

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 14, № 1



2012

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЁВА

Журнал Средневолжского математического общества

ТОМ 14, № 1

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: В. Ф. Тишкин (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,
В. А. Треногин

САРАНСК

2012

«Журнал Средневолжского математического общества» публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарёва».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 14, № 1

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.

Корректоры: Егорова Д. К., Пескова Е. Е.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 23-32-05

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	6
-----------------------------	---

Л.В. Ключкова, Ю.Н. Орлов, В.Ф. Тишкин

Математическое моделирование корреляции эпидемической обстановки в мегаполисах от состояния воздуха	8
---	---

1. Введение	8
2. Модели распространения гриппа	8
3. Методика построения долгосрочного прогнозирования	12
3.1. Оптимизация статистического анализа нестационарных данных	12
3.2. Прогноз динамики численности населения	12
4. Заключение	13

В.З. Гринес, Е.А. Гуревич, О.В. Починка

Полный топологический инвариант для диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на сфере размерности большей трех	16
--	----

1. Введение	16
2. Вспомогательные утверждения	17
2.1. Разрывные действия групп преобразований	17
2.2. Канонические многообразия, используемые в работе	18
3. Свойства диффеоморфизмов из класса G	19
3.1. Линеаризующая окрестность седловой точки	21
4. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности	21
4.1. Доказательство теоремы 1.1.	22

Б.В. Логинов, И.В. Коноплева, Л.В. Миронова

Динамические бифуркационные задачи со спектром Э.Шмидта в линеаризации в условиях групповой симметрии	25
---	----

1. Introduction.	25
2. Poincarè-Andronov-Hopf bifurcation on E. Schmidt spectrum.	26
3. Theorems on group symmetry inheritance of original nonlinear equation by the relevant BEqRs.	30
4. Basic Results	33

И.П. Рязанцева

Непрерывные методы регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств	36
--	----

1. Основные предположения. Постановка задачи.	36
2. Операторный метод регуляризации	37
3. Непрерывные методы регуляризации	38

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

А.В. Анкилов, П.А. Вельмисов, Ю.К. Сагдеева

Сравнительный анализ условий динамической устойчивости упругого элемента канала при взаимодействии с потоком сжимаемой и несжимаемой среды	45
1. Введение	45
2. Постановка задачи для сжимаемой среды	46
3. Исследование устойчивости для сжимаемой среды	47
4. Постановка задачи и исследование устойчивости для несжимаемой среды	50
5. Сравнение условий устойчивости для сжимаемой и несжимаемой жидкости	50

В.А. Атряхин, П.А. Шаманаев

Моделирование динамики кадров с использованием дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом	53
1. Введение	53
2. Построение математической модели	54
3. Переход к разностной схеме	55
4. Описание численного алгоритма для формирования прогнозной оценки потребности в кадрах	56

Ф.В. Лубышев, М.Э. Файрузов, А.Р. Манапова

Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями	59
1. Введение	59
2. Постановка задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями и их корректность	59
3. Разностная аппроксимация задач для состояния с разрывными коэффициентами и решением. Корректность аппроксимаций	63
4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию	66
5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости сходимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимость по управлению. Регуляризация аппроксимаций	67

В.В. Лукашев, В.Н. Попов, А.А. Юшканов

Аналитическое решение задачи о течении Куэтта	72
1. Введение	72
2. Постановка задачи. Построение функции распределения	73
3. Вычисление макропараметров газа в канале	79
4. Заключение	80

В.Г. Малинов

Проекционный двухшаговый МПМ и численное решение задачи оптимального управления	83
1. Введение	83

2.	Методы оптимизации	84
3.	Оценка скорости сходимости метода (2.1) для выпуклых функций	85
4.	Тестовый пример ЗОУ	88
5.	Результаты численного решения задачи	88

М.И. Малкин

	Непрерывная зависимость чисел вращения для модельных семейств кусочно-непрерывных одномерных отображений	92
--	--	----

1.	Введение	92
2.	Непрерывность интервалов вращения лоренцевского типа	93

Т.М. Митрякова, О.В. Починка, А.Е. Шишеникова

	Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством	98
--	--	----

1.	Введение	98
2.	Вспомогательные факты	99
2.1.	Функция Морса-Ляпунова	99
2.2.	Динамические свойства диффеоморфизмов класса Φ	100
3.	Построение энергетической функции для $f \in \Phi$	103

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

М.Б. Авдеева, А.В. Зубов

	Метод понижения порядка и операция сдвига	107
--	---	-----

1.	Введение	107
2.	Построение алгоритма последовательного понижения порядка исходного многочлена	107

И.В. Зубов, В.И. Зубов

	Задача поиска минимального многочлена	112
--	---	-----

1.	Введение	112
2.	Постановка задачи	112
3.	Теорема о степени минимального многочлена	112

С.В. Зубов

	Применение операции сдвига	116
--	--------------------------------------	-----

1.	Введение	116
2.	Использование операции сдвига	116
3.	Свойства операции сдвига	117

С.А. Стрекопытов, И.С. Стрекопытов, И.С. Виташевская

	Другой подход поиска решений системы линейных алгебраических уравнений	120
--	--	-----

1.	Введение	120
2.	Метод решения системы линейных алгебраических уравнений	120

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

Л.В. Кулагина, Н.В. Кулагин

	Моделирование работы информационной системы	124
1.	Введение	124
2.	Процесс моделирования	125
3.	Заключение	127

	Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»	129
--	--	-----

	Алфавитный указатель	131
--	--------------------------------	-----

ОТ РЕДАКЦИИ

В настоящем номере публикуются работы ученых, которые являются постоянными участниками конференций по дифференциальным уравнениям и их приложениям в математическом моделировании, проводимых национальным исследовательским Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарёва и Средневолжским математическим обществом. Номер выходит к началу X конференции «Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании» с участием зарубежных ученых, которая пройдет в г. Саранске с 27 по 29 августа 2012 года. Конференция проводится при поддержке РФФИ, грант № 12-01-06069 г. Все статьи имеют положительные рецензии, а сам журнал (кроме подписки через каталог «Почта России») доступен теперь и в сети Internet на сайтах Math-Net.Ru и Elibrary.ru.

Редакция журнала искренне желает авторам крепкого здоровья и творческих успехов!

УДК 51.7:532.546

Математическое моделирование корреляции эпидемической обстановки в мегаполисах от состояния воздуха

© Л.В. Клочкова¹, Ю.Н. Орлов², В.Ф. Тишкин³

Аннотация. В работе изложена оригинальная модель авторов процесса распространения инфекции воздушно — капельным путём и рассмотрены предпосылки для создания эпидемической обстановки в крупных городах.

Ключевые слова: математическое моделирование, модель распространения гриппа, программные комплексы.

1. Введение

Успехи цивилизации, научно-технический прогресс, достижения медицины, к сожалению, на данный момент не привели к снижению инфекционных и неинфекционных болезней среди населения планеты. Более того, растет число онкологических, сердечно — сосудистых, респираторных, эндокринных заболеваний, нервно-психических расстройств. Появилась группа новых, так называемых эмерджентных инфекций, в том числе СПИД, парентеральные гепатиты и другие. Одной из причин такого положения является снижение коллективной резистентности населения планеты в результате глобального неблагоприятного воздействия на организм человека социальных (недостаточное и неполноценное питание), экологических (загрязнение атмосферы и окружающей среды техногенными факторами), медицинских (неоправданное применение некоторых лекарственных средств, наркотиков, алкоголя, стресс и др.) факторов. Все эти причины отрицательно влияют на иммунную систему, вызывают иммунодефициты.

На примере такого актуального в настоящий момент заболевания как грипп можно проследить влияние всех неблагоприятных факторов, которые связаны с развитием мегаполисов. В ходе изучения эпидемий гриппа XX века была выявлена зависимость уровня заболеваемости населения гриппом от его численности. Наибольшая эпидемическая заболеваемость отмечается в городах с населением в 1 млн. человек и больше, что составляет 11.3 % всех случаев гриппа на территории страны. В городах с населением от 500 тысяч до 1 млн. человек эта цифра составляет 10.9 %, а с населением меньше 500 тысяч — уже 9.7 %.

2. Модели распространения гриппа

Грипп передается воздушно-капельным путем и чрезвычайно контагиозен. Некоторые модели предполагают, что дальность рассеивания вируса не превышает 2–3 метра. Непосредственно вокруг больного образуется зараженная зона с максимальной концентрацией

¹ Старший научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; klud@imamod.ru.

² Ведущий научный сотрудник Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; ov3159fd@yandex.ru.

³ Заместитель директора Института прикладной математики им. М.В.Келдыша РАН, г. Москва; tishkin@imamod.ru.

мелкодисперстных аэрозольных частиц. Частицы размером 100 мкм и более (крупнодисперсная фаза) быстро оседают. При прямом контакте с источником инфекции в зараженной зоне вирусные частицы аспирируются и задерживаются на эпителии дыхательных путей восприимчивого организма.

Инкубационный период болезни (Е) в среднем составляет 2 суток, инфекционный (лихорадочный) период (У) продолжается 2–4 дня, и заболевание заканчивается в течение 8–10 дней. Эта эмпирическая модель эпидемии гриппа отражает динамику развития эпидемии среди населения города при непрерывном заражении контактирующих лиц за счет воздушно-капельного механизма. Соотношения построенной на её основе математической модели в [1] представляют систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями. При этом учитывается:

1. Число восприимчивых лиц $X(t)$ среди населения города с начальным условием: $X(t_0) = (1 - \alpha)P(t_0)$.
2. Число лиц в инкубационном периоде гриппа $Y(t)$ с начальным условием, определяемом предысторией эпидемии на ее начало.
3. Число новых случаев заболевания гриппом.
4. Число лиц с различными клиническими формами гриппа с начальным условием — предыстории эпидемии на ее начало.
5. Число невосприимчивых лиц или лиц, переболевших гриппом $Z_r(t)$: с начальным условием: $Z_r(t_0) = Z_{r0} = P(t_0)$.
6. Число лиц, погибших от осложнений $Z_f(t)$ с начальным условием: $Z_f(t_0) = 0$.
7. Граничные условия эпидемии (процесс заражения).

По такой компьютерной модели промоделировано развитие эпидемической ситуации в гипотетическом городе с населением в 1 млн. человек, при числе восприимчивых порядка 60 % (600 тысяч человек) и с летальностью около 1 % от числа больных гриппом. Вычислительные эксперименты показали, что эпидемия гриппа в этом городе продлится около 2.5 месяцев, при этом гриппом переболеет 534 тысяч человек. Пик эпидемии придется на 43 день и составит 36 тысяч человек. От гриппа в городе может погибнуть до 5.4 тысяч человек.

Уже эта модель отражает зависимость состояния качества жизни от процессов, связанных с развитием цивилизации и технического прогресса. Однако она очень угрожающая.

Высокая популяционная плотность в близко расположенных общественных местах и домах создают «благоприятные» условия для развития так называемого «эпизоотического процесса». Здесь могут возникать похожие на «эпизоотии у животных» вспышки высоко патогенного гриппа, включая эмерджентные инфекции. Вычислительные эксперименты по такой модели приведут к ещё более катастрофическим последствиям.

Наибольший интерес для эпидемиологов представляют вычислительные эксперименты с математической моделью процессов распространения гриппа на территории крупных городов страны, связанных между собой транспортной сетью (например, гражданская авиация), т.е. модель эпидемии гриппа на территории страны. Эта модель должна отражать процесс одновременного распространения гриппа среди населения нескольких городов страны. За счет непрерывного движения источников инфекции (лиц в инкубационном периоде) возможны новые случаи заражения лиц из группы риска $X(t)$ в каждом городе.

Очевидно, что в каждом случае сформируется своя «локальная» эпидемия, которая будет «подпитывать» другие города за счет постоянной миграции населения между ними. Движение гриппозной инфекции по системе « n » городов страны, как правило, начинается с некоторого исходного пункта, куда она ранее была занесена извне (очаг инфекции на сопредельной территории). Предполагается, что именно в этом городе появились первые больные лица в инкубационном периоде и инфекционные больные, которые затем вызвали «локальную» эпидемию. Вместе с тем, за счет миграции населения по системе городов страны эта «локальная» эпидемия дает движение патогена в другие города, где формируются свои «локальные» эпидемии. Математическая модель крупномасштабной эпидемии гриппа в системе из « n » городов имеет вид уже суперсистемы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. И тогда не минуемо (по такой модели) должна разразиться полная экологическая катастрофа во всем мире. Сообразно такой модели к этому моменту должно было бы переболеть не менее 150 миллионов человек в одной только России так называемым птичьим гриппом.

Для конкретного примера развития эпидемической обстановки в городе авторами разрабатывается модель распространения капельно-воздушной инфекции (КВИ): более прагматичная, не столь угрожающая катастрофическими последствиями. Она основана на транспортно диффузионной системе уравнений, учитывает плотность населения и множественность очагов начала развития эпидемий, но предоставляет возможность выработки рекомендаций для управления процессом. Основная идея заключается в том, что необходимо следить за качеством воздуха в местах скопления людей, а не строить парные взаимодействия людей как при СПИДе.

Модель представляет собой визуально-прогностический программный комплекс для исследования процессов распространения и зон заражения при действии источников инфекции. Она позволяет прогнозировать распределение больных людей, представляющих собой источник дальнейшего распространения инфекции, по территории проживания, очерчивать зоны эпидемий во времени и пространстве средствами математического и компьютерного моделирования и выводить общее количество больных людей в этой зоне на данный момент времени.

Модель КВИ обеспечивает решение системы интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, ввод исходных данных в расчетный модуль и вывод полученных результатов в виде виртуальной картины развития ситуации.

Решение системы уравнений «Модели» проводят с помощью численных методов на основе разностных аналогов дифференциальных уравнений для расчетной сетки.

«Модель» предоставляет пользователям возможность:

- прогноза распространения инфекций по территории проживания;
- получения прогностических карт распространения эпидемий.

В соответствии со своим назначением модель реализует следующие функции:

- обеспечивает расчетные и игровые варианты моделирования;
- обеспечивает представление расчетной информации пользователям в графической форме.

При известной эмиссии инфекции в центре моделируемой области с определённой плотностью населения, а также некоторых других известных медико-биологических величинах, можно определить границы участков с эпидемической обстановкой во времени и пространстве и количество больных людей.

Модель КВИ представлена системой эволюционных уравнений, описывающей процес-

сы распространения капельно-воздушной инфекции в виде примеси

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} X = \operatorname{div}(K \operatorname{grad} X) + rX(1 - b - m - n - p) + \\ \quad + \operatorname{div} \vec{w} X + X_0(x_0, y_0, t_0); & c(x, y, z, t) \geq c_b, \\ X = 0, & c(x, y, z, t) < c_b, \end{cases}$$

где $X = AN(x, y)c(x, y, z, t)$ — плотность больных в зонах инфицирования; $N(x, y)$ — плотность населения; $c(x, y, z, t)$ — концентрация инфицирующих бактерий в воздухе, причем если $c(x, y, t) = c_b$ (граничное значение инфицирующей концентрации бактерий), то в точке (x, y, t) начинаются заболевания обыкновенных людей, иммунитет которых типичен для данного момента (появляется некоторая плотность больных людей), если $c(x, y, t) < c_b$, то в точке (x, y, t) новых заболевших людей нет; A — медико-биологический когнитивный коэффициент, характеризующий специфику данного вида инфекции; K — некоторый когнитивный коэффициент, зависящий от принятых допущений при рассмотрении процессов (в частности, это может быть коэффициент горизонтальной диффузии инфекции, если описывается процесс распространения инфекции в турбулентном поле атмосферы) и характеризующий скорость изменения градиента плотности больных; r — некоторый когнитивный медико-биологический коэффициент, характеризующий интенсивность эволюционного нарастания или убывания (наличие источников или стоков) концентрации инфекции от больных людей; $b(x, y, t)$, $m(x, y, t)$ и $n(x, y, t)$ — доли X , изменяющие на данный момент в точке (x, y, t) плотность больных людей: $b(x, y, t)$ — доля X людей, у которых инкубационный период развития болезни (они ещё не заражаются), $m(x, y, t)$ — доля X выздоравливающих людей благодаря собственным защитным силам (иммунитету) организма, $n(x, y, t)$ — доля X людей, ускоренно выздоравливающих благодаря принятым мерам борьбы с эпидемией, включая изоляцию больных, p — доля X , уменьшающая число новых больных и концентрацию вирусов из-за гибели инфекции в результате воздействия климатических условий (мороз, жара и т.п.) и конечной жизни вирусов; $\vec{w}$ — усреднённая скорость адвективного перемещения больных людей в определённом направлении или скорость перемещения инфекции в поле ветра на открытом воздухе в толпе людей; $X_0(x_0, y_0, t_0)$ — начальное значение плотности больных в точке (x_0, y_0) с начальной концентрацией c_0 :

$$X_0(x, y, t) = \begin{cases} X_0 \leq N(x_0, y_0); & t_0 = 0, x = x_0, y = y_0; \\ 0; & t \neq 0, \text{ or } x \neq x_0, \text{ or } y \neq y_0. \end{cases}$$

Если $X(x, y, t) \geq N(x, y)$, то полагается значение $X(x, y, t) = N(x, y)$. Результат счёта может быть представлен как изолинии, соответствующие 20 % заболевших от общего числа людей, или как число заболевших в эпидемической зоне.

Диффузия инфекции в пространстве может моделироваться по-разному в зависимости от рассматриваемых областей. Если рассматриваются процессы распространения на открытом воздухе, то инфицирование можно моделировать как распространение вирусов в поле ветра. Тогда значения коэффициента горизонтальной диффузии вычисляются по формуле $K = \alpha \cdot \sigma_\Theta^2 \cdot \max(0.5, |\vec{w}|) \cdot H$, где σ_Θ — угол горизонтальной флуктуации направления ветра в радианах, $\vec{w}$ — скорость ветра в м/с, H — высота слоя перемешивания в м, зависящая от атмосферной стабильности, α — некоторый эмпирический коэффициент ($\alpha = 0.01$). Оператор задаёт класс атмосферной стабильности по метеосводкам.

Если рассматриваемая область имеет сложную конфигурацию (заражение происходит в основном при близком контакте в зданиях и транспорте), тогда необходимо подбирать некоторый усреднённый коэффициент диффузии, характеризующий скорость распростра-

нения инфекции, например, в городских помещениях. Сейчас в Англии проводится натуральный эксперимент, в котором день за днём проводят измерение качества воздуха в вагонах поезда метро, и затем составляется соответствие с наблюдаемой эпидемической обстановкой в городе. Есть факты, что зараженность воздуха в вагонах после присутствия в них больных людей удерживается до четырёх дней. Эти эксперименты могут помочь в определении когнитивных коэффициентов.

3. Методика построения долгосрочного прогнозирования

Научным коллективом представляемой работы предложена также методика построения математического аппарата долгосрочного прогнозирования эпидемической обстановки в мегаполисах. Методические разработки аппарата прогнозирования эпидемической ситуации в мегаполисе (или в регионе) проведены по трем направлениям. Проведена оптимизация скользящих методов анализа нестационарных данных демографического состояния в мегаполисе для проведения корреляционного анализа. Разработан математический аппарат прогнозирования этого временного ряда совместно с его выборочной функцией распределения. Проведён совместный прогноз численности населения и эпидемической ситуации в регионе в зависимости от сценария энергетического развития.

3.1. Оптимизация статистического анализа нестационарных данных

Для прогнозирования взаимосвязи уровня энергопотребления, энергоемкости внутреннего валового продукта (ВВП), величины загрязнения окружающей среды и прироста населения разработаны эконометрические модели, обобщающие методы скользящих средних посредством использования алгоритма определения оптимальной статистической базы. Эти модели используют понятие «горизонтной статистики» (разброса) [3]–[7], выборочное распределение которой является индикатором квазистационарности процесса. Эта статистика позволяет определить характерный горизонт прогноза случайных величин, на котором выборку заданного объема можно считать квазистационарной, а также решить обратную задачу — определить объем выборки, гарантирующий с заданной точностью стационарность случайного процесса на заданном горизонте прогнозирования.

3.2. Прогноз динамики численности населения

Прогноз динамики численности населения в зависимости от уровня энергопотребления, который учитывает в рамках эконометрических моделей зависимость рождаемости, смертности и миграционных потоков от экологического состояния, использует кинетические уравнения для расчета функций распределения населения по социальным и национальным стратам, а также по возрасту и полу. Предметом исследования является нестационарный временной ряд. Под нестационарными временными рядами подразумевают ряды некоторых величин, из которых вычтены все с той или иной точностью детерминированные составляющие. Эти разности слабо коррелируют между собой и представляют ряд случайных величин. Таким образом, целью исследования является метод, позволяющий найти оптимальную величину скользящего окна — ряда из указанных остатков — для построения выборочной функции распределения и её прогнозирования внутри заданного горизонта. После этого можно построить численную реализацию временного ряда. Существует множество временных рядов:

1. с известным распределением (температура в уравнении теплопроводности);

2. с отсутствием тренда;
3. с независимыми приращениями и т.д.

Все приёмы относятся к стационарным временным рядам, когда первые два или конечное число моментов не зависят от времени.

Отличительной особенностью данной работы является обоснованность критерия, с помощью которого можно с заданной точностью осуществить операции с выборками из нестационарного ряда.

Основные задачи, которые решены при разработке данной методики:

1. построение корректной модели прогнозирования нестационарного временного ряда;
2. определение оптимального объёма выборки для формирования квазистационарной выборочной функции распределения (ВФР);
3. минимизация ошибки аппроксимации временного ряда на заданном интервале времени;
4. определение интервала времени, на котором ошибка аппроксимации не превосходит заданную величину;
5. разработка численного алгоритма прогноза временного ряда внутри и вне границ квазистационарности ВФР.

Тогда ряд считается подготовленным. Новым аспектом является установление количественной связи между горизонтом прогноза, объёмом выборки и точностью прогноза для нестационарного временного ряда на основе некоторого интегрального критерия, применяемого не к самому ряду, а к выборочной функции распределения.

4. Заключение

Фундаментальной проблемой XXI века продолжает оставаться более реальное прогнозирование состояния окружающей среды. По оценкам экономистов, даже ограниченные программы стабилизации воздействия на окружающую среду обойдутся в сотни миллиардов долларов. На ученых лежит громадная ответственность за достоверность предоставляемых ими данных об изменениях в окружающей среде, например, концентрации «парниковых» газов (углекислого газа, метана, окиси азота, хлорфторуглеродов и др.).

По мнению пессимистов, рост численности населения в крупных городах приведет к процессам развития эпидемий подобным эпизоотиям у животных, а с другой стороны к более высоким темпам развития потребления и дальнейшего развития производства. Развитие производства немыслимо без использования природы и её ресурсов. Самое ужасное — это её загрязнение. Загрязнение воздуха и воды приводит к сильному подрыву всей окружающей среды и качества жизни людей. Извлекая для производства ресурсы, в настоящий момент человечество для пользы использует лишь 1 — 2% ресурсов. Остальное идет в отходы, что еще больше ухудшает ситуацию. Это подрывает защитные силы организма.

По мнению оптимистов, такое соотношение извлечения ресурсов и кпд использования зависит от развития науки и техники, а также характера производственных отношений, доминирующих в том или ином сообществе. При правильной политике возможно целенаправленно создавать все предпосылки для того, чтобы забота об улучшении экологии становилась главной движущей силой развития производительных сил общества.

Многие факты (например, [2]) свидетельствуют о том, что с середины XX века начался быстрый рост концентрации углекислого газа в атмосфере и других примесей в окружающей среде техногенного происхождения. При сохранении современных темпов увеличения содержания CO_2 в атмосфере его концентрация к 2030 г. может удвоиться. При этом некоторые ученые выдвигают гипотезы о том, что эта деятельность приведёт к росту приземной температуры воздуха. Однако, за более чем 30 лет наблюдений в ГАИШ МГУ астрофизическим методом было установлено, что с 1969 по 1991 год концентрация CO_2 в Москве повысилась на 45%. С 1991 г. темпы роста количества углекислого газа резко возросли, и к 2000 г. его содержание в атмосфере превысило уровень 1969 г. примерно в 2.5 раза. Основным источником поступления CO_2 в атмосферу Москвы являются автомобили, поэтому резкое возрастание углекислоты совпало с периодом интенсивной автомобилизации Москвы, начавшейся около 1991 г. Но в 2000 — 2003 гг. измерения показали сначала замедление, а затем и прекращение увеличения концентрации CO_2 в атмосфере над городом. Этот результат объясняется замедлением роста автомобильного парка Москвы, его качественными изменениями, а также принятыми Правительством Москвы мерами по совершенствованию транспортной инфраструктуры. Поскольку Москва является типичным мегаполисом, на основании этих результатов исследований был сделан оптимистичный предварительный вывод о том, что глобальное ухудшение качества воздуха, например, в Москве может и закончиться. Однако этот миф был развеян обстановкой в городе летом 2010 года. При определённой частоте повторения подобных погодных условий и продолжительности их воздействия организм человека уже не сможет выдержать существующих условий проживания в городах при таком состоянии атмосферного воздуха из-за удушающих выхлопных газов от автомобилей даже при их постоянном на данный момент количестве и отсутствии тренда нарастания. Ослабление иммунитета неизбежно приводит к катастрофическим последствиям.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (грант № 11-01-00444-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Боев Б.В., Макаров В.В., “Гео-информационные системы и эпидемии гриппа”, *НИИ эпидемиологии и микробиологии им.Н.Ф.Гамалеи РАМН*, 2011, <http://www.webpticeprom.ru>.
2. Проект, <http://www.nair-it.ru>.
3. Орлов Ю.Н., Осминин К.П., “Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда”, *Математическое моделирование*, **20**:9 (2008), 23–33.
4. Орлов Ю.Н., Осминин К.П., “Методика определения оптимального объема выборки для прогнозирования нестационарного временного ряда”, *Информационные технологии и вычислительные системы*, 2008, № 3, 3–13.
5. Орлов Ю.Н., Осминин К.П., *Кинетические уравнения для прогнозирования нестационарных временных рядов*, Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2008, 28 с.
6. Орлов Ю.Н., В.М. Суслин В.М., *Кинетические уравнения для нестационарных демографических моделей*, Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша РАН, 2001, 28 с.

7. Орлов Ю.Н., В.М. Суслин В.М., “Кинетические уравнения для некоторых моделей демографии”, *Математическое моделирование*, **15:3** (2003), 43–54.

Mathematical modeling of correlation of the epidemic situation in the metropolitan areas on the air state

© L.V Klochkova⁴, J.H. Orlov⁵, V.F. Tishkin⁶

Abstract. The work describes the Authors original model of the infection spread process by airborne droplets and the necessary conditions for the epidemiological situation creation in large cities.

Key Words: mathematical modeling, model of the spread of influenza, software complexes.

⁴ Senior Researcher of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; klud@imamod.ru.

⁵ Senior Researcher Officer of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; ov3159fd@yandex.ru.

⁶ Deputy Director of the Institute of applied mathematics by name M.V.Keldysh of RAS, Moscow; tishkin@imamod.ru.

УДК 517.938

Полный топологический инвариант для диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на сфере размерности большей трех

© В.З. Гринес¹, Е.А. Гуревич², О.В. Починка,³

Аннотация. Работа посвящена решению задачи топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений на сфере S^n размерности $n > 3$. В качестве основного инструмента используется схема диффеоморфизма – инвариант, описывающий структуру пространства блуждающих орбит и вложение в него проекций $(n - 1)$ -мерных сепаратрис седловых периодических точек. Рассматриваемые динамические системы являются моделями ассоциативной памяти (нейронные сети Хопфилда), полученные результаты могут быть использованы в теории распознавания образов.

Ключевые слова: динамические системы, диффеоморфизмы Морса-Смейла, топологическая классификация, сеть Хопфилда.

1. Введение

Задача топологической классификации динамических систем восходит к работам А.А. Андропова, Л.С. Понтрягина, Е.А. Леонтович, А.Г. Майера и М. Пейшото. А.А. Андронов и Л.С. Понтрягин в 1937 году ввели понятие грубости динамической системы и показали, что необходимые и достаточные условия грубости потока на плоскости (двумерной сфере) состоят в требовании конечности неблуждающего множества, его гиперболичности и отсутствия траекторий, идущих из седла в седло. В 1960 году С. Смейл ввел класс динамических систем на многообразиях произвольной размерности, удовлетворяющих аналогичным условиям, при этом условие отсутствия траекторий, идущих из седла в седло, трансформировалось в более общее условие трансверальности пересечения инвариантных многообразий неподвижных точек и периодических орбит. Такие системы позднее получили название систем Морса-Смейла. Условие конечности множества орбит, составляющих неблуждающее множество систем Морса-Смейла, приводит к идее сведения проблемы топологической классификации этих систем к комбинаторной задаче описания взаимного расположения этих орбит в несущем многообразии. Впервые этот подход был применен Е.А. Леонтович и А.Г. Майером для классификации потоков на двумерной сфере с конечным числом особых траекторий и был развит в работах М. Пейшото, Я.Л. Уманского, С.Ю. Пилюгина, в которых решалась аналогичная задача для потоков Морса-Смейла на многообразиях размерности 2, 3 и выше, а также В.З. Гринесом, А.Н. Безденежных для диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях с конечным числом гетероклинических орбит. Как оказалось, эта идея, вообще говоря, не работает в случае диффеоморфизмов на многообразиях размерности 3 из-за существования диффеоморфизмов с дико вложенными инвариантными многообразиями седел. Этот факт потре-

¹ Заведующий кафедрой высшей математики, Нижегородская сельскохозяйственная академия, г. Нижний Новгород; vgrines@yandex.ru.

² Доцент кафедры теории управления и динамики машин, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; elena_gurevich@list.ru.

³ Доцент кафедры теории функций, Нижегородский государственный университет имени Н. И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru.

бовал нового языка для получения топологических инвариантов в классе таких систем. Полная топологическая классификация произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на трехмерных многообразиях получена в цикле работ [1] – [6]. Одним из эффективных топологических инвариантов, введенных в этих работах, оказалась так называемая схема диффеоморфизма, описывающая структуру пространства блуждающих орбит и вложение в него проекций $(n - 1)$ -мерных сепаратрис седловых периодических точек. В настоящей работе аналогичная техника применяется для решения задачи топологической классификации в множестве G сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла без гетероклинических пересечений, заданных на сфере S^n размерности $n > 3$. Следует отметить, что изучение диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности $n > 3$ началось в работах [7], [8], где получена топологическая классификация таких систем в предположении, что множество неустойчивых сепаратрис одномерно и не содержит гетероклинических пересечений.

Пусть $f \in G$. Положим $\Omega_f^i = \{p \in \Omega_f \mid \dim W_p^u = i\}$, $A_f = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^1} \overline{W_\sigma^u}$, $R_f = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^{n-1}} \overline{W_\sigma^s}$, $V_f = S^n \setminus (A_f \cup R_f)$. Обозначим через $\widehat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f , через $p_f : V_f \rightarrow \widehat{V}_f$ — естественную проекцию и через $\eta_f : \pi_1(\widehat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$ — эпиморфизм, индуцированный отображением p_f . Положим $\hat{L}_f^s = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^1} p_f(W^s(\sigma) \setminus \sigma)$, $\hat{L}_f^u = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^{n-1}} p_f(W^u(\sigma) \setminus \sigma)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Набор $S_f = (\widehat{V}_f, \eta_f, \hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u)$ назовем схемой диффеоморфизма $f \in G$.

О п р е д е л е н и е 1.2. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G$ будем называть эквивалентными, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \widehat{V}_f \rightarrow \widehat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:

- 1) $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$;
- 2) $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^s) = \hat{L}_{f'}^s$ и $\hat{\varphi}(\hat{L}_f^u) = \hat{L}_{f'}^u$.

Основным результатом этой работы заключается в следующей теореме.

Т е о р е м а 1.1. Необходимым и достаточным условием топологической сопряженности диффеоморфизмов $f, f' \in G$ является эквивалентность их схем $S_f, S_{f'}$.

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м РФФИ, грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грант Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) за частичную финансовую поддержку.

2. Вспомогательные утверждения

2.1. Разрывные действия групп преобразований

В этом разделе мы приводим сведения о свойствах группы преобразований $\mathcal{F} = \{f^n|_X, n \in \mathbb{Z}\}$ действующей разрывно на некотором гладком (вообще говоря не компактном) многообразии X и порожденной диффеоморфизмом $f : X \rightarrow X$. Такие группы

преобразований естественным образом появляются при рассмотрении ограничения исходного диффеоморфизма Морса-Смейла на некоторые подмножества блуждающих точек и порождают топологические инварианты, используемые для решения проблемы топологической классификации.

Пусть $f : X \rightarrow X$ — диффеоморфизм, заданный на гладком связном многообразии X (вообще говоря не компактном), такой, что группа $\mathcal{F} = \{f^n|_X, n \in \mathbb{Z}\}$ действует на X разрывно⁴.

Будем обозначать через $\hat{X}_f = X/\mathcal{F}$ пространство орбит этого действия и через $p_f : X \rightarrow \hat{X}_f$ естественную проекцию.

В силу [9] (теорема 3.5.7) проекция $p_f : X \rightarrow \hat{X}_f$ является накрывающим отображением⁵, а пространство $\hat{X}_f$ является гладким многообразием.

Обозначим через $\eta_f : \pi_1(\hat{X}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$ гомоморфизм, определенный следующим образом. Пусть $c \in \hat{X}_f$ — не гомотопная нулю петля в $\hat{X}_f$ и $[c] \in \pi_1(\hat{X}_f)$ — класс гомотопической эквивалентности петли c . Выберем произвольную точку $\hat{x} \in c$, обозначим через $p_f^{-1}(\hat{x})$ полный прообраз точки $\hat{x}$ и зафиксируем точку $\tilde{x} \in p_f^{-1}(\hat{x})$. Так как p_f — накрытие, то существует единственный путь $\tilde{c}(t)$ с началом в точке $\tilde{x}$ ($\tilde{c}(0) = \tilde{x}$), накрывающий петлю c (то есть такой, что $p_f(\tilde{c}(t)) = \hat{c}$). Поэтому существует элемент $n \in \mathbb{Z}$ такой, что $\tilde{c}(1) = f^n(\tilde{x})$. Положим $\eta_f([c]) = n$. Из [10] (гл. 18) следует, что гомоморфизм η_f является эпиморфизмом. Следующие утверждения доказаны в [4].

Предложение 2.1. Пусть X, Y — связные гладкие многообразия и $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$ — диффеоморфизмы такие, что группы $\mathcal{F} = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}, \mathcal{G} = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действуют разрывно на X, Y соответственно. Пусть $\varphi : X \rightarrow Y$ — гомеоморфизм (диффеоморфизм), сопрягающий диффеоморфизмы f и g . Тогда отображение $\hat{\varphi} : \hat{X}_f \rightarrow \hat{Y}_g$, заданное формулой $\hat{\varphi} = p_g \varphi p_f^{-1}$, является гомеоморфизмом (диффеоморфизмом). Кроме того, $\eta_f = \eta_g \varphi_*$, где $\varphi_* : \pi_1(\hat{X}_f) \rightarrow \pi_1(\hat{Y}_g)$ — гомоморфизм, индуцированный отображением φ .

Предложение 2.2. Пусть X, Y — связные гладкие многообразия и $f : X \rightarrow X, g : Y \rightarrow Y$ — диффеоморфизмы такие, что группы $\mathcal{F} = \{f^n, n \in \mathbb{Z}\}, \mathcal{G} = \{g^n, n \in \mathbb{Z}\}$ действуют разрывно на X, Y , соответственно. Пусть $\hat{\varphi} : \hat{X}_f \rightarrow \hat{Y}_g$ — гомеоморфизм (диффеоморфизм) такой, что $\eta_f = \eta_g \varphi_*$. Пусть $\hat{x} \in \hat{X}_f, \tilde{x} \in p_f^{-1}(\hat{x}), y = \hat{\varphi}(\hat{x})$ и $\tilde{y} \in p_g^{-1}(y)$. Тогда существует единственный гомеоморфизм (диффеоморфизм) $\varphi : X \rightarrow Y$, сопрягающий диффеоморфизмы f и g и такой, что $\varphi(\tilde{x}) = \tilde{y}$.

2.2. Канонические многообразия, используемые в работе

Будем называть n -шаром (n -диском) многообразие, гомеоморфное стандартному шару $\mathbb{B}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$. Открытым n -шаром (сферой S^{n-1})

⁴Группа H действует на многообразии X , если задано отображение $\zeta : H \times X \rightarrow X$, обладающее следующими свойствами:

- 1) $\zeta(e, x) = x$ для всех $x \in X$, где e — нейтральный (единичный) элемент группы H ;
- 2) $\zeta(g, \zeta(h, x)) = \zeta(gh, x)$ для всех $x \in X$ и $g, h \in H$.

Группа H действует разрывно на многообразии X , если для каждого компактного подмножества $K \subset X$ множество элементов $h \in H$ таких, что $\zeta(h, K) \cap K \neq \emptyset$ — конечно.

⁵Непрерывное сюръективное отображение $p_f : X \rightarrow X/\mathcal{F}$ называется накрывающим, если для любой точки $x \in X/\mathcal{F}$ существует окрестность $U \in X/\mathcal{F}$ такая, что $p_f^{-1}(U)$ является объединением открытых попарно непересекающихся множеств $u_j, j \in J$, таких, что для любого $j \in J$ ограничение $p_f|_{u_j} : u_j \rightarrow U$ является гомеоморфизмом.

будем называть многообразие, гомеоморфное внутренности $\text{int } \mathbb{B}^n$ (границе $\partial \mathbb{B}^n = \mathbb{S}^{n-1}$) шара $\mathbb{B}^n$.

Будем называть сферу $S^{n-1} \subset M^n$ *цилиндрически вложенной* в M^n , если существует замкнутая окрестность $V \subset M^n$ сферы S^{n-1} и гомеоморфизм $h : \mathbb{S}^{n-1} \times [-1, 1] \rightarrow V$ такой, что $h(\mathbb{S}^{n-1} \times \{0\}) = S^{n-1}$.

Пусть $b_- : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — линейное отображение евклидова пространства, заданное формулой $b_-(x_1, \dots, x_n) = (-\frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, \frac{1}{2}x_n)$, $\mathcal{B}_-$ — группа, порожденная ограничением отображения b_- на множество $\mathbb{R}_0^n = \mathbb{R}^n \setminus (0, \dots, 0)$, и действующая на этом множестве разрывно.

Фактор-пространство $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}_0^n / \mathcal{B}_-$ будем называть *обобщенной n -мерной бутылкой Клейна*.

3. Свойства диффеоморфизмов из класса G

Пусть $\sigma \in \Omega_f^j$, $0 < j < n$. Обозначим через l_σ^s (l_σ^u) устойчивую (неустойчивую) сепаратрису точки σ , то есть компоненту связности множества $W_\sigma^s \setminus \sigma$ ($W_\sigma^u \setminus \sigma$).

Следующее предложение непосредственно вытекает из результатов [11].

Предложение 3.1. *Множество $\overline{l_\sigma^u} \setminus (l_\sigma^u \cup \sigma)$ состоит из стоковой периодической точки; множество $\overline{l_\sigma^s} \setminus (l_\sigma^s \cup \sigma)$ состоит из источниковой периодической точки.*

Следствие 3.1. *Для любой седловой точки σ замыкание её одномерной сепаратрисы является компактной дугой, а замыкание j -мерной сепаратрисы при $j > 1$ — j -сферой.*

Лемма 3.1. *Пусть $f \in G$, $n > 3$. Тогда множества Ω_f^j , $1 < j < (n-1)$ пусты.*

Доказательство. Предположим противное: пусть $1 < j < (n-1)$, $\Omega_f^j \neq \emptyset$, и $\sigma \in \Omega_f^j$. В силу следствия 3.1. замыкания $\overline{W_\sigma^u}, \overline{W_\sigma^s}$ устойчивого и неустойчивого многообразий точки σ являются сферами размерности j и $n-j$ соответственно. Положим $S^j = \overline{W_\sigma^u}$, $S^{n-j} = \overline{W_\sigma^s}$. Из условий, определяющих класс G , следует, что сферы S^j, S^{n-j} пересекаются трансверсально в единственной точке σ . Отсюда следует, что индекс пересечения сфер S^j, S^{n-j} , рассматриваемых как клеточные алгебраические циклы дуальных клеточных разбиений сферы S^n , равен ± 1 (в зависимости от выбора ориентации дуальных клеточных разбиений сферы S^n). С другой стороны, поскольку группы $H_j(S^n, \mathbb{Z})$, $H_{n-j}(S^n, \mathbb{Z})$ тривиальны, то циклы S^j, S^{n-j} гомологичны нулю в S^n , и тогда, согласно [14] (теорема 1 параграфа 70 главы X), их индекс пересечения равен нулю. Полученное противоречие доказывает, что $\Omega_f^j = \emptyset$.

Доказательство закончено.

Следующее предложение вытекает из результатов работ [12], [13], его детальное доказательство изложено в [7] (лемма 3.2).

Предложение 3.2. *Сфера $\overline{l_\sigma^\delta}$, где $\delta = s$ если $\sigma \in \Omega_f^1$ и $\delta = u$ если $\sigma \in \Omega_f^{n-1}$, является цилиндрически вложенной.*

Каждой седловой точке $\sigma \in \Omega_f^1 \cup \Omega_f^{n-1}$ периода m_σ поставим в соответствие число ν_σ , которое равно $+1$, если отображение $f^{m_\sigma}|_{W_\sigma^u}$ сохраняет ориентацию, и равно -1 , если

отображение $f^{m_\sigma}|_{W_\sigma^u}$ меняет ориентацию. Число ν_σ будем называть *типом ориентации* точки σ .

Следующие два утверждения доказываются аналогично доказательствам свойств 2.4 и 2.5 работы [8].

Предложение 3.3. Пусть $f \in G$. Тогда неблуждающее множество Ω_f содержит самое большое одну седловую периодическую точку, имеющую отрицательный тип ориентации.

Предложение 3.4. Множество $A_f \setminus (R_f)$ является связным одномерным полиэдром, не содержащим подмножеств, гомеоморфных окружности.

Лемма 3.2. Существует цилиндрически вложенная сфера $S^{n-1} \subset V_f$, ограничивающая открытый шар B^n , $A_f \subset B^n \subset S^n \setminus R_f$, и такая, что $f(S^{n-1}) \subset B^n$.

Доказательство. Пусть ω — стоковая периодическая точка диффеоморфизма f периода m_ω , $\gamma_\omega^1, \dots, \gamma_\omega^k$ — все одномерные сепаратрисы седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_{k_\omega}$, принадлежащие W_ω^s . Из леммы 4.1 работы [7] следует, что существует цилиндрически вложенная $(n-1)$ -сфера $S_\omega \subset W_\omega^s$, ограничивающая открытый n -шар $B_\omega \subset W_\omega^s$, $B_\omega \supset \omega$, и такая, что: а) $f^{m_\omega}(S_\omega) \subset B_\omega$; б) для любого $i \in \{1, \dots, k\}$ пересечение $\gamma_\omega^i \cap S_\omega$ состоит из единственной точки z_ω^i , в) сфера S_ω является гладкой в некоторой окрестности $V_{z_\omega^i}$ точки z_ω^i . Пусть $B_\omega^0 = B_\omega, B_\omega^1, \dots, B_\omega^{m_\omega-1}$ — последовательность шаров, ограниченных попарно непересекающимися сферами $S_{\omega,0}^0, S_{\omega,1}^1, \dots, S_{\omega,m_\omega-1}^{m_\omega-1}$ соответственно, удовлетворяющими свойствам, аналогичным свойствам а)–б) и такие, что $B_\omega^0 \subset B_\omega^1 \subset \dots \subset B_\omega^{m_\omega-1} \subset f^{-m_\omega}(B_\omega)$. Выберем ровно по одной точке из каждой стоковой периодической орбиты и обозначим полученное множество через $\tilde{\Omega}_f^0$. Для каждой точки $\omega \in \tilde{\Omega}_f^0$ положим $\mathbf{B}_\omega = \bigcup_{j=0}^{m_\omega-1} f^j(\overline{B_\omega^j})$. Непосредственно проверяется, что $f(\mathbf{B}_\omega) \subset \text{int } \mathbf{B}_\omega$. Положим $\mathbf{B} = \bigcup_{\omega \in \tilde{\Omega}_f^0} \mathbf{B}_\omega$.

Пусть $\mathcal{O}_\sigma$ — седловая периодическая орбита периода m_σ . Из гиперболичности точек $\sigma \in \mathcal{O}_\sigma$ следует, что существует некоторая окрестности U_σ орбиты $\mathcal{O}_\sigma$, в которой определена так называемая локальная функция Морса-Ляпунова, то есть такая гладкая функция $\psi_\sigma : U_\sigma \rightarrow \mathbb{R}$, что: 1) $\psi_\sigma(f(x)) < \psi_\sigma(x)$ для любого $x \in f^{-1}(U_\sigma) \setminus \mathcal{O}_\sigma$, $\psi_\sigma(f(\sigma)) = \psi_\sigma(\sigma) = 0$ для любой точки $\sigma \in \mathcal{O}_\sigma$; 2) множество критических точек функции ψ_σ совпадает с множеством $\mathcal{O}_\sigma$, при этом все критические точки имеют индекс 1; 3) для любой точки $\sigma \in \mathcal{O}_\sigma$ существуют локальные координаты $(x_1, \dots, x_n)$ такие, что $W_\sigma^u \cap U_\sigma \subset O_{x_n}$, $W_\sigma^s \cap U_\sigma \subset O_{x_1 \dots x_{n-1}}$ и функция ψ_σ имеет вид $\psi_\sigma(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$. Непосредственное построение такой функции изложено в книге [15] (лемма 2.2.1).

Выберем ровно по одной седловой периодической точке из каждой седловой орбиты индекса 1 и обозначим полученное множество через $\tilde{\Omega}_f^1$. Выберем гладкие $(n-1)$ -диски $D_+, D_- \subset \partial \mathbf{B}$, содержащие точки $z_+ = \partial \mathbf{B} \cap W_\sigma^u$, $z_- = \partial \mathbf{B} \cap W_\sigma^s$ соответственно. В силу λ -леммы (см., напр., [15], лемма 1.2.1) для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число k_σ такое, что компонента связности множества $f^{-km_\sigma}(D_+) \cap U_\sigma$ ($f^{-km_\sigma}(D_-) \cap U_\sigma$), содержащая точку $f^{-km_\sigma}(z_+)$ ($f^{-km_\sigma}(z_-)$), и множество $W_\sigma^s \cap U_\sigma$ $\varepsilon - C^1$ -близки для любого $k > k_\sigma$. Отсюда следует, что существует такое значение $c_\sigma > 0$, что множество $H_{\sigma,c} = \{(x_1, \dots, x_n) \in U_\sigma : x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2 \leq c\}$ пересекается с K_+ (K_-) трансверсально по $(n-1)$ -диску для всех $c < c_\sigma$.

Положим $\mathbf{k} = \max_{\sigma \in \tilde{\Omega}_f^1} k_\sigma$, $\mathbf{c} = \min_{\sigma \in \tilde{\Omega}_f^1} c_\sigma$, $\mathbf{H}_\sigma = \bigcup_{i=0}^{m_\sigma-1} f^i(H_{\sigma,\mathbf{c}})$. Из определения функции

Морса-Ляпунова следует, что $f(\mathbf{H}_\sigma) \subset \text{int } \mathbf{H}_\sigma$. Положим $\mathbf{H} = \bigcup_{\sigma \in \tilde{\Omega}_f^1} \mathbf{H}_\sigma$. Тогда искомые объекты B^n, S^{n-1} определяются как $B^n = f^{-k}(\mathbf{B}) \cup \mathbf{H}$, $S^{n-1} = \partial B^n$.
 Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3.1. Линеаризующая окрестность седловой точки

Обозначим через $a_\nu : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\nu \in \{1, -1\}$, линейный автоморфизм евклидова пространства, определенный формулой $a_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\nu \frac{1}{2}x_1, \frac{1}{2}x_2, \dots, 2\nu x_n)$. Начало координат O является гиперболической седловой неподвижной точкой автоморфизма a_ν , устойчивым многообразием точки O является гиперплоскость $x_n = 0$, неустойчивым многообразием точки O является ось Ox_n .

В качестве канонической модели окрестности седловой точки будем использовать множество $U^\tau = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n | x_n^2(x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2) \leq \tau^2\}$, $\tau \in (0, 1]$, оснащенное двумя инвариантными относительно a_ν слоениями T^s , T^u такими, что каждый слой $T^s(x_n)$ слоения T^s является пересечением гиперплоскости, проходящей через точку $(0, \dots, 0, x_n)$ параллельно координатной плоскости $x_n = 0$, с множеством U^τ , а каждый слой $T^u(x_1, \dots, x_{n-1})$ слоения T^u является пересечением прямой, проходящей через точку $(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$ и параллельной оси Ox_n , с окрестностью U^τ .

Доказательство следующего утверждения приведено в разделе 4.3.1 книги [15] (см. следствие 4.3.2).

Предложение 3.5. Пусть $\theta : U^\tau \setminus Ox_n \rightarrow U^1 \setminus Ox_n$ — топологическое вложение, тождественное на U_0 и удовлетворяющее условию $\theta a_\nu|_{U^\tau} = a_\nu \theta|_{U^\tau}$, $\nu \in \{1, -1\}$. Пусть значения $0 < \tau_1 < \tau_2 < \tau$ выбраны так, что $U^{\tau_2} \subset \theta(U^\tau)$, $\theta(U^{\tau_1}) \subset \text{int } U^{\tau_2}$. Тогда существует гомеоморфизм $\Theta : U^1 \rightarrow U^1$, удовлетворяющий условию $\Theta a_\nu|_{U^1} = a_\nu \Theta|_{U^1}$, и такой, что $\Theta|_{U^{\tau_1}} = \theta|_{U^{\tau_1}}$, $\Theta|_{U^1 \setminus \text{int } U^{\tau_2}} = \text{id}|_{U^1 \setminus \text{int } U^{\tau_2}}$.

Пусть $f \in G$, $\sigma \in \Omega_i(f)$, $i \in \{1, n-1\}$, и ν_σ — тип ориентации точки σ . Из гиперболичности точки σ вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.6. Существует окрестность v_σ точки σ и гомеоморфизм $\chi_\sigma : v_\sigma \rightarrow U^1$ такие, что:

- 1) если $i = 1$, то $\chi_\sigma f^{m_\sigma}|_{v_\sigma} = a_{\nu_\sigma} \chi_\sigma|_{v_\sigma}$.
- 2) если $i = n-1$, то $\chi_\sigma f^{m_\sigma}|_{v_\sigma} = a_{\nu_\sigma}^{-1} \chi_\sigma|_{v_\sigma}$.

Положим $v_\sigma^\tau = \chi_\sigma^{-1}(U^\tau)$, $T_\sigma^s = \chi_\sigma^{-1}(T^s)$, $T_\sigma^u = \chi_\sigma^{-1}(T^u)$.

4. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности

Напомним, что во введении определена схема $S_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{L}_f^s, \hat{L}_f^u)$ диффеоморфизма $f \in G$, где $\hat{V}_f = V_f/f$ — пространство орбит действия f на множество V_f , $p_f : V_f \rightarrow \hat{V}_f$ — естественная проекция и $\eta_f : \pi_1(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$ — эпиморфизм, $\hat{L}_f^s = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^1} p_f(W^s(\sigma) \setminus \sigma)$,

$$\hat{L}_f^u = \bigcup_{\sigma \in \Omega_f^{n-1}} p_f(W^u(\sigma) \setminus \sigma).$$

Следующая лемма является непосредственным следствием леммы 3.2.

Л е м м а 4.1. Пространство $\hat{V}_f$ является гладким многообразием, гомеоморфным прямому произведению $\mathbb{S}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$.

Справедливость предложения 4.1. следует из предложения 2.1.5 книги [15].

П р е д л о ж е н и е 4.1. Пусть $\sigma \in \Omega_1$, ($\sigma \in \Omega_{n-1}$) – седловая периодическая точка диффеоморфизма f периода m_σ с типом ориентации ν_σ . Если $\nu_\sigma = 1$, то проекция сепаратрисы $\hat{l}^s = p_f(W^s(\sigma) \setminus \sigma)$ ($\hat{l}^u = p_f(W^u(\sigma) \setminus \sigma)$) является гладким подмногообразием многообразия $\hat{V}_f$, гомеоморфным прямому произведению $\mathbb{S}^{n-2} \times \mathbb{S}^1$. Если $\nu_\sigma = -1$ проекция сепаратрисы $l^s = p_f(W^s(\sigma) \setminus \sigma)$ ($l^u = p_f(W^u(\sigma) \setminus \sigma)$) является гладким подмногообразием многообразия $\hat{V}_f$, гомеоморфным обобщенной бутылке Клейна $\mathbb{K}^{n-1}$. В обоих случаях гомоморфизм $i_* : \pi_1(l^s) \rightarrow \mathbb{Z}$, индуцированный вложением, является нетривиальным эпиморфизмом, определяемым соотношением $i_*(\pi_1(l^s)) = m_\sigma \mathbb{Z}$.

4.1. Доказательство теоремы 1.1.

Необходимость эквивалентности схем $S_f, S_{f'}$ топологически сопряженных диффеоморфизмов f, f' следует из предложения 2.1.. Докажем достаточность. Пусть схемы S_f и $S_{f'}$ эквивалентны посредством гомеоморфизма $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$. Построим по шагам гомеоморфизм $h : S^n \rightarrow S^n$, сопрягающий диффеоморфизмы f, f' .

Шаг 1. В силу утверждения 2.2. существует поднятие $\varphi : V_f \rightarrow V_{f'}$ гомеоморфизма $\hat{\varphi}$, являющееся гомеоморфизмом, сопрягающим диффеоморфизмы $f|_{V_f}$ с $f'|_{V_{f'}}$ и таким, что для любой седловой точки $\sigma \in \Omega_f^1$ ($\sigma \in \Omega_f^{n-1}$) найдется точка $\sigma' \in \Omega_{f'}^1$ ($\sigma' \in \Omega_{f'}^{n-1}$) такая, что $\varphi(W_\sigma^s \setminus \sigma) = W_{\sigma'}^s \setminus \sigma'$ ($\varphi(W_\sigma^u \setminus \sigma) = W_{\sigma'}^u \setminus \sigma'$). Таким образом, гомеоморфизм φ единственным образом продолжается на седловые точки.

Шаг 2. Выберем ровно по одной точке из каждой седловой орбиты индекса 1 и обозначим полученное множество через $\tilde{\Omega}_f^1$. Из утверждения 3.6. и условия отсутствия гетероклинических пересечений следует существование семейства попарно непересекающихся окрестностей $\{v_\sigma\}$ ($\{v_{\sigma'}\}$) седловых точек из $\tilde{\Omega}_f^1$ ($\tilde{\Omega}_{f'}^1$) и отображений $\chi_\sigma : v_\sigma \rightarrow U^1$ ($\chi_{\sigma'} : v_{\sigma'} \rightarrow U^1$), сопрягающих ограничение диффеоморфизма f^{m_σ} ($f'^{m_{\sigma'}}$) на v_σ ($v_{\sigma'}$) с диффеоморфизмом $a_\nu|_{U^1}$. Положим $\varphi_\sigma^u = \chi_{\sigma'}^{-1} \chi_\sigma|_{W_\sigma^u}$.

Выберем значение $\tau \in (0, 1]$ так, чтобы на множестве v_σ^τ было корректно определено топологическое вложение $\psi : v_\sigma^\tau \rightarrow v_{\sigma'}$, задаваемое формулами $\psi(p) = T_\sigma^s(\varphi(\pi_\sigma^s(x))) \cap T_\sigma^u(\varphi_\sigma^u(\pi_\sigma^u(x)))$, и такое, что $\psi(v_\sigma^\tau \setminus W_\sigma^s) \subset \varphi(v_\sigma^\tau \setminus W_\sigma^u)$.

Определим топологическое вложение $\theta_\sigma : v_\sigma^\tau \rightarrow v_\sigma$ формулой $\theta = \varphi^{-1} \psi$. Из леммы 3.5. следует, что существует $0 < \tau_1 < \tau$ и гомеоморфизм $\Theta : v_\sigma \rightarrow v_\sigma$, совпадающий с θ на множестве $v_\sigma^{\tau_1}$ и являющийся тождественным на ∂v_σ .

Определим гомеоморфизмы $h_{\sigma, \sigma'} : v_\sigma \rightarrow v_{\sigma'}$, $h_{O(\sigma), O(\sigma')} : \bigcup_{i=0}^{m_\sigma-1} V_{f^i(\sigma)} \rightarrow \bigcup_{i=0}^{m_{\sigma'}-1} V_{f'^i(\sigma')}$ формулами $h_{\sigma, \sigma'} = \varphi \Theta$, $h_{O(\sigma), O(\sigma')} = f'^i h_{\sigma, \sigma'} f^{-i}(x)$ для точки $x \in V_{f^i(\sigma)}$.

Обозначим через $H_1 : \bigcup_{\sigma \in \Omega_1} v_\sigma \rightarrow \bigcup_{\sigma' \in \Omega'_1} v_{\sigma'}$ гомеоморфизм, совпадающий для каждой точки $\sigma \in \Omega_1$ с гомеоморфизмом $h_{O(\sigma), O(\sigma')}$.

Шаг 3 Для сохраняющих ориентацию точек из множества Ω_{n-1} повторим построения шага 2 с формальной заменой s на u , a_ν на a_ν^{-1} . Обозначим через $H_{n-1} : \bigcup_{\sigma \in \Omega_{n-1}} v_\sigma \rightarrow \bigcup_{\sigma' \in \Omega'_{n-1}} v_{\sigma'}$ полученный гомеоморфизм.

Шаг 4 Определим гомеоморфизм $H : S^n \setminus (\Omega_0 \cup \Omega_{n-1}) \rightarrow S^n \setminus (\Omega'_0 \cup \Omega'_{n-1})$ формулой

$$H(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } x \in M^3 \setminus \bigcup_{\sigma \in \Omega_1 \cup \Omega_{n-1}} v_\sigma; \\ H_\delta(x), & \text{если } x \in v_\sigma, \text{ где } \sigma \in \Omega_\delta, \delta \in \{1, n-1\}, \end{cases}$$

и продолжим гомеоморфизм H на множества Ω_0, Ω_{n-1} так, чтобы полученный гомеоморфизм $\mathbf{H}: S^n \rightarrow S^n$ удовлетворял условию $f' = \mathbf{H}^{-1}f\mathbf{H}$.

Доказательство закончено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bonatti Ch., Grines V., “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 ”, *Journal of Dynamical and Control Systems (Plenum Press, New York and London)*, **6:4** (2000), 579 – 602.
2. Bonatti Ch., Grines V., Pécou E., “Bidimensional links and diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Ergod. Th. and Dynam. Sys.*, 2002, № 22, 687—710.
3. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pécou E., “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Topology*, 2004, № 43, 369 – 391.
4. Бонатти Хр., Гринес В.З., Починка О.В., “Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях”, *Труды Института Математики Стеклова*, **250** (2005), 5 – 53.
5. Ch. Bonatti, V. Grines, O. Pochinka, “Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds”, *Foliations*, 2005, 121–147.
6. Починка О.В., “Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях”, *ДАН*, **440:6** (2011), 34 – 37.
7. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **261** (2008), 61–86.
8. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С., “О топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла с одномерным множеством неустойчивых сепаратрис на многообразиях размерности большей 3”, *Труды математического института им. В.А. Стеклова*, **270** (2010), 62–86.
9. Терстон У., *Трёхмерная геометрия и топология*, МЦНМО, Москва, 2001, 310 с.
10. Косневски Ч., *Начальный курс алгебраической топологии*, Мир, Москва, 1983, 302 с.
11. Smale S., “Morse inequalities for a dynamical systems”, *Bull. Am. math. Soc.*, **66** (1960), 43 – 49.
12. Cantrell J.C., “Almost locally flat sphere S^{n-1} in S^n ”, *Proceeding of the American Mathematical society*, **15:4** (1964), 574 – 578.
13. Brown M., “Locally flat imbeddings of topological manifolds”, *Ann. of Math*, **75:2** (1962), 331 – 341.
14. Зейферт Г., *Топология*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Ижевск, 2001, 448 с.

15. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, Институт компьютерных исследований, Ижевск, 2011, 424 с.

Complete topological invariant of Morse-Smale Diffeomorphism without heteroclinical intersections on Sphere S^n of dimensional greater than three.

© V.Z. Grines⁶, E.Ya. Gurevich⁷, O.V. Pochinka.⁸

Abstract. The paper is devoted to solution of the problem on topological classification of Morse-Smale diffeomorphisms without heteroclinical intersection on sphere S^n of dimension $n > 3$. As a basic instrument there is used a scheme of diffeomorphism, which is an invariant describing the structure of orbit space of diffeomorphism.

Key Words: dynamical system, cascades, Morse-Smale diffeomorphisms, topological classification.

⁶ Head of High Mathematics Chair, Agriculture Academy of Nizhnii Novgorod, Nizhnii Novgorod, vgrines@yandex.ru

⁷ Associated Professor of Chair of Theory of Control and Dynamics of Machines, Lobachevskii State University, Nizhnii Novgorod; elena_gurevich@list.ru.

⁸ Associated Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevskii State University, Nizhnii Novgorod, olga-pochinka@yandex.ru

УДК 517.948.67

Динамические бифуркационные задачи со спектром Э.Шмидта в линеаризации в условиях групповой симметрии

© Б.В. Логинов¹, И.В. Коноплева², Л.В. Миронова³

Аннотация. Результаты работ [1], [2] для стационарных задач теории ветвления со спектром Э.Шмидта в линеаризации трансформируются на динамические бифуркационные задачи на спектре Э.Шмидта. На основе общей теоремы о наследовании групповой симметрии нелинейной задачи соответствующими уравнениями разветвления в корневых подпространствах (УРК), движущимися по траектории точки ветвления доказана теорема о неявных операторах в условиях групповой симметрии и теорема о редукции УРК по числу уравнений в случае вариационных УРК. Используются терминология и обозначения [3]–[6].

Ключевые слова: динамические бифуркационные задачи; бифуркация Пуанкаре-Андропова-Хопфа; спектр Шмидта; групповая симметрия; G -инвариантная теорема о неявных операторах; бифуркация; устойчивость; спектр Э.Шмидта; уравнение разветвления в корневых подпространствах вариационного типа

1. Introduction.

In cycle of works at the beginning of XX century on linear and nonlinear integral equations E.Schmidt had introduced eigenvalues λ_k of an operator acting in a Hilbert space $B : H \rightarrow H$, taking into account their multiplicities and eigenelements $\{u_k\}_1^\infty, \{v_k\}_1^\infty$ satisfying the relations $Bu_k = \lambda_k v_k$, $B^*v_k = \lambda_k u_k$, that allows to extend Hilbert-Schmidt theory on nonsymmetric completely continuous operators in abstract separable Hilbert spaces. Later such eigenvalues get the name s -numbers (we have introduced in our previous articles the notion "Schmidt spectrum"). Since this article is the direct prolongation of the work [1], where stationary bifurcation problems on E.Schmidt spectrum were considered, here as far as possible auxiliary material connected with E.Schmidt spectrum and its applications contained in [1] and more earlier articles will be reduced. Indicated there possible applications to electromagnetic oscillations theory state the problem on bifurcation and stability of bifurcating solutions in dynamic bifurcational problems with E.Schmidt spectrum in the linearization, in particular under group symmetry conditions. The aim of this article is the transformation of the results [1] on dynamic bifurcation problems. These are the group symmetry inheritance theorem by the relevant branching equations (BEq) and branching equations in the root-subspaces (BEqRs) with corollaries:

1. G -invariant implicit operators theorem [7];
2. theorem on reduction by the the order of variational and variational type BEqs and BEqRs for the cases of non-invariant zero-subspaces of operators [2], [8], [9].

The obtained results are supposed to apply to some problems of electromagnetic oscillations theory.

¹ профессор, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; loginov@ulstu.ru.

² доцент, Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; i.konopleva@ulstu.ru.

³ ассистент, Ульяновское высшее авиационное училище гражданской авиации, г. Ульяновск;

2. Poincaré-Andronov-Hopf bifurcation on E. Schmidt spectrum.

In real Banach spaces E_1 and E_2 , $E_1 \subset E_2 \subset H$ (H is a Hilbert space) the system of implicitly given differential equations non-resolved to derivatives is considered

$$\begin{aligned} F_1(p_1, p_2, x, y, \varepsilon) = 0, \quad F_2(p_1, p_2, x, y, \varepsilon) = 0, \quad F_k(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) \equiv 0, \quad k = 1, 2, \quad p_1 = \frac{dx}{dt}, \quad p_2 = \frac{dy}{dt}, \\ F'_{1p_1}(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) = D_0 + D_0(\varepsilon), \quad F'_{2p_2}(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) = -A_0 - A_0(\varepsilon), \\ F'_{2p_1}(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) = -A_0^* - A_0^*(\varepsilon), \quad F'_{2p_2}(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) = D_0^* + D_0^*(\varepsilon), \\ F'_{1x}(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) = -B_0 + B_0(\varepsilon), \quad F'_{1y}(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) = C_0 - C_0(\varepsilon), \\ F'_{2x}(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) = C_0^* - C_0^*(\varepsilon), \quad F'_{2y}(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) = -B_0^* + B_0^*(\varepsilon) \end{aligned} \quad (2.1)$$

In general case when the operators $A_0, A_0(\varepsilon), \dots, D_0, D_0(\varepsilon)$, and adjoint to them can be unbounded it is supposed that $D_{A_0} \subset D_{A_0(\varepsilon)}, \overline{D_{A_0}} = E_1, \dots, D_{D_0} \subset D_{D_0(\varepsilon)}, \overline{D_{D_0}} = E_1$ the system (2.1) allows the following linearization

$$\begin{pmatrix} -A_0^* & D_0^* \\ D_0 & -A_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} -C_0^* & B_0^* \\ B_0 & -C_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -C_0^*(\varepsilon) & B_0^*(\varepsilon) \\ B_0(\varepsilon) & -C_0(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -A_0^*(\varepsilon) & D_0^*(\varepsilon) \\ D_0(\varepsilon) & -A_0(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_2(x - x_0, y - y_0, x'_t, y'_t, \varepsilon) \\ R_1(x - x_0, y - y_0, x'_t, y'_t, \varepsilon) \end{pmatrix} \right] \quad (2.2)$$

which is convenient to present in the matrix form

$$\mathbf{A}_0(X'_t, Y'_t)^T = (\mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_0(\varepsilon))(X, Y)^T - \mathbf{A}_0(\varepsilon)(X'_t, Y'_t)^T + \mathbf{R}(x_0, y_0, X, Y, X'_t, Y'_t, \varepsilon) \quad (2.3)$$

The index zero at the operator and everywhere below means the relation to the point x_0, y_0 , i.e. $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}(x_0, y_0)$. The vectorial nonlinear operator $\mathbf{R}$ is supposed to be sufficiently smooth on $\mathcal{X} = (X, Y)^T = (x - x_0, y - y_0)^T$ and $\mathcal{X}'_t = (X'_t, Y'_t)^T$ and $\mathbf{R}(x_0, y_0, 0, 0, \varepsilon) \equiv 0, \mathbf{R}_{\mathcal{X}}(x_0, y_0, 0, \mathcal{X}_t, \varepsilon) = 0, \mathbf{R}_{\mathcal{X}'}(x_0, y_0, \mathcal{X}, 0, \varepsilon) \equiv 0$. Keeping in mind the dense embedding $E_1 \subset E_2 \subset H$ the operators $\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{A}_0(\varepsilon), \mathbf{B}_0(\varepsilon)$ can be regarded as acting in the direct sum H^2 of two Hilbert space H .

Further it is considered the sufficiently general case when the $\mathbf{A}_0$ -spectrum $\sigma_{\mathbf{A}_0}(\mathbf{B}_0)$ of the Fredholm operator $\mathbf{B}_0$ is decomposed into two parts: $\sigma_{\mathbf{A}_0}^-(\mathbf{B}_0)$ lying strictly in the left half-plane and $\sigma_{\mathbf{A}_0}^0(\mathbf{B}_0)$ consisting of the eigenvalues $\pm i\alpha$ of the multiplicity n . More general case implies only technical difficulties.

Let there exist [10], [11] elements $U_{1k} = U_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{1k} \\ \tilde{u}_{1k} \end{pmatrix}, U_{2k} = U_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} u_{2k} \\ \tilde{u}_{2k} \end{pmatrix}$ and $V_{1k} = V_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_{1k} \\ \tilde{v}_{1k} \end{pmatrix}, V_{2k} = V_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} v_{2k} \\ \tilde{v}_{2k} \end{pmatrix}$ belonging to direct sum $H + H = H^2$, such that

$$\mathcal{B}(\alpha)\Phi_k^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0 & \alpha\mathbf{A}_0 \\ -\alpha\mathbf{A}_0 & \mathbf{B}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{1k}^{(1)} \\ U_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} = 0, \quad \mathcal{B}^*(\alpha)\Psi_k^{(1)} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{B}_0^* & -\alpha\mathbf{A}_0^* \\ \alpha\mathbf{A}_0^* & \mathbf{B}_0^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_{1k}^{(1)} \\ V_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} = 0, \quad k = 1, \dots, n \quad (2.4)$$

It means that the zero-subspaces $\mathcal{N}(\mathcal{B}(\alpha))$ and $\mathcal{N}(\mathcal{B}^*(\alpha))$ of the operators $\mathcal{B}(\alpha)$ and $\mathcal{B}^*(\alpha)$ have the forms $\mathcal{N}(\mathcal{B}(\alpha)) = \text{span}\{\Phi_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} U_{1k} \\ U_{2k} \end{pmatrix}, \Phi_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} U_{2k} \\ -U_{1k} \end{pmatrix}, k = 1, \dots, n\}$, $\mathcal{N}(\mathcal{B}^*(\alpha)) = \text{span}\{\Psi_{1k}^{(1)} = \begin{pmatrix} -V_{2k} \\ V_{2k} \end{pmatrix}, \Psi_{2k}^{(1)} = \begin{pmatrix} V_{1k} \\ V_{2k} \end{pmatrix}, k = 1, \dots, n\}$, and in

coordinate representation respectively

$$\begin{aligned} -C_0^*u_{1k} + B_0^*\tilde{u}_{1k} - \alpha A_0^*u_{2k} + \alpha D_0^*\tilde{u}_{2k} &= 0 & -C_0^*v_{1k} + B_0^*\tilde{v}_{1k} + \alpha A_0^*v_{2k} - \alpha D_0^*\tilde{v}_{2k} &= 0 \\ B_0u_{1k} - C_0\tilde{u}_{1k} + \alpha D_0u_{2k} - \alpha A_0\tilde{u}_{2k} &= 0 & B_0v_{1k} - C_0^*\tilde{v}_{1k} - \alpha D_0v_{2k} + \alpha A_0^*\tilde{v}_{2k} &= 0 \\ \alpha A_0^*u_{1k} - \alpha D_0^*\tilde{u}_{1k} - C_0^*u_{2k} + B_0^*\tilde{u}_{2k} &= 0 & -\alpha A_0v_{1k} + \alpha D_0^*\tilde{v}_{1k} - C_0v_{2k} + B_0^*\tilde{v}_{2k} &= 0 \\ -\alpha D_0u_{1k} + \alpha A_0\tilde{u}_{1k} + B_0u_{2k} - C_0\tilde{u}_{2k} &= 0 & \alpha D_0v_{1k} - \alpha A_0^*\tilde{v}_{1k} + B_0v_{2k} - C_0^*\tilde{v}_{2k} &= 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

that can be regarded as the systems in the direct sum $\mathcal{H}$ of four Hilbert spaces.

Carrying out the complexification of the equation (2.1), consider it in the spaces $\mathcal{E}_k = E_k + iE_k, k = 1, 2$ and suppose that the nonlinear operator $\mathbf{R}$ admits a sufficiently smooth extension on these spaces. Then the elements $U_k = U_{1k} + iU_{2k} = \begin{pmatrix} u_{1k} + iu_{2k} \\ \tilde{u}_{1k} + i\tilde{u}_{2k} \end{pmatrix}, \bar{U}_k$ and $V_k = V_{1k} + iV_{2k} = \begin{pmatrix} v_{1k} + iv_{2k} \\ \tilde{v}_{1k} + i\tilde{v}_{2k} \end{pmatrix}, \bar{V}_k$ are the eigenelements of the following eigenvalue problems

$$\mathbf{B}_0U_k = i\alpha\mathbf{A}_0U_k, \mathbf{B}_0\bar{U}_k = -i\alpha\mathbf{A}_0\bar{U}_k, \mathbf{B}_0V_k = -i\alpha\mathbf{A}_0V_k, \mathbf{B}_0\bar{V}_k = i\alpha\mathbf{A}_0\bar{V}_k, k = 1, \dots, n \quad (2.6)$$

It can be easily verified: the substitution U_k, V_k or $\bar{U}_k, \bar{V}_k$ into the relations (2.6) after the separation of real and imaginary parts leads to the systems (2.5).

The problem of the finding of $\frac{2\pi}{\alpha+\mu}$ -periodical solutions to (2.3) is setting, where $\mu = \mu(\varepsilon) \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0$ is the unknown addition to the frequency of oscillations. The Poincaré substitution $t = \frac{\tau}{\alpha+\mu}, \mathcal{X}(t) = (X(t), Y(t))^T = \mathcal{Y}(\tau)$ reduces this problem to the determination of 2π -periodic solutions of the following equation with two small parameters μ and ε

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_0\mathcal{Y} &= \mu\mathfrak{A}_0\mathcal{Y} + (\alpha + \mu)\mathfrak{A}_0(\varepsilon)\mathcal{Y} + \mathfrak{B}_0(\varepsilon)\mathcal{Y} + \mathbf{R}(x_0, y_0, (\alpha + \mu)\frac{d\mathcal{Y}}{dt}, \mathcal{Y}, \varepsilon) \equiv \\ &\equiv \mu\mathfrak{A}_0\mathcal{Y} + \mathcal{R}(x_0, y_0, \frac{d\mathcal{Y}}{dt}, \mathcal{Y}, \mu, \varepsilon), \\ (\mathfrak{B}_0\mathcal{Y})(\tau) &\equiv \mathfrak{B}_0\mathcal{Y} = \mathbf{B}_0\mathcal{Y}(\tau) - \alpha\mathbf{A}_0\frac{d\mathcal{Y}}{d\tau}, (\mathfrak{A}_0\mathcal{Y})(\tau) = \mathfrak{A}_0\mathcal{Y} = \mathbf{A}_0\frac{d\mathcal{Y}}{d\tau}, \\ \mathfrak{A}_0(\varepsilon)\mathcal{Y} &= (\mathfrak{A}_0(\varepsilon)\mathcal{Y})(\tau) = \mathbf{A}_0(\varepsilon)\frac{d\mathcal{Y}}{d\tau} \end{aligned} \quad (2.7)$$

The supposed Fredholmian operator $\mathfrak{B}_0\mathcal{Y}$ and operators in (2.7) are mapping the space $\mathbb{Y}$ of 2π -periodic continuously differentiable functions τ with values in $\mathcal{E}_1^2 \subset \tilde{\mathcal{H}}$ into the space $\mathbb{Z}$ of 2π -periodic continuously differentiable functions τ with values in $\mathcal{E}_2^2 \subset \tilde{\mathcal{H}}$ at the usage of special form functionals $\langle\langle \mathcal{Y}, \mathcal{F} \rangle\rangle = \int_0^{2\pi} \langle \mathcal{Y}(\tau), \mathcal{F}(\tau) \rangle, \mathcal{Y} \in \mathbb{Y} \subset \tilde{\mathcal{H}}, \mathcal{F} \in \mathbb{Y}^* \subset \tilde{\mathcal{H}}$ or $\mathcal{Y} \in \mathbb{Z} \subset \tilde{\mathcal{H}}, \mathcal{F} \in \mathbb{Z}^* \subset \tilde{\mathcal{H}}$. Zero-subspaces of the operators $\mathfrak{B}_0$ and $\mathfrak{B}_0^*$ are $2n$ -dimensional

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathfrak{B}_0) &= \text{span}\{\varphi_k^{(1)} = \varphi_k^{(1)}(x_0, y_0, \tau)\} = U_k(x_0, y_0)e^{i\tau}, \bar{\varphi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n \\ \mathcal{N}(\mathfrak{B}_0^*) &= \text{span}\{\psi_k^{(1)} = \psi_k^{(1)}(x_0, y_0, \tau)\} = V_k(x_0, y_0)e^{i\tau}, \bar{\psi}_k^{(1)}\}_{k=1}^n \end{aligned}$$

with $\mathbf{A}_0$ - and $\mathbf{A}_0^*$ -Jordan chains ($\mathfrak{A}_0$ - and $\mathfrak{A}_0^*$ - Jordan chains) $\varphi_k^{(s)} = U_k^{(s)}(x_0, y_0)e^{i\tau}, \psi_k^{(s)} = V_k^{(s)}(x_0, y_0)e^{i\tau}, s = \overline{1, p_k}$ of the length $p_k, k = \overline{1, n}$. Here $\mathcal{H}$ is a Hilbert space with elements of $\tilde{\mathcal{H}}$ containing the factors $e^{im\tau}, m$ - are integers.

Definition 2.1. [12], [13]. *The elements $U_k^{(s)}(x_0, y_0) = (u_{1k}^{(s)} + iu_{2k}^{(s)}, \tilde{u}_{1k}^{(s)} + i\tilde{u}_{2k}^{(s)}), s = \overline{1, p_k}, k = \overline{1, n}$ form the complete canonical generalized Jordan set ($GJS \equiv \mathbf{A}_0(\varepsilon) - JS$), if*

$$(\mathbf{B}_0 - i\alpha\mathbf{A}_0)U_k^{(s)} = \sum_{j=1}^{s-1} \mathbf{A}_jU_k^{(s-j)}, \mathbf{A}_0(\varepsilon) = \mathbf{A}_1\varepsilon + \mathbf{A}_2\varepsilon^2 + \dots, \left\langle U_k^{(s)}, \Gamma_l^{(1)} \right\rangle_{\mathcal{H}} = 0, s = 2, \dots, p_k;$$

$$D_p = \det \left[\sum_{j=1}^{s-1} \left\langle \mathbf{A}_jU_k^{(p_k+1-j)}, V_l^{(1)} \right\rangle_{\mathcal{H}} \right] \neq 0, V_l^{(1)} = V_{1l}^{(1)} + iV_{2l}^{(1)} = V_l = (v_{1l} + iv_{2l}, \tilde{v}_{1l} + i\tilde{v}_{2l})^T$$

This JS is bicanonical, if GJS of elements $\{V_l^{(1)}\}_1^n$ for conjugate operator $(\mathbf{B}_0^* + i\alpha\mathbf{A}_0^*) - \mathbf{A}_0^*(\varepsilon)$ is also canonical, and three-canonical if in addition

$$\begin{aligned} \langle U_i^{(j)}, \Gamma_k^{(l)} \rangle_{\mathcal{H}} &= \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad \Gamma_k^{(l)} = \sum_{s=1}^{p_k+1-l} \mathbf{A}_s^* V_k^{(p_k+2-l-s)}, \\ \langle Z_i^{(j)}, V_k^{(l)} \rangle_{\mathcal{H}} &= \delta_{ik} \delta_{jl}, \quad Z_k^{(j)} = \sum_{s=1}^{p_k+1-i} \mathbf{A}_s^* U_i^{(p_k+2-j-s)}. \end{aligned}$$

Later turn out to be convenient the following designations: $U = U(x_0, y_0) = (U_1^{(1)}, \dots, U_1^{(p_1)}, \dots, U_n^{(1)}, \dots, U_n^{(p_n)})$, $U_i^{(j)} = U_i^{(j)}(x_0, y_0)$, the vectors $\Gamma = \Gamma(x_0, y_0)$, $V = V(x_0, y_0)$ and $Z = Z(x_0, y_0)$ are defined analogously, $K = \sum_{k=1}^n p_k$ is the root-number.

R e m a r k. All these notions and designations are naturally transferring on Jordan sets of the zero-subspaces $\mathcal{N}(\mathfrak{B})$ and $\mathcal{N}(\mathfrak{B}^*)$, among them the Jordan chains biorthogonality conditions of the type (2.7).

However in the Poincaré substitution the small parameter μ is depended on ε , i.e. $\mu = \mu(\varepsilon)$ and together with the solution $\mathcal{Y}$ of the equation (2.7) is also be subjected to the determination. Moreover later $\mathbf{A}_0$ -Jordan structure of the operator $\mathfrak{B}_0$ will be used because of in the general case $\mu(\varepsilon)$ turns out to be analytic on fractional degrees of ε .

L e m m a 2.1. [5], [6], [11], [12]. *The Fredholmian operator-function $\mathfrak{B}_0 - \mu\mathfrak{A}_0$ as depending linearly on small parameter μ always has complete three-canonical GJS satisfying the biorthogonality conditions*

$$\begin{aligned} \langle \langle \varphi_j^{(k)}, \gamma_s^{(l)} \rangle \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} &= \delta_{js} \delta_{kl}, \quad \langle \langle z_j^{(k)}, \psi_s^{(l)} \rangle \rangle_{\tilde{\mathcal{H}}} = \delta_{js} \delta_{kl}, \quad k(l) = \overline{1, p_j(p_s)}, \\ \gamma_s^{(l)} &= \mathbf{A}_0 \psi_s^{(p_s+1-l)}, \quad z_j^{(k)} = \mathbf{A}_0 \varphi_j^{(p_j+1-k)}, \quad j(s) = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

The relations (2.8) allow to determine the projectors

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{P}(x_0, y_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{p_j} \langle \langle \cdot, \gamma_j^{(k)} \rangle \rangle \varphi_j^{(k)} = \langle \langle \cdot, \gamma \rangle \rangle \varphi, \quad \overline{\mathbf{P}} = \overline{\mathbf{P}}(x_0, y_0) = \langle \langle \cdot, \overline{\gamma} \rangle \rangle \overline{\varphi}, \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}(x_0, y_0) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^{p_j} \langle \langle \cdot, \psi_j^{(k)} \rangle \rangle z_j^{(k)} = \langle \langle \cdot, \psi \rangle \rangle z, \quad \overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{Q}}(x_0, y_0) = \langle \langle \cdot, \overline{\psi} \rangle \rangle \overline{z}, \\ \mathbb{P}(x_0, y_0) &= \mathbf{P}(x_0, y_0) + \overline{\mathbf{P}}(x_0, y_0), \quad \mathbb{Q}(x_0, y_0) = \mathbf{Q}(x_0, y_0) + \overline{\mathbf{Q}}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (2.9)$$

generating the decompositions of Hilbert space $\tilde{\mathcal{H}}$ (Banach spaces $\mathbb{Y}$ and $\mathbb{Z}$) into the direct sums

$$\tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}^{2K}(x_0, y_0) \dot{+} \tilde{\mathcal{H}}^{\infty-2K}(x_0, y_0), \quad \tilde{\mathcal{H}} = \tilde{\mathcal{H}}_{2K}(x_0, y_0) \dot{+} \tilde{\mathcal{H}}_{\infty-2K}(x_0, y_0) \quad (2.10)$$

Operators $\mathfrak{B}_0$ and $\mathbf{A}_0$ ($\mathfrak{A}_0$) are intertwining by the projectors $\mathbf{P}(x_0, y_0)$ and $\mathbf{Q}(x_0, y_0)$, $\overline{\mathbf{P}}(x_0, y_0)$ and $\overline{\mathbf{Q}}(x_0, y_0)$: $\mathfrak{B}_0 \mathbf{P}(x_0, y_0)u = \mathbf{Q}(x_0, y_0) \mathfrak{B}_0 u$ on $D_{\mathfrak{B}_0}$, $\mathfrak{B}_0 \varphi = \mathfrak{B}_0 z$, $\mathfrak{B}_0^* \psi = \mathfrak{B}_0 \gamma$, $\mathfrak{B}_0$ is cell-diagonal matrix $\mathfrak{B}_0 = \text{diag}(B_1, \dots, B_n)$, where $B_i - (p_i \times p_i)$ - matrix with units on subsidiary subdiagonal and zeros on other places; $\mathfrak{A}_0 \mathbf{P}(x_0, y_0)u = \mathbf{Q}(x_0, y_0) \mathfrak{A}_0 u$ on $D_{\mathfrak{A}_0}$, $\mathbf{A}_0 \varphi = \mathfrak{A}_0 z$, $\mathbf{A}_0 \psi = \overline{\mathfrak{A}}_1 \gamma$, where $\overline{\mathfrak{A}}_1$ is cell-diagonal matrix $\overline{\mathfrak{A}}_1 = \text{diag}(B^1, \dots, B^n)$, B^i is $(p_i \times p_i)$ matrix with units on subsidiary diagonal and zeros on other places; Operators $\mathfrak{B}_0$ and $\mathfrak{A}_0$ ($\mathbf{A}_0$) are acting in invariant pairs of subspaces $\tilde{\mathcal{H}}^{\infty-2K}(x_0, y_0)$ and $\tilde{\mathcal{H}}_{\infty-2K}(x_0, y_0)$, $\tilde{\mathcal{H}}^{2K}(x_0, y_0)$ and $\tilde{\mathcal{H}}_{2K}(x_0, y_0)$ and $\mathfrak{B}_0 : D_{\mathfrak{B}_0} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{\infty-2K}(x_0, y_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{\infty-2K}(x_0, y_0)$, $\mathbf{A}_0 : D_{\mathbf{A}_0} \cap \tilde{\mathcal{H}}^{2K}(x_0, y_0) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}_{2K}(x_0, y_0)$ are isomorphisms.

T h e o r e m 2.1. In conditions of Lemma 2.1 the problem on periodic solutions the equation (2.3) (2π -periodic solutions to the (2.7)) in a neighborhood of the bifurcation point $(x_0, y_0; 0)$ is equivalent to the finding of small solutions to finite-dimensional A.M. Lyapounov BEqR (2.11) or E. Schmidt (2.12).

PROOF. In accordance with the expansion (2.10) setting $\mathcal{V} = \mathcal{U} + \mathcal{V}$, $\mathcal{V} = \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}) = \sum (\xi_{jk} \varphi_j^{(k)}(x_0, y_0) + \bar{\xi}_{jk} \bar{\varphi}_j^{(k)}(x_0, y_0)) = \xi \cdot \varphi + \bar{\xi} \cdot \bar{\varphi} \in \tilde{\mathcal{H}}^{2K}(x_0, y_0)$, $\mathcal{U} = \mathcal{U}(x_0, y_0) \in \tilde{\mathcal{H}}^{\infty-2K}(x_0, y_0)$ write the equation (2.7) in projections on the root-subspaces and their direct supplements in the point (x_0, y_0)

$$\begin{aligned} (I - \mathbb{Q}(x_0, y_0) \mathfrak{B}_0(x_0, y_0) \mathcal{U}(x_0, y_0) = \\ = (I - \mathbb{Q}(x_0, y_0)) \{ \mu \mathfrak{A}_0(\mathcal{U}(x_0, y_0) + \mathcal{V}(x_0, y_0) + \mathcal{R}(x_0, y_0, \frac{d[\dots]}{d\tau}, [\dots], \mu, \varepsilon)) \}, \\ \mathbb{Q}(x_0, y_0) \mathfrak{B}_0 \mathcal{V}(x_0, y_0) = \mathbb{Q}(x_0, y_0) \{ \mu \mathfrak{A}_0(\mathcal{U}(x_0, y_0) + \mathcal{V}(x_0, y_0) + \mathcal{R}(x_0, y_0, \frac{d[\dots]}{d\tau}, [\dots], \mu, \varepsilon)) \} \end{aligned}$$

and resolving the first of them according implicit operators theorem [3] and Lemma 2.1 with respect to $\mathcal{U}(x_0, y_0)$ we obtain $\mathcal{U}(x_0, y_0) = \mathcal{U}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon)$. Its substitution in the second equation gives A.Lyapounov BEqR

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(x_0, y_0; \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = \mathbf{Q}(x_0, y_0) \{ \mu \mathfrak{A}_0(\mathcal{U} + \mathcal{V}) + \mathcal{R}(x_0, y_0, \frac{d}{d\tau}[\dots], [\dots], \mu, \varepsilon) = \\ = (\mathfrak{B}_0 - i\mu \mathfrak{B}_1) \xi - \langle \langle \mathcal{R}(x_0, y_0, \frac{d}{d\tau}[\dots], [\dots], \mu, \varepsilon), \psi(x_0, y_0) \rangle \rangle = 0, \\ \bar{\mathbf{f}}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = 0, \quad [\dots] = \mathcal{U}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}). \end{aligned} \quad (2.11)$$

More detailly consider the construction of E.Schmidt BEqR. Writing the equation (2.7) in the form of the equivalent system

$$\begin{aligned} \tilde{\mathfrak{B}}_0 \mathcal{V} = \mu \mathfrak{A}_0 \mathcal{V} + \mathcal{R}(x_0, y_0, \frac{d\mathcal{V}}{d\tau}, \mathcal{V}, \mu, \varepsilon) + \sum_{i=1}^n (\xi_{i1} z_i^{(1)} + \bar{\xi}_{i1} \bar{z}_i^{(1)}), \\ \xi_{j\sigma} = \langle \langle \mathcal{V}, \gamma_s^{(\sigma)} \rangle \rangle, \bar{\xi}_{s\sigma} = \langle \langle \mathcal{V}, \bar{\gamma}_s^{(\sigma)} \rangle \rangle, \end{aligned} \quad (2.12)$$

where $\tilde{\mathfrak{B}}_0 = \mathfrak{B}_0(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^n [\langle \langle \cdot, \gamma_i^{(1)} \rangle \rangle z_i^{(1)} + \langle \langle \cdot, \bar{\gamma}_i^{(1)} \rangle \rangle \bar{z}_i^{(1)}]$ is E.Schmidt regularizator [3], $\tilde{\mathfrak{B}}_0^{-1} = \Gamma(x_0, y_0) = \Gamma_0$, its solution find in the form $\mathcal{V} = w + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}) = w + \xi \cdot \varphi + \bar{\xi} \cdot \bar{\varphi}$. This gives $w = -(I - \mu \Gamma_0 \mathfrak{A}_0)^{-1} \Gamma_0 \mathfrak{A}_0 (\xi \cdot \varphi + \bar{\xi} \cdot \bar{\varphi}) + \Gamma_0 (I - \mu \mathfrak{A}_0 \Gamma_0)^{-1} \mathcal{R}(x_0, y_0, (\alpha + \mu) \frac{d}{d\tau} [w(x_0, y_0) + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi})], w(x_0, y_0) + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon)$. Substitution of $\mathcal{V} = w + \mathcal{V}$ into the second equations (2.12) taking into account the relations $\Gamma_0^* \gamma_j^{(1)}(x_0, y_0) = \psi_j^{(1)}(x_0, y_0)$, $\Gamma_0^* \gamma_j^{(s)}(x_0, y_0) = \psi_j^{(p_j+2-\sigma)}(x_0, y_0)$, $s \geq 2$, leads to E.Schmidt BEqR in the basis $\{\varphi, \bar{\varphi}\}$

$$\begin{aligned} t_{s1}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = -\langle \langle w, \gamma_s^{(1)}(x_0, y_0) \rangle \rangle = \\ = -\mu \langle \langle \mathfrak{A}_0 (I - \mu \Gamma_0 \mathfrak{A}_0)^{-1} (\xi \cdot \varphi + \bar{\xi} \cdot \bar{\varphi}), \psi_s^{(1)}(x_0, y_0) \rangle \rangle - \langle \langle (I - \mu \mathfrak{A}_0 \Gamma_0)^{-1} \mathcal{R}(\dots), \psi_s^{(1)}(x_0, y_0) \rangle \rangle = 0, \\ t_{s\sigma}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = -\langle \langle w, \gamma_s^{(\sigma)}(x_0, y_0) \rangle \rangle = \\ = \langle \langle (I - \mu \Gamma_0 \mathfrak{A}_0)^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{j=2}^{p_i} (\xi_{ij} \varphi_i^{(j)} + \bar{\xi}_{ij} \bar{\varphi}_i^{(j)}) - \mu (I - \mu \Gamma_0 \mathfrak{A}_0)^{-1} \Gamma_0 \mathfrak{A}_0 (\xi \cdot \varphi + \bar{\xi} \cdot \bar{\varphi}), \gamma_s^{(\sigma)}(x_0, y_0) \rangle \rangle - \\ - \langle \langle (I - \mu \mathfrak{A}_0 \Gamma_0)^{-1} \mathcal{R}(\dots), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0, y_0) \rangle \rangle = 0. \end{aligned}$$

With regard to the relations $i^{\sigma-1} \varphi_j^{(\sigma)}(x_0, y_0) = (\Gamma_0 \mathfrak{A}_0)^{\sigma-1} \varphi_j^{(1)}(x_0, y_0) = i \varphi_j^{(\sigma - [\frac{\sigma}{p_j}] p_j)}(x_0, y_0)$ it transforms to the form

$$\begin{aligned} t_{s1}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = -\frac{(i\mu)^{p_s}}{1-(i\mu)^{p_s}} \xi_{s1} - \langle \langle (I - \mu \mathfrak{A}_0 \Gamma_0)^{-1} \mathcal{R}(\dots), \psi_s^{(1)}(x_0, y_0) \rangle \rangle = 0, \\ t_{s\sigma}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = \\ = \xi_{s\sigma} - \frac{(i\mu)^{\sigma-1}}{1-(i\mu)^{p_s}} \xi_{s1} - \langle \langle (I - \mu \mathfrak{A}_0 \Gamma_0)^{-1} \mathcal{R}(\dots), \psi_s^{(p_s+2-\sigma)}(x_0, y_0) \rangle \rangle = 0, \\ \bar{t}_{s1}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = 0, \quad \bar{t}_{s\sigma}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = 0, \\ s = 1, \dots, n, \quad \sigma = 1, \dots, p_s. \end{aligned} \quad (2.13)$$

3. Theorems on group symmetry inheritance of original nonlinear equation by the relevant BEqRs.

At the presence of continuous symmetry admitting by original nonlinear problem (2.1) with operators acting in Banach spaces Lie group $G_l = G_l(a)$, $a = (a_1, \dots, a_l)$ its essential parameters is supposed being l -dimensional differentiable manifold, satisfying following conditions [8],[9],[1],[2],[7]:

(**c**₁). representation $a \mapsto L_{g(a)}x_0$, acting from a neighborhood of the unit element of $G_l(a)$ into the space E_1 belong to the class C^1 , so that $X(x_0, y_0)^T \in E_1 + E_1 \subset H^2$ for all infinitesimal operators $X(x, y)^T = \lim_{t \rightarrow 0} t^{-1} [L_{g(a(t))}(x, y)^T - (x, y)^T]$ in tangent to $L_{g(a)}$ manifold $T_{g(a)}^l$;

(**c**₂). stationary subgroup of the element $(x_0, y_0)^T \in E_1 + E_1 \subset H^2$ determines the representation $L(G_s)$ of local Lie group $G_s \subset G_l$, $s < l$, with s -dimensional subalgebra $T_{g(a)}^s$ of infinitesimal operators. This means that for non-stationary bifurcation element $X_k(x_0, y_0)^T, X_k \in T_{g(a)}^l$ form in the zero-subspace of the linearized operator $2\kappa = 2(l - s)$ -dimensional subspace and bases in it and in the algebra $T_{g(a)}^l$ can be ordered so that $X_k(x_0, y_0)^T = \xi_k \varphi_k + \bar{\xi}_k \bar{\varphi}_k, 1 \leq k \leq \kappa, X_j(x_0, y_0)^T = 0$ для $j \geq \kappa + 1$.

(**c**₃). As earlier the dense embeddings $E_1 \subset E_2 \subset H$ in Hilbert space H with estimates $\|u\|_H \leq \alpha_2 \|u\|_{E_2} \leq \alpha_1 \|u\|_{E_1}$ and condition that the mapping $X : E_1 \rightarrow H$ is bounded in $L(E_1, H)$ topology.

Everywhere below it is supposed that the system (2.1) allows the group symmetry

$$K_g F_j(p_1, p_2, x, y, \varepsilon) = F_j(L_g p_1, L_g p_2, L_g x, L_g y, \varepsilon), \quad j = 1, 2 \quad (3.1)$$

where $L_g(K_g)$ is the representation of the group G in $E_1(E_2)$ expanded on H . Here the bifurcation point (x_0, y_0) moves along its trajectory $(L_g x_0, L_g y_0)$. When G is a Lie group the conditions (**c**₁).–(**c**₃). are supposed to be realized. Similary to [1] the auxiliary constructions are introduced:

$$\begin{aligned} 1^0. K_g[\mathbf{B}_0 \pm i\alpha \mathbf{A}_0] &= K_g[\mathbf{B}_0(0, 0, x_0, y_0, 0) \pm i\alpha \mathbf{A}_0(0, 0, x_0, y_0, 0)] = \\ &= [\mathbf{B}_0(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, 0) \pm \alpha \mathbf{A}_0(0, 0, L_g x_0, L_g y_0)] L_g. \end{aligned} \quad (3.2)$$

In fact, from (3.1) and (2.1), (2.2) it follows

$$\begin{aligned} K_g F_{j p_k}'(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) &= F_{j p_k}'(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon), \\ K_g F_{j x}'(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) &= F_{j L_g x}'(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon) L_g(x - x_0), \\ K_g F_{j y}'(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) &= F_{j L_g y}'(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon) L_g(y - y_0), \end{aligned}$$

$$K_g R_j(x_0, y_0, x - x_0, y - y_0, p_1, p_2, \varepsilon) = R_j(L_g x_0, L_g y_0, L_g(x - x_0), L_g(y - y_0), L_g p_1, L_g p_2, \varepsilon)$$

and the required relations follows from the relevant matrix representation of the operators $\mathbf{B}_0$ and $\mathbf{A}_0$. Analogously the following relations can be required

$$\begin{aligned} 2^0. K_g \mathbf{A}_0(\varepsilon) &= K_g \mathbf{A}_0(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) = K_g \begin{pmatrix} -F_{2 p_1}'(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon), & F_{2 p_2}'(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) \\ F_{1 p_1}'(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon), & -F_{1 p_2}'(0, 0, x_0, y_0, \varepsilon) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -F_{2 p_1}'(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon), & F_{2 p_2}'(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon) \\ F_{1 p_1}'(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon), & -F_{1 p_2}'(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon) \end{pmatrix} = \mathbf{A}_0(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, \varepsilon) \\ 3^0. K_g \mathbf{R}(x_0, y_0, x - x_0, y - y_0, p_1, p_2, \varepsilon) &= \mathbf{R}(L_g x_0, L_g y_0, L_g(x - x_0), L_g(y - y_0), p_1, p_2, \varepsilon) \end{aligned}$$

Consequently

$$\begin{aligned} \varphi_k(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g \varphi_k(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} L_g u_{1k}^{(1)}(x_0, y_0) + i L_g u_{2k}^{(1)}(x_0, y_0) \\ L_g \tilde{u}_{1k}^{(1)}(x_0, y_0) + i L_g \tilde{u}_{2k}^{(1)}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ \gamma_k(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g^{*-1} \gamma_k(x_0, y_0), k = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (3.3)$$

and for the range of operators F'_{kx}, F'_{ky} one has

$$\begin{aligned} R(F'_{kx}(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, \lambda_0)) &= R(K_g F'_{kx}(0, 0, x_0, y_0, \lambda_0) L_g^{-1}) = K_g R(F'_{kx}(0, 0, x_0, y_0, \lambda_0)), \\ R(F'_{ky}(0, 0, L_g x_0, L_g y_0, \lambda_0)) &= R(K_g F'_{ky}(0, 0, x_0, y_0, \lambda_0) L_g^{-1}) = K_g R(F'_{ky}(0, 0, x_0, y_0, \lambda_0)). \end{aligned}$$

Then for the kernel of adjoint operator

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(\mathfrak{B}_0^*) &= \mathcal{N}(\mathfrak{B}_0^*(x_0, y_0)) = \mathcal{N}\left(\mathbf{B}_0^*(x_0, y_0) + \alpha \mathbf{A}_0^*(x_0, y_0) \frac{d}{d\tau}\right) = \\ &= \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} v_{1k}^{(1)} + i v_{2k}^{(1)} \\ \tilde{v}_{1k}^{(1)} + i \tilde{v}_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} e^{i\tau}, \begin{pmatrix} v_{1k}^{(1)} - i v_{2k}^{(1)} \\ \tilde{v}_{1k}^{(1)} - i \tilde{v}_{2k}^{(1)} \end{pmatrix} e^{-i\tau} \right\}_{k=1}^n \Rightarrow \\ \mathcal{N}(\mathbf{B}_0^*(L_g x_0, L_g y_0) + \alpha \mathbf{A}_0^*(L_g x_0, L_g y_0) \frac{d}{d\tau}) &= \text{span} \{K_g^{*-1} \psi_k, K_g^{*-1} \bar{\psi}_k\}_{k=1}^n \end{aligned}$$

Analogously to [2], [7] it can be proved that the elements of the ordered by increasing lengths GJChs of the operator-function $\mathfrak{B}_0 - \mu \mathfrak{A}_0 = \mathfrak{B}_0(x_0, y_0) - \mu \mathfrak{A}_0(x_0, y_0)$ and biorthogonal to them systems are transforming according with the formulae

$$\begin{aligned} \varphi_k^{(s)}(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g \varphi_k^{(s)}(x_0, y_0) = [L_g(u_{1k}^{(s)}(x_0, y_0) + i u_{2k}^{(s)}(x_0, y_0)), L_g(\tilde{u}_{1k}^{(s)}(x_0, y_0) + i \tilde{u}_{2k}^{(s)}(x_0, y_0))]^T, \\ \psi_k^{(s)}(L_g x_0, L_g y_0) &= K_g^{*-1} \psi_k^{(s)}(x_0, y_0) = \\ &= [K_g^{*-1}(v_{1k}^{(s)}(x_0, y_0) + i v_{2k}^{(s)}(x_0, y_0)), K_g^{*-1}(\tilde{v}_{1k}^{(s)}(x_0, y_0) + i \tilde{v}_{2k}^{(s)}(x_0, y_0))]^T, \\ \gamma_k^{(s)}(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g^{*-1} \gamma_k^{(s)}(x_0, y_0), \quad z_k^{(s)}(L_g x_0, L_g y_0) = K_g \gamma_k^{(s)}(x_0, y_0) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Lemma 3.1. *Introduced in Lemma 2.1 projectors $\mathbf{P}(x_0, y_0)$ and $\mathbf{Q}(x_0, y_0)$ satisfy intertwining properties*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g \mathbf{P}(x_0, y_0) L_g^{-1} \quad \text{or} \quad L_g \mathbf{P}(x_0, y_0) = \mathbf{P}(L_g x_0, L_g y_0) L_g \\ \mathbf{Q}(L_g x_0, L_g y_0) &= K_g \mathbf{P}(x_0, y_0) K_g^{-1} \quad \text{or} \quad K_g \mathbf{P}(x_0, y_0) = \mathbf{P}(L_g x_0, L_g y_0) K_g \end{aligned} \quad (3.5)$$

and generates the expansions (2.8) in direct sums. Moreover the bases in the zero-subspaces $\mathcal{N}(\mathfrak{B}_0)$ and $\mathcal{N}(\mathfrak{B}_0^*)$ and respectively in the root-subspaces $\tilde{\mathcal{H}}^{2K}(x_0, y_0)$ and $\tilde{\mathcal{H}}_{2K}(x_0, y_0)$ can be chosen so that the following relations would be satisfied:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}} &= \tilde{\mathcal{H}}^{2K}(L_g x_0, L_g y_0) \dot{+} \tilde{\mathcal{H}}^{\infty-2K}(L_g x_0, L_g y_0), \\ \tilde{\mathcal{H}}^{2K}(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g \tilde{\mathcal{H}}^{2K}(x_0, y_0), \quad \tilde{\mathcal{H}}^{\infty-2K}(L_g x_0, L_g y_0) = L_g \tilde{\mathcal{H}}^{\infty-2K}(x_0, y_0), \\ \tilde{\mathcal{H}} &= \tilde{\mathcal{H}}_{2K}(L_g x_0, L_g y_0) \dot{+} \tilde{\mathcal{H}}_{\infty-2K}(L_g x_0, L_g y_0), \\ \tilde{\mathcal{H}}_{2K}(L_g x_0, L_g y_0) &= L_g \tilde{\mathcal{H}}_{2K}(x_0, y_0), \quad \tilde{\mathcal{H}}_{\infty-2K}(L_g x_0, L_g y_0) = L_g \tilde{\mathcal{H}}_{\infty-2K}(x_0, y_0), \end{aligned} \quad (3.6)$$

The proof follows from the formulae (3.3), (3.4).

