется, если $i \neq k$. Будем полагать, что каждый автомат занимает ровно одно место в пространстве, где «живёт» популяция. Общее число таких мест равно N. При этом часть мест может быть пустой, т.е. популяция как бы «растворена» во множестве мощности N. Пусть теперь:

N_i — число автоматов в состоянии i;

N_{ijk} — общая интенсивность перехода (i, j, k), т.е. число автоматов, совершающих этот переход в каждом такте моделирования;

V_{ij} — область взаимодействия для перехода (i, j, k) — число мест в окрестности состояния i (или j), в которые должны попасть оба автомата i и j, чтобы взаимодействие состоялось. Ясно, что области взаимодействия состояний i и j одинаковы, т.е. $V_{ij} = V_{ji}$; Следует так же иметь в виду, что области V_{ij} должны быть порядка одного места: $V_{ij} \approx 1$, чтобы можно было пренебречь их пересечениями.

$K(i, j, k) = p(i, j, k)V_{ij}$ — интенсивность перехода (i, j, k) для одной пары автоматов, попавших в область взаимодействия размера V_{ij} в состояниях i и j.

Наша задача состоит в вычислении общей интенсивности перехода N_{ijk} для различных типов взаимодействия.

Для линейных взаимодействий очевидно:

$$N_{ijk} = K(i, j, k) \cdot min\{N_i,\ N_j\}, \tag{3.1}$$

В растворе плотность автоматов в состоянии j равна $p_j = \frac{N_j}{N}$, общий объём области взаимодействия равен $V_{ij} \cdot min\{N_i, N_j\}$. Пусть $N_i = min\{N_i, N_j\}$. Тогда число взаимодействующих автоматов равно

$$N_{ijk} \ = \ V_{ij} \cdot min\{N_i, \ N_j\} \times p_j \ = \ \frac{V_{ij} N_i N_j}{N}$$

.

Отсюда следует, что для взаимодействия в растворе при $i \neq j$:

$$N_{ijk} = p(i,j,k)\frac{V_{ij} N_i N_j}{N} = K(i,j,k)\frac{N_i N_j}{N}, \tag{3.2}$$

Для взаимодействия в растворе при $i = j$:

$$N_{ijk} = p(i,j,k)\frac{V_{ij} N_i N_j}{2N} = K(i,j,k)\frac{N_i N_j}{2N}, \tag{3.3}$$

Аналогичные рассуждения для взаимодействия в смеси приводят к выводу, что значение N, следует заменить на сумму $(N_i + N_j)$ поскольку в этом случае оба взаимодействующих множества автоматов «смешаны друг с другом», а прочие автоматы роли не играют. Так для заражения гриппом больные и здоровые люди должны встречаться в каком-нибудь тесном месте, например в офисе, чтобы обменяться вирусом, а прочие обстоятельства — размер города или всей страны — роли не играют. Итак, для взаимодействия в смеси получим:

$$N_{ijk} = p(i,j,k)\frac{V_{ij} N_i N_j}{(Ni + Nj)} = K(i,j,k)\frac{N_i N_j}{(N_i + N_j)}, \tag{3.4}$$

Соотношения $\frac{N_i N_j}{N}$, $\frac{N_i N_j}{2N}$ и $\frac{N_i N_j}{N_i + N_j}$ задают вероятность встречи автоматов в i-том и j-том состояниях в области действия всех i-тых автоматов.

Обратим внимание, что если никаких других состояний, кроме i и j, в системе нет, то $N_i + N_j = N$, и интенсивности переходов в растворе и смеси совпадают. Кроме того, при условии $i = j$ с теми же состояниями могут взаимодействовать только половина автоматов раствора, а область взаимодействия сократится вдвое, что и отражено в формулах. В смеси это обстоятельство учитывается автоматически, поскольку $N_i + N_j = 2N_j = 2N$.

При линейном взаимодействии условие $i = j$ означает, что автомат, находящийся в состоянии i, самостоятельно переходит в состояние k независимо ни от каких других автоматов. Если все переходы в популяции линейные и для всех переходов $i = j$, то имеет место простейшая, т.е. линейная автоматная популяция.

При нелинейном переходе условие $i = j$ означает, что для взаимодействия необходима встреча двух автоматов в i-том состоянии, один из которых перейдет в k-тое состояние с интенсивностью $K(i,i,k)$.

Если при переходах автоматов из одних состояний в другие общее число автоматов N неизменно, то популяция является замкнутой. В замкнутой популяции можно получить статистические вероятности состояний автоматов $P_i = \frac{N_i}{N}$.

Интерес представляют открытые популяции, где возможно удаление автоматов и появление новых. Для записи этих действий используется *внешнее* или 0-*состояние* q_0, обозначаемое символом «*» или «-». Будем считать, что автоматов находящихся в 0-состоянии всегда достаточно для реализации переходов, а численность 0-состояний не меняется.

Появление новых автоматов происходит под воздействием уже существующих. Автоматы, находящиеся в состоянии i, добавляют в состояние j новые автоматы с интенсивностью $K(i,^*,j)$. Количество появившихся автоматов равно $K(i,^*,j)N_i$ при всех типах взаимодействий. Отметим, что при порождении новых автоматов интенсивность — это любое число, соответствующее числу «потомков».

4. Метод компьютерного моделирования популяций

Предметом настоящего раздела является метод моделирования простой популяции автоматов, функционирующей в дискретном времени $T = 1, 2, 3, \ldots, t, \ldots$ с помощью компьютерной программы «Популяция». Вообще говоря, такие системы можно моделировать линейными или нелинейными системами дифференциальных уравнений. Для решения этих уравнений можно использовать известные численные методы, писать программы или использовать готовые системы прикладных программ. Проблема состоит в высокой трудоёмкости этого пути. Между тем построение требуемых уравнений и их численное решение настолько стандартная процедура, что можно ограничиться только заданием К-сети. Кроме того, в дидактических целях программа должна быть простой, легко управляемой и давать наглядные результаты в виде графиков и массивов результатов моделирования.

4.1. Моделирование простых и автоматных популяций

Пусть N — количество автоматов, n — число состояний, в которых может находиться каждый из автоматов. При этом каждый конкретный автомат не обязательно имеет все n состояний. Популяция может состоять из автоматов различных классов, отличающихся набором состояний и поведением. В каждом i-том состоянии пребывает N_i автоматов, так что $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$ (n — натуральное, N_i — неотрицательное действительное при $i = 1, \ldots, n$). Использование действительных чисел вместо целых позволяет не задавать очень большие числа N_i и избежать погрешности при округлении. В конечном итоге нас все равно интересует только динамика или поведение популяции. При этом можно использовать статистические вероятности и другие статистические характеристики.

В каждом такте, то есть через заданный промежуток времени, количество автоматов в j-том состоянии изменяется или остается тем же. Это происходит следующим образом. Некоторое состояние i влияет на состояние j и переводит его в состояние k с интенсивностью $K(i,j,k)$. Изменение количества N_{it} автоматов в такте t имеет вид:

$$N_i(t+1) = N_{it} + \Delta N_{it},$$

где $\Delta N_i = V_i - I_i + R_i$, а $V_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} N_{jki}$ — число автоматов перешедших в i-тое состояние; $I_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{n} min(N_i, N_{jik})$ — число автоматов, покинувших i-тое состояние; $R_i = \sum_{j=1}^{n} N_j \cdot K(j,^*,i)$ — число автоматов, «родившихся» в i том состоянии. Здесь N_{ijk} вычисляются по формулам 3.1— 3.4 для соответствующего типа взаимодействия. Чтобы получить среднее количество автоматов в каждом состоянии на $(t+1)$-ом шагу, необходимо воспользоваться этими формулами t раз.

Заключение

Итак, получен метод составления и численного решения линейных и нелинейных дифференциальных уравнений динамики средних (К-модели) с запаздыванием времени на базе маркированного графа параллельных процессов в популяции взаимодействующих автоматов (К-сети).

Несмотря на некоторую ограниченность данного подхода класс моделируемых популяций включает множество интересных систем, допускающих множество интерпретаций в различных предметных областях: вычислительная техника, биология, социология, история, экономика и т.д. — везде, где поведение системы можно представить как параллельное функционирование множества автоматов, взаимодействующих между собой.

Имея программу «Популяция» достаточно описать поведение отдельных элементов исследуемой системы в их связи с другими элементами и получается модель, которая легко модифицируется и быстро даёт наглядные результаты. При этом будет представлено и поведение популяции в переходном режиме. А это уже не мало в тех предметных областях, где господствуют качественные рассуждения. Это касается гуманитарных наук, и, особенно, истории. Проблема математизации исторических исследований давно стоит на повестке дня [4-7].

Список литературы

1. Ачасова С. М., Бандман О. Л., *Корректность параллельных вычислительных процессов*, Наука, Сибирское отделение, Новосибирск, М., 1990, 336 с.

2. Воробьёв В. А., Березовская Ю. В., *Теория систем и системный анализ. Стохастические системы.*, учебное пособие, ИПЦ САФУ, Архангельск, 2012, 147 с.

3. Воробьёв В. А., Кочнев А. Ю., “Популяционное моделирование коллективного поведения автоматов”, *Вестник Томского государственного университета. Приложение*, 2007, № 18, Материалы международных, всероссийских и региональных научных конференций, симпозиумов и школ, проводимых в ТГУ, 33–37.

4. Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г., *Синергетика и прогнозы будущего*, 2-е изд., Эдиториал УРСС, М., 2001, 288 с.

5. Воробьёв В. А., Воробьёва Т. В., “Экологическая пауза — системный кризис человечества”, *Труды АНИГ «Прогноз»*, **Выпуск 1**, Исследования в области глобального катастрофизма, Новосибирск, 2006, 69–109.

6. Коротаев А. В., Комарова Н. Л., Халтурина Д. А., *Законы истории: Вековые циклы и тысячелетние тренды. Демография, экономика, войны*, изд. 2-е, испр. и доп., ред. Н. Н. Крадин, КомКнига, М., 2007, 256 с.

7. Коротаев А. В., Малков А. С., Халтурина Д. А., *Законы истории: Математическое моделирование развития Мир-Системы. Демография, экономика, культура*, изд. 2-е, испр. и доп., ред. Н. Н. Крадин, КомКнига, М., 2007.

The population of automata is a model of the complex systems

© V. A. Vorob'ev[4], Yu. V. Berezovska [5], A. Yu. Kochnev [6]

Abstract. The population of automata is a model of collective behavior of automata. Modeling of population dynamics is implemented by Causal Petri Net. Net places represent the states of automata. A net marking specifies a number of automata that are in corresponding states. Transitions represent events that result from the joint actions of the elements of a population. For each transition of net some value is specified, it defines probability (rate) of the transition response so a system of differential equations can be built. These equations describe the dynamics of the average number of automata in places while the logical conditions specified by Petri net are implemented. The numerical solution of the system is obtained using computer simulation.

Key Words: population of automata, causal net, Petri net, mean value dynamics, modeling.

[4] Professor, Department of Programming and High-Performance Computing, Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk; vva100@atnet.ru

[5] Senior lecturer, Department of Programming and High-Performance Computing,Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk; myumla.myu@gmail.com

[6] Chief of IT-education department, Northern (Arctic) Federal University, Arkhangelsk;derxyz@yandex.ru

УДК 512.917+513.9

Разложение неблуждающего множества для нетранзитивных счетных топологических марковских цепей

© **М. И. Малкин**[1]

Аннотация. Рассматриваются счетные топологические марковские цепи, вообще говоря, нетранзитивные. Показано, что неблуждающее множество отображения сдвига на компактификации пространства орбит представляется в виде несвязной суммы неблуждающих множеств транзитивных компонент плюс, возможно, одна устойчивая неподвижная точка — символическая бесконечность. В качестве следствия получен результат об аппроксимации топологической энтропии разложимой счетной топологической марковской цепи.

Ключевые слова: топологические марковские цепи, топологическая энтропия, отображение сдвига

1. Введение

Топологические марковские цепи (ТМЦ) существенно используются в качестве символических моделей для различных классов динамических систем с гиперболической структурой, включая неравномерно гиперболические и частично гиперболические системы; дело в том, что фазовое пространство таких систем обычно допускает марковское разбиение (возможно, счётное). К таким классам систем относятся системы, удовлетворяющие акиоме А С.Смейла, гиперболические бильярды, геометрические модели аттрактора Лоренца, одномерные кусочно-монотонные отображения с положительной топологической энтропией и др. (см. [1], [3],[4], [7], [2], [6]). В частности, Ф. Хофбауэр доказал (см. [5]), что для кусочно-монотонного, кусочно-непрерывного отображения f интервала I с положительной топологической энтропией можно построить конечную или счётную ТМЦ (Ω_A, σ) с матрицей переходов A, такую, что $f : I \to I$ топологически сопряжено с отображением сдвига $\sigma : \Omega_A \to \Omega_A$ (точнее говоря, сопряженность имеет место для всех точек, кроме, возможно, так называемого «малого множества», т.е. такого множества, которое не содержит периодических точек и обладает тем свойством, что для любой сосредоточенной на нём инвариантной меры энтропия Колмогорова-Синая равна нулю). Тем самым, изучение топологических и эргодических свойств одномерных кусочно-монотонных отображений с положительной топологической энтропией можно свести к рассмотрению счётных топологических марковских цепей.

В отличие от конечных топологических марковских цепей, пространство Ω_A счетной ТМЦ некомпактно и поэтому здесь возникают серьезные проблемы при обобщении важных топологических и эргодических результатов теории марковских цепей, в частности теории Перрона-Фробениуса. В случае сложных систем с неравномерно гиперболической или частично гиперболической структурой спектральное разложение неблуждающего множества на транзитивные компоненты может оказаться бесконечным, и тогда предельное поведение системы, вообще говоря, не сводится к изучению поведения на транзитивных компонентах. Аналогичная ситуация имеет место для ТМЦ. Для неразложимой бесконечной матрицы переходов A соответствующая ТМЦ топологически транзитивна,

[1] Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; malkin@unn.ru

и в этом случае, как показали Д. Вер-Джонс и Б.М. Гуревич (см. [12], [10], [11]) удается частично обобщить результаты теории Перрона-Фробениуса.

В данной статье рассматриваются счетные ТМЦ с разложимыми матрицами переходов A. В этом случае динамическая система (Ω_A, σ) нетранзитивна и поэтому, в силу некомпактности пространства Ω_A, могло, априори, оказаться так, что неблуждающее множество компактификации данной системы содержит, кроме неблуждающих точек транзитивных компонент, еще и точки, аккумулирующиеся на бесконечности. В таком случае возникали бы серьезные проблемы из-за усложнения структуры предельных орбит и, соответственно, проблемы с аппроксимацией топологической энтропии и инвариантных мер. Как показывет основной результат данной статьи (теорема 2.1.), на самом деле неблуждающее множество отображения сдвига на компактификации пространства орбит представляется в виде несвязной суммы неблуждающих множеств транзитивных компонент плюс, возможно, одна устойчивая неподвижная точка — символическая бесконечность. В качестве следствия получен результат об аппроксимации топологической энтропии разложимой счетной топологической марковской цепи.

2. Разложение неблуждающего множества счетной ТМЦ

Рассмотрим бесконечную матрицу $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ из нулей и единиц. Данной матрице следующим образом ставится в соответствие счетная топологическая марковская цепь (ТМЦ). Пусть $\mathbf{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — множество символов (алфавит) и пусть $\Omega_A \subset \mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$ — множество всех бесконечных в обе стороны последовательностей $\underline{x} = (x_n)_{n=-\infty}^{+\infty}$ натуральных чисел, для которых при всех $n \in \mathbf{Z}$ выполняется

$$a_{x_n, x_{n+1}} = 1.$$

Метрика ρ на пространстве Ω_A вводится так:

$$\rho(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^{|n|}} \mid \frac{1}{x_n} - \frac{1}{y_n} \mid . \tag{2.1}$$

ТМЦ (Ω_A, σ) есть топологическое (метрическое) пространство Ω_A, на котором действует отображение сдвига $\sigma \colon \Omega_A \to \Omega_A$, задаваемое формулой $\sigma(\underline{x}) = \underline{y}$, где $y_n = x_{n+1}$ для всех $n \in \mathbf{Z}$. Очевидно, метрика ρ согласована с топологией прямого (тихоновского) произведения на пространстве $\mathbf{N}^{\mathbf{Z}}$; здесь предполагается, что множество $\mathbf{N}$ наделено дискретной топологией.

Таким образом, пространство Ω_A некомпактно. Чтобы компактифицировать Ω_A, рассмотрим расширенный алфавит с дополнительным символом ∞, т.е. $\overline{\mathbf{N}} = \mathbf{N} \bigcup \{\infty\}$. Метрика на $\overline{\mathbf{N}}$ задается по формуле $d(n,m) = \mid \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \mid$, где естественно предполагается, что $\frac{1}{\infty} = 0$. Далее рассматривается замыкание пространства Ω_A в $\overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$, т.е. $\overline{\Omega}_A = Clos(\Omega_A)$. Легко видеть, что на пространство $\overline{\Omega}_A$ корректно продолжается метрика ρ, задаваемая формулой (1), и, кроме того, $\overline{\Omega}_A$ является σ-инвариантным.

Следующий результат следует непосредственно из определений пространств Ω_A и $\overline{\Omega}_A$.

Лемма 2.1. *Любое открытое множество $G \subset \overline{\Omega}_A$ можно представить в виде конечного или счетного объединения непересекающихся цилиндров из $\overline{\Omega}_A$. То же самое утверждение справедливо при замене $\overline{\Omega}_A$ на Ω_A.*

Мы всюду без ограничения общности предполагаем, что A — бесконечная матрица из нулей и единиц, не имеющая ни нулевых строк, ни нулевых столбцов (иначе соответствующий символ следует исключить из алфавита). Далее, мы предполагаем, что для матрицы

A определены (конечны) все положительные степени, т.е. A^k, i.e. $a_{i,j}^{(k)} < +\infty$ при любых i, j, k. Для $I \subset \mathbf{N}$ мы обозначаем через $A|_I$ подматрицу матрицы A с индексным множеством I. Для простоты записи мы обозначаем через $A|_n$ конечную подматрицу $A|_{\{1,2,\dots,n\}}$, а через $\hat{A}|_k$ — бесконечную подматрицу $A|_{\{k,k+1,\dots\}}$.

Матрица A называется неразложимой, если для любых $i, j \in \mathbf{N}$ найдется натуральное число k такое, что $a_{i,j}^{(k)} > 0$. В противном случае матрица A разложима. Точно так же, как и в случае конечных ТМЦ (см., например, [8]), доказывается, что неразложимость матрицы A эквивалентна транзитивности системы (Ω_A, σ). Для неразложимой матрицы A обозначим через $d = d(A)$ её индекс цикличности (период). В случае $d > 1$ множество индексов $\mathbf{N}$ можно разбить на d подмножеств $I_1, I_2, \dots I_d$ так, что для любых двух индексов $i \in I_s, j \in I_t$ будет существовать $k > 0$, удовлетворяющее условию $a_{i,j}^{(k)} > 0$, в том и только в том случае, когда $k \equiv (s-t)\mathbf{mod}\ d$.

Пусть $h(A)$ — топологическая энтропия сдвига σ на компактификации $\overline{\Omega}_A$. Для конечной матрицы B обозначим через $h(B)$ топологическую энтропию ограничения $h(\sigma|\Omega_B)$. Б.М. Гуревич показал (см. [10], [11]), что для неразложимой матрицы A существует последовательность конечных неразложимых подматриц $A|_{J_n}$, такая, что

$$J_n \subset J_{n+1} \text{ для всех } n, \ \bigcup J_n = \mathbf{N} \tag{2.2}$$

и выполняется

$$h(A) = \lim_{n\to\infty} h(A|_{J_n}) = \lim_{n\to\infty} h(A|_n). \tag{2.3}$$

В качестве следствия из основного результата данной статьи мы покажем, что равенство $h(A) = \lim_{n\to\infty} h(A|_n)$ справедливо и для разложимых матриц. Для разложимой матрицы A и индекса $i \in \mathbf{N}$ обозначим через $I(i)$ максимальное подмножество (возможно, пустое) $J \subset \mathbf{N}$ такое, что $i \in J$ и матрица $A|_J$ неразложима, т.е.

$$I(i) = \{j \in \mathbf{N} \colon \exists k_1 > 0, \exists k_2 > 0 \text{ т.ч. } a_{ij}^{(k_1)} > 0, a_{ji}^{(k_2)} > 0\}.$$

Обозначим для простоты матрицу $A|_{I(i)}$ через A_i. Заметим, что если множество $I(i)$ конечно, то $\overline{\Omega}_{A_i} = \Omega_{A_i}$, где запись $\overline{\Omega}_{A_i}$ означает замыкание множества Ω_{A_i} в пространстве $\overline{\Omega}_A$. Легко показать, что для бесконечной разложимой матрицы A неблуждающее множество $NW(\sigma|\Omega_A)$ (очевидно, некомпактное) представляется в виде объединения орбит транзитивных компонент:

$$NW(\sigma|\Omega_A) = \bigcup_i NW(\sigma|\Omega_{A_i}) = \bigcup_i \Omega_{A_i}.$$

Для понимания поведения предельных орбит ТМЦ (и в частности, для оценки топологической энтропии, инвариантных мер) требуется найти разложение неблуждающего множества компактификации $(\overline{\Omega}_A, \sigma)$. Следующая теорема показывает, что, подобно некомпактифицированной ТМЦ, неблуждающее множества компактификации $(\overline{\Omega}_A, \sigma)$ обладает аналогичным спектральным разложением. В формулировке и доказательстве теоремы мы используем обозначение $(\infty) = (\dots\infty\infty\infty\dots) \in \overline{\mathbf{N}}^{\mathbf{Z}}$.

Теорема 2.1. *Неблуждающее множество отображения сдвига σ на компактификации $\overline{\Omega}_A$ представляется в виде*

$$NW(\sigma|\overline{\Omega}_A) = (\bigcup \overline{\Omega}_{A_i}) \bigcup P,$$

где $P = (\infty)$, когда индексное множество $I(i)$ конечно для всех i, и $P = \emptyset$ в противном случае.

Доказательство. Разобьем доказательство теоремы на отдельные утверждения.

(1) Если $\underline{x} = (x_n) \in \overline{\Omega}_A$ и $x_{n_0} \neq \infty, x_{n_1} \neq \infty$ для некоторых $n_0 < n_1$, то $x_n \neq \infty$ при всех $n, n_0 \leq n \leq n_1$. Действительно, в противном случае найдется $n_2, n_0 < n_2 < n_1$ такое, чтоh $x_{n_2} = \infty$. Отсюда следует, что существует последовательность $\underline{y}^{(m)} = (y_n^{(m)}) \in \Omega_A$ такая, что

$$y_{n_0}^{(m)} = x_{n_0}, y_{n_1}^{(m)} = x_{n_1} \text{ для всех } m > 0; \text{ и } \lim_{m\to\infty} y_{n_2}^{(m)} = \infty.$$

Поэтому найдется бесконечное множество различных значений y_{n_2}, для которых $a_{x_{n_0},y_{n_2}}^{(n_2-n_0)} > 0$, $a_{y_{n_2},x_{n_1}}^{(n_1-n_2)} > 0$, и, значит, $a_{x_{n_0},x_{n_1}}^{(n_1-n_0)} = \infty$. Но это противоречит условию конечности всех положительных степеней матрицы A.

Таким образом, точки $\underline{x} \in \overline{\Omega}_A \setminus \Omega_A$ могут иметь одну из следующих форм:
a) $\underline{x} = (\ldots, \infty, \infty, \infty, x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots)$, т.е. $x_n = \infty$ при $n < n_0$, $x_n < \infty$ при $n \geq n_0$;
b) $\underline{x} = (\ldots, x_{n_1-1}, x_{n_1}, \infty, \infty, \infty, \ldots)$, т.е. $x_n < \infty$ при $n \leq n_1$, $x_n = \infty$ при $n > n_1$;
c) $\underline{x} = (\ldots, \infty, \infty, x_{n_0}, \ldots, x_{n_1}, \infty, \infty, \ldots)$, т.е. $x_n = \infty$ при $n < n_0$ и при $n > n_1$, $x_n < \infty$ при $n_0 \leq n \leq n_1$.

(2) Если $\underline{x} = (x_n) \in \overline{\Omega}_A$ и $x_{n_0} = x_{n_1} \neq \infty$ для некоторых $n_0 < n_1$, то $I(x_n) = I(x_{n_0}) \neq \emptyset$ при всех $n, n_0 \leq n \leq n_1$.

Действительно, данное утверждение следует из (1) и определения индексного множества $I(i)$.

(3) Для всех i выполняется $NW(\sigma|\overline{\Omega}_{A_i}) = \overline{\Omega}_{A_i}$.

Действительно, данное утверждение следует из включений:

$$NW(\sigma|\Omega_{A_i}) \supset \overline{Per(\sigma|\overline{\Omega}_{A_i})} \supset \overline{Per(\sigma|\Omega_{A_i})} = \overline{\Omega}_{A_i},$$

где Per обозначает множество периодических точек, а замыкание рассматривается в пространстве $\overline{\Omega}_A$.

(4) $(\infty) \in \overline{\Omega}_A$.

Для доказательства данного утверждения рассмотрим последовательность $\underline{x}^{(m)} = (x_n^{(m)}) \in \Omega_A$ такую, что $x_0^{(m)} = m$ при всех $m > 0$ (такая последовательность существует, поскольку матрица A не содержит ни нулевых строк, ни столбцов). Для предельной точки $\underline{y} = (y_n) \in \overline{\Omega}_A$ этой последовательности имеем: $y_0 = \infty$. Тогда из утверждения (1) следует, что либо $y_n = \infty$ при всех $n \leq 0$, либо $y_n = \infty$ при всех $n \geq 0$. Поэтому либо $\sigma^{-k}(\underline{y})$, либо $\sigma^k(\underline{y})$ стремится к (∞) при $k \to +\infty$.

Теперь мы можем доказать утверждение теоремы. Возьмем произвольную точку $\underline{x} \in NW(\sigma|\overline{\Omega}_A) \setminus (\infty)$ и целое число l такое, что $x_l \neq \infty$. Для любого натурального m рассмотрим окрестность U_m точки $(\underline{x})$, задаваемую следующим образом: $U_m = \{\underline{y} = (y_n) \in \overline{\Omega}_A \colon$ если для данного $n, l - m \leq n \leq l + m$, выполняется $x_n \neq \infty$, то $y_n = x_n$; в противном случае $y_n > m\}$.

Поскольку точка $\underline{x}$ неблуждающая, существуют число $k_m > m$ и точка $\underline{y}^{(m)} = (y_n^{(m)}) \in U_m \bigcap \sigma^{-k_m}(U_m)$. Тогда $y_l^{(m)} = x_l, y_{l+k_m}^{(m)} = x_l$ и в силу утверждения (2), $y_n^{(m)} \in I(x_l)$ при всех $n, l \le n \le l + k_m$. Возьмем точку $\underline{z}^{(m)} = (z_n^{(m)}) \in \Omega_{A_{x_l}}$ такую, что

$$z_n^{(m)} = \begin{cases} y_n^{(m)} & \text{при } l \le n \le l+m \\ y_{n+k_m}^{(m)} & \text{при } l-m \le n \le l \end{cases}$$

Очевидно, $\lim_{m\to\infty} \underline{z}^{(m)} = \underline{x}$, и поэтому $\underline{x} \in \overline{\Omega}_{A_{x_l}}$. So we have

$$NW(\sigma|\overline{\Omega}_A) \subset (\bigcup_i \overline{\Omega}_{A_i}) \bigcup (\infty)$$

Оставшаяся часть доказательства формулы из утверждения теоремы очевидно следует из пунктов (3) и (4).
Доказательство закончено.

В качестве следствия получим результат, обобщающий для нетранзитивных ТМЦ теорему Гуревича об аппроксимации топологической энтропии.

Следствие 2.1. *Для счетной ТМЦ с разложимой матрицей A (possible reducible) выполняется*

$$h(A) = \sup_i h(A_i) = \lim_{n\to\infty} h(A|_n).$$

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [1]), что для непрерывного отображения $T\colon X \to X$ компакта X, который представляет собой объединение инвариантных замкнутых подмножеств (т.е $\bigcup X_\alpha = X$, $TX_\alpha \subset X_\alpha$ при всех α), имеет место формула $h(T) = \sup_\alpha h(T|X_\alpha)$. Поэтому в силу теоремы 2.1. и очевидного равенства $h(\sigma|(\infty)) = 0$ получаем:

$$h(\sigma|NW(\sigma|\overline{\Omega}_A)) = \sup_i h(\sigma|\overline{\Omega}_{A_i}) = \sup_i h(A_i).$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует неразложимая подматрица submatrix A_i, такая, что $h(A_i) > h(A) - \frac{\varepsilon}{2}$. Если индексное множество $I(i)$ конечно, то $h(A|_n) \ge h(A_i)$ для достаточно больших large n. Если же множество $I(i)$ бесконечно, то по теореме Гуревича можно найти конечное подмножество $J \subset I(i)$ такое, что $h(A|_J) > h(A_i) - \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому $J \subset \{1, 2, \ldots, n\}$ для достаточно большого n, и, следовательно, $h(A|_n) \ge h(A|_J) > h(A) - \varepsilon$.
Доказательство закончено.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 12-01-00672, 13-01-00589.