Theorem 3.1. (Group symmetry inheritance theorem.) *A. Lyapounov (2.11) and E. Schmidt (2.13) BEqRs inherit the group symmetry of the original system (2.1)*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(L_g x_0, L_g y_0, L_g \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) &= \mathbf{f}((L_g x_0, L_g y_0, \mathcal{V}(L_g x_0, L_g y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = \\ &= K_g \mathbf{f}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}(L_g x_0, L_g y_0, L_g \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) &= \mathbf{t}((L_g x_0, L_g y_0, \mathcal{V}(L_g x_0, L_g y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = \\ &= K_g \mathbf{t}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Proof is essentially uses three-canonicity of the Jordan sets of the linear by μ operator-function $\mathfrak{B}_0 - \mu\mathfrak{A}_0$. According to (3.6) write the equation (2.7) in the bifurcation point $(L_g x_0, L_g y_0)$ in projections on the root-subspaces

$$\begin{aligned} & [I - \mathbb{Q}(L_g x_0, L_g y_0)]\mathfrak{B}_0(L_g x_0, L_g y_0) = \\ & = [I - \mathbb{Q}(L_g x_0, L_g y_0)]\{\mu\mathfrak{A}_0(L_g x_0, L_g y_0)[\dots] + \mathcal{R}(L_g x_0, L_g y_0, \frac{d}{d\tau}[\dots], [\dots], \mu, \varepsilon)\}, \\ & 0 = \mathbb{Q}(L_g x_0, L_g y_0)\mathfrak{B}_0(L_g x_0, L_g y_0)\mathcal{V}(L_g x_0, L_g y_0, \xi, \bar{\xi}) - \\ & - \mathbb{Q}(L_g x_0, L_g y_0)\{\mu\mathfrak{A}_0(L_g x_0, L_g y_0) + \mathcal{R}(L_g x_0, L_g y_0, \frac{d}{d\tau}[\dots], [\dots], \mu, \varepsilon)\}, \\ & [\dots] = \tilde{\mathcal{U}} + \mathcal{V}(L_g x_0, L_g y_0, \xi, \bar{\xi}). \end{aligned}$$

For the restriction $\widehat{\mathfrak{B}}_0(x_0, y_0) = [I - \mathbb{Q}(x_0, y_0)]\mathfrak{B}_0(x_0, y_0)[I - \mathbb{P}(x_0, y_0)]$ of the operator $\mathfrak{B}_0(x_0, y_0)$ on the space $\tilde{\mathcal{H}}^{\infty-2K}(x_0, y_0)$ the following symmetry relation is realized

$$\begin{aligned} K_g \widehat{\mathfrak{B}}_0(x_0, y_0) &= K_g [I - \mathbb{Q}(x_0, y_0)]\mathfrak{B}_0(x_0, y_0)[I - \mathbb{P}(x_0, y_0)] \stackrel{(3.2), (3.5)}{=} \\ &\stackrel{(3.2), (3.5)}{=} [I - \mathbb{Q}(L_g x_0, L_g y_0)]\mathfrak{B}_0(L_g x_0, L_g y_0)L_g [I - \mathbb{P}(L_g x_0, L_g y_0)] \stackrel{(3.5)}{=} \\ &\stackrel{(3.5)}{=} [I - \mathbb{Q}(L_g x_0, L_g y_0)]\mathfrak{B}_0(L_g x_0, L_g y_0)[I - \mathbb{P}(L_g x_0, L_g y_0)]L_g = \\ &= \widehat{\mathfrak{B}}_0(L_g x_0, L_g y_0)L_g \end{aligned}$$

Then the application K_g^{-1} to the first equation of the system gives

$$\begin{aligned} & K_g^{-1}\widehat{\mathfrak{B}}_0(x_0, y_0)L_g^{-1}\tilde{\mathcal{U}} = \widehat{\mathfrak{B}}_0(x_0, y_0)L_g^{-1}\tilde{\mathcal{U}} = \\ & = K_g^{-1}[I - \mathbb{Q}(L_g x_0, L_g y_0)]\{\mu\mathfrak{A}_0(L_g x_0, L_g y_0)[\dots] + \mathcal{R}(L_g x_0, L_g y_0, \frac{d}{d\tau}[\dots], [\dots], \mu, \varepsilon)\} \stackrel{(3.5)}{=} \\ & \stackrel{(3.5)}{=} [I - \mathbb{Q}(L_g x_0, L_g y_0)]L_g^{-1}\{\mu\mathfrak{A}_0(L_g x_0, L_g y_0)[\dots] + \mathcal{R}(L_g x_0, L_g y_0, \frac{d}{d\tau}[\dots], [\dots], \mu, \varepsilon)\} \stackrel{(3.5)}{\Rightarrow} \\ & \stackrel{(3.5)}{\Rightarrow} \widehat{\mathfrak{B}}_0(x_0, y_0)L_g^{-1}\tilde{\mathcal{U}} = [I - \mathbb{Q}(x_0, y_0)]\{\mu\mathfrak{A}_0[L_g^{-1}\tilde{\mathcal{U}} + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}) + \\ & + \mathcal{R}(x_0, y_0, \frac{d}{d\tau}[L_g^{-1}\tilde{\mathcal{U}} + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi})], [L_g^{-1}\tilde{\mathcal{U}} + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi})], \mu, \varepsilon)\} \end{aligned}$$

According to implicit operators theorem we find the unique solution of the last equation in the form $L_g^{-1}\tilde{\mathcal{U}} = \mathcal{V}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi})\mu, \varepsilon)$, the substitution of which into the second equation of the system gives A.Lyapounov BEqR in the point $(L_g x_0, L_g y_0)$ and its group symmetry (2.11)

$$\begin{aligned} & \mathbf{f}(L_g x_0, L_g y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = \mathbb{Q}(L_g x_0, L_g y_0)\mathfrak{B}_0(L_g x_0, L_g y_0)\mathcal{V}(L_g x_0, L_g y_0, \xi, \bar{\xi}) - \\ & - \mathbb{Q}(L_g x_0, L_g y_0)\{\mu\mathfrak{A}_0(L_g x_0, L_g y_0)[L_g \mathcal{U} + \mathcal{V}(L_g x_0, L_g y_0, \xi, \bar{\xi})] + \\ & + \mathcal{R}(L_g x_0, L_g y_0, \frac{d}{d\tau}[\dots], [\dots], \mu, \varepsilon)\} \stackrel{(3.2), (3.5)}{=} K_g \mathbb{Q}(x_0, y_0)\mathfrak{B}_0(x_0, y_0)\mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}) - \\ & - K_g \mathbb{Q}(x_0, y_0)\{\mu\mathfrak{A}_0(x_0, y_0)[\mathcal{U}(x_0, y_0) + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi})] + \mathcal{R}(x_0, y_0, \frac{d}{d\tau}[\dots], [\dots], \mu, \varepsilon)\} = \\ & = K_g \mathbf{f}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}, \mu, \varepsilon) \end{aligned}$$

For the proof (3.8) write the equation (2.7) in the bifurcation point $(L_g x_0, L_g y_0)$ in the form of the system

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathfrak{B}}_0(L_g x_0, L_g y_0)L_g \mathcal{Y} = \mu\mathfrak{A}_0(L_g x_0, L_g y_0)L_g \mathcal{Y} + \mathcal{R}(L_g x_0, L_g y_0, \frac{d}{d\tau}L_g \mathcal{Y}, \mathcal{Y}, \mu, \varepsilon) + \\ & + \sum_{i=1}^n [\xi_i z_i^{(1)}(L_g x_0, L_g y_0) + \bar{\xi}_i \bar{z}_i^{(1)}(L_g x_0, L_g y_0)], \\ & \xi_i = \langle \langle L_g \mathcal{Y}, \gamma_j^{(1)}(L_g x_0, L_g y_0) \rangle \rangle, \quad \bar{\xi}_i = \langle \langle L_g \mathcal{Y}, \bar{\gamma}_j^{(1)}(L_g x_0, L_g y_0) \rangle \rangle. \end{aligned}$$

Setting $L_g \mathcal{Y} = \tilde{w} + L_g \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}) = \tilde{w} + \mathcal{V}(L_g x_0, L_g y_0, \xi, \bar{\xi})$ by virtue of group symmetry of the operators $\tilde{\mathfrak{B}}_0$ $K_g \tilde{\mathfrak{B}}_0(x_0, y_0)h = \tilde{\mathfrak{B}}_0(L_g x_0, L_g y_0)L_g h$, $\mathfrak{A}_0$, $K_g \mathfrak{A}_0(x_0, y_0)h = \mathfrak{A}_0(L_g x_0, L_g y_0)L_g h$, and $\mathcal{R}$, (see auxiliary constructions) one has $\tilde{\mathfrak{B}}_0(L_g x_0, L_g y_0)\tilde{w} = K_g \tilde{\mathfrak{B}}_0(x_0, y_0)L_g^{-1}\tilde{w} =$

$K_g\{\mu\mathfrak{A}_0(x_0, y_0)[L_g^{-1}\tilde{w} + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi})] + \mathcal{R}(x_0, y_0, \frac{d}{d\tau}[L_g^{-1}\tilde{w} + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi})], L_g^{-1}\tilde{w} + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon)\}$ whence it follows $L_g^{-1}\tilde{w} = w(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon)$ or $\tilde{w} = L_g w(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon)$. Then from the second equation of the system E.Schmidt BEqR (2.13) in the point $(L_g x_0, L_g y_0)$ and its group symmetry follows $\mathfrak{t}(L_g x_0, L_g y_0, L_g \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = \mathbf{P}(L_g x_0, L_g y_0)\tilde{w} \stackrel{(3.5)}{=} L_g \mathbf{P}(x_0, y_0)w(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = L_g \mathfrak{t}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon)$.

4. Basic Results

Theorem 4.1. (Implicit operators theorem under group symmetry conditions.)

Let under continuous group symmetry conditions (3.1) of the system (2.1) the requirements $(\mathbf{c}_1) - (\mathbf{c}_3)$ are realized, in the condition $(\mathbf{c}_2)$ $\kappa = n$ and $G_s(a), s < l$ is the normal divisor of $G_l(a)$ with the relevant ideal $T_{g(a)}^s$ of generators. For the operator-function $\mathfrak{B}_0 - \mu\mathfrak{A}_0$ with Fredholm operator $\mathfrak{B}_0$ always can be chosen the complete three-canonical GJS to elements of $\mathcal{N}(\mathfrak{B}_0)$. Then there exists the continuous function $\mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}, \mu, \varepsilon) = \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}) + \mathcal{U}(x_0, y_0, \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) : T_{g(a)}^{2n} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \times (-\delta, \delta) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}$, invariant with respect to the factor-group $G_\kappa = G_n = G_l/G_s$ on $T_{g(a)}^{2n} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$, such that for the nonlinear operator $\mathcal{F}$

$$\mathcal{F} \left(\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon \right) = 0, \quad \text{for } \mathcal{V}(x_0, y_0, \xi, \bar{\xi}) \in T_{g(a)}^{2n} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad |\varepsilon| < \delta, \quad (4.1)$$

where the nonlinear operator $\mathcal{F}$ is defined by the equation (2.7).

Corollary. Theorem 4.1 is true for semisimple bifurcation points, i.e. at the absence of GJS. Then here we have BEq.

Definition 4.1. [14] BEqR (2.11) (respect. (2.13)) is the BEqR of potential type **(A)** if in a neighborhood of the point $(x_0, y_0; 0)$ for the vector $\mathfrak{f}(x, y, v(x, y, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = (f_{11}, \bar{f}_{11}, \dots, f_{1p_1}, \bar{f}_{1p_1}, \dots, f_{n1}, \bar{f}_{n1}, \dots, f_{np_n}, \bar{f}_{np_n})$ the equality

$$\mathfrak{f}(x, y, \mathcal{V}(x, y, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = d \cdot \text{grad}_{x,y} U(x, y, \xi, \bar{\xi}, \mu, \varepsilon) \quad (4.2)$$

is satisfied and potential type **(B)**, when in in a neighborhood of the point $(x_0, y_0; 0)$

$$\mathfrak{f}(x, y, \mathcal{V}(x, y, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon) = \text{grad}_{x,y} U(x, y, \xi, \bar{\xi}, \mu, \varepsilon) \cdot d \quad (4.3)$$

is satisfied where d is an invertible operator. Then the functional $U(x, y, \xi, \bar{\xi}), \mu, \varepsilon$ is the potential of BEqR (2.11) (resp. (2.13)) and the operator $\mathfrak{f}$ (resp. $\mathfrak{t}$) is pseudogradient of the functional U .

In the case of BEqR (2.11) or (2.13) potentiality type **(A)** in previous our articles [15], [16], [2] the necessary and sufficient condition of the L_g -invariance of the potential U is established. This is the equality $L_g^* d^{-1} K_g = d^{-1}$ for the A.Lyapounov BEqR (2.11) and $L_g^* d^{-1} L_g = d^{-1}$ for the E.Schmidt BEqR (2.13). Also it is proved that the pseudogradient f (resp. t) of the L_g -invariant functional U is (L_g, K_g) -(resp. (L_g, L_g) -) equivariant in the sense (2.11) (resp. (2.13)) together with cosymmetric identities for the BEqR left-hand-sides.

In the same manner the respective results for BEqRs of the type **(B)** can be proved. These are the equality $K_g^{-1} = L_g^*$ (resp. $L_g^{-1} = L_g^*$) for the BEqR (2.11) (BEqR (2.13)) and the relevant equivariance results with cosymmetric identities.

Theorem 4.2. (BEqR reduction.) Let in suppositions $(\mathbf{c}_1) - (\mathbf{c}_3)$ A. Lyapunov BEqR (E. Schmidt BEqR) is potential type $(\mathbf{A})$ or $(\mathbf{B})$, its potential $U(x, y, \xi, \bar{\xi}, \mu, \varepsilon)$ is invariant of the representation $L_{g(a)}$ of the group $G_l(a)$ and belongs to the class C^2 in some neighborhood of the bifurcation point $(x_0, y_0; 0)$, s – the dimension of stationary subgroup of the element (x_0, y_0) and $\kappa = l - s > 0$. Then:

1. if $\kappa = n$, then for all $(\xi(\varepsilon), \bar{\xi}(\varepsilon), \mu, \varepsilon)$ or $(\mathcal{V}(x_0, y_0, \xi(\varepsilon), \bar{\xi}(\varepsilon), \mu, \varepsilon))$ in some neighborhood of zero in Ξ^{2n} BEqR (2.11) (respect. (2.12)) is identically fulfilled.
2. if $\kappa < n$ and $n \geq 2$, then the partial reduction of BEqR takes place: at the accepted in the condition $(\mathbf{c}_2)$ agreement on the basic elements enumeration in $\tilde{\mathcal{H}}^{2K}$ the first $K_\kappa = p_1 + \dots + p_\kappa$ equations are linear combinations of the others $p_{\kappa+1} + \dots + p_n$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. B. V. Loginov, I. V. Konopleva, L. V. Mironova, "Stationary bifurcation problems with Schmidt's spectrum in the linearization under group symmetry conditions", *Journal of Middle-Volga Math. Soc.*, **13**:3 (2011), 15–30.
2. I. V. Konopleva, B. V. Loginov, Yu. B. Rousak, "Symmetry and potentiality of branching equations in the root subspaces in implicitly given stationary and dynamical bifurcation problems", *Izv. VUZ, Severo-Kavkaz. Region. Nat. Sci.*, 2009, Special Issue "Actual Problems of Mathematical Hydrodynamics", 115–124.
3. M. M. Vainberg, V. A. Trenogin, *Theory of Branching of Solutions of Nonlinear Equations*, Nauka, Moscow, 1969.
4. B. V. Loginov, *Theory of Branching of Solutions to Nonlinear Equations under Group Symmetry Invariance*, Fan, Akad. Sci. Uzbek SSR, Tashkent, 1979.
5. B. V. Loginov, "Branching theory of solutions to nonlinear equations and group symmetry", *Vestnik of Samara University*, 1998, № 4(10), 15–75.
6. N. Sidorov, B. Loginov, A. Sinitsyn, M. Falaleev, *Lyapunov-Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications*, MIA. T. 550, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2002.
7. B. V. Loginov, I. V. Konopleva, Yu. B. Rousak, "Implicit Operator Theorems under Group Symmetry Conditions", *Doklady Mathematics*, **84**:2 (2011), 607–612.
8. N. I. Makarenko, "On solutions branching of invariant variational problems", *Doklady Mathematics*, **48**:1 (1996), 369–371.
9. N. I. Makarenko, "Symmetry and cosymmetry of variational problems in the waves theory", *Applications of Symmetry and Cosymmetry to the Theory of Bifurcations and Phase Transitions*, Proc. Int. Workshop, Rostov. State Univ., Sochi, 2001, 109–120.
10. V. A. Trenogin, "Periodic solutions and solutions of transition type to abstract reaction-diffusion equations", *Questions of Qualitative Theory of Differential Equations*, Nauka, Novosibirsk. Siberian Branch Acad. Sci. USSR, 1988, 134–140.
11. B. V. Loginov, "Determination of the branching equation by its group symmetry - Andronov- Hopf bifurcation", *Nonlinear Analysis. TMA*, **28**:12 (1998), 2033–2047.

12. B. V. Loginov, Yu. B. Rousak, "Generalized Jordan structure in branching theory", *Right and Inverse Problems for Partial Differential Equations*, ред. М. S. Salakhitdinov, Fan, Akad. Sci. UzSSR, Tashkent, 1978, 133–148..
13. Yu. B. Rousak, "Some relations between Jordan sets of analytic operator-function and adjoint to it", *Izvestia Acad. Sci. Uzbek SSR. Ser. fiz.-mat.*, 1978, № 2, 15–19.
14. B. V. Loginov, I. V. Konopleva, Yu. B. Rousak, "Symmetry and potentiality in general problem of branching theory", *Izv. Vuzov. Mathematics*, 2006, № 4(527), 30–40.
15. I. V. Konopleva, B. V. Loginov, "Bifurcation, Symmetry and Cosymmetry in Differential Equations Nonresolved with Respect to Derivative with Variational Branching Equations", *Doklady Mathematics*, **80**:1 (2009), 541–546.
16. L. R. Kim-Tyan, B. V. Loginov, "Potentialyty conditions to branching equations and branching equations in the root-subspaces in stationary and dynamic bifurcation", Proc. Int. Conf. "Herzen's Chtenya 2012" (Sankt-Peterburg, Pedagogical Univ., 2012), **67** (2012), 64–70.
17. B. V. Loginov, O. V. Makeev, I. V. Konopleva, Yu. B. Rousak, "Bifurcation and symmetry in differential equations non-resolved with respect to derivative", *ROMAI Journal, Pitești Univ. Romania*, **3**:1 (2007), 153–173.

Dynamic bifurcation problems with E.Schmidt spectrum in the linearization under group symmetry conditions

© B.V. Loginov⁴; I.V. Konopleva⁵; L.V. Mironova⁶

Abstract. Results of the articles [1], [2] for stationary problems of branching theory with E. Schmidt spectrum in the linearization are transforming on dynamic bifurcation problems on E. Schmidt spectrum. On the base of general theorem on the group symmetry theorem on the group symmetry of nonlinear problems inheritance by the relevant branching equations and branching equations in the root-subspaces (BEqRs), moving along bifurcation point trajectory implicit operators theorem under group symmetry conditions and theorem on BEqRs reduction by the number of equations in the case of variational BEqRs are proved. Terminology and notations of the works [3]– [6] are used.

Key Words: Dynamic bifurcation problems, Poincarè-Andronov-Hopf bifurcation; E. Schmidt spectrum, group symmetry, G -invariant implicit operator theorem, variational type branching equations in the root-subspaces.

⁴ Professor, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; loginov@ulstu.ru

⁵ Docent, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; i.konopleva@ulstu.ru

⁶ Assistant, Ulyanovsk Higher Civil Aviation School, Ulyanovsk;

УДК 519.624.8

Непрерывные методы регуляризации первого порядка для смешанных вариационных неравенств

© И.П. Рязанцева¹

Аннотация. Для смешанных вариационных неравенств в гильбертовом пространстве с монотонным оператором и собственным выпуклым полунепрерывным снизу функционалом при приближенном задании данных построены непрерывные методы регуляризации первого порядка по оператору и по функционалу, получены достаточные условия их сходимости к нормальному решению исходной задачи.

Ключевые слова: смешанное вариационное неравенство, непрерывный метод, монотонный оператор, выпуклый функционал.

1. Основные предположения. Постановка задачи.

Пусть H – вещественное гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ – монотонный ограниченный хеминепрерывный оператор, $\varphi : H \rightarrow R^1$ – собственный выпуклый полунепрерывный снизу функционал, элемент $f \in H$, (x, y) – скалярное произведение элементов x и y из H . Неравенство вида

$$(Ax - f, x - y) + \varphi(x) - \varphi(y) \leq 0, \quad x \in H \quad \forall y \in H \quad (1.1)$$

называют смешанным вариационным неравенством.

Если

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \frac{(Ax - f, x - x_0) + \varphi(x)}{\|x\|} = +\infty, \quad x_0 \in H, \quad \varphi(x_0) < \infty, \quad (1.2)$$

то (1.1) разрешимо (см. [1], с.265). Доказательство этого утверждения основано на переходе от (1.1) к вариационному неравенству

$$(\tilde{A}\tilde{x} - \tilde{f}, \tilde{x} - \tilde{y})_{\tilde{H}} \leq 0, \quad \tilde{x} \in \tilde{\Omega} \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{\Omega}, \quad (1.3)$$

здесь $\tilde{A} : \tilde{H} \rightarrow \tilde{H}$, $\tilde{A} = \{A, 0\}$, $\tilde{H} = H \times R^1$, $\tilde{f} = \{f, -1\}$, $\tilde{\Omega} \subset \tilde{H}$, $\tilde{\Omega} = \text{epi } \varphi = \{\{u, \lambda\} \mid \varphi(u) \leq \lambda, u \in H, \lambda \in R^1\}$ – надграфик φ на H , $\tilde{x} = \{x, r\} \in \tilde{\Omega}$, $\tilde{y} = \{y, \xi\} \in \tilde{\Omega}$, т.е. $\varphi(x) \leq r$, $\varphi(y) \leq \xi$, при этом

$$\|\tilde{x}\|_{\tilde{H}} = (\|x\|_H^2 + r^2)^{1/2}, \quad (\tilde{x}, \tilde{y})_{\tilde{H}} = (x, y)_H + r\xi.$$

Отметим, что $\tilde{\Omega}$ есть выпуклое замкнутое множество в $\tilde{H}$ (см. [2], с.19, с.22).

Пусть (1.1) имеет непустое множество решений N . Выпуклость и замкнутость N отмечена в [3] (см. также [4], с.254). Далее x^* – нормальное решение (1.1). Нас будут интересовать методы решения задачи (1.1). В предположении монотонности A и выпуклости φ установить корректность задачи (1.1) не удастся, поэтому будем строить для нее методы регуляризации.

¹ профессор кафедры прикладной математики, Нижегородский государственный технический университет им. Р. Е. Алексеева, Нижний Новгород; lryazantseva@aplmath.ru

2. Операторный метод регуляризации

Рассмотрим для (1.3) известный операторный метод регуляризации

$$(\tilde{A}\tilde{x}_\alpha + \alpha\tilde{E}\tilde{x}_\alpha - \tilde{f}, \tilde{x}_\alpha - \tilde{y})_{\tilde{H}} \leq 0, \quad \tilde{x}_\alpha \in \tilde{\Omega} \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{\Omega}, \quad (2.1)$$

здесь $\tilde{E} = \{E, 0\}$, $E: H \rightarrow H$ – единичный оператор в H , $\tilde{x}_\alpha = \{x_\alpha, r_\alpha\}$, $\tilde{y} = \{y, \xi\}$, $\alpha > 0$. Расписав в (2.1) скалярное произведение в $\tilde{H}$, имеем

$$(Ax_\alpha + \alpha x_\alpha - f, x_\alpha - y) + r - \xi \leq 0.$$

Используя рассуждения из [1], с.266, установим эквивалентность последнего неравенства следующему смешанному вариационному неравенству

$$(Ax_\alpha + \alpha x_\alpha - f, x_\alpha - y) + \varphi(x_\alpha) - \varphi(y) \leq 0, \quad x_\alpha \in H \quad \forall y \in H. \quad (2.2)$$

Предположим, что функционал φ обладает свойством

$$\varphi(x) \geq -c\|x\|^\kappa, \quad c > 0, \quad \kappa \in [0, 2), \quad \|x\| \geq R_0 > 0. \quad (2.3)$$

Тогда для x из H с учетом монотонности A имеем

$$\begin{aligned} (Ax + \alpha x - f, x - x_0) + \varphi(x) &\geq \|x\|[\alpha\|x\| - \alpha\|x_0\| - \|Ax_0\| - \|f\|] - \\ - \|Ax_0\| \|x_0\| - \|f\| \|x_0\| - c\|x\|^\kappa, \quad x_0 \in H, \quad \varphi(x_0) < \infty, \quad \|x\| \geq R_0. \end{aligned}$$

Отсюда делаем вывод о том, что для смешанного вариационного неравенства (2.2) выполнено условие типа (1.2). Следовательно, решение (2.2) существует. Однозначная разрешимость (2.2) доказана в [3] и [4].

Нетрудно проверить, что оператор $\tilde{A}^\alpha = \tilde{A} + \alpha\tilde{E}$ удовлетворяет неравенству

$$(\tilde{A}^\alpha \tilde{x} - \tilde{A}^\alpha \tilde{y}, \tilde{x} - \tilde{y})_{\tilde{H}} \geq \alpha\|x - y\|_H^2 \quad (2.4)$$

при любых $\tilde{x} = \{x, r\}$ и $\tilde{y} = \{y, \xi\}$ из $\tilde{H}$. Таким образом, имеем более слабое свойство, чем требуется для сильной сходимости метода (2.1) в $\tilde{H}$ к решению (1.3) (см., например, [4], глава 2). Однако, полагая в (2.1) $\tilde{y} = \tilde{x}$, а в (3) – $\tilde{y} = \tilde{x}_\alpha$, где $\tilde{x} = \{x, r\}$ и $\tilde{x}_\alpha = \{x_\alpha, r_\alpha\}$ – решения (1.3) и (2.1) соответственно, и складывая полученные результаты, имеем $\alpha(\tilde{E}\tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha - \tilde{x})_{\tilde{H}} \leq 0$. Отсюда известным способом (см., например, [4]) выводим сильную сходимость в H элементов x_α к x^* при $\alpha \rightarrow 0$. Кроме того, полагая в (2.2) $y = x^*$ и переходя затем к пределу при $\alpha \rightarrow 0$, приходим к неравенству $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \varphi(x_\alpha) \leq \varphi(x^*)$, что с учетом полунепрерывности снизу функционала φ дает сходимость $\varphi(x_\alpha)$ к $\varphi(x^*)$ при $\alpha \rightarrow 0$. Следовательно, x_α сходится к x^* при $\alpha \rightarrow 0$ и по функционалу φ . В [3] сходимость x_α к x^* доказана без перехода от смешанных вариационных неравенств (1.1) и (2.2) к вариационным неравенствам (1.3) и (2.1) соответственно.

Применим к смешанному вариационному неравенству (1.1) метод сглаживающего функционала А.Н.Тихонова [5],[6], т.е. заменим в (1.1) функционал $\varphi(z)$ на функционал $\varphi(z) + \alpha\|z\|^2$ ($\alpha > 0$) и придем к неравенству следующего вида

$$(Az_\alpha - f, z_\alpha - y) + \varphi(z_\alpha) + \alpha\|z_\alpha\|^2 - \varphi(y) - \alpha\|z\|^2 \leq 0, \quad z_\alpha \in H \quad \forall y \in H. \quad (2.5)$$

С учетом монотонности A и (2.3) при $\|x\| \geq R_0$ имеем

$$(Ax - f, x - x_0) + \varphi(x) + \alpha\|x\|^2 \geq \alpha\|x\|^2 - c\|x\|^\kappa - (\|Ax_0\| + \|f\|)(\|x\| + \|x_0\|).$$

Таким образом, в наших условиях разрешимость (2.5) обеспечена. Докажем единственность решения (2.5). Пусть наряду с z_α элемент y_α также является решением (2.5), т.е. верно неравенство

$$(Ay_\alpha - f, y_\alpha - y) + \varphi(y_\alpha) + \alpha\|y_\alpha\|^2 - \varphi(y) - \alpha\|y\|^2 \leq 0, \quad y_\alpha \in H \quad \forall y \in H. \quad (2.6)$$

Положив в (2.5) $y = tz_\alpha + (1-t)y_\alpha$, $t \in (0, 1)$ и воспользовавшись монотонностью оператора A , выпуклостью $\varphi(x)$ и сильной выпуклостью функционала $\|x\|^2$ на H (см. [7], с.182), получим

$$(Ay_\alpha - f, z_\alpha - y_\alpha) + \varphi(z_\alpha) + \alpha\|z_\alpha\|^2 - \varphi(y_\alpha) - \alpha\|y_\alpha\|^2 + t\|z_\alpha - y_\alpha\|^2 \leq 0.$$

Приняв во внимание (2.6) при $y = z_\alpha$, из последнего неравенства имеем $\|z_\alpha - y_\alpha\| \leq 0$. Единственность решения (2.5) доказана.

Полагая в (2.5) $y = x \in N$, а в (1.1) – $y = z_\alpha$ и складывая результаты, получаем неравенство $\|z_\alpha\| \leq \|x\|$ при всех $x \in N$, которое, как известно, позволяет установить сходимость z_α к x^* при $\alpha \rightarrow 0$ (см. [4]).

Отметим, что (2.5) эквивалентно неравенству (1.3) с заменой множества $\tilde{\Omega}$ на множество $\tilde{\Omega}^\alpha$, совпадающее с надграфиком функционала $\varphi(z) + \alpha\|z\|^2$.

Сформулируем полученные результаты.

Т е о р е м а 2.1. Пусть H – вещественное гильбертово пространство, $A : H \rightarrow H$ – монотонный ограниченный хеминепрерывный оператор, $\varphi : H \rightarrow R^1$ – собственный выпуклый полунепрерывный снизу функционал, удовлетворяющий условию (2.3), смешанное вариационное неравенство (1.1) имеет непустое множество решений. Тогда регуляризованные задачи (2.2) и (2.5) имеют единственные решения x_α и z_α соответственно, и $x_\alpha \rightarrow x^*$, $z_\alpha \rightarrow x^*$ при $\alpha \rightarrow 0$, где x^* – нормальное решение (1.1).

Метод (2.2) для смешанного вариационного неравенства (1.1) будем называть методом регуляризации по оператору, а (2.5) – методом регуляризации по функционалу.

Далее считаем, что условия теоремы 1 выполнены.

3. Непрерывные методы регуляризации

Применим к (1.3) непрерывный метод регуляризации первого порядка из [8]

$$\tilde{z}'(t) + \tilde{z}(t) = Pr_{\tilde{\Omega}}(\tilde{z}(t) - \gamma(t)[\tilde{A}\tilde{z}(t) + \alpha(t)\tilde{E}\tilde{z}(t) - \tilde{f}]), \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0 = \{z_0, r_0\}, \quad (3.1)$$

где $\tilde{z}(t) = \{z(t), r(t)\} \in \tilde{H}$, $\gamma(t)$ и $\alpha(t)$ – положительные непрерывные функции, $t \geq t_0$. Если оператор A удовлетворяет условию Липшица, то задача Коши (3.1) имеет единственное решение класса $C^1[t_0, +\infty)$ (см. [9], п. 33.4). Перейдем от (3.1) к эквивалентному эволюционному вариационному неравенству (см. [7], с.189)

$$(\tilde{z}'(t) + \gamma(t)[\tilde{A}\tilde{z}(t) + \alpha(t)\tilde{E}\tilde{z}(t) - \tilde{f}], \tilde{z}(t) - \tilde{y})_{\tilde{H}} \leq 0 \quad \forall \tilde{y} \in \tilde{H}, \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0. \quad (3.2)$$

Нетрудно проверить, что для $\tilde{u}(t) \notin \tilde{\Omega}$ элемент $Pr_{\tilde{\Omega}}\tilde{u}(t) = \tilde{w} = \{w, \varphi(w)\}$, $w \in H$. Следовательно, если элемент $\tilde{z}(t) - \gamma(t)[\tilde{A}\tilde{z}(t) + \alpha(t)\tilde{E}\tilde{z}(t) - \tilde{f}] \notin \tilde{\Omega}$, то $\tilde{z}'(t) + \tilde{z}(t) = \{z'(t) + z(t), \varphi(z'(t) + z(t))\}$. Значит, расписав в (3.2) скалярное произведение из $\tilde{H}$, придем к эволюционному вариационному неравенству, в котором производная $z'(t)$ входит и под

знак функционала φ . При этом исключить функцию $r(t)$ в полученном неравенстве не удастся (сравни с переходом от (1.3) и (2.1) к (1.1) и (2.2) соответственно).

Если для решения (1.3) вместо (3.1) использовать непрерывный метод из [10]

$$\tilde{z}(t) = Pr_{\tilde{\Omega}}(\tilde{z}(t) - \tilde{z}'(t) - \gamma(t)[\tilde{A}\tilde{z}(t) + \alpha(t)\tilde{E}\tilde{z}(t) - \tilde{f}]), \quad \tilde{z}(t_0) = \tilde{z}_0,$$

то при $\tilde{z}(t) - \tilde{z}'(t) - \gamma(t)[\tilde{A}\tilde{z}(t) + \alpha(t)\tilde{E}\tilde{z}(t) - \tilde{f}] \notin \tilde{\Omega}$ имеем $\tilde{z}(t) = \{z(t), \varphi(z(t))\}$. Значит, для существования $\tilde{z}'(t)$ требуется дифференцируемость функционала φ , в то время как в простом приложении смешанных вариационных неравенств из [1], с.265 функционал φ этим свойством не обладает. Кроме того, при доказательстве сходимости рассмотренных выше непрерывных методов регуляризации возникают проблемы из-за отсутствия у оператора $\tilde{A}^\alpha$ свойства сильной монотонности на $\tilde{H}$ (см. (2.4)), которые легко преодолеваются при доказательстве сходимости операторного метода регуляризации. Подобные выводы можно сделать и для соответствующих непрерывных методов, использующих регуляризацию (1.1) по функционалу.

Таким образом, непосредственное применение известных непрерывных методов регуляризации для решения вариационного неравенства (1.3) не является эффективным. Поэтому далее при построении непрерывных методов для (1.1) используем иной подход.

Пусть в условиях теоремы 1 данные задачи (1.1) возмущены, а именно, вместо A , f и φ при всех $t \geq t_0 \geq 0$ известны семейства $\{A(t)\}$, $\{f(t)\}$ и $\{\varphi(t)\}$ такие, что

а) $A(t) : H \rightarrow H$ – монотонные хеминепрерывные операторы,

$$\|A(t)x - Ax\| \leq h(t)g(\|x\|) \quad \forall x \in H;$$

б) $f(t) \in H$, $\|f(t) - f\| \leq \delta(t)$;

в) $\varphi(t) : H \rightarrow R^1$ – собственные выпуклые полунепрерывные снизу функционалы,

$$|\varphi(t)(x) - \varphi(x)| \leq \sigma(t)q(\|x\|) \quad \forall x \in H,$$

здесь $g(s)$ и $q(s)$ – функции, переводящие ограниченное множество в ограниченное, $s \geq 0$, $h(t)$, $\delta(t)$ и $\sigma(t)$ – бесконечно малые при $t \rightarrow +\infty$.

Заметим, что из предположения а) следует ограниченность семейства операторов $\{A(t)\}$ при $t \geq t_0$.

Построим непрерывный метод регуляризации по оператору первого порядка следующего вида

$$\begin{aligned} (u'(t), u(t) - y) + \gamma(t)[(A(t)u(t)) + \alpha(t)u(t) - f(t), u(t) - y] + \\ + \varphi(t)(u(t)) - \varphi(t)(y) \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad u(t) \in H, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$u(t_0) = u_0 \in H, \quad (3.4)$$

где $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ – положительные дифференцируемые функции, $t \geq t_0 \geq 0$, причем $\alpha(t)$ – выпуклая убывающая функция,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \alpha(t) = 0. \quad (3.5)$$

Наряду с задачей (3.3), (3.4) при каждом $\tau \geq t_0$ рассмотрим задачу с замороженным коэффициентом $\alpha(\tau)$ и точными данными

$$\begin{aligned} \left(\frac{dv(t, \tau)}{dt}, v(t, \tau) - y \right) + \gamma(t)[(Av(t, \tau)) + \alpha(\tau)v(t, \tau) - f, v(t, \tau) - y] + \\ + \varphi(v(t, \tau)) - \varphi(y) \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad v(t, \tau) \in H, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$v(t_0, \tau) = u_0. \quad (3.7)$$

Пусть задачи (3.3), (3.4) и (3.6), (3.7) имеют единственные решения класса $C^1[t_0, +\infty)$, причем решение $u(t)$ ограничено на $[t_0, +\infty)$.

Условие (3.5) и теорема 1 гарантируют сходимость решения $x_\alpha(\tau)$ смешанного вариационного неравенства

$$(Ax_\alpha(\tau) + \alpha(\tau)x_\alpha(\tau) - f, x_\alpha(\tau) - y) + \varphi(x_\alpha(\tau)) - \varphi(y) \leq 0, \quad x_\alpha(\tau) \in H \quad \forall y \in H \quad (3.8)$$

к нормальному решению x^* неравенства (1.1) при $\tau \rightarrow \infty$.

Положим в (3.6) $y = x_\alpha(\tau)$, а в (3.8), умноженном на $\gamma(t)$, примем y равным $v(t, \tau)$, и сложив полученные результаты, с учетом монотонности оператора A придем к неравенству

$$\frac{d\|v(t, \tau) - x_\alpha(\tau)\|^2}{dt} \leq -2\gamma(t)\alpha(\tau)\|v(t, \tau) - x_\alpha(\tau)\|^2, \quad (3.9)$$

причем $\|v(t_0, \tau) - x_\alpha(\tau)\|^2 = \|u_0 - x_\alpha(\tau)\|^2 \leq a_1$ при всех $\tau \geq t_0$, здесь $a_1 > 0$. Следовательно, (см. [6], с.264)

$$\|v(t, \tau) - x_\alpha(\tau)\|^2 \leq a_1 \exp(-2\alpha(\tau) \int_{t_0}^t \gamma(s) ds). \quad (3.10)$$

Из сходимости $x_\alpha(\tau) \rightarrow x^*$ при $\tau \rightarrow +\infty$ и из (3.10) имеем ограниченность в совокупности величин $\|v(t, \tau)\|$ при $t, \tau \geq t_0$.

Пусть

$$\int_{t_0}^t \gamma(s) ds = +\infty; \quad (3.11)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\alpha'(t)}{\gamma(t)\alpha^2(t)} = 0. \quad (3.12)$$

Положив в (3.10) $t = \tau$ и применив правило Лопиталя под знаком экспоненты, в силу (3.11) и (3.12) установим сходимость $\|v(\tau, \tau) - x_\alpha(\tau)\|$ к нулю при $\tau \rightarrow +\infty$.

Полагая в (3.3) $y = v(t, \tau)$, а в (3.6) — $y = u(t)$, после сложения результатов с учетом предположений а) — с) имеем (см. [6], с.266)

$$\begin{aligned} \frac{d\|u(t) - v(t, \tau)\|^2}{dt} + 2\gamma(t)\alpha(t)\|u(t) - v(t, \tau)\|^2 \leq \\ \leq a_2\gamma(t)[h(t) + \delta(t) + \alpha'(t)(t - \tau)]\|u(t) - v(t, \tau)\| + \\ + 2\gamma(t)\sigma(t)[q(\|u(t)\|) + q(\|v(t, \tau)\|)], \quad t \leq \tau, \quad a_2 > 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Сделаем следующие предположения:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta(t) + h(t) + \sigma(t)}{\alpha(t)} = 0; \quad (3.14)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\gamma(t)\alpha'(t)}{\gamma^2(t)\alpha^2(t) + (\gamma(t)\alpha(t))'} = 0; \quad (3.15)$$

$$\int_{t_0}^{+\infty} \alpha(t)\gamma(t)dt = +\infty. \quad (3.16)$$

Тогда из (3.13), используя лемму из [6], с.264 и правило Лопиталя (см. [11]), выводим сходимость $u(\tau) - v(\tau, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$. Таким образом, доказана стабилизация $u(t)$ к x^* при $t \rightarrow +\infty$.

Отметим, что предположения (3.5) и (3.16) позволяют опустить условие (3.11).

Теперь построим непрерывный метод регуляризации первого порядка на основе метода регуляризации по функционалу. Запишем основную и вспомогательные задачи

$$\begin{aligned} (\tilde{u}'(t), \tilde{u}(t) - y) &+ \gamma(t)[(A(t)\tilde{u}(t)) - f(t), \tilde{u}(t) - y] + \varphi(t)(\tilde{u}(t)) + \alpha(t)\|\tilde{u}(t)\|^2 - \\ &- \varphi(t)(y) - \alpha(t)\|y\|^2] \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad \tilde{u}(t) \in H, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\tilde{u}(t_0) = u_0 \in H, \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tilde{v}(t, \tau)}{dt}, \tilde{v}(t, \tau) - y \right) &+ \gamma(t)[(A\tilde{v}(t, \tau) - f, \tilde{v}(t, \tau) - y) + \varphi(\tilde{v}(t, \tau)) + \\ &+ \alpha(\tau)\|\tilde{v}(t, \tau)\|^2 - \varphi(y) - \alpha(\tau)\|y\|^2] \leq 0 \quad \forall y \in H, \quad \tilde{v}(t, \tau) \in H, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\tilde{v}(t_0, \tau) = u_0 \quad \forall \tau \geq t_0, \quad (3.20)$$

однозначная разрешимость которых в $C^1[t_0, +\infty)$ и ограниченность $\tilde{u}(t)$ на $[t_0, +\infty)$ предполагаются.

Приняв в (3.19) $y = \xi\tilde{v}(t, \tau) + (1 - \xi)z_\alpha(\tau)$, где $\xi \in (0, 1)$, $z_\alpha(\tau)$ – решение регуляризованного смешанного вариационного неравенства

$$\begin{aligned} (Az_\alpha(\tau) - f, z_\alpha(\tau) - y) &+ \varphi(z_\alpha(\tau)) + \alpha(\tau)\|z_\alpha(\tau)\|^2 - \varphi(y) - \\ &- \alpha(\tau)\|y\|^2 \leq 0, \quad z_\alpha(\tau) \in H \quad \forall y \in H, \end{aligned} \quad (3.21)$$

приходим к неравенству

$$\begin{aligned} (1 - \xi) \left(\frac{d\tilde{v}(t, \tau)}{dt}, \tilde{v}(t, \tau) - z_\alpha(\tau) \right) &+ \gamma(t)(1 - \xi)[(A\tilde{v}(t, \tau) - f, \tilde{v}(t, \tau) - z_\alpha(\tau)) + \\ &+ \varphi(\tilde{v}(t, \tau)) + \alpha(\tau)\|\tilde{v}(t, \tau)\|^2 - \varphi(\xi\tilde{v}(t, \tau) + \\ &+ (1 - \xi)z_\alpha(\tau)) - \alpha(\tau)\|\xi\tilde{v}(t, \tau) + (1 - \xi)z_\alpha(\tau)\|^2] \leq 0. \end{aligned}$$

Учитывая здесь выпуклость $\varphi(x)$ и сильную выпуклость функционала $\|x\|^2$, после сокращения на $1 - \xi$ получаем неравенство

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\tilde{v}(t, \tau)}{dt}, \tilde{v}(t, \tau) - z_\alpha(\tau) \right) &+ \gamma(t)[(A\tilde{v}(t, \tau) - f, \tilde{v}(t, \tau) - z_\alpha(\tau)) + \\ &+ \varphi(\tilde{v}(t, \tau)) - \varphi(z_\alpha(\tau)) + \alpha(\tau)(\|\tilde{v}(t, \tau)\|^2 - \|z_\alpha(\tau)\|^2) + \\ &+ \alpha(\tau)\xi\|\tilde{v}(t, \tau) - z_\alpha(\tau)\|^2] \leq 0. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Из (3.21) при $y = \tilde{v}(t, \tau)$ имеем

$$(Az_\alpha(\tau) - f, z_\alpha(\tau) - \tilde{v}(t, \tau)) + \varphi(z_\alpha(\tau)) + \alpha(\tau)\|z_\alpha(\tau)\|^2 - [\varphi(\tilde{v}(t, \tau)) + \alpha(\tau)\|\tilde{v}(t, \tau)\|^2] \leq 0.$$

Следовательно, приняв во внимание монотонность оператора A , из (31) выводим дифференциальное неравенство вида (3.9) для $\|\tilde{v}(t, \tau) - z_\alpha(\tau)\|$. Таким образом, в наших условиях доказана сходимость к нулю $\|\tilde{v}(\tau, \tau) - z_\alpha(\tau)\|$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Установим, что

$\|\tilde{v}(\tau, \tau) - \tilde{u}(\tau)\| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow +\infty$. Для этого примем в (3.17) y равным $\xi\tilde{u}(t) + (1 - \xi)\tilde{v}(t, \tau)$, $\xi \in (0, 1)$ и подобно (3.22) докажем справедливость неравенства

$$\begin{aligned} & (\tilde{u}'(t), \tilde{u}(t) - \tilde{v}(t, \tau)) + \gamma(t)[(A(t)\tilde{u}(t) - f(t), \tilde{u}(t) - \tilde{v}(t, \tau)) + \varphi(t)(\tilde{u}(t)) - \\ & - \varphi(t)(\tilde{v}(t, \tau)) + \alpha(t)(\|\tilde{u}(t)\|^2 - \|\tilde{v}(t, \tau)\|^2) + \alpha(t)\|\tilde{u}(t) - \tilde{v}(t, \tau)\|^2] \leq 0. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Кроме того, из (3.19) при $y = \tilde{u}(t)$ имеем

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d\tilde{v}(t, \tau)}{dt}, \tilde{v}(t, \tau) - \tilde{u}(t) \right) + \gamma(t)[(A\tilde{v}(t, \tau) - f, \tilde{v}(t, \tau) - \tilde{u}(t)) + \varphi(\tilde{v}(t, \tau)) + \\ & + \alpha(\tau)\|\tilde{v}(t, \tau)\|^2 - \varphi(\tilde{u}(t)) - \alpha(\tau)\|\tilde{u}(t)\|^2] \leq 0. \end{aligned}$$

Прибавляя к (3.23) последнее неравенство, приходим к неравенству (сравни с (3.13))

$$\begin{aligned} & \frac{d\|\tilde{u}(t) - \tilde{v}(t, \tau)\|^2}{dt} + 2\gamma(t)\alpha(t)\|\tilde{u}(t) - \tilde{v}(t, \tau)\|^2 \leq \\ & \leq \tilde{a}_3\gamma(t)[h(t) + \delta(t) + \sigma(t) + \alpha'(t)(t - \tau)], \quad t \leq \tau, \quad \tilde{a}_3 > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, доказано утверждение.

Т е о р е м а 3.1. Пусть в условиях теоремы 1 данные смешанного вариационного неравенства (1.1) заданы приближенно, т.е. вместо A , f и φ известны семейства $\{A(t)\}$, $\{f(t)\}$, $\{\varphi(t)\}$ ($t \geq t_0 \geq 0$), удовлетворяющие условиям а) – с), эволюционные задачи (3.3), (3.4), (3.6), (3.7), (3.17), (3.18) и (3.19), (3.20) однозначно разрешимы в классе функций $C^1[t_0, +\infty)$, причем решения $u(t)$ и $\tilde{u}(t)$ ограничены на $[t_0, +\infty)$, $\gamma(t)$ и $\alpha(t)$ – положительные дифференцируемые функции при $t \geq t_0$, $\alpha(t)$ выпукла и убывает, и выполнены условия (3.5), (3.12), (3.14) – (3.16). Тогда

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|u(t) - x^*\| = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\tilde{u}(t) - x^*\| = 0,$$

где x^* – нормальное решение смешанного вариационного неравенства (1.1).

З а м е ч а н и е 3.1. Пусть существуют число $R > 0$ и элемент $x_0 \in H$ такие, что

$$(Ax - f, x - x_0) + \varphi(x) - \varphi(x_0) > 0 \quad \text{при} \quad \|x\| \geq R. \quad (3.24)$$

Отметим, что (3.24) есть одно из достаточных условий разрешимости смешанного вариационного неравенства (1.1) (см. [12], с.187). Предположим также, что

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t} \leq G, \quad 0 \leq G < \infty, \quad (3.25)$$

$$\overline{\lim}_{t \rightarrow +\infty} \frac{q(t)}{t^2} \leq Q, \quad 0 \leq Q < \infty. \quad (3.26)$$

В условиях (3.24) – (3.26) докажем ограниченность решения $u(t)$ задачи (3.3), (3.4) при $t \geq t_0$. Пусть $\|u(t)\| \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow +\infty$. Положив в (3.3) $y = x_0$ и используя условия а) – с), имеем

$$\left(\frac{d(u(t) - x_0)}{dt}, u(t) - x_0 \right) + \gamma(t)[(Au(t)) - f, u(t) - x_0] + \varphi(u(t)) - \varphi(x_0) +$$

$$+\gamma(t)\alpha(t)\left\{\|u(t)\|^2 - \|u(t)\| \|x_0\| - \left(\frac{h(t)}{\alpha(t)}g(\|u(t)\|) + \frac{\delta(t)}{\alpha(t)}\right)(\|u(t)\| + \|x_0\|) - \right. \\ \left. - \frac{\sigma(t)}{\alpha(t)}[q(\|u(t)\|) + q(\|x_0\|)]\right\} \leq 0.$$

В силу (3.24) – (3.26) и (3.14) из последнего неравенства при достаточно больших t выводим оценку $d(\|u(t) - x_0\|)/dt \leq 0$. Значит, функция $\rho(t) = \|u(t) - x_0\|$ не возрастает при достаточно больших t , что противоречит предположению о неограниченности $\|u(t)\|$. Аналогичное утверждение имеет место и для решения задачи (3.17), (3.18).

З а м е ч а н и е 3.2. Для доказательства существования решений построенных в данной работе смешанных вариационных неравенств мы пользовались теоремой 8.5 из [1], с.265, где псевдомонотонный оператор по определению считается ограниченным (см. там же, с.190). В остальных рассуждениях доказательств теорем 1 – 3 ограниченность A не использовалась. Если в [1] при доказательстве теоремы 8.2 применить утверждения из [13], то требование ограниченности оператора A можно снять.

З а м е ч а н и е 3.3. Можно рассматривать смешанное вариационное неравенство (1.1) не на всем пространстве H , а на выпуклом замкнутом множестве Ω из H . Теоремы существования решений таких неравенств имеются в [12], с. 187. Из теоремы 2 вытекает сходимость изученного в данной работе метода регуляризации для смешанного вариационного неравенства

$$(Ax - f, x - y) + \varphi(x) - \varphi(y) \leq 0, \quad x \in \Omega \quad \forall y \in \Omega$$

при невозмущенном множестве Ω .

З а м е ч а н и е 3.4. Если определенным образом (см. [3] и [4]) усложнить регуляризованные задачи, то от требований (3.25), (3.26) можно будет отказаться.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лионс Ж.-Л., *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*, Мир, М., 1972.
2. Pascali D., Sburlan S., *Nonlinear operators of monotone type*, R. S. R., Bucuresti, 1978.
3. Лисковец О.А., “Регуляризация смешанных вариационных неравенств”, *ДАН СССР*, **317**:2 (1991), 300–304.
4. Alber Ya., Ryazantseva I., *Nonlinear ill-posed problems of monotone type*, Springer, Dordrecht, 2006.
5. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1979.
6. Васильев Ф.П., *Методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1981.
7. Васильев Ф.П., *Численные методы решения экстремальных задач*, Наука, М., 1988.

8. Антипин А.С., “Непрерывные и итеративные процессы с операторами проектирования и типа проектирования”, *Вопросы кибернетики. Вычисл. вопросы анализа больших систем. М.: Научный совет по комплексной проблеме "Кибернетика" АН СССР*, 1989, 5–43.
9. Треногин В.А., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1988.
10. Рязанцева И.П., “Регуляризованные методы первого порядка для монотонных вариационных неравенств с оператором обобщенного проектирования”, *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, **45**:11 (2005), 1954–1962..
11. Alber Ya., Ryazantseva I., “On regularized evolution equations with operators of monotone type”, *Funct. Differential Equations*, **7**:4 (2000), 177–187..
12. Kluge R., *Nichtlinear Variationsungleichungen und Exrtemalaufgaben*, Dtsch. Verl. Wiss., Berlin, 1974.
13. Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces, *J. Funct. Anal.*, **11**:3 (1972), 251–294..

First-order regularized continuous methods for mixed variational inequalities

© I.P. Ryazantseva²

Abstract. First-order regularized continuous and operator methods by operator and by functional are constructed for mixed variational inequalities in Hilbert space with monotone operator and property convex functional. Sufficient conditions of convergence to normal solution of initial problem are obtained.

Key Words: mixed variational inequality, continuous method, monotone operator, convex functional.

² Professor of Applid Mathematics Chair, Nizhnii Novgorod State Tehnical University after R.A. Alekseev, Nizhnii Novgorod; lryazantseva@applmath.ru

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 533.6.013.42

Сравнительный анализ условий динамической устойчивости упругого элемента канала при взаимодействии с потоком сжимаемой и несжимаемой среды

© А.В. Анкилов¹, П.А. Вельмисов², Ю.К. Сагдеева³

Аннотация. Исследуется динамическая устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока идеальной жидкости (газа). Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции устойчивости динамических систем по Ляпунову. Получены достаточные условия устойчивости, налагающие ограничения на скорость потока, сжимающего (растягивающего) элемент усилия, изгибную жесткость упругого элемента и другие параметры механической системы. Проведено сравнение областей устойчивости для сжимаемой и несжимаемой среды.

Ключевые слова: аэрогидроупругость, устойчивость, упругая пластина, деформация, дозвуковой поток, сжимаемая и несжимаемая среда.

1. Введение

При проектировании конструкций, обтекаемых потоком газа или жидкости, важное значение имеет исследование устойчивости деформируемых элементов, так как воздействие потока может приводить к увеличению амплитуды колебаний, и, тем самым, к их разрушению.

В то же время для функционирования некоторых технических устройств явление возбуждения колебаний при аэрогидродинамическом воздействии, указанное выше в качестве негативного, является необходимым. Примерами подобных устройств, относящихся к вибрационной технике, используемых для интенсификации технологических процессов, являются устройства для приготовления однородных смесей и эмульсий, например, устройств для подачи смазочно-охлаждающей жидкости в зону обработки (см., например, [1]).

Таким образом, при проектировании конструкций и устройств, находящихся во взаимодействии с газожидкостной средой, необходимо решать задачи, связанные с исследованием устойчивости упругих элементов, требуемой для их функционирования и надежности эксплуатации.

В работе исследуется динамическая устойчивость упругого элемента стенки канала при протекании в нем дозвукового потока идеальной сжимаемой или несжимаемой среды (жидкости или газа). Определение устойчивости упругого тела соответствует концепции

¹ Доцент кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; ankil@ulstu.ru.

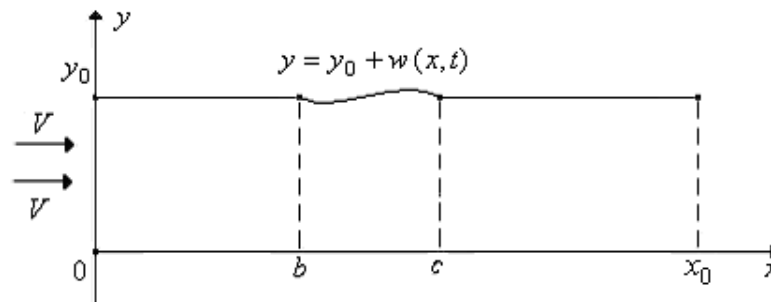
² Зав. кафедрой «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; velmisov@ulstu.ru.

³ Аспирант кафедры «Высшая математика», Ульяновский государственный технический университет, г. Ульяновск; Juliana5361@rambler.ru.

устойчивости динамических систем по Ляпунову. Исследование устойчивости проводится в линейной постановке, соответствующей малым возмущениям однородного дозвукового потока и малым прогибам упругого элемента стенки канала. На основе построения функционалов для связанных систем дифференциальных уравнений в частных производных для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала и потенциала скорости жидкости (газа), получены условия устойчивости решений этих систем.

2. Постановка задачи для сжимаемой среды

Рассмотрим плоское течение в прямолинейном канале $J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < x_0, 0 < y < y_0\}$. Скорость невозмущенного однородного потока равна V и направлена вдоль оси Ox . Упругой является часть стенки $y = y_0$ при $x \in [b, c]$ (рис. [2.1] 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Канал, стенка которого содержит деформируемый элемент

Введем обозначения: $w(x, t)$ – функция деформации упругого элемента стенки канала; $\varphi(x, y, t)$ – потенциал скорости возмущенного потока.

Математическая постановка задачи имеет вид:

$$\varphi_{tt} + 2V\varphi_{xt} + V^2\varphi_{xx} = a^2(\varphi_{xx} + \varphi_{yy}), \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = \dot{w}(x, t) + Vw'(x, t), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0, \quad (2.2)$$

$$\varphi_y(x, y_0, t) = 0, \quad x \in (0, b] \cup [c, x_0), \quad t \geq 0, \quad (2.3)$$

$$\varphi_y(x, 0, t) = 0, \quad x \in (0, x_0), \quad t \geq 0, \quad (2.4)$$

$$\varphi(0, y, t) = 0, \quad \varphi(x_0, y, t) = 0, \quad y \in (0, y_0), \quad t \geq 0, \quad (2.5)$$

$$L(w) = -\rho(\varphi_t(x, y_0, t) + V\varphi_x(x, y_0, t)), \quad x \in (b, c), \quad t \geq 0. \quad (2.6)$$

Дифференциальный оператор $L(w)$ задается выражением

$$L(w) \equiv Dw''''(x, t) + \beta_2 \dot{w}''''(x, t) + M\ddot{w}(x, t) + Nw''(x, t) + \beta_1 \dot{w}(x, t) + \beta_0 w(x, t). \quad (2.7)$$

Индексы x, y, t снизу обозначают частные производные по x, y, t ; штрих и точка – частные производные по x и t соответственно; ρ – плотность жидкости в однородном невозмущенном потоке; D, M – изгибная жесткость и погонная масса упругого элемента; N – сжимающая (растягивающая) упругий элемент сила; β_1, β_2 – коэффициенты внешнего и внутреннего демпфирования; β_0 – коэффициент жесткости основания; a – скорость звука в невозмущенном потоке жидкости ($a > V$).

Предположим, что концы упругого элемента закреплены либо жестко, либо шарнирно, тогда при $x = b$ и $x = c$ выполняется одно из условий

$$1) w = w' = 0, \quad 2) w = w'' = 0. \quad (2.8)$$

Для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала $w(x, t)$ и потенциала скорости сжимаемой жидкости (газа) $\varphi(x, y, t)$ имеем связанную задачу (2.1) - (2.8).

3. Исследование устойчивости для сжимаемой среды

Исследуем устойчивость нулевого решения $\varphi(x, y, t) \equiv 0$, $w(x, t) \equiv 0$ системы (2.1) - (2.8) по Ляпунову. Введем функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_J (\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \varphi_x^2 + a^2 \varphi_y^2) dx dy - 2a^2 V \int_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}^2 + D w''^2 - N w'^2 + \beta_0 w^2) dx. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Для функций $\varphi(x, y, t)$ и $w(x, t)$, удовлетворяющих уравнениям (2.1) и (2.6), (2.7), производная от Φ по t примет вид

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}(t) = & 2 \iint_J (\varphi_t (-2V \varphi_{xt} - V^2 \varphi_{xx} + a^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy})) + (a^2 - V^2) \varphi_x \varphi_{xt} + \\ & + a^2 \varphi_y \varphi_{yt}) dx dy - 2a^2 V \int_b^c (\varphi_t(x, y_0, t) w'(x, t) + \varphi(x, y_0, t) \dot{w}'(x, t)) dx + \\ & + \frac{2a^2}{\rho} \int_b^c (\dot{w} \{-\rho (\varphi_t(x, y_0, t) + V \varphi_x(x, y_0, t)) - D w'''' - \beta_2 \dot{w}''' - N w'' - \\ & - \beta_1 \dot{w} - \beta_0 w\} + D w'' \dot{w}'' - N w' \dot{w}' + \beta_0 w \dot{w}) dx. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Произведя интегрирование с учетом условий (2.2)-(2.5), (2.8), получим

$$\dot{\Phi}(t) = -\frac{2a^2}{\rho} \int_b^c (\beta_2 \dot{w}''^2 + \beta_1 \dot{w}^2) dx.$$

Пусть выполняются условия

$$\beta_2 \geq 0, \quad \beta_1 \geq 0, \quad (3.3)$$

тогда имеют место неравенства

$$\dot{\Phi}(t) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(t) \leq \Phi(0). \quad (3.4)$$

Для оценки функционала для функции $w(x, t)$ запишем неравенства Рэлея [2]

$$\int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \lambda_1 \int_b^c w'^2(x, t) dx, \quad \int_b^c w''^2(x, t) dx \geq \mu_1 \int_b^c w^2(x, t) dx, \quad (3.5)$$

где λ_1, μ_1 - наименьшие собственные значения краевых задач $\psi''''(x) = -\lambda\psi''(x)$, $\psi''''(x) = \mu\psi(x)$, $x \in (b, c)$ с граничными условиями (2.8), и неравенство Рэлея

$$\int_0^{x_0} \varphi_x^2(x, y, t) dx \geq \eta_1 \int_0^{x_0} \varphi^2(x, y, t) dx, \quad (3.6)$$

где $\eta_1 = \frac{\pi^2}{x_0^2}$ - наименьшее собственное значение краевой задачи $-\psi'' = \eta\psi$, $x \in (0, x_0)$ с краевыми условиями $\psi(0) = 0$, $\psi(x_0) = 0$, соответствующими (2.5).

Интегрируя неравенство (3.6) от 0 до y_0 по переменной y , окончательно получим

$$\iint_J \varphi_x^2(x, y, t) dx dy \geq \frac{\pi^2}{x_0^2} \iint_J \varphi^2(x, y, t) dx dy. \quad (3.7)$$

Воспользовавшись неравенством Коши - Буняковского, получим неравенства

$$w^2(x, t) \leq (c - b) \int_b^c w'^2(x, t) dx, \quad (3.8)$$

$$\iint_J \varphi_y^2 dx dy \geq \frac{2}{y_0^2} \iint_J (\varphi(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 dx dy. \quad (3.9)$$

Оценим $\Phi(0)$ сверху, используя неравенства (3.5) и очевидное неравенство $-2ab \leq a^2 + b^2$

$$\begin{aligned} \Phi(0) \leq & \iint_J (\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2) \varphi_{x0}^2 + a^2 \varphi_{y0}^2) dx dy + a^2 \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left(M \dot{w}_0^2 + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0'^2 \right) dx, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где введены обозначения $\varphi_{t0} = \varphi_t(x, y, 0)$, $\varphi_{x0} = \varphi_x(x, y, 0)$, $\varphi_{y0} = \varphi_y(x, y, 0)$, $\dot{w}_0 = \dot{w}(x, 0)$, $w_0'' = w''(x, 0)$.

Оценим $\Phi(t)$ снизу. Применяя (3.5), (3.7), (3.9) для (3.1), получим неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iint_J \left(\varphi_t^2 + (a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} \varphi^2 + \frac{2a^2}{y_0^2} (\varphi(x, y_0, t) - \varphi(x, y, t))^2 \right) dx dy - \\ & - 2a^2 V \int_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c (\lambda_1 D - N) w'^2 dx. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Введем обозначение

$$f(x, t) = \begin{cases} 0, & x \in (0, b], \\ w'(x, t), & x \in (b, c), \\ 0, & x \in [c, x_0), \end{cases}$$

тогда из (3.11) получим неравенство

$$\begin{aligned} \Phi(t) \geq & \iint_J \left[\varphi_t^2(x, y, t) + \left((a^2 - V^2) \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) \varphi^2(x, y, t) - \frac{4a^2}{y_0^2} \varphi(x, y_0, t) \times \right. \\ & \times \varphi(x, y, t) + \frac{2a^2}{y_0^2} \varphi^2(x, y_0, t) - \frac{2a^2 V}{y_0} \varphi(x, y_0, t) f(x, t) + \left. \frac{a^2 (\lambda_1 D - N)}{\rho y_0} f^2(x, t) \right] dx dy. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Введем обозначения

$$d_{11} = \frac{(a^2 - V^2) \pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2}, \quad d_{22} = d_{12} = \frac{2a^2}{y_0^2}, \quad d_{23} = \frac{V}{y_0^2}, \quad d_{33} = \frac{a^2 (\lambda_1 D - N)}{\rho y_0}. \quad (3.13)$$

Согласно критерию Сильвестра квадратичная форма относительно $\varphi(x, y, t)$, $\varphi(x, y_0, t)$, $f(x, t)$ в (3.12) будет положительно определенной, если выполняются условия

$$\lambda_1 D - N > 0, \quad (3.14)$$

$$\frac{\lambda_1 D - N}{\rho y_0} \cdot \frac{2(a^2 - V^2) \pi^2}{x_0^2} - V^2 \left(\frac{(a^2 - V^2) \pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right) > 0. \quad (3.15)$$

Преобразуем неравенство (3.15)

$$N < \lambda_1 D - \frac{V^2 x_0^2 \rho y_0}{2(a^2 - V^2) \pi^2} \left(\frac{(a^2 - V^2) \pi^2}{x_0^2} + \frac{2a^2}{y_0^2} \right). \quad (3.16)$$

Оценивая квадратичную форму в (3.12) относительно $w(x, t)$ с учетом (3.8), получим

$$\Phi(t) \geq \frac{\Delta_3 y_0}{\Delta_2 (c - b)} w^2(x, t), \quad (3.17)$$

где $\Delta_2 = d_{11}d_{22} - d_{12}^2 > 0$, $\Delta_3 = d_{33}\Delta_2 - d_{23}^2 d_{11} > 0$.

Учитывая (3.4), (3.10), (3.17), получим неравенство

$$\begin{aligned} w^2(x, t) \leq & \frac{\Delta_2 (c - b)}{\Delta_3 y_0} \iint_J (\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2) \varphi_{x0}^2 + a^2 \varphi_{y0}^2) dx dy + a^2 \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \\ & + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left(M \dot{w}_0^2 + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0''^2 \right) dx, \end{aligned}$$

из которого следует теорема

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполняются условия (3.3), (3.14), (3.16). Тогда решение $w(x, t)$ системы уравнений (2.1)-(2.8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0} , φ_{x0} , φ_{y0} , $\varphi(x, y_0, 0)$, $\dot{w}_0$, w_0'' .

Аналогично оценивая квадратичную форму в (3.12) относительно $\varphi(x, y, t)$, получим

$$\Phi(t) \geq \frac{\Delta_3}{d_{22}d_{33} - d_{23}^2} \iint_J \varphi^2(x, y, t) dx dy. \quad (3.18)$$

Учитывая (3.4), (3.10), (3.18), получим неравенство

$$\begin{aligned} \iint_J \varphi^2(x, y, t) dx dy \leq & \frac{d_{22}d_{33} - d_{23}^2}{\Delta_3} \iint_J (\varphi_{t0}^2 + (a^2 - V^2) \varphi_{x0}^2 + a^2 \varphi_{y0}^2) dx dy + \\ & + a^2 \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \frac{a^2}{\rho} \int_b^c \left(M \dot{w}_0^2 + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0''^2 \right) dx, \end{aligned}$$

из которого следует теорема

Т е о р е м а 3.2. Пусть выполняются условия (3.3), (3.14), (3.16). Тогда решение $\varphi(x, y, t)$ системы уравнений (2.1)-(2.8) устойчиво в среднем (в интегральном смысле) по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0} , φ_{x0} , φ_{y0} , $\varphi(x, y_0, 0)$, $\dot{w}_0$, w_0'' .

4. Постановка задачи и исследование устойчивости для несжимаемой среды

Потенциал скорости для несжимаемой среды удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\varphi_{xx} + \varphi_{yy} = 0, \quad (x, y) \in J, \quad t \geq 0. \quad (4.1)$$

Добавляя условия (2.2) - (2.8), получим связанную задачу для двух неизвестных функций – прогиба упругого элемента стенки канала $w(x, t)$ и потенциала скорости несжимаемой среды $\varphi(x, y, t)$.

Аналогично исследуем устойчивость нулевого решения $\varphi(x, y, t) \equiv 0$, $w(x, t) \equiv 0$ системы (4.1), (2.2) - (2.8) по Ляпунову. Введем функционал

$$\begin{aligned} \Phi(t) = & \iint_J (\varphi_x^2 + \varphi_y^2) dx dy - 2V \int_b^c \varphi(x, y_0, t) w'(x, t) dx + \\ & + \frac{1}{\rho} \int_b^c (M \dot{w}^2 + D w''^2 - N w'^2 + \beta_0 w^2) dx. \end{aligned} \quad (4.2)$$

При выполнении условий (3.3) получим неравенство (3.4). Пусть выполняется условие (3.14), а также условие

$$N < \lambda_1 D - \frac{\rho V^2 (\pi^2 y_0^2 + 2x_0^2)}{2\pi^2 y_0}. \quad (4.3)$$

Тогда справедливы неравенства

$$\iint_J \varphi^2(x, y, t) dx dy \leq \frac{d_{22}d_{33} - d_{23}^2}{\Delta_3} \Psi, \quad w^2(x, t) \leq \frac{\Delta_2 (c - b)}{\Delta_3 y_0} \Psi,$$

где введены обозначения $\Delta_2 = d_{11}d_{22} - d_{12}^2 > 0$, $\Delta_3 = d_{33}\Delta_2 - d_{23}^2 d_{11} > 0$, $d_{11} = \frac{\pi^2}{x_0^2} + \frac{2}{y_0^2}$, $d_{22} = \frac{2}{y_0^2}$, $d_{12} = -\frac{2}{y_0^2}$, $d_{23} = -\frac{V}{y_0^2}$, $d_{33} = \frac{\lambda_1 D - N}{\rho y_0}$, $\Psi = \iint_J (\varphi_{x0}^2 + \varphi_{y0}^2) dx dy +$

$$+ \int_b^c \varphi^2(x, y_0, 0) dx + \frac{1}{\rho} \int_b^c \left(M \dot{w}_0^2 + \left(D + \frac{|N| + \rho V^2}{\lambda_1} + \frac{\beta_0}{\mu_1} \right) w_0''^2 \right) dx.$$

Из этих неравенств следует теорема

Т е о р е м а 4.1. Пусть выполняются условия (3.3), (3.14), (4.3). Тогда решение $w(x, t)$ системы уравнений (4.1), (2.2)-(2.8) устойчиво по отношению к возмущениям начальных данных φ_{t0} , φ_{x0} , φ_{y0} , $\varphi(x, y_0, 0)$, $\dot{w}_0$, w_0'' . При этом решение $\varphi(x, y, t)$ устойчиво в среднем (в интегральном смысле).

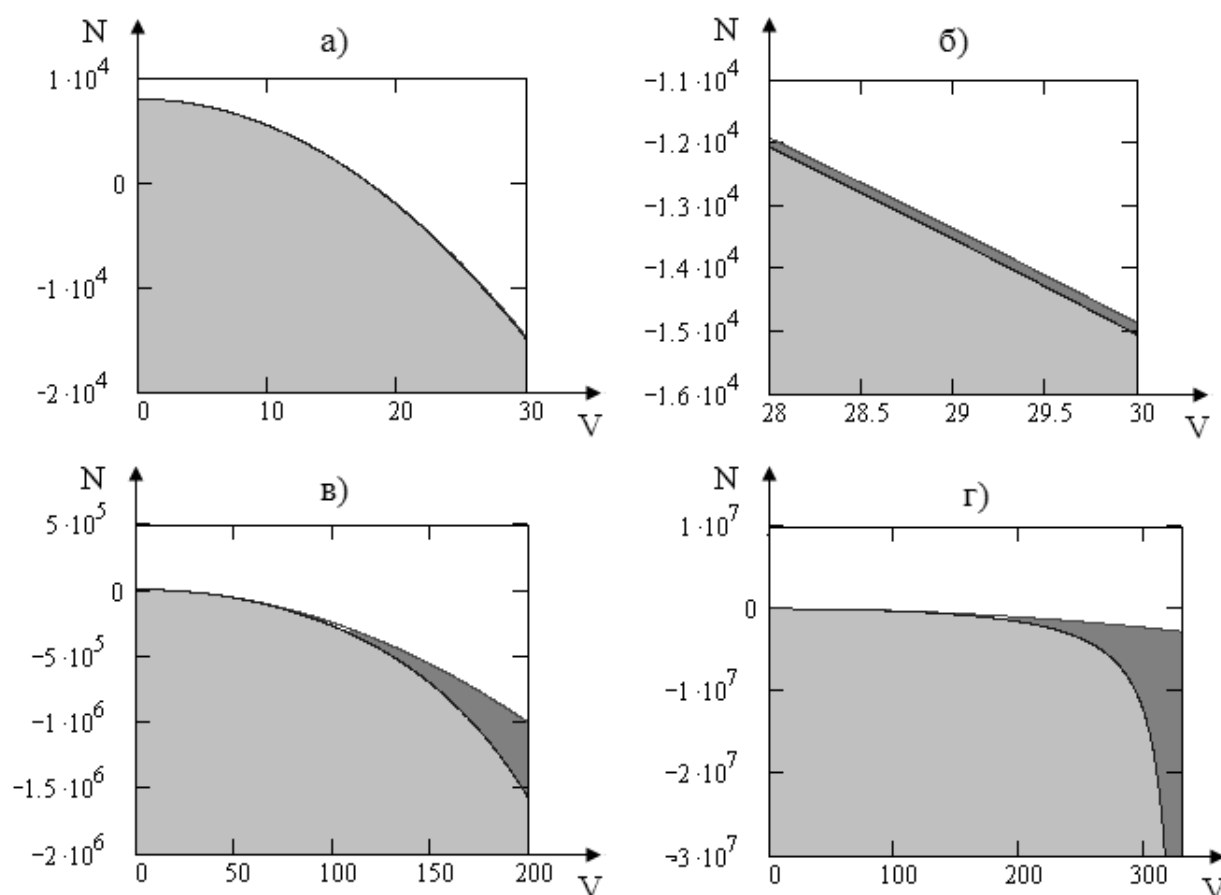
5. Сравнение условий устойчивости для сжимаемой и несжимаемой жидкости

Рассмотрим пример механической системы. Рабочая среда - воздух ($\rho = 1$), пластина изготовлена из алюминия ($E = 7 \cdot 10^{10}$, $\rho_{pl} = 8480$). Другие параметры механической

системы: $a = 331$, $x_0 = 5$, $y_0 = 0,1$, $b = 2$, $c = 3$, $h = 0,005$, $\nu = 0,31$, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = 806,7$. Пусть концы упругой пластины закреплены шарнирно, тогда $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{(c-b)^2} = \pi^2$.

Все значения приведены в системе СИ.

Для неравенств (3.16), (4.3) построены области устойчивости на плоскости «сжимающее (растягивающее) усилие N – скорость потока V » (рис. 5.1). На рис. 5.1 светло серая область – область устойчивости для сжимаемого потока (неравенство (3.16)), светло серая плюс темно серая области – область устойчивости для несжимаемого потока (неравенство (4.3)). Рисунки 5.1а и 5.1б показывают, что при $V \in [0, 30]$ отличия областей незначительны. При $V > 30$ (рис. 5.1в, 5.1г) отличия становятся все более существенными (модель несжимаемой среды уже не работает). На рисунке 5.1г видно, что прямая $V = a$ (зона транзвука) является асимптотой границы области (3.16).



Р и с у н о к 5.1

Области устойчивости на плоскости (N, V)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вельмисов П. А., Горшков Г. М., Рябов Г. К., Пат. 2062662 Российская Федерация, МПК6 В 06 В 1/18, 1/20. Гидродинамический излучатель; заявитель и патенто-обладатель Ульяновский гос. технич. ун-т. – №5038746/28; заявл. 20.07.92; опубл. 27.06.96, Бюл. №18.

2. Коллатц Л., *Задачи на собственные значения*, Наука, М., 1968, 503 с.

The stability of an elastic element of the channel wall

© A.V. Ankilov⁴, P.A. Velmisov⁵, Yu.K. Sagdeeva⁶

Abstract. The dynamic stability of an elastic element of the channel wall is studied. In the channel flow the subsonic the stream of an ideal compressible fluid (gas). Determination of the stability of an elastic body corresponds to the concept of stability of dynamical systems by Lyapunov. Obtained the sufficient conditions for stability. Conditions impose limitations on the speed of the uniform stream of gas, compressed (tensile) element of efforts, the elastic element stiffness and other parameters of the mechanical system.

Key Words: aeroelasticity, stability, elastic plate, deformation, subsonic flow, compressed and incompressible liquid (gas).

⁴ Docent of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; ankil@ulstu.ru.

⁵ Head of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; velmisov@ulstu.ru.

⁶ Post graduate student of Higher Mathematics Chair, Ulyanovsk State Technical University, Ulyanovsk; Julianna5361@rambler.ru.

УДК 519.862.7

Моделирование динамики кадров с использованием дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

© В.А. Атряхин¹, П.А. Шаманаев²

Аннотация. В работе описывается процесс формирования прогнозной оценки динамики кадров. В качестве математической модели используется система дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. Для отыскания оценок неизвестных параметров системы используется метод наименьших квадратов.

Ключевые слова: потребность в кадрах, система дифференциальных уравнений, отклоняющийся аргумент, метод наименьших квадратов, прогнозирование, интегро-интерполяционный метод.

1. Введение

В настоящей статье описывается математическая модель прогнозирования изменения численности работников заведений ВПО с помощью системы дифференциальных уравнений. В основу формирования модели положены механизмы, многие годы используемые для прогнозирования социодемографического поведения населения, например прогнозирования миграции городского населения [1]. Аналогичные подходы применяются для прогнозирования динамики экономических процессов [3].

Для построения прогноза совокупность работников старше 24 лет разобьем на 10 возрастных групп. Возрастной диапазон групп с первой по девятую будет составлять пять лет. Десятая группа будет включать всех работников старше 75 лет. Рассмотрим статистические данные о численности работников заведений ВПО для каждой из полученных групп. Не ограничивая общности, предположим, что количественный состав групп меняется только один раз в год. Определенное количество работников заведений ВПО будет увольняться, а какое-то количество новых кадров будет приходить на их место. Очевидно, что приток (или отток) работников заведений ВПО во многом зависит от социально-экономического состояния региона и условий труда в конкретном подразделении выбранного заведения ВПО для выбранной возрастной группы. Зачастую данные факторы остаются постоянными из года в год. А значит, влияние этих факторов может быть оценено по статистическим данным о притоке и оттоке работников заведений ВПО за некоторый отрезок времени, предшествующий прогнозируемому и количественному составу этой группы в данный момент времени.

¹ Аспирант кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; atrvol@rambler.ru.

² Заведующий кафедрой прикладной математики, Мордовский государственный университет им. Н. П. Огарёва, г. Саранск; korspa@yandex.ru.

2. Построение математической модели

Очевидно, что никакое влияние в описываемой системе взаимосвязей не осуществляется мгновенно. Вся система в целом достаточно инертна и не может сразу реагировать на те, или иные импульсы. Рассмотрим отдельные связи. Во-первых, изменение численности работников заведений ВПО связано с изменением численности работников заведений ВПО в некотором прошлом. Во-вторых, изменение численности работников заведений ВПО связано с численностью работников заведений ВПО в данный момент времени.

Таким образом, изменение потока присоединяющихся к работникам заведений ВПО в данный момент ставится в зависимости от численности работников заведений ВПО в данный момент времени, интенсивности потока присоединяющихся к работникам заведений ВПО в некотором прошлом и интенсивности потока выбывающих из группы работников заведений ВПО в некотором прошлом. В итоге изменение потока присоединяющихся к работникам заведений ВПО в момент времени t описывается дифференциальным уравнением с отклоняющимся аргументом следующего вида:

$$\dot{y}(t) = a'w(t) + b'y(t-h) + c'z(t-h), \quad (2.1)$$

где $w(t)$ - численность работников заведений ВПО в момент времени t ; $y(t)$ - интенсивность потока присоединяющихся к группе работников заведений ВПО в момент времени t ; $z(t)$ - интенсивность потока выбывающих из группы работников заведений ВПО в момент времени t .

Обратимся теперь к потоку покидающих группу работников заведений ВПО. Изменение потока выбывающих из группы работников заведений ВПО в данный момент ставится в зависимость от численности работников заведений ВПО в данный момент времени, интенсивности потока выбывающих из группы работников заведений ВПО в некотором прошлом и интенсивности потока присоединяющихся к группе работников заведений ВПО в некотором прошлом. Таким образом, изменение потока выбывающих из группы работников заведений ВПО в момент времени t описывается уравнением с отклоняющимся аргументом следующего вида:

$$\dot{z}(t) = a''w(t) + b''z(t-h) + c''y(t-h), \quad (2.2)$$

Балансовое уравнение, связывающее прирост и отток численности претендентов на поступление в аспирантуру с количеством людей в данной группе имеет вид:

$$\dot{w}(t) = y(t) - z(t), \quad (2.3)$$

Таким образом, математическая модель потока может быть сформулирована в виде следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = a'w(t) + b'y(t-h) + c'z(t-h), \\ \dot{z}(t) = a''w(t) + b''z(t-h) + c''y(t-h), \\ \dot{w}(t) = y(t) - z(t), \end{cases} \quad (2.4)$$

все коэффициенты которой постоянны и не зависят от времени t .

3. Переход к разностной схеме

Чтобы экспериментально проверить правильность сформулированной модели, необходимо перейти от системы дифференциальных уравнений к некоторой вычислительной схеме, позволяющей оценить величины численности претендентов на поступление в аспирантуру и «миграционных» потоков в реальном масштабе времени с ориентацией на существующие методы учета. Заметим, что в системе (2.4) мы имели дело с «мгновенными» значениями численности работников заведений ВПО, потоков вливающих в эту группу и выбывающих из нее. На практике же мы располагаем лишь данными годового учета. Поэтому нам необходимо перейти от системы (2.4) к системе, в которой фигурируют интегралы от соответствующих функций. Данный переход осуществим с помощью интегро-интерполяционного метода построения разностных схем [2].

Пусть длина отрезка времени $[t_0, T]$, за который можно получить информацию, равна $T - t_0 = N\delta$, где δ - шаг интегрирования. Предположим, что с точностью до некоторого $\varepsilon > 0$ коэффициенты системы (1) постоянны на каждом интервале $((i-1)\delta, i\delta)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Проинтегрировав систему (2.4) по интервалу $((i-1)\delta, i\delta)$ получим новую систему:

$$\begin{cases} \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{y}(\tau) d\tau = a' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau) d\tau + b' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau - \delta) d\tau + c' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau - \delta) d\tau, \\ \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{z}(\tau) d\tau = a'' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau) d\tau + b'' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau - \delta) d\tau + c'' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau - \delta) d\tau, \\ \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} \dot{w}(\tau) d\tau = \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau) d\tau - \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau) d\tau. \end{cases} \quad (3.1)$$

Поскольку практически значения величин Y, Z, w, R известны лишь в конечном числе точек отрезка $[t_0, T]$, то число δ удобно считать минимальным расстоянием между точками отрезка $[t_0, T]$, в которых и заданы значения этих величин.

Предположим далее, что функция $w(t)$ слабо меняется на интервале $((i-1)\delta, i\delta)$, $i = 1, 2, \dots, N$ и что значения $w(t)$ известны нам лишь на границах этого интервала. Тогда правомерна замена $\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau) d\tau$ в системе (3.1) на выражение $[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]\delta/2$, $i = 1, 2, \dots, N$.

Аппроксимируем конечными разностями $[\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau) d\tau - \int_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} y(\tau) d\tau]/\delta$, $[\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau) d\tau - \int_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} z(\tau) d\tau]/\delta$ - соответствующие производные из (3.1). С учетом этих замечаний, получим следующую систему конечно-разностных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau)d\tau - \int_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} y(\tau)d\tau]/\delta = a'[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]\delta/2 + \\ \quad + b' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau - \delta)d\tau + c' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau - \delta)d\tau + d', \\ [\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau)d\tau - \int_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} z(\tau)d\tau]/\delta = a''[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]\delta/2 + \\ \quad + b'' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau - \delta)d\tau + c'' \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau - \delta)d\tau + d'', \\ [\int_{(i-1)\delta}^{i\delta} w(\tau)d\tau - \int_{(i-2)\delta}^{(i-1)\delta} w(\tau)d\tau]/\delta = \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} y(\tau)d\tau - \int_{(i-1)\delta}^{i\delta} z(\tau)d\tau. \end{array} \right. \quad (3.2)$$

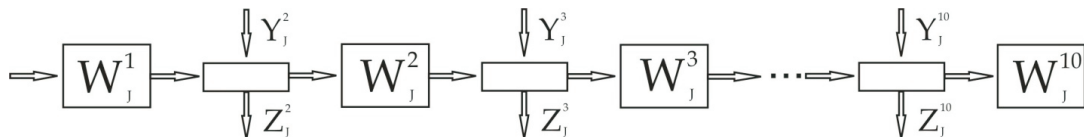
Предполагая, что переходы из одной возрастной группы в другую осуществляются в фиксированный момент времени, положим $\delta = 1$. Пренебрегая также погрешностями d' , d'' , получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{y}_j^i = a_j^i[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]/2 + (b_j^i + 1)\bar{y}_{j-1}^i + c_j^i \bar{z}_{j-1}^i, \\ \bar{z}_j^i = k_j^i[w((i-1)\delta) + w(i\delta)]/2 + (l_j^i + 1)\bar{z}_{j-1}^i + m_j^i \bar{y}_{j-1}^i, \\ \bar{w}_j^i = \bar{w}_j^{i-1} + \bar{y}_j^i - \bar{z}_j^i. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

где $\bar{y}_j^i$ - количество людей j -ой возрастной группы, присоединяющихся к группе работников заведений ВПО в i -ом году, $\bar{z}_j^i$ - количество работников заведений ВПО j -ой возрастной группы, выбывающих из числа работников заведений ВПО в i -ом году, $\bar{w}_j^i$ - численность группы работников заведений ВПО j -ой возрастной группы в i -ом году.

4. Описание численного алгоритма для формирования прогнозной оценки потребности в кадрах

Рассмотрим алгоритм проведения вычислений по предложенной модели на примере десяти возрастных групп. Условно изменения, которые происходят в группе работников заведений ВПО J -ого года рождения (J -ого потока) представлены на рисунке 4.1.



Р и с у н о к 4.1

Динамика потока работников заведений ВПО

Предположим, что у нас есть данные о количестве работников заведений ВПО 1-ой возрастной группы. По ним мы можем выяснить количество работников w_j^i . Кроме того нам известна вся статистическая информация по N потокам, предшествующим рассматриваемому J -ому потоку: $y_j^i, z_j^i, w_j^i, j = \overline{J-N}, \overline{J}, i = \overline{2, 10}$. Цель вычислений – нахождение w_j^{10} . Переобозначив коэффициенты в системе (3.3), получим систему (4.1), которой будем пользоваться для вычислений:

$$\begin{cases} \bar{y}_j^i = a^i(\bar{w}_j^i + \bar{w}_j^{i-1})/2 + b^i\bar{y}_{j-1}^i + c^i\bar{z}_{j-1}^i, \\ \bar{z}_j^i = k^i(\bar{w}_j^i + \bar{w}_j^{i-1})/2 + l^i\bar{z}_{j-1}^i + m^i\bar{y}_{j-1}^i, \\ \bar{w}_j^i = \bar{w}_j^{i-1} + \bar{y}_j^i - \bar{z}_j^i. \end{cases} \quad (4.1)$$

Вычисления проводятся поэтапно для каждого i от 2 до 10. Коэффициенты $a^i, b^i, c^i, i = \overline{2, 10}$ системы (4.1) находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$A^{iT} Y^i = A^{iT} A^i X^i,$$

$$\text{где } i = \overline{2, 10}, Y^i = \begin{pmatrix} y_2^i \\ \vdots \\ y_N^i \end{pmatrix}, A^i = \begin{pmatrix} \frac{\bar{w}_2^i + \bar{w}_2^{i-1}}{2} & \bar{y}_1^i & \bar{z}_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\bar{w}_N^i + \bar{w}_N^{i-1}}{2} & \bar{y}_{N-1}^i & \bar{z}_{N-1}^i \end{pmatrix}, X^i = \begin{pmatrix} a^i \\ b^i \\ c^i \end{pmatrix}.$$

А коэффициенты $k^i, l^i, m^i, i = \overline{2, 10}$ системы (4.1) находятся как решение системы линейных алгебраических уравнений следующего вида:

$$B^{iT} Z^i = B^{iT} B^i F^i,$$

$$\text{где } i = \overline{2, 10}, Z^i = \begin{pmatrix} z_2^i \\ \vdots \\ z_N^i \end{pmatrix}, B^i = \begin{pmatrix} \frac{\bar{w}_2^i + \bar{w}_2^{i-1}}{2} & \bar{z}_1^i & \bar{y}_1^i \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\bar{w}_N^i + \bar{w}_N^{i-1}}{2} & \bar{z}_{N-1}^i & \bar{y}_{N-1}^i \end{pmatrix}, F^i = \begin{pmatrix} k^i \\ l^i \\ m^i \end{pmatrix}.$$

После нахождения коэффициентов $a_j^i, b_j^i, c_j^i, k_j^i, l_j^i, m_j^i$ прогнозные значения w_{N+1}^i вычисляются по итерационной формуле:

$$\bar{w}_j^i = \frac{(1 + a_j^i/2 - k_j^i/2)\bar{w}_j^{i-1} + (b_j^i - m_j^i)\bar{y}_{j-1}^i + (c_j^i - l_j^i)\bar{z}_{j-1}^i}{1 + k_j^i/2 - a_j^i/2}$$

Вычисления продолжают до тех пор, пока не будет найдено w_{10}^i .

Таким образом, построенная математическая модель позволяет прогнозировать изменение численности работников заведений ВПО на основе статистических данных о численности работников заведений ВПО в разрезе возрастных групп за несколько лет, предшествующих прогнозируемому отрезку времени.

Работа выполнена при поддержке федеральной целевой программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2010-2013 гг.» Государственный контракт № 14.740.11.0225.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бородкин Ф. М., Соболева С. В., «Прогнозирование численности населения и миграции системой дифференциальных уравнений», *Математические методы в социологии*, 1974, 99-145.
2. Годунов С. К., Рябенский В. С., *Разностные схемы*, Наука, М., 1973, 272 с.
3. Прасолов А. В., *Динамические модели с запаздыванием и их приложения в экономике и инженерии*, Издательство «Лань», СПб., 2010, 192 с.

Modeling the dynamics of personnel with the use of differential equations with deviating argument

© V.A. Atryahin³, P.A. Shamanaev⁴

Abstract. This article describes the process formation of the prospective evaluation of staffing needs. In as a mathematical model uses a system differential equations with deviating argument. To find the estimates of unknown system parameters using the method of least squares.

Key Words: the need for personnel, a system of differential equations, deviating argument, the method least-squares prediction, the integro-interpolation method.

³ Postgraduate student of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; atrvol@rambler.ru.

⁴ Chief of Applied Mathematics Chair, Mordovian State University after N. P. Ogarev, Saransk; korspa@yandex.ru.

УДК 519.6..517.977.58

Аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями

© Ф.В. Лубышев¹, М.Э. Файрузов², А.Р. Манапова³

Аннотация. Излагается метод разностной аппроксимации задач оптимального управления для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решением.

Ключевые слова: задача оптимального управления, полулинейные эллиптические уравнения, разностный метод решения, метод регуляризации.

1. Введение

Особый интерес для исследования представляют физико-математические постановки задач оптимального управления, в которых, в силу характера исследуемого физического процесса, состояния описываются нелинейными уравнениями математической физики (УМФ) с разрывными коэффициентами и, кроме того, изначально по своей физико-математической постановке, сами решения УМФ допускают разрывы. Такие задачи оптимизации наименее изучены, хотя развитие теории и методов их решения вызвано потребностями математического моделирования подобных оптимальных процессов, большой прикладной важностью таких задач.

В настоящей работе, по тематике примыкающей к [3]-[13], рассмотрены и исследованы математические постановки задач оптимального управления для полулинейных уравнений эллиптического типа с переменными коэффициентами в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решениями (с условиями сопряжения типа неидеального контакта [9]-[11]). Построены и исследованы разностные аппроксимации экстремальных задач, установлены оценки скорости сходимости аппроксимаций по состоянию и функционалу, слабая сходимость по управлению. Проведена регуляризация аппроксимаций. При этом исследования аппроксимаций проводятся для дифференциальных уравнений, описывающих разрывные состояния процессов управления с обобщенными решениями из классов Соболева, при естественных невысказанных априорных требованиях к гладкости входных данных и управлений.

2. Постановка задач оптимизации для полулинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями и их корректность

Пусть $\Omega = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \alpha = 1, 2\}$ – прямоугольник в $\mathbb{R}^2$ с границей $\partial\Omega = \Gamma$. И пусть область Ω разделена прямой $x_1 = \xi$, где $0 < \xi < l_1$ («внутренней

¹ Профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; v.lubyshev@mail.ru.

² Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

³ Доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; aygulrm@mail.ru.

границей» $\bar{S} = \{x_1 = \xi, 0 \leq x_2 \leq l_2\}$, где $0 < \xi < l_1$) на подобласти $\Omega_1 \equiv \Omega^- = \{0 < x_1 < \xi, 0 < x_2 < l_2\}$ и $\Omega_2 \equiv \Omega^+ = \{\xi < x_1 < l_1, 0 < x_2 < l_2\}$ (на левую и правую подобласти Ω^- и Ω^+) с границами $\partial\Omega_1 \equiv \partial\Omega^-$ и $\partial\Omega_2 \equiv \partial\Omega^+$. Так что область Ω есть объединение областей Ω_1 и Ω_2 и внутренних точек «контактной границы $\bar{S}$ » подобластей Ω_1 и Ω_2 , а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω (в отличие от S -внутренней границы области Ω). Далее, будем обозначать через $\bar{\Gamma}_k$ – границы областей Ω_k без S , $k = 1, 2$, так что $\partial\Omega_1 = \bar{\Gamma}_1 \cup S$, $\partial\Omega_2 = \bar{\Gamma}_2 \cup S$, где части Γ_k , $k = 1, 2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ ($\bar{\Gamma}_k$ – оставшаяся часть $\partial\Omega_k$ после вычета S), $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega = \Gamma$. Через n_α , $\alpha = 1, 2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области Ω_α , $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее, $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω , то есть нормаль n направлена внутрь области Ω_2 . Ниже при постановке краевых задач, S – это прямая, вдоль которой разрывны коэффициенты и решения краевых задач, которые в областях Ω_1 и Ω_2 обладают некоторой гладкостью. В дальнейшем на кусках $\bar{\Gamma}_k$, $k = 1, 2$ границ $\partial\Omega_k$ положительной меры будут задаваться граничные условия определенного типа.

Пусть условия управляемого физического процесса позволяют моделировать его следующей задачей, а именно, рассмотрим следующую краевую задачу в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух подобластей Ω_1 и Ω_2 , разбитой на части внутренней границей S .

Задача А. Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\bar{\Omega}$ вида $u(x) = u_1(x)$, $x \in \bar{\Omega}_1 = \Omega^-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \bar{\Omega}_2 = \Omega^+$, где компоненты $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют условиям:

1) Функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$, определенные на $\bar{\Omega}_k = \Omega_k \cup \partial\Omega_k$, удовлетворяют в Ω_k уравнениям

$$L_k u_k = - \sum_{k=1}^2 \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(k)}(x) \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right) + d_k(x) q_k(u_k) = f_k(x), \quad \text{в } \Omega_k, \quad k = 1, 2, \quad (2.1)$$

а на границах $\partial\Omega_k \setminus S = \bar{\Gamma}_k$ условиям

$$u_k(x) = 0, \quad x \in \bar{\Gamma}_k, \quad k = 1, 2 \quad (2.2)$$

2) Искомые функции $u_k(x)$, $k = 1, 2$, удовлетворяют еще дополнительным условиям на S – границе разрыва коэффициентов и решения, позволяющим «сшить» решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль контактной границы S областей Ω_1 и Ω_2 , следующего вида:

$$g(x) = k_1^{(1)}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = k_1^{(2)}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = \theta(x_2) (u_2(x) - u_1(x)), \quad x \in S. \quad (2.3)$$

Если ввести функции вида

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases} \quad (2.4)$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x), q(\xi) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), q_1(\xi), & x \in \Omega_1; \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), q_2(\xi), & x \in \Omega_2, \quad \alpha = 1, 2, \end{cases} \quad (2.5)$$

то задачу (2.1) – (2.3) можно переписать в более компактном виде:

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\bar{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 полулинейному уравнению

$$Lu(x) = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + d(x) q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2, \quad (2.6)$$

граничным условиям на внешней границе $\partial\Omega$ и условиям сопряжения на внутренней границе S (на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2)

$$\begin{aligned} u(x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = (\partial\Omega_1 \setminus S) \cup (\partial\Omega_2 \setminus S), \\ [k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}] &= 0, \quad g(x) = (k_1(x) \frac{\partial u}{\partial x_1}) = \theta(x_2)[u], \quad x \in S, \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+ - u^-$ – скачок функции $u(x)$ на S , а $k_\alpha^{(1)}(x), k_\alpha^{(2)}(x), d(x), f(x)$ и $q(\xi)$, $\alpha = 1, 2$ – известные функции, определяемые по-разному в Ω_1 и Ω_2 , обладающие некоторыми условиями гладкости в соответствующих областях Ω_k , $k = 1, 2$, претерпевающими разрыв на S первого рода; $f_1(x) \equiv g(x)$ – управление. Относительно заданных функций будем предполагать: $k_\alpha(x) \in W_\infty^1(\Omega_1) \times W_\infty^1(\Omega_2)$, $0 < \nu \leq k_\alpha(x) \leq \bar{\nu}$, $\alpha = 1, 2$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, $d(x) \in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2)$, $0 \leq d_0 \leq d(x) \leq \bar{d}_0$, $x \in \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\theta(x_2) \in L_\infty(S)$, $0 < \theta_0 \leq \theta(x_2) \leq \bar{\theta}_0$, $x \in S$, $f_2(x) \in L_2(\Omega_2)$, $\nu, \bar{\nu}, d_0, \bar{d}_0, \theta_0, \bar{\theta}_0$ – заданные константы; функции $q_\alpha(\xi)$ определены на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathbb{R}$ и удовлетворяют условиям: $q_\alpha(0) = 0$, $0 \leq q^0 \leq \frac{q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)}{\xi_1 - \xi_2} \leq L_q < \infty$, для всех $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$, $\xi_1 \neq \xi_2$.