Список литературы

1. R. Bowen, "Equlibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms", *Lecture Notes Math.*, **470** (1975).

2. W. de Melo, S. van Strien, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag, New York, 1993.

3. L. A. Bunimovich, N. I. Chernov, Ya. G. Sinai, "Markov partitions for two-dimensional hyperbolic billiards", *Uspekhi Matem. Nauk*, **45** (1990), 97–134.

4. Y. Guivarch, J. Hardy, “Theorem limites pour une classe de chaines de Marcov et applications aux classe de chaines de Marcov et applications aux diffeomorphismes d’Anosov”, *Ann. Inst. H.Poincare Probab. Statist.*, **24** (1988), 73–98.

5. F. Hofbauer, “On intrinsic ergodicity of piecewise monotone transformations with positive entropy”, *Israel J. Math.*, **34** (1979), 213–236.

6. M. Malkin, “On continuity of entropy of discontinuous mappings of the interval”, *Selecta Mathematica Sovietica*, **8** (1989), 131–139.

7. В.С. Афраймович, В.В. Быков, Л.П. Шильников, “О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца”, *Труды ММО*, **44** (1982), 150–212.

8. А.Б. Каток, Б. Хассельблат, *Введение в современную теорию динамических систем*, Факториал, М., 1999.

9. M.-C.Li, M.Malkin, “Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps”, *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353–3372.

10. Б.Н. Гуревич, “Топологическая энтропия счетной цепи Маркова”, *ДАН СССР*, **187** (1969), 715–718.

11. Б.Н. Гуревич, “Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве счетного графа”, *ДАН СССР*, **192** (1970), 963–965.

12. D. Vere-Jones, “Ergodic properties of nonnegative matrices”, *Pacific Journ. Math.*, **22** (1967), 361–386.

Decomposition of non-wandering set for non-transitive countable topological Markov chains

© **M. I. Malkin**[2]

Abstract. We consider the counting topological Markov chain, in general, non-transitive. It is shown that non-wandering set of the map shift by shrinking space orbits is represented as a disjoint union of non-wandering set of transitive component plus perhaps one stable fixed point – symbolic infinity. As a corollary, we obtain the result of the approximation topological entropy decomposable countable topological Markov chain.

Key Words: topological Markov chains, topological entropy, shift map

[2] Associate Professor, Department of Differential Equations and Mathematical Analysis, Nizhny Novgorod State Lobachevsky Universit, Nizhny Novgorod; malkin@unn.ru.

УДК 517.9

Об асимптотическом равновесии некоторых экономических систем

© Т. Ф. Мамедова [1], Д. К. Егорова [2]

Аннотация. В работе с помощью математического аппарата Е. В. Воскресенского исследуется вопрос существования асимптотического равновесия некоторых экономических систем.
Ключевые слова: дифференциальные уравнения, асимптотическое равновесие, вектор-функции Ляпунова, абсолютно равномерно ограниченные решения.

1. Введение

При изучении динамических математических моделей сложных экономических систем особый интерес представляет поведение взаимосвязных подсистем исходной системы, так как на основе совокупности свойств и природы их взаимодействий можно определить устойчивость экономической системы в целом, а так же прогнозировать динамику ее развития. В работе [1] для анализа подобных экономических систем используется математический метод сравнения и вектор-функции Ляпунова. В данной работе эта же задача решается с помощью математического аппарата, разработанного Е. В. Воскресенским [2], причем предполагается использование лишь вектор-функций Ляпунова, что обеспечивает снятие части ограничений, по сравнению с предыдущим подходом к этому вопросу.

2. Постановка задачи

Рассмотрим экономическую систему S, которая состоит из взаимосвязных и взаимозависимых между собой подсистем $s_i, i = \overline{1,n}$. Устойчивость всей экономической системы определяется на основе устойчивости ее подсистем. Пусть дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(t,x) \tag{2.1}$$

описывает экономическую систему S, где $x \in \mathbb{R}^n$ – есть состояние экономики, $f(t,x)$ – функция спроса и $f(t,x) \in \mathbb{C}^{(0,1)}(T \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$. Будем полагать, что решение $x(t : t_0, x_0)$ уравнения (2.1) существует для всех начальных условий $(t_0, x_0) \in T \times \mathbb{R}^n$ и $t \in T_0$. Здесь T – временной интервал и $T_0 = [t_0, +\infty)$. Кроме этого компоненты вектора x системы S неотрицательны, т.е. $x \in \mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0, i = \overline{1,n}\}$. Предположим так же, что

$$f(t,0) = 0, \forall t \in T \tag{2.2}$$

и $x = 0$ – единственное состояние равновесия экономической системы S, описываемой дифференциальным уравнением(2.1).

[1] Профессор кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; mamedovatf@yandex.ru

[2] Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; egorovadk@mail.ru

Пусть вектор-функция спроса $f(t,x)$ имеет компоненты $f_i(t,x) \equiv f_i(t, d_{i1}x_1, d_{i2}x_2, ..., d_{in}x_n), i = \overline{1,n}$, где элементы $d_{ij} : T \to [0,1], d_{ij}(t) \in \mathbb{C}(T)$ отражают силу взаимозависимости подсистем s_i в системе S. Тогда обозначим через $D = (d_{ij})$ – матрицу взаимодействия размерности $(n \times n)$. Фундаментальную матрицу взаимодействия D_f – определим следующим образом. Все элементы d_{ij} принимают двоичные значения: 1 – если j-ая подсистема влияет на i-ую, 0 – если j-ая подсистема не влияет на i-ю. Будем предполагать, что структура многочисленных экономических систем такова, что элементы d_{ij}, отражающие взаимодействие i-ой и j-ой подсистем, могут быть произвольными функциями времени $d_{ij}(t), t \in T_0$. Очевидно, что под действием структурных возмущений группы систем либо перестают взаимодействовать, либо взаимодействуют в течение определенного экономического процесса.

Найдем условия асимптотического равновесия экономической системы S, описываемой дифференциальным уравнением (2.1).

3. Об асимптотическом равновесиии

Адаптируем определение асимптотического равновесия Чезари [3] к нашей задаче.

Определение 3.1. *Будем говорить, что дифференциальное уравнение* (2.1) *имеет асимптотическое равновесие в структуре S, если каждое его решение $x(t)$ имеет предел $x(t) \to c, c \in \mathbb{R}^n$, при $t \to +\infty$ и для любого заданного $c \in \mathbb{R}^n$ существует решение $x(t)$, которое при $t \to +\infty$ имеет своим пределом этот вектор для любой матрицы взаимодействия D.*

Определение 3.2. *Будем говорить, что состояние равновесия $x = 0$ системы* (2.1) *называется устойчивым в структуре S, если оно устойчиво по Ляпунову для любой матрицы взаимодействия D.*

Определение 3.3. [5] *Решения $x(t; t_0, x_0)$ дифференциального уравнения* (2.1) *называются абсолютно равномерно ограниченными для $\| x_0 \| \leq r, t \geq T$, если $\| x(t; t_0, x_0) \| \leq c_0(r)$ для всех $T \leq t, t_0 < +\infty$.*

Теорема 3.1. [5] *Для абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения* (2.1) *при $\| x_0 \| \leq r, t \geq T$, необходимо и достаточно существование функций $V, W : [T, +\infty) \times \mathbb{R}^n \to (0, +\infty)$ таких, что:*

a) $V(t,x), W(t,x) \to +\infty$ при $\| x \| \to +\infty$ равномерно по t;

b) $V(t,x) \leq \rho_1(r), W(t,x) \leq \rho_2(r)$ для $\| x \| \leq r$;

c) $V(t,x(t)), W(t,x(t))$ — соответственно невозрастающая и неубывающая функции, где $x(t)$ — решение уравнения (2.1).

Доказательство.

Доказательство теоремы состоит из двух частей. Необходимость и достаточность существования функции V при $t \geq T$ для абсолютно равномерной ограниченности решений уравнения (2.1) проведено Иошизавой [4]. Докажем существование функции W.

Достаточность.

Пусть $T \leq t \leq t_0$. Согласно условию $b)$ $W(t,x) \leq \rho_2(r)$ при $\| x \| \leq r$. Исходя из условия $a)$ можно подобрать неотрицательную непрерывную функцию $\beta_2(r)$ такую, что $\beta_2(r) \leq W(t,x)$ при $\| x \| \leq r$, причем $\beta_2(r) \to +\infty$ при $r \to +\infty$. Поэтому можно выбрать такое $k_2 (k_2 > p_2)$, что $\beta_2(k_2) > \rho_2(p_2)$.

Предположим, что для некоторого решения $x = x(t : t_0, x_0)$, исходящего из точки (x_0, t_0), мы имеем

$$\| x(t_1 : t_0, x_0) \| = k_2, \| x(t_2 : t_0, x_0) \| = p_2$$

и $p_2 < \| x(t : t_0, x_0) \| < k_2$ для $t_1 < t < t_2$. Рассматривая функцию $W(t, x(t : t_0, x_0))$ имеем, $W(t_1, x(t_1 : t_0, x_0)) \geq \beta_2(k_2)$ и $W(t_2, x(t_2 : t_0, x_0)) \leq \rho_2(p_2)$.

С другой стороны в силу условия $c)$ находим

$$W(t_1, x(t_1 : t_0, x_0)) \leq W(t_2, x(t_2 : t_0, x_0)).$$

Отсюда получим $\beta_2(k_2) < \rho_2(p_2)$. Мы пришли к противоречию.

Таким образом $\| x(t : x_0, t_0) \| \leqslant \rho_2(p_2)$, то есть решение равномерно ограничено при $T \leq t \leq t_0$.

Необходимость.

Пусть $T \leq t \leq t_0$. Рассмотрим абсолютно равномерно ограниченное решение уравнения (2.1) $x = x(t : t_0, x_0)$ при $T \leq t \leq t_0$. Положим $W(t, x) = \min\{\| x(\bar{t} : t, x) \| : T \leq \bar{t} \leq t_0\}$. Такую функцию можно определить для каждой точки (t, x) взятой из $[T, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Из определения функции W видно, что $W(t, x) \leq \| x \|$ при $r = \| x \|$, то есть имеет место условие $b)$.

В силу абсолютно равномерной ограниченности решений имеем

$$\| x(t : t_0, x_0) \| \leq A(R),$$

и можно предположить, что $A(R)$ – непрерывная строго монотонно возрастающая функция от R. Тогда существует функция $R(\|x\|)$ такая, что $0 < R(\|x\|) \leq V(t, x)$, где $R(A)$ – обратная функция от $A(R)$, причем $R(A)$ строго монотонно возрастающая функция от A и $R(A) \to +\infty$ при $A \to +\infty$ отсюда следует, что $W(t, x) \to +\infty$ при $\| x \| \to +\infty$. Таким образом доказали существование функции $W(t, x)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Итак, для абсолютно равномерно ограниченного решения уравнения (2.1) существуют функции Ляпунова $V(t, x), W(t, x)$ удовлетворяющие условиям теоремы 3.1. В работе [2] приведены теоремы об абсолютной равномерной ограниченности решений, когда непосредственно по функции f строятся функции Ляпунова V и W.

В работе [5] рассматривается граничная задача с начальными данными $(+\infty, x_0)$ и приведены условия существования и единственности решения вида $x(t) = x(t; +\infty, x_0)$. Сформулируем теорему, условия которой гарантируют асимптотическое равновесие уравнения (2.1).

Т е о р е м а 3.2. *Рассмотрим равномерно ограниченное по* t *и* t_0 *множество* $E = \{x(t; t_0, x_0) : T \leq t, t_0 < +\infty, x_0 \in \mathbb{R}^n\}$ *и абсолютно равномерно ограниченные решения* $x(t; t_0, x_0), \forall x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Если пределы* $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t; t_0, x_0)$ *существуют и конечны* $\forall t_0 \geq T$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *то уравнение* (2.1) *имеет асимптотическое равновесие.*

Доказательство теоремы 3.2. следует из существования решения $x(t) = x(t; +\infty, x_0)$, $\forall x_0$, так как в этом случае предел $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t; t_0, x_0)$ существует и конечен.

Таким образом, если для решений дифференциального уравнения (2.1) выполняются условия теоремы 3.1., то по теореме 3.2. экономическая система S, описываемая дифференциальным уравнением (2.1) с матрицей взаимодействия подсистем D, будет иметь асимптотическое равновесие.

Список литературы

1. Siljak D. D., “Competitive economic systems: stability, decomposition, and aggregation”, *IEEE Conference on Decision and Control*, 1973, 265–275.

2. Воскресенский Е. В., *Методы сравнения в нелинейном анализе*, Изд-во Сарат.ун-та, Саран.фил., Саранск, 1990, 224 с.

3. Чезари Л., *Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Мир, М., 1964, 447 с.

4. Yoshizava T., “Liapunov’s function and boudedness of solutions”, *Funktiul*, 1956, 71–103.

5. Воскресенский Е. В., “Об аттракторах обыкновенных дифференциальных уравнений”, *Изв. вузов. Математика*, **4** (2003), 17–26.

About asymptotic equilibrium of some economic sistem

© T. F. Mamedova [3], D. K. Egorova [4]

Abstract. In this article the existence of asymptotic equilibrium of some economic systemsis investigated. This problem is solving with the usage E.V. Voskresensky’s results.

Key Words: differential equations, asymptotic equilibrium, the vector Lyapunov function, absolutely in regular intervals limited solutions.

[3] Professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; mamedovatf@yandex.ru

[4] Associate professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; egorovadk@mail.ru

УДК 517.9

О применении разрывного конечно-элементного метода Галёркина для решения двумерных уравнений диффузионного типа на неструктурированных сетках

© **В. Ф. Масягин**[1], **Р. В. Жалнин**[2], **В. Ф. Тишкин**[3]

Аннотация. Предлагается новый эффективный алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина, который обладает сходимостью и точностью при использовании явной схемы. Отличительной особенностью предложенного метода является использование двойственной сетки для отыскания части параметров. Исследование метода проводится на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности. Расчеты двумерных модельных задач показывают хорошую точность предложенного метода.

Ключевые слова: параболические уравнения, разрывные методы Галёркина, сходимость и точность численного метода.

1. Описание алгоритма решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина

Построение и исследование алгоритма метода решения уравнений диффузионного типа на основе разрывного метода Галёркина проведем на примере начально-краевой задачи для двумерного уравнения теплопроводности:

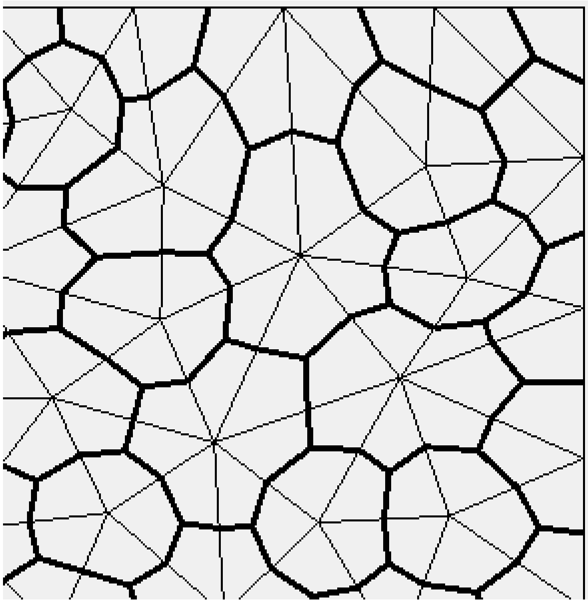
$$\begin{aligned}
&\rho C_\nu \frac{\partial u}{\partial t} = div(\kappa \cdot gradu), \quad (x,y) \in G, \quad 0 < t \le T,\\
&u(x,y,t) = g(x,y,t), \quad (x,y) \in \gamma, \\
&u(x,y,0) = u_0(x,y),
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где C_ν - коэффициент теплоемкости при постоянном объеме, ρ - плотность, κ - коэффициент теплоемкости, u - температура в точке (x,y) в момент времени t, f - плотность тепловых источников, γ - граница области расчета, $g(x,y,t), u_0(x,y)$ - заданные функции. Область $G \cup \gamma$ - произвольная односвязная. В области $G \cup \gamma$ - введем треугольную сетку $\omega_p = \{P_i = (x_i, y_i), i = 1, 2, \ldots, N\}$, содержащую внутренние и граничные точки области. На ω_p построим триангуляцию Делоне: $T(\omega_p) = \{T_k = T(T_k^1 : \{x_1, y_1\}, T_k^2 : \{x_2, y_2\}, T_k^3 : \{x_3, y_3\})\}$. Пусть $T(\omega_p)$ содержит все узлы ω_p ; все треугольники T_k имеют ненулевую площадь и пересекаются не более чем по образующим их вершинам или ребрам. В каждом из треугольников определим центр и середины сторон. В треугольнике T_k с вершинами в точках $T_k^1 : \{x_1, y_1\}, T_k^2 : \{x_2, y_2\}, T_k^3 : \{x_3, y_3\}$ центр (x_c, y_c) определим как: $x_c = \frac{x_1+x_2+x_3}{3}, y_c = \frac{y_1+y_2+y_3}{3}$. Также примем в рассмотрение двойственную сетку, составленную из барицентрических объемов вокруг каждой из точек ω_p, образованных отрезками, соединяющими центры треугольников с серединами сторон. Точка из ω_p будет являться центром для соответствующей ей ячейки двойственной сетки.

[1] Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск; vmasyagin@gmail.com.

[2] Старший преподаватель кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н.П. Огарева, г. Саранск; zhalnin@gmail.com.

[3] Заместитель директора Института прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, г. Москва; tishkin@imamod.ru.



Двойственная сетка

Для аппроксимации первого уравнения из (1.1) необходимо преобразовать его к системе дифференциальных уравнений в частных производных 1-го порядка [1]. Для этого введем дополнительные переменные [2]: $q_x = \frac{\partial u}{\partial x}, q_y = \frac{\partial u}{\partial y}$. Тогда первое уравнение в исходной системе (1.1) можно переписать в виде:

$$\begin{aligned} &\rho C_\nu \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} k q_x + \frac{\partial}{\partial y} k q_y + f, \quad (x,y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ &q_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad (x,y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \\ &q_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (x,y) \in G, \quad 0 < t \leq T, \end{aligned} \tag{1.2}$$

Таким образом, (1.2) – это система дифференциальных уравнений 1-го порядка. Для решения такой системы будем использовать предлагаемый метод на основе разрывного метода Галёркина.

На каждом треугольнике $T_k \in T(\omega_p)$ введем систему линейных базисных функций $\{\varphi_i\} \in P^1, i = 0,1,2, \varphi_0 = 1, \varphi_1 = x - x_c, \varphi_2 = y - y_c$, где (x_x, y_c) - центр треугольника T_k. На каждой ячейке двойственной сетки D_k введем систему линейных базисных функций $\{\psi_i\} \in P^1, i = 0,1,2, \psi_0 = 1, \psi_1 = x - x_c, \psi_2 = y - y_c$, где (x_c, y_c) - центр ячейки D_k.

Приближенное решение u_k будем искать в треугольнике T_k в виде разложения по базису: $u_k = u_{0k} + u_{1k}(x - x_c) + u_{2k}(y - y_c)$, $u_{ik} = u_{ik}(t), u_{ik} \in T_k,\ i = \overline{0,2}, (x_c, y_c)$ - центр треугольника , где неизвестные коэффициенты разложения зависят от времени.

Приближенные решения q_{xk}, q_{yk} будем искать в ячейке D_k в виде разложения по базису: $q_{xk} = q_{x0k} + q_{x1k}(x - x_c) + q_{x2k}(y - y_c)$, $q_{xik} = q_{xik}(t), q_{xik} \in D_k, i = \overline{0,2}, (x_c, y_c)$ - центр ячейки $D_k,\ q_{yk} = q_{y0k} + q_{y1k}(x - x_c) + q_{y2k}(y - y_c)$, $q_{yik} = q_{yik}(t), q_{yik} \in d_k, i = \overline{0,2}, (x_c, y_c)$ - центр ячейки $D_k,$ где неизвестные коэффициенты разложения зависят от времени.

Умножим первое уравнение из (1.2) на базисную функцию $\varphi_i, i = 0,1,2,$ и проинтегрируем произведение по треугольнику T_k, $k = \overline{1,N}$, где N - число треугольников. Точное решение u заменим приближенным u_k [3]. После интегрирования по частям получим:

$$(\rho C_\nu)_k \sum_{i=0}^{2} \frac{\partial u_{ik}}{\partial t} \int\limits_{T_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint\limits_{\partial T_k} n_x \kappa q_x \varphi_m dl + \oint\limits_{\partial T_k} n_y \kappa q_y \varphi_m dl -$$
$$- \int\limits_{T_k} \kappa q_x \frac{\partial \varphi_m}{\partial x} ds - \int\limits_{T_k} \kappa q_y \frac{\partial \varphi_m}{\partial y} ds + \int\limits_{T_k} \Phi_k \varphi_m ds, \quad m = \overline{0,2}, \quad k = \overline{1,N}. \tag{1.3}$$

Умножим второе и третье уравнения из (1.2) на базисную функцию $\psi_i, i = 0,1,2,$ и проинтегрируем произведение по ячейке $D_k, k = \overline{1,M},$ где $M-$ число ячеек двойственной сетки. Получим:

$$\sum_{i=0}^{2} q_{xik} \int\limits_{T_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint\limits_{\partial D_k} n_x u \psi_m dl - \int\limits_{T_k} u_k \frac{\partial \psi_m}{\partial x} ds, \quad m = \overline{0,2}, \quad k = \overline{1,M}, \tag{1.4}$$

$$\sum_{i=0}^{2} q_{yik} \int\limits_{T_k} \varphi_i \varphi_m ds = \oint\limits_{\partial D_k} n_y u \psi_m dl - \int\limits_{T_k} u_k \frac{\partial \psi_m}{\partial y} ds, \quad m = \overline{0,2}, \quad k = \overline{1,M}. \tag{1.5}$$

Сначала из систем (1.4) и (1.5) находим $q_{x0k}, q_{x1k}, q_{x2k}, q_{y0k}, q_{y1k}, q_{y2k}$ на текущем временном слое, используя значения u_k с предыдущего временного слоя, а после подставляем их в систему (1.3) для нахождения u_{0k}, u_{1k}, u_{2k} на текущем временном слое.
Для вычисления двойных и криволинейных интегралов будем использовать квадратурные формулы Гаусса.

2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода по границе треугольника T_k и ячейки двойственной сетки D_k

Пусть $A:\{x_1, y_1\}$ и $B:\{x_2, y_2\}$ - координаты начала и конца ребра треугольника или ячейки двойственной сетки.

$$\int\limits_A^B f(x,y) dl = \frac{x_2 - x_1}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)^2} \times$$
$$\times \left[f\left(\frac{x_2 + x_1}{2} + \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}, \frac{\left(\frac{x_2+x_1}{2} + \frac{x_2-x_1}{2\sqrt{3}} - x_1\right)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} + y_1 \right) \right] +$$
$$+ f\left(\frac{x_2 + x_1}{2} - \frac{x_2 - x_1}{2\sqrt{3}}, \frac{\left(\frac{x_2+x_1}{2} - \frac{x_2-x_1}{2\sqrt{3}} - x_1\right)(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} + y_1 \right)$$

Если $x_2 = x_1$

$$\int\limits_A^B f(x,y) dl = \frac{y_2 - y_1}{2} \left[f\left(x_1, \frac{y_2 + y_1}{2} - \frac{y_2 - y_1}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(x_1, \frac{y_2 + y_1}{2} + \frac{y_2 - y_1}{2\sqrt{3}}\right) \right]$$

3. Вычисление двойного интеграла по треугольнику T_k и ячейке двойственной сетки D_k

Двойной интеграл по ячейке двойственной сетки считаем как сумму двойных интегралов по треугольникам, из которых она состоит. Следуя работе [4] возьмем три точки на каноническом треугольнике:

$$\begin{aligned}
\widetilde{t_1} &: \left(\zeta_1 = \frac{2}{3}, \eta_1 = \frac{1}{6}\right), \quad \omega_1 = \frac{1}{3},\\
\widetilde{t_2} &: \left(\zeta_2 = \frac{1}{6}, \eta_2 = \frac{2}{3}\right), \quad \omega_2 = \frac{1}{3},\\
\widetilde{t_3} &: \left(\zeta_3 = \frac{1}{6}, \eta_3 = \frac{1}{6}\right), \quad \omega_3 = \frac{1}{3}.
\end{aligned}$$

Значение интеграла по треугольнику с вершинами в точках $T_k^1 : \{x_1, y_1\}$, $T_k^2 : \{x_2, y_2\}, T_k^3 : \{x_3, y_3\}$ равно

$$\int\limits_{T_k} f(x,y)ds = J \int\limits_0^1 \int\limits_0^{1-\zeta} f(\zeta,\eta) d\zeta d\eta \approx J \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} \widetilde{f}(\zeta_i, \eta_i)\omega_i,$$

где $J = |(x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)|$ - якобиан перехода к каноническому треугольнику, $\widetilde{f}$ - значение подынтегральной функции в образах точек $\widetilde{t_1}, \widetilde{t_2}$ и $\widetilde{t_3}$ в исходном треугольнике $\{T_k^1 T_k^2 T_k^3\}$.

4. Вычисления на границе расчетной области

Значения $u(x,y,t)$ на границе γ расчетной области брались исходя из граничных условий. На граничных треугольниках производилась реконструкция решения. После каждой итерации по времени модифицировались коэффициенты u_{0k}, u_{1k}, u_{2k} так, чтобы на граничной стороне в точности выполнялось граничное условие с сохранением значения $u(x,y,t)$ в центре треугольника (x_c, y_c). Реконструкция производилась по формулам:

$$\begin{cases}
\widetilde{u_{0k}} = u_{0k},\\
\widetilde{u_{1k}} = \dfrac{\left(g(x_1,y_1,t) - u_{0k}\right)(y_2 - y_c) - \left(g(x_2,y_2,t) - u_{0k}\right)(y_1 - y_c)}{(x_1 - x_c)(y_2 - y_c) - (x_2 - x_c)(y_1 - y_c)},\\
\widetilde{u_{2k}} = \dfrac{g(x_1,y_1,t) - u_{0k} - u_{1k}(x_1 - x_c)}{y_1 - y_c},
\end{cases}$$

где k - номер граничного треугольника, u_{0k}, u_{1k}, u_{2k} - значения коэффициентов до реконструкции, $\widetilde{u_{0k}}, \widetilde{u_{1k}}, \widetilde{u_{2k}}$ - значения коэффициентов после реконструкции, (x_1, y_1) и (x_2, y_2) - координаты начала и конца граничного ребра треугольника, $g(x_1, y_1, t), g(x_2, y_2, t)$ - значения на границе расчетной области.

5. Результаты расчетов

Тестирование предложенного метода производилось с помощью расчетов ряда двумерных модельных задач. В качестве задачи 1 рассматривалась задача:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \le T,$$
$$u(x, y, 0) = sin(\pi x) sin(\pi y), \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1,$$
$$u(0, y, t) = 0, u(1, y, t) = 0, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le t \le T,$$
$$u(x, 0, t) = 0, u(x, 1, t) = 0, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T,$$

точное решение которой $u^T = e^{-2\pi^2 t} sin(\pi x) sin(\pi y)$. Расчет производился до значения $T = 0.0001$ с числом $K = \tau/h^2 = 4,48 \cdot 10^{-7}$, где h - характеристический размер сетки. В таблице 1 указано значение погрешности метода $\sum_{i=1}^{N} \left(u_i - u^T\right)^2 S_i$, где S_i- площадь i-го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого алгоритма с использованием разрывного метода Галёркина с реконструкцией на граничных треугольниках (схема 1) и без реконструкции (схема 2) и результаты работы метода конечных объемов (FVM). В третьей и четвертой строках показан порядок сходимости метода по отношению к результату на предыдущей более грубой сетке.