Введем множество допустимых управлений

$$U = \{g(x) = f_1(x) \in H^{(1)} = L_2(\Omega_1) : g_0 \leq g(x) \leq \bar{g}_0 \text{ п.в. на } \Omega_1\}, \quad (2.8)$$

$g_0, \bar{g}_0$ – заданные числа, а п.в. – почти всюду. Зададим функционал цели $J : U \rightarrow \mathbb{R}$ в виде

$$g \rightarrow J(g) = \int_{\Omega_1} \left| u(x_1, x_2; g) - u_0^{(1)}(x) \right|^2 d\Omega_1 = I(u(x, g)), \quad (2.9)$$

где $u_0^{(1)} \in W_2^1(\Omega_1)$ – заданная функция. Задача оптимального управления состоит в том, чтобы найти такое управление $g_* \in U$, которое минимизирует на множестве $U \subset H^{(1)}$ функционал цели $g \rightarrow J(g)$, точнее, на решениях $u(x) = u(x; g)$ задачи (2.6) – (2.7), отвечающих всем допустимым управлениям $g = f_1 \in U$, требуется минимизировать функционал цели (2.9).

Введем в рассмотрение пространство $V(\Omega^{(1,2)})$, $\Omega^{(1,2)} = \Omega_1 \cup \Omega_2$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$V(\Omega^{(1,2)}) = \{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\}. \quad (2.10)$$

Здесь $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ – Соболевское пространство функций, заданных в подобластях Ω_k , $k = 1, 2$, с границей $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ и нормой [1]

$$\|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)} = \int_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)^2 + u_k^2 \right] d\Omega_k, \quad k = 1, 2. \quad (2.11)$$

Снабженное скалярным произведением и нормой

$$(u, v)_V = (u_1, v_1)_{W_2^1(\Omega_1)} + (u_2, v_2)_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad \|u\|_V^2 = \sum_{k=1}^2 \|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)}^2, \quad (2.12)$$

$V = V(\Omega^{(1,2)})$ является гильбертовым пространством.

Можно показать, что в гильбертовом пространстве $V(\Omega^{(1,2)})$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k + \int_S [u]^2 dS. \quad (2.13)$$

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$. Через $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega}_k)$, равных нулю вблизи $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \{u(x) = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\} \quad (2.14)$$

с нормой (2.13):

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} = \|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \int_S [u]^2 dS. \quad (2.15)$$

Обобщенным решением задачи А будем называть такую функцию $u(x) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} Q(u, \vartheta) &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial \vartheta}{\partial x_\alpha} + d(x) q(u) \vartheta \right] d\Omega^{(1,2)} + \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \theta(x) [u] [\vartheta] dS = \\ &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x) \vartheta d\Omega^{(1,2)} = l(\vartheta), \quad \forall \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}). \end{aligned} \quad (2.16)$$

Т е о р е м а 2.1. При любом $g \in U$ существует единственное обобщенное решение $u(x) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$ задачи А в смысле определения (2.16). Задача о нахождении обобщенного решения из (2.16) эквивалентна решению операторного уравнения $Au = F$, где нелинейный оператор $A : \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2} \rightarrow \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}$ определяется равенством $(Au, \vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} = Q(u, \vartheta)$, $\forall u, \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, а правая часть $F \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$ определяется соотношением $(F, \vartheta)_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} = l(\vartheta)$, $\forall \vartheta \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)})$, причем справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{\overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} \leq C \sum_{k=1}^2 \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}.$$

В дальнейшем, при исследовании разностных аппроксимаций задач оптимального управления по состоянию и функционалу сделаем относительно гладкости решения прямой задачи следующее предположение (аналогичное предположению, сделанному в работе [12], с.16 при исследовании там разностных схем для задачи с такими же условиями сопряжения), а именно: решение краевой задачи А принадлежит $W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)$, точнее, принадлежит пространству

$$\overset{\circ}{\hat{V}}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) = \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega^{(1,2)}) \cap \{u = (u_1, u_2) \in W_2^2(\Omega_1) \times W_2^2(\Omega_2)\}, \quad (2.17)$$

и при каждом фиксированном управлении $g \in U$ справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^2 \|u_k(x, g)\|_{W_2^2(\Omega_k)} \leq M \sum_{k=1}^2 \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}, \quad \forall g \in U, \quad (2.18)$$

где $M = \text{Const} > 0$, не зависящая от управления $g(x) = f_1(x) \in U$.

Рассмотрим теперь задачу оптимального управления (2.6)-(2.9). Справедлива следующая теорема о разрешимости экстремальной задачи (2.6)-(2.9).

Т е о р е м а 2.2. *Существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $g_* \in U$ задачи (2.6)-(2.9), т.е. $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$. Множество точек минимума U_* функционала цели $J(g)$ в экстремальной задаче (2.6)-(2.9) слабо бикомпактно в $H^{(1)} = L_2(\Omega_1)$. Любая минимизирующая последовательность $\{g^{(n)}\}_{n=1}^\infty \subset U$ функционала $J(g)$ слабо в $H^{(1)}$ сходится к множеству U_* .*

3. Разностная аппроксимация задач для состояния с разрывными коэффициентами и решением. Корректность аппроксимаций

Рассмотрим задачу оптимального управления (2.6)-(2.9) с разрывными коэффициентами и разрывным решением. Для аппроксимации задачи (2.6)-(2.9) и исследования сходимости разностных аппроксимаций нам понадобятся некоторые сетки на $[0, l_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$, скалярные произведения и нормы в $\bar{\Omega}$ (по поводу определения сеток, норм и скалярных произведений см. [8]).

Определим сеточные аналоги скалярных произведений следов сеточных функций $y_k(x)$ и $\nu_k(x)$, $x \in \bar{\omega}^{(k)}$ на границах $\partial\omega^{(k)}$ сеток $\omega^{(k)}$, $k = 1, 2$:

$$(y_k, \nu_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum_{x \in \partial\omega^{(k)}} y_k(x) \nu_k(x) \tau_k(x), \quad k = 1, 2,$$

и сеточные аналоги норм $L_2(\partial\omega^{(k)})$, порождаемые этими скалярными произведениями

$$\|y_k\|_{L_2(\partial\omega^{(k)})}^2 = (y_k, y_k)_{L_2(\partial\omega^{(k)})} = \sum_{\partial\omega^{(k)}} y_k^2(x) \tau_k(x), \quad k = 1, 2,$$

$$\tau_1(x) = \begin{cases} h_1(x_1), & x_1 \in \omega_1^{(1)}, x_2 = 0, l_2; \\ h_2(x_2), & x_2 \in \omega_2, x_1 = 0, \xi; \\ \frac{h_1(x_1) + h_2(x_2)}{2}, & x \in \tilde{\gamma}^{(1)}, \end{cases}$$

$$\tau_2(x) = \begin{cases} h_1(x_1), & x_1 \in \omega_1^{(1)}, x_2 = 0, l_2; \\ h_2(x_2), & x_2 \in \omega_2, x_1 = \xi, l_1; \\ \frac{h_1(x_1) + h_2(x_2)}{2}, & x \in \tilde{\gamma}^{(2)}, \end{cases}$$

$\tilde{\gamma}^{(k)}$ – множество угловых точек прямоугольника Ω_k , $k = 1, 2$. В подробной записи, например, сеточный аналог нормы будет $L_2(\partial\omega^{(1)})$ определяться с помощью выражения

$$\|y_1\|_{L_2(\partial\omega^{(1)})}^2 = \sum_{x_2 \in \bar{\omega}_2} [y_1^2(0, x_2) + y_1^2(\xi, x_2)] h_2(x_2) + \sum_{x_1 \in \bar{\omega}_1} [y_1^2(x_1, 0) + y_1^2(x_1, l_2)] h_1(x_1).$$

Пусть теперь $\overset{0}{\gamma}^{(k)} = \partial\omega^{(k)} \cap \overset{0}{\Gamma}_k \equiv \partial\omega^{(k)} \setminus S_\xi$ – подмножество граничных узлов $\partial\omega^{(k)}$ сетки $\bar{\omega}^{(k)} \subset \bar{\Omega}_k$, $k = 1, 2$. Через $L_2(\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $L_2(\bar{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$ с нормами

$$\|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)})}^2 = \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k^2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in S_\xi} y_k^2(x) h_1 h_2 = \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k^2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x_2 \in \omega_2} y_k^2(\xi, x_2) h_1 h_2,$$

$k = 1, 2$, индуцированными скалярными произведениями

$$(y_k, \nu_k)_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)})} = \sum_{x \in \omega^{(k)}} y_k(x) \nu_k(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in S_\xi} y_k(x) \nu_k(x) h_1 h_2, \quad k = 1, 2.$$

В дальнейшем $\|y_k\|_{L_2(S_\xi)}^2 = \sum_{x \in S_\xi} y^2(x) h_2 = \sum_{x_2 \in \omega_2} y^2(\xi, x_2) h_2$. Нетрудно видеть, что

$$(y_1, \nu_1)_{L_2(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)})} = (y_1, \nu_1)_{L_2(\omega^{(1)} \times \omega_2)}, \quad (y_2, \nu_2)_{L_2(\bar{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})} = (y_2, \nu_2)_{L_2(\omega^{(2)} \times \omega_2)}.$$

Через $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)})$ обозначим подпространство пространства сеточных функций $W_2^1(\bar{\omega}^{(k)})$, обращающихся в нуль на $\gamma^{(k)}$, $k = 1, 2$ справедливы неравенства

$$\|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)})}^2 \leq C_{\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)}} \|\nabla y_k\|^2, \quad C_{\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)}} = \text{Const} > 0, \quad k = 1, 2.$$

Введем в рассмотрение пространство $\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ и $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ пар сеточных функций $y = (y_1, y_2) : \overset{0}{H}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in L_2(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)}) \times L_2(\bar{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})\}$, $\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)}) = \{y(x) = (y_1(x), y_2(x)) \in W_2^1(\bar{\omega}^{(1)}, \gamma^{(1)}) \times W_2^1(\bar{\omega}^{(2)}, \gamma^{(2)})\}$, с нормами

$$\|y\|_{\overset{0}{H}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}}^2 = \sum_{k=1}^2 \|y_k\|_{L_2(\bar{\omega}^{(k)}, \gamma^{(k)})}^2, \quad \|y\|_{\overset{0}{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}}^2 = \sum_{k=1}^2 \|\nabla y_k\|^2 + \|[y]\|_{L_2(S_\xi)}^2. \quad (3.1)$$

Через $e_1^{(1)}(x_1)$ будем обозначать элементарные ячейки отрезка $[0, \xi] : e_1^{(1)}(x_1) = \{r_1 : x_1 - 0.5h_1 \leq r_1 \leq x_1 + 0.5h_1\}$, $x_1 \in \omega_1^{(1)} \subset [0, \xi]$, $e_1^{(1)}(0) = \{r_1 : 0 \leq r_1 \leq 0.5h_1\}$, $e_1^{(1)}(\xi) = \{r_1 : \xi - 0.5h_1 \leq r_1 \leq \xi\}$, а через $e_1^{(2)}(x_1)$ – элементарные ячейки отрезка $[\xi, l_1] : e_1^{(2)}(x_1) = \{r_1 : x_1 - 0.5h_1 \leq r_1 \leq x_1 + 0.5h_1\}$, $x_1 \in \omega_1^{(2)} \subset [\xi, l_1]$, $e_1^{(2)}(\xi) = \{r_1 : \xi \leq r_1 \leq \xi + 0.5h_1\}$, $e_1^{(2)}(l_1) = \{r_1 : l_1 - 0.5h_1 \leq r_1 \leq l_1\}$. Введем также элементарные ячейки отрезка $[0, l_2] : e_2(x_2) = \{r_2 : x_2 - 0.5h_2 \leq r_2 \leq x_2 + 0.5h_2\}$, $x_2 \in \omega_2 \subset [0, l_2]$, $e_2(0) = \{r_2 : 0 \leq r_2 \leq 0.5h_2\}$, $e_2(l_2) = \{r_2 : l_2 - 0.5h_2 \leq r_2 \leq l_2\}$. Далее, через $e^{(1)}(x) \equiv e^{(1)}(x_1, x_2) = e^{(1)}(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2 \subset \bar{\Omega}_1$ будем обозначать элементарные ячейки области $\bar{\Omega}_1$, а через $e^{(2)}(x) \equiv e^{(2)}(x_1, x_2) = e^{(2)}(x_1) \times e_2(x_2)$, $x \in \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}_1^{(2)} \times \bar{\omega}_2 \subset \bar{\Omega}_2$ – элементарные ячейки области $\bar{\Omega}_2$. Пусть $\nu(x) = \nu_1(x)$, $x \in \bar{\Omega}_1$. Определим для функций $\nu_1(x)$, $x \in \bar{\Omega}_1$ усредняющие операторы по Стеклову S^{x_α} по переменным x_α :

$$S^{x_1} \nu_1(x) = \frac{1}{h_1} \int_{e_1^{(1)}(x_1)} \nu_1(r_1, x_2) dr_1, \quad x_1 \in \bar{\omega}_1^{(1)}, \quad h_1 = \bar{h}_1(x_1) = \begin{cases} h_1, & x_1 \in \omega_1^{(1)}, \\ 0.5h_1, & x_1 = 0, \xi, \end{cases}$$

$$S^{x_2} \nu_1(x) = \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} \nu_1(x_1, r_2) dr_2, \quad x_2 \in \bar{\omega}_2, \quad h_2 = \bar{h}_2(x_2) = \begin{cases} h_2, & x_2 \in \omega_2, \\ 0.5h_2, & x_2 = 0, l_2, \end{cases}$$

С помощью одномерных операторов S^{x_α} , действующих по направлению x_α , $\alpha = 1, 2$, определим усредняющий оператор $S^x = S^{x_1} S^{x_2}$ как произведение одномерных усредняющих операторов. Аналогично определяются усредняющие операторы по Стеклову для функций $\nu_2(x)$, $x \in \bar{\Omega}_2$. В дальнейшем через $H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup S_\xi) \equiv L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)$ будем обозначать пространство сеточных управлений $\Phi_h(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi$, заданных на сетке $\omega^{(1)} \cup S_\xi$ со скалярным произведением и нормой:

$$(\Phi_h, \tilde{\Phi}_h)_{H_h^{(1)}} = (\Phi_h, \tilde{\Phi}_h)_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} = \sum_{x \in \omega^{(k)}} \Phi_h(x) \tilde{\Phi}_h(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{x \in S_\xi} \Phi_h(x) \tilde{\Phi}_h(x) h_1 h_2, \\ \|\cdot\|_{H_h^{(1)}(\omega^{(1)} \cup S_\xi)}^2 = (\Phi_h, \Phi_h)_{H_h^{(1)}}.$$

Задачам оптимального управления (2.6) – (2.9) поставим в соответствие следующие разностные аппроксимации: минимизировать сеточный функционал

$$J_h(\Phi_h) = \sum_{x \in \bar{\omega}^{(1)}} |y(x; \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)|^2 h_1 h_2 = \|y(x; \Phi_h) - u_{0h}^{(1)}(x)\|_{L_2(\bar{\omega}^{(1)})}^2, \quad (3.2)$$

при условиях, что сеточная функция $y(x) \equiv y(x; \Phi_h) = (y_1(x; \Phi_h), y_2(x; \Phi_h)) \in V_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}^0$, называемая решением разностной краевой задачи для задачи (2.6) – (2.7), удовлетворяет для любой сеточной функции $\nu(x) = (\nu_1(x), \nu_2(x)) \in V_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}^0$ сумматорному тождеству

$$Q_h(y, v) = \left\{ \sum_{\omega_1^{(1)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_1} v_{1\bar{x}_1} h_1 h_2 + \left(\sum_{\omega_1^{(1)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(x) y_{1\bar{x}_2} v_{1\bar{x}_2} h_1 h_2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) y_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{1\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \left\{ \sum_{\omega_1^{(2)+}} \sum_{\omega_2} a_{1h}^{(2)}(x) y_{2\bar{x}_1} v_{2\bar{x}_1} h_1 h_2 + \right. \\ \left. + \left(\sum_{\omega_1^{(2)}} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(x) y_{2\bar{x}_2} v_{2\bar{x}_2} h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2^+} a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) y_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) v_{2\bar{x}_2}(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \\ + \left\{ \left(\sum_{\omega^{(1)}} d_{1h}(x) q_1(y_1(x)) \nu_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{1h}(\xi, x_2) q_1(y_1(\xi, x_2)) \nu_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \\ \left. + \left\{ \left(\sum_{\omega^{(2)}} d_{2h}(x) q_2(y_2(x)) \nu_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} d_{2h}(\xi, x_2) q_2(y_2(\xi, x_2)) \nu_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} + \right. \\ \left. + \sum_{\omega_2} \theta_h(x_2) [y(\xi, x_2)] [\nu(\xi, x_2)] h_2 = \left\{ \left(\sum_{\omega^{(1)}} \Phi_h(x) \nu_1(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} \Phi_h(\xi, x_2) \nu_1(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\sum_{\omega^{(2)}} f_{2h}(x) \nu_2(x) h_1 h_2 + \frac{1}{2} \sum_{\omega_2} f_{2h}(\xi, x_2) \nu_2(\xi, x_2) h_1 h_2 \right) \right\} = l_h(\Phi, v), \quad (3.3)$$

а сеточные управления $\Phi_h(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi$ таковы, что

$$\Phi_h(x) \in U_h = \{\Phi_h(x) \in H_h^{(1)} = L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi) : g_0 \leq \Phi_h(x) \leq \bar{g}_0, \quad x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi\}. \quad (3.4)$$

Здесь $a_{\alpha h}^{(1)}(x)$, $a_{\alpha h}^{(2)}(x)$, $d_{\alpha h}(x)$, $\alpha = 1, 2$, $\theta_h(x_2)$, $f_{2h}(x)$, $u_{0h}^{(1)}(x)$ – сеточные аппроксимации функций $k_\alpha^{(1)}(x)$, $k_\alpha^{(2)}(x)$, $d_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $\theta(x_2)$, $f_2(x)$, $u_0^{(1)}(x)$, определяемые через усреднения по Стеклову:

$$a_{1h}^{(\alpha)}(x_1, x_2) = \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} k_1^{(\alpha)}(x_1 - 0.5h_1, r_2) dr_2, \quad x \in \omega_1^{(\alpha)+} \times \omega_2, \quad \alpha = 1, 2;$$

$$\begin{aligned}
a_{2h}^{(\alpha)}(x_1, x_2) &= \frac{1}{h_1} \int_{e_1^{(\alpha)}(x_1)} k_2^{(\alpha)}(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr_1, \quad x \in \omega_1^{(\alpha)} \times \omega_2^+, \quad \alpha = 1, 2; \\
a_{2h}^{(1)}(\xi, x_2) &= \frac{2}{h_1} \int_{\xi-0.5h_2}^{\xi} k_2^{(1)}(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr, \quad x_2 \in \omega_2^+; \\
a_{2h}^{(2)}(\xi, x_2) &= \frac{2}{h_1} \int_{\xi+0.5h_2}^{\xi} k_2^{(2)}(r_1, x_2 - 0.5h_2) dr, \quad x_2 \in \omega_2^+; \\
d_{\alpha h}(x) &= \frac{1}{h_1 h_2} \int \int_{e^{(\alpha)}(x)} d_{\alpha}(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x \in \omega^{(\alpha)}, \quad \alpha = 1, 2; \\
d_{1h}(\xi, x_2) &= \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi-0.5h_1 e_2(x_2)}^{\xi} \int d_1(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2; \\
d_{2h}(\xi, x_2) &= \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} d_2(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2; \\
f_{2h}(x) &= \frac{2}{h_1 h_2} \int \int_{e^2(x)} f_2(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x \in \omega^{(2)}, \quad x_2 \in \omega_2; \\
f_{2h}(\xi, x_2) &= \frac{2}{h_1 h_2} \int_{\xi}^{\xi+0.5h_1} \int_{e_2(x_2)} f_2(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x_2 \in \omega_2; \\
\theta_h(x_2) &= \frac{1}{h_2} \int_{e_2(x_2)} \theta(r_2) dr_2, \quad x_2 \in \omega_2; \\
u_{0h}^{(1)}(x) &= \frac{1}{h_1 h_2} \int \int_{e^{(1)}(x)} u_0^{(1)}(r_1, r_2) dr_1 dr_2, \quad x \in \bar{\omega}^{(1)} = \bar{\omega}_1^{(1)} \times \bar{\omega}_2.
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Т е о р е м а 3.1. Задача о нахождении решения разностной схемы (3.3) при любом фиксированном управлении $\Phi_h \in U_h$ эквивалентна решению операторного уравнения $A_h u = F_h$, где A_h – разностный оператор, действующий из $\mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ в $\mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ и сеточная функция $F \in \mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ определяются равенствами $(A_h u, \vartheta)_{\mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}} = Q_h(u, \vartheta)$, $(F_h, \vartheta)_{\mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}} = l_h(\vartheta)$, $\forall u, \vartheta \in \mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})$; задача (разностная схема) (3.3) однозначно разрешима для любого сеточного управления $\Phi_h \in U_h$, причем справедлива априорная оценка

$$\|y(x, \Phi_h)\|_{\mathring{V}_{\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}}(\bar{\omega}^{(1,2)})} \leq M(\|f_{2h}\|_{L_2(\omega^{(2)} \cup S_{\xi})} + \|\Phi_h\|_{L_2(\omega^{(2)} \cup S_{\xi})}). \tag{3.6}$$

Т е о р е м а 3.2. Для каждого $h > 0$ существует, по крайней мере, одно оптимальное управление $\Phi_{h*} \in U_h$ в последовательности сеточных экстремальных задач (3.2) – (3.5), т.е. $J_* = \inf\{J(g) : g \in U\} > -\infty$, $U_* = \{g_* \in U : J(g_*) = J_*\} \neq \emptyset$.

4. Априорные оценки погрешности и скорости сходимости сеточных экстремальных задач по состоянию

Установим связь между $u(r; g)$ – решением прямой задачи (2.6) с разрывными коэффициентами и решением и $y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h))$ – решением аппроксими-

рующей ее разностной задачи состояния (3.3) при $h \rightarrow 0$, для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, где U и U_h – множества допустимых управлений в задачах оптимального управления (2.6)-(2.9) и (3.2) – (3.5) соответственно. Пусть $u(r; g) = (u_1(r; g), u_2(r; g)) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$ – решение прямой задачи (2.6), отвечающее допустимому управлению $g \in U$, а $y(x, \Phi_h) = (y_1(x, \Phi_h), y_2(x, \Phi_h)) \in \overset{\circ}{V}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\bar{\omega}^{(1,2)})$ – решение задачи (3.3), отвечающее сеточному управлению $\Phi_h \in U_h$. Обозначим через $z(x) \equiv z(x; g, \Phi_h) = (z_1(x; g, \Phi_h), z_2(x; g, \Phi_h)) = (y_1(x; \Phi_h) - u_1(x; g), y_2(x; \Phi_h) - u_2(x; g))$ – погрешность метода по состоянию.

Априорную оценку погрешности метода по состоянию устанавливает

Т е о р е м а 4.1. Пусть $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ – произвольные управления, а $u(r; g)$ и $y(x, \Phi_h)$ – соответствующие им решения задач состояния в экстремальных задачах (2.6)-(2.9) и (3.2) – (3.5). Тогда для любых $h > 0$ справедлива следующая оценка скорости сходимости метода сеток по состоянию для экстремальной задачи (2.6)-(2.9):

$$\begin{aligned} \|z(x; g, \Phi_h)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma(1), \gamma(2)}(\bar{\omega}^{(1,2)})} &= \|y(x; \Phi_h) - u(x; g)\|_{\overset{\circ}{V}_{\gamma(1), \gamma(2)}(\bar{\omega}^{(1,2)})} \leq \\ &\leq C \left\{ |h| \left[\sum_{\alpha=1}^2 (\|k_1^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + \sum_{\alpha=1}^2 \|k_2^{(\alpha)}\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)} + L q_\alpha \|d_\alpha\|_{L_\infty(\Omega_\alpha)}) \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \|\theta\|_{L_\infty(0, t_2)} \sum_{\alpha=1}^2 \|u_\alpha\|_{W_2^2(\Omega_\alpha)} \right] + \|S^x f_1(x) - \Phi_h(x)\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)} \right\}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

5. Оценки погрешности сеточного функционала и скорости сходимости сеточных аппроксимаций по функционалу, сходимости по управлению. Регуляризация аппроксимаций

Для ответа на вопрос о сходимости сеточных задач оптимального управления (3.2) – (3.5) по функционалу и управлению необходимо, прежде всего, установить связь между функционалами $J_h(\Phi_h)$ и $J(g)$ экстремальных задач (2.6)-(2.9) и (3.2) – (3.5), для любых фиксированных управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$, и любых $h > 0$.

Оценку погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи (3.2) – (3.5) устанавливает следующая

Т е о р е м а 5.1. Для любых управлений $g \in U$ и $\Phi_h \in U_h$ экстремальных задач (2.6)-(2.9) и (3.2) – (3.5) соответственно и любых $h > 0$ для погрешности сеточного функционала $J_h(\Phi_h)$ экстремальной задачи (3.2) – (3.5) справедлива оценка:

$$|J(g) - J_h(\Phi_h)| = |I(u(r; g)) - I_h(y(x; \Phi_h))| \leq M[|h| + \|S^x f_1(x) - \Phi_h(x)\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi)}], \quad (5.1)$$

где $M = \text{Const} > 0$, не зависящая от h , y , u , Φ_h , g .

Рассмотрим сеточные управления $\Phi_h(x)$, $x = (x_1, x_2) \in \omega^{(1)} \cup S_\xi = \omega^{(1)+} \times \omega_2$ и определим кусочно-постоянные восполнения на Ω_1 сеточных управлений $\Phi_h(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi$ по формуле

$$\hat{g}_h(r) = \hat{P}_{1h} \Phi_h(r) = \Phi_h(x), \quad r \in \hat{e}^{(1)}(x), \quad x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi, \quad (5.2)$$

где $\hat{e}^{(1)}(x) \subset \bar{\Omega}_1$ – элементарные ячейки области $\bar{\Omega}_1$:

$$\begin{aligned}
\hat{e}^{(1)}(x_1, x_2) &= e^{(1)}(x_1, x_2) = e_1^{(1)}(x_1) \times e_2^{(1)}(x_2), \quad x_1 = 2h_1, 3h_1, \dots, \xi - h_1, \\
x_2 &= 2h_2, 3h_2, \dots, l_2 - h_2; \\
\hat{e}(h_1, h_2) &= \{0 \leq r_1 \leq 1.5h_1, 0 \leq r_2 \leq 1.5h_2\}; \\
\hat{e}(h_1, x_2) &= \{0 \leq r_1 \leq 1.5h_1, x_2 - 0.5h_2 \leq r_2 \leq x_2 + 0.5h_2\}, \quad x_2 = 2h_2, 3h_2, \dots, l_2 - 2h_2; \\
\hat{e}(h_1, l_2 - h_2) &= \{0 \leq r_1 \leq 1.5h_1, l_2 - 1.5h_2 \leq r_2 \leq l_2\}; \\
\hat{e}(\xi, h_2) &= \{\xi - 0.5h_1 \leq r_1 \leq \xi, 0 \leq r_2 \leq 1.5h_2\}; \\
\hat{e}(\xi, x_2) &= \{\xi - 0.5h_1 \leq r_1 \leq \xi, x_2 - 0.5h_2 \leq r_2 \leq x_2 + 0.5h_2\}, \quad x_2 = 2h_2, 3h_2, \dots, l_2 - 2h_2; \\
\hat{e}(\xi, l_2 - h_2) &= \{\xi - 0.5h_1 \leq r_1 \leq \xi, l_2 - 1.5h_2 \leq r_2 \leq l_2\}; \\
\hat{e}(x_1, l_2 - h_2) &= \{x_1 - 0.5h_1 \leq r_1 \leq x_1 + 0.5h_1, l_2 - 1.5h_2 \leq r_2 \leq l_2\}, \\
x_1 &= 2h_1, 3h_1, \dots, \xi - h_1; \\
\hat{e}(x_1, h_2) &= \{x_1 - 0.5h_1 \leq r_1 \leq x_1 + 0.5h_1, 0 \leq r_2 \leq 1.5h_2\}, \quad x_1 = 2h_1, 3h_1, \dots, \xi - h_1.
\end{aligned} \tag{5.3}$$

Для исследования сходимости разностных аппроксимаций задач оптимального управления (2.6)-(2.9) по функционалу и управлению рассмотрим последовательность разностных задач минимизации (3.2) – (3.5), зависящих от шага $h = (h_1, h_2)$ сетки $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}^{(1,2)} \subset \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ при $|h| \rightarrow 0$. Для исследования связи между экстремальными задачами (2.6)-(2.9) и (3.2) – (3.5) введем отображения:

$$R_{1h} : H^{(1)} = L_2(\Omega_1) \rightarrow H_h^{(1)} = L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi), \quad \hat{P}_{1h} : H_h^{(1)} = L_2(\omega^{(1)} \cup S_\xi) \rightarrow L_2(\Omega_1) = H^{(1)}, \tag{5.4}$$

которые определим следующим образом: $R_{1h}g = R_{1h}f_1 = \Phi_h$, $\hat{P}_{1h}\Phi_h = g$, где $\hat{P}_{1h}\Phi_h(r)$ кусочно-постоянное восполнение на Ω_1 сеточного управления $\Phi_h(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi$, определяемое формулой (5.2), а $R_{1h}g = R_{1h}f_1 = S^x f_1(x)$, $x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi$ – дискретизации на сетке $x \in \omega^{(1)} \cup S_\xi$ управления $g(r) \equiv f_1(r) = f_1(r_1, r_2)$, $r \in \Omega_1$, где $S^x = S^{x_1}S^{x_2}$ – оператор усреднения по Стеклову.

Т е о р е м а 5.2. Пусть J_* и J_{h*} – нижние грани функционалов $J(g)$ и $J_h(\Phi_h)$ в экстремальных задачах (2.6)-(2.9) и (3.2) – (3.5) соответственно. Семейство сеточных задач (3.2) – (3.5), зависящих от шага $h = (h_1, h_2)$ сетки $\bar{\omega} = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)} = \bar{\omega}^{(1,2)} \subset \bar{\Omega}_1 \cup \bar{\Omega}_2$ при $|h| \rightarrow 0$ аппроксимирует исходную экстремальную задачу (2.6)-(2.9) по функционалу, т.е. $\lim J_{h*} = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, и справедлива оценка скорости сходимости

$$|J_{h*} - J_*| \leq M|h|. \tag{5.5}$$

Предположим теперь, что при каждом $h = (h_1, h_2)$ и соответствующей сетки $\bar{\omega} = \bar{\omega}_h = \bar{\omega}^{(1)} \cup \bar{\omega}^{(2)}$ с помощью какого-либо метода минимизации получено приближенное значение $J_{h*} + \varepsilon_h$ нижней грани J_{h*} функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h в задаче (3.2) – (3.5) и найдено сеточное управление $\Phi_{h\varepsilon_h}(x) \in U_h$, дающее приближенное решение задачи (3.2) – (3.5) в следующем смысле:

$$J_{h*} \leq J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) \leq J_{h*} + \varepsilon_h, \quad \Phi_{h\varepsilon_h} \in U_h, \tag{5.6}$$

где последовательность ε_h такова, что $\varepsilon_h \geq 0$ и $\varepsilon_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$. Здесь последовательность ε_h характеризует точность решения задачи минимизации функционала $J_h(\Phi_h)$ на U_h .

Возникает вопрос, можно ли принять сеточное управление $\Phi_{h\varepsilon_h}(x) \in U_h$ из (5.6) в качестве некоторого приближения оптимального управления задачи (2.6)-(2.9).

Т е о р е м а 5.3. Пусть последовательность сеточных управлений $\{\Phi_{h\varepsilon_h}\} \subset U_h$ определена из условий (5.6). Тогда последовательность управлений $\{\hat{P}_{1h}\Phi_{h\varepsilon_h}(r)\}$, где

$\hat{P}_{1h} : H_h^{(1)} \rightarrow H^{(1)}$ – отображение, определяемое из (5.4), является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной задачи (2.6)-(2.9), то есть $\lim J(\hat{P}_{1h}\Phi_{h\varepsilon_h}) = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$ и справедлива оценка скорости сходимости

$$0 \leq J(\hat{P}_{1h}\Phi_{h\varepsilon_h}) - J_* \leq C|h| + \varepsilon_h.$$

Последовательность $\{\hat{P}_{1h}\Phi_{h\varepsilon_h}(r)\}$ слабо в $H^{(1)} = L_2(\Omega_1)$ сходится к множеству $U_* \neq \emptyset$ оптимальных управлений исходной экстремальной задачи (2.6)-(2.9).

З а м е ч а н и е 5.1. Из оценки (5.5) и неравенства (5.6) нетрудно получить, что $\lim J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, причем справедлива оценка скорости сходимости

$$|J_h(\Phi_{h\varepsilon_h}) - J_*| \leq M|h| + \varepsilon_h.$$

Рассмотрим теперь вопрос о сильной сходимости в $H^{(1)} = L_2(\Omega_1)$ по аргументу (управлению) разностных аппроксимаций (3.2) – (3.5). В силу теоремы 2.2. задача (3.2) – (3.5) корректно поставлена в слабой топологии пространства $H^{(1)}$. Однако, вообще говоря, она является некорректно поставленной задачей минимизации по А.Н. Тихонову в сильной топологии пространства $H^{(1)}$, то есть нет основания ожидать, что любая минимизирующая последовательность (в том числе и последовательность из теоремы 5.3.) будет сходящейся в норме $H^{(1)} = L_2(\Omega_1)$ ко множеству U_* . Для разработки устойчивых алгоритмов построения сильно сходящихся минимизирующих последовательностей успешно применяется известный метод регуляризации А.Н. Тихонова [14]. Рассмотрим один вариант метода регуляризации А.Н. Тихонова, позволяющий построить для исходной экстремальной задачи минимизирующую последовательность получаемую на основе разностной аппроксимации, сильно сходящуюся к множеству « Ω -нормальных решений» задачи оптимального управления (2.6)-(2.9). Будем допускать, что вычисления сеточных функционалов $J_h(\Phi_h)$ ведутся приближенно, как в силу приближенной исходной информации, так и в силу того, что счет ведется с округлениями, так что вместо функционала $J_h(\Phi_h)$, фактически используется приближенный функционал $J_{h\delta_h}(\Phi_h)$, который связан с $J_h(\Phi_h)$ соотношениями

$$J_{h\delta_h}(\Phi_h) = J_h(\Phi_h) + \theta_{\delta_h}(\Phi_h), \quad |\theta_{\delta_h}(\Phi_h)| \leq \delta_h, \quad \forall \Phi_h \in U_h, \quad \delta_h \rightarrow +0 \text{ при } |h| \rightarrow 0.$$

Для регуляризации семейства сеточных экстремальных задач (3.2) – (3.5) введем на U функционал-стабилизатор $\Omega(g) = \|g\|_{H^{(1)}}^2 = \|g\|_{L_2(\Omega_1)}^2$, $g \in U$ и его сеточный аналог $\Omega_h(\Phi_h) = \|\Phi_h\|_{H_h^{(1)}}^2 = \|\Phi_h\|_{L_2(\omega^{(1)} \cup S_\varepsilon)}^2$, $\Phi_h \in U_h$. При каждом $h = (h_1, h_2)$ рассмотрим на U_h сеточный функционал Тихонова задачи (3.2) – (3.5): $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) = J_{h\delta_h}(\Phi_h) + \alpha_h\Omega(\Phi_h)$, $\Phi_h \in U_h$, где $\{\alpha_h\}$ – произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к нулю при $|h| \rightarrow 0$. Рассмотрим теперь задачу минимизации функционала $T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h)$ на U_h : при каждом $h = (h_1, h_2)$ определим сеточное управление $\hat{\Phi}_h = \Phi_{h\delta_h\alpha_h\nu_h} \in U_h$, удовлетворяющее условиям

$$T_{h\delta_h\alpha_h*} = \inf \{T_{h\delta_h\alpha_h}(\Phi_h) : \Phi_h \in U_h\} \leq T_{h\delta_h\alpha_h}(\hat{\Phi}_h) \leq T_{h\delta_h\alpha_h*} + \nu_h, \quad (5.7)$$

где $\nu_h \geq 0$ и $\nu_h \rightarrow +0$ при $|h| \rightarrow 0$. Введем множество Ω -нормальных решений задачи оптимального управления (2.6)-(2.9): $U_{**} = \{g_{**} \in U_* : \Omega(g_{**}) = \inf \Omega(g_*) : g_* \in U_*\}$.

Т е о р е м а 5.4. Пусть последовательность сеточных управлений $\{\hat{\Phi}_h\}$ определена из условий (5.7). Тогда последовательность $\{\hat{P}_{1h}\hat{\Phi}_h(r)\}$, где отображение $\hat{P}_{1h} :$

$H^{(1)} \rightarrow H^{(1)}$ определено в (5.4), является минимизирующей для функционала $J(g)$ исходной экстремальной задачи (2.6)-(2.9), то есть $\lim J(\hat{P}_{1h}\hat{\Phi}_h) = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$ и справедлива оценка скорости сходимости:

$$0 \leq J(\hat{P}_{1h}\hat{\Phi}_h) - J_* \leq M(|h| + \delta_h + \nu_h + \alpha_h).$$

Если, кроме того, последовательности $\{\alpha_h\}$, $\{\delta_h\}$, $\{\nu_h\}$ удовлетворяют условиям $\alpha_h, \delta_h, \nu_h > 0$, $\alpha_h, \delta_h, \nu_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, причем $\{\alpha_h\}$ стремится к нулю согласовано с величинами $|h|$, δ_h, ν_h так, что $(|h| + \nu_h + \delta_h)/\alpha_h \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$, то последовательность $\{\hat{P}_{1h}\hat{\Phi}_h\}$ сильно в $H^{(1)}$ сходится к множеству Ω -нормальных (в смысле минимальной нормы) оптимальных управлений U_{**} задачи (2.6)-(2.9), то есть

$$\begin{aligned} \lim \rho(\hat{P}_{1h}\hat{\Phi}_h; U_{**}) &= \liminf \{\|\hat{P}_{1h}\hat{\Phi}_h - g_{**}\|_{H^{(1)}} : g_{**} \in U_{**}\} = 0, \quad \text{при } |h| \rightarrow 0, \\ \lim \Omega(\hat{P}_{1h}\hat{\Phi}_h) &= \lim \Omega\|\hat{P}_{1h}\hat{\Phi}_h\|_{H^{(1)}}^2 = \Omega_* = \inf \Omega(g_*), \quad g_* \in U_*, \quad \text{при } |h| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

З а м е ч а н и е 5.2. Можно показать, что $\lim T_{h\delta_h\alpha_h*} = J_*$, $\lim T_{h\delta_h\alpha_h}(\hat{\Phi}_h) = J_*$ при $|h| \rightarrow 0$, причем справедливы оценки скорости сходимости:

$$|T_{h\delta_h\alpha_h*} - J_*| \leq M[|h| + \delta_h + \alpha_h], \quad |T_{h\delta_h\alpha_h}(\hat{\Phi}_h) - J_*| \leq M[|h| + \nu_h + \delta_h + \alpha_h].$$

З а м е ч а н и е 5.3. Полученные результаты не зависят от способа решения разностных задач минимизации (3.2) – (3.5).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ладыженская О. А., *Краевые задачи математической физики*, Наука, М., 1973.
2. Самарский А. А., Лазаров Р. Д., Макаров В. Л., *Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями*, Высшая школа, М., 1987.
3. Лубышев Ф. В., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для несамосопряженного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **31**:1 (1991), 17–30.
4. Лубышев Ф. В., *Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных*, БГУ, Уфа, 1999.
5. Лубышев Ф. В., Файрузов М. Э., “Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **41**:8 (2001), 1148–1164.
6. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах”, *Журнал вычисл. матем. и матем. физики*, **47**:3 (2007), 376–396.
7. Лубышев Ф. В., Манапова А. Р., “О разностной аппроксимации задачи оптимального управления для эллиптического уравнения в произвольной области”, *Труды Средневолжского математического общества*, **11**:1 (2009), 133–144.

8. Ф.В. Лубышев, А.Р. Мананова, М.Э. Файрузов, “Разностные аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решениями”, *Труды Средневолжского математического общества*, **13:1** (2011), 32–44.
9. Самарский А.А., Андреев В.Б., *Разностные методы для эллиптических уравнений*, Наука, М., 1976.
10. Самарский А.А., Вабищевич П.Н., *Вычислительная теплопередача*, Книжный дом «ЛИБРОКОМ», М., 2009.
11. Карташов Э.М., *Аналитические методы в теории теплопроводности твердых тел*, Высшая школа, М., 1985.
12. Дренска Н.Т., “Точность численных алгоритмов для одномерной задачи об остывании металла в формах”, *Вестник Московск. университета*, **15:4**, Вычислит. матем. и кибернетика (1981), 15–21.
13. Васильев Ф.П., *Методы оптимизации*, Факториал Пресс, М., 2002.
14. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я., *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1986.

Approximations of optimal controlling problems for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solutions

© F.V. Lubyshev⁴, M.E. Fairuzov⁵, A.R. Mananova⁶

Abstract. Method of difference approximation of optimal controlling problem for semilinear elliptic equations with discontinuous coefficients and solution is stated.

Key Words: optimal controlling problem, semilinear elliptic equations, difference method of solution, functional, regularization method.

⁴ Full professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; v.lubyshev@mail.ru.

⁵ Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; fairuzovme@mail.ru.

⁶ Associate professor of Applied Informatics and Numerical Methods Chair, Bashkir State University, Ufa; aygulrm@mail.ru.

УДК 517.9

Аналитическое решение задачи о течении Куэтта

© В.В. Лукашев,¹ В.Н. Попов,² А.А. Юшканов³

Аннотация. На примере задачи о течении Куэтта предложен метод вычисления макропараметров газа в каналах, толщина которых соизмерима со средней длиной свободного пробега молекул газа. В качестве основного уравнения используется линеаризованная БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия на стенках канала - модель зеркально-диффузного отражения. Для различных значений толщины канала и коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала вычислены значения потоков массы газа и тепла, приходящихся на единицу ширины канала. Проведено сравнение с аналогичными результатами, опубликованными в открытой печати.

Ключевые слова: течение газа в канале, течение Куэтта, кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения

1. Введение

Моделирование течений разреженного газа имеет большое количество применений, среди которых течения в микро- и наноустройствах, изучение структуры ударных волн, явлений в кнудсеновском пограничном слое и т.д. [1]. При этом для расчета макропараметров газа в общем случае используют методы прямого численного моделирования, основанные на том, что уравнение Больцмана решается конечно-разностным методом на фиксированной сетке в пространстве скоростей и координат, а искомые макропараметры газа находятся путем численного нахождения в пространстве скоростей значений моментов от функции распределения. Однако при таком подходе требуется наличие мощных вычислительных ресурсов, как в плане оперативной памяти, так и в плане процессорного времени [1]. Объем вычислений и, как следствие, уровень требований к производительности вычислительной техники, используемой для расчетов, можно существенно уменьшить за счет (пусть даже и частичного) решения задачи с использованием аналитических методов. Именно это и позволяет сделать предложенный в работе метод, сводящий вычисление макропараметров газа в канале к численному решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода. Заметим, что к настоящему времени разработаны эффективные процедуры численного решения такого рода уравнений и их использование не приводит к каким-либо вычислительным сложностям. Для одноатомных газов с использованием численных методов задача о течении Куэтта рассматривалась в [2]-[5]. В [6] на основе БГК модели уравнения Больцмана для почти зеркальных граничных условий на стенках канала с использованием аналитических методов получены выражения, описывающие профиль массовой скорости газа и потоки тепла и массы газа вдоль оси канала. В [7] аналогичные исследования проведены с использованием БГК модели уравнения Больцмана для диффузных граничных условий. Целью представленной работы является обобщение результатов, полученных в

¹ Аспирант кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет, г. Архангельск; v.lukashev@narfu.ru.

² Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет, г. Архангельск; v.popov@agtu.ru.

³ Профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет, г. Москва; yushkanov@inbox.ru.

[7] на случай использования зеркально-диффузной модели граничных условий. В качестве основного уравнения используется линеаризованная БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана [8].

2. Постановка задачи. Построение функции распределения

Рассмотрим плоский канал толщиной D' , стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$), ось Oz' которой параллельна стенкам канала. Предположим, что стенки канала движутся в своих плоскостях в противоположных направлениях со скоростями $\mathbf{u}$ и $-\mathbf{u}$. Будем считать, что течение носит стационарный характер, а скорость движения стенок канала много меньше скорости звука в газе. Тогда рассматриваемая задача допускает линеаризацию. Учитывая, что в задачах скольжения функция распределения пропорциональна касательной к обтекаемой поверхности компоненте массовой скорости газа, функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям представим в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = \beta^{3/2} \pi^{-3/2} \exp(-C^2) [1 + C_z Z(x, C_x)]. \quad (2.1)$$

Здесь $\mathbf{r}'$ – размерный радиус-вектор; $\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_B T$; m – масса молекулы газа; k_B – постоянная Больцмана; T – температура газа; $Z(x, C_x)$ – линейная поправка к локально-равновесной функции распределения; $x = x'/l_g$ – безразмерная координата; $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$ – средняя длина свободного пробега молекул газа, p и η_g – давление и коэффициент динамической вязкости газа.

Запишем в выбранной системе координат БГК модель кинетического уравнения Больцмана

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g} (f_{eq} - f). \quad (2.2)$$

Здесь $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ – локально-равновесный максвеллиан. Подставляя (2.1) в (2.2) и линеаризуя $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ относительно абсолютного максвеллиана, приходим к уравнению для нахождения $Z(x, \mu)$ ($\mu = C_x$)

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) Z(x, \tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Общее решение (2.3) приведено в [8]

$$Z(x, \mu) = A_0 + A_1(x - \mu) + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta, \quad (2.4)$$

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad (2.5)$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\mu^2)}{\mu - z} d\mu, \quad (2.6)$$

$P(1/z)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака, A_0 , A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению.

С учетом используемой модели зеркально-диффузного отражения граничные условия на верхней и нижней стенках канала записываются в виде

$$Z(d, \mu) = (1 - q)Z(d, -\mu) + 2qU, \quad \mu < 0, \quad (2.7)$$

$$Z(-d, \mu) = (1 - q)Z(-d, -\mu) - 2qU, \quad \mu > 0. \quad (2.8)$$

Здесь $U = \beta^{1/2} u$ – модуль безразмерной скорости движения стенок канала. Подставляя (2.4) в (2.7) и (2.8), с учетом (2.5) приходим к интегральным уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(\mu, d) \lambda(\mu) = \\ = q(2U - A_0 - A_1\mu - A_1d) + 2A_1\mu, \quad \mu < 0, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(\mu, -d) \lambda(\mu) = \\ = q(A_1d - A_0 - A_1\mu - 2U) + 2A_1\mu, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Здесь

$$B(\mu, d) = b(\mu, d) - (1 - q)b(-\mu, d), \quad b(\eta, x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta). \quad (2.11)$$

Заменив в (2.9) μ на $-\mu$ и учитывая, что на действительной оси $\lambda(z)$ является четной функцией, перепишем его в следующем виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(-\mu, d) \lambda(\mu) = \\ = q(2U - A_0 + A_1\mu - A_1d) - 2A_1\mu, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Представим интеграл, входящий в (2.12) в виде суммы двух интегралов: регулярного и сингулярного, после чего заменим в первом переменную интегрирования η на $-\eta$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta.$$

Аналогично преобразовав интеграл, входящий в (2.10), получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(-\mu, d) \lambda(\mu) = \\ = q(2U - A_0 + A_1\mu - A_1d) - 2A_1\mu - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0, \end{aligned} \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(\mu, -d) \lambda(\mu) = \\ = q(A_1 d - A_0 - A_1 \mu - 2U) + 2A_1 \mu - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, -d)}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Последовательно складывая и вычитая почленно (2.13) и (2.14), приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [B(-\eta, d) + B(\eta, -d)]}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) [B(-\mu, d) + B(\mu, -d)] \lambda(\mu) = \\ = -2qA_0 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [B(\eta, d) + B(-\eta, -d)]}{\eta + \mu} d\eta, \quad \mu > 0, \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [B(\eta, -d) - B(-\eta, d)]}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) [B(\mu, -d) - B(-\mu, d)] \lambda(\mu) = \\ = 4A_1 \mu + 2q(A_1 d - A_1 \mu - 2U) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [B(-\eta, -d) - B(\eta, d)]}{\eta + \mu} d\eta, \\ \mu > 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Нетрудно видеть, что (2.15) обращается в тождество при выполнении условий $B(\eta, d) = -B(-\eta, -d)$, $A_0 = 0$. Отсюда с учетом определения функции $B(\eta, d)$ (2.11) получаем, что $a(-\eta) = -a(\eta)$. Теперь (2.16) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(-\mu, d) \lambda(\mu) = f(\mu), \quad \mu > 0, \quad (2.17)$$

$$f(\mu) = -2A_1 \mu - q(A_1 d - A_1 \mu - 2U) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta. \quad (2.18)$$

Решение (2.17) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - z} d\eta, \quad (2.19)$$

для которой

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i \mu B(-\mu, d), \quad 0 < \mu < +\infty \quad (2.20)$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta, \quad 0 < \mu < +\infty. \quad (2.21)$$

Здесь $N^+(\mu)$ и $N^-(\mu)$ – краевые значения функции $N(\mu)$ на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полупрямой. Аналогичные соотношения для $\lambda(\mu)$, определяемой равенством (2.6), имеют вид

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu \exp(-\mu^2), \quad 0 < \mu < +\infty \quad (2.22)$$

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu), \quad 0 < \mu < +\infty. \quad (2.23)$$

Здесь разрез совпадает со всей действительной числовой прямой. С учетом (2.20) – (2.23) сведем интегральное уравнение (2.17) к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси

$$N^+(\mu)\lambda^+(\mu) - N^-(\mu)\lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}\mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \quad \mu > 0. \quad (2.24)$$

Особенность краевой задачи (2.24) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность необходимо решить задачу факторизации, то есть найти такую не обращающуюся в ноль ни в одной конечной точке функцию $X(z)$, для которой на действительной положительной полуоси выполняется условие (2.25) и которая аналитична во всех остальных точках комплексной плоскости

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}. \quad (2.25)$$

Решение этой задачи имеет вид [8]:

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{(\theta(\tau) - \pi)}{\tau - z} d\tau \right], \quad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccctg} \left(\frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau \exp -\tau^2} \right).$$

С учетом решения однородной краевой задачи (2.25) перепишем (2.24)

$$N^+(\mu)X^+(\mu) - N^-(\mu)X^-(\mu) = \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} 2\sqrt{\pi}\mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \quad \mu > 0. \quad (2.26)$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу Римана – задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (2.26) функций, по формулам Сохоцкого получаем ее общее решение

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z}. \quad (2.27)$$

Рассмотрим поведение решения, задаваемого выражением (2.27) в окрестности бесконечно удаленной точки. Учитывая, что при $|z| \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

$$\frac{1}{X(z)} = z + Q_1 + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

находим

$$N(z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta + O\left(\frac{1}{z}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty. \quad (2.28)$$

Здесь Q_n - интегралы Лоялки,

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta^{k+1} \exp(-\eta^2) d\eta, \quad (2.29)$$

в частности, $Q_1 = -1.01619$, $Q_2 = -1.26632$.