Таблица 1. Значения погрешности $\sum_{i=1}^{N} \left(u_i - u^T\right)^2 S_i$, полученные при решении задачи 1.

	схема 1		схема 2		FVM	
N=1964 h=0.091	0.0000025821		0.0000033594		0.0000066337	
N=7773 h=0.047	0.0000006664	1.95	0.0000006357	2.40	0.0000035176	0.92
N=31074 h=0.024	0.0000001569	2.09	0.0000001507	2.08	0.0000016554	1.09

Решалась также начально-краевая задача для уравнения теплопроводности [5]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\kappa \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa \frac{\partial u}{\partial y}\right), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < t \le T,$$
$$u(x, y, 0) = 1 + x + y, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1,$$
$$u(0, y, t) = 1 + y, u(1, y, t) = 2 + y, \quad 0 \le y \le 1, \quad 0 \le t \le T,$$
$$u(x, 0, t) = 1 + x, u(x, 1, t) = 2 + x, \quad 0 \le x \le 1, \quad 0 \le t \le T,$$

где $k = 1 + 0.3 sin(10\pi x)$. Решение сравнивалось с решением u^H, полученным по чисто неявной разностной схеме с помощью метода расщепления [6] на структурированной сетке 2001×2001 узлов. Расчет производился до значения $T = 0.0001$ с числом $K = \tau/h^2 = 4,48 \cdot 10^{-7}$, где h - характеристический размер сетки. В таблице 2 указано значение погрешности метода $\sum_{i=1}^{N} \left(u_i - u^T\right)^2 S_i$, где S_i- площадь i-го треугольника. В таблице представлены результаты работы предлагаемого алгоритма с использованием разрывного метода Галёркина с реконструкцией на граничных треугольниках (схема 1) и без реконструкции (схема 2) и результаты работы метода конечных объемов (FVM). В третьей и четвертой строках показан порядок сходимости метода по отношению к результату на предыдущей более грубой сетке.

Таблица 2. Значения погрешности $\sum_{i=1}^{N} \left(u_i - u^T\right)^2 S_i$, полученные при решении задачи 2.

		схема 1		схема 2		FVM	
N=1964	h=0.091	0.0000009262		0.0000011705		0.0000029433	
N=7773	h=0.047	0.0000004442	1.06	0.0000004358	1.43	0.0000017046	0.79
N=31074	h=0.024	0.0000001057	2.07	0.0000001042	2.09	0.0000006992	1.29

Как видно из результатов расчетов, предлагаемый метод обладает более высоким порядком точности по сравнению с методом конечных объемов, а также можно наблюдать сходимость метода при измельчении сетки. Можно заметить, что реконструкция решения на граничных треугольниках дает выгоду только на грубых сетках, на более подробных сетках лучший результат дает решение без реконструкции.

Вывод. Итак, создан новый эффективный алгоритм решения уравнений диффузионного типа на основе использования разрывного метода Галёркина. На примере модельных задач численно показано, что предложенный метод обладает сходимостью и хорошей точностью. Созданный метод позволяет существенно уменьшить объем арифмитической работы на каждом временном слое по сравнению с использованием неявной схемы на подробной сетке.

Список литературы

1. Флетчер К., *Численные методы на основе метода Галеркина: Пер. с английского*, Мир, М., 1988, 352 с.

2. Bassi F., Rebay S., “A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations”, *J. Comput. Phys.*, **131** (1997), 267–279.

3. Cockburn B., Shu C. W., “Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems”, *J. Sci. Comp.*, **3** (2001), 173–261.

4. Li B. Q., *Discontinuous finite elements in fluid dynamics and heat transfer*, Springer, Berlin, 2006, 578 c.

5. Ладонкина М. Е., Милюкова О. Ю., Тишкин В. Ф., “Консервативные схемы для решения уравнений диффузионного типа на основе использования многосеточных методов”, *Труды Средневолжского математического общества*, **10**:2 (2008), 21–44.

6. Киреев В. И., Пантелеев А. В., *Численные методы в примерах и задачах: Учеб. Пособие*, 3-е изд. стер, Высш. шк., М., 2008, 480 с.

Discontinuous finite-element Galerkin method for numerical solution of two-dimensional diffusion problems on unstructured grids

© **V. F. Masyagin**[4], **R. V. Zhalnin**[5], **V. F. Tishkin**[6]

Abstract. The new effective solution algorithm for parabolic equations on base of discontinuous Galerkin method is offered, which has convergence and accuracy when using the explicit scheme. Distinctive feature of the offered method is the use of the dual grid for finding a part of the parameters. The research method is exemplified by the initial-boundary problem for two-dimensional heat conduction equation. Calculations of two-dimensional modeling problems have shown a good accuracy of offered method.

Key Words: parabolic equations, discontinuous Galerkin methods, convergence and accuracy of the method.

[4] Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; vmasyagin@gmail.com.

[5] Assistant Professor of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; zhalnin@gmail.com.

[6] Deputy Director of the Institute of applied mathematics by name M.V. Keldysh of RAS, Moscow; tishkin@imamod.ru.

УДК 517.92

Необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем относительно заданной части переменных

© В. И. Никонов[1]

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем относительно заданной части переменных, выраженные через матричные многочлены.
Ключевые слова: частичная устойчивость, минимальный многочлен, матричный многочлен.

Данная работа является обобщением исследований по частичной устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений, рассмотренных в [3].

1. Системы линейных дифференциальных уравнений

Исследуется устойчивость относительно заданной части компонент фазового вектора системы

$$\frac{dx}{dt} = A_* x(t), \tag{1.1}$$

где $x \in \mathbb{R}^n, A_*$ – матрица, соответствующих размеров.

Предположим, что исследуется устойчивость по первым m компонентам фазового вектора x системы (1.1). Обозначим первую группу координат фазового вектора через y, а остальные компоненты составят вектор z. В связи с этим, систему (1.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= Ay(t) + Bz(t), \\ \frac{dz}{dt} &= Cy(t) + Dz(t), \end{aligned} \tag{1.2}$$

где $y \in \mathbb{R}^m, z \in \mathbb{R}^p, A \in \mathbb{R}^{m\times m}, B \in \mathbb{R}^{m\times p}, C \in \mathbb{R}^{p\times m}, D \in \mathbb{R}^{p\times p}, n = m + p, p \geq 0$.

Предположим, что многочлены

$$\varphi_i(\lambda) = \lambda^{s_i} + \gamma_{i1}\lambda^{s_i-1} + \cdots + \gamma_{i,s_{i-1}}\lambda + \gamma_{i,s_i}, i = 1, \ldots, m,$$

являются правыми минимальными аннулирующими многочленами вектор-строк матрицы B относительно линейного оператора, заданного матрицей D. Тогда справедливо соотношение

$$b_i D^{s_i} + \gamma_{i1} b_i D^{s_i-1} + \cdots + \gamma_{i,s_i-1} b_i D + \gamma_{i,s_i} b_i = 0, i = 1, \ldots, m, \tag{1.3}$$

которое может представлено в виде

$$b_i \varphi_i(D) = 0, i = 1, \ldots, m.$$

Пусть

$$s = \max_{1\leq i\leq m} s_i.$$

[1] Заведующий кафедрой алгебры и геометрии, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; nikonovvi@math.mrsu.ru.

Введем в рассмотрение диагональные матрицы

$$\Gamma_j = diag(\gamma_{1s_1-j}, \gamma_{2s_2-j}, \ldots, \gamma_{m,s_m-j}), j = \overline{0,s}.$$

Кроме этого, положим,

$$\gamma_{i,s_i-j} = 1, \text{при } s_i = j, \text{и } \gamma_{i,s_i-j} = 0, \text{при } s_i < j.$$

Следует отметить, что элементы данных матриц состоят из коэффициентов минимальных аннулирующих многочленов (1.3).

Таким образом, имеет место матричное равенство

$$\Gamma_s BD^s + \Gamma_{s-1}BD^{s-1} + \cdots + \Gamma_0 B = 0. \tag{1.4}$$

Дифференцируя s раз первую подсистему системы (1.2), в силу второй ее подсистемы и, используя условие (1.4) приходим к матричному дифференциальному уравнению, относительно исследуемых компонент фазового вектора

$$\begin{gathered}\Gamma_s \frac{d^{s+1}y}{dt^{s+1}} + (\Gamma_{s-1} - \Gamma_s A)\frac{d^s y}{dt^s} + (\Gamma_{s-2} - \Gamma_{s-1}A - \Gamma_s BC)\frac{d^{s-1}y}{dt^{s-1}} + \cdots \\ +(\Gamma_0 - \Gamma_1 A - \Gamma_2 BC - \cdots - \Gamma_s BD^{s-2}C)\frac{dy}{dt} - \\ -(\Gamma_0 A + \Gamma_1 BC + \Gamma_2 BDC + \cdots + \Gamma_{s-1}BD^{s-2}C + \Gamma_s BD^{s-1}C)y = 0.\end{gathered} \tag{1.5}$$

Например, если $s = 2$, то получаем матричное дифференциальное уравнение

$$\Gamma_2 \frac{d^3y}{dt^3} + (\Gamma_1 - \Gamma_2 A)\frac{d^2y}{dt^2} + (\Gamma_0 - \Gamma_1 A - \Gamma_2 BC)\frac{dy}{dt} - (\Gamma_0 A + \Gamma_1 BC + \Gamma_2 BDC)y = 0.$$

Таким образом, исследование y-устойчивости исходной системы можно свести к исследованию устойчивости матричного уравнения (1.5)

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.1. *Для того, чтобы система* (1.2) *была y-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения* (1.5) *было устойчивым.*

Теорема 1.2. *Для того, чтобы система* (1.2) *была асимптотически y-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы многочлен*

$$\begin{gathered}P(\lambda) = \det(\Gamma_s \lambda^{s+1} + (\Gamma_{s-1} - \Gamma_s A)\lambda^s + (\Gamma_{s-2} - \Gamma_{s-1}A - \Gamma_s BC)\lambda^{s-1} + \cdots \\ +(\Gamma_0 - \Gamma_1 A - \Gamma_2 BC - \cdots - \Gamma_s BD^{s-2}C)\lambda - \\ -(\Gamma_0 A + \Gamma_1 BC + \Gamma_2 BDC + \cdots + \Gamma_{s-1}BD^{s-2}C + \Gamma_s BD^{s-1}C))\end{gathered} \tag{1.6}$$

был устойчивым.

Следствие 1.1. *Если степень многочлена* (1.6) *равна n, то система* (1.2) *приводима к дифференциальному уравнению n-го порядка относительно переменной y. В этом случае характеристическое уравнение системы* (1.2) *совпадает с характеристическим уравнением дифференциального уравнения* (1.5), *а, следовательно, y-устойчивость системы* (1.2) *возможна лишь в случае устойчивости системы по всем координатам фазового вектора x.*

Итак, полученные условия устойчивости, позволяют сделать вывод об устойчивости заданной части переменных фазового вектора исследуемой линейной стационарной системы.

2. Системы линейных разностных уравнений

Аналогичные результаты имеют место и для линейную разностных систем вида

$$x(t+1) = A_*x(t), \tag{2.1}$$

где $x \in R^n, A_*$ – постоянная матрица соответствующих размеров. Представим систему (2.1) в виде

$$\begin{aligned} y(t+1) &= Ay(t) + Bz(t), \\ z(t+1) &= Cy(t) + Dz(t), \end{aligned} \tag{2.2}$$

и, проведя аналогичные преобразования, приходим к матричному дискретному уравнению

$$\begin{aligned} &\Gamma_s y(t+s+1) + (\Gamma_{s-1} - \Gamma_s A)y(t+s) + (\Gamma_{s-2} - \Gamma_{s-1}A - \Gamma_s BC)y(t+s-1) + \cdots \\ &+(\Gamma_0 - \Gamma_1 A - \Gamma_2 BC - \cdots - \Gamma_s BD^{s-2}C)y(t+1) - \\ &-(\Gamma_0 A + \Gamma_1 BC + \Gamma_2 BDC + \cdots + \Gamma_{s-1}BD^{s-2}C + \Gamma_s BD^{s-1}C)y(t) = 0. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Подобный результат имеет место и для данных систем .

Т е о р е м а 2.1. *Для того, чтобы система* (2.2) *была* y *-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения* (2.3) *было устойчивым.*

3. Системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Данный подход применим и к исследованию y-устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Исследуем y-устойчивость системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A_*x(t-\tau), \tag{3.1}$$

где $x \in R^n, \tau = const, A_*$ -постоянная матрица соответствующих размеров.

Представим систему (3.1)) в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy(t)}{dt} &= Ay(t-\tau) + Bz(t-\tau), \\ \frac{dz(t)}{dt} &= Cy(t-\tau) + Dz(t-\tau). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Проводя такие же преобразования как в [3], приходим к матричному линейному уравнению

$$\begin{aligned} &\Gamma_s \frac{d^{s+1}y(t+s\tau)}{dt^{s+1}} + (\Gamma_{s-1} - \Gamma_s A)\frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} + \\ &+(\Gamma_{s-2} - \Gamma_{s-1}A - \Gamma_s BC)\frac{d^{s-1}y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \cdots + \\ &+(\Gamma_0 - \Gamma_1 A - \Gamma_2 BC - \cdots - \Gamma_s BD^{s-2}C)\frac{dy(t)}{dt} - \\ &-(\Gamma_0 A + \Gamma_1 BC + \Gamma_2 BDC + \cdots + \Gamma_{s-1}BD^{s-2}C + \Gamma_s BD^{s-1}C)y(t-\tau) = 0. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Следовательно, вопрос y-устойчивости системы (3.1) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения (3.3). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3.1. *Для того, чтобы система* (3.1) *была* y *-устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения* (3.3) *было устойчивым.*

Список литературы

1. Воротников В.И., *Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных*, Наука, М., 1991, 284 с.

2. Гантмахер Ф.Р., *Теория матриц*, Наука, М., 1967, 576 с.

3. Никонов В.И., “Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных”, *Журнал Средневолжского математического общества*, **13**:2 (2011), 95–99.

A necessary and sufficient conditions for a partial stability of linear systems

© **V. I. Nikonov**[2]

Abstract. In the paper necessary and sufficient conditions are obtained for a partial stability of linear systems. It is expressed in term of matrix polynomial.
Key Words: Partial stability, minimal polynomial, matrix polynomial.

[2] Head of Algebra and Geometry Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; nikonovvi@math.mrsu.ru.

УДК 004.942

Математическое моделирование каталитической активности металлосиликатных материалов в реакции разложения пероксида водорода

© Л. В. Сайфуллина[1], Р. Р. Талипова[2], И. М. Губайдуллин[3], С. И. Спивак[4], Б. И. Кутепов[5]

Аннотация. В результате данного исследования проведена первичная оценка активности металлосиликатных катализаторов в реакции разложения перекиси водорода. Выявлены образцы, проявляющие наибольшую активность в реакции. Оптимизационная задача была решена методами имитации отжига, генетическим алгоритмом, а также методом наименьших квадратов.

Ключевые слова: математическое моделирование, катализатор, каталитическая активность, кинетическая модель.

1. Введение

В настоящее время изучение процессов жидкофазного гетерогенно-каталитического окисления органических соединений в присутствии металлзамещенных силикатных материалов является весьма актуальным и перспективным. Титаносиликаты среди них являются наиболее стабильными и активными катализаторами реакций окисления ароматических углеводородов и олефинов в присутствии различных окислителей.

В лаборатории приготовления катализаторов Института нефтехимии и катализа РАН ведутся работы по синтезу микро/мезопористых титаносиликатных материалов и изучению их каталитической активности в реакции окисления фенола и его производных водными растворами пероксида водорода.

Возникает необходимость разработки инструмента для математического моделирования данного каталитического процесса, который включает в себя не только программное обеспечение, но и методы накопления и хранения информации, составляющих основы баз данных. Это, в свою очередь, позволяет анализировать большие массивы экспериментальной информации, полученной в различных условиях (производство, химическая лаборатория). Такие возможности сочетают в себе интерактивные приложения, работающие в сети Интернет, которые обычно размещены в специализированных Web-лабораториях.

Целью данной работы является математическое моделирование каталитической активности титаносиликатных материалов в реакциях окисления фенолов водными растворами пероксида водорода на базе Web-лаборатории математической химии mathchem.ru.

[1] Аспирант 1-го года обучения лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; leniza.sayfullina@gmail.com.

[2] Н.с. лаборатории приготовления катализаторов, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; greg-0711@rambler.ru.

[3] С.н.с. лаб. математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; irekmars@mail.ru.

[4] Зав. каф. математического моделирования, Башкирский годударственный университет, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

[5] Зав. лаб. приготовления катализаторов, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; kutepoff@inbox.ru.

2. Объект исследования

Реакция окисления фенолов водными растворами пероксида водорода в присутствии титаносиликатов является сложной последовательно-параллельной с образованием в качестве целевых продуктов реакции гидрохинона и пирокатехина, которые в условиях реакции претерпевают дальнейшие превращения (рис. 2.1)

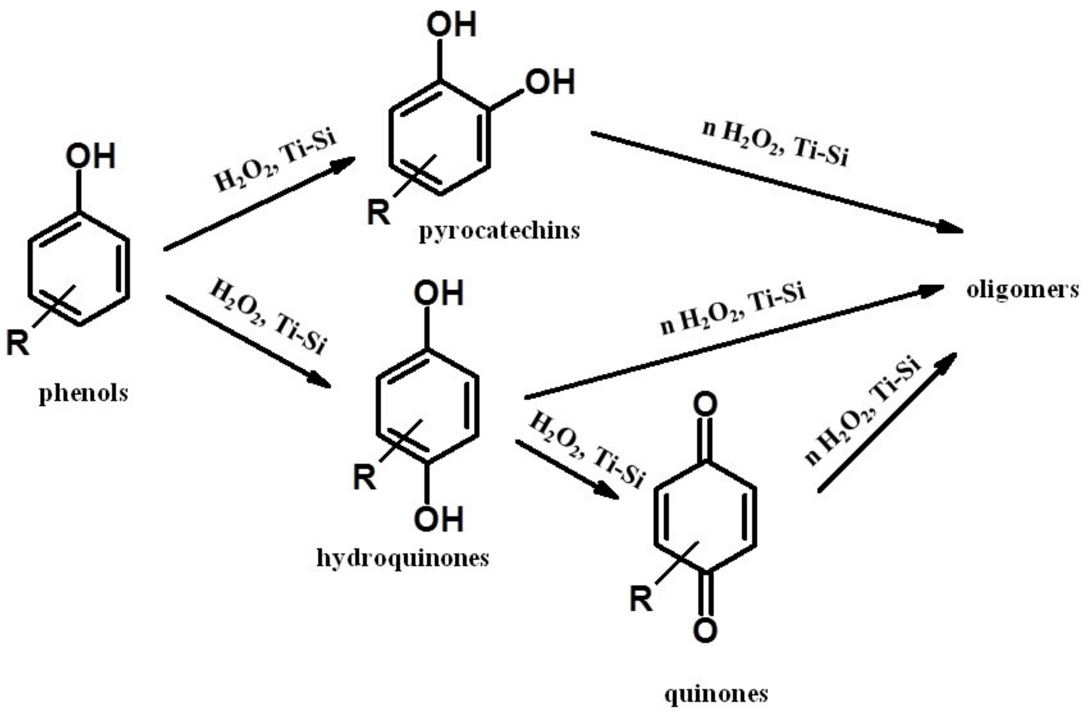


Рисунок **2.1**

Схема превращений

Известно, что для первоначальной оценки активности титаносиликатных катализаторов в реакциях окисления органических соединений можно использовать реакцию разложения H_2O_2 в отсутствии субстрата [1]. Далее, образцы титаносиликатов, проявившие активность в разложении H_2O_2, исследовать в реакции окисления фенолов водными растворами H_2O_2.

Согласно литературным данным [2], реакция разложения раствора H_2O_2 удовлетворительно описывается уравнением первого порядка по H_2O_2:

$$H_2O \to H_2O + \frac{1}{2}O_2 \qquad (2.1)$$

Первичные данные кинетических экспериментов, предоставленные экспериментаторами лаборатории приготовления катализаторов Института нефтехимии и катализа РАН, представляют собой наборы концентраций раствора пероксида водорода при разных значениях времени реакции и различных температурах проведения реакции. Реакция проводилась в присутствии 15-ти различных катализаторов, отличающихся между собой значениями удельной поверхности, способами приготовления и составом вещества.

3. Математическое описание и методы исследования

Составим кинетическое уравнение реакции (2.1), интегрирование которого приводит к аналитическому решению, имеющему экспоненциальный вид, где константа скорости реакции выражается уравнением Аррениуса.

$$-\frac{dC}{dt} = kC, \tag{3.1}$$
$$t = 0 : C = C_0,$$
$$C = C_0 e^{-kt}$$

$$k = k_0 exp(-\frac{E}{RT}), \tag{3.2}$$

На основе составленного математического описания был разработан алгоритм программы расчета кинетических параметров реакции, а также его программная реализация. Так как уравнение на изменение концентрации (3.1) имеет аналитическое решение, то в качестве алгоритма решения задачи выбрано двукратное применение метода наименьших квадратов (МНК). На первом этапе для каждого катализатора были найдены константы скоростей при различных температурах, и, таким образом, построена зависимость $k = k(T)$. Затем для каждого конкретного катализатора на основе уравнения Аррениуса (3.2) были вычислены кинетические параметры реакции k_0 и E.

Как отмечалось выше, реакция (2.1) является одностадийной, и нахождение кинетических параметров реакции возможно методом наименьших квадратов, однако этот метод неприменим к общей схеме превращения 2.1. В связи с этим, решение обратной задачи также проводилось такими оптимизационными методами, как генетический алгоритм и метод имитации отжига. Применение генетического алгоритма в обратных задачах химической кинетики получило широкое распространение ввиду несложности его распараллеливания на многопроцессорных системах, тогда как метод имитации отжига в данных задачах требует дальнейшего развития.

Имитация отжига (simulated annealing) представляет собой эвристическую процедуру поиска, которая допускает случайные переходы, что ведет к более дорогостоящим (и соответственно, худшим) решениям. Это выглядит как шаг назад, но позволяет удержать поиск от зацикливания на оптимальном локальном решении. Идея имитации отжига является аналогией физического процесса остывания расплавленных материалов и сопутствующего перехода в твердое состояние [3].

Решение обратной кинетической задачи сводится к прогону серии прямых задач и минимизации параметра F – критерия отклонения расчетных и экспериментальных данных:

$$F = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{P}\sum_{i=1}^{N}|x_{ki}^{calc} - x_{ki}^{exp}| \to min$$

где x^{calc} - расчетные значения концентраций раствора перекиси водорода, получаемые в результате решения прямой кинетической задачи, мольные доли; x^{exp} - экспериментально полученные значения концентраций наблюдаемых веществ, мольные доли; N - количество точек эксперимента; P - количество экспериментов.

4. Результаты и их обсуждение

На основе составленного математического описания проведен вычислительный эксперимент, в результате которого получены кинетические кривые для 15-ти катализаторов при различных температурах (рис.4.1).

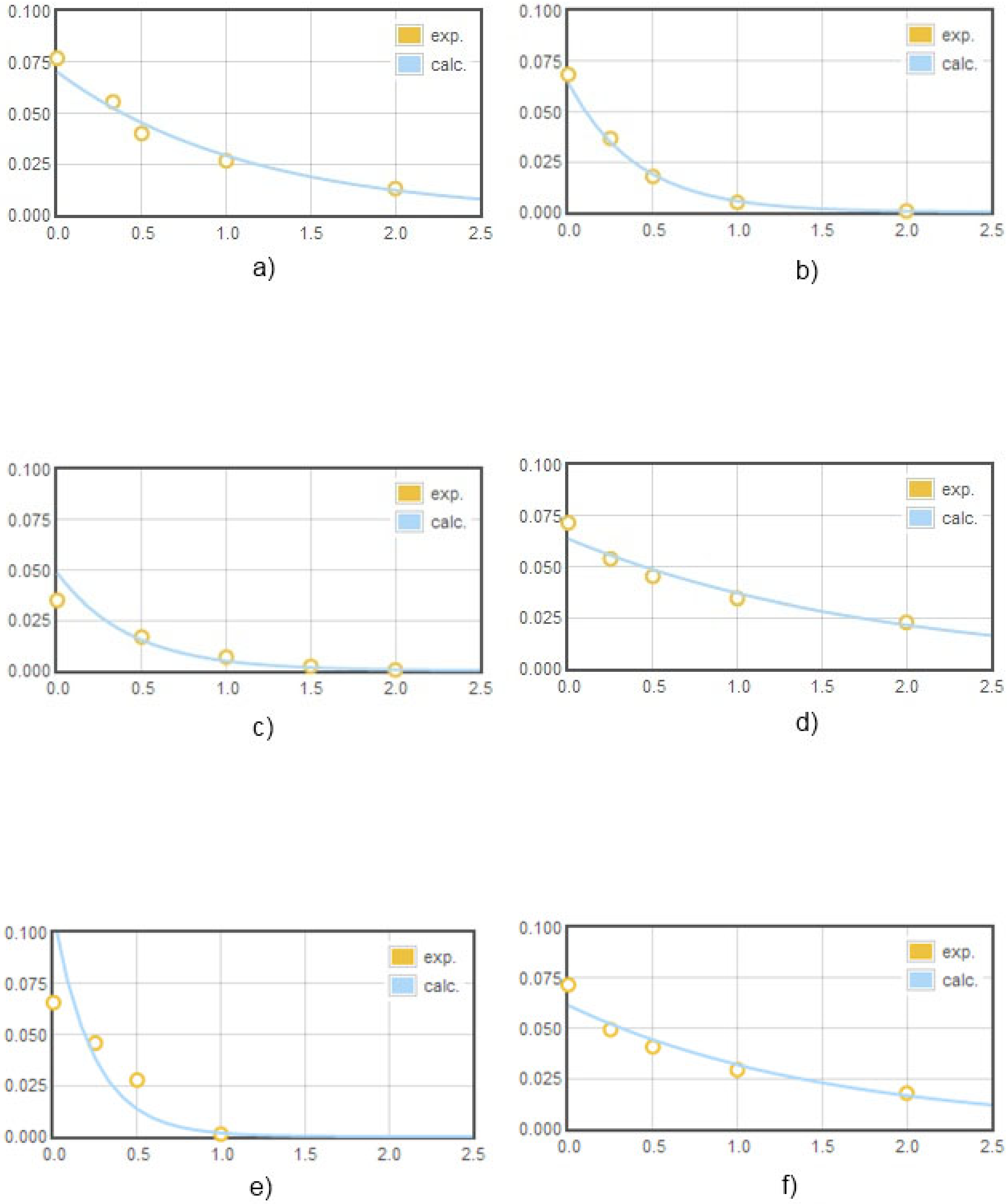


Рисунок **4.1**

Кинетические кривые изменения концентрации раствора H_2O_2 для катализаторов при различных температурах. По оси x – время, час, по оси y – концентрация раствора H_2O_2, мольные доли. a) катализатор № 213, $T = 75°$ C, b) катализатор № 215, $T = 75°$ C, c) катализатор № 216, $T = 70°$ C, d) катализатор № 651, $T = 50°$ C, e) катализатор № 642, $T = 75°$ C, f) катализатор № 655, $T = 50°$ C.

Также найдены кинетические параметры реакции для 6-ти силикатных образцов. Построен ряд активности катализаторов реакции разложения пероксида водорода, выявлены наиболее активные образцы (рис. 4.2).