Так как функция $N(z)$ согласно (2.19) задана интегралом типа Коши то в окрестности бесконечно удаленной точки $N(z) = O(1/z)$. Отсюда, с учетом (2.28) приходим к условию разрешимости краевой задачи (2.26)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta = 0. \quad (2.30)$$

С учетом (2.18) и (2.29) перепишем (2.30) в виде

$$A_1[qd - (2 - q)Q_1] - 2qU - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta \exp(-\eta^2) d\eta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)}{\tau + \eta} d\eta = 0. \quad (2.31)$$

Изменяя в последнем интеграле порядок интегрирования и, учитывая интегральное представление функции $X(z)$

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \frac{\eta \exp(-\eta^2) d\eta}{\eta + z}, \quad (2.32)$$

из (2.31) находим

$$A_1 = \frac{1}{qd - (2 - q)Q_1} \left[2qU + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \tau B(\tau, d) X(-\tau) d\tau \right]. \quad (2.33)$$

Коэффициент $a(\eta)$ в разложении (2.4) решения рассматриваемой задачи по собственным векторам непрерывного спектра найдем из условия (2.20), предварительно преобразовав (2.27). Принимая во внимание (2.29) и (2.29), получаем

$$\begin{aligned} N(z) = & -q(A_1 d - 2U) - A_1(2 - q)z + \frac{1}{X(z)} \left[A_1(2 - q) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)}{\tau + \eta} d\eta \right]. \end{aligned}$$

Заметим, что:

$$\frac{1}{\eta - z} \frac{1}{\tau + \eta} = \frac{1}{\tau + z} \left[\frac{1}{\eta - z} + \frac{1}{\eta + \tau} \right],$$

тогда, с учетом (2.32) и (2.29) получим:

$$N(z) = -q(A_1 d - 2U) - A_1(2 - q)z + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d) d\tau}{\tau + z} + \\ + \frac{1}{X(z)} \left[A_1(2 - q) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \tau B(\tau, d) X(-\tau) \frac{d\tau}{\tau + z} \right].$$

Для построенного решения $N(z)$, используя формулы Сохоцкого-Племеля, можем записать

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = -\frac{\sqrt{\pi} i \mu \exp(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} X(-\mu) \left[A_1(2 - q) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \tau B(\tau, d) X(-\tau) \frac{d\tau}{\tau + \mu} \right], \mu > 0. \quad (2.34)$$

Приравняв правые части (2.20) и (2.34)

$$2\sqrt{\pi} i \mu B(-\mu, d) = -\frac{\sqrt{\pi} i \mu \exp(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} X(-\mu) \left[A_1(2 - q) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \tau B(\tau, d) X(-\tau) \frac{d\tau}{\tau + \mu} \right], \quad \mu > 0. \quad (2.35)$$

Теперь, учитывая нечетность функции $a(\eta)$ и подставляя в (2.35) в явном виде выражения для $B(\eta, d)$ (2.11) и A_1 (2.33), для нахождения $a(\mu)$ приходим к уравнению Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = \frac{X(-\mu) \exp(-\mu^2)}{2|\lambda^+(\mu)|^2 (\exp(d/\mu) + (1 - q) \exp(-d/\mu))} \left[\frac{2qU(2 - q)}{qd - (2 - q)Q_1} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \tau X(-\tau) (\exp(-d/\tau) + (1 - q) \exp(d/\tau)) \left[\frac{2 - q}{qd - (2 - q)Q_1} + \frac{1}{\tau + \mu} \right] a(\tau) d\tau \right], \quad \mu > 0. \quad (2.36)$$

Решение (2.36) найдем с использованием численных методов. Так как правая часть (2.36) содержит множитель $\exp(-\mu^2)$, то входящий в нее интеграл быстро сходится. В силу этого в качестве верхнего предела интегрирования в (2.36) принималось значение, равное 5. Введем обозначения

$$h(\mu) = \frac{X(-\mu) \exp(-\mu^2)}{2|\lambda^+(\mu)|^2 (\exp(d/\mu) + (1 - q) \exp(-d/\mu))}, \quad f(\mu) = h(\mu) \frac{2qU(2 - q)}{qd - (2 - q)Q_1}, \\ K(\tau, \mu) = h(\mu) \tau X(-\tau) (\exp(-d/\tau) + (1 - q) \exp(d/\tau)) \left[\frac{2 - q}{qd - (2 - q)Q_1} + \frac{1}{\tau + \mu} \right],$$

$\lambda = 1/\sqrt{\pi}$ и перепишем (2.36) в виде

$$a(\mu) = f(\mu) + \lambda \int_0^{+\infty} K(\tau, \mu) a(\tau) d\tau. \quad (2.37)$$

Введем равномерную сетку на отрезке $[0, 5]$ с шагом h , заменим интеграл, входящий в правую часть уравнения (2.37), его приближенным значением, вычисленным с помощью квадратурной формулы, и запишем полученное выражение для каждого значения переменной μ в узлах введенной ранее сетки

$$a(\mu_j) = f(\mu_j) + \lambda \sum_{i=0}^5 D_i K(\tau_i, \mu_j) a(\tau_i), \quad (2.38)$$

где μ_i и τ_j - значения свободной и подынтегральной переменной в узлах равномерной сетки на отрезке, D_i - весовые коэффициенты квадратурной формулы.

Введем обозначения: $K_{i,j} = K(\tau_i, \mu_j)$, $f_j = f(\mu_j)$, $a_j = a(\mu_j)$ и получим систему из n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_1(1 - \lambda D_1 K_{1,1}) - a_2 \lambda D_2 K_{2,1} - \dots - a_n \lambda D_n K_{n,1} = f_1 \\ -a_1 \lambda D_2 K_{1,2} + a_2(1 - \lambda D_2 K_{2,2}) - \dots - a_n \lambda D_n K_{n,2} = f_2 \\ \dots \\ -a_1 \lambda D_1 K_{1,n} - a_2 \lambda D_2 K_{2,n} - \dots + a_n(1 - \lambda D_n K_{n,n}) = f_n. \end{cases}$$

Для решения построенной системы уравнений, был использован матричный метод, в результате применения которого искомая функция $a(\mu)$ была найдена в виде n -мерного вектора ее значений в узловых точках.

С использованием полученного n -мерного вектора находим значение параметра A_1

$$A_1 = \frac{1}{qd - (2 - q)Q_1} \left[2qU + \lambda \sum_{k=0}^5 D_k a(\tau_k) J_k \right],$$

здесь $J_k = \tau_k X(-\tau_k)(\exp(-d/\tau_k) - (1 - q) \exp(d/\tau_k))$.

Таким образом, неизвестные параметры A_0 , A_1 и функция $a(\mu)$, входящие в (2.4) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

3. Вычисление макропараметров газа в канале

С учетом построенной функции распределения вычислим безразмерный поток массы газа через верхнюю половину канала J_M . Исходя из статистического смысла функции распределения и учитывая (2.1), (2.4), находим профиль массовой скорости газа в канале

$$U_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 Z(x, C_x) d^3 \mathbf{C} = \frac{1}{2} A_1 x - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} a(\eta) \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) d\eta. \quad (3.1)$$

Интегрируя затем (3.1) по x от 0 до d , находим безразмерный поток массы газа через верхнюю половину канала

$$J_M = \frac{1}{2d^2} \int_0^d q_z(x) dx = \frac{A_1}{8} - \frac{1}{2d^2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \mu a(\mu) \left[ch\left(\frac{d}{\mu}\right) - 1 \right] d\mu. \quad (3.2)$$

Аналогичным образом вычисляем профль потока тепла в канале

$$q'_z(x') = \int \frac{m}{2} [\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')]^2 |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')| f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} = \frac{nk_B T}{\sqrt{\beta}} q_z(x) \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}.$$

D	CES [4]	LBE [4]	BGK [4]	(3.2)
$q = 0.1$				
0.1	0.0541084		0.0481420	0.048118
1.0	0.0231248		0.0234756	0.023475
10	0.0115560		0.0117090	0.011707
$q = 0.5$				
0.1	0.304586		0.274926	0.274814
1.0	0.113676		0.116120	0.116118
10	0.032447		0.032663	0.032662
$q = 1$				
0.1	0.741991	0.72929	0.685750	0.68557
1.0	0.226777	0.22737	0.232188	0.23218
10	0.042142	0.04219	0.042281	0.04228

Таблица 1: Зависимость потока газа J_M через верхнюю половину канала от его толщины

Здесь

$$q_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 (C^2 - \frac{5}{2}) Z(x, C_x) d^3 \mathbf{C} \quad (3.3)$$

есть безразмерная z -компонента вектора плотности потока тепла.

Интегрируя (3.3) по половине толщины канала, находим поток тепла, приходящийся на единицу ширины канала

$$J_Q = -\frac{1}{2d^2} \int_0^d q_z(x) dx = -\frac{1}{4\sqrt{\pi} d^2} \int_0^{+\infty} \mu a(\mu) \left[ch\left(\frac{d}{\mu}\right) - 1 \right] d\mu. \quad (3.4)$$

Значения J_M и J_Q были найдены численными методами, аналогичными тем, что использовались для нахождения A_1 и $a(\mu)$. Все вычисления проводились с использованием пакета прикладных программ Mathematica 7 путем интерполяции подынтегральных функций линейными сплайнами. Значения J_M и J_Q , рассчитанные для различных значений толщины канала $D = 2d$ на основе (3.2) и (3.4) и полученные в [3], [4], приведены в таблицах 1 и 2. Как следует из таблиц результаты представленной работы с высокой степенью точности совпадают с аналогичными результатами, полученными в рамках БГК модели. Отличие с результатами, полученными в рамках других моделей объясняется высокой чувствительностью рассматриваемых макропараметров, в частности J_Q , от выбора модели интеграла столкновений.

4. Заключение

Итак, в работе на примере задачи о течении Куэтта предложен метод вычисления макропараметров газа в каналах, толщина которых соизмерима со средней длиной свободного пробега молекул газа. Для случая диффузно-зеркального отражения молекул газа стенками канала вычислены потоки массы газа и тепла через верхнюю половину канала. Проведен численный анализ полученных выражений. Показано, что полученные в работе результаты с высокой степенью точности совпадают с аналогичными результатами, полученными ранее использованием численных методов в рамках БГК-модели.

D	BGK [3]	CES [3]	(3.4)
$q = 0.1$			
0.1	1.66805(-2)	1.12938(-2)	1.66991(-2)
1.0	4.58954(-3)	4.34898(-3)	4.62002(-3)
10	1.98991(-4)	1.79134(-4)	1.98172(-4)
$q = 0.5$			
0.1	9.17172(-2)	6.22276(-2)	9.18720(-2)
1.0	1.99715(-2)	1.81577(-2)	2.01022(-2)
10	4.29861(-4)	3.64077(-4)	4.30193(-4)
$q = 1$			
0.1	2.12309(-1)	1.44794(-1)	2.12830(-1)
1.0	3.13629(-2)	2.69864(-2)	3.15636(-2)
10	3.62529(-4)	2.85980(-4)	3.65039(-4)

Таблица 2: Зависимость потока газа J_Q через верхнюю половину канала от его толщины

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Клосс Ю.Ю., Черемисин Ф.Г., Шувалов П.В., “Решение уравнения Больцмана на графических процессорах”, *Вычислительные методы и программирование*, **11** (2010), 144–152.
2. Barhcello L. B., Camargo M., Podrigues P., Siewert C. E., “Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model”, *ZAMP*, **52** (2001), 517–534.
3. Siewert C. E., “Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **21** (2002), 579–597.
4. Siewert C. E., “The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems”, *Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik*, **54** (2003), 273–303.
5. Garcia R. D. M., Siewert C. E., “The Linearized Boltzmann Equation with Cercignani-Lampis Boundary Conditions: Basic Flow Problems in a Plane Channel.”, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, **28** (2009), 387–396.
6. Латышев А.В., Юшканов А.А., “Влияние свойств поверхности на характеристики газа между пластинами в задаче Куэтта. Почти зеркальные условия”, *Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования*, 1999, № 10, 35–41.
7. Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А., “Аналитическое решение задачи о течении Куэтта в плоском канале с бесконечными параллельными стенками”, *ЖТФ*, **81:1** (2011), 53–58.
8. Черчиньяни К., *Математические методы в кинетической теории газов.*, Мир, М, 1973, 245 с.

Analytic solution of a problem of Couette Flow

© V.V. lukashev ⁴, V.N. Popov ⁵, A.A. Yushkanov ⁶

Abstract. On the example of a problem about Couette flow the method of calculation of macroparameters of gas in channels which thickness is commensurable with average length of free run of molecules of gas is offered. As the basic equation it is used the linearize BGK (Bhatnagar, Gross, Krook) model of Boltzmann kinetic equation, and as a boundary condition on walls of the channel - the model of mirror- diffusion reflections. For various values of thickness of the channel and factor of accommodation of a tangential impulse of molecules of gas by the walls of the channel values of streams of weight of gas and heat falling unit of width of the channel are calculated. Comparison with the similar results published in an open press is lead.

Key Words: Boltzmann kinetic equation, the modelling kinetic equations, exact analytical decisions, models of boundary conditions

⁴ Post graduate student, Northern Arctic federal university, Arkhangelsk; v.lukashev@narfu.ru.

⁵ Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university, Arkhangelsk; popov.vasily@pomorsu.ru.

⁶ Professor of Theoretical Rhysics Chair, Moscow state regional university, Moscow; yushkanov@inbox.ru.

УДК 519.85

Проекционный двухшаговый МПМ и численное решение задачи оптимального управления

© В.Г. Малинов¹

Аннотация. В статье рассматривается проекционный обобщённый двухшаговый метод переменной метрики (ПОДМПМ) для решения задач минимизации в евклидовом пространстве E^n в случае функций с овражными вытянутыми поверхностями уровней. Получена оценка скорости сходимости метода в случае выпуклых функций. Приведён пример численного решения тестовой задачи оптимального управления вертикальным подъёмом ракеты сведением к нелинейной оптимизации; имеются некоторые результаты сравнительных вычислительных экспериментов на этой тест задаче ПОДМПМ и других проекционных методов минимизации.

Ключевые слова: минимизация на простом множестве, проекционный обобщённый двухшаговый двухэтапный метод переменной метрики, скорость сходимости, дифференциальные уравнения движения, задача оптимального управления, оптимизация.

1. Введение

Рассмотрим задачу оптимального управления (ЗОУ)

$$\frac{dz}{dt} = F(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t), \quad 0 \leq t \leq T, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^1, \quad (1.1)$$

где $g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) = 0$, $\varphi(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), t) \leq 0$ — ограничения задачи, фазовый вектор $\mathbf{x}(t) \in E^q$, вектор управления $\mathbf{u}(t) \in E^r$. Численное решение ЗОУ связано с преодолением ряда проблем: учёта ограничений на фазовые координаты и управления; удовлетворения заданным конечным условиям; овражности гиперповерхностей уровня вспомогательной функции, минимизируемой для решения задачи (1) [1], [2]. Первую из них можно решить удачным подбором вспомогательной функции, а успешное решение второй и третьей существенно зависит от применяемого метода оптимизации. Поэтому наша основная цель — исследование метода оптимизации.

Методом редукции ЗОУ (1.1) к нелинейной задаче оптимизации перейдём к "дискретной" ЗОУ [1]. Разобьём отрезок $[0; T]$ на $m-1$ частей с малым шагом $h_i = \delta t_i = t_{i+1} - t_i$ и с помощью метода решения системы ОДУ построим сетку $x_i = x(t_i)$, $u_i = u(t_i)$, $i \in [1 : m]$, $t_i = \sum_{j=1}^{i-1} h_j$, $F(\mathbf{z}_i) = F(\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_i, t_i)$. Полный фазовый вектор $\mathbf{x} \in E^{mr}$, полный вектор управлений $\mathbf{u} \in E^{ms}$, $ms = n$. Получим конечномерную задачу минимизации на выпуклом замкнутом множестве Q

$$f(\mathbf{x}) \longrightarrow \inf, \quad \mathbf{x} \in Q \subset E^n, \quad (1.2)$$

где n -мерное евклидово пространство E^n нормировано, $\|\mathbf{x}\| = (\mathbf{x}, \mathbf{x})^{1/2} \forall \mathbf{x} \in E^n$, выпуклая функция $f(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$. Предполагаем, что функция $f(\mathbf{x})$ есть вспомогательная функция, учитывающая функциональные ограничения задачи (1.1) в методе штрафных функций (МШФ), а множество Q образовано координатными ограничениями, гиперповерхности уровней функции $f(\mathbf{x})$ овражной структуры и

$$\inf f(\mathbf{x}) = f_* > -\infty, \quad \mathbf{x} \in Q; \quad Q_* = \{\mathbf{x} \in Q : f(\mathbf{x}) = f_*\} \neq \emptyset. \quad (1.3)$$

¹ Доцент кафедры ЭММИИТ, Ульяновский госуниверситет, г. Ульяновск; vgmalinov@mail.ru.

В работах [3], [4] для решения задач вида (1.2), (1.3) были предложены проекционные двухэтапные двухшаговые методы (ПОДМ) переменной метрики, ориентированные на решение задач минимизации (функций с овражными гиперповерхностями уровней), соответствующих приложениям методов к ЗОУ движением ракет и самолётов. Целью данной работы является апробация методов решения задачи (1.2), (1.3) на ЗОУ вида (1.1) и оценка скоростиходимости нового метода.

2. Методы оптимизации

В работах [3], [4] рассматривались две модификации ПОДМ переменной метрики. Первая из двух

$$\begin{aligned} 1 \text{ этап. } \mathbf{y}^k &= \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}; \quad \mathbf{z}^k = P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k); \quad \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0 \in E^n \\ 2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} &= P_Q[\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) \nabla f(\mathbf{z}^k)], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.1)$$

её далее будем обозначать ПОДМПМ1, и вторая модификация — ПОДМПМ2

$$\begin{aligned} 1 \text{ этап. } \mathbf{y}^k &= \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}; \quad \mathbf{z}^k = P_Q(\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k / \|\mathbf{y}^k\|); \quad \mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0 \in E^n \\ 2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} &= P_Q[\mathbf{z}^k - \beta_k \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\|], \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $P_Q(\mathbf{v})$ — проекция вектора $\mathbf{v}$ на множество Q ; $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ — параметры методов; $\mathbf{B}(\mathbf{z}^k) = \mathbf{B}_k$ — последовательность (желательно) диагональных матриц, изменяющих метрику пространства в каждой точке $\mathbf{z}^k$. Используются реализации методов с одномерной минимизацией для вычисления параметра длины шага $\beta_k = \operatorname{argmin}_{\beta > 0} f(\mathbf{z}^k - \beta \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) \nabla f(\mathbf{z}^k))$ — для метода (2.1), $\gamma_k = \operatorname{argmin}_{\gamma > 0} f(\mathbf{z}^k - \gamma \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{z}^k) \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\|)$ — для метода (2.2).

В работе [3] наряду с существующей метрикой в E^n введена новая метрика с помощью нового скалярного произведения $(\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E^n$ и получено евклидово пространство с двумя скалярными произведениями и определяемыми ими метриками, обозначенное E_1^n . Далее и здесь подразумеваем задачу вида (2.1) в нём. В E_1^n о сходимости метода (2.1) с параметрами константами $\alpha_k = \alpha, \beta_k = \beta$ доказана [3]

Теорема 1. Пусть выполнены следующие условия: 1) множество $Q \in E_1^n$ выпукло и замкнуто; 2) функция $f(\mathbf{x})$ выпуклая и выполнены соотношения (1.3); 3) оператор $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in E_1^n$ таков, что выполнено неравенство

$$m\|\mathbf{u}\|^2 \leq (\mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad 0 < m, \quad \mathbf{u}, \mathbf{x} \in E_1^n;$$

4) существует выпуклая функция $\varphi(\mathbf{x}) \in C^{1,1}(Q)$ такая, что имеет место равенство $\nabla \varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in E_1^n$; 5) параметры константы метода (2.1) таковы, что:

$$0 < \alpha < 1/\sqrt{5}, \quad 0 < \beta < (4 - 10\alpha - 5\alpha^3)/(2L - 10L\alpha^2). \quad (2.3)$$

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$, определяемая методом (2.1), (2.3), из любой начальной точки $\mathbf{x}^0 \in E_1^n$ сходится к точке $\mathbf{x}^* \in Q_*$,

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \rightarrow 0, \quad f(\mathbf{x}^k) \rightarrow f(\mathbf{x}^*), \quad k \rightarrow \infty.$$

Следствие. Из теоремы 1 следует выполнение неравенств

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| &\leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\| \leq \dots \leq \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|, \\ \|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^k\| &\geq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k+1}\| \geq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^{k+2}\| \geq \dots \end{aligned}$$

3. Оценка скорости сходимости метода (2.1) для выпуклых функций

Получим оценку скорости сходимости ПОДМПМ (2.1) без традиционного для методов проекции градиентов предположения о сильной выпуклости функции $f(\mathbf{x})$. При этом появляется необременительное дополнительное ограничение. Сначала в леммах получим используемые при этом неравенства, полезные для обоснования методов класса ПОДМ.

Лемма 1. В евклидовом пространстве E_1^n имеет место неравенство

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 \geq (1 - \varepsilon)\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2, \varepsilon > 0, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E_1^n. \quad (3.1)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся известным равенством

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + 2(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v} - \mathbf{w}) + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E_1^n. \quad (3.2)$$

запишем его в форме

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{v}) + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E_1^n. \quad (3.3)$$

и второе слагаемое в его правой части оценим с помощью неравенств Коши-Буняковского и $2|ab| \leq \varepsilon a^2 + \varepsilon^{-1}b^2$, $a, b, \varepsilon > 0$, из которого следует неравенство

$$2|(\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{w} - \mathbf{v})| \leq \varepsilon\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 + \varepsilon^{-1}\|\mathbf{w} - \mathbf{v}\|^2, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.4)$$

Пользуясь (3.4) в (3.3), получим, $\|\mathbf{u} - \mathbf{w}\|^2 \geq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - \varepsilon\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 - \varepsilon^{-1}\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|^2$. Отсюда следует (3.1).

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Пусть множество точек минимума задачи (1.2), (1.3) $Q_* \neq \emptyset$.

Тогда для точек последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$ методов класса ПОДМ в E_1^n имеет место неравенство

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \geq (\varepsilon - 1)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2, \quad (3.5)$$

границы числа $\varepsilon > 0$ следующие: $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2} = ((s \mp (s - 4l_2l_3)^{1/2}) / (2l_2))$, где $s = l_1 + l_2 + l_3$, $l_1 = \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2$, $l_2 = \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2$, $l_3 = \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку E_1^n метрическое пространство с метрикой $\rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in E_1^n$, в нём имеет место неравенство ([6], с. 31)

$$|\rho(\mathbf{u}, \mathbf{x}) - \rho(\mathbf{v}, \mathbf{y})| \leq \rho(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n. \quad (3.6)$$

Отсюда при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k+1}$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{y} = \mathbf{x}^*$, с помощью формулы для метрики получим неравенство $||\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| - \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|| \leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| + \|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}^*\|$. Возведём его в квадрат, под знаком модуля раскроем квадрат разности,

$$||\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - 2\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| + \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2| \leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2,$$

и удвоенное произведение под знаком модуля оценим с помощью известного неравенства (3.4). Тогда придём к неравенству

$$||\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - \varepsilon||\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - -\varepsilon^{-1}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + +\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2| \leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2.$$

Развернём модуль и представим в форме двойного неравенства

$$-\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \leq (1 - \varepsilon)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 - (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 \leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2. \quad (3.7)$$

Возьмём левую часть этого неравенства и, умножив на -1 , придём к неравенству (3.5). Решив неравенство $l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \leq 0$, следующее из (3.5), получим множество допустимых для (3.5) значений числа $\varepsilon > 0$. Заметим, что правое неравенство (3.7) совпадает с неравенством (3.1).

Лемма 2 доказана.

Примечание 1. Верхняя и нижняя границы числа ε в (3.5) зависят от соотношения длин сторон треугольника с вершинами $\mathbf{x}^k, \mathbf{x}^{k+1}, \mathbf{x}^*$ (случай их расположения на одной прямой не исключается). Зададим дополнительные ограничения, при которых обеспечиваются конкретные значения ε , используемые в доказательстве теорем. Например, не обременительны условия: а) $\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|$;

$$\text{б)} (21/10)\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\| \leq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\| \leq \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|. \quad (3.8)$$

В случае а) для вычисления границ ε решаем неравенство $l_2\varepsilon^2 - s\varepsilon + l_3 \leq 0$, следующее из (3.5), но с учётом неравенства (3.8а), полагая $l_1 = l_2 = l_3$. Получаем значения $\varepsilon_{1,2} = (3 \mp 5^{1/2})/2$, то есть округлённо можно принять значения из интервала $0.39 \leq \varepsilon \leq 2.6$. В случае б) решаем неравенство аналогично, положив $(21/10)^2 l_2 = l_1 = l_3$; получаем границы $\varepsilon_{1,2} = (491 \mp 19698^{1/2})/100$; тогда приближённый интервал возможных значений $0.47 \leq \varepsilon \leq 9.3$ достаточен для применения (3.5) в данной работе.

Примечание 2. Неравенство (3.1) объединяет разрозненные процедуры оценки квадрата нормы разности векторов в E^n . Неравенство (3.5) новое, выведено для обоснования методов класса ПОДМ, — необходимый математический инструмент при оценке скорости сходимости многошаговых методов минимизации. Появление дополнительных ограничений неравенств при его применении здесь не представляется слишком обременительным. Случай неравенства (3.6) для трёх точек известен как второе неравенство треугольника для метрики ([9], с. 27)

$$|\rho(\mathbf{x}, \mathbf{z}) - \rho(\mathbf{y}, \mathbf{z})| \leq \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X \quad (3.9)$$

в метрическом пространстве (X, ρ) .

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1 и, кроме того, выполнены неравенства (3.8б), параметры метода (2.1), (2.3) таковы, что

$$0 < \alpha < 1/6, \quad 0 < \beta < \min[\beta^{31}; \beta^{32}], \quad (3.10)$$

где $\beta^{31} = (6 - 35\alpha)/(2L - 20L\alpha^2)$, $\beta^{32} = (8 - 10\alpha)/(13L)$.

Тогда последовательность $\{\mathbf{x}^k\}$, определяемая методом (2.1), (2.3), (3.10), (3.8), со скоростью геометрической прогрессии сходится к решению задачи (1.2) и

$$\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\| \leq q^k \|\mathbf{x}^0 - \mathbf{x}^*\|, \quad (3.11)$$

где $q = [(6 + 10\alpha/3 - L\beta)/(13 - 8L\beta)]$, $0 < q^2 < 2/3$ при условиях (3.10).

Доказательство. Сначала заметим, что в условиях данной теоремы все рассуждения и выкладки теоремы 1 верны и, в частности, неравенство (см. [3])

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + a\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 &\leq \\ &\leq b\|\mathbf{y}^k\|^2 + (1 + \alpha)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2, \quad k \geq 0, \end{aligned} \quad (3.12)$$

где $a = (4 - 2L\beta)/5$, $b = 2\alpha + \alpha^2(3 + \alpha - 2L\beta)$. Представим (3.12) в форме

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{20}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + b_{21}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + \alpha\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq b_{31}\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{41}\|\mathbf{y}^k\|^2, \quad k \geq 0, \quad (3.13)$$

где $b_{20} = 1/5 - L\beta/5$, $b_{21} = 3/5 - L\beta/5$, $b_{31} = 1 + \alpha$, $b_{41} = 2\alpha + 4\alpha^2 - 2L\alpha^2\beta$ при $\alpha^3 < \alpha^2$. С помощью неравенства (3.5) из леммы 2 оценим второе слагаемое в левой части (3.13), положив в (3.5) $\varepsilon = 9$,

$$b_{20}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \geq 8b_{20}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + (8b_{20}/9)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Четвёртое слагаемое в левой части (3.13) преобразуем с помощью (3.1) при $\mathbf{u} = \mathbf{x}^{k-1}$, $\mathbf{v} = \mathbf{x}^k$, $\mathbf{w} = \mathbf{x}^*$, $\varepsilon = 3/2$,

$$\alpha\|\mathbf{x}^{k-1} - \mathbf{x}^*\|^2 \geq -(\alpha/2)\|\mathbf{y}^k\|^2 + (\alpha/3)\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2.$$

Тогда (3.13) преобразуется к виду

$$b_1\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 + b_{21}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \leq b_3\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2 + b_4\|\mathbf{y}^k\|^2, \quad k \geq 0, \quad (3.14)$$

где $b_1 = 1 + 8b_{20} = (13 - L\beta)/5$, $b_3 < 6/5 + 2\alpha/3 - L\beta/5$, $b_4 = 7\alpha/2 - 2L\alpha^2\beta$, $4\alpha^2 < \alpha$; $b_1 > 0$, $b_3 > 0$, $b_4 > 0$ при $0 < \beta < 1/L$, $0 < \alpha < 1/4$.

Для (3.14) покажем, что $b_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_{21}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 \leq 0$. Для этого заметим, что имеют место неравенства: $\|\mathbf{y}^k\|^2 \geq \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2$ (ввиду следствия теоремы 1); $b_{21} > b_4 - b_{21}$, $b_4 - b_{21} < 7\alpha/2 - 2L\alpha^2\beta + L\beta/5 - 3/5 < 0$ (при $0 < \alpha < 6/35$, $4\alpha^2 < \alpha$, $0 < \beta \leq \beta_{31} = (6 - 35\alpha)/(2L - 20L\alpha^2)$), $(b_4 - b_{21})(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2) \geq 0$. С их помощью получаем

$$\begin{aligned} 0 &\geq (b_4 - b_{21})(\|\mathbf{y}^k\|^2 - \|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2) = \\ &= b_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_4\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + b_{21}(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2) \geq \\ &\geq b_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_{21}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 + (b_4 - b_{21})(\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2 - \|\mathbf{y}^k\|^2) \geq \\ &\geq b_4\|\mathbf{y}^k\|^2 - b_{21}\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^k\|^2. \end{aligned}$$

С учётом последней оценки из (3.14) следует неравенство

$$\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\|^2 \leq q^2\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2, \quad k \geq 0, \quad (3.15)$$

где $q^2 = b_3/b_1$, $0 < q^2 < 2/3$ при условиях (3.10) и (2.3); при этом $0 < \beta < (8 - 10\alpha)/(13L) = \beta^{32} < \beta^{31}$ при $0 < \alpha < 1/6$. Из (3.15) следует (3.11).

Теорема 2 доказана.

Примечание 3. Неравенства (3.6) и (3.9) имеют место $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E^n$, поэтому (3.5) и (3.8) можно записать в общем виде. Пользуясь формулой для метрики, из (3.9) при $\mathbf{x} = \mathbf{x}$, $\mathbf{z} = \mathbf{x}$, $\mathbf{y} = \mathbf{v}$, после преобразований, аналогичных проведённым в лемме 2 после неравенства (3.6), получим

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 \geq (\varepsilon - 1)\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2 - (1 - \varepsilon^{-1})\|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2. \quad (3.16)$$

Это неравенство имеет самостоятельное значение и полезно при обосновании методов класса ПОДМ; из него можно получить конкретные неравенства для точек последовательности $\{\mathbf{x}^k\}$. Границы числа $\varepsilon > 0$ определяются из (3.16) неравенствами $0 < \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2$, $\varepsilon_{1,2} = [s \mp (s - 4bc)^{1/2}]/(2b)$, где $s = a + b + c$, $a = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$, $b = \|\mathbf{u} - \mathbf{x}\|^2$, $c = \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|^2$. Из (3.16) в частности, при дополнительном требовании $\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|$, для числа $\varepsilon > 0$ получаем приблизительный интервал возможных значений $0.39 \leq \varepsilon \leq 2.61$, вычисленный для (3.8а). Аналог неравенства (3.8б) запишется в виде $(21/10)\|\mathbf{u} - \mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{x}\|$, для числа $\varepsilon > 0$ в (3.16) приближённый интервал возможных значений $0.47 \leq \varepsilon \leq 9.3$.

4. Тестовый пример ЗОУ

Процесс вертикального подъёма ракеты на максимальную высоту над Землёй описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = -u(t), \quad \frac{dx_2(t)}{dt} = x_3(t), \quad \frac{dx_3(t)}{dt} = [Vu(t) - Q(\mathbf{x}(t))]/x_1(t) - g \quad (4.1)$$

при начальных условиях $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 0$, $x_3(0) = 0$. Требуется определить закон оптимального расхода массы (горючего) $u(t)$ в этом процессе с фиксированным временем $T = 100c$, $0 \leq t \leq T$, при условии расхода не более 80 процентов запасов топлива (что влечёт краевое условие для массы $x_1(T) = 0.2$ или ограничение равенство $k_2[x_1(t) - 0.2] = 0$, $k_2 = 10$), заданных начальных и краевом условии и ограничении на управление $0 \leq u(t) \leq 0.04$. Обозначения в математической модели (4.1): $x_1(t)$ – масса ракеты, отнесённая к начальной массе; $x_2(t)$ – высота над Землёй (км); $x_3(t)$ – скорость ракеты (км/с); $u(t)$ – расход массы в единицу времени (c^{-1}); $V = 2$ км/с – скорость истечения газов из сопла двигателя ракеты; $g = 0.01$ км/сек – ускорение свободного падения (const); $Q(\mathbf{x}) = 0.05 \exp(-0.1x_2)x_3^2$ – величина аэродинамического сопротивления; $T = 100c$ – продолжительность полёта; $k_1 = 0.01$; $k_2 = 10$ – весовые коэффициенты.

Требуется минимизировать функцию $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = -k_1x_2(T)$ при заданных начальных и краевом условии.

Поставленная задача в [1] названа классической тестовой задачей оптимального управления. Для численного решения ЗОУ (4.1) была преобразована к задаче минимизации функционала от n -мерного вектора управляющих параметров ($n = ms$, $x_i = u(t_i)$, $i \in [1 : n]$, см. п.1) и решалась МШФ. Модельная система ОДУ интегрировалась модифицированным методом Эйлера

$$h_i = t_{i+1} - t_i; \quad \mathbf{x}^{i+1/2} = \mathbf{x}^i + h_i/2; \\ \mathbf{z}^{i+1/2} = \mathbf{z}^i + (h_i/2)f(\mathbf{z}^i); \quad \mathbf{z}^{i+1} = \mathbf{z}^i + h_i f(\mathbf{z}^{i+1/2})$$

в двух вариантах: отрезок $[0; T]$ разбивался на части, что определяло размерность n пространства ($n = 101, n = 125$; при расчётах с половинным шагом $n = 201, n = 250$).

5. Результаты численного решения задачи

Результаты сравнительных численных экспериментов по решению задачи (4.1) с несколькими методами минимизации приведены в таблицах 1 и 2. Для сравнения приведены также результаты, полученные Т.М. Эннеевым, Р.П. Федоренко, Ю.Г. Евтушенко. Обозначения методов приведены в первых колонках таблиц. Приняты сокращения: МШФ – метод штрафных функций, КМ – комбинированный метод из [1], на первом этапе которого счёт по МШФ, а затем – методом простых итераций; ПОДМПМ2 – метод (2.2); ММПГ – модификация метода проекции градиента $\mathbf{x}^{k+1} = P_Q [\mathbf{x}^k - \gamma_k \nabla f(\mathbf{x}^k) / \|\nabla f(\mathbf{x}^k)\|]$; MLeD – проекционная модификация автора данной статьи метода из работы [5]. ПОДМЧ1 – ПОДМ четырёхпараметрический [8]

$$1 \text{ этап. } \mathbf{y}^k = \mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}; \quad \mathbf{z}^k = P_Q (\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^k);$$

$$2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} = P_Q [\mathbf{z}^k + \beta_k (\gamma_{1k} \mathbf{y}^k - \gamma_{2k} \nabla f(\mathbf{z}^k))], \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

ПОДМЧ2 – другая версия ПОДМ четырёхпараметрического [8]

$$1 \text{ этап. } \mathbf{y}^{1k} = (\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}) / \|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^{k-1}\|; \mathbf{z}^k = P_Q (\mathbf{x}^k + \alpha_k \mathbf{y}^{1k});$$

$$2 \text{ этап. } \mathbf{x}^{k+1} = P_Q [\mathbf{z}^k + \beta_k (\gamma_{1k} \mathbf{y}^{1k} - \gamma_{2k} \nabla f(\mathbf{z}^k) / \|\nabla f(\mathbf{z}^k)\|)], k \geq 0.$$

где $\mathbf{x}^0 \in E^n$ – начальная точка; $P_Q[v]$ – проекция вектора $\mathbf{v}$ на множество $Q \subset E^n$; $\mathbf{x}^{-1} = \mathbf{x}^0$; $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k, \gamma_{1k}, \gamma_{2k}$ – параметры длин шагов вдоль соответствующих векторов в методах; поиск β_k, γ_k (в том числе в (2.1) и (2.2)) – одномерной минимизацией по МУМ ([7], с. 47). В нижеприведенных таблицах в столбце "1 – $u(t)$ " (остаток горючего из 1.0) приведены данные о точности выполнения ограничения равенства; it – число итераций метода оптимизации; $x_2(T)$ – достигнутая ракетой высота. Начальные точки (A) = (.008; .008; .008;008), и (B) = (.011; .011; .011; .011; .011; .011; .011; .008;008) задают начальные значения управляющей переменной $u(t)$ в точках деления отрезка $[0; T]$.

Метод	it	$t(сек.)$	$x_2(T)$	$1 - u(t)$	n и нач.точка
Энеев Т.М. [1]	50	-	132.346	.19967	51; -
Федоренко Р.П. [1]	12	-	132.180	.20000	51; -
[1] МШФ	5	-	132.898	.19838	51; (A)
[1] КМ	3	233	132.133	.2000006	51; (A)
ММПГ	80	121	132.2098	.19998669	101; (B)
ПОДМЧ1	8	20	132.2107	.200000094	101; (A)
MLe-D	7	18	132.2059	.200000095	101; (B)
ПОДМЧ2	2	14	132.2037	.200000028	125; (A)
[1] КМ	5	420	132.167	.199996	201; (A)
ММПГ	14	68	132.4349	.200000007	201; (B)
MLe-D	7	53	132.4349	.200000009	201; (B)
ПОДМЧ1	4	53	132.4349	.200000006	201; (B)
ПОДМПМ1	1	44	132.2154	.200000023	250; (A)
ПОДМЧ2	4	54	132.2134	.200000046	250; (A)
ПОДМПМ1	2	50	132.4349	.200000006	250; (B)

Таблица 1: Результаты численного решения задачи

ЗООУ (4.1) решалась также принципом максимума Понтрягина (принципом минимума Ю.Г. Евтушенко ([1], с. 80); некоторые результаты приведены в таблице 2. Функция Гамильтона- Понтрягина $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = p_1 f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + p_2 f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) + p_3 f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ для данной задачи минимизации использована в составе вспомогательной функции $FH(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t) = k_2(x_1(T) - 0.2) - k_1 x_2(T) - H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p}, t)$, где $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = -u(t)$; $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = x_3(t)$; $f_3(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = [Vu - Q(x)]/x_1 - g$, параметры $p_1 = -1$, $p_2 = 1$, $p_3 = 1$ вычислялись в ходе минимизации. Численные результаты аналогичны приведённым в таблице 1 (много совпадающих).

Метод	it	$t(сек.)$	$x_2(T)$	$1 - u(t)$	n и нач.точка
ММПГ	80	121	132.2098	.19998669	101; (A)
ПОДМПМ2	8	20	132.2107	.200000094	101; (A)
MLe-D	7	18	132.2059	.200000095	101; (A)
MLe-D	1	6	132.1431	.200000007	125; (A)
ПОДМПМ2	1	12	132.2065	.200000004	125; (A)
ПОДМЧ2	4	53	132.4949	.200000006	201; (B)
MLe-D	21	180	132.2154	.200000042	250; (A)

Таблица 2: Результаты решения задачи принципом максимума Понтрягина

Выводы. Представляют интерес результаты по оценке скорости сходимости ПОДМПМ наряду со вспомогательными неравенствами. Результаты сравнительных вычислительных экспериментов показывают работоспособность предложенных методов минимизации и их способность решать ЗОУ с достаточной точностью и быстродействием.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Евтушенко Ю. Г., *Методы решения экстремальных задач и их применение в системах оптимизации*, Наука, М., 1982, 432 с.
2. Дикусар В. В., Милютин А. А., *Качественные и численные методы в принципе максимума*, Наука, М., 1989, 141 с.
3. Малинов В. Г., “О проекционном квазиньютоновском обобщенном двухшаговом методе минимизации и оптимизации траектории летательного аппарата”, *Журнал СВМО*, **12:4** (2010), 37–48.
4. Малинов В. Г., “Оптимизация траектории и математическая модель движения ракеты”, *Труды 7 Международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, ... систем и процессов". 2-5 февраля 2009.*, 2009, 178–179.
5. Le D., “A Fast and Robust unconstrained optimization method requiring minimum storage”, *Mathematical Programming*, **32:1** (1985), 41–68.
6. Канторович Л. В., Акилов Г. П., *Функциональный анализ*, Наука, М., 1977:, 744 с.
7. Малинов В. Г., *Некоторые одномерные экстремальные задачи и методы их решения*, ОИПКРО, Оренбург, 2002, 54 с.
8. Малинов В. Г., “Четырехпараметрические двухшаговые проекционные методы минимизации первого порядка”, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **36:12** (1996), 48–56.
9. Шилов Г. Е., *Математический анализ. Специальный курс*, Физматлит, М., 1960, 388 с.

Projected two-step VMM and numerical solution of optimal control problem

© V.G. Malinov ²

Abstract. This paper describes a new projection generalized two-step variable metric method (PTVMM) for solving minimization problems in the Euclidean space E^n in the case when function $f(\mathbf{x})$ has prolate level surfaces. The estimate of rate of convergence of the method in the case of convex functions is presented. Finally, we indicate, how these considered methods can be used to solving of testing optimal control problem. Some results of comparative numerical experiments are given.

Key Words: minimization on the simple set, projection generalized two-step two-stage variable metric method, rate of convergence, differential equations of movement, optimal control problem, optimization.

² Assistant Professor of Ulyanovsk State University, Ulyanovsk; vgmalinov@mail.ru.

УДК 512.917+513.9

Непрерывная зависимость чисел вращения для модельных семейств кусочно-непрерывных одномерных отображений

© М.И. Малкин¹

Аннотация. Рассматриваются кусочно-монотонные, кусочно-непрерывные отображения вещественной прямой, моделирующие динамику некоторых нейронных и телекоммуникационных сетей. Для отображений из рассматриваемых классов неблуждающее множество представляет собой несвязную сумму неблуждающих множеств двух отображений лоренцевского типа. Тем самым можно определить множество вращения изучаемого отображения. Доказано, что множество вращения есть объединение двух замкнутых интервалов, граничные точки которых непрерывно зависят от отображения (с хаусдорфовой топологией).

Ключевые слова: Числа вращения, отображения лоренцевского типа, множества вращения

1. Введение

Число вращения было введено А.Пуанкаре для сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов окружности. Оно измеряет асимптотическую фазовую скорость траектории, причём для всех траекторий гомеоморфизма это число одно и то же. Потоки на торе без состояний равновесия можно классифицировать при помощи числа вращения отображения последования (отображения Пуанкаре) на секущей. У более сложных систем (например, систем с аттрактором Лоренца) разные траектории могут давать разные асимптотические скорости. Оказалось, что для некоторых классов сложных систем можно ввести множество вращения - набор чисел вращения индивидуальных траекторий, причём множество вращения представляет собой замкнутый (возможно тривиальный) интервал - интервал вращения. Интервал вращения отражает степень разнообразия асимптотического поведения периодических орбит и является важной характеристикой, отражающей степень хаотичности системы. В частности, для эндоморфизмов окружности степени 1 вид интервала вращения и его величина в достаточной степени характеризуют динамические свойства эндоморфизма: из нетривиальности интервала вращения следует положительность топологической энтропии (а следовательно, хаос по Ли-Йорку) и наличие периодических орбит всех периодов, кроме, возможно, конечного числа (см. [14]). Изменение интервала вращения в однопараметрических семействах эндоморфизмов связано с важными бифуркационными свойствами ([3], [19], [18]). Подобные свойства имеют место и для одномерных отображений лоренцевского типа и унимодальных отображений (см. [1], [2], [6], [12], [13]). Более того, с помощью этого инварианта удалось установить некоторые эффекты, связанные с хаотическим поведением орбит (например, C^r -структурную неустойчивость отображений, у которых концевые точки интервала вращения – иррациональные числа, см. [6], [13]).

Кусочно-монотонные, кусочно-непрерывные отображения прямой находят применение в качестве моделей, демонстрирующих различные типы динамического поведения, интересные сценарии перехода от порядка к хаосу и соответствующие бифуркации. Отметим в этой связи модель импульсного осциллятора, модель нейронов с циклической подкачкой

¹ Доцент кафедры дифференциальных уравнений и математического анализа, Нижегородский государственный университет им. Н.И.Лобачевского, Нижний Новгород, malkin@mm.unn.ru

[16], модель биологического осциллятора [8], модели телекоммуникационных и нейронных сетей [5], [7], [11], математические модели в экономике, используемые при изучении ценовой динамики [17]. Часто встречающиеся кусочно-монотонные, кусочно-непрерывные модели имеют вид

$$F(x) = \begin{cases} g_1(x), & x \leq -1 \\ f(x), & -1 \leq x \leq 1 \\ g_2(x), & x \geq 1, \end{cases} \quad (1.1)$$

где $g_1(x), g_2(x)$ и $f(x)$ — монотонно возрастающие, непрерывные функции (ветви), заданные на интервалах $(-\infty, -1), (-1, 1)$ и $(1, +\infty)$ соответственно и $f(0) = 0$ (без ограничения общности здесь приняты значения абсцисс точек разрыва ± 1 , т.к. к этим значениям легко перейти при замене координат). В частности, в экономических моделях иногда используется семейство вида (1.1) для функций $f_1(x) = f_2(x) = Ax + e^{Bx} - 1$, $g(x) = Cx + e^{Dx} - 1$, где A, B, C, D — положительные параметры (обычно, меньшие единицы).

Для отображений (1.1) естественно предполагать, что выполняются условия

$$g_2(1) < 1 < f(1), \quad f(-1) < -1 < g_1(-1), \quad (1.2)$$

так как в противном случае динамика отображения на всей числовой прямой или на одной из полуосей тривиальна. Легко видеть, что при выполнении неравенств (1.2) имеются два инвариантных интервала, а именно $I_1 = [f(-1), g_1(-1)]$ и $I_2 = [g_2(1), f(1)]$, а траектории, начинающиеся вне этих интервалов, либо через конечное число итераций попадают в эти интервалы, либо стремятся к неподвижным точкам, либо уходят на бесконечность (при выполнении лишь одного из двойных неравенств (1.2) имеется один инвариантный интервал, а траектории, начинающиеся вне этого интервала через конечное число итераций попадают в него или стремятся к неподвижным точкам или уходят на бесконечность). Ограничение отображения (1.1) на каждом из интервалов I_1 и I_2 представляет собой отображение лоренцевского типа, т.е. разрывное отображение отрезка с одной точкой разрыва и двумя промежутками монотонного возрастания. Таким образом, неблуждающее множество отображения вида (1.1) представляет собой несвязную сумму неблуждающих множеств двух отображений лоренцевского типа и, возможно, некоторое множество неподвижных точек.

Рассматривая для каждого из указанных отображений лоренцевского типа множество вращения, которое на самом деле можно назвать интервалом вращения (см. [12]), мы можем определить множество вращения отображения (1.1) как набор из этих двух интервалов вращения. Основной результат данной статьи заключается в том, что интервалы вращения отображения (1.1) изменяются непрерывно при непрерывном изменении функций g_1, f, g_2 (в C^0 -топологии, или, что эквивалентно, в хаусдорфовой топологии отображений (1.1)). Тем самым, в модельных семействах получает объяснение ситуация структурной неустойчивости, когда конечная точка (хотя бы одного из) интервалов вращения принимает иррациональное значение.

2. Непрерывность интервалов вращения лоренцевского типа

Рассмотрим множество отображений $f : I \rightarrow I$ интервала $I = [0, 1]$, имеющих одну точку разрыва $c = c(f)$ и удовлетворяющих условиям

1. f непрерывно и монотонно возрастает на интервалах $[0, c)$ и $(c, 1]$,
2. $\lim_{x \rightarrow c+} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow c-} f(x) = 1$.

Обозначим множество отображений лоренцевского типа через F_L . Легко видеть, что для отображений, удовлетворяющих лишь первому условию, ограничение на интервал $J = [f(c+0), f(c-0)]$ есть отображение лоренцевского типа (с точностью до линейной замены координат, переводящей $f(c+0)$ в 0 и $f(c-0)$ в 1), причём любая точка вне J (за исключением, возможно, точек 0 и 1, если они неподвижны) за конечное число итераций попадает в J (поэтому второе условие используется лишь для удобства, а интервал J обычно называют истинным интервалом отображения, не удовлетворяющего второму условию). Обозначим через $\varphi : F \rightarrow F_L$ оператор проектирования, действие которого сводится к ограничению $f \in F$ на истинный интервал с последующей линейной заменой координат. Таким образом, переходя от f к $\varphi(f)$, можем считать, что условие 2 выполнено. Заметим, что $f(0) \leq f(1)$.