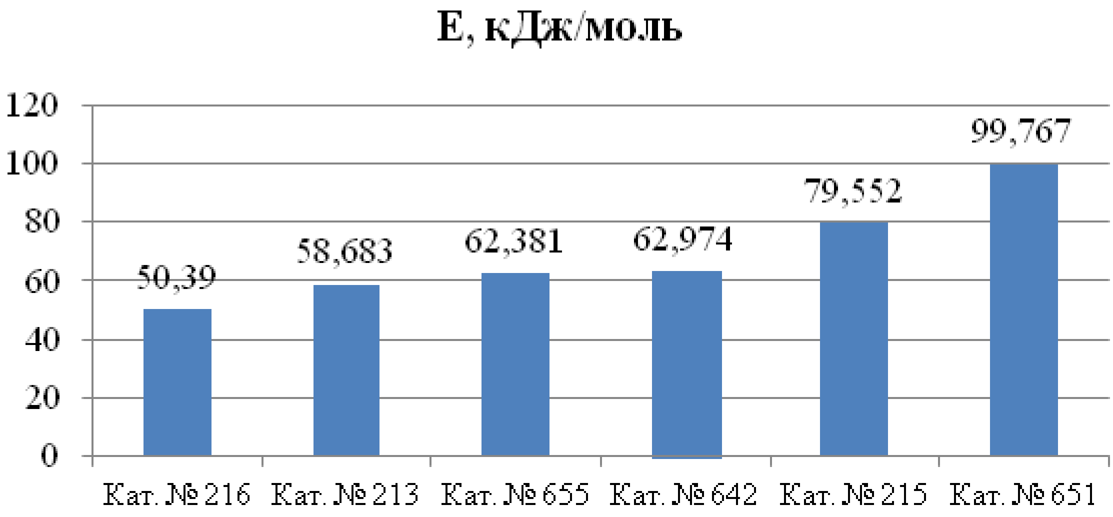
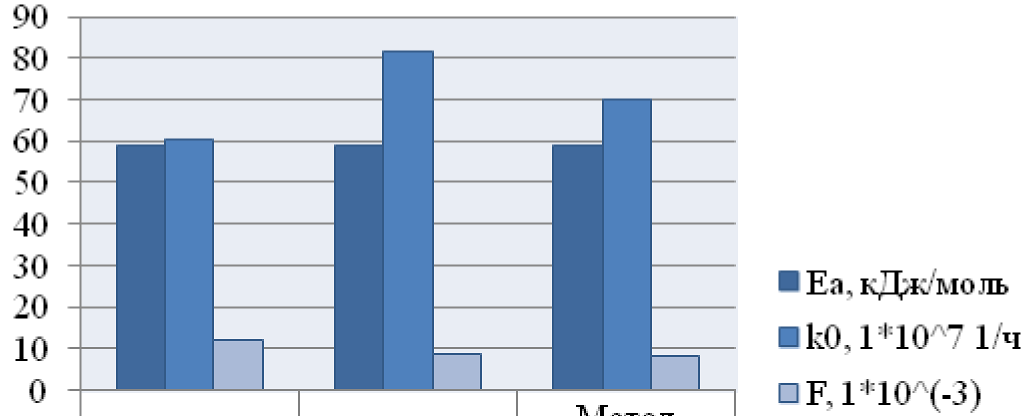


Рисунок **4.2**

Диаграмма сравнения расчетных энергий активаций реакции в присутствии различных катализаторов

На рисунке 4.3 показано сравнение вычисленных кинетических параметров E, k_0 и значений функционала минимизации F на примере катализатора № 213 (Sуд. = 402 м2/г). Наименьшее значение функционала достигается при использовании метода имитации отжига по схеме отжига Коши. В качестве начального приближения использовался набор: $E = 50$ кДж/моль (данное значение энергии активации предложено экспериментаторами), $k_0 = 7*108$ 1/ч (среднее значение предэкспоненциальных множителей, полученных методом наименьших квадратов (МНК) и генетическим алгоритмом).



	МНК	Ген. алгоритм	Метод имитации отжига
Ea, кДж/моль	58,683	59,109	58,701
k0, 1*10^7 1/ч	60,2181	81,494	70,000002
F, 1*10^(-3)	12,033	8,6	8,4

Рисунок **4.3**

Диаграмма сравнения расчетных энергий активаций реакции в присутствии различных катализаторов

Программа расчета кинетических параметров реакции разложения раствора пероксида водорода интегрирована в Web-лабораторию математической химии mathchem.ru как отдельный программный модуль под названием «Разложение H_2O_2».

5. Заключение

В результате данного исследования проведена первичная оценка активности металлосиликатных катализаторов в реакции разложения перекиси водорода. Выявлены образцы, проявляющие наибольшую активность в реакции.

Оптимизационная задача была решена методами имитации отжига, генетическим алгоритмом, а также методом наименьших квадратов. Проведен сравнительный анализ методов. Наименьшее значение функционала минимизации расчетных и экперименталььных данных достигается при использовании метода имитации отжига по схеме отжига Коши.

Таким образом, изучив реакцию разложения перекиси водорода, можно приступить к оптимизационной задаче общей схемы превращения окисления фенолов, а именно, максимизации выхода продуктов реакции, выбора наиболее эффективного катализатора и других технологических показателей.

Список литературы

1. Трухан Н. Н., *Исследование реакций селективного окисления органических соединений пероксидами в присутствии титан- и ванадий-содержащих мезопористых силикатных катализаторов*, Дис. ... канд. хим. наук, Новосибирск, 2003.

2. Позин М. Е., *Перекись водорода и перекисные соединения*, Госхимиздат, М., 1957.

3. Thomas Weise., *Global optimization algorithms – Theory and application*, 2009.

Mathematical modeling of catalytic activity of metallosilicate materials in the decomposition reaction of hydrogen peroxide

© L. Sayfullina[6], R. Talipova[7], I. Gubaydullin[8],S. Spivak[9],B. Kutepov[10]

Abstract. As a result of this study, the initial assessment activity metallosilicate catalysts in the decomposition of hydrogen peroxide was carried out. The specimens that show the greatest activity in the reaction were indicated. An optimization problem was solved by means of simulated annealing, genetic algorithm, as well as the method of least squares.

Key Words: mathematical modeling, catalyst, catalytic activity, kinetic model.

[6] The first year post-graduate student of Mathematical chemistry laboratory, Institute of petrochemistry and catalysis of RAS, Ufa; leniza.sayfullina@gmail.com.

[7] Research associate of Catalyst preparation laboratory, Institute of petrochemistry and catalysis of RAS, Ufa; greg-0711@rambler.ru.

[8] Senior associate of Mathematical chemistry laboratory, Institute of petrochemistry and catalysis of RAS, Ufa; irekmars@mail.ru.

[9] Head of Mathematical modeling chair, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

[10] Head of Catalyst preparation laboratory, Institute of petrochemistry and catalysis of RAS, Ufa; kutepoff@inbox.ru.

УДК 534.113

Метод двойственного восстановления по минорам старших порядков матрицы краевых условий в обратной спектральной задаче для трубы с непротекающей жидкостью

© **Г. Ф. Сафина**[1]

Аннотация. В работе приведен метод решения задачи диагностирования любых закреплений узкой трубы с непротекающей жидкостью. Метод сведен к восстановлению по минорам высших порядков двух матриц краевых условий обратной спектральной задачи. Решение задачи рассмотрено при известных точных и приближенных значений частот изгибных колебаний трубы, наполненной жидкостью. По найденному методу решения обратной спектральной задачи доказана непрерывная зависимость решения от частот колебаний трубы с непротекающей жидкостью. Приведены примеры.

Ключевые слова: труба с непротекающей жидкостью, частоты колебаний, матрица краевых условий, миноры матрицы, диагностирование закреплений, метод восстановления матриц

1. Введение

Исследования прямой и обратной задач изгибных колебаний трубы с жидкостью относятся к спектральным задачам, а именно к задачам идентефикации параметров механических систем по известным частотам их свободных колебаний. Подобным задачам диагностирования механических систем по их звучанию в настоящее время посвящено много работ, в том числе работы [1] – [7].

Прямая задача определения собственных частот изгибных колебаний трубы с жидкостью рассмотрена приближенными методами в работах [8], [9] при таких закреплениях трубы, как заделка и свободное опирание. Обратная задача — задача диагностирования любых видов закреплений трубы по известным частотам ее колебаний исследована в работе [10].

В продолжение исследований в настоящей работе приведен метод диагностирования закреплений трубы с непротекающей жидкостью по известным значениям частот ее колебаний, который сводится к восстановлению двух матриц из коэффициентов краевых условий по минорам высших порядков. Показана справедливость метода в случаях известных точных и приближенных значений частот колебаний трубы. Метод восстановления двух матриц краевых условий использован также для доказательства непрерывности решения обратной задачи диагностирования закреплений трубы с непротекающей жидкостью.

2. Прямая и обратная спектральные задачи для изгибных колебаний трубы с непротекающей жидкостью

Приведем некоторые известные сведения, необходимые для дальнейшего изложения. Задача изгибных колебаний узкой трубы с несжимаемой жидкостью сводится к решению

[1] Доцент кафедры математического моделирования и информационной безопасности Нефтекамского филиала Башкирского государственного университета, г. Нефтекамск; safinagf@mail.ru

уравнения [8], [9]

$$X^{(4)} + a\,X'' + 2b\,i\,\omega X' - \omega^2\,X = 0 \tag{2.1}$$

с краевыми условиями [10]

$$\begin{aligned} U_1(X) = a_1 X(0) + a_4 X'''(0) = 0, \quad U_2(X) = a_2 X'(0) + a_3 X''(0) = 0,\\ U_3(X) = b_1 X(1) + b_4 X'''(1) = 0, \quad U_4(X) = b_2 X'(1) + b_3 X''(1) = 0. \end{aligned} \tag{2.2}$$

В уравнении (2.1): ω – частота колебаний, коэффициенты a и b выражаются через физические параметры системы (труба – жидкость).

Общее решение уравнения (2.1) рассмотрено в виде

$$X = C_1\,e^{\lambda_1 \widetilde{x}} + C_2\,e^{\lambda_2 \widetilde{x}} + C_3\,e^{\lambda_3 \widetilde{x}} + C_4\,e^{\lambda_4 \widetilde{x}}.$$

Здесь $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ — корни характеристического уравнения, соответствующие уравнению (2.1).

В зависимости от коэффициентов a_k и b_k $(k = 1, 2, 3, 4)$ краевые условия (2.2) определяют различные виды упругого закрепления концов участка трубы, а также заделку, свободное опирание, свободный конец, плавающую заделку.

Частотное уравнение для прямой спектральной задачи (2.1), (2.2) получено стандартно из условия равенства нулю характеристического определителя: $\Delta(\omega) = 0$.

Для математической постановки обратной задачи диагностирования закреплений трубы с жидкостью введена в рассмотрение матрица C порядка 4×8 [10]: $C = \left\| \begin{matrix} A & 0 \\ 0 & B \end{matrix} \right\|$, составленная из нулевых матриц 0, а также матриц

$$A = \left\| \begin{matrix} a_1 & 0 & 0 & a_4 \\ 0 & a_2 & a_3 & 0 \end{matrix} \right\|, \quad B = \left\| \begin{matrix} b_1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \end{matrix} \right\|$$

из коэффициентов краевых условий (2.2). Рассмотрены $M_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}$ – миноры высших порядков матрицы C, образованные из столбцов с номерами k_1, k_2, k_3, k_4.

В данных обозначениях обратная спектральная задача состоит в восстановлении матрицы C с точностью до линейных преобразований ее строк. В работе [10] доказана двойственность решения обратной задачи для трубы с непротекающей жидкостью.

3. Метод восстановления матриц краевых условий обратной спектральной задачи по точным значениям частот колебаний

Рассмотрим теперь метод решения обратной спектральной задачи.

В случае непротекания жидкости по трубе собственные частоты изгибных колебаний трубы ω_k удовлетворяют частотному уравнению

$$\begin{gathered} \Delta(\omega_k) = x_1\,f_{1257}(\omega_k) + x_2\,f_{1268}(\omega_k) + x_3\,f_{1368}(\omega_k) + \\ + x_4\,f_{1278}(\omega_k) + x_5\,f_{1378}(\omega_k) + x_6\,f_{2478}(\omega_k) + x_7\,f_{1357}(\omega_k) + \\ + x_8\,f_{2468}(\omega_k) + x_9\,f_{1256}(\omega_k) + x_{10}\,f_{3478}(\omega_k) = 0, \end{gathered} \tag{3.1}$$

в котором

$$\begin{gathered} x_1 = M_{1257} - M_{1356}, \quad x_2 = M_{1268} - M_{2456}, \quad x_3 = M_{1368} + M_{2457}, \\ x_4 = M_{1278} + M_{3456}, \quad x_5 = M_{1378} - M_{3457}, \quad x_6 = M_{2478} - M_{3468}, \\ x_7 = M_{1357}, \quad x_8 = M_{2468}, \quad x_9 = M_{1256}, \quad x_{10} = M_{3478}. \end{gathered} \tag{3.2}$$

Показано, что если ω_k — 9 значений из всего спектра частот колебаний задачи (2.1), (2.2), то равенства (3.1) образуют систему 9-ти линейных алгебраических уравнений относительно 10-ти неизвестных x_j .

При этом, если $\operatorname{rank}\|\mathrm{f_{k_1\,k_2\,k_3\,k_4}}(\omega_\mathrm{k})\|_{10\times 9} = 9$, то система линейных алгебраических уравнений (3.1) имеет единственное с точностью до постоянного множителя решение $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$.

Покажем теперь, что по значениям $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ находятся (с точностью до линейных преобразований строк) две матрицы C .

Так как $\operatorname{rank} C = 4$, то хотя бы один из миноров M_{ijkl} не равен нулю. Пусть, например, $M_{1256} \neq 0$. Тогда матрицу C с помощью линейных преобразований ее строк можно привести к виду

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

или

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -a_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -a_3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Миноры полученных матриц обозначим соответственно через M_{ijkl} и M^-_{ijkl} $(i = 1,...,5;\ j = 2,...,6;\ k = 3,...,7;\ l = 4,...,8)$. Следовательно, матрица C может быть записана через миноры в виде

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-M_{2456}}{M_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{M_{1356}}{M_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-M_{1268}}{M_{1256}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{M_{1257}}{M_{1256}} & 0 \end{Vmatrix}$$

или

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-M^-_{2456}}{M^-_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{M^-_{1356}}{M^-_{1256}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-M^-_{1268}}{M^-_{1256}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{M^-_{1257}}{M^-_{1256}} & 0 \end{Vmatrix}.$$

Для первой матрицы имеем

$$M_{1356} = a_3, \qquad M_{2456} = -a_4, \qquad M_{1256} = b_3, \qquad M_{1268} = -b_4,$$

для второй матрицы

$$M^-_{1356} = -b_3, \qquad M^-_{2456} = b_4, \qquad M^-_{1257} = -a_3, \qquad M^-_{2468} = a_4.$$

Миноры M_{1256} , M_{1356} , M_{1257} , M_{1268} , M_{2456} и M^-_{1256} , M^-_{1256} , M^-_{1356} , M^-_{1257} , M^-_{1268} , M^-_{2456}, участвующие соответственно в последних двух записях матрицы C , являются основными, а ненулевые миноры M_{1256} и M^-_{1256} — центральными. Таким образом, в случае непротекания жидкости по трубе верна теорема.

Теорема 1 *Если матрица системы уравнений (3.1) имеет ранг 9, то решение обратной задачи восстановления краевых условий (2.2) двойственно.*

4. Восстановление матриц краевых условий обратной спектральной задачи по приближенным значениям частот колебаний

Так как собственные частоты задачи (2.1), (2.2) часто задаются приближенно, то построим теперь приближенное решение обратной задачи.

Пусть ранг системы уравнений (3.1) равен 9 и собственные частоты ω_k известны лишь приближенно $\omega_k \approx \mu_k \quad (k = 1, 2, ..., 9)$. Подставив μ_k в систему уравнений (3.1), найдем неизвестные x_1, x_2, $\ldots$, x_{10}. Согласно теореме определим далее две группы миноров M_{ijkl} и M^{-}_{ijkl}.

Для того, чтобы значения M_{ijkl} и M^{-}_{ijkl}, найденные по искаженным μ_k, являлись минорами какой-либо матрицы, необходимо выполнение соотношений Плюккера [11], которые в данном случае (с учетом $M_{1256} \neq 0$ и нулевых миноров) имеют вид:

$$\begin{gathered}
M_{1278}M_{1256} = M_{1257}M_{1268},\\
M_{3456}M_{1256} = M_{2456}M_{1356},\\
M_{1357}M_{1256} = M_{1356}M_{1257},\\
M_{2468}M_{1256} = M_{2456}M_{1268},\\
M_{2457}M_{1256} = M_{2456}M_{1257},\\
M_{1368}M_{1256} = M_{1356}M_{1257},\\
M_{2478}M_{1256} = M_{1278}M_{2456} = M_{2457}M_{1268},\\
M_{1378}M_{1256} = M_{1356}M_{1278} = M_{1357}M_{1268},\\
M_{3457}M_{1256} = M_{1356}M_{2457} = M_{1357}M_{2456},\\
M_{3468}M_{1256} = M_{1356}M_{2468} = M_{1368}M_{2456},\\
M_{3478}M_{1256} = M_{1278}M_{3456} = M_{2457}M_{1368} = M_{1357}M_{2468} =\\
= M_{1356}M_{2478} = M_{2456}M_{1378} = M_{1268}M_{3457} = M_{1257}M_{3468}.
\end{gathered} \tag{4.1}$$

Такие же соотношения справедливы для миноров M^{-}_{ijkl}. Значит, если числа M_{ijkl}, M^{-}_{ijkl} удовлетворяют соотношениям (4.1), то они являются минорами некоторой матрицы, и по ним можно восстановить краевые условия задачи (2.1), (2.2).

Если же числа M_{ijkl}, M^{-}_{ijkl} не удовлетворяют соотношениям (4.1), то миноры M_{1278}, M_{3456}, M_{1357}, M_{2468}, M_{2457}, M_{1368}, M_{2478}, M_{1378}, M_{3457}, M_{3468}, M_{3478} и M^{-}_{1278}, M^{-}_{3456}, M^{-}_{1357}, M^{-}_{2468}, M^{-}_{2457}, M_{1368}, M_{2478}, M_{1378}, M_{3457}, M^{-}_{3468}, M^{-}_{3478} можно выразить соответственно через основные миноры M_{1256}, M_{1356}, M_{1257}, M_{1268}, M_{2456} и M^{-}_{1256}, M^{-}_{1356}, M^{-}_{1257}, M^{-}_{1268}, M^{-}_{2456}. Условия Плюккера будут выполняться автоматически. Таким образом, в случае непротекания жидкости по трубе можно скорректировать значения M_{ijkl}, M^{-}_{ijkl}, найденные из системы уравнений (3.1), так, чтобы они являлись минорами одних и тех же матриц.

5. Непрерывность решения обратной задачи по частотам колебаний

С помощью найденного метода восстановления двух матриц краевых условий по их минорам высших порядков исследуем вопрос о непрерывности решения обратной задачи для трубы с непротекающей жидкостью.

Вместе с краевыми условиями (2.2) рассмотрим также условия:

$$\begin{gathered}
U_1(X) = \widetilde{a}_1 X(0) + \widetilde{a}_4 X'''(0) = 0, \quad U_2(X) = \widetilde{a}_2 X'(0) + \widetilde{a}_3 X''(0) = 0,\\
U_3(X) = \widetilde{b}_1 X(1) + \widetilde{b}_4 X'''(1) = 0, \quad U_4(X) = \widetilde{b}_2 X'(1) + \widetilde{b}_3 X''(1) = 0.
\end{gathered} \tag{5.1}$$

Матрицу, составленную аналогично матрице C, но из коэффициентов краевых условий (5.1), обозначим через $\widetilde{C}$. Элементы матрицы $\widetilde{C}$ обозначим через $\widetilde{c}_{ij}$, а миноры высших порядков этой матрицы — через $\widetilde{M}_{ijkl}$. Вместе с матрицами C и $\widetilde{C}$ рассмотрим также матрицу $\widetilde{C}^-$, составленную из векторов $\mathbf{c}_i^- = (\widetilde{c}_{i5}, \widetilde{c}_{i6}, -\widetilde{c}_{i7}, -\widetilde{c}_{i8}, \widetilde{c}_{i1}, \widetilde{c}_{i2}, -\widetilde{c}_{i3}, -\widetilde{c}_{i4})^{\mathrm{T}}$, $(i = 1, 2, 3, 4)$. Пусть элементы матрицы $\widetilde{C}^-$ – $\widetilde{c}_{ij}^-$, а миноры высших порядков — $\widetilde{M}_{ijkl}^-$.

Рассмотрим также классы матриц C, $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}^-$, которые обозначим через $[C]$, $[\widetilde{C}]$, $[\widetilde{C}^-]$ соответственно. Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 2 (о непрерывности решения обратной задачи) *Пусть* $\{\omega_k\}$, $\{\widetilde{\omega}_k\}$ $(k = 1, ..., 9)$ *— собственные частоты задач (2.1), (2.2) и (2.1), (5.1) соответственно;* $\operatorname{rank} C = \operatorname{rank} \widetilde{C} = \operatorname{rank} \widetilde{C}^- = 4$*;* $C \in [C]$, $\widetilde{C} \in [\widetilde{C}]$, $\widetilde{C}^- \in [\widetilde{C}^-]$. *Тогда для любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta > 0$, что для собственных частот, удовлетворяющих неравенству $\sum_{k=1}^{9} |\omega_k - \widetilde{\omega}_k| < \delta$, выполняются $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{8} |c_{ij} - \widetilde{c}_{ij}| < \varepsilon$, $\sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{8} |c_{ij} - \widetilde{c}_{ij}^-| < \varepsilon$.

Доказательство. По найденному методу решения обратной задачи система уравнений (3.1) имеет единственное с точностью до постоянного множителя решение $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$, по которому находятся (с точностью до линейных преобразований строк) две матрицы C, а именно $C = \widetilde{C}$ или $C = \widetilde{C}^-$. Как показано выше, по значениям $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ определяются две группы миноров M_{ijkl}, M_{ijkl}^- и по ним восстанавливаются две матрицы C.

Найденные миноры можно представить в виде

$$M_{ijkl} = F_n(\omega_1, ..., \omega_9), \qquad n = 1, ..., 10,$$

$$M_{ijkl}^- = F_n^-(\omega_1, ..., \omega_9), \qquad n = 1, ..., 10,$$

где функции $F_n(\omega_1, ..., \omega_9)$, $F_n^-(\omega_1, ..., \omega_9)$ получены из функций f_{ijkl} с помощью конечного числа алгебраических операций. В силу непрерывности решений $X_j = X_j(x, \omega) = e^{\lambda_j x}$ $(j = 1, 2, 3, 4)$ по параметрам ω_k, функции $f_{ijkl}(\omega_k)$ как функции от суммы, разности и произведения непрерывных функций представляют собой непрерывные функции по собственным частотам колебаний ω_k. Значит, функции $F_n(\omega_1, ..., \omega_9)$, $F_n^-(\omega_1, ..., \omega_9)$ также являются непрерывными функциями по параметрам ω_k. Аналогично, система уравнений

$$\begin{gathered}\Delta(\widetilde{\omega}_k) = \widetilde{x}_1\, f_{1257}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_2\, f_{1268}(\widetilde{\omega}_k) + \\ + \widetilde{x}_3\, f_{1368}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_4\, f_{1278}(\widetilde{\omega}_k) + \\ + \widetilde{x}_5\, f_{1378}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_6\, f_{2478}(\widetilde{\omega}_k) + \\ + \widetilde{x}_7\, f_{1357}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_8\, f_{2468}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_9\, f_{1256}(\widetilde{\omega}_k) + \widetilde{x}_{10}\, f_{3478}(\widetilde{\omega}_k) = 0,\end{gathered}$$

в которой

$$\begin{gathered}\widetilde{x}_1 = \widetilde{M}_{1257} - \widetilde{M}_{1356}, \quad \widetilde{x}_2 = \widetilde{M}_{1268} - \widetilde{M}_{2456}, \\ \widetilde{x}_3 = \widetilde{M}_{1368} + \widetilde{M}_{2457}, \quad \widetilde{x}_4 = \widetilde{M}_{1278} + \widetilde{M}_{3456}, \\ \widetilde{x}_5 = \widetilde{M}_{1378} - \widetilde{M}_{3457}, \quad \widetilde{x}_6 = \widetilde{M}_{2478} - \widetilde{M}_{3468}, \\ \widetilde{x}_7 = \widetilde{M}_{1357}, \quad \widetilde{x}_8 = \widetilde{M}_{2468}, \quad \widetilde{x}_9 = \widetilde{M}_{1256}, \quad \widetilde{x}_{10} = \widetilde{M}_{3478},\end{gathered}$$

имеет решение

$$\widetilde{M}_{ijkl} = F_n(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_{14}), \qquad n = 1, ..., 10,$$

или

$$\widetilde{M}_{ijkl}^- = F_n^-(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_{14}), \qquad n = 1, ..., 10.$$

Аналогичные рассуждения приводят к тому, что функции $F_n(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9)$ и $F_n^-(\widetilde{\omega}_1, ..., \widetilde{\omega}_9)$ также являются непрерывными функциями по параметрам $\widetilde{\omega}_k$.

Тогда

$$|M_{ijkl}(\omega_1,...,\omega_9)-\widetilde{M}_{ijkl}(\widetilde{\omega}_1,...,\widetilde{\omega}_9)|=|F_n(\omega_1,...,\omega_9)-F_n(\widetilde{\omega}_1,...,\widetilde{\omega}_9)|<\varepsilon_1$$

и

$$|M^-_{ijkl}(\omega_1,...,\omega_9)-\widetilde{M}^-_{ijkl}(\widetilde{\omega}_1,...,\widetilde{\omega}_9)|=|F_n(\omega_1,...,\omega_9)-F^-_n(\widetilde{\omega}_1,...,\widetilde{\omega}_9)|<\varepsilon_1,$$

как только $\sum_{k=1}^{9}|\omega_k-\widetilde{\omega}_k|<\delta$.

Если же миноры M_{ijkl}, $\widetilde{M}_{ijkl}$, M^-_{ijkl}, $\widetilde{M}^-_{ijkl}$ не удовлетворяют соотношениям (4.1), то после корректировки миноров, например, для миноров M_{1278}, $\widetilde{M}_{1278}$, M^-_{1278}, $\widetilde{M}^-_{1278}$, имеем

$$|M_{1278}-\widetilde{M}_{1278}|=|M_{1257}\,M_{1268}/M_{1256}-\widetilde{M}_{1257}\,\widetilde{M}_{1268}/\widetilde{M}_{1256}|,$$

$$|M^-_{1278}-\widetilde{M}^-_{1278}|=|M^-_{1257}\,M^-_{1268}/M^-_{1256}-\widetilde{M}^-_{1257}\,\widetilde{M}^-_{1268}/\widetilde{M}^-_{1256}|.$$

Так как $M_{1256}\neq 0$, $M^-_{1256}\neq 0$, то функции $G_n(\omega_1,...,\omega_9)=M_{1257}\,M_{1268}/M_{1256}$ и $G_n(\widetilde{\omega}_1,...,\widetilde{\omega}_9)=\widetilde{M}_{1257}\,\widetilde{M}_{1268}/\widetilde{M}_{1256}$, $G^-_n(\omega_1,...,\omega_9)=M^-_{1257}\,M^-_{1268}/M^-_{1256}$ и $G^-_n(\widetilde{\omega}_1,...,\widetilde{\omega}_9)=\widetilde{M}^-_{1257}\,\widetilde{M}^-_{1268}/\widetilde{M}^-_{1256}$ являются непрерывными по параметрам ω_k и $\widetilde{\omega}_k$ соответственно, как произведение и частное непрерывных функций M_{ijkl}, $\widetilde{M}_{ijkl}$, M^-_{ijkl}, $\widetilde{M}^-_{ijkl}$. Следовательно,

$$|M_{1256}-\widetilde{M}_{1256}|=|G_n(\omega_1,...,\omega_9)-G_n(\widetilde{\omega}_1,...,\widetilde{\omega}_9)|<\varepsilon_2,$$

$$|M^-_{1256}-\widetilde{M}^-_{1256}|=|G^-_n(\omega_1,...,\omega_9)-G^-_n(\widetilde{\omega}_1,...,\widetilde{\omega}_9)|<\varepsilon_2,$$

как только $\sum_{k=1}^{9}|\omega_k-\widetilde{\omega}_k|<\delta$.

Поступая аналогичным образом и для остальных миноров матриц C и $\widetilde{C}$, получаем

$$|M_{ijkl}-\widetilde{M}_{ijkl}|<\varepsilon_2,$$

$$|M^-_{ijkl}-\widetilde{M}^-_{ijkl}|<\varepsilon_2,$$

как только $\sum_{k=1}^{9}|\omega_k-\widetilde{\omega}_k|<\delta$. Так как коэффициенты краевых условий задач (2.1), (2.2) и (2.1), (5.1) могут быть выписаны по минорам M_{ijkl}, $\widetilde{M}_{ijkl}$, $\widetilde{M}^-_{ijkl}$ матриц C, $\widetilde{C}$, $\widetilde{C}^-$ соответственно, то для коэффициентов матриц C и $\widetilde{C}$ верно $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8}|c_{ij}-\widetilde{c}_{ij}|<\varepsilon$, $\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{8}|c_{ij}-\widetilde{c}^-_{ij}|<\varepsilon$.

Теорема доказана.

Из теоремы следует, что обратная задача по определению закреплений трубы с жидкостью корректно поставлена. И в случае непротекания жидкости по трубе задача определения параметров закреплений трубы имеет двойственное решение, которое непрерывно зависит от частот ω_k, $(k=1,...,9)$.