Символическая модель отображения $f \in F$ строится следующим образом. Любой точке $x \in I \setminus D$ (где D — множество прообразов точки разрыва c под действием всех итераций) ставится в соответствие нидинг последовательность без знака $U(x) = (U_n(x))_{n=0}^\infty$ из символов -1 и 1 , где

$$U_n(x) = \begin{cases} -1, & f^n(x) \in [0, c) \\ 1, & f^n(x) \in (c, 1]. \end{cases}$$

Получаем отображение U из $I \setminus D$ в одностороннюю схему Бернулли Ω_2^+ из двух символов $+1, -1$ (с лексикографическим порядком). Очевидно, что отображение U сохраняет порядок. Под символической моделью отображения понимается $\sigma_+|_{\Sigma_f^+}$, где Σ_f^+ есть замыкание $U(I \setminus D)$ в Ω_2^+ , и σ_+ — односторонний сдвиг. Пара последовательностей

$$K_f^+ = \lim_{x \rightarrow c+} U(x), K_f^- = \lim_{x \rightarrow c-} U(x)$$

называется нидинг-инвариантами лоренцевого отображения f .

Отображение $f \in F_L$ можно считать отображением окружности S^1 , если отождествить концы интервала I . Тогда отождествлённая точка становится точкой разрыва, а c — точкой непрерывности. Обозначим это отображение окружности через F . Для F , как и для непрерывных отображений окружности, можно определить поднятие, т.е. такое отображение $\bar{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для которого $F\pi = \pi\bar{f}$, где $\pi : \mathbb{R} \rightarrow S^1 = \mathbb{R}/Z$ — каноническая проекция. Для данного $f \in F_L$ зафиксируем поднятие $\bar{f}$ вида

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} [x] + f(\{x\}), & \{x\} \in [0, c) \\ f(\{x\}) + [x] + 1, & \{x\} \in [c, 1). \end{cases}$$

где $[x], \{x\}$ соответственно целая и дробная части числа x (таким образом, предполагаем, что $\bar{f}$ принимает значения в целых точках по непрерывности справа).

Для отображения окружности F с поднятием $\bar{f}$ можно ввести множество вращения $\rho(\bar{f})$ следующим образом:

$$\rho(\bar{f}, x) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}^n(x) - x}{n}, x \in I,$$

$$\rho(\bar{f}) = \{\rho(\bar{f}, x) : x \in I\}.$$

С другой стороны, можно определить множество вращения $\rho(\sigma_+, \Sigma_f^+)$ символической модели $\sigma_+|_{\Sigma_f^+}$ так

$$\rho(\sigma_+, \omega) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \chi_{\{+1\}}(\omega_i),$$

$$\rho(\sigma_+|\Sigma_f^+) = \{\rho(\sigma_+, \omega) : \omega \in \Sigma_f^+\},$$

где χ - характеристическая функция. Нетрудно видеть, что фактически эти определения эквивалентны.

В силу того, что искать множество вращения по приведённым определениям не всегда удобно, введём следующую конструкцию. Для данного поднятия $\bar{f}$ и целого k рассмотрим значения $u_0^{(k)} = \bar{f}(k+0) = \bar{f}(k)$ и $u_1^{(k)} = \bar{f}(k-0)$. Тогда $u_0^{(k)} \leq u^{(k)} < u_0^{(k)} + 1$ и $u_0^{(k+1)} = u_0^{(k)} + 1, u_1^{(k+1)} = u_1^{(k)} + 1$. Если $u_0^{(k)} = u_1^{(k)}$, то $\bar{f}$ есть поднятие гомеоморфизма окружности, и тогда в силу условия плотности множества D , f есть транзитивный гомеоморфизм окружности с иррациональным числом вращения. Пусть теперь интервал $[u_0^{(k)}, u_1^{(k)}]$ - нетривиальный, и u принадлежит этому интервалу. Тогда можно однозначно определить точки $a(u) \leq k, b(u) \geq k$ такие, что $f(a(u)) = f(b(u)) = u$. Для любого $\tau, 0 \leq \tau \leq 1$, определим интервалы $J_\tau^{(k)}, k \in Z$, следующим образом:

$$J_\tau^{(k)} = [a_\tau^{(k)}, b_\tau^{(k)}] = [a(u), b(u)],$$

где $u = u_0^{(k)} + \tau(u_1^{(k)} - u_0^{(k)})$. Построим теперь отображение $f_\tau : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$\bar{f}_\tau(x) = \begin{cases} \bar{f}(x), & x \notin J_\tau^{(k)} \\ u_0^{(k)} + \tau(u_1^{(k)} - u_0^{(k)}), & x \in J_\tau^{(k)}. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\bar{f}_\tau$ при любом $\tau, 0 \leq \tau \leq 1$, представляет собой непрерывную неубывающую функцию на $\mathbb{R}$ с интервалами постоянства $J_\tau^{(k)}$, и выполняется $\bar{f}_\tau(x+1) = \bar{f}_\tau(x) + 1$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Поэтому $\bar{f}_\tau$ есть поднятие для непрерывного отображения окружности $f_\tau : S^1 \rightarrow S^1$ степени 1.

Для необратимых лоренцевых отображений (отображений с перекрытием) непрерывность интервалов вращения доказана в [12]. Для лоренцевых отображений f , у которых значения в концевых точках совпадают (т.е. $f(0) = f(1)$) результат о непрерывности числа вращения следует из классических результатов о числе вращения Пуанкаре для гомеоморфизмов окружности степени 1. Поэтому для того, чтобы доказать основной результат данной работы, требуется рассмотреть обратимые лоренцевы отображения, т.е. отображения f , для которых $f(0) > f(1)$. Обозначим через Υ_- семейство поднятий $\bar{f}$ лоренцевых обратимых отображений, т.е. отображений $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, для которых выполняется $f(0) > f(1)$. В работе [10] доказано, что для таких отображений существует число вращения $\rho(\bar{f}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}^{(n)}(x) - x}{n}$, не зависящее от начальной точки x , и (так же, как для гомеоморфизмов окружности степени 1) оно единственно и при изменении поднятия $\bar{f}' = \bar{f} + m$ меняется на целое число : $\rho(\bar{f}') = \rho(\bar{f}) + m$.

Таким образом, можно говорить о числе вращения самого лоренцевого отображения f . Из определения числа вращения вытекают следующие свойства :

$$1) \rho(\bar{f}^m + k) = m\rho(\bar{f}) + k,$$

2) Если $\bar{f} \leq \bar{g}$ (где $\bar{f}, \bar{g}$ - поднятия лоренцевых обратимых отображений f, g), то $\rho(\bar{f}) \leq \rho(\bar{g})$.

Действительно, второе свойство очевидно, а первое следует из неравенств: $\rho(\bar{f}^m + k) = \rho(\bar{f}^m) + k = k + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}^{(mn)}(x) - x}{n} = k + \lim_{mn \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}^{(mn)}(x) - x}{mn} m = k + \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\bar{f}^{(l)}(x) - x}{l} m = m\rho(\bar{f}) + k$

Теперь мы готовы установить основной результат данной работы, для этого осталось доказать следующий факт.

Т е о р е м а 2.1. Число вращения $\rho(\bar{f})$ непрерывно зависит от $\bar{f} \in \Upsilon_-$, где множество Υ_- рассматривается в C^0 топологии:

$$d(\bar{f}, \bar{g}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |\bar{f} - \bar{g}| = \sup_{x \in [0, 1]} |\bar{f} - \bar{g}|$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{f} \in \Upsilon_-$ — поднятие данного лоренцевого отображения f . Для произвольного ε возьмём рациональные числа $\frac{p_1}{q_1}$ и $\frac{p_2}{q_2}$ такие, что $\frac{p_1}{q_1} < \rho(\bar{f}) < \frac{p_2}{q_2}$ и $\rho(\bar{f}) - \frac{p_1}{q_1} < \varepsilon$, $\frac{p_2}{q_2} - \rho(\bar{f}) < \varepsilon$. Тогда функция $F(x) = \bar{f}^{q_1}(x) - p_1$ положительна при всех $x \in \mathbb{R}$ и поэтому $\rho(F) > 0$. Для поднятий $\bar{g}$, достаточно близких к $\bar{f}$ будет выполняться $G(x) = \bar{g}^{q_1}(x) - p_1 > 0$ (так как $F(x) \geq \delta$ для некоторого достаточно малого $\delta > 0$). Значит $\rho(G) > 0$. Переходя к исходным поднятиям f, g , в силу свойства 1, получим $\rho(\bar{g}) > \frac{p_1}{q_1}$. Аналогично получим неравенство $\rho(g) < \frac{p_2}{q_2}$, если рассмотрим поднятия $\bar{f}^{q_2} - p_2$ и $\bar{g}^{q_2} - p_2$. В результате будем иметь $|\rho(g) - \rho(f)| < \varepsilon$, что и требовалось доказать.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, гранты 12-01-00672, 11-01-12056-офи-м и 11.G34.31.00390

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Alseda L., Llibre J., “Kneading theory of Lorenz maps”, *Dynamical Systems and Ergodic Theory*, **23** (1989), 83–89.
2. Alseda L., Llibre J., Misiurewicz M. Tresser C., “Periods and entropy for Lorenz-like maps”, *Ann. Inst. Fourier*, **39** (1989), 929–952.
3. Bamon R., Malta I., Pacifico M. J., “Changing rotation intervals of endomorphisms of the circle”, *Invent. math.*, **83** (1986), 257–264.
4. Bamon R., Malta I., Pacifico M. J., Takens F., “Rotation intervals of endomorphisms of the circle”, *Ergod. Th. Dyn. Syst.*, **4** (1984), 493–498.
5. Banerjee S., Kartnik M. S., Yuan G., Yorke J. A., “Bifurcations in One-Dimensional Piecewise Smooth Maps”, *Theory and Applications in Switching Circuits. IEEE Trans Circuits Systems.*, **47** (2000), 389–394.
6. Gambaudo J. M., Tresser C., “A monotonicity property in one dimensional dynamics Contemporary Math.”, **135** (1992), 213–222.
7. Zhussubaliev Z. T., Mosekilde E., *Bifurcations and Chaos in Piecewise-Smooth Dynamical Systems*, World Scientific Press, Singapur, 2003.
8. Glass L., Mackey M. C., “A simple model for phase locking of biological oscillators”, *J. Math. Biol.*, **7** (1979), 339–352.
9. Ito R., “Rotation sets are closed”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, **86** (1981), 321–327.
10. Keener J. P., “Chaotic Behavior in Piecewise Continuous Difference Equations”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **261** (2000), 589–604.
11. Maistrenko Y. L., Maistrenko V. L., Chua L. O., “Cycles of chaotic intervals in a time-delayed Chua’s circuit”, *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **3** (1993), 1557–1572.

12. Malkin M. I., “Rotation Intervals and the Dynamics of Lorenz Type Mappings”, *Selecta Mathematica Sovietica*, **10** (1991), 265–275.
13. Li M.-C., Malkin M., “Smooth symmetric and Lorenz models for unimodal maps”, *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **13** (2003), 3353–3372.
14. Малкин М. И., “Периодические орбиты, энтропия и множества вращения непрерывных отображений окружности”, *Украинский мат. журнал*, **35** (1983), 327–332.
15. Newhouse S., Palis J., Takens F., “Bifurcation and stability of families of diffeomorphisms”, *Publ. I.H.E.S.*, **57** (1983), 5–71.
16. Rescigno A., Stein R. B., Purple R. L., Poppele R. E., “A neuronal model for the discharge patterns produced by cyclic inputs”, *Bull. Math. Biophys.*, **32** (1970), 337–353.
17. Tramontana F., Westerholff F., Gardini L., “On the complicated price dynamics of a simple one-dimensional discontinuous financial market model with heterogeneous interacting traders”, *J. Econ. Behav. Organ.*, **74** (2010), 187–205.
18. Saum M. A., Young T. R., “Observed rotation numbers in families of circle maps”, *Int. Jour. of Bifurcation and Chaos*, **11** (2001), 73–89.
19. Young T. R., “Entropy and rotation intervals for circle maps near saddle-node bifurcations”, *Math. Z.*, **234** (2000), 487–506.

Continuous dependence of rotation numbers for model family of piecewise continuous one-dimensional maps

© M.I. Malkin²

Abstract. We consider a piecewise monotonic, piecewise continuous maps the real line, simulating the dynamics of some neural and telecommunications networks. For maps of the classes nonwandering set is the disjoint union of the sets of nonwandering two maps of Lorenz type. Thus, we can define the rotation rotation of the studied maps. It is proved that there are a lot of rotation the union of two closed intervals, the boundary points are continuously depend on the maps (with the Hausdorff topology).

Key Words: rotation numbers, maps of Lorentz type, rotation set

² Associate Professor of differential equations and mathematical analysis, Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod; malkin@mm.unn.ru.

УДК 517.938

Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством

© Т.М. Митрякова¹, О.В. Починка,², А.Е. Шишеникова³

Аннотация. В настоящей работе устанавливается существование энергетической функции у диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством. Построенная функция является функцией Морса, тесно связанной с динамикой каскада рассматриваемого класса. Построение для данной динамической системы энергетической функции — функции, невозрастающей вдоль траекторий динамической системы во многих случаях является ключом к пониманию структуры искусственной нейронной сети. Именно на существовании такой функции основан метод Хебба обучения персептрона.

Ключевые слова: дискретные динамические системы, цепно рекуррентное множество, энергетическая функция, функция Морса, обучение персептрона.

1. Введение

Пусть M^n — гладкое ориентируемое замкнутое n -многообразие с метрикой d и $f : M^n \rightarrow M^n$ — диффеоморфизм. ε -цепью длины t , соединяющей точку $x \in M^n$ с точкой $y \in M^n$ для диффеоморфизма f называется последовательность $x = x_0, \dots, x_m = y$ точек в M^n такая, что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leq i \leq m$. Точка $x \in M^n$ называется *цепно рекуррентной* для f , если для любого $\varepsilon > 0$ существует t , зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε -цепь длины t , соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек $f : M^n \rightarrow M^n$ называется *цепно рекуррентным множеством* f и обозначается $\mathcal{R}_f$. Заметим, что цепно рекуррентное множество инвариантно и замкнуто. Введем на множестве $\mathcal{R}_f$ отношение эквивалентности $\sim$ следующим образом: $x \sim y$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ существует ε -цепь, соединяющая точку x с точкой y и ε -цепь, соединяющая точку y с точкой x . Две такие точки называются *цепно эквивалентными*. Класс эквивалентности называется *цепной компонентой* $\mathcal{R}_f$.

Следуя идеям А. М. Ляпунова, К. Конли ввел понятие *функции Ляпунова*, как непрерывной функции, убывающей вдоль траекторий вне цепно рекуррентного множества и постоянной на цепных компонентах. Факт существования такой функции у любой динамической системы доказан К. Конли [5] в 1978 году и назван позже *фундаментальной теоремой динамических систем*.

Гладкая функция Ляпунова φ называется *энергетической функцией* для диффеоморфизма f , если множество критических точек функции φ совпадает с цепно рекуррентным множеством $\mathcal{R}_f$.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [11], который в 1961 году доказал существование энергетической функции, являющейся функцией Морса (см. определение в следующем разделе), у *градиентно-подобного потока*

¹ Старший преподаватель, Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; tatiana.mitryakova@yandex.ru

² Доцент, Нижегородский государственный университет имени Н.И. Лобачевского, Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru

³ Доцент, Нижегородская государственная сельскохозяйственная академия, Нижний Новгород; math@agri.sci-nnov.ru.

(потока Морса-Смейла без замкнутых траекторий). К. Мейер [6] в 1968 году обобщил этот результат и построил энергетическую функцию, являющуюся функцией Морса-Ботта⁴, для потока Морса-Смейла.

В 1977 году Д. Пикстон [9] установил существование энергетической функции, являющейся функцией Морса, для диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях. Кроме того, он построил диффеоморфизм на 3-сфере, не обладающий энергетической функцией и объяснил, что этот эффект связан с диким вложением сепаратрис седловых точек. В работах [1], [2], [3] достигнут значительный прогресс в нахождении условий существования энергетической функции на 3-многообразиях, а именно показано, что условия существования энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^3 \rightarrow M^3$ связаны с типом вложения глобальных аттракторов и репеллеров, являющихся замыканиями одномерных неустойчивых и устойчивых многообразий соответственно седловых периодических точек.

В настоящей работе рассматривается класс Φ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов f с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством, заданных на ориентируемых замкнутых поверхностях M^2 . Основным результатом является доказательство следующей теоремы.

Т е о р е м а 1.1. *Для любого диффеоморфизма $f \in \Phi$ существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса.*

БЛАГОДАРНОСТИ

Авторы благодарят гранты РФФИ 11-01-12056-офи-м, 12-01-00672, грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 и грант Минобрнауки РФ в рамках государственного задания на оказание услуг в 2012-2014 гг. подведомственными высшими учебными заведениями (шифр заявки 1.1907.2011) за частичную финансовую поддержку.

2. Вспомогательные факты

2.1. Функция Морса-Ляпунова

Так как цепно рекуррентное множество $\mathcal{R}_f$ диффеоморфизма $f \in \Phi$ конечно, то оно состоит из периодических точек и естественно искать энергетическую функцию и функцию Ляпунова для f в классе функций Морса.

Напомним определение функции Морса. Если X — гладкое n -многообразие и $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ — C^r -гладкая ($r \geq 2$) функция, то точка $p \in X$ называется *критической* точкой f , если $\text{grad}f(p) = 0$, то есть $\frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0$ в локальных координатах $x_1, \dots, x_n$ точки p . При этом, точка p называется *невыврожденной*, если матрица вторых производных (*матрица Гесса*) $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)|_p$ невырождена, в противном случае — точка p называется *вырожденной*. Функция f называется *функцией Морса*, если все ее критические точки невырождены.

В силу симметричности, матрица Гесса имеет только действительные собственные значения и число ее отрицательных собственных значений называют *индексом критической точки* p и обозначают I_p .

⁴ C^r -гладкая ($r \geq 2$) функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ на гладком n -многообразии X называется *функцией Морса-Ботта*, если Гессиан в каждой критической точке невырожден в направлении нормальном к критическому множеству уровня.

Предложение 2.1. (Лемма Морса) Пусть p — невырожденная критическая точка функции Морса $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда существуют локальные координаты $x_1, \dots, x_n$ в точке p , называемые координатами Морса, в которых локальное представление f имеет вид

$$f_p(x_1, \dots, x_n) = f(p) - x_1^2 - \dots - x_q^2 + x_{q+1}^2 + \dots + x_n^2,$$

где $q = I_p$ — индекс f в точке p .

В следующем предложении изложены свойства функции Ляпунова, являющейся функцией Морса, для диффеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$ с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством.

Предложение 2.2. ([2]) Пусть $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ — функция Ляпунова, являющаяся функцией Морса для диффеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$. Тогда

- 1) $-\varphi$ — функция Ляпунова для f^{-1} ;
- 2) если p — периодическая точка f , то $\varphi(x) < \varphi(p)$ для любой точки $x \in W_p^u \setminus p$ и $\varphi(x) > \varphi(p)$ для любой точки $x \in W_p^s \setminus p$;
- 3) если p — периодическая точка f , то p — критическая точка φ с индексом $\dim W_p^u$.

Согласно пункту 2) приведенного выше предложения, точка p является максимумом (соотв. минимумом) ограничения φ на неустойчивой (соотв. устойчивой) многообразии W_p^u (соотв. W_p^s). Если при этом максимум (соотв. минимум) является невырожденным, то, следуя работе [2], назовем функцию Ляпунова $\varphi : M \rightarrow \mathbb{R}$ для диффеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$ функцией Морса-Ляпунова. Везде далее под энергетической функцией диффеоморфизма f с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством мы будем понимать функцию Морса-Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с множеством периодических точек.

Предложение 2.3. ([2]) Пусть $\mathcal{O}$ — гиперболическая периодическая орбита диффеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$, $p \in \mathcal{O}$ и $q = \dim W_p^u$. Тогда существует окрестность $U_{\mathcal{O}}$ орбиты $\mathcal{O}$ и энергетическая функция $\varphi : U_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbb{R}$ для f такая, что $(W_p^u \cap U_{\mathcal{O}}) \subset \mathcal{O}x_1 \dots x_q$, $(W_p^s \cap U_{\mathcal{O}}) \subset \mathcal{O}x_{q+1} \dots x_n$ для координат Морса $x_1, \dots, x_n$ функции φ в окрестности точки p .

2.2. Динамические свойства диффеоморфизмов класса Φ

Пусть $f : M^2 \rightarrow M^2$ — диффеоморфизм класса Φ . Заметим, что согласно [10], гиперболичность цепно рекуррентного множества равносильна Ω -устойчивости диффеоморфизма $f \in \Phi$. Следовательно, периодические орбиты диффеоморфизма f допускают нумерацию $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_{k_f}$, согласующуюся с отношением С. Смейла, то есть $i \leq j$, если $W_{\mathcal{O}_i}^s \cap W_{\mathcal{O}_j}^u \neq \emptyset$. Не уменьшая общности будем считать, что нумерация орбит выбрана так, что номер любой седловой орбиты больше номера любой стоковой и меньше номера любой источниковой орбиты. Для $i = 1, \dots, k_f$ положим $W_i^s = W_{\mathcal{O}_i}^s$, $W_i^u = W_{\mathcal{O}_i}^u$ и для $i = 1, \dots, k_f - 1$ положим $A_i = \bigcup_{j=1}^i W_j^u$, $R_i = \bigcup_{j=i+1}^{k_f} W_j^s$.

Для $i = 1, \dots, k_f - 1$ положим $V_i = M^2 \setminus (A_i \cup R_i)$. Обозначим через $\hat{V}_i = V_i / f$ пространство орбит действия диффеоморфизма f на множестве V_i и через $p_i : V_i \rightarrow \hat{V}_i$ — естественную проекцию.

Пусть Ω_q , $q \in \{0, 1, 2\}$ — подмножество периодических точек r таких, что $\dim W_r^u = q$, k_q — число всех периодических орбит с индексом Морса (индекс Морса периодической точки r равен размерности $\dim W_r^u$), меньшим или равным q .

В работе [7] установлены следующие свойства диффеоморфизмов $f \in \Phi$.

Предложение 2.4. Пусть $f \in \Phi$. Тогда

- 1) $M^2 = \bigcup_{i=1}^{k_f} W_i^u$;
- 2) W_i^u является гладким подмногообразием многообразия M^2 ;
- 3) множество A_i является аттрактором диффеоморфизма $f \in \Phi$;
- 4) $(cl\ W_{i+1}^u \setminus W_{i+1}^u) \subset A_i$.

Предложение 2.5. Пусть $f \in \Phi$. Тогда

1) проекция $p_i : V_i \rightarrow \hat{V}_i$ является накрытием, индуцирующим структуру гладкого замкнутого 2-многообразия на пространстве орбит $\hat{V}_i$ и отображение η_i , состоящее из нетривиальных гомоморфизмов $\eta_{\hat{v}_i} : \pi_1(\hat{v}_i) \rightarrow \mathbb{Z}$ на каждой компоненте связности $\hat{v}_i$ многообразия $\hat{V}_i$;

2) многообразие $\hat{V}_i$ состоит из конечного числа компонент связности, каждая из которых гомеоморфна двумерному тору.

Следующее предложение можно доказать аналогично лемме 3.2.1 книги [4].

Предложение 2.6. В каждой компоненте связности множества V_i , $i = k_0, \dots, k_1 - 1$ существует окружность такая, что объединение этих окружностей пересекается с каждой сепаратрисой множества $W_{i+1}^u \setminus \mathcal{O}_{i+1}$ в одной точке.

Согласно определению аттрактора, множество A_i обладает захватывающей окрестностью M_i , где M_i компактное множество такое, что $f(M_i) \subset \text{int } M_i$ (M_i — f -сжимаема) и $\bigcap_{k \geq 0} f^k(M_i) = A_i$ (см., например, [10]). Для $i = 1, \dots, k_1$ обозначим через c_i число компонент связности аттрактора A_i , через r_i — число седловых точек и через s_i — число стоковых точек в A_i . Положим $g_i = c_i + r_i - s_i$.

Аналогично работе [3], дадим следующее определение.

Определение 2.1. Захватывающую окрестность M_i , $i = 1, \dots, k_1$ аттрактора A_i назовем тесной, если M_i состоит из c_i дисков с дырами, общее число которых равно g_i .

Если при этом для каждой седловой точки $\sigma \in \mathcal{O}_i$ пересечение $W_\sigma^s \cap M_i$ состоит в точности из одного отрезка, то окрестность M_i будем называть канонической.

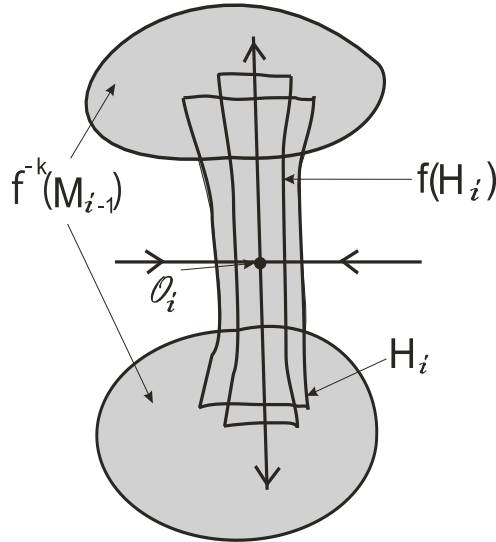
Лемма 2.1. Каждый аттрактор A_i , $i = 1, \dots, k_1$ диффеоморфизма $f \in \Phi$ обладает канонической окрестностью.

Доказательство. Индукцией по $i = 1, \dots, k_1$ докажем существование канонической окрестности M_i для A_i .

Пусть $i = 1$. Согласно предложению 2.3., существует окрестность $U_{A_1} \subset W_{A_1}^s$ нульмерного аттрактора A_1 и энергетическая функция $\varphi_{A_1} : U_{A_1} \rightarrow \mathbb{R}$ для f такая, что $\varphi_{A_1}(A_1) = 0$ и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ каждая компонента связности множества $M_1 = \varphi_{A_1}^{-1}((-\infty, \varepsilon])$ имеет вид $\{(x_1, x_2) \in U_{A_1} : x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon\}$ в локальных координатах x_1, x_2 . Тогда M_1 — каноническая окрестность для нульмерного аттрактора A_1 , которая является объединением c_1 двумерных дисков.

Предположим, что существует каноническая окрестность M_{i-1} аттрактора A_{i-1} . Покажем существование канонической окрестности для i . Рассмотрим два случая: 1) $i \leq k_0$; 2) $i > k_0$.

В случае 1), как выше, существует каноническая окрестность M_i нульмерного аттрактора A_i , являющаяся объединением c_i попарно не пересекающихся 2-дисков.



Р и с у н о к 2.1

В случае 2) согласно предложению 2.3., существует окрестность $U_{\mathcal{O}_i}$ орбиты $\mathcal{O}_i$ и энергетическая функция $\varphi_{\mathcal{O}_i} : U_{\mathcal{O}_i} \rightarrow \mathbb{R}$ для f такая, что $\varphi_{\mathcal{O}_i}(\mathcal{O}_i) = 0$ и для достаточно малых $\varepsilon > 0$ каждая компонента связности $H_i = \varphi_{\mathcal{O}_i}^{-1}((-\infty, \varepsilon])$ имеет вид $\{(x_1, x_2) \in U_{\mathcal{O}_i} : -x_1^2 + x_2^2 \leq \varepsilon\}$ в локальных координатах x_1, x_2 . В силу λ -леммы, существует $k \in \mathbb{N}$ такое, что $f^{-k}(\partial M_{i-1})$ пересекает каждую компоненту связности $H_i \setminus W_i^s$ и $f(H_i \setminus W_i^s)$ в точности по одному отрезку и $f(H_i) \setminus \text{int } f^{-k}(M_{i-1}) \subset \text{int } H_i$ (см. рисунок 2.1). Положим $M_i = f^{-k}(M_{i-1}) \cup H_i$.

Аналогично теореме 2.2.2 книги [4] можно доказать, что M_i захватывающая окрестность аттрактора A_i . Покажем, что она является канонической. Для этого достаточно проверить, что она является объединением c_i дисков с дырами, общее число которых равно g_i .

По построению M_i состоит из c_i компонент связности, каждая из которых является диском с дырами. Обозначим через g_{M_i} общее число дыр множества M_i . Покажем, что $g_{M_i} = g_i$.

Во введенных, обозначениях число точек в орбите $\mathcal{O}_i$ равно $(r_i - r_{i-1})$. Поскольку $A_i = A_{i-1} \cup W_{\mathcal{O}_i}^u$ и $cl W_{\mathcal{O}_i}^u \setminus W_{\mathcal{O}_i}^u \subset A_{i-1}$, то $c_i \leq c_{i-1}$. Заметим, что число компонент связности множества $H_i \setminus \text{int } f^{-k}(M_{i-1})$ равно $(r_i - r_{i-1})$. По построению каждая из этих компонент является диском и среди них имеется $((r_i - r_{i-1}) - (c_{i-1} - c_i))$ дисков, удалением которых из множества M_i получается множество, вновь состоящее из c_i компонент связности. Тогда общее число дыр $g_{M_{i-1}}$ множества M_{i-1} вычисляется по формуле $g_{M_{i-1}} = g_{M_i} - ((r_i - r_{i-1}) - (c_{i-1} - c_i))$, откуда $g_{M_i} = g_{M_{i-1}} + r_i - r_{i-1} - c_{i-1} + c_i$. Поскольку $g_{M_{i-1}} = g_{i-1}$, то $g_{M_i} = c_{i-1} + r_{i-1} - s_{i-1} + r_i - r_{i-1} - c_{i-1} + c_i = c_i + r_i - s_{i-1}$. Так как $s_{i-1} = s_i$, то $g_{M_i} = g_i$.

Сглаживая множество M_i получаем искомую каноническую окрестность.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о .

Аналогично лемме 7.2.1 книги [4] можно доказать следующее предложение.

Предложение 2.7. Пусть $i \in \{1, \dots, k_1\}$ и $\mathcal{O}_i$ — захватывающая окрест-

ность аттрактора A_i такая, что ∂Q_i — линия уровня энергетической функции $\varphi_{Q_i} : Q_i \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда для любой тесной окрестности P_i аттрактора A_i существует энергетическая функция $\varphi_{P_i} : P_i \rightarrow \mathbb{R}$ для f с множеством уровня ∂P_i .

3. Построение энергетической функции для $f \in \Phi$

Разобьем построение энергетической функции для $f : M^2 \rightarrow M^2$ на шаги.

Шаг 1. Индукцией по $i = 1, \dots, k_1$ докажем существование энергетической функции φ_{M_i} на канонической окрестности M_i аттрактора A_i с множеством уровня $S_i = \partial M_i$.

Для $i = 1$ аттрактор A_1 совпадает со стоковой орбитой $\mathcal{O}_1$ диффеоморфизма f . В силу предложения 2.3., существует окрестность $U_{\mathcal{O}_1} \subset M^2$ орбиты $\mathcal{O}_1$, оснащенная энергетической функцией $\varphi_{\mathcal{O}_1} : U_{\mathcal{O}_1} \rightarrow \mathbb{R}$ для f и такая, что $\varphi_{\mathcal{O}_1}(\mathcal{O}_1) = 1$. В силу предложения 2.7., существует энергетическая функция φ_{M_1} на окрестности M_1 аттрактора A_1 с множеством уровня S_1 .

Пусть по предположению индукции существует энергетическая функция $\varphi_{M_{i-1}}$ на окрестности M_{i-1} аттрактора A_{i-1} с множеством уровня S_{i-1} . Построим функцию φ_{M_i} . Рассмотрим две возможности: а) $i \leq k_0$; б) $i > k_0$.

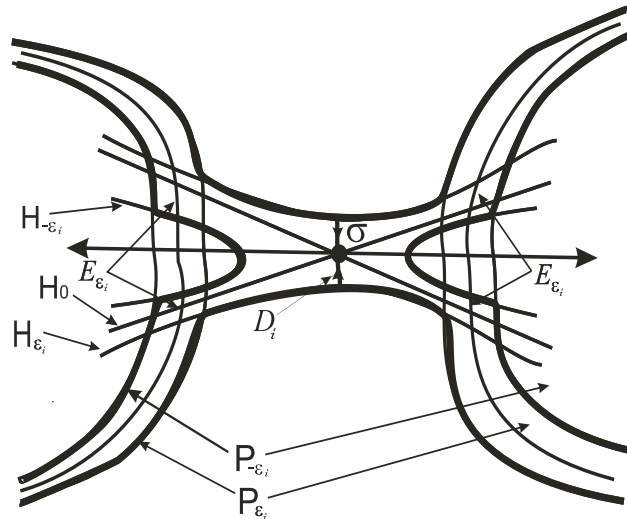
В случае а) окрестность M_i состоит из c_i попарно не пересекающихся двумерных дисков. В силу предположения индукции и предложения 2.7. существует энергетическая функция $\varphi_{M_{i-1}}$ на канонической окрестности M_{i-1} , постоянная на ∂M_{i-1} . Аналогично случаю $i = 1$ доказывается существование энергетической функции $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ на $U_{\mathcal{O}_i}$ с множеством уровня $\partial U_{\mathcal{O}_i}$. Тогда функция φ_{M_i} , составленная из функций $\varphi_{M_{i-1}}$ и $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ является искомой.

В случае б) орбита $\mathcal{O}_i$ имеет окрестность $U_{\mathcal{O}_i} \subset M^2$, оснащенную энергетической функцией $\varphi_{\mathcal{O}_i} : U_{\mathcal{O}_i} \rightarrow \mathbb{R}$ для f с $\varphi_{\mathcal{O}_i}(\mathcal{O}_i) = i$. Более того, для каждой компоненты связности U_σ , $\sigma \in \mathcal{O}_i$ множества $U_{\mathcal{O}_i}$ существуют координаты Морса (x_1, x_2) такие, что $\varphi_{\mathcal{O}_i}(x_1, x_2) = i - x_1^2 + x_2^2$, ось Ox_1 содержится в неустойчивом многообразии, а ось Ox_2 содержится в устойчивом многообразии точки σ .

Из свойств канонической окрестности M_i и λ -леммы следует существование трубчатой окрестности $N(D_i) \subset M_i$ дисков $D_i = M_i \cap W_{\mathcal{O}_i}^s$ такой, что $N(D_i) \cap A_{i-1} = \emptyset$, множество $P_{i-1} = M_i \setminus \text{int } N(D_i)$ является f -сжимаемым и ∂P_{i-1} трансверсально пересекает каждую компоненту связности множества $\varphi_{\mathcal{O}_i}^{-1}(i) \setminus \mathcal{O}_i$ по двум точкам. Множество P_{i-1} является тесной окрестностью аттрактора A_{i-1} . По предположению индукции и предложению 2.7. на окрестности P_{i-1} существует энергетическая функция $\varphi_{P_{i-1}}$ с множеством уровня ∂P_{i-1} .

Для $\varepsilon_i \in (0, 1)$, $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ положим $P_t = \varphi_{P_{i-1}}^{-1}([1, \varphi_{P_{i-1}}(\partial P_{i-1}) - \varepsilon_i + t])$, $H_t = \{x \in U_{\mathcal{O}_i} : \varphi_{\mathcal{O}_i}(x) \leq i + t\}$ и $E_{\varepsilon_i} = (P_{\varepsilon_i} \setminus \text{int } P_{-\varepsilon_i}) \cap (H_{\varepsilon_i} \setminus \text{int } H_{-\varepsilon_i})$ (см. рисунок 3.1). Заметим, что $P_{\varepsilon_i} = P_{i-1}$ и, следовательно, $f(P_{\varepsilon_i}) \subset \text{int } P_{\varepsilon_i}$. Так как $\varphi_{\mathcal{O}_i}$ — функция Ляпунова для $f|_{U_{\mathcal{O}_i}}$, то $\varphi_{\mathcal{O}_i}(f^{-1}(\varphi_{\mathcal{O}_i}^{-1}(i) \setminus \mathcal{O}_i)) > i$ и, следовательно, $(H_0 \setminus \mathcal{O}_i) \subset \text{int } f^{-1}(H_0 \setminus \mathcal{O}_i)$. Отсюда и из условий выбора окрестности $N(D_i)$ следует существование значения ε_i со следующими свойствами:

- (1) $f(P_{\varepsilon_i}) \subset \text{int } P_{-\varepsilon_i}$;
- (2) для любого $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ ∂P_t трансверсально пересекает каждую компоненту связности множества $\partial H_t \setminus D_i$ по двум точкам;
- (3) $f^{-1}(E_{\varepsilon_i}) \cap H_{\varepsilon_i} = \emptyset$.



Р и с у н о к 3.1

Для $t \in [-\varepsilon_i, \varepsilon_i]$ положим $Q_t = P_t \cup H_t$. По построению множество Q_t , $t \neq 0$ является f -сжимаемым. Более того, $Q_{-\varepsilon_i}$ после сглаживания является тесной окрестностью аттрактора A_{i-1} , а Q_{ε_i} после сглаживания является тесной окрестностью аттрактора A_i . В силу предположения индукции и леммы 2.7., на множестве $Q_{-\varepsilon_i}$ существует энергетическая функция $\varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}$, постоянная на $\partial Q_{-\varepsilon_i}$. Поскольку $\varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}(A_{i-1}) \leq i-1$, то можно считать, что $\varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}(Q_{-\varepsilon_i}) = i - \varepsilon_i$.

Определим на множестве Q_{ε_i} функцию $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}} : Q_{\varepsilon_i} \rightarrow \mathbb{R}$ формулой:

$$\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(x) = \begin{cases} \varphi_{Q_{-\varepsilon_i}}(x), & \text{если } x \in Q_{-\varepsilon_i}; \\ i + t, & \text{если } x \in Q_t \end{cases}$$

Проверим, что $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}$ является энергетической функцией для f , тогда существование искомой функции $\varphi_{M_i} : M_i \rightarrow \mathbb{R}$ будет следовать из предложения 2.7..

Представим множество Q_{ε_i} в виде объединения подмножеств с попарно непересекающимися внутренностями: $Q_{\varepsilon_i} = A \cup B \cup C$, где $A = Q_{-\varepsilon_i}$, $B = P_{\varepsilon_i} \setminus Q_{-\varepsilon_i}$ и $C = Q_{\varepsilon_i} \setminus (P_{\varepsilon_i} \cup Q_{-\varepsilon_i})$. По построению функция $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_A$ является энергетической функцией для f , $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(\partial A) = i - \varepsilon_i$, функция $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_B$ не имеет критических точек и функция $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_C$ совпадает с функцией $\varphi_{\sigma_i}|_C$. Проверим свойство убывания функции $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}$ вдоль траекторий.

Если $x \in A$, то $f(x) \in A$ и $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(f(x)) < \varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(x)$, поскольку $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_A$ — функция Ляпунова. Если $x \in B$, то, в силу условия (1) выбора ε_i , $f(x) \in A$ и, следовательно, $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(x) > i - \varepsilon_i$, а $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(f(x)) < i - \varepsilon_i$, откуда $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(f(x)) < \varphi_{Q_{\varepsilon_i}}(x)$. Если $x \in C$, то, в силу условия (3) выбора ε_i , либо $f(x) \in A$ и убывание доказывается аналогично случаю $x \in B$, либо $f(x) \in C$ и убывание следует из того, что $\varphi_{Q_{\varepsilon_i}}|_C$ — функция Ляпунова.

Шаг 2. Заметим, что множество источников Ω_2 является аттрактором для диффеоморфизма f^{-1} и, следовательно имеет каноническую окрестность $\tilde{M}$. Аналогично шагу 1 построим энергетическую функцию $\tilde{\varphi}_{\tilde{M}}$ для f^{-1} на окрестности $\tilde{M}$ с множеством уровня $\tilde{S} = \partial \tilde{M}$.

Шаг 3. По построению множество $P_{k_1} = M^2 \setminus \text{int } \tilde{M}$ является тесной окрестностью аттрактора A_{k_1} , откуда следует существование искомой функции φ . Действительно, в силу предложения 2.7., из существования энергетической функции $\varphi_{M_{k_1}}$ на окрестности M_{k_1} аттрактора A_{k_1} следует существование энергетической функции $\varphi_{P_{k_1}}$ на P_{k_1} с множеством уровня ∂P_{k_1} . Функцию $\varphi_{P_{k_1}}$ можно построить так, что $\varphi_{P_{k_1}}(\tilde{S}) =$

$k_f + 1 - \tilde{\varphi}_{\tilde{M}}(\tilde{S})$. Поскольку $\partial P_{k_1} = \tilde{S}$, то искомая функция φ определяется формулой

$$\varphi(x) = \begin{cases} \varphi_{P_{k_1}}(x), & \text{если } x \in P_{k_1}; \\ k_f + 1 - \tilde{\varphi}_{\tilde{M}}(x), & \text{если } x \in \tilde{M}. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гринес В.З., Лауденбах Ф., Починка О.В., “Энергетическая функция для градиентно-подобных диффеоморфизмов на 3-многообразиях”, *ДАН*, **422**:3 (2008), 299 – 301..
2. Grines V., Laudенbach F., Pochinka O., “Self-indexing function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds”, *Moscow Math. Journal*, 2009, № 4, 801 – 821.
3. Гринес В.З., Лауденбах Ф., Починка О.В., “О существовании энергетической функции для диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях”, *ДАН*, **440**:1 (2011), 7 – 10.
4. Гринес В.З., Починка О.В., *Введение в топологическую классификацию каскадов на многообразиях размерности два и три*, НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». Ижевский институт компьютерных исследований., Ижевск, 2011.
5. Conley C., *solated Invariant Sets and Morse Index*, CBMS Regional Conference Series in Math, 1978, 38 с.
6. Meyer K. R., “Energy functions for Morse-Smale systems”, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1031 – 1040.
7. Митрякова Т.М., Починка О.В., Шишенкова А.Е., “О структуре пространства блуждающих орбит диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством”, *Журнал СВМО*, **13**:1 (2011), 142 – 151.
8. Palis J., “On Morse-Smale dynamical systems”, *Topology*, **8**:4 (1969), 385 – 404.
9. Pixton D., “Wild unstable manifolds”, *Topology*, **16**:2 (1977), 167 – 172.
10. Robinson C., *Dynamical Systems: stability, symbolic dynamics, and chaos*, Studies in Adv. Math., Sec. edition, CRC Press, 1999, 506 с.
11. Smale S., “On gradient dynamical systems”, *Ann. Math.*, 1961, 199 – 206.

Energy function for diffeomorphisms on surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set

© T.M. Mitryakova⁵, O.V. Pochinka⁶, A.E. Shishenkova⁷.

Abstract. In the present paper the existence of energy function for diffeomorphisms of surfaces with finite hyperbolic chain recurrent set is established. The constructed function is Morse function which closely connected with dynamic of the cascade and its existence allows to prove Poincare-Hopf theorem for systems of the considered class. Construction of energy function for this dynamical system, that is a function which is not increasing along trajectories, in many cases is key to understanding of structure of artificial neural network. On the existence of such function Hebb's method of training of perceptron is based.

Key Words: discrete dynamical systems, chain recurrent set, energy function, Morse function, training of perceptron.

⁵ Assistant Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod; tatiana.mitryakova@yandex.ru

⁶ Associated Professor of Chair of Theory of Functions, Lobachevskii State University, Nizhny Novgorod, olga-pochinka@yandex.ru

⁷ Associated Professor of Chair, Agriculture Academy of Nizhniy Novgorod, Nizhniy Novgorod, vgrines@yandex.ru

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

УДК 517.929

Метод понижения порядка и операция сдвига

© М.Б. Авдеева¹, А.В. Зубов²

Аннотация. В этой статье изложен эффективный метод понижения порядка, являющийся некоторым аналогом алгоритма Рауса и позволяющий определить число корней исходного многочлена, лежащих как в левой, так и в правой полуплоскости, не более чем за $5/4 n(n+1)$ элементарных арифметических операций.

Ключевые слова: полуплоскость, коэффициент, устойчивость, вещественные корни, абсолютная устойчивость и неустойчивость.

1. Введение

В этой статье изложен эффективный метод понижения порядка, являющийся некоторым аналогом алгоритма Рауса и позволяющий определить число корней исходного многочлена, лежащих как в левой $Rez < 0$, так и правой $Rez > 0$ полуплоскости, не более чем за $\frac{5}{4}n(n+1)$ элементарных арифметических операций [4].

Известно, что алгоритм Рауса служит для определения устойчивости многочленов, т. е. для определения принадлежности всех корней этого многочлена левой полуплоскости $Rez < 0$. Этот алгоритм на каждом шагу последовательно понижает порядок многочлена $f_n(z)$ степени n с положительными действительными коэффициентами

$$f_n(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n \quad (1.1)$$

посредством операции понижения порядка

$$f_{n-1}(z) = f_n(z) - \alpha_n z S_n(z), \quad \alpha_n = a_n \setminus a_{n-1} > 0, \quad (1.2)$$

где $S_{n-1}(z) = a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-3}z^{n-3} + a_{n-5}z^{n-5} + \dots$.

Раус показал, что, если многочлен $f_n(z)$ является устойчивым, то многочлен $f_{n-1}(z)$ также является устойчивым и, наоборот. Таким образом, если исходный многочлен $f_n(z)$ является устойчивым, то, последовательно применяя операцию понижения порядка (1.2), придем к многочлену первого порядка, имеющему отрицательный вещественный корень, при этом все $\alpha_i > 0$, $(i = n, \dots, 2)$ [1].

2. Построение алгоритма последовательного понижения порядка исходного многочлена

Поставим задачу: построить алгоритм последовательного понижения порядка исходного многочлена с действительными коэффициентами с целью определения числа корней этого многочлена, лежащих как в левой $Rez < 0$, так и в правой $Rez > 0$ полуплоскости [5].

¹ Аспирант, СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

² Доцент, СПбГУ ф-т ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

О п р е д е л е н и е 2.1. Многочлен $f(z)$ степени $n (n \geq 1)$

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n \quad (2.1)$$

называется абсолютно устойчивым, если все его корни лежат в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$. Если, кроме корней, лежащих в левой полуплоскости, этот многочлен имеет и чисто мнимые корни единичной кратности, то он называется устойчивым. Во всех остальных случаях многочлен называется неустойчивым. Очевидно, что для характеристического многочлена эти три случая соответствуют асимптотической устойчивости, устойчивости (по Ляпунову) и неустойчивости, порождающей его линейной стационарной системы.

Заметим, что в литературе первый тип полиномов называется устойчивым, а остальные неустойчивыми [2], [3] - это является более грубой классификацией полиномов по локализации корней, чем предлагается выше.

О п р е д е л е н и е 2.2. Пусть задан многочлен $f(z)$ степени n , не имеющий нулевых корней. Многочлен $F(z) = S_\alpha f(z)$ степени $n+1$, не имеющий нулевых корней, где

$$F(z) = (1 + \alpha z)f(z) + f(-z), \quad \alpha \neq 0 \quad (2.2)$$

будем называть присоединенным к многочлену $f(z)$, операцию S_α будем называть операцией присоединения, а многочлен $f(z)$ называется порождающим многочленом для многочлена $F(z)$.

Установим для операции присоединения два основных свойства.

Т е о р е м а 2.1. 1) Многочлен $F(z)$, присоединенный к многочлену $f(z)$ с действительными коэффициентами, имеет одни и те же кососимметричные корни (с учетом их кратностей), что и многочлен $f(z)$. 2) Если вещественное число $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$), то число корней многочлена $F(z)$, лежащих в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ (правой полуплоскости $\operatorname{Re} z > 0$), увеличивается на единицу по сравнению с числом таких же корней у многочлена $f(z)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы элементарно выводится из равенства

$$\begin{aligned} F(z) &= (1 + \alpha z)r(z)f_0(z) + r(-z)f_0(-z) = \\ &= r(z)((1 + \alpha z)f_0(z) + f_0(-z)) = r(z)F_0(z), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где корнями многочлена $r(z)$ являются только кососимметричные корни многочлена $f(z)$ ($r(z) = r(-z)$) с учетом их кратностей, а корни многочлена $f_0(z)$ совпадают с остальными корнями многочлена $f(z)$, также с учетом их кратностей.

Докажем теперь второе утверждение теоремы. Введем в рассмотрение многочлен

$$\Phi_\mu(z) = (1 + \alpha z)f_0(z) + \mu f_0(-z), \quad \mu \in [0, 1], \quad \alpha \neq 0.$$

Заметим, что коэффициенты этого многочлена являются вещественными и непрерывными функциями вещественного параметра $\mu \in [0, 1]$. Отсюда вытекает, что корни этого многочлена $z_j(\mu)$ также являются непрерывными функциями параметра μ при $\mu \in [0, 1]$.

Очевидно, что из равенств (2.3) и вида многочлена $\Phi_\mu(z)$ следует, что

$$\Phi_1(z) = F_0(z), \quad F(z) = r(z)\Phi_1(z).$$

С другой стороны, $\Phi_0(z) = (1 + \alpha z)f_0(z)$. Это означает, что корни $z_j(\mu)$ многочлена $\Phi_\mu(z)$ при $\mu = 0$ совпадают с корнями z_j многочлена $f_0(z)$, т.е. с корнями $z_j(0) = z_j$ с добавлением корня $z = -1/\alpha$.

Покажем, что непрерывные кривые $z_j(\mu)$ при $\mu \in [0, 1]$ не пересекают мнимую ось, т.е. $z_j(\mu) \neq i\beta$ при $\mu \in [0, 1]$. Допустим, что это не так. Пусть существует такое $\beta \neq 0$, что справедливо равенство

$$\Phi_\mu(i\beta) = (1 + i\alpha\beta)f_0(i\beta) + \mu f_0(-i\beta) = 0 \quad \text{при} \quad \mu \in [0, 1].$$

Так как по условию многочлен $f_0(z)$ является многочленом с действительными коэффициентами и не имеет кососимметричных корней, а тем самым и чисто мнимых, то $f_0(i\beta) \neq 0$ для любого вещественного $\beta \neq 0$. Тогда из свойств комплексных чисел следует, что $|f_0(z)| = |f_0(\bar{z})|$ и из предыдущего равенства вытекает соотношение

$$|1 + i\alpha\beta| |f_0(i\beta)| = |\mu| |f_0(-i\beta)| = |\mu| |f_0(i\beta)|.$$

Это равенство, разделив на $|f_0(i\beta)| \neq 0$ обе его части, можно переписать в виде $1 + \alpha^2\beta^2 = \mu^2$. Так как величины $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$, то величина $|\mu| > 1$, что противоречит условию $\mu \in [0, 1]$. Отсюда следует, что у многочлена $\Phi_\mu(z)$ нет чисто мнимых корней при $\mu \in [0, 1]$. Это и означает, что непрерывные кривые $z_j(\mu)$ при $\mu \in [0, 1]$ не пересекают мнимую ось, и, следовательно, остаются при $\mu \in [0, 1]$ в той же полуплоскости комплексного переменного, что и величины $z_j(0) = z_j$, $z = -1/\alpha$.