6. Применение метода восстановления матриц краевых условий обратной спектральной задачи

Применение найденного метода покажем на примерах.

Пример 1. Упругое закрепление

Рассмотрим задачу (2.1), (2.2) при физических параметрах

$$r_1=0,0095\,\text{м},\quad r=0,01\text{м},\quad l=5\,\text{м},\quad \rho=2,7\cdot10^3\,\text{кг}/\text{м}^3,$$
$$\rho_0=10^3\,\text{кг}/\text{м}^3,\quad V_0=0\,\text{м/с},\quad E=6,9\cdot10^9\,\text{Н}/\text{м}^2,\quad p_0=3\cdot10^3\,\text{Н}/\text{м}^2$$

системы (труба – жидкость). Пусть известны значения 9 собственных частот ω_k задачи (2.1), (2.2):

$\omega_1 = 21.67$, $\omega_2 = 60.87$, $\omega_3 = 120.06$, $\omega_4 = 198.98$, $\omega_5 = 297.66$, $\omega_6 = 416.08$, $\omega_7 = 712.15$, $\omega_8 = 889.79$, $\omega_9 = 1087.18$.

С помощью программы на ЭВМ получаем, что ранг системы (3.1) равен 9, а ее решение имеет вид:

$$x_5 = -3\,K, \quad x_7 = K, \quad x_{10} = -2\,K; \quad \text{остальные } x_i = 0.$$

Из равенства $x_7 = M_{1357} \neq 0$ имеем $a_1 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_3 \neq 0$. Откуда получаем, что матрица C (с точностью до линейного преобразования ее строк) имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \qquad (K = 1).$$

Тогда получаем $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $a_4 - b_4 = -3$, $a_4\,b_4 = -2$. Откуда имеем $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $a_4 = -1$, $b_4 = 2$ или $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $a_4 = -2$, $b_4 = 1$.

Значит, матрица C (с точностью до линейной эквивалентности) имеет вид

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{или} \quad \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Следовательно, краевые условия таковы:

$$X(0) - X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(1) + 2\,X'''(1) = 0, \quad X''(1) = 0$$

или

$$X(0) - 2\,X'''(0) = 0, \quad X''(0) = 0, \quad X(1) + X'''(1) = 0, \quad X''(1) = 0.$$

Таким образом, по заданным частотам колебаний трубы с непротекающей жидкостью, получили, что левый конец закреплен пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной единице, а правый — с относительной жесткостью на изгиб, равной двум. В то же время имеется еще одно закрепление с подобным спектром частот колебаний трубы, а именно закрепление, при котором левый конец закреплен пружиной с относительной жесткостью на изгиб, равной двум, а правый — с относительной жесткостью на изгиб, равной единице.

Пример 2. Свободная опора — заделка

Рассмотрим снова краевую задачу (2.1), (2.2) при параметрах системы (труба – жидкость). Известны 9 собственных частот ω_k задачи: $\omega_1 = 14.65$, $\omega_2 = 49.10$, $\omega_3 = 103.34$, $\omega_4 = 177.34$, $\omega_5 = 271.09$, $\omega_6 = 384.58$, $\omega_7 = 670.79$, $\omega_8 = 843.504$, $\omega_9 = 1035.96$.

Найдем краевые условия, которые им соответствуют. С помощью ЭВМ получаем решение системы (3.1): $x_1 = K$; $x_i = 0$, $i = 2, 3, \ldots, 10$.

Из равенства $x_1 = M_{1257} - M_{1356} = K$ следует, что $M_{1257} \neq 0$ или $M_{1356} \neq 0$ (иначе ранги матриц A и B были бы равны нулю, что невозможно). Найдем теперь искомые матрицы C, соответствующие этим случаям.

1. Пусть $M_{1257} \neq 0$. Тогда $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $b_1 \neq 0$, $b_3 \neq 0$. Откуда получаем, что матрица C (с точностью до линейной эквивалентности) имеет вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & b_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Из равенств $M_{1357}=0$, $M_{1256}=0$ получаем $a_3=0$, $b_2=0$, а из равенств $x_3=M_{1368}+M_{2457}=0$, $x_4=M_{1278}+M_{3456}=0$ имеем $a_4=0$, $b_4=0$.

Следовательно, матрица C имеет вид:

$$C=\left\|\begin{matrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&1&0\end{matrix}\right\|.$$

2. Пусть $M_{1356}\neq 0$. Тогда тем же способом, что и в случае $M_{1257}\neq 0$, получаем, что матрица C имеет вид:

$$C=\left\|\begin{matrix}1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0\end{matrix}\right\|.$$

Значит, в полном соответствии с найденным методом восстановления двух матриц получаем два решения (заделка)–(свободное опирание) и (свободное опирание)–(заделка):

$$X(0)=0,\quad X'(0)=0,\quad X(1)=0,\quad X''(1)=0;$$

$$X(0)=0,\quad X''(0)=0,\quad X(1)=0,\quad X'(1)=0.$$

Заметим, что краевые условия определены верно, так как именно этим закреплениям по решению прямой спектральной задачи соответствуют заданные значения частот колебаний.

Таким образом, при непротекании жидкости по трубе закрепления концов трубы восстанавливаются с точностью до перестановок закреплений местами.

7. Заключение

В работе рассмотрена обратная спектральная задача по изгибным колебаниям трубы с жидкостью. Приведен метод решения задачи диагностирования закреплений трубы с непротекающей жидкостью по известным частотам ее изгибных колебаний.

В математической постановке метод решения сведен к восстановлению двойственным образом матрицы коэффициентов краевых условий по минорам старших порядков. Решение задачи рассмотрено по известным точным и приближенным значениям частот изгибных колебаний трубы с жидкостью. Приведены примеры применения метода восстановления двух матриц.

По найденному методу решения обратной спектральной задачи доказана непрерывная зависимость решения от частот колебаний трубы.

Список литературы

1. Артоболевский И. И., Бобровницкий Ю. И., Генкин М. Д., *Введение в акустическую динамику машин*, Наука, М., 1979.

2. Павлов Б. В., *Акустическая диагностика механизмов*, Машиностроение, М., 1971.

3. Романов В. Г., *Обратные задачи математической физики*, Наука, М., 1984.

4. *Вибрации в технике: справочник в 6-ти т*, **1 Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина**, Машиностроение, М., 1978.

5. Ахатов И. Ш., Ахтямов А. М., “Определение вида закрепления стержня по собственным частотам его изгибных колебаний”, *Прикладная математика и механика*, **65**:2 (2001), 290–298.

6. Сафина Г. Ф., “Диагностирование относительной жесткости подкрепленных цилиндрических оболочек по собственным частотам их асимметричных колебаний”, *Контроль. Диагностика*, 2005 №12, 55–59.

7. G. F. Safina, “Investigations of the Torsional Vibrations of a Shaft with Disks”, *Russian Journal of Nondestructive Testing*, **47 №3** (2011), 189-201.

8. Ильгамов М. А., *Колебания упругих оболочек, содержащих жидкость и газ*, Наука, М., 1969.

9. Томпсон Дж. М. Т., *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике: Пер. с англ.*, Мир, М., 1985.

10. Ахтямов А. М., Сафина Г. Ф., “Определение виброзащитного закрепления трубопровода”, *Прикладная механика и техническая физика*, **49 №1** (2008), 139–147.

11. Постников М. М., *Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия*, Наука, М., 1979.

Method of dual restoration on minors the senior orders of a matrix of regional conditions in the return spectral task for a pipe from not proceeding liquid

© **G F. Safina**[2]

Abstract. The decision method is given in work problems of diagnosing of any fixing of a narrow pipe with not proceeding liquid. The method is reduced to restoration on minors the highest orders of two matrixes of regional conditions of the return spectral tasks. The solution of a task is considered at known exact and approximate values of frequencies of flexural fluctuations of the pipe filled liquid. On the found method of the solution of the return spectral task continuous dependence of the decision on frequencies of fluctuations of a pipe is proved with not proceeding liquid. Examples are given

Key Words: pipe from not proceeding liquid, frequencies of fluctuations, matrix of regional conditions, minors matrixes, diagnosing of fixing, method of restoration of matrixes.

[2] Associate professor of mathematical modeling and information security of Neftekamsk branch The Bashkir state university; Neftekamsk Safinagf@mail.ru

УДК 541.127

Математическое и программное обеспечение решения обратных задач химической кинетики

© С. И. Спивак[1] А. С. Исмагилова[2] А. А. Ахмеров[3]

Аннотация. Огромное значение для современной химической кинетики имеет интенсивное развитие вычислительной техники, появление все более быстродействующих компьютеров. Это позволяет вести статистическую обработку больших массивов экспериментальных данных по кинетике химических превращений, использовать для нахождения кинетических параметров, характеризующих отдельные стадии превращений, сложные, требующие большого объема вычислительной работы процедуры минимизации функции отклонения, рассчитывать протекание процессов, описываемых системами большого числа дифференциальных и алгебраических уравнений.

Ключевые слова: граф химической реакции, маршрут реакции, правило Хориути.

1. Введение

При исследовании химических реакций для практики нужно знать не только возможность осуществления данной реакции, но и скорость её протекания. Ответ на этот вопрос дает химическая кинетика. Для получения кинетических закономерностей должны быть известны не только начальное и конечное состояние системы, но и путь, по которому протекает реакция, а он обычно заранее не известен. Зная эти закономерности, т.е. математическую модель изучаемой реакции и ее кинетические параметры, можно рассчитать ее скорость и оптимальные условия проведения в промышленном реакторе. С исследованиями кинетики химической реакции связаны важнейшие направления современной химии и химической промышленности: разработка рациональных принципов управления химическими процессами; стимулирование полезных и торможение и подавление нежелательных химических реакций; создание новых и усовершенствование существующих процессов и аппаратов в химической технологии; изучение поведения химических продуктов, материалов и изделий из них в различных условиях применения и эксплуатации. Цель настоящей работы – разработка программы, позволяющей находить линейно независимые маршруты сложных химических реакций. В ходе выполнения работы предстоит выполнить следующие задачи:

– изучить методы и алгоритмы, которые применяются при поиске маршрутов химических реакций;

– на основе алгоритмов написать программу, с помощью которой можно будет определять маршруты сложных химических реакций;

– с помощью программы найти линейно независимые маршруты некоторых реакций.

[1] Заведующий кафедрой математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; s.spivak@bashnet.ru.

[2] Докторант кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; ismagilovaas@rambler.ru.

[3] Аспирант кафедры математического моделирования, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aaazat@list.ru.

2. Теоретико-графовая интерпретация. Постановка задачи. Описание решения.

Для решения задач химической кинетики применяется теория графов, которая имеет давнюю историю применения к прикладным задачам, благодаря чему развивался ее математический аппарат.

Общим методом геометрического описания механизмов сложных реакций стали графы, введенные А.И. Вольпертом [1]. Возникают алгебраическая интерпретация механизма в виде стехиометрических и молекулярных матриц и геометрическая – в виде графа Вольперта. Центральным понятием является понятие маршрута. Маршрут был введен как вектор, умножение элементов которого на соответствующие стадии механизма сложной реакции вместе с последующим сложением стадий приводит к итоговому уравнению реакции, которое уже не содержит промежуточных веществ.

Каждому независимому маршруту в двудольном графе системы реакции соответствует один подграф со следующими свойствами:

а) подграф содержит только те вершины-вещества, которые соответствуют компонентам маршрута системы реакций, связанных балансным соотношением;

б) подграф не содержит вершины-вещества, инцидентные только вершинам-реакциям, не принадлежащим выделенному графу;

в) каждая вершина-реакция выделенного подграфа имеет равные веса входящих и веса исходящих.

Если в подграфе хотя бы для одной вершины-реакции полустепени захода и выхода ребер не равны, то вводится следующая графическая процедура. Некоторым вершинам-реакциям, принадлежащим выделенному подграфу, приписывается коэффициент (т.е. умножается на подходящее число). При этом веса всех дуг, инцидентных данной вершине, умножаются на тот же коэффициент. Этот коэффициент подбирается таким образом, чтобы для всех вершин-реакций данного подграфа веса входящих ребер были равны весам исходящих дуг.

В реальных химических системах каждому независимому маршруту отвечает либо циклический подграф, либо комбинация циклов, соединенных мостами. Аппарат теории графов позволяет выделять циклические подграфы и тем самым находить независимые маршруты в заданной реакции. При нахождении маршрутов механизмов сложных реакций наряду с методами линейной алгебры используется анализ связного ориентированного двудольного графа. Справедлива следующая теорема [2].

Теорема 2.1. *Маршрут реакции есть циклический подграф исходного графа. Объединение таких подграфов образует полный граф, т.е. граф исходной системы реакции. Число независимых маршрутов равно числу независимых циклов графа Вольперта.*

В случаях, когда механизм реакции распадается на большое число стадий и (или) содержит большое количество веществ, для нахождения маршрутов эффективно используется матрица инцидентности. Под матрицей инцидентности понимают матрицу $Q = \|q_{ij}\|$ размера $(n \times m)$, в которой столбцам поставлены в соответствие вершины, а строкам – ребра графа. Для ориентированного графа $q_{ij} = 1$, если в графе имеется дуга $e_j = (v_i, v_k)$, в которой вершина v_i начальная; $q_{ij} = -1$, если в графе имеется дуга $e_j = (v_k, v_i)$, в которой вершина v_i конечная; $q_{ij} = 0$ во всех других случаях.

Анализ маршрутов на графе реакции с использованием матрицы инцидентности допускает компьютерную интерпретацию.

Рассмотрим механизм реакции циклоалюминирования олефинов триэтилалюминием [3]:

$$
\begin{aligned}
&1) A_1 + \tfrac{1}{2}A_2 \leftrightarrow \tfrac{1}{2}A_3 + \tfrac{1}{2}A_4\\
&2) A_1 + A_3 \to A_4 + A_{12}\\
&3) A_3 + A_4 \to A_2 + \tfrac{1}{2}A_6 + \tfrac{1}{2}A_{13}\\
&4) A_3 \to A_5 + A_{13}\\
&5) A_1 + A_5 \to A_{13} + A_8\\
&6) A_5 + A_9 \to A_{10}\\
&7) A_1 + A_{10} \to A_3 + A_{11}\\
&8) A_1 + \tfrac{1}{2}A_6 \to A_4 + \tfrac{1}{2}A_7\\
&9) A_7 \to A_3 + A_5
\end{aligned}
$$

где

$A_1 = Al\,(C_2H_5)_3$
$A_2 = CpZrCl_2$
$A_3 = Cp_2Zr\,(C_2H_5)\,Cl \cdot Al\,(C_2H_5)_3$
$A_4 = ClAl\,(C_2H_5)_2$
$A_5 = Cl_2ZrCH_4CH_2Al\,(Cl)\,(C_2H_5)_2$
$A_6 = (Cl)\,Cp_2ZrCH_2CH_2ZrCp_2\,(Cl) \cdot 2\,[ClAl\,(C_2H_5)_2]$
$A_7 = (Cl)\,Cp_2ZrCH_2CH_2ZrCp_2\,(Cl) \cdot 2\,[Al\,(C_2H_5)_3]$
$A_8 = Cp_2Zr\,(Cl)\,CH_2CHZrCp_2\,(Cl)\,[Al\,(C_2H_5)_2]_2$
$A_9 = CH_2CHR$
$A_{10} = Cp_2Zr\,(Cl)\,CH_2CHRCH_2CH_2Al\,(C_2H_5)_2$
$A_{11} = (C_2H_5)\,Al\,(CH_2)_3\,CHR$
$A_{12} = Cp_2Zr\,(C_2H_5)_2 \cdot Al\,(C_2H_5)$
$A_{13} = C_2H_6$
$R = Bu$, Ph или $SiEt_3$

Пусть $[X_1, X_2, X_3, X_4, X_5] = [A_1, A_4, A_9, A_{11}, A_{13}]$ – исходные вещества и продукты реакции, $[Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6, Y_7, Y_8] = [A_2, A_3, A_5, A_6, A_7, A_8, A_{10}, A_{12}]$ – промежуточные вещества.

Матрица стехиометрических коэффициентов:

$$
\Gamma = \begin{pmatrix}
-1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\
1 & -1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\
-1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0\\
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Согласно правилу Хориути число независимых маршрутов $P = S - J$, где S – число стадий, J – число независимых промежуточных веществ. Число независимых промежуточных веществ равно рангу матрицы стехиометрических коэффициентов промежуточных веществ. В рассматриваемом механизме $P = 2$.

На Рисунке 2.1 представлен граф реакции циклоалюминирования олефинов триэтилалюминием.

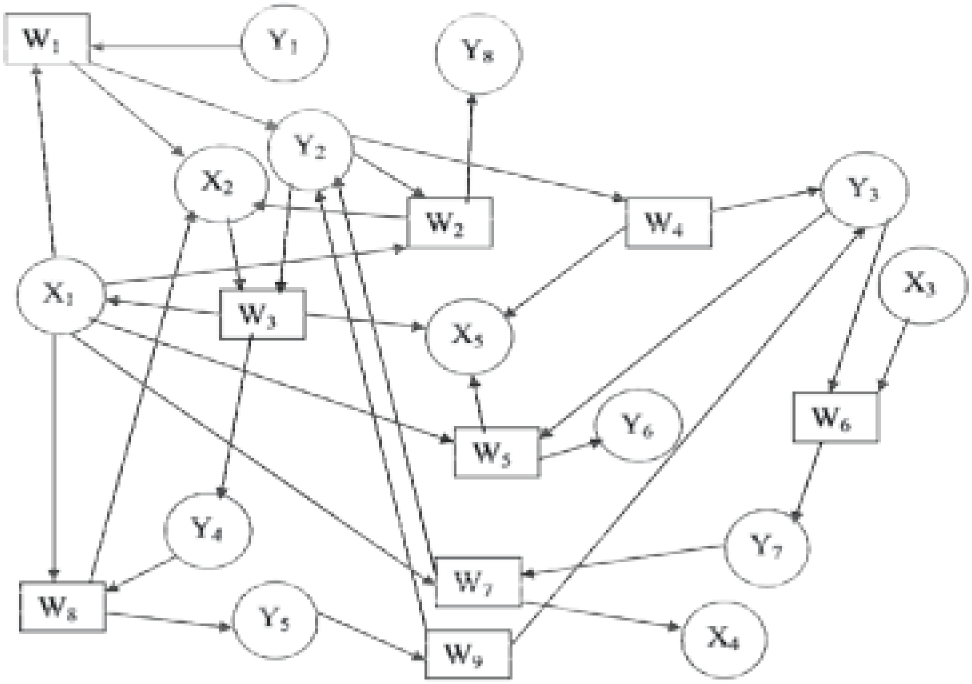


Рисунок **2.1**

Граф реакции циклоалюминирования олефинов триэтилалюминием

Вершины-вещества обозначены на рисунке кругами, вершины-реакции – квадратами.

Известно, что матрица инцидентности однозначно определяет структуру графа. Выпишем матрицу инцидентности для графа механизма реакции циклоалюминирования олефинов триэтилалюминием. Матрица состоит из 22 столбцов (по количеству вершин: первые 5 столбцов для исходных веществ и продуктов реакции $(X_i, 1 \leq i \leq 5)$, далее 8 столбцов для промежуточных веществ $(Y_j, 1 \leq j \leq 8)$ и последние 9 столбцов для реакций $(W_k, 1 \leq k \leq 9)$) и 34 строк (по количеству ребер графа). По матрице инцидентности циклы находятся по следующему алгоритму. Поиск цикла начинаем с 1, которая находится в столбце, обозначающем вершину-реакцию. Осуществляем переход от 1 к -1 в строке, далее от -1 к 1 в столбце и т.д. Процесс продолжаем до тех пор, пока не придем к 1, с которой начали «движение». При переходе к новому столбцу запоминаем номер, соответствующий номеру стадии или вещества, участвующего в реакции. Полученная последовательность вершин-реакций и вершин-веществ образует некоторый циклический подграф графа Вольперта исследуемой системы реакций. Выбор начала цикла происходит следующим образом: берется 14-й столбец (реакция W_1) и в нем ищем строки, содержащие 1, с этих 1 и начинаем поиск. После того как мы нашли все подходящие циклы, начинающиеся с первой реакции, переходим к столбцу 15 (реакция W_2) и ищем 1 в нем и т.д. (Рисунок 2.2). Цикл образует последовательность: $[(12,16)$ – $(12,9)$ – $(29,9)$ – $(29,21)$ – $(31,21)$ – $(31,10)$ – $(32,10)$ – $(32,22)$ – $(34,22)$ – $(34,8)$ – $(21,8)$ – $(21,19)$ – $(23,19)$ – $(23,12)$ – $(25,12)$ – $(25,20)$ – $(26,20)$ – $(26,7)$ – $(9,7)$ – $(9,16)$ – $[(12,16)]$, соответствующая последовательность вершин W_3 – W_8 – W_9 – W_6 – W_7 – W_3.

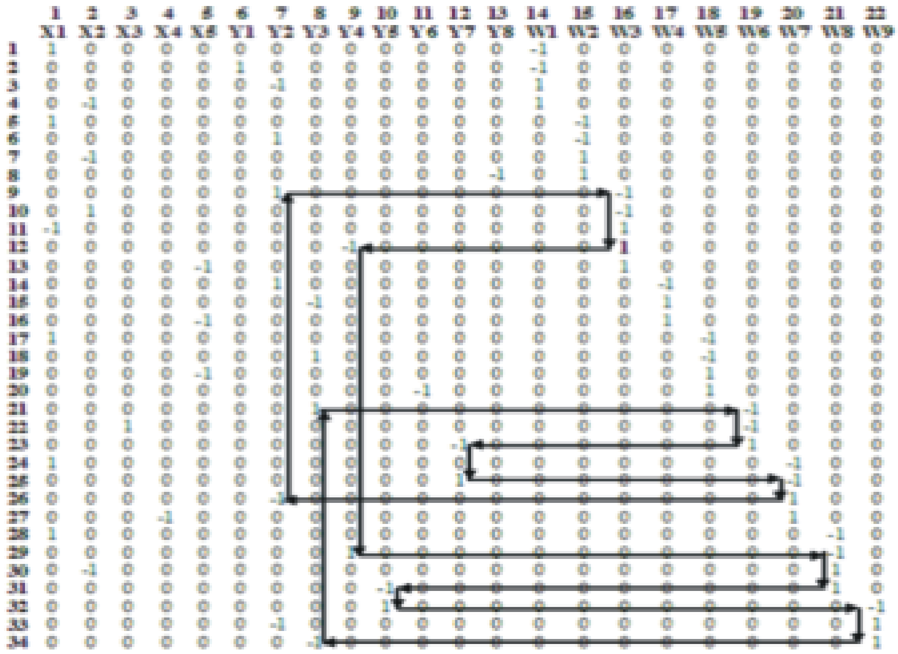


Рисунок **2.2**

Схема нахождения маршрута M_1 по матрице инцидентности

При поиске циклов по матрице инцидентности с помощью программы мы получим множество последовательностей, среди которых есть такие, которые принадлежат одному и тому же подграфу, но начинаются с разных вершин. Чтобы исключить подобные повторения используется специальная функция сравнения. Данная функция сравнивает длины полученных последовательностей, и, если они равны, проверяет, не является ли одна последовательность «копией» другой, только со смещением. После чего, если существует несколько последовательностей-«копий», программа оставляет только одну из них, а остальные удаляет.

Далее из получившейся последовательности выпишем вектор, размерность которого равна количеству стадий рассматриваемого механизма реакции. Вектор формируется следующим образом: i-я координата вектора равна 1, если i-я вершина-реакция входит в последовательность, полученную ранее (учитываем что в эту последовательность вершины-реакции входят под номером, соответствующим им в матрице инцидентности), иначе эта координата равна нулю. Таким образом, из нашей последовательности получим вектор $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Аналогичные действия производятся над всеми полученными последовательностями.

Теперь нужно из всех полученных векторов выделить линейно независимые. Для этого посчитаем ранг матрицы, строками которой являются вектора, методом Гаусса. Число независимых векторов равно рангу r матрицы, вектора, соответствующие первым r строкам полученной матрицы (с учетом перестановок) будут линейно независимыми.

Осталось проверить, удовлетворяет ли итоговое уравнение, полученное суммой всех стадий с учетом умножения на соответствующую координату вектора, балансному соотношению. Если это не так, то необходимо подобрать такие коэффициенты, при умножении которых на определенные координаты вектора выполняется балансное соотношение для итогового уравнения. Подбор коэффициентов заключается в следующем. Необходимо, чтобы в итоговом уравнении не содержалось промежуточных веществ. Это условие можно записать так: $S \cdot Z = 0$, где S – это матрица, полученная транспонированием той части стехиометрической матрицы, которая содержит коэффициенты при промежуточных веществах, Z – маршрут – вектор-столбец. Далее отбрасываем нулевые столбцы матрицы S, они соответствуют нулевым координатам вектора Z. Получаем систему линейных однородных уравнений, неизвестными будут ненулевые координаты вектора Z. Решая методом Гаусса данную систему, найдем подходящие коэффициенты.

В результате получим маршрут: $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Проводя аналогичные рассуждения, получим также маршрут $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Итоговое уравнение, отвечающее маршрутам M_1 и M_2:

$$A_1 + A_9 = A_{11} + A_{13}$$

Все описанные выше автоматизированы с помощью программы на языке программирования $C++$.

3. Описание работы программы

Алгоритм работы программы можно представить в виде блок-схемы (Рисунок 3.1).

Рисунок **3.1**

Блок-схема программы

Для поиска маршрутов реакции с помощью разработанной программы необходимо ввести число реакций, общее число веществ, число промежуточных веществ и матрицу стехиометрических коэффициентов, для вывода итоговых уравнений необходимо также ввести обозначения веществ, участвующих в реакции (Рисунок 3.2).

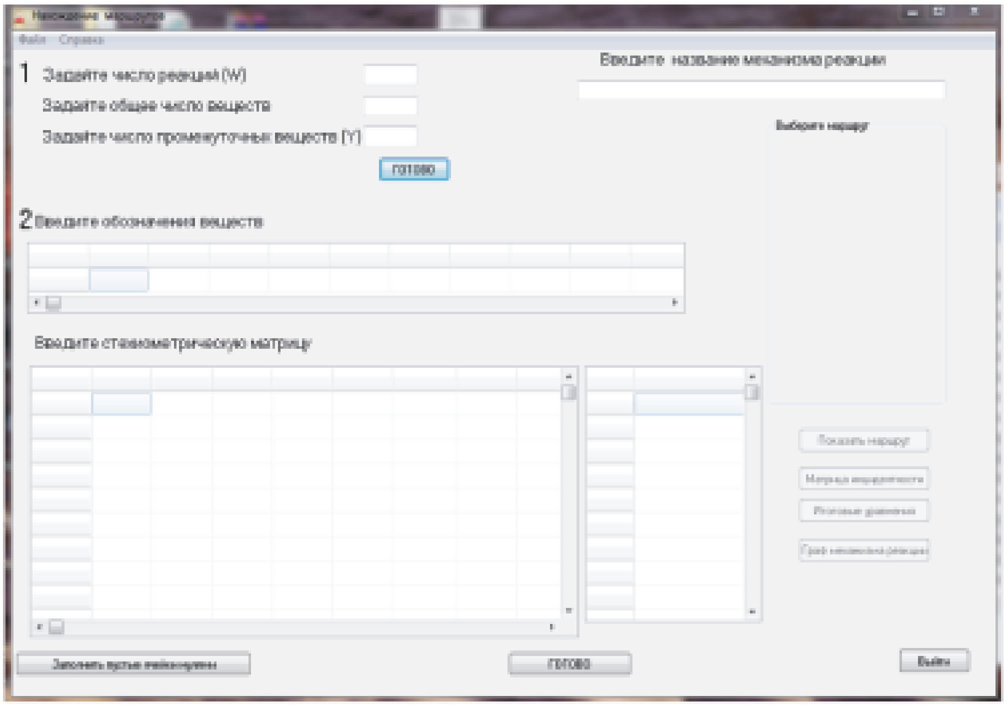


Рисунок **3.2**

Ввод входных данных в программу

После ввода количества реакций, веществ, промежуточных веществ, программа автоматически определит размерность стехиометрической матрицы. Далее, переходим к пункту 2 программы и вводим стехиометрические коэффициенты и обозначения веществ. После ввода данных на экране появляется список маршрутов и становятся активными кнопки для просмотра результатов(Рисунок 3.3).

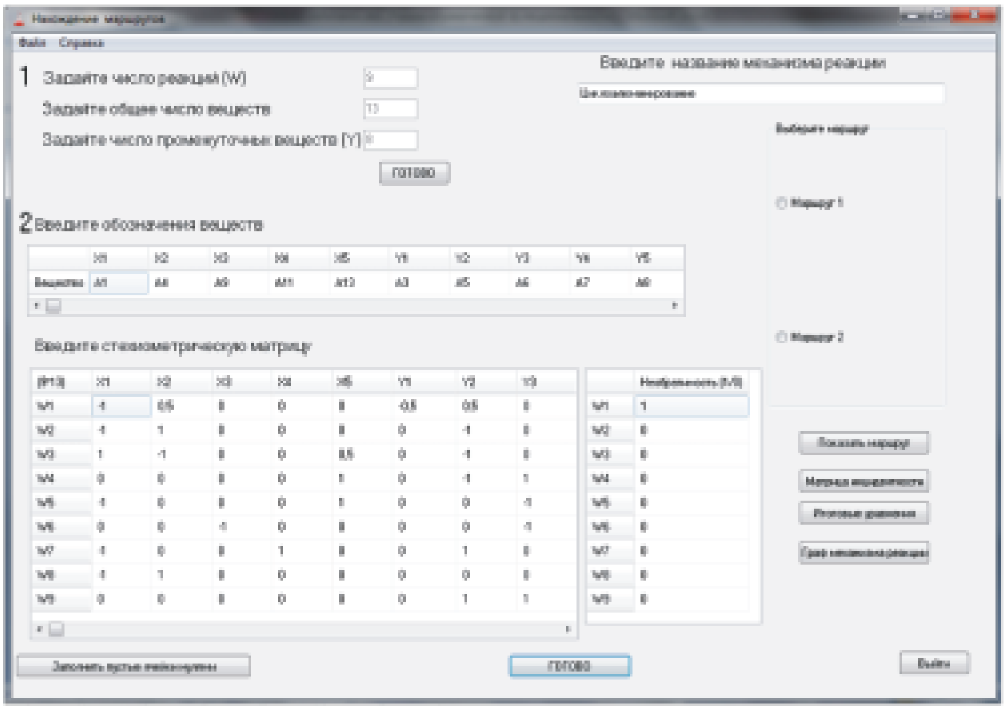


Рисунок **3.3**

Окно программы с введенными данными

Выбрав маршрут из появившегося списка и нажав на кнопку «Показать маршрут», появится окно, в котором отображаются координаты выбранного маршрута-вектора, соответствующее ему итоговое уравнение и циклический подграф полного графа, отвечающий данному маршруту(Рисунок 3.4).

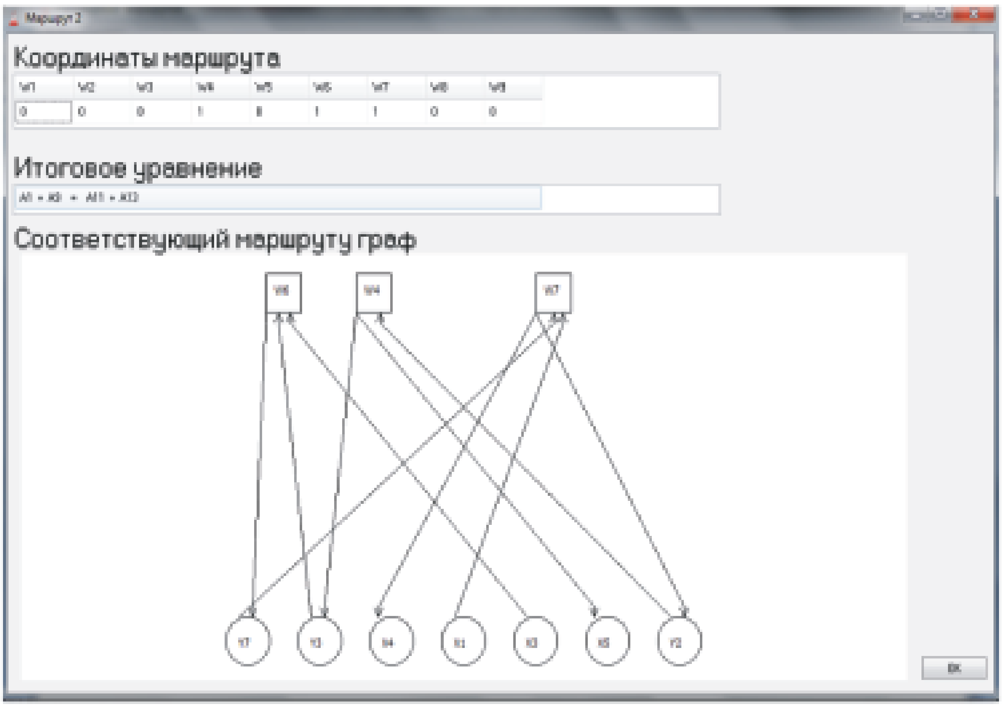


Рисунок **3.4**

Вывод маршрута и соответствующего итогового уравнения

Также можно просмотреть матрицу инцидентности исследуемого механизма реакции. Матрица инцидентности в программе вычисляется исходя из коэффициентов стехиометрической матрицы. Сначала берется первая строка стехиометрической матрицы. Рассматриваются те столбцы, значение которых не равно нулю. Если значение отрицательное, то в первой строке матрицы инцидентности в соответствующем столбце ставится 1, а в столбце W_1 (выделенного под реакцию 1) ставится -1. Если же значение положительное, то в столбце матрицы инцидентности, который соответствует столбцу в стехиометрической матрице, содержащем данное значение, ставится -1, а в столбце ставится 1. Для каждого ненулевого значения в стехиометрической матрице выделяется отдельная строка в матрице инцидентности. Аналогично для остальных строк. Процесс продолжается до тех пор, пока для каждого ненулевого значения стехиометрической матрицы соответствующие столбцы в соответствующей строке матрицы инцидентности не заполнятся значениями 1 и -1.

В программе также реализована возможность вывода полного графа рассматриваемого механизма на экран нажатием на кнопку "Граф механизма реакции" (Рисунок 3.5).

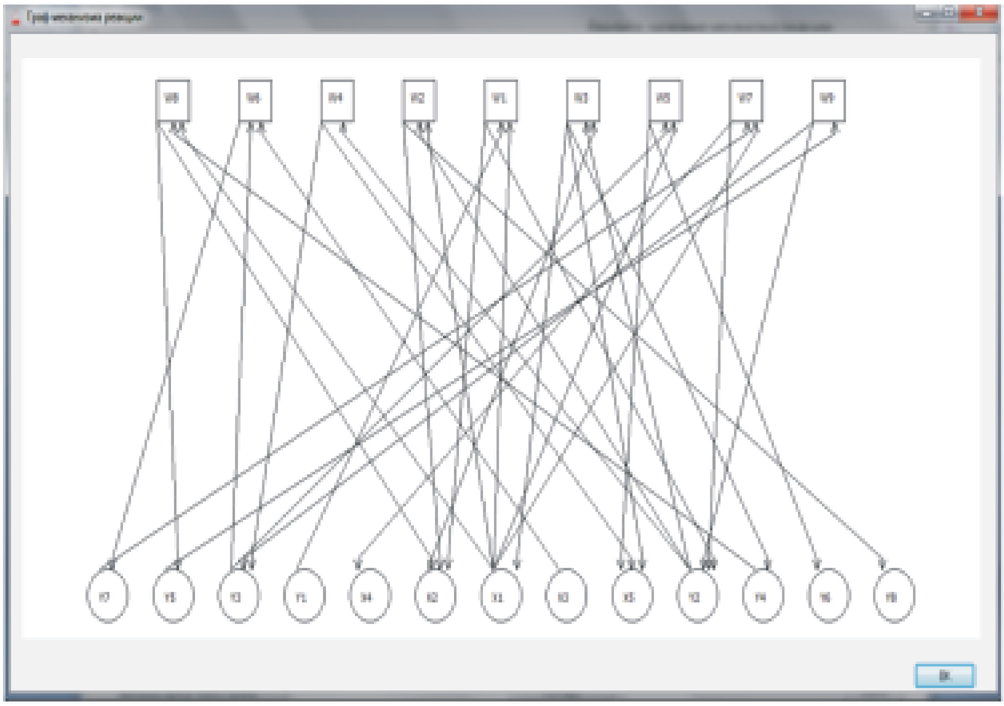


Рисунок **3.5**

Граф механизма реакции

Программа предусматривает возможность сохранения входных данных текущего механизма и открытие ранее уже исследованного механизма. Для этого необходимо ввести название механизма и в меню выбрать «Файл» – «Сохранить механизм», «Файл» – «Сохранить механизм» соответственно. Также предусмотрена возможность сохранения результатов исследования механизма реакции в отчет формата MS Word.

4. Заключение

Исходя из проделанной работы и полученных результатов, мы можем сделать вывод, что построенная на описанных в исследовании алгоритмах математическая модель анализа механизмов сложных химических реакций адекватна. Также мы убедились, что разработанная программа, основой которой является наша математическая модель задачи, выполняется корректно и может быть применена при поиске маршрутов конкретных реакций.

В дальнейшем планируется продолжение тестирования программы путем исследования новых механизмов химических реакций. Также ведется работа по расспалеливанию программного кода программы, что позволит использовать программу для механизмов с очень большим числом реакций и участвующих веществ на многопроцессорных вычислительных системах.

Список литературы

1. Вольперт А. И., Худяев С. И., *Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики*, Наука, М., 1975.

2. Спивак С. И., Исмагилова А. С., Хамитова И. А., “Теоретико-графовый метод определения маршрутов сложных химических реакций”, *Доклады Академии наук*, 2010, № 434(4), 499–501.

3. Спивак С. И., Губайдуллин И. М., Вайман Е. В., *Обратные задачи химической кинетики*, РИО БашГУ, Уфа, 2003.

Software solutions of inverse problems of chemical kinetics

© **S. I. Spivak**[4] **A. S. Ismagilova**[5]**A. A. Akhmerov**[6]

Abstract. The intense development of the techniques calculate and the appearance of the faster computers have the immense meaning for the modern chemical kinetics. It allows to do the statistical treatment of large arrays of experimental data on kinetics of chemical transformations, to utilize for finding of kinetic parameters, characterizing the separate stages of transformations, difficult, requiring the large volume of computational work of procedure of minimization of function of deflection, calculate flowing of processes described the systems of large number of differential and algebraic equations.

Key Words: Graph of chemical reaction, route of reaction, Khoriuti rule.

[4] Manager by the department of mathematical modeling, Bashkir State University, Ufa; s.spivak@bashnet.ru.

[5] Doctoral student by the department of mathematical modeling, Bashkir State University, Ufa; ismagilovaas@rambler.ru.

[6] Postgraduate student by the department of mathematical modeling, Bashkir State University, Ufa; aaazat@list.ru.

УДК 517.521.8

Суммирование рядов гармонических функций

© А. О. Сыромясов[1]

Аннотация. Предлагается метод быстрого суммирования рядов, общий член которых – гармоническая функция, затухающая на бесконечности. По сравнению с прямым суммированием метод позволяет на порядки сократить число слагаемых ряда, необходимых для достижения заданной точности. Численные эксперименты подтверждают сходимость метода.
Ключевые слова: функциональный ряд, улучшение сходимости, гармоническая функция, мультиполь.

1. Введение

При моделировании гидродинамического, термодинамического или электромагнитного взаимодействия частиц в дисперсной среде может возникнуть необходимость решать уравнение Лапласа с периодическими граничными условиями.

Если число элементарных ячеек периодичности достаточно велико, то структуру, образуемую частицами взвеси, практически можно считать бесконечной [1]. В этом случае решением уравнения является функция, периодическая относительно существующей в дисперсной среде структуры и представимая в виде функционального ряда.

Для сходимости ряда требуется, чтобы его общий член на бесконечности стремился к нулю. Это значит, что в декартовой прямоугольной системе координат слагаемые бесконечной суммы являются линейными комбинациями т.н. мультиполей – функций вида

$$L_{i_1\cdots i_M}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_{i_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{i_M}} \Big(\frac{1}{|\vec{x}|} \Big), \tag{1.1}$$

где M – ранг мультиполя, $\vec{x} = (x_1,\, x_2,\, x_3)$ – радиус-вектор точки относительно начала координат O.

Если дисперсные частицы образуют трехмерную решетку Бравэ с периодами $\vec{\tau}_1$, $\vec{\tau}_2$, $\vec{\tau}_3$, то центр любой из них имеет радиус-вектор вида $\vec{r}^n = n_s \vec{\tau}_s$, где n_s – целые числа. По одинаковым индексам здесь и ниже происходит суммирование в пределах от 1 до 3. В этом случае требуется найти

$$L^{\infty}_{i_1\cdots i_M}(\vec{x}) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \sum_{n_3=-\infty}^{\infty} L_{i_1\cdots i_M}(\vec{x} - \vec{r}^n). \tag{1.2}$$

Иногда (например, под действием магнитного поля) частицы взвеси образуют одномерную цепочку [2]. Пусть она вытянута вдоль координатной оси Ox_1 и имеет период r. Тогда положения частиц задаются векторами $\vec{r}_N = (rN,\, 0,\, 0)$, где N – целое, и следует просуммировать ряд

$$L^{\infty}_{i_1\cdots i_M}(\vec{x}) = \sum_{N=-\infty}^{\infty} L_{i_1\cdots i_M}(\vec{x} - \vec{r}_N). \tag{1.3}$$

Наиболее простым подходом к вычислению значений функций вида (1.2), (1.3) служит прямое суммирование: общий член ряда остается прежним, а переменные n_1, n_2, n_3 или

[1] Доцент кафедры математики и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; syal1@yandex.ru.

N изменяются в больших, но конечных пределах, обеспечивающих достижение заданной точности. Например,

$$\sum_{N=-\infty}^{\infty} u_N \approx \sum_{N=-N_0}^{N_0} u_N. \tag{1.4}$$

В связи с тем, что скорость сходимости рядов при малых рангах мультиполей M невелика, такой метод малоэффективен.

При использовании многопроцессорных ЭВМ суммирование можно ускорить, назначив каждому узлу системы диапазон значений N, лежащий в рамках исходного $-N_0 \ldots N_0$. Но более эффективен способ ускорения сходимости, экономящий вычислительные ресурсы. Он основан на замене ряда другим, имеющим ту же сумму, при этом слагаемые полученного ряда убывают гораздо быстрее. С этой целью для рядов (1.2) может быть использовано тета-преобразование [3, 4].

Применение этого преобразования к суммам (1.3) затруднено, поскольку размерности пространства и периодической цепочки не совпадают: в трехмерное пространство “вкладывается” одномерная, а не трехмерная, как в (1.2), периодическая структура. Помимо этого, в случае трехмерной решетки аргумент $\vec{x}$ можно считать ограниченным ячейкой периодичности. Если гармоническая функция периодична относительно одномерной цепочки, то ограничена лишь одна из координат: $|x_1| \leq r/2$.

В настоящей работе предлагается метод улучшения сходимости рядов (1.3), не основанный на тета-преобразовании.

2. Некоторые свойства мультиполей

Предварительно перечислим свойства функций (1.1), которые будут использованы впоследствии.

Очевидно, значение (1.1) не зависит от порядка дифференцирования по координатам, поэтому мультиполь симметричен по всем своим индексам.

Поскольку любой мультиполь есть гармоническая функция и

$$\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} L_{i_1 \cdots i_M}(\vec{x}) = L_{i_1 \cdots i_M jk}(\vec{x}),$$

то его свертка по двум любым индексам равна нулю:

$$L_{i_1 \cdots i_M jj}(\vec{x}) = 0. \tag{2.1}$$

Так как $|\vec{x}|$ – четная функция $\vec{x}$, то функции (1.1) являются четными, если M (число операций дифференцирования по координате) делится на 2, и нечетными в противном случае. Это утверждение справедливо и для функций (1.2), (1.3), причем для рядов (1.2) оно доказано в [5]. Доказательство для рядов (1.3) полностью аналогично; в нем используется бесконечность цепочки, по которой происходит суммирование.

В явном виде мультиполь M-го ранга (1.1) задается формулой

$$L_{i_1 \cdots i_M} = (-1)^M \sum_{k=0}^{\lceil M/2 \rceil} (-1)^k \frac{(2M-2k-1)!!}{|\vec{x}|^{2M-2k+1}} \delta_{(i_1 i_2} \ldots \delta_{i_{2k-1} i_{2k}} x_{i_{2k+1}} \ldots x_{i_M)}. \tag{2.2}$$

Здесь $\lceil y \rceil$ – целая часть y, взятая с избытком, δ_{jk} – дельта-символ Кронекера. По индексам, взятым в круглые скобки, производится симметризация без деления на число слагаемых.

В частности, при $M = 1, 2, 3$ равенство (2.2) дает

$$L_{i_1}(\vec{x}) = -\frac{x_{i_1}}{|\vec{x}|^3},\ L_{i_1 i_2}(\vec{x}) = 3\frac{x_{i_1 i_2}}{|\vec{x}|^5} - \frac{1}{|\vec{x}|^3}\delta_{i_1 i_2},$$
$$L_{i_1 i_2 i_3} = -15\frac{x_{i_1 i_2 i_3}}{|\vec{x}|^7} + \frac{3}{|\vec{x}|^5}(\delta_{i_1 i_2}x_{i_3} + \delta_{i_1 i_3}x_{i_2} + \delta_{i_2 i_3}x_{i_1}).$$

С увеличением M сложность выражений быстро растет.

Из (1.1) и (2.2) следует, что мультиполь M-го ранга есть однородная функция $\vec{x}$ порядка $-(M+1)$. Следовательно, существует такая константа $C(M)$, что

$$|L_{i_1 \cdots i_M}(\vec{x})| \le \frac{C(M)}{|\vec{x}|^{M+1}}. \tag{2.3}$$

Оценим эту постоянную.

Количество слагаемых, отвечающих каждому k в (2.2), равно

$$C_M^{M-2k} \cdot \frac{(2k)!}{(2!)^k k!} = \frac{M!}{2^k k!(M-2k)!}.$$

В самом деле, из M возможных индексов $M - 2k$ выделяются координатам вектора $\vec{x}$, а остальные $2k$ – символам Кронекера. Эти $2k$ номеров $i_1, \ldots, i_{2k}$ надо разбить на k пар и учесть симметрию дельта-символов, что и дает указанное выше число слагаемых.

Слагаемые (2.2) максимальны по модулю, если вектор $\vec{x} = (|\vec{x}|,\ 0,\ 0)$. В этом случае

$$L_{i_1 \cdots i_M}(\vec{x}) = \frac{(-1)^M M!}{2^M |\vec{x}|^{M+1}} \sum_{k=0}^{\lceil M/2 \rceil} (-1)^k A_k,\ A_k = \frac{(2M-2k)!}{k!(M-k)!(M-2k)!}.$$

Поскольку все A_k положительны, сумма является знакочередующейся и по модулю не превышает A_{k_0} – наибольшего из A_k. Тем самым,

$$C(M) = \frac{M!}{2^M} \cdot \frac{(2M-2k_0)!}{k_0!(M-k_0)!(M-2k_0)!} \tag{2.4}$$

Чтобы вычислить k_0, найдем наибольшее значение k, при котором $A_{k+1}/A_k \ge 1$, и учтем, что $0 \le k_0 \le \lceil M/2 \rceil$. В итоге

$$k_0 = \left\{ \begin{array}{c} 0,\ M \le 4; \\ \left\lceil \frac{2M-2-\sqrt{2M(M+1)}}{4} \right\rceil,\ M \ge 5. \end{array} \right. \tag{2.5}$$

3. Метод суммирования рядов

Основная идея предлагаемого метода быстрого суммирования заключается в том, что узлы цепочки, по которым происходит суммирование, разбиваются на “ближнюю” и “дальнюю” группы. По узлам “ближней” группы суммируются сами мультиполи, а по узлам “дальней” – их тейлоровские разложения по координатам $\vec{x}$:

$$L^{\infty}_{i_1 \cdots i_M}(\vec{x}) \approx \sum_{N=-N_0}^{N_0} L_{i_1 \cdots i_M}(\vec{x} - \vec{r}_N) + \sum_{|N|>N_0} \sum_{K=0}^{D} \frac{1}{K!} L_{i_1 \cdots i_M j_1 \cdots j_k}(-\vec{r}_N) x_{j_1} \cdot \ldots \cdot x_{j_K}. \tag{3.1}$$

Число N_0, задающее границу двух групп, предполагается достаточно большим: разложения мультиполей в ряд Тейлора должны сходиться, а значит, $|\vec{x}|$ достаточно мал по сравнению с $|\vec{r}_N|$. Учет "дальних" слагаемых должен повысить точность вычислений по сравнению с методом прямого суммирования (1.4); при фиксированной точности это приведет к снижению количества задействованных узлов $2N_0+1$.

Избавимся от суммирования в бесконечных пределах. Для этого предварительно введем обозначение

$$L'_{i_1\cdots i_M}(\vec{0}) = \sum_{N\neq 0} L_{i_1\cdots i_M}(-\vec{r}_N). \tag{3.2}$$

Эта величина зависит лишь от набора индексов и от взаимного расположения цепочки узлов, по которым происходит суммирование. С целью более подробного ее исследования применим теорию тензорных функций [6].

Для изучаемой цепочки Ox_1 – поворотная ось бесконечного порядка. Координатные плоскости Ox_1x_2 и Ox_1x_3, проходящие через нее, служат плоскостями зеркальной симметрии. Зеркальной является и плоскость Ox_2x_3, перпендикулярная оси Ox_1. Тем самым, величина (3.2) имеет симметрию текстуры $m\cdot\infty : m$, которая задается тензорным базисом $\vec{\delta}$, $\vec{b}$. Здесь и далее $\vec{\delta} = \vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_2^{\,2} + \vec{e}_3^{\,2}$ – символ Кронекера, $\vec{b} = \vec{e}_1$, векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ – орты координатных осей. С учетом равенства (2.1) и симметрии мультиполей по индексам можно записать

$$\begin{aligned} L'_{i_1i_2}(\vec{0}) &= \frac{A_2}{r^3}(\delta_{i_1i_2} - 3b_{i_1}b_{i_2}),\\ L_{i_1i_2i_3i_4}(\vec{0}) &= \frac{A_4}{r^5}(\delta_{(i_1i_2}\delta_{i_3i_4)} - 5\delta_{(i_1i_2}b_{i_3}b_{i_4)} + 35b_{i_1}b_{i_2}b_{i_3}b_{i_4}). \end{aligned} \tag{3.3}$$

Аналогичные выражения для мультиполей любого порядка могут быть легко получены методом неопределенных коэффициентов.

Чтобы найти множители A_2, A_4, надо подставить в (3.2) и (3.3) какой-либо конкретный набор индексов. Например,

$$L'_{11}(\vec{0}) = -\frac{2A_2}{r^3} = \sum_{N\neq 0}\frac{1}{|rN|^3}.$$

В итоге $A_2 = -2\zeta(3)$; дзета-функция Римана $\zeta(q)$ определяется равенством

$$\zeta(q) = \sum_{N=1}^{\infty} N^{-q}.$$

Таким же образом, $A_4 = 6\zeta(5)$; коэффициент A_6 для тензора 6-го ранга выражается через $\zeta(7)$ и т.д.

Очевидно, при нечетных рангах M значение (3.2) равно нулю.

Теперь можно преобразовать "дальнюю" часть (3.1):

$$\begin{aligned} L^{\infty}_{i_1\cdots i_M}(\vec{x}) \approx& \sum_{N=-N_0}^{N_0} L_{i_1\cdots i_M}(\vec{x}-\vec{r}_N) +\\ &+ \sum_{\mathrm{even}(K+M),K\leq D}\frac{1}{K!}\Big[L'_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_k}(\vec{0}) - 2\sum_{N=1}^{N_0} L_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_k}(\vec{r}_N)\Big]x_{j_1}\cdot\ldots\cdot x_{j_K}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Здесь использовано свойство четности и нечетности мультиполей. Суммирование ведется лишь по таким K, что $K+M$ – четное число. В противном случае значения мультиполя

$(K+M)$-го порядка, просуммированные в симметричных пределах, дают нуль. Величины $L'_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_k}(\vec{0})$ уже известны из (3.3), а значения дзета-функций Римана могут быть вычислены заранее с любой требуемой точностью.

Оценим погрешность приближения (3.1) в зависимости от заданных $\vec{x}$, M и выбранных N_0, D:

$$R(\vec{x},M,D,N_0)=\left|\sum_{|N|>N_0}\left[L_{i_1\cdots i_M}(\vec{x}-\vec{r}_N)-\sum_{K=0}^{M}\frac{1}{K!}L_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_K}(-\vec{r}_N)x_{j_1}\cdot\ldots\cdot x_{j_K}\right]\right|.$$

Используя оценку остаточного члена формулы Тейлора для функции нескольких переменных в форме Лагранжа [7], получим

$$R(\vec{x},M,D,N_0)=\frac{1}{(D+1)!}\left|\sum_{|N|>N_0}L_{i_1\cdots i_M j_1\cdots j_{D+1}}(-\vec{r}_N+\theta_N\vec{x})x_{j_1}\cdot\ldots\cdot x_{j_{D+1}}\right|,$$

где $|\theta_N|\le 1$ для каждого узла N.

Число N_0 считается достаточно большим, поэтому определяющий вклад в значение мультиполя вносит слагаемое $-\vec{r}_N$ в аргументе; вектором $\theta_N\vec{x}$ можно пренебречь. Заменим мультиполь его наибольшим по модулю значением согласно (2.3). Поскольку свертка по индексам $j_1,\ldots,j_{D+1}$ происходит в пределах от 1 до 3, то

$$R(\vec{x},M,D,N_0)\le\frac{|x_1+x_2+x_3|^{D+1}}{(D+1)!}\sum_{|N|>N_0}\frac{C(M+D+1)}{|\vec{r}_N|^{M+D+2}}.$$

Наконец, учтем, что $|x_1+x_2+x_3|\le|\vec{x}|\sqrt{3}$, $|\vec{r}_N|=r|N|$, и заменим бесконечную сумму интегралом по dN в таких же пределах. В итоге

$$R(\vec{x},M,D,N_0)\le\frac{2}{r^{M+D+2}N_0^{M+D+1}}\cdot\frac{\left(|\vec{x}|\sqrt{3}\right)^{D+1}}{(D+1)!}\cdot\frac{C(M+D+1)}{M+D+1} \tag{3.5}$$

Итак, основной расчетной формулой является равенство (3.4), а погрешность оценивается согласно (3.5). Величина $C(M+D+1)$ определяется равенствами (2.4) и (2.5).

4. Реализация и тестирование метода

При программной реализации алгоритма исходными данными являются $\vec{x}$, M, набор индексов $i_1,\ldots,i_M$. Сюда же следует отнести и максимальный порядок производной D. Кроме того, пользователь вводит желаемую точность вычислений δ.

Для нахождения N_0 следует применить формулу (3.5): если $R(\vec{x},M,D,N_0)<\delta$, то

$$N_0>\left[\frac{2}{r^{M+D+2}}\cdot\frac{\left(|\vec{x}|\sqrt{3}\right)^{D+1}}{(D+1)!}\cdot\frac{C(M+D+1)}{M+D+1}\cdot\frac{1}{\delta}\right]^{1/(M+D+1)}. \tag{4.1}$$

При вычислении суммы ряда сначала следует найти N_0 из (4.1), а затем воспользоваться расчетной формулой (3.4).

Соответствующий код был написан в среде Delphi 2009 Embarcadero [8]. В программу были внесены значения дзета-функций $\zeta(3),\ldots,\zeta(9)$, а также явные выражения для мультиполей до 8-го ранга включительно. Предполагалось, что шаг решетки $r=1$.

Как отмечалось выше, сложность выражений (2.2) быстро растет с увеличением M, поэтому с целью сокращения времени вычислений были проделаны упрощения. Во-первых, одинаковые степени $|\vec{x}|$ и символы Кронекера выносились за скобку. Во-вторых, в (3.4) свертка по $j_1, \ldots, j_K$ "в лоб" привела бы к многократному вычислению мультиполей, у которых наборы индексов совпадают с точностью до перестановки. Вместо этого набор из K индексов разбивался всеми возможными способами на три подмножества: k_1 индексов "1", k_2 индексов "2", k_3 индексов "3". Для каждого набора (k_1, k_2, k_3) надо вычислить значение выражения

$$L_{i_1 \cdots i_M 1 \cdots 12 \cdots 23 \cdots 3}(\vec{r}_N) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$$

и умножить его на количество однотипных слагаемых. Вместо такого умножения достаточно заменить множитель $1/K!$ в формуле (3.4) на $1/(k_1! k_2! k_3!)$.