Так как корни многочлена $\Phi_0(z)$ совпадают с корнями z_j многочлена $f_0(z)$ с добавлением корня $z = -1/\alpha$, то при $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$) число корней многочлена $\Phi_0(z)$, лежащих в левой полуплоскости $\operatorname{Re} z < 0$ (правой полуплоскости), на единицу больше числа таких же корней у многочлена $f_0(z)$. С учетом того, что кривые $z_j(\mu)$ при $\mu \in [0, 1]$ остаются в одной и той же полуплоскости, можно сделать вывод о том, что многочлен $\Phi_\mu(z)$, и, следовательно, и многочлен $\Phi_1(z)$, имеет такое же число корней в левой и правой полуплоскости, что и многочлен $\Phi_0(z)$. Из представления $F(z) = r(z)\Phi_0(z)$ вытекает справедливость второго утверждения теоремы. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.2. Для произвольного многочлена $F(z)$ степени $n + 1$, не имеющего нулевых корней

$$F(z) = A_0 + A_1 z + \dots + A_{n+1} z^{n+1}, \quad A_1 \neq 0, \quad (2.4)$$

существует единственный порождающий его многочлен $f(z)$ степени n , коэффициенты которого можно однозначно определить методом понижения порядка (МПП) за $2n + 1$ арифметическую операцию.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что многочлен $f(z)$, порождающий многочлен $F(z)$, существует, тогда он удовлетворяет уравнению (2.2) по определению операции присоединения. Из уравнения (2.2) легко получить уравнение для искомого многочлена $f(z)$

$$\begin{aligned} \alpha^2 z^2(z) &= (\alpha z - 1)F(z) + F(-z) = \\ &= (\alpha A_0 - 2A_1)z + \alpha A_1 z^2 + \dots + \alpha A_{n+1} z^{n+2} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Полагая в уравнении (2.5) $\alpha = 2A_1/A_0$, получим, что в нем справа стоит многочлен степени $n + 2$, в котором можно вынести за скобки общий множитель z^2 . Разделив обе

части уравнения (2.5) на $\alpha^2 z^2$, получим, что многочлен $f(z)$ не имеет нулевых корней и является однозначно определенным многочленом степени n , порождающим многочлен $F(z)$. Это вытекает из того, что правая часть уравнения (2.5) однозначно определена для любого α . Если выбрать $\alpha \neq 2A_1/A_0$, то уравнение (2.5) уже не будет определять многочлена $f(z)$ степени n . Нетрудно видеть, что коэффициенты многочлена $f(z)$ однозначно находятся по рекуррентным формулам:

$$\begin{aligned} a_{2l} &= \frac{A_{2l+1}}{\alpha}, \quad a_{2l-1} = \frac{A_{2l}}{\alpha} - \frac{2A_{2l+1}}{\alpha^2}, \quad \alpha = \frac{2A_1}{A_0}, \\ a_0 &= \frac{A_0}{2}, \quad A_{n+2} = 0, \quad l = 0, 1, \dots, [n/2], \end{aligned} \quad (2.6)$$

где $[n/2]$ - целая часть числа $n/2$. Этот алгоритм в дальнейшем будем называть методом понижения порядка (МПП). Отсюда следует, что коэффициенты многочлена $f(z)$ вычисляются из коэффициентов многочлена $F(z)$ за $2n+1$ арифметическую операцию. Теорема доказана.

Т е о р е м а 2.3. Для любого стандартного полинома Гурвица степени $n > 1$ существует единственный порождающий его стандартный полином Гурвица первого порядка $a + bz$, $a > 0$, $b > 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем вначале, что для любого стандартного полинома Гурвица $F(z)$ степени $n+1$, $n \geq 1$ существует единственный порождающий его стандартный полином Гурвица степени n .

Согласно лемме 3 для любого стандартного полинома Гурвица $F(z) = A_0 + A_1z + \dots + A_{n+1}z^{n+1}$ степени $n+1$ существует порождающий его стандартный полином Гурвица степени n $f(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$, т.е. $F(z) = S_\alpha f(z)$. Тогда из формулы (2.7)

$$F(z) = (1 + \alpha z)f(z) + f(-z), \quad \alpha > 0 \quad (2.7)$$

вытекает, что коэффициенты этих полиномов связаны соотношениями

$$\begin{aligned} A_0 &= 2a_0, \quad A_1 = \alpha a_0, \quad A_{n+1} = \alpha a_n, \quad A_{2l} = 2a_{2l} + \alpha a_{2l-1}, \\ A_{2l+1} &= \alpha a_{2l} + \alpha a_{2l-1}, \quad (l = 1, \dots, [\frac{n}{2}]), \end{aligned} \quad (2.8)$$

где $[]$ - целая часть числа. Предположим, что есть два различных стандартных полинома Гурвица степени n , порождающих полином $F(z)$, т.е. $F(z) = S_\alpha f(z) = S_{\bar{\alpha}} \bar{f}(z)$. Тогда из формул (2.8) следуют очевидные равенства

$$\frac{2A_1}{A_0} = \frac{2\alpha a_0}{2a_0} = \frac{2\bar{\alpha}\bar{a}_0}{2\bar{a}_0} = \alpha = \bar{\alpha}.$$

Отсюда и из формул (2.8) вытекает, что порождающий полином является единственным, т.к. между числом $\alpha > 0$, коэффициентами порождающего полинома $f(z)$ и коэффициентами присоединенного полинома $F(z)$ есть взаимно однозначное соответствие

$$\begin{aligned} \bar{a}_{2i} &= \frac{A_{2l+1}}{\alpha}, \quad \bar{a}_{2i-1} = a_{2l-1} = \frac{A_{2l}}{\alpha} - \frac{2A_{2l+1}}{\alpha^2}, \\ \alpha &= \bar{\alpha} = \frac{2A_1}{A_0}, \quad a_0 = \bar{a}_0 = \frac{A_0}{2}, \quad l = 1, \dots, [\frac{n}{2}]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Итак, мы показали, что для любого стандартного полинома Гурвица $F(z)$ степени $n+1$, $n > 1$ существует единственный порождающий его стандартный полином Гурвица

$f(z)$ степени n , коэффициенты которого находятся по формуле (2.9). Продолжая процесс понижения порядка, т.е. переходя по формулам (2.9) к стандартному полиному Гурвица на единицу меньшей степени за n шагов, мы получим стандартный полином Гурвица первого порядка $a + bz$, $a > 0$, $b > 0$. Теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. Д. Блистанова, И. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. А. Северцев, *Конструктивные методы теории устойчивости и их применение к задачам численного анализа*, Учебное пособие, ООП НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2002, 119 с.
2. Б. Т. Поляк, П. С. Щербаков, *Робастная устойчивость и управление*, Наука, М, 2002, 303 с.
3. М. М. Постников, *Устойчивые многочлены*, Наука, Главная редакция физико-математической литературы., М, 1981, 176 с.
4. Н. В. Зубов, А. Ф. Зубова, *Безопасность функционирования технических систем.*, Уч. пос., «ВВМ», СПб, 2009, 343 с.
5. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, *Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа.*, Уч. пос., НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2010, 102 с.

The method of low to order and the operation of displacement

© M.B. Avdeeva³, A.V. Zubov⁴

Abstract. In this article is expounds effective method of low to order, is appears same analog of algorithm Rauses and is allows to define the number of roots the previous polynomial, is lies so in left, that in right semi-plane, no more that for $\frac{5}{4}n(n+1)$ elementary arithmetical operations.

Key Words: semi-plane, coefficient, stability, material roots, absolutes stability and nostability.

³ Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru

⁴ Lecturer, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru

УДК 517.929

Задача поиска минимального многочлена

© И.В. Зубов¹, В.И. Зубов²

Аннотация. В данной статье на основе метода понижения порядка излагается алгоритм вычисления числа чисто мнимых корней у характеристического многочлена.

Ключевые слова: алгоритм, корень, перемена знака, многочлен, левая и правая полуплоскости.

1. Введение

В статье предлагается новый метод построения минимального многочлена с помощью решения систем линейных алгебраических уравнений. Этот метод позволяет находить коэффициенты минимального многочлена в пределах точности представления чисел в компьютере и свободен от ошибок округления. Зная коэффициенты минимального многочлена легко решить вопрос об устойчивости или неустойчивости матрицы системы первого приближения с помощью метода Рауса или метода понижения порядка.

2. Постановка задачи

Пусть A - вещественная, постоянная матрица размера $n \times n$. Поставим задачу поиска минимального многочлена этой матрицы, т. е. многочлена наименьшей степени анулирующего матрицу A с коэффициентом при старшей степени равным единице. Таким образом минимальный многочлен имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + c_1\lambda + c_0 = 0, \quad (2.1)$$

причем выполняется матричное тождество:

$$A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \dots + c_1A + c_0E = 0 \quad (2.2)$$

Заметим, что вещественные матрицы размера $n \times n$ образуют вещественное линейное пространство размерности n^2 , где можно использовать все результаты и определения, полученные в линейной алгебре такие как: линейная зависимость и независимость элементов; базис и разложение по нему и тому подобное [1].

Исходя из этого, можно сформулировать очевидное утверждение.

3. Теорема о степени минимального многочлена

Т е о р е м а 3.1. *Степень минимального многочлена равна $k+1$, если матрицы*

$$A^k, A^{k-1}, \dots, A, A^0, A^0 = E \quad (3.1)$$

- линейно независимы, а матрицы

$$A^{k+1}, A^k, A^{k-1}, \dots, A, E \quad (3.2)$$

¹ Профессор, СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург, a_v_zubov@mail.ru

² Аспирант, СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург, a_v_zubov@mail.ru

уже линейно зависимы.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, если матрицы (3.2) линейно зависимы, то существуют вещественные числа $c_0, c_1, \dots, c_{k+1}$ не все равные нулю такие, что выполняется матричное тождество:

$$\sum_{i=0}^{k+1} c_i A^i = 0, \quad A^0 = E. \quad (3.3)$$

Из этого тождества следует, что $c_{k+1} \neq 0$, ибо в противном случае это будет означать, что матрицы (3.1) - линейно зависимы. Отсюда вытекает, что справедливо матричное равенство:

$$A^{k+1} + \frac{c_k}{c_{k+1}} A^k + \dots + \frac{c_1}{c_{k+1}} A + \frac{c_0}{c_{k+1}} E = 0. \quad (3.4)$$

Таким образом, коэффициенты этого матричного тождества, являются коэффициентами минимального многочлена [2].

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

Введем понятие развернутой матрицы B_k для матричной совокупности (3.1). Эта матрица $n^2 \times (k+1)$ столбцы которой составлены из столбцов A_{im} , $i = \overline{1, n}$ матриц A^m , $m = \overline{k, 0}$, записанных один под другим подряд, начиная с первого столбца этой матрицы, кончая последним [5]:

$$B_k = \begin{pmatrix} A_{1k} & A_{1k-1} & \dots & E_1 \\ A_{2k} & A_{2k-1} & \dots & E_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ A_{nk} & A_{nk-1} & \dots & E_n \end{pmatrix} = (A_k, \dots, A_0), \quad A_m = \begin{pmatrix} A_{1m} \\ A_{2m} \\ \vdots \\ A_{nm} \end{pmatrix}, \quad m = \overline{k, 0} \quad (3.5)$$

Очевидно, что линейная независимость матриц (3.1) эквивалентна линейной независимости столбцов матрицы B_k , т.к. справедливо соотношение [3]

$$B_k C = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^k c_i A^i = 0, \quad C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T. \quad (3.6)$$

Это означает, что линейная независимость матриц (3.1) эквивалентна тому, что матрица B_k размера $n^2 \times (k+1)$, является матрицей полного ранга, т.е. ее ранг равен $k+1$ [4].

Отсюда вытекает, что теорему 3.1. можно переформулировать следующим образом.

Т е о р е м а 3.2. Если для первого из чисел $k = \overline{0, n}$ система линейных алгебраических уравнений

$$B_k C = A_{k+1}, \quad C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T \quad (3.7)$$

имеет решение, то минимальный многочлен матрицы A имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - c_k \lambda^k - c_{k-1} \lambda^{k-1} - \dots - c_1 \lambda - c_0 = 0. \quad (3.8)$$

Справедливо и обратное утверждение о том, что коэффициенты минимального многочлена (3.8) $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T$, являются решениями системы линейных алгебраических уравнений (3.7).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разрешимость уравнения (3.7) означает разрешимость матричного тождества

$$A^{k+1} = c_k A^k + c_{k-1} A^{k-1} + \dots + c_1 A + c_0 E. \quad (3.9)$$

Так как k является минимальным из чисел $\overline{0, n}$, то многочлен (3.8), является минимальным многочленом.

С другой стороны, если многочлен (3.8), является минимальным многочленом, то справедливо матричное тождество (3.9), которое эквивалентно разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (3.7). Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 3.1. Итак, методика построения минимального многочлена заключается в поиске решения $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T$ системы линейных алгебраических уравнений (3.7) для наименьшего целого числа k , $k = \overline{1, n}$. При этом величины $-c_k, -c_{k-1}, \dots, -c_0$ будут коэффициентами минимального многочлена (3.8). Заметим, что в силу теоремы Кели-Гамильтона матричное уравнение (3.9) всегда имеет решение.

З а м е ч а н и е 3.2. Если решение уравнения (3.7) при наименьшем из чисел $k = \overline{0, n}$, удовлетворяет условию $c_0 = 0$, то матрица A - невырожденная. Более того, если в этом решении p первых компонент нулевые $c_0 = c_1 = \dots = c_{p-1} = 0$, то кратность нулевого собственного числа матрицы A не меньше чем p .

З а м е ч а н и е 3.3. Если матрицы (3.1) линейно независимы, а матрицы (3.2) линейно зависимы, то матрица $B_k^T B_k$ является положительно определенной, а матрица $B_{k+1}^T B_{k+1}$ неотрицательной и имеет одно собственное число равно нулю. Как известно [1], для прямоугольной матрицы A размера $n \times m$ ранг r сингулярной матрицы $A^T A$ совпадает с рангом матрицы A , а её сингулярные числа ρ_i неотрицательные. Причем, если, например, $m \leq n$, то число нулевых ρ_i равно $m - r$. Таким образом, чтобы найти коэффициенты минимального многочлена не обязательно искать решения системы (3.7) при $k = 0, 1, 2, \dots$, а достаточно проверить при каком числе k матрица $B_{k+1}^T B_{k+1}$ становится неотрицательной (при меньших величинах k эта матрица является положительно определенной). Это сильно сократит число вычислений и для получения коэффициентов минимального многочлена необходимо найти решение только одной системы линейных алгебраических уравнений (3.7) именно для этого числа k .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. А.В. Zubov, Н.В. Zubov, *Теория устойчивости и применение к задачам численного анализа*, Уч. пособие, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2010, 102 с.
2. А.В. Zubov, Н.В. Zubov, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Монография, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2009, 172 с.
3. М.В. Стрекопытова, *Исследование равновесных движений*, ред. Под ред. О.А. Малафеева, СПбГУ, СПб, 2007, 95 с.
4. А.В. Zubov, Н.В. Zubov, С.В. Zubov, А.Ф. Zubova, *Математические методы исследования устойчивости и надежности технических систем*, Уч. пособие, ВВМ, СПб, 2011, 362 с.

5. А. В. Зубов, Н. В. Зубов, Н. И. Зубов, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, Монография, Мобильность плюс, СПб, 2010, 319 с.

The common method of investigation of stability

© I.V. Zubov³, V.I. Zubov⁴

Abstract. In giving article on base method of low to order is expounds algorithm to calculating of number clear mystic roots by characteristic polynom.

Key Words: algorithm, root, change of sign, polynom, left and right semi-plane.

³ Professor, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg, a_v_zubov@mail.ru

⁴ Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg, a_v_zubov@mail.ru

УДК 517.929

Применение операции сдвига

© С.В. Зубов¹

Аннотация. В этой статье предложен способ применения МПП в случае, когда при его использовании встречается многочлен, у которого коэффициент при первой степени аргумента равен нулю.

Ключевые слова: коэффициент, операция сдвига, корень, степень четная и нечетная, правая и левая полуплоскости.

1. Введение

Необходимость исследования робастной устойчивости в системах управления диктуется, во-первых, современными потребностями науки и техники и ее приложениями в практических задачах, связанных с конструированием и моделированием процессов управления в технике, экономике, биологии и т.д., а во-вторых, наличием большого числа нерешенных задач, прямо связанных с инженерной практикой. Фактически, результаты, полученные в теории робастной устойчивости, позволяют обеспечивать динамическую безопасность управляемых систем на этапе их конструирования и эксплуатации.

2. Использование операции сдвига

Пусть задан многочлен $F(z)$ степени n с действительными коэффициентами, не имеющий нулевых корней, к которому метод понижения порядка (МПП) не применим

$$F(z) = a_0 + a_2 z^2 + \dots + a_{2p+1} z^{2p+1} + \dots + a_n z^n, \quad (2.1)$$

т.е. для общности положим, что не только $a_1 = 0$, но и

$$a_3 = \dots = a_{2p-1} = 0, \quad a_{2p+1} \neq 0, \quad p \geq 1.$$

Перепишем этот многочлен в виде

$$F(z) = g(z) + z^{2p} h(z), \quad (2.2)$$

$$g(z) = a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \dots, \quad h(z) = a_{2p+1} z + a_{2p+3} z^3 + a_{2p+5} z^5 + \dots$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Операцией сдвига будем называть операцию, преобразующую многочлен (2.2) в многочлен вида

$$f(z) = g(z) + (-1)^p h(z). \quad (2.3)$$

О п р е д е л е н и е 2.2. Кососимметричными корнями многочлена $F(z)$ мы будем называть корни этого многочлена z_j , для которых выполняются равенства $F(z_j) = F(-z_j) = 0$. Нетрудно видеть, что кососимметричными корнями являются, в частности, все чисто мнимые корни.

¹ Доцент, СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru

Справедливы следующие две теоремы.

Т е о р е м а 2.1. *Операция сдвига оставляет множество кососимметричных корней произвольного многочлена без изменений, т. е. кососимметричные корни многочлена (2.2) совпадают с кососимметричными корнями многочлена (2.3) и обратно. Если операция сдвига применена к многочлену, не имеющему нулевых корней, то получится многочлен, также не имеющий нулевых корней.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Очевидно, что все кососимметричные корни многочлена (2.3) являются общими корнями многочленов $g(z)$ и $z^{2p}h(z)$ и наоборот. Так как общие корни многочленов $g(z)$ и $(-1)^ph(z)$ совпадают с общими корнями многочленов $g(z)$ и $z^{2p}h(z)$, то кососимметричные корни многочлена (2.3) являются кососимметричными корнями многочлена (2.2) и обратно. Это вытекает из того, что все кососимметричные корни многочлена (2.3) являются общими корнями многочленов $g(z)$ и $(-1)^ph(z)$ и наоборот [1].

Доказательство второй части теоремы вытекает из того, что свободный член исходного многочлена при операции сдвига остается без изменений.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Свойства операции сдвига

Т е о р е м а 3.1. *Для многочленов с действительными коэффициентами, не имеющих нулевых корней, операция сдвига обладает следующими свойствами:*

1) если операцию сдвига (ОС) применить к многочлену (2.2) с действительными коэффициентами четной степени, то получившийся многочлен (2.3) с действительными коэффициентами имеет такое же число корней, лежащих в правой (левой) полуплоскости, что и исходный многочлен;

2) если в результате применения операции сдвига (ОС) к многочлену (2.2) с действительными коэффициентами нечетной степени n_F получится многочлен (2.3) с действительными коэффициентами также нечетной степени n_f , то у получившегося многочлена число корней, лежащих в левой (правой) полуплоскости, по сравнению с исходным многочленом (2.2) уменьшается на одну и ту же величину $(n_F - n_f)/2$;

3) если в результате применения операции сдвига (ОС) к многочлену (2.2) с действительными коэффициентами нечетной степени n_F получился многочлен (2.3) с действительными коэффициентами четной степени n_f , то число корней этого многочлена, лежащих в правой полуплоскости m_f , зависит от знаков коэффициентов при старших членах в многочленах (2.2), (2.3) и величины сдвига p следующим образом:

$$m_f = m_F - (n_F - n_f - 1)/2$$

при

$$\text{sign}(-1)^{p+(n_F-1)/2}a_{n_F} = \text{sign}(-1)^{n_f/2}a_{n_f};$$

$$m_f = m_F - (n_F - n_f + 1)/2$$

при

$$\text{sign}(-1)^{p+(n_F-1)/2}a_{n_F} \neq \text{sign}(-1)^{n_f/2}a_{n_f},$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если многочлен $F(z)$ имеет кососимметричные корни, в том числе и чисто мнимые, то его можно написать в виде

$$F(z) = r(z)F_0(z) = r(z)(g_0(z) + z^{2p}h_0(z)),$$

где $r(z)$ - многочлен, содержащий все кососимметричные корни многочлена $F(z)$, в том числе и чисто мнимые, а многочлен $F_0(z)$ не содержит таких корней. Если применить к этому многочлену ОС, то получим многочлен [2]

$$f(z) = r(z)f_0(z) = r(z)(g_0(z) + (-1)^p h_0(z)).$$

Таким образом, результат применения операции сдвига (ОС) к многочлену $F(z)$ не изменится, если операцию сдвига (ОС) применить вначале к многочлену $F_0(z)$, не имеющих чисто мнимых корней, а затем умножить результат на многочлен $r(z)$. Отсюда вытекает, что изменение числа корней многочлена $F(z)$, лежащих в левой (правой) полуплоскости в результате применения операции сдвига (ОС), не зависит от того, есть ли у многочлена $F(z)$ чисто мнимые корни. Поэтому далее будем считать, что у многочлена $F(z)$ нет чисто мнимых корней для того, чтобы можно было использовать критерий Михайлова [3].

Дальнейшее доказательство теоремы основано на анализе поведения годографов Михайлова многочленов (2.2) и (2.3) в зависимости от значения и кратности величины p

$$F(i\omega) = \bar{g}(\omega) + i(-1)^p \omega^{2p} \bar{h}(\omega), \quad f(i\omega) = \bar{g}(\omega) + i(-1)^p \bar{h}(\omega),$$

$$\bar{g}(\omega) = a_0 - a_2 \omega^2 + \dots + (-1)^k a_{2k} \omega^{2k} + \dots, \quad (3.1)$$

$$\bar{h}(\omega) = a_{2p+1} \omega - a_{2p+3} \omega^3 + \dots + (-1)^k a_{2(p+k)+1} \omega^{2k+1} + \dots$$

Пусть $0 = \omega_1 < \dots < \omega_s$ - вещественные корни многочленов $\bar{g}(\omega)$ и $(-1)^p \bar{h}(\omega)$, заданные в порядке их возрастания. Очевидно, что эти корни совпадают с корнями многочленов $\bar{g}(\omega)$ и $(-1)^p \omega^{2p} \bar{h}(\omega)$ и обратно.

Отсюда вытекает, что приращение аргументов годографов Михайлова этих многочленов при изменении ω от 0 до $+\infty$ отличается лишь на участке от ω_s до $+\infty$. Путем анализа этого приращения и использования метода понижения порядка (МПП) легко установить справедливость всех утверждений теоремы [4].

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 3.1. Очевидно, что в результате многократного применения метода понижения порядка (МПП) и, если это необходимо, операции сдвига (ОС) к произвольному многочлену, не имеющему нулевых корней, будет получен остаток - порождающий многочлен первой степени или, многочлен, имеющий только кососимметричные корни. В первом случае задача исследования будет решена, т. к., опираясь на свойства метода понижения порядка (МПП) и операции сдвига (ОС), можно легко вычислить число корней исходного многочлена, лежащих в левой (правой) полуплоскости, опираясь на свойства метода понижения порядка (МПП) и операции сдвига (ОС) (теоремы 1, 2). Во втором случае, полученный в качестве остатка многочлен может содержать не только чисто мнимые, но и другие кососимметричные корни (действительные или комплексные), тогда необходимо продолжить исследование положения корней этого многочлена относительно мнимой оси.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л. Д. Блистанова, Г. А. Зеленков, Н. В. Zubov, В. И. Косюг, “Непрерывная стабилизация в системе с постоянным запаздыванием”, *Сборник трудов международной конференции «Устойчивость и процессы управления»*, **Т.1**, НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2005, 335-338.
2. Zubov И.В., *Методы анализа динамики управляемых систем*, Физматлит, М, 2003, 224 с.
3. А. В. Zubov, Н. В. Zubov, *Динамическая безопасность управляемых систем*, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2009, 172 с.
4. А. В. Zubov, Н. В. Zubov, Н. И. Zubov, *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, Монография, Мобильность плюс, СПб, 2010, 319 с.

The application of operation displacement

© S.V. Zubov²

Abstract. In this article is supposes way of application method of low to order in case, when by his using is meet polynom, by that coefficient by first degree of argument equality zero.

Key Words: coefficient, operation of displacement, root, degree even and noeven, right and left semi-plane.

² Lecture, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petesburg; a_v_zubov@mail.ru

УДК 517.929

Другой подход поиска решений системы линейных алгебраических уравнений

© С.А. Стрекопытов¹, И.С. Стрекопытов², И.С. Виташевская³

Аннотация. В данной статье рассмотрен другой подход поиска решений и псевдорешений системы линейных алгебраических уравнений. Этот метод основан на построении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое имеет единственное асимптотическое устойчивое положение равновесия, являющееся решением или псевдорешением исходной системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: вектор, матричное тождество, собственное число, ранг матрицы.

1. Введение

Решение системы (2.1) можно искать методом Гаусса или иным методом. В статье предложен другой подход поиска решений и псевдорешений системы линейных алгебраических уравнений, основанный на построении системы обыкновенных дифференциальных уравнений, которое имеет единственное асимптотически устойчивое положение равновесия, являющееся решением или псевдорешением исходной системы линейных алгебраических уравнений [1].

2. Метод решения системы линейных алгебраических уравнений

Остановимся на методе решения прямоугольной системы линейных алгебраических уравнений (2.1)

$$AX = B, \quad (2.1)$$

где матрица A размера $n \times m$ ($m \leq n$) и вектор B размера $n \times 1$, являются вещественными и постоянными [5].

Нетрудно видеть, что если ранг матрицы A равен m , то матрица $A^T A$ является положительно определенной. Это вытекает из очевидных соотношений:

$$\forall X \neq 0 \quad AX = C \neq 0 \Rightarrow C^T C = X^T A^T A X = \|C\|^2 > 0 \Rightarrow A^T A > 0.$$

Рассмотрим линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, где матрица A размера $n \times m$, $n \geq m$ имеет ранг равный m [6],

$$\dot{X} = -A^T A X + A^T B. \quad (2.2)$$

Справедлива теорема.

Т е о р е м а 2.1. *Положение равновесия системы (2.2) является решением системы (2.1) или ее псевдорешением.*

¹ Доцент, к.ф.-м.н., СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

² Аспирант, СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

³ Преподаватель, СПбГУ факультет ПМ-ПУ, г. Санкт-Петербург; a_v_zubov@mail.ru.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Так как матрица $-A^T A$ - отрицательно определенная, то любое решение этого уравнения асимптотически стремится к положению равновесия этой системы $X = C$, которое удовлетворяет соотношению:

$$-A^T AC + A^T B = 0 \quad \text{или} \quad C = (A^T A)^{-1} A^T B. \quad (2.3)$$

Отсюда вытекает, что если $AC = B$, то решение уравнения (2.1) получено [1].

Допустим теперь, что $AC \neq B$. Представим вектор B в виде разложения по подпространствам, одно из которых L_1 , является линейной оболочкой натянутой на столбцы матрицы A , а второе L_2 , является ортогональным дополнением первого, т.е. $B = B_1 + B_2$, $B_1 \in L_1$, $B_2 \in L_2$, $L_1 \perp L_2$. Тогда уравнение (2.3) примет вид:

$$-A^T AC + A^T (B_1 + B_2) = -A^T AC + A^T B_1 = 0$$

или

$$C = (A^T A)^{-1} A^T B_1 = (A^T A)^{-1} A^T B. \quad (2.4)$$

Покажем, что найденная величина C , является псевдорешением уравнения (2.1), т.е. имеет место неравенство [2]

$$\|AC - B\| < \|AX - B\|, \quad X \neq C,$$

где $\|\cdot\|$ - евклидова норма. Это будет означать, что квадратичное отклонение $\|AX - B\|$ при $X = C$ принимает наименьшее значение [3].

Введем обозначения:

$$U = B - AC, \quad V = AC - AX, \quad U + V = B - AX,$$

тогда,

$$\|U + V\|^2 = U^T V + V^T U + \|U\|^2 + \|V\|^2$$

$$V^T U = U^T V = (C - X)^T A^T (B - AC) = (C - X)^T (A^T B - A^T AC) = 0.$$

Отсюда вытекает равенство:

$$\|B - AX\|^2 = \|B - AC\|^2 + \|A(X - C)\|^2.$$

Очевидно, что при $X = C$ величина $\|B - AX\|$ имеет наименьшее значение, т. е. вектор $C = (A^T A)^{-1} A^T B$ является псевдорешением.

Для того чтобы избежать вычисления величины $C = (A^T A)^{-1} A^T B$ достаточно найти стационарную точку уравнения (2.1) произвольным численным методом, к примеру, методом Эйлера

$$X_{k+1} = (E - hA^T A)X_k + hA^T B, \quad (2.5)$$

где $h < \|A^T A\|$. Этот метод поиска решения (псевдорешения) уравнения (2.1) свободен от ошибок округления и имеет точность в пределах точности представления чисел в компьютере. Для того, чтобы в этом убедиться можно ввести обозначение $\alpha = \|E - hA^T A\| < 1$, тогда справедливы стандартные оценки [4]

$$\|X_k - C\| \leq \frac{\alpha}{1 - \alpha} \|X_{k+1} - X_k\|$$

$$\|X_{k+1} - X_k\| \leq \alpha^k \|X_1 - X_0\|, \quad k = 1, 2, \dots$$

Для систем большого порядка итерационный процесс (2.5) будет занимать меньшее количество операций, чем обращение матрицы $A^T A$ методом Гаусса и вычисление величины $(A^T A)^{-1} A^T B$.

Отметим еще раз, что метод нахождения решения (псевдорешения) уравнения (2.1) с помощью численного решения системы дифференциальных уравнений (2.2) не дает ошибок округления, а полученный результат лежит в пределах точности компьютера. Использование численных методов большого порядка (Рунге-Кутта и т.д.) не является необходимым, т.к. они используются при построении решений (траекторий) дифференциальных уравнений, чтобы минимизировать суммарные ошибки округления [2].

Т е о р е м а 2.2. Если для первого из чисел $k = \overline{0, n}$ система линейных алгебраических уравнений (2.1) имеет решение, то минимальный многочлен матрицы A имеет вид:

$$f(\lambda) = \lambda^{k+1} - c_k \lambda^k - c_{k-1} \lambda^{k-1} - \dots - c_1 \lambda - c_0 = 0. \quad (2.6)$$

Справедливо и обратное утверждение о том, что коэффициенты минимального многочлена (2.6) $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T$, являются решениями системы линейных алгебраических уравнений (2.1) [3].

Д о к а з а т е л ь с т в о. Разрешимость уравнения (2.1) означает разрешимость матричного тождества

$$A^{k+1} = c_k A^k + c_{k-1} A^{k-1} + \dots + c_1 A + c_0 E. \quad (2.7)$$

Так как k является минимальным из чисел $\overline{0, n}$, то многочлен (2.6), является минимальным многочленом [4].

С другой стороны, если многочлен (2.6), является минимальным многочленом, то справедливо матричное тождество (2.7), которое эквивалентно разрешимости системы линейных алгебраических уравнений (2.1).

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

З а м е ч а н и е 2.1. Итак, методика построения минимального многочлена заключается в поиске решения $C = (c_k, c_{k-1}, \dots, c_0)^T$ системы линейных алгебраических уравнений (2.1) для наименьшего целого числа $k, k = \overline{1, n}$. При этом величины $-c_k, -c_{k-1}, \dots, -c_0$ будут коэффициентами минимального многочлена (2.6). Заметим, что в силу теоремы Кели-Гамильтона матричное уравнение (2.7) всегда имеет решение.

З а м е ч а н и е 2.2. Если решение уравнения (2.1) при наименьшем из чисел $k = \overline{0, n}$ удовлетворяет условию $c_0 = 0$, то матрица A - вырожденная. Более того, если в этом решении p первых компонент нулевые $c_0 = c_1 = \dots = c_{p-1} = 0$, то кратность нулевого собственного числа матрицы A не меньше чем p .

З а м е ч а н и е 2.3. Если матрицы $A^k, A^{k-1}, \dots, A, A^0$, $A^0 = E$ линейно независимы, а матрицы $A^{k+1}, A^k, A^{k-1}, \dots, A, E$ линейно зависимы, то матрица $B_k^T B_k$ является положительно определенной, а матрица $B_{k+1}^T B_{k+1}$ неотрицательной и имеет одно собственное число равное нулю. Как известно [3], для прямоугольной матрицы A

размера $n \times t$ ранг r сингулярной матрицы $A^T A$ совпадает с рангом матрицы A , а её сингулярные числа ρ_i неотрицательные. Причем, если, например, $t \leq n$, то число нулевых ρ_i равно $t - r$. Таким образом, чтобы найти коэффициенты минимального многочлена не обязательно искать решения системы (2.1) при $k = 0, 1, 2, \dots$, а достаточно проверить при каком числе k матрица $B_{k+1}^T B_{k+1}$ становится неотрицательной (при меньших величинах k эта матрица является положительно определенной) [5]. Это сильно сократит число вычислений и для получения коэффициентов минимального многочлена необходимо найти решение только одной системы линейных алгебраических уравнений (2.1) именно для этого числа k .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.Д. Блистанова, Г.А.Зеленков, И.В.Зубов, Н.В.Зубов., *Проблемы устойчивости матриц и вычислительных алгоритмов*, Уч. пособие, Изд-во НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2007, 150 с.
2. О.В.Мутлу, *Основы управления движением (Исследование равномерной устойчивости по Ляпунову)*, Уч. пос., СПб, 2007, 92 с.
3. М.В.Стрекопытова, *Исследование равновесных движений*, СПбГУ, СПб, 2007, 95 с.
4. А.В.Зубов, Н.В.Зубов., *Динамическая безопасность управляемых систем*, Монография, НИИ Химии СПбГУ, СПб, 2009, 172 с.
5. А.В.Зубов, Н.В.Зубов, Н.И.Зубов., *Математические методы безопасности управляемых систем и методы анализа нестационарных систем управления*, Монография, Мобильность плюс, СПб, 2010, 319 с.
6. И.В.Зубов, *Методы анализа динамики управляемых систем*, Физматлит, М, 2003, 224 с.

Another approach of research solutions systems linear algebraic equations

© S.A. Strecopitov⁴, I.S. Strecopitov⁵, I.S. Vitashevskay⁶

Abstract. In giving article is looks another approach of research solutions systems linear algebraic equations and pseudo solutions of systems linear algebraic equations. This method is bases on building system ordinary differential equations, that is have single asymptotic stability situation equally weight, is appears solution or pseudo solution initial system linear algebraic equations.

Key Words: vector, matrix identity, own number, rank of matrix.

⁴ Lecture, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru

⁵ Post-graduate, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru

⁶ Teacher, SPbGU faculty of AM-PC, Saint-Petersburg; a_v_zubov@mail.ru

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 513.5

Моделирование работы информационной системы

© Л.В. Кулагина¹, Н.В. Кулагин²

Аннотация. В работе описывается моделирование работы процедур и запросов в корпоративной информационной системе.

Ключевые слова: информационные системы, клиент серверные технологии, базы данных.

1. Введение

Корпоративная система, поддерживающая работу предприятия, должна иметь хорошие адаптивные свойства и включать инструментальные средства поддержки и управления ИТ-средой корпорации. Действительно, сегодня динамично меняются как направления развития бизнеса, так и организационно-функциональная модель корпорации, совершенствуется система управления, расширяется географический масштаб и т.д. Вместе с корпорацией развивается и изменяется ее информационная среда. Изменения отражаются как на функциональном и сервисном уровне, так и на уровне программно-аппаратного обеспечения. Кроме того, ежедневная работа сопряжена с возникновением множества ситуаций, требующих изменения и настройки компонент ИТ-среды, например: создание нового рабочего места, изменение прав доступа, введение в промышленную эксплуатацию новой компоненты корпоративной информационной системы (КИС). Таким образом, система управления корпоративной информационной средой должна помимо задач мониторинга и управления сетями, вычислительными платформами, решать задачи управления модификациями приложений КИС, хранением и поддержкой целостности данных, управлением рабочими местами сотрудников и менеджеров корпорации и т.д. Как и другие области, система управление ИТ –средой является объектом стандартизации и при ее создании необходимо опираться на лучшие мировые практики и накопившийся опыт в данной области.

Высокие требования к эффективности управления информационной инфраструктурой и высокие издержки на поддержание текущего состояния ИТ-среды, постоянные изменения и внутренней и внешней корпоративной среды делают необходимым внедрение комплексной, масштабируемой системы централизованного управления КИС. Информационная среда, поддерживающая автоматизацию основных и обеспечивающих процессов корпорации, сама является объектом автоматизации.

Основной целью КИС можно считать повышение прибыли компании за счет наиболее эффективного использования всех ее ресурсов и повышения качества принимаемых управленческих решений.

Перечислим преимущества, которые дает разработка и внедрение компонент КИС.

1. Стандартизируются и унифицируются производственные процессы и процессы финансово-хозяйственной деятельности.
2. Совершенствуется информационная поддержка менеджмента при выполнении функций планирования, анализа, прогнозирования.

¹ Старший преподаватель кафедры прикладная математика, Нижегородский государственный технический университет имени Р. Е. Алексеева, г. Нижний Новгород; kulaginal@mail.ru.

² Ведущий инженер Газпром трансгаз Нижний Новгород, г. Нижний Новгород; kulaginal@mail.ru.

3. Совершенствуются учетные системы за счет использования интегрированного информационного пространства (СРМ).
4. Принимаются более обоснованные оперативные и стратегические решения.
5. Сокращается число ошибок персонала за счет одноразового ввода информации и наличия процедур оценки корректности и непротиворечивости.
6. Повышается производительность труда персонала за счет автоматизации функций, повышения операционной производительности (8–25% рост производительности труда).
7. Улучшается качество обслуживания клиентов (CRM) и взаимоотношений с поставщиками (SRM).
8. Увеличивается число своевременно выполняемых заказов.
9. Сокращается срок выхода на рынок новых продуктов и услуг.
10. Сокращаются затраты на управление.
11. Повышается эффективность управления оборотными средствами за счет сокращения складских запасов.

Концептуальный проект системы является основой для анализа и выбора инструментальной среды и программно-аппаратной/интеграционной платформа будущей системы.

Важным фактором, определяющим эффективность разработки и внедрения КИС, является подготовка предприятия к автоматизации, поэтому экономический эффект определяется качеством проведения таких работ, как:

- стандартизация системы управления предприятием;
- документирование и оптимизация основных и обеспечивающих бизнес-процессов;
- разработка системы управленческого учета и отчетности;
- разработка на основе описанных бизнес-процессов регламентов работ в системе и инструкций пользователей;
- создание программ подготовки конечных пользователей по всем функциональным направлениям;
- обучение персонала и проведение тематических семинаров как по проблемам методологии и технологии совершенствования системы управления, так и по вопросам разработки и внедрения КИС.

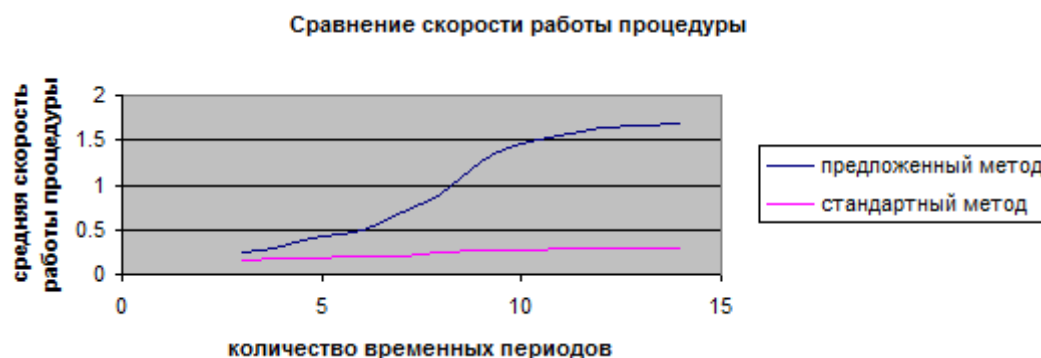
2. Процесс моделирования

Ранее в работах [1-4] была предложена модель процесса обслуживания запросов к серверу. Определены математические характеристики, которые будут оказывать влияние на параметры информационной системы. Выявлено, что эффективность работы процессов напрямую зависит от методов передачи данных.

Рассмотрим работу системы на небольшом временном промежутке. Источниками информации для моделирования процесса являются данные работы той или иной процедуры.

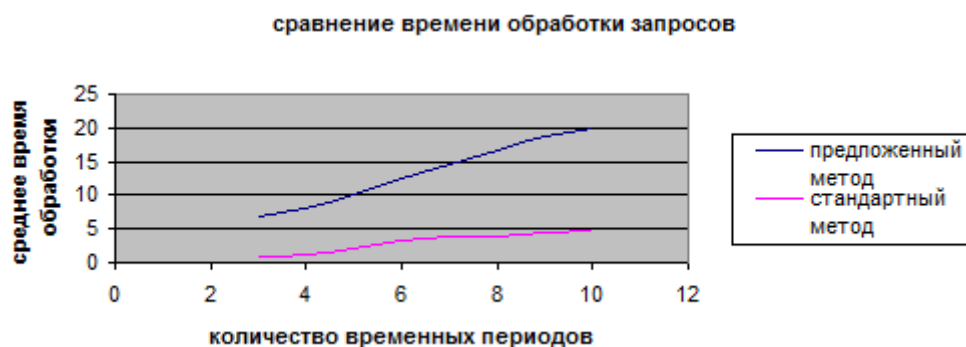
Моделирование работы процедуры производилось путем проведения 10 опытов для каждой процедуры с одинаковыми исходными данными. Исходные данные генерировались случайным образом исходя из количества пользователей и временных периодов исследования. Для удобства и мобильности обработки данных рассмотрим предприятие с небольшим количеством пользователей, но имеющим территориально распределенные филиалы. Количество пользователей менялось от 4 до 10. Для каждого количества пользователей количество временных периодов изменялось от 5 до 10. Для сравнения использовались усредненные данные. Показателями эффективности были выбраны скорость работы процедуры и время обработки запросов.

Так как эффективность работы процедуры будет зависеть от методов передачи данных, которые были приведены и проанализированы в главе 2, то непосредственно рассмотрим процесс обращений запросов к серверу.



Р и с у н о к 2.1

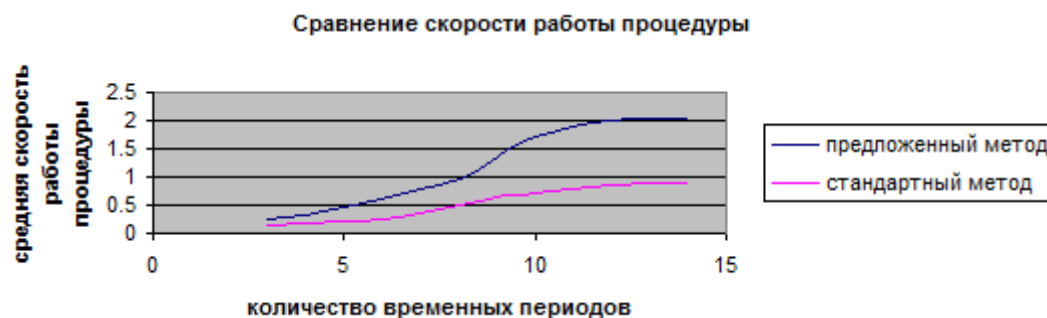
Сравнение скорости работы процедур, полученных предложенным методом и ранее использованным (стандартным) для малых предприятий



Р и с у н о к 2.2

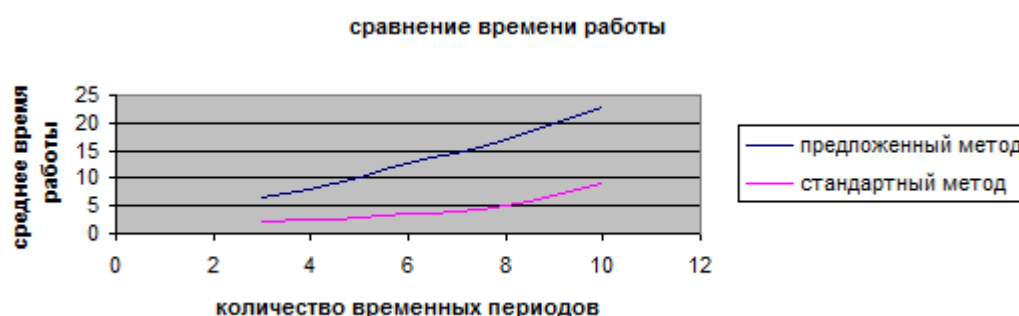
Сравнение времени обработки запросов, полученных предложенным методом и ранее использованным (стандартным) для малых предприятий

Промоделируем процесс для среднего предприятия, где количество пользователей меняется от 400 до 500 и имеются территориально распределенные филиалы. Моделирование работы процедуры производилось путем проведения 10 опытов для каждой процедуры с одинаковыми исходными данными. Исходные данные генерировались случайным образом исходя из количества пользователей и временных периодов исследования. Для каждого количества пользователей количество временных периодов изменялось от 5 до 10. Для сравнения использовались усредненные данные. Показателями эффективности были выбраны скорость работы процедуры и время обработки запросов.



Р и с у н о к 2.3

Сравнение скорости работы процедур, полученных предложенным методом и ранее использованным (стандартным) для средних предприятий



Р и с у н о к 2.4

Сравнение времени обработки запросов, полученных предложенным методом и ранее использованным (стандартным) для средних предприятий

Исследуя полученные результаты, мы проверили адекватность предложенной модели и доказали, что работа корпоративной информационной системы напрямую зависит от способа передачи данных между территориально распределенными филиалами.

3. Заключение

Проверена адекватность предложенной модели на исследовании процессов для малых, с число пользователей до 10, и средних предприятий, с числом пользователей до 500. Подтверждено, эффективность работы информационной системы зависит от способа передачи данных. Из полученных графиков видно, что предложенная в работе методика позволяет улучшить работу системы. Исследуя полученные результаты, мы проверили адекватность предложенной модели и доказали, что работа корпоративной информационной системы напрямую зависит от способа передачи данных между территориально распределенными филиалами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Л.В. Кулагина, Н.В. Кулагин., “Оптимизация управления элементами в много-серверной информационной системе”, *Материалы XVI международной научно-технической конференции Информационные системы и технологии*, 2010, 275—276.

2. Л.В. Кулагина., “Основные характеристики обслуживания корпоративной информационной системы”, *Материалы XVII международной научно-технической конференции Информационные системы и технологии*, 2011, 174—175.
3. Л.В. Кулагина., “Процесс обслуживания запросов к серверу”, *Материалы XVII международной научно-технической конференции Информационные системы и технологии*, 2011, 176.
4. Л.В. Кулагина., “Описание работы корпоративной информационной системы с постоянной интенсивностью запросов”, *Материалы VII международной молодежной научно-технической конференции Будущее технической науки*, 2011, 30–32.

Modeling of information system

© L.V. Kulagina³, N.V. Kulagin⁴

Abstract. The work describes simulation of procedures and queries in the corporate information systems.

Key Words: databases, information system, client an server technology.

³ Senior lecturer of the department of applied Mathematics, Nizhny Novgorod State Technical University after R.E. Alekseev, Nizhny Novgorod; kulaginal@mail.ru.

⁴ Chief engineer Gazprom transgaz Nizhny Novgorod

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе $\TeX$ (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность,  
место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, го-  
род; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место рабо-  
ты, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-  
mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defn**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды `\R`, `\Rn`, `\C`, `\Z`, `\N` и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды `\phi`, `\epsilon` соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами `\px{i}` и `\pxtog{u}{i}`.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды `\textrm`, `\textit`. Например, для вставок формул Γ_i , $\mathcal{D}_i$ в текст статьи необходимо набрать команды `\textrm{\Gamma}_i`, `\textit{\mathcal{D}}_i`.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды `\label{метка}` и `\eqref{метка}`, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить `\label{ivanov14}`, теорему 5 из этой статьи — `\label{ivanovt5}` и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду `\ref{метка}`).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

`\insertpicture{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}`

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

`\insertpicturewcap{метка}{имя_файла.eps}{подпись_под_рисунком}`

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

`\insertpicturecapscale{метка}{имя_файла.eps}{степень_сжатия}` {подпись_под_рисунком}

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

`\insertpicturenonum{имя_файла.eps}{степень_сжатия}` {подпись_под_рисунком}

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение **thebibliography**. Список цитируемой литературы должен быть оформлен в формате **AMSBIB**. Подробности смотрите в прилагаемом файле *amsbib.pdf*. Для правильной работы данного стиля оформления литературы необходимо использовать стилевой файл *svmobib.sty* (прилагается).

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд `\Rbibitem{метка для ссылки на источник}`.

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду `\cite` или `\pgcite` (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи **MiKTeX 2.9**, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Авдеева М. Б.	107	Лукашев В. В.	72
Анкилов А. В.	45	Малинов В. Г.	83
Атряхин В. А.	53	Малкин М. И.	92
Вельмисов П. А.	45	Манапова А. Р.	59
Виташевская И. С.	120	Миронова Л. В.	25
Гринес В. З.	16	Митрякова Т. М.	98
Гуревич Е. А.	16	Орлов Ю. Н.	8
Зубов А. В.	107	Попов В. Н.	72
Зубов В. И.	112	Починка О. В.	16, 98
Зубов И. В.	112	Рязанцева И. П.	36
Зубов С. В.	116	Сагдеева Ю. К.	45
Клочкова Л. В.	8	Стрекопытов И. С.	120
Коноплева И. В.	25	Стрекопытов С. А.	120
Кулагин Н. В.	124	Тишкин В. Ф.	8
Кулагина Л. В.	124	Файрузов М. Э.	59
Логинов Б. В.	25	Шаманаев П. А.	53
Лубышев Ф. В.	59	Шишенкова А. Е.	98

Юшканов А. А. 72

В 2008 г. на XVI Международной профессиональной выставке «Пресса» журнал «Труды Средневолжского математического общества» удостоен Знака отличия «Золотой фонд прессы-2008» в номинации «Наука, техника, научно-популярная пресса».



С 2009 года журнал носит название «Журнал Средневолжского математического общества».

Уважаемые читатели и подписчики!

Подписка на журнал «Журнал Средневолжского математического общества» осуществляется через отделения почтовой связи «Почта России» на всей территории Российской Федерации.

Подписной индекс журнала в каталоге Российской прессы «Почта России» – 38278.