С целью минимизировать погрешность, вызванную конечным представлением чисел в ЭВМ, суммирование в пределах от 1 до N_0 производилось в обратном порядке: `for N:=N0 downto 1 do...` Поскольку при увеличении $|N|$ аргумент мультиполя растет, само значение члена ряда убывает; поэтому обратный порядок суммирования позволяет "не потерять" малые слагаемые. При суммировании $L_{i_1 \cdots i_M}(\vec{x} - \vec{r}_N)$ число N также изменялось в пределах от N_0 до 1, на каждом шаге учитывались слагаемые с номерами N и $-N$. Случай $N = 0$ рассматривался отдельно.

Для тестирования метода быстрого суммирования использовалась ЭВМ с процессором Intel Core i3 Duo 2.27GHz, 4 GB RAM под управлением Win 7 Home Basic (32bit). Требуемая точность вычислений составляла $\delta = 10^{-14}$ для векторов с длинами $|\vec{x}|$ в диапазоне от 1 до 10 и мультиполей 1–8 ранга с различными наборами индексов. Результаты вычислений сравнивались с аналогичными результатами, полученными методом прямого суммирования (1.4). Для контроля точности последнего применялось удвоение пределов суммирования N_0. В ходе сравнения были получены следующие выводы:

1. Результаты суммирования обоими методами сходятся к одним и тем же пределам. Поскольку сходимость метода прямого суммирования не вызывает сомнений, это подтверждает и корректность предлагаемого подхода.

2. При малых рангах M вычисления по формуле (3.4) многократно опережают метод прямого суммирования по быстродействию. Например, при $|\vec{x}| = 1$ для вычисления $L_1^\infty(\vec{x})$ по формуле (1.4) потребовалось около 7 секунд машинного времени, при этом $N_0 = 20480000$. Использование равенства (3.4) позволило получить результат практически мгновенно, причем значение N_0 составило 1708 (при $D = 3$).

3. При использовании метода быстрого суммирования величина N_0 быстро уменьшается с ростом D. Так, для $M = 1$ она составляет 1708 при $D = 3$ и 41 – при $D = 7$. При таком снижении числа узлов суммирования потери точности не произошло.

Итак, предлагаемый способ суммирования является достаточно точным и быстрым.

Работа выполнена в рамках проекта 14.B37.21.0176 ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 гг.

Список литературы

1. Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов*, Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, М., 1984, 352 с.

2. Butter K., Bomans P. H. H., Frederic P. M., Vroege G. J. and Philipse A. P., "Direct observation of dipolar chains in iron ferrofluids by cryogenic electron microscopy", *Nature materials*, **2** (2003), 88–91.

3. Crandall R. E., *Fast evaluation of Epstein zeta sums*, `http://people.reed.edu/~crandall/papers/epstein.pdf` (Accessed 21 September 2012).

4. Сыромясов А. О., "Быстрое суммирование тройных рядов с общим членом специального вида", *Труды Средневолжского математического общества*, **11**:1 (2009), 190–198.

5. Бердичевский А. Л., Бердичевский В. Л., "Обтекание идеальной жидкостью периодической системы тел", *Известия АН СССР. Механика жидкости и газа*, 1978, № 6, 3–18.

6. Лохин В. В., Седов Л. И., "Нелинейные тензорные функции от нескольких тензорных аргументов", *Прикладная математика и механика*, **27**:3 (1963), 393–417.

7. Фихтенгольц Г. М., *Курс дифференциального и интегрального исчисления : в 3 т. Т. 1*, Лань, СПб., 2009, 608 с.

8. *Delphi Reference*, `http://docwiki.embarcadero.com/RADStudio/en/Delphi_Reference` (Accessed 10 August 2012).

Summing of harmonic functions' series.

© **A. O. Syromyasov**[2]

Abstract. Functional series with harmonic general term tending to zero when the argument tends to infinity are considered, and the fast summation method for such series is proposed. As compared with direct summation, the method decreases the number of series' terms required for obtaining given accuracy on several orders. Numeric experiments confirm the method's convergence.

Key Words: functional series, improvement of convergence, harmonic function, multipole.

[2] Associate Professor of Mathematics and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University named after N. P. Ogaryov, Saransk; syal1@yandex.ru.

УДК 517.95

Смешанная задача для нелинейного уравнения в частных производных высокого порядка с максимумами по времени

© **Т. К. Юлдашев**[1], **К. Х. Шабадиков**[2]

Аннотация. В данной работе изучаются вопросы однозначной разрешимости для нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных, содержащего параболический оператор произвольной натуральной степени в линейной левой части и максимумы по времени в нелинейной правой части уравнения.

Ключевые слова: смешанная задача, уравнение высокого порядка, метод разделения переменных, обобщенные решения, однозначная разрешимость, максимумы по времени.

В области D рассматривается нелинейное псевдогиперболическое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u(t,x)=f\left(t,x,u(t,x),\int\limits_0^t K(t,s)\max\left\{u(\tau,x)|\tau\in\left[\delta_1;\delta_2\right]\right\}ds\right) \tag{1.1}$$

с начальными

$$u(t,x)_{|t\notin D_T}=\varphi_0(t,x),\ u(t,x)_{|t=0}=\varphi_1(x),\ \frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}}u(t,x)_{|t=0}=\varphi_k(x),\ k=\overline{2,m} \tag{1.2}$$

и граничными условиями

$$u(t,x)_{|x=0}=u_{x\,x}(t,x)_{|x=0}=\cdots=\frac{\partial^{2(m-1)}}{\partial x^{2(m-1)}}u(t,x)_{|x=0}=$$

$$=u(t,x)_{|x=l}=u_{x\,x}(t,x)_{|x=l}=\cdots=\frac{\partial^{2(m-1)}}{\partial x^{2(m-1)}}u(t,x)_{|x=l}=0, \tag{1.3}$$

где $f\,(t,x,u,\vartheta)\in C\,(D\times\mathbb{R}^2)$, $\varphi_i(x)\in C^{2m}(D_l)$, $\varphi_i(x)_{|x=0}=\varphi_i''(x)_{|x=0}=\cdots=\varphi_i^{2m-2}(x)_{|x=0}=\varphi_i(x)_{|x=l}=\varphi_i''(x)_{|x=l}=\cdots=\varphi_i^{2m-2}(x)_{|x=l}=0$, $i=\overline{1,m}$, $\delta_k=\delta_k(t,u(t,x))\in C(D_T\times\mathbb{R})$, $k=1,2$, $0<K(t,s)\in C(D_T^2)$, $\varphi_0(0,x)=\varphi_1(x)$, $D\equiv D_T\times D_l$, $D_T\equiv[0,T]$, $D_l\equiv[0,l]$, $0<T<\infty$, $0<l<\infty$, $0<m$ – натуральное число.

Отметим, что дифференциальные уравнения с отклоняющимся аргументом находят много приложений: в теории автоматического управления, в теории автоколебательных систем, при изучении технических, экономических, экологических и других проблем [1], [2]. В частности, уравнения с запаздывающим аргументом появляются всякий раз, когда в рассматриваемой физической или технической задаче сила, действующая на материальную точку, зависит от скорости и положения этой точки не только в данный момент, но и в некоторый момент, предшествующий данный [3], [4].

[1] Доцент кафедры высшей математики, Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М. Ф. Решетнева, г. Красноярск; tursunbay@rambler.ru

[2] Доцент кафедры дифференциальных уравнений, Ферганский государственный университет, г. Фергана, Узбекистан; tursunbay@rambler.ru

В 70-е годы прошлого столетия появился новый особый класс обыкновенных функционально-дифференциальных уравнений, правая часть которых наряду с «обычным» аргументом t зависит от конструкции $\max\left\{x(\tau)|\tau \in \left[\delta_1(t);\delta_2(t)\right]\right\}$, где $\delta_i(t)$ – отклонения аргумента, $i=1,2$, $0<\delta_1(t)<\delta_2(t)<\infty$. Их принято называть дифференциальными уравнениями с максимумами. Обыкновенные дифференциальные уравнения с максимумами впервые систематически изучались А. Р. Магомедовым [5]. В работе [6] показаны особенности теоретического исследования дифференциальных уравнений с максимумами.

Следует отметить, что изучению разного типа линейных и нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и их систем посвящены много работ и при этом применены разные методы (см., напр. [7] - [11]).

В данной работе, как и в [12], используется метод разделения переменных, основанный на поиске решения смешанной задачи (1.1)-(1.3) в виде ряда Фурье

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t)\, b_n(x), \tag{1.4}$$

где $b_n(x)=\sqrt{\dfrac{2}{l}}\sin\lambda_n x,\ \lambda_n=\dfrac{n\pi}{l}$.

Множество $\left\{a(t)=(a_n(t))\,|a_n(t)\in C\,[0,T]\,,\, n=1,2,3,\ldots\right\}$ введением нормы

$$\|a(t)\|_{B_2(T)}=\left[\sum_{n=1}^{\infty}\max_{t\in D_T}|a_n(t)|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

становится банаховым пространством и его обозначают так $B_2(T)$.

Для каждого $a(t)\in B_2(T)$ определяется оператор

$$Qa(t)=u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n(t) b_n(x).$$

Через $E_2(D)$ обозначается множество значений этого оператора. Очевидно, что $Q\colon B_2(T)\to E_2(D)$ и $E_2(D)\subset L_2(D)$.

Обозначается через $W_2^{(k)}(D)$ множество функций $\Phi(t,x)$ таких, что $\Phi(t,x),\ \dfrac{\partial^2}{\partial\, x^2}\Phi(t,x),\ldots,\dfrac{\partial^{2(m-1)}}{\partial\, x^{2(m-1)}}\Phi(t,x)$ при фиксированном $t\in D_T$ принадлежат области определения оператора $-\dfrac{\partial^{2m}}{\partial\, x^{2m}}$, имеют производные порядка k по t, принадлежащие $L_2(D_l)$ и обращаются в нуль при $t\geq T-\delta$ ($0<\delta$ – зависит от $\Phi(t,x)$), где

$$L_{2,2}(D)=\left\{u(t,x):\left[\int_0^T\left(\int_0^l|u(t,x)|^2dx\right)dt\right]^{\frac{1}{2}}<\infty\right\}.$$

Ясно, что пространство $W_2^{(k)}(D)$ всюду плотно в пространстве $L_2(D)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. *Если функция* $u(t,x) \in E_2(D)$ *для любого* $\Phi(t,x) \in W_2^{(2)}(D)$ *удовлетворяет следующему интегральному тождеству*

$$\int_0^T \int_0^l \Big\{ u(t,y) \Big[\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-1}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-2}\partial y^4}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+3}}{\partial t^{m-3}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t^3\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-2}}{\partial t^2\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{2m-1}}{\partial t\,\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y) + \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi(t,y)\Big] -$$

$$-f\Big(t,y,u(t,y), \int_0^t K(t,s)\max\Big\{u(\tau,y)|\tau \in \Big[\delta_1;\delta_2\Big]\Big\}ds\Big)\Phi(t,y)\Big\}\,dydt =$$

$$= \int_0^l \varphi_1(y)\Big[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^m}{\partial t^{m-2}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-3}\partial y^4}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-4}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial t^2\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t\,\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{2m-2}}{\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy -$$

$$-\int_0^l \varphi_2(y)\Big[\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-3}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^m}{\partial t^{m-4}\partial y^4}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-5}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-5}}{\partial t\,\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy +$$

$$+\int_0^l \varphi_3(y)\Big[\frac{\partial^{m-3}}{\partial t^{m-3}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-4}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-5}\partial y^4}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^m}{\partial t^{m-6}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-6}}{\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy - \cdots -$$

$$-\int_0^l \varphi_{m-2}(y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy +$$

$$+\int_0^l \varphi_{m-1}(y)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy - \int_0^l \varphi_m(y)\Big[\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy,$$

то она называется обобщенным решением смешанной задачи (1.1)-(1.3).

Покажем, что коэффициенты разложения $a_n(t)$ удовлетворяют следующей счетной системе нелинейных интегральных уравнений (ССНИУ):

$$a_n(t) = w_n(t) +$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\Big(s,y,Qa(s),\int\limits_0^s K(s,\theta)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(\theta,Qa(\theta));\delta_2(\theta,Qa(\theta))\Big]\Big\}d\theta\Big)\times$$

$$\times P_n(t,s)b_n(y)dyds,\ t\in D_T, \tag{1.5}$$

где

$$w_n(t)=\Big[\Big(1+\lambda_n^2 t+\frac{\lambda_n^4}{2!}t^2+\frac{\lambda_n^6}{3!}t^3+\dots+\frac{\lambda_n^{2m-2}}{(m-1)!}t^{m-1}\Big)\varphi_{1n}+$$

$$+t\Big(1+\lambda_n^2 t+\frac{\lambda_n^4}{2!}t^2+\frac{\lambda_n^6}{3!}t^3+\dots+\frac{\lambda_n^{2m-4}}{(m-2)!}t^{m-2}\Big)\varphi_{2n}+$$

$$+\frac{t^2}{2!}\Big(1+\lambda_n^2 t+\frac{\lambda_n^4}{2!}t^2+\frac{\lambda_n^6}{3!}t^3+\dots+\frac{\lambda_n^{2m-6}}{(m-3)!}t^{m-3}\Big)\varphi_{3n}+$$

$$+\dots+\frac{t^{m-3}}{(m-3)!}\Big(1+\lambda_n^2 t+\frac{\lambda_n^4}{2!}t^2\Big)\varphi_{(m-2)n}+$$

$$+\frac{t^{m-2}}{(m-2)!}\Big(1+\lambda_n^2 t\Big)\varphi_{(m-1)n}+\frac{t^{m-1}}{(m-1)!}\varphi_{mn}\Big]\cdot\exp\Big\{-\lambda_n^2 t\Big\},$$

$$P_n(t,s)=(m-1)!\cdot(t-s)^{m-1}\cdot\exp\Big\{-\lambda_n^2(t-s)\Big\},\ \varphi_{jn}=\int\limits_0^l\varphi_j(y)b_n(y)dy,\ j=\overline{1,m}.$$

Действительно, согласно определению обобщенного решения для приближенного решения смешанной задачи (1.1)-(1.3) имеем

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^l\Big\{\sum_{n=1}^\infty a_n(s)b_n(y)\Big[\frac{\partial^m}{\partial s^m}\Phi(s,y)+m\frac{\partial^{m+1}}{\partial s^{m-1}\partial y^2}\Phi(s,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial s^{m-2}\partial y^4}\Phi(s,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+3}}{\partial s^{m-3}\partial y^6}\Phi(s,y)+\dots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial s^3\partial y^{2m-6}}\Phi(s,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-2}}{\partial s^2\partial y^{2m-4}}\Phi(s,y)+m\frac{\partial^{2m-1}}{\partial s\,\partial y^{2m-2}}\Phi(s,y)+\frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi(s,y)\Big]-$$

$$-f\Big(s,y,\sum_{i=1}^\infty a_i(s)b_i(y),\int\limits_0^s K(s,\theta)\max\Big\{\sum_{i=1}^\infty a_i(\tau)b_i(y)|\tau\in\Big[\delta_1;\delta_2\Big]\Big\}d\theta\Big)\Phi(s,y)\Big\}\,dyds=$$

$$=\int\limits_0^l\varphi_1(y)\Big[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^m}{\partial t^{m-2}\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-3}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-4}\partial y^6}\Phi(t,y)+\dots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial t^2\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t\,\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{2m-2}}{\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy-$$

$$-\int\limits_0^l\varphi_2(y)\Big[\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-3}\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^m}{\partial t^{m-4}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-5}\partial y^6}\Phi(t,y)+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-5}}{\partial t\,\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy+$$

$$+\int\limits_0^l\varphi_3(y)\Big[\frac{\partial^{m-3}}{\partial t^{m-3}}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-4}\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-5}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m-6}\partial y^6}\Phi(t,y)+\cdots+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-6}}{\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy-$$

$$-\cdots-\int\limits_0^l\varphi_{m-2}(y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y)+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy+$$

$$+\int\limits_0^l\varphi_{m-1}(y)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y)+m\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy-\int\limits_0^l\varphi_m(y)\Big[\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy, \qquad (1.6)$$

где $\delta_j=\delta_j\Big(\theta,\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i(\theta)b_i(y)\Big)$, $j=1,2$.

Пусть будет $\Phi(t,x)=\Phi_i(t,x)=h(t)\cdot b_i(x)\in W_2^{(m)}(D)$, $i=1,2,3,\ldots$, где $h(t)\in C^m(D_T)$. Тогда из (1.6) следует

$$\int\limits_0^t\int\limits_0^l\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}a_n(s)b_n(y)\Big[(-1)^m h^{(m)}(s)b_i(y)+(-1)^{m-1}m\lambda_i^2h^{(m-1)}(s)b_i(y)+$$

$$+(-1)^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}\lambda_i^4h^{(m-2)}(s)b_i(y)+\cdots+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_i^{2m-4}h''(s)b_i(y)-m\lambda_i^{2m-2}h'(s)b_i(y)+\lambda_i^{2m}h(s)b_i(y)\Big]-$$

$$-f\Big(s,y,Qa(s),\int\limits_0^sK(s,\theta)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(\theta,Qa(\theta));\delta_2(\theta,Qa(\theta))\Big]\Big\}d\theta\Big)\times$$

$$\times h(s)\Big\}dyds=0,\ t\in D_T.$$

Учитываем, что функции $b_n(x)$ полны и ортонормированны в $L_2(D_l)$. Тогда из последнего равенства получаем

$$\int\limits_0^t\Big[a_n(s)\Big((-1)^m h^{(m)}(s)+(-1)^{m-1}m\lambda_i^2h^{(m-1)}(s)+(-1)^{m-2}\frac{m(m-1)}{2}\lambda_i^4h^{(m-2)}(s)+$$

$$+\cdots+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_i^{2m-4}h''(s)-m\lambda_i^{2m-2}h'(s)+\lambda_i^{2m}h(s)\Big)-$$

$$-\int\limits_0^lf\Big(s,y,Qa(s),\int\limits_0^sK(s,\theta)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(\theta,Qa(\theta));\delta_2(\theta,Qa(\theta))\Big]\Big\}d\theta\Big)\times$$

$$\times h(s)b_n(y)dy\Big]ds=0,\ t\in D_T.$$

Далее, путем интегрирования по частям имеем

$$\int\limits_0^T h(t)\Big[a_n^{(m)}(t)+m\lambda_n^2 a_n^{(m-1)}(t)+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_n^4 a_n^{(m-2)}(t)+\cdots+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_n^{2m-4}a_n''(t)+m\lambda_n^{2m-2}a_n'(t)+\lambda_n^{2m}a_n(t)-$$

$$-\int\limits_0^l f\Big(t,y,Qa(t),\int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(s,Qa(s));\delta_2(s,Qa(s))\Big]\Big\}ds\Big)\times$$

$$\times b_n(y)dy\Big]dt=0,\ t\in D_T. \tag{1.7}$$

Так как $h(t)$ – любая функция, удовлетворяющая указанным выше условиям, то $a_n(t)$ имеет обобщенные производные порядка m по t в смысле Соболева на отрезке D_T. Поэтому из (1.7) следует

$$a_n^{(m)}(t)+m\lambda_n^2 a_n^{(m-1)}(t)+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_n^4 a_n^{(m-2)}(t)+\cdots+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2}\lambda_n^{2m-4}a_n''(t)+m\lambda_n^{2m-2}a_n'(t)+\lambda_n^{2m}a_n(t)=$$

$$=\int\limits_0^l f\Big(t,y,Qa(t),\int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(s,Qa(s));\delta_2(s,Qa(s))\Big]\Big\}ds\Big)\times$$

$$\times b_n(y)dy,\ t\in D_T. \tag{1.8}$$

Система (1.8) решается методом вариации произвольных постоянных

$$a_n(t)=\Big(C_{1n}+C_{2n}t+C_{3n}t^2+C_{4n}t^3+\cdots+C_{mn}t^{m-1}\Big)\cdot\exp\Big\{-\lambda_n^2 t\Big\}+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\Big(s,y,Qa(s),\int\limits_0^s K(s,\theta)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(\theta,Qa(\theta));\delta_2(\theta,Qa(\theta))\Big]\Big\}d\theta\Big)\times$$

$$\times b_n(y)P_n(t,s)dyds,\ t\in D_T, \tag{1.9}$$

где

$$P_n(t,s)=(m-1)!\cdot(t-s)^{m-1}\cdot\exp\Big\{-\lambda_n^2(t-s)\Big\}.$$

Для определения коэффициентов $C_{in}(i=\overline{1,m})$ используются условия

$$a_n(0)=\varphi_{1n},a_n'(0)=\varphi_{2n},a_n''(0)=\varphi_{3n},\ldots,a_n^{m-1}(0)=\varphi_{mn}.$$

При этом начальные данные φ_{in} подбираются из условия (1.2) таким образом

$$\varphi_i(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_{in}b_n(x),\ \varphi_i(x)\in L_2(D_l),\ i=\overline{1,m}.$$

Тогда имеем

$$C_{1n} = \varphi_{1n},$$

$$C_{2n} = \lambda_n^2 \varphi_{1n} + \varphi_{2n},$$

$$C_{3n} = \frac{1}{2!}\Big[\lambda_n^4 \varphi_{1n} + 2\lambda_n^2 \varphi_{2n} + \varphi_{3n}\Big],$$

$$C_{4n} = \frac{1}{3!}\Big[\lambda_n^6 \varphi_{1n} + 3\lambda_n^4 \varphi_{2n} + 3\lambda_n^2 \varphi_{3n} + \varphi_{4n}\Big],$$

....

$$C_{mn} = \frac{1}{(m-1)!}\Big[\lambda_n^{2m-2}\varphi_{1n} + (m-1)\lambda_n^{2m-4}\varphi_{2n} + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_n^{2m-6}\varphi_{3n} +$$

$$+ \dots + \frac{(m-1)(m-2)}{2}\lambda_n^4 \varphi_{(m-2)n} + (m-1)\lambda_n^2 \varphi_{(m-1)n} + \varphi_{mn}\Big].$$

Подстановка найденных значений $C_{in} (i = \overline{1, m})$ в (1.9) дает ССНИУ (1.5).

Рассмотрим укороченную систему нелинейных интегральных уравнений (УСНИУ):

$$a_n^N(t) = w_n(t) +$$

$$+ \int_0^t \int_0^l f\Big(s, y, Q^N a(s), \int_0^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a(\theta))\Big]\Big\} d\theta\Big) \times$$

$$\times P_n(t,s) b_n(y) dy ds, \ t \in D_T, \qquad (1.10)$$

где $w_n(t)$ и $P_n(t,s)$ определяются как в ССНИУ (1.5), $Q^N a(t) = \sum\limits_{n=1}^{N} a_n^N(t) \cdot b_n(x)$.

Т е о р е м а 1.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1. $\int\limits_0^t \Big\| f\Big(s, x, Qw(s), \int\limits_0^s K(s,\theta) Qw(\theta) d\theta\Big) \Big\|_{L_2(D_l)} ds \le \Delta < \infty$;

2. $f(t, x, u, \vartheta) \in Lip\Big\{L_{0|u}, L_1(t)_{|\vartheta}\Big\}$, $0 < L_0 = const$, $0 < L_1(t) \in C(D_T)$;

3. $\delta_i(t, u) \in Lip\Big\{L_{1+i}(t)_{|u}\Big\}$, $0 < L_{1+i}(t) \in C(D_T)$, $i = 1, 2$;

4. $\|w(t)\|_{B_2^N(T)} < \infty$, *где* $\|w(t)\|_{B_2^N(T)} = \Big[\sum\limits_{n=1}^{N} \max_{t \in D_T} |w_n(t)|^2\Big]^{\frac{1}{2}}$.

Тогда УСНИУ (1.10) *имеет единственное решение в пространстве* $B_2^N(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Используем метод последовательных приближений:

$$\begin{cases} a_n^{N0}(t) = w_n(t), \ a_n^{Nk+1}(t) = w_n(t) + \\ + \int\limits_0^t \int\limits_0^l f\Big(s, y, Q^N a^k(s), \int\limits_0^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a^k(\tau) | \tau \in \Big[\delta_1^k; \delta_2^k\Big]\Big\} d\theta\Big) \times \\ \times P_n(t,s) b_n(y) dy ds, \ k = 0, 1, 2, 3, \dots, \ t \in D_T, \end{cases} \qquad (1.11)$$

где $\delta_i^k = \delta_i(\theta, Q^N a^k(\theta))$, $i = 1, 2$.

В силу условий теоремы для первой разности $a_n^{N1}(t) - a_n^{N0}(t)$ из (1.11) получим

$$\Big\| a^{N1}(t) - a^{N0}(t) \Big\|_{B_2^N(T)} \le$$

$$\leq \sum_{n=1}^{N} \int_0^t \int_0^l \Big| f\Big(s, y, Q^N a^0(s), \int_0^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a^0(\tau)|\tau \in \Big[\delta_1^0; \delta_2^0\Big]\Big\} d\theta\Big)\Big| \times$$

$$\times |P_n(t,s)| \cdot |b_n(y)| dyds \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \int_0^t \int_0^l \Big| f\Big(s, y, Q^N a^0(s), \int_0^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a^0(\tau)|\tau \in \Big[\delta_1^0; \delta_2^0\Big]\Big\} d\theta\Big)\Big| dyds \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \sqrt{l} \Delta, \tag{1.12}$$

где $M_1 = \|P(t,s)\|_{B_2^N(T)}$, $M_2 = \|b(x)\|_{B_2^N(l)}$.

С учетом (1.12) в силу второго и третьего условий теоремы для второй разности $a_n^{N2}(t) - a_n^{N1}(t)$ получим следующую оценку

$$\left\| a^{N2}(t) - a^{N1}(t) \right\|_{B_2^N(T)} \leq$$

$$\leq M_1 M_2 \int_0^t \int_0^l \Big| f\Big(s, y, Q^N a^1(s), \int_1^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a^1(\tau)|\tau \in \Big[\delta_1^1; \delta_2^1\Big]\Big\} d\theta\Big) -$$

$$- f\Big(s, y, Q^N a^0(s), \int_1^s K(s,\theta) \max\Big\{Q^N a^0(\tau)|\tau \in \Big[\delta_1^0; \delta_2^0\Big]\Big\} d\theta\Big)\Big| dyds \leq$$

$$\leq M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^l \Big[L_0 \left\| a_n^{N1}(s) - a_n^{N0}(s) \right\|_{B_2^N(T)} +$$

$$+ L_1(s) \int_0^s K(s,\theta) \cdot \Big\| \max\Big\{a^{N1}(\tau)|\tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^1(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^1(\theta))\Big]\Big\} -$$

$$- \max\Big\{a^{N0}(\tau)|\tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^0(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^0(\theta))\Big]\Big\}\Big\|_{B_2^N(T)} d\theta\Big] dyds \leq$$

$$\leq M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^l \Big[L_0 \left\| a_n^{N1}(s) - a_n^{N0}(s) \right\|_{B_2^N(T)} +$$

$$+ L_1(s) \int_0^s K(s,\theta) \cdot \Big\| \max\Big\{a^{N1}(\tau)|\tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^1(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^1(\theta))\Big]\Big\} -$$

$$- \max\Big\{a^{N1}(\tau)|\tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^0(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^0(\theta))\Big]\Big\} +$$

$$+ \max\Big\{a^{N1}(\tau)|\tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^0(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^0(\theta))\Big]\Big\} -$$

$$- \max\Big\{a^{N0}(\tau)|\tau \in \Big[\delta_1(\theta, Q^N a^0(\theta)); \delta_2(\theta, Q^N a^0(\theta))\Big]\Big\}\Big\|_{B_2^N(T)} d\theta\Big] dyds \leq$$

$$\leq M_1 M_2^2 \int_0^t \int_0^l \Big[L_0 \left\| a_n^{N1}(s) - a_n^{N0}(s) \right\|_{B_2^N(T)} +$$

$$+L_1(s)\int\limits_0^s K(s,\theta)\cdot\Big\|\max_{0\le\theta\le s}\Big|a^{N1}(\theta)-a^{N0}(\theta)\Big|+$$

$$+\Delta\sum_{i=1}^{2}\Big|\delta_i(\theta,Q^Na^1(\theta))-\delta_i(\theta,Q^Na^0(\theta))\Big|\Big\|_{B_2^N(T)}d\theta dyds\le$$

$$\le\Delta M_1^2M_2^3 l^{\frac{3}{2}}\Big(L_0+\max_{t\in D_T}\eta(t)\Big)t, \qquad (1.13)$$

где $\eta(t)=L_1(t)\cdot\int\limits_0^t|K(t,s)|\cdot\Big[1+\Delta\cdot\big(L_2(s)+L_3(s)\big)\Big]ds$.

Для произвольного натурального числа k подобно (1.13) получим

$$\big\|a^{Nk+1}(t)-a^{Nk}(t)\,\big\|_{B_2^N(T)}\le\Delta\Big(L_0+\max_{t\in D_T}\eta(t)\Big)^{k+1}l^{\frac{1}{2}+k}M_1^{k+1}M_2^{2k+1}\frac{t^k}{k!}. \qquad (1.14)$$

Существование решения УСНИУ (1.10) следует из оценки (1.14), так как при $k\to\infty$ последовательность функций $\{a^{Nk}(t)\}$ сходится равномерно по t к функции $a^N(t)\in B_2^N(T)$. Покажем единственность этого решения в пространстве $B_2^N(T)$. Пусть УСНИУ (1.10) имеет два решения: $a^N(t)\in B_2^N(T)$ и $\vartheta^N(t)\in B_2^N(T)$. Тогда для их разности получим оценку

$$\big\|a^N(t)-\vartheta^N(t)\big\|_{B_2^N(T)}\le\Delta\Big(L_0+\max_{t\in D_T}\eta(t)\Big)lM_1M_2^2\int\limits_0^t\big\|a^N(s)-\vartheta^N(s)\big\|_{B_2^N(T)}ds. \qquad (1.15)$$

Применяя к (1.15) неравенства Гронуолла, получим, что $\big\|a^N(t)-\vartheta^N(t)\big\|_{B_2^N(T)}\equiv 0$ для всех $t\in D_T$. Отсюда следует единственность решения УСНИУ (1.10) в пространстве $B_2^N(T)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о   з а к о н ч е н о.

Подставляя ССНИУ (1.5) в ряд (1.4), получим формальное решение смешанной задачи (1.1)-(1.3):

$$u(t,x)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[w_n(t)+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^l f\Big(s,y,Qa(s),\int\limits_0^s K(s,\theta)\max\Big\{Qa(\tau)|\tau\in\Big[\delta_1(\theta,Qa(\theta));\delta_2(\theta,Qa(\theta))\Big]\Big\}d\theta\Big)\times$$

$$\times P_n(t,s)b_n(y)dyds\Big]\cdot b_n(x). \qquad (1.16)$$

Т е о р е м а   1.2. *Пусть выполняются условия теоремы 1.1. и* $\|w(t)\,\|_{B_2(T)}<\infty$. *Если* $a(t)\in B_2(T)$ *является решением ССНИУ* (1.5), *то ряд* (1.16) *сходится к обобщенному решению смешанной задачи* (1.1)-(1.3).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $a(t)\in B_2(T)$, то в силу условий теоремы следует, что

$$\lim_{N\to\infty}f\left(t,x,u^N(t,x),\int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{u^N(\tau,x)|\tau\in\Big[\delta_1\big(s,u^N\big);\delta_2\big(s,u^N\big)\Big]\Big\}ds\right)=$$

$$= f\left(t, x, u(t,x), \int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{u(\tau,x)|\tau\in\Big[\delta_1\big(s,u\big);\delta_2\big(s,u\big)\Big]\Big\}ds\right) \tag{1.17}$$

в смысле метрики $L_2(D)$.

Строим последовательность функционалов:

$$V_N = \int\limits_0^T\int\limits_0^l \Big\{u^N(t,y)\Big[\frac{\partial^m}{\partial t^m}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-1}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-2}\partial y^4}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+3}}{\partial t^{m-3}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t^3\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-2}}{\partial t^2\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{2m-1}}{\partial t\,\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y) + \frac{\partial^{2m}}{\partial y^{2m}}\Phi(t,y)\Big] -$$

$$-f\Big(t, y, u^N(t,y), \int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{u^N(\tau,y)|\tau\in\Big[\delta_1^N;\delta_2^N\Big]\Big\}ds\Big)\Phi(t,y)\Big\}\,dydt =$$

$$= \int\limits_0^l \varphi_1^N(y)\Big[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^m}{\partial t^{m-2}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-3}\partial y^4}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-4}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial t^2\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t\,\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{2m-2}}{\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy -$$

$$-\int\limits_0^l \varphi_2^N(y)\Big[\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-3}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^m}{\partial t^{m-4}\partial y^4}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-5}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-5}}{\partial t\,\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy +$$

$$+\int\limits_0^l \varphi_3^N(y)\Big[\frac{\partial^{m-3}}{\partial t^{m-3}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-4}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-5}\partial y^4}\Phi(t,y) +$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^m}{\partial t^{m-6}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-6}}{\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy - \cdots -$$

$$-\int\limits_0^l \varphi_{m-2}^N(y)\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy +$$

$$+\int\limits_0^l \varphi_{m-1}^N(y)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy - \int\limits_0^l \varphi_m^N(y)\Big[\Phi(t,y)\Big]_{t=0}dy, \tag{1.18}$$

где $\delta_j^N = \delta_j(t, u^N(t,x)),\ j=1,2$.

Интегрируя по частям отдельные слагаемые в (1.18) и учитывая условия теоремы и начальные условия

$$a_n(0) = \varphi_{1n}, a_n'(0) = \varphi_{2n}, a_n''(0) = \varphi_{3n}, \ldots, a_n^{m-1}(0) = \varphi_{mn},$$

получаем:

$$V_N = \int\limits_0^l \Big(\varphi_1(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{1n} b_n(y)\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-1}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^m}{\partial t^{m-2}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-3}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+2}}{\partial t^{m-4}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial t^2\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-3}}{\partial t\,\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{2m-2}}{\partial y^{2m-2}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy-$$

$$-\int\limits_0^l \Big(\varphi_2(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{2n} b_n(y)\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-2}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-3}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m-4}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m+1}}{\partial t^{m-5}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-5}}{\partial t\,\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{2m-4}}{\partial y^{2m-4}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy+$$

$$+\int\limits_0^l \Big(\varphi_3(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{3n} b_n(y)\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial^{m-3}}{\partial t^{m-3}}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^{m-2}}{\partial t^{m-4}\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^{m-1}}{\partial t^{m-5}\partial y^4}\Phi(t,y)+$$

$$+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{m}}{\partial t^{m-6}\partial y^6}\Phi(t,y) + \cdots + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}\frac{\partial^{2m-6}}{\partial y^{2m-6}}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy - \cdots -$$

$$-\int\limits_0^l \Big(\varphi_{m-2}(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{m-2n} b_n(y)\Big)\times$$

$$\times\Big[\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^3}{\partial t\,\partial y^2}\Phi(t,y) + \frac{m(m-1)}{2!}\frac{\partial^4}{\partial y^4}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy+$$

$$+\int\limits_0^l \Big(\varphi_{m-1}(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{m-1n} b_n(y)\Big)\Big[\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t,y) + m\frac{\partial^2}{\partial y^2}\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy$$

$$-\int\limits_0^l \Big(\varphi_m(y) - \sum_{n=1}^N \varphi_{mn} b_n(y)\Big)\Big[\Phi(t,y)\Big]_{t=0} dy+$$

$$+\int\limits_0^T\int\limits_0^l \Phi(t,y)\Big[f\Big(t,y,u(t,y),\int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{u(\tau,y)|\tau\in\Big[\delta_1;\delta_2\Big]\Big\}ds\Big)-$$

$$-\sum_{n=1}^N\int\limits_0^l f\Big(t,z,u^N(t,z),\int\limits_0^t K(t,s)\max\Big\{u^N(\tau,z)|\tau\in\Big[\delta_1^N;\delta_2^N\Big]\Big\}ds\Big)\times$$

$$\times b_n(z)dz\Big]\cdot b_n(y)dydt. \qquad (1.19)$$

Очевидно, что первые m интегралов в (**??**) стремятся к нулю при $N\to\infty$, так как $\varphi_i(x)\in L_2(D_l)$. Сходимость последней разности в (1.19) при $N\to\infty$ следует из (1.17). Отсюда заключаем, что $\lim_{N\to\infty}V_N=0$.
Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Список литературы

1. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б., *Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом*, Наука, М., 1971, 296 с.

2. Азбелов Н. И., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф., *Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения*, Инст. Компьютер. Исследов., М., 2002, 384 с.

3. Мышкис А. Д., *Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом*, Наука, М., 1972, 352 с.

4. Норкин С. Б., *Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом*, Наука, М., 1965, 350 с.

5. Магомедов А. Р., *Обыкновенные дифференциальные уравнения с максимумами*, Элм, Баку, 1991, 220 с.

6. Yuldashev T. K., Shabadikov K. H., *Introduction to the theory of nonlinear functional differential equations with maxima*, Hayot, Andijan, 1998, 128 c.

7. Александров В. М., Коваленко Е. В., *Задачи механики смлошных сред со смешанными граничными условиями*, Наука, М., 1986, 336 с.

8. Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа*, Наука, М., 1967, 736 с.

9. Нахушев А. М., "Об одном приближенном методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приложения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод", *Дифференц. уравнения*, **18**:1 (1982), 72–81.

10. Похожаев С. И., "Об априорных оценках и градиентных катастрофах гладких решений гиперболических систем законов сохранения", *Труды МИ РАН*, **243** (2003), 257–288.

11. Пулькина Л. С., "Смешанная задача с интегральным условием для гиперболического уравнения", *Мат. заметки*, **74**:3 (2003), 435–445.

12. Юлдашев Т. К., “О смешанной задаче для одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в частных производных четвертого порядка”, *Журнал средневолжского мат. общества*, **14**:2 (2012), 137–142.

Mixed value problem for nonlinear partial equation of higher order with time maxima

© **T. K. Yuldashev, K. H. Shabadikov**[3]

Abstract. It is studied the questions of one valued solvability of mixed value problem for nonlinear partial integro-differential equation, consisting the parabolic operator of arbitrary natural power on the linear left-hand side and time maxima on the nonlinear right-hand side of this equation.
Key Words: mixed value problem, equation of the higher order, method of separation variables, generalized solution, one valued solvability, time maxima.

[3] Associate professor of Higher Mathematics Chair, M. F. Reshetnev Siberian State Aerospace University, Krasnoyarsk, tursunbay@rambler.ru.; Associate professor of Differential Equations Chair, Fergana State University, Fergana, Uzbekistan

Краткие сообщения

УДК 551.51+519.6

Описание математической модели переноса радиоактивных примесей по воздуху и подземными водами

© Е. Н. Панюшкина[1]

Аннотация. Моделирование динамики распределения концентраций вредных веществ имеет большое значение при устранении последствий чрезвычайных ситуаций, а также при определении потенциально опасных зон заражения. В статье приводится описание математической модели переноса радиоактивных примесей в атмосфере и подземными водами.

Ключевые слова: Массоперенос, диффузия, дисперсия,радиоактивный распад.

1. Перенос примесей по воздуху

Распространение примесей в атмосфере происходит в результате турбулентной диффузии и ветрового переноса. Ветровой перенос приводит к тому, что при непрерывном истечении примеси в атмосферу образуется струя выброса. Диффузия примесей в воздухе возникает в результате воздействия вихрей на облако выброса. Диффузионно-транспортная модель распространения загрязнений без учета физико-химических трансформаций будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial(\rho C_k)}{\partial t} = -div(\rho(u-w)C_k) + div(\rho K grad C_k) + \rho Q_k^* + \rho q_k, \tag{1.1}$$

где ρ – плотность; C_k – концентрация k-го компонента смеси (k=1,2,3,...,N); v – скорость ветра; w – скорость осаждения частиц примеси; K –коэффициент турбулентной диффузии; q_k – функция источника примесей; Q_k^* – источник (сток) k-го компонента раствора за счет ядерных реакций.

В данной постановке поле скоростей будем считать известным. Радиоактивный распад описывается следующим соотношением:

$$Q_k^* = \frac{dC_k}{dt} = -\lambda C_k, \tag{1.2}$$

где λ – постоянная радиоактивного распада данного нуклида.

2. Перенос примесей подземными водами

[1] Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва, г. Саранск; naumkinaen@yandex.ru.

Предполагая, что процесс изотермический, жидкость сжимаема, фильтрация подчиняется закону Дарси, приходим к общепринятой конвективно-диффузионной модели подземного массопереноса без учета физико-химических превращений внутри жидкости:

$$\frac{\partial(\varphi\rho C_k)}{\partial t} = -div(\rho V C_k) + div(\eta\rho grad C_k) + div(D\rho grad C_k) - \rho\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial t} + \rho Q_k^* + \rho q_k, \quad (2.1)$$

где φ – пористость; ρ – плотность; C_k – концентрация k-го компонента смеси (k=1,2,3,...,N); V – скорость фильтрации; η – эффективный коэффициент молекулярной диффузии; D – тензор гидродинамической дисперсии; α_k –концентрация k-го компонента в реакции, протекающей между раствором и породой; q_k – функция источника примесей; Q_k^* – источник (сток) k-го компонента раствора за счет ядерных реакций. Гидродинамический тензор рассеяния , для изотропной пористой среды, определен следующими формулами:

$$\begin{aligned}
D_{xx} &= \alpha_L\frac{v_x^2}{|v|} + \alpha_T\frac{v_y^2}{|v|} + \alpha_T\frac{v_z^2}{|v|},\\
D_{yy} &= \alpha_L\frac{v_y^2}{|v|} + \alpha_T\frac{v_x^2}{|v|} + \alpha_T\frac{v_z^2}{|v|},\\
D_{zz} &= \alpha_L\frac{v_z^2}{|v|} + \alpha_T\frac{v_x^2}{|v|} + \alpha_T\frac{v_y^2}{|v|},\\
D_{xy} = D_{yx} &= (\alpha_L - \alpha_T)\frac{v_x v_y}{|v|},\\
D_{xz} = D_{zx} &= (\alpha_L - \alpha_T)\frac{v_x v_z}{|v|},\\
D_{yz} = D_{zy} &= (\alpha_L - \alpha_T)\frac{v_y v_z}{|v|},
\end{aligned} \quad (2.2)$$

где α_L – коэффициент продольной дисперсии; α_T – коэффициент поперечной дисперсии; v_x, v_y, v_z – компоненты вектора скорости фильтрации; $|v|$ – модуль вектора скорости.

Значение коэффициента молекулярной диффузии для изотермического процесса полагается постоянным в диапазоне ($10_{-10} \div 10_{-4}$ м2 /сут). Зависимость количества адсорбированного вещества при постоянной температуре от концентрации адсорбента при адсорбции радионуклидов описывается изотермой Фрейндлиха:

$$\frac{\partial(\alpha_k)}{\partial t} = K_f C_k^{\alpha}, \quad (2.3)$$

где K_f и α – постоянные величины, определяемые из опыта. Радиоактивный распад описывается выражением (1.2).

3. Начальные и граничные условия

Расчет процесса миграции примесей осуществляется в течение интервала времени $0 \leq t \leq t_{end}$ в некоторой области Ω, ограниченной поверхностью $\partial\Omega$. Поэтому решение уравнения массопереноса примеси ищется в цилиндре:

$$P = \{(x,y,z,t) : (x,y,z) \in \Omega, 0 < t < t_{end}\} \quad (3.1)$$

Начальным условием для уравнения массопереноса примесей является распределение концентраций:

$$C_k(x, y, z, 0) = C_k^0(x, y, z), \tag{3.2}$$

k=1,2,3,...N. На внешних границах $\Sigma = \{(x, y, z, t) : (x, y, z) \in \partial\Omega, 0 < t < t_{end}\}$ могут быть поставлены условия вида:

$$\alpha_{\partial\Omega} C_k + \beta_{\partial\Omega} \frac{\partial C_k}{\partial \overrightarrow{n}} = \gamma_{\partial\Omega} \tag{3.3}$$

Численное решение поставленной задачи основано на расщеплении ее по физическим процессам. В данный момент ведется разработка алгоритма высокого порядка точности для конвективного переноса на основе разрывного метода Галёркина.

Список литературы

1. Алоян А. М., *Моделирование динамики и кинетики газовых примесей и аэрозолей в атмосфере*, Наука, М., 2008, 415 с.
2. Гусев Н. Г.,Беляев В. А., *Радиоактивные выбросы в биосфере: Справочник*, 2-е изд., перераб. и доп., Энергоатомиздат, М., 1991, 256 с.
3. Грей С.,Синг К., *Адсорбция, удельная поверхность, пористость*, Мир, М., 1984, 306 с.
4. Коллинз Р., *Течение жидкостей через пористые материалы*, Мир, М., 1964, 350 с.
5. Румынин В. Г., *Геомиграционные модели в геоэкологии*, Наука, СПб., 2011, 1158 с.

Description of the mathematical model of the transport of radioactive contaminants in the air and groundwater

© E. N. Panyushkina[2]

Abstract. Modeling the dynamics of the distribution of concentration of harmful substances is of great importance in the elimination of consequences of emergency situations as well as in determining the hazardous areas of infection. The article describes a mathematical model of the transport of radioactive contaminants in the atmosphere and by underground waters.

Key Words: Mass transfer, diffusion, dispersion, radioactive decay.

[2] Graduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; naumkinaen@yandex.ru.

УДК 330.43

Математическая модель для расчета плановых показателей приема в ВУЗ

© Е. А. Черноиванова[1]

Аннотация. В статье предложен метод расчета плановых цифр приема в ВУЗ на основе классического метода наименьших квадратов.

Ключевые слова: уравнение регрессии, метод наименьших квадратов для множественной регрессии, коэффициент детерминации

На любой экономический показатель чаще всего оказывает влияние не один, а несколько факторов. Например, план приема в ВУЗ связан с количеством выпускников в данном регионе, с уровнем доходов населения, востребованностью выпускников, с количеством выпускников СПО, НПО, с лицензионными показателями по формированию плана приема. В этом случае вместо парной регрессии $M(y/x) = f(x)$ рассматривается множественная регрессия

$$M(y/x_1, x_2, \ldots, x_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

Задача оценки статистической взаимосвязи переменных Y и $X_1, X_2, \ldots, X_m$ формируется аналогично случаю парной регрессии. Уравнение множественной регрессии может быть представлено в виде

$$Y = f(\beta, X) + \varepsilon,$$

где $X = (X_1, X_2, \ldots, X_m)$ – вектор независимых переменных; β – вектор параметров; ε – случайная ошибка; Y – зависимая переменная. Предполагается, что для данной генеральной совокупности именно функция f связывает исследуемую переменную Y с вектором независимых переменных X.

Рассмотрим самую употребляемую и наиболее простую из моделей множественной регрессии – модель множественной линейной регрессии. Теоретическое линейное уравнение регрессии имеет вид:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \ldots + \beta_m x_m + \varepsilon$$

или для индивидуальных наблюдений i, $i = 1, 2, \ldots, n$,

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + \ldots + \beta_m X_{im} + \varepsilon_i$$

Здесь $\beta = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ вектор размерности $(m+1)$ неизвестных параметров. β_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, называется i-м теоретическим коэффициентов регрессии. Он характеризуется чувствительностью величины Y к изменению X_j и отражает влияние на условное математическое ожидание $M(Y|x_1, x_2, \ldots, x_m)$ зависимой переменной Y объясняющей переменной X_j, при условии, что все другие объясняющие переменные модели остаются постоянными. β_0 – свободный член, определяющий значение Y в случае, когда все объясняющие переменные $X_i = 0$. После выбора линейной функции в качестве модели зависимости необходимо оценить параметры регрессии.

Пусть имеется n наблюдений вектора объясняющих переменных $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ и зависимой переменной Y:

$$(X_{i1}, X_{i2}, \ldots, X_{im}, y_i), \ i = 1, 2, \ldots, n.$$

[1] Доцент кафедры математики и физики, Саранский кооперативный институт, г. Саранск; elen.chernoivanova@yandex.ru

Для того, чтобы однозначно можно было решить задачу отыскания параметров $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_m$, должно выполняться неравенство $n \geq m+1$. Если это неравенство не будет выполняться, то существует бесконечно много различных векторов параметров, при которых линейная формула связи между x и y будет абсолютно точно соответствовать имеющимся наблюдениям. При этом если $n = m+1$, то оценки коэффициентов вектора β рассчитываются единственным образом – путем решения системы $m+1$ линейного уравнения:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \ldots + \beta_m x_{im},\ i = 1, 2, \ldots, m+1.$$

Число $k = n - m - 1$ называется числом степеней свободы.

Самым распространенным методом оценки параметров уравнения множественной линейной регрессии является метод наименьших квадратов (МНК).

При выполнении предпосылок МНК относительно ошибок ε_i оценки $b_0, b_1, \ldots, b_m$ параметров $\beta, \beta_2, \ldots, \beta_m$ множественной линейной регрессии по МНК являются несмещенными, эффективными и состоятельными. Отклонение e_i значения y_i зависимой переменной Y от модельного значения $\tilde{y}_i$, соответствующего уравнению регрессии в i-м наблюдении $(i = 1, 2, \ldots, n)$, рассчитываются по формуле:

$$e_i = y_i - b_0 - b_1 x_{i1} - \ldots - b_m x_{im}$$

Тогда по МНК для нахождения оценок $b_0, b_1, \ldots, b_m$ минимизируется следующая функция:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j x_{ij}))^2 \tag{9}$$

Данная функция является квадратичной относительно неизвестных величин b_j, $j = 0, 1, \ldots, m$. Она ограничена снизу, следовательно, имеет минимум, Необходимым условие минимума функции Q является равенство 0 всех её частных производных по b_j. Частные производные этой квадратической функции являются линейными функциями

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q}{\partial b_0} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j x_{ij})) \\ \dfrac{\partial Q}{\partial b_j} = -2 \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j x_{ij})) x_{ij},\ j = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{10}$$

Приравнивая их к 0, мы получаем систему $m+1$ линейных уравнений с $m+1$ неизвестными:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j x_{ij})) = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - (b_0 + \sum_{j=1}^{m} b_j x_{ij})) x_{ij} = 0,\ j = 1, 2, \ldots, m \end{cases} \tag{11}$$

Такая система имеет обычно единственное решение. Эта система называется системой нормальных уравнений.

Представим данные наблюдений и соответствующие коэффициенты в матричной форме.

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1m} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nm} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, e = \begin{pmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \ldots \\ e_n \end{pmatrix}$$

Здесь Y – n-мерный вектор-столбец наблюдений зависимой переменной Y; – матрица размерности $n \times (m+1)$, в которой i строка $(i = 1, 2, \ldots, n)$ представляет наблюдения вектора значений независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$; – вектор-столбец размерности $(m+1)$ параметров уравнения регрессии; – вектор-столбец размерности n отклонений выборочных значений y_i зависимой переменной Y от значений $\tilde{y}_i$, получаемых по уравнению регрессии

$$\tilde{y}_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \ldots + b_m x_{im}.$$

Необходимым условием экстремума функции Q является равенство 0 её частных производных $\frac{\partial Q}{\partial b_j}$ по всем направлениям b_j, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Приравнивая $\partial Q / \partial B$ к 0, получим

$$B = (X^T X)^{-1} X^T Y.$$

Полученные общие соотношения справедливы для уравнений регрессии с произвольным количеством m объясняющих переменных.

Знание дисперсий и стандартных ошибок позволяет анализировать точность оценок, строить доверительные интервалы для теоретических коэффициентов, проверять соответствующие гипотезы.

Общее качество уравнения регрессии можно проверить с использованием коэффициента детерминации R^2, который в общем случае рассчитывается по формуле:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum (y_i - \overline{y})^2}.$$

Если $0.75 \leq R^2 \leq 1$, то уравнение регрессии составлено верно.

Пусть нам дан временной ряд, характеризующий зависимость плана приема в некоторый ВУЗ от года. Этот ряд задан в виде таблицы.

	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Время t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
План приема в ВУЗ (y)	97	105	135	152	160	195	223	297	310	318	326

К формированию линейного тренда привлекают все тот же метод наименьших квадратов, полагая в качестве независимой переменной время t, а результирующей переменной – величину y. Тогда оценка параметров тренда определяется формулой

$$\acute{A} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \end{pmatrix} = (T' \cdot T)^{-1} \cdot T \cdot Y, \text{ где } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \; T = \begin{pmatrix} 1t_1 \\ 1t_2 \\ \ldots \\ 1t_n \end{pmatrix}.$$

По этой формуле вычислим значение матрицы

$$A = \begin{pmatrix} n & \sum t_i \\ \sum t_i & \sum t_i^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum t_i \cdot y_i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{n \sum t_i^2 - (\sum t_i)} \begin{pmatrix} \sum t_i^2 & -\sum t_i \\ -\sum t_i & n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum t_i \cdot y_i \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{5566 - 4356} \begin{pmatrix} 506 & -66 \\ -66 & 11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2318 \\ 16783 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 53,914 \\ 26,136 \end{pmatrix}.$$

Запишем уравнение тренда $y_t = a_0 + a_1 t = 53,914 + 26,136t$. При $t = 12$ значение $y_{12} = 367,55$, то есть план приема в ВУЗ в 2012 году был равен 367.

Список литературы

1. Айвазян С.А., *Основы эконометрики*, «ЮНИТИ», М., 2001.

The mathematical method of calculation plan of education

© **E. A. Chernoivanova**[2]

Abstract. In article propose method of calculation plan of education on classical method of minimal square used.

Key Words: regression curve, coefficient of regression, coefficient of determination, method of minimal square

[2] Associate Professor, Department of Mathematics and Physics, Saransk Cooperative Institute, Saransk; elen.chernoivanova@yandex.ru

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе TEX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте *http://www.svmo.ru*.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой **\input** в преамбуле). Например,

\input{voskresensky.tex}

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду **\headerRus**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду **\headerEn**. *Эта команда имеет следующие аргументы:*

\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду **\headerFirstEn** *с такими же параметрами, как для команды* **\headerRus**.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды **\sect** с одним параметром:

\sect{Заголовок}

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами **\subsection**, **\subsubsection** и **\paragraph**.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами **\proof** и **\proofend** (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды **\R**, **\Rn**, **\C**, **\Z**, **\N** и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды **\phi**, **\epsilon** соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами **\px{i}** и **\pxtog{u}{i}**.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды **\textrm**, **\textit**. Например, для вставок формул $\mathrm{Г}_i$, $\textit{Д}_i$ в текст статьи необходимо набрать команды **\textrm{Г}_i**, **\textit{Д}_i**.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды **\label{метка}** и **\eqref{метка}**, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить **\label{ivanov14}**, теорему 5 из этой статьи — **\label{ivanovt5}** и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду **\ref{метка}**).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия} {подпись_под_рисунком}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. *Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение* **thebibliography**. *Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате AMSBIB. Подробности смотрите в прилагаемом файле amsbib.pdf. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл svmobib.sty (прилагается).*

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд **\RBibitem{метка для ссылки на источник}**.

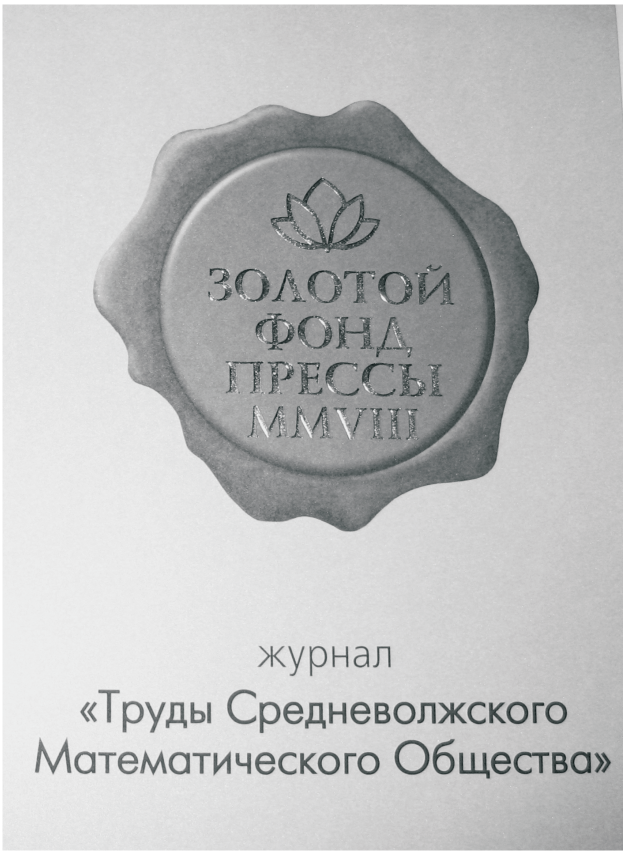
Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду **\cite** или **\pgcite** (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTEX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте *http://www.miktex.org*.

Алфавитный указатель

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в каталоге Российской прессы «Почта России» – 38278.

Для заметок

Для заметок