

ISSN 2079 – 6900

ЖУРНАЛ СРЕДНЕВОЛЖСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Том 13, № 2



2011

СРЕДНЕВОЛЖСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЕВА

Журнал Средневолжского математического общества

ТОМ 13, № 2

Издается с декабря 1998 года
Выходит четыре раза в год

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ: В. Ф. Тишкин (главный редактор),
М. Т. Терехин (зам. главного редактора),
Л. А. Сухарев (ответственный секретарь),
П. А. Шаманаев (зам. отв. секретаря),
И. В. Бойков, П. А. Вельмисов, В. К. Горбунов,
В. З. Гринес, Ю. Н. Дерюгин, А. Ф. Зубова,
Е. Б. Кузнецов, Б. В. Логинов, С. И. Спивак,
В. А. Треногин

САРАНСК

2011

«Журнал Средневолжского математического общества», публикует обзорные статьи по наиболее актуальным проблемам математики, краткие сообщения Средневолжского математического общества и информацию о математической жизни в России и за рубежом. Предназначается для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов старших курсов.

Журнал зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор). Свидетельство о регистрации средства массовой информации ПИ № ФС77-37887 от 23 октября 2009 года.

Учредитель — Межрегиональная общественная организация «Средневолжское математическое общество», Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева».

Журнал Средневолжского математического общества. Том 13, № 2

Компьютерная верстка: Атряхин В. А.
Корректор: Егорова Д. К.

Издается в НИИ математики Мордовского государственного университета им. Н.П. Огарева

Адрес редакции: 430000, г. Саранск, ул. Большевикская, 68, НИИ математики (комн. 210).

Тел.: (834-2) 23-32-05

E-mail для статей: journal@svmo.ru

E-mail для организационных вопросов: svmo@svmo.ru, conf@svmo.ru

Web: <http://www.svmo.ru>

ISSN 2079 – 6900

С 2010 г. полнотекстовая версия журнала размещается на сайте Общероссийского математического портала Math-Net.Ru и на сайте Научной электронной библиотеки elibrary.ru

Содержание

РЕДАКЦИОННАЯ СТРАНИЦА	6
-----------------------------	---

В. Н. Кризский, Р. Р. Яматов

Структурная интерпретация локальных кусочно-анизотропных геологических включений	8
1. Введение	8
2. Моделирование квазифрактальных сред Жюлиа	9
3. Поле точечного источника постоянного тока в кусочно-анизотропных квазифрактальных средах	11
4. Восстановление параметров квазифрактальных включений	13

О.В. Починка

Полный топологический инвариант для диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях	17
1. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов класса $G(M^3)$	19
2. Реализация диффеоморфизмов класса $G(M^3)$	20

А. Н. Старцев, Т. С. Мирзаев

О нестандартных методах оценивания в моделях авторегрессии в неустойчивых случаях	25
1. Введение	25
2. Модели одномерной авторегрессии первого порядка.	26
3. Модели одномерной одновременной авторегрессии первого порядка с одним параметром.	27
4. Модели пространственной авторегрессии первого порядка с одним параметром.	29
5. Модели одномерной авторегрессии второго порядка.	30

Ф.В. Лубышев, М.Э. Файрузов, Г.Я. Галеева

Итерационные процессы для состояний с разрывными коэффициентами и решениями в задачах оптимального управления квазилинейными уравнениями	36
1. Введение	36
2. Постановки задач для состояния процессов управления с разрывными коэффициентами и решениями. Задача А	38
3. Итерационный процесс для задачи А о сопряжении с разрывными коэффициентами и решением с итерациями на внутренней границе разрыва решения и его сходимости	44

А. М. Ахтямов, Е. В. Салыхова

Диагностирование полости в стержне	47
1. Введение	47

2.	Постановка задачи	47
3.	Диагностирование местоположения и размеров полости	48
4.	Примеры	51
5.	Совпадение частот стержня с полостью и сплошного бездефектного стержня	52
6.	Выводы	54

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

С. В. Викторов

	Комбинированный метод решения задачи электрокаротажа вертикальной скважины	57
1.	Введение	57
2.	Постановка задачи	57
3.	Комбинированный метод решения	59

А. С. Кузнецова

	Динамика системы управления, содержащей ансамбль осцилляторов, связанных через обратную связь	63
1.	Введение	63
2.	Постановка задачи	64
3.	Система трех осцилляторов	65
4.	Пространство параметров	67
5.	Заключение	69

Н. Д. Кузьмичев

	Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости	70
1.	Введение	70
2.	Ряд Тейлора-Фурье	70
3.	Связь производных с коэффициентами Фурье функции	72
4.	Формулы численного дифференцирования	73
5.	Экспериментальное исследование зависимости и ее производных	76

В. В. Лукашев, В. Н. Попов, А. А. Юшканов

	Математическое моделирование процессов переноса в плоских каналах	81
1.	Введение	81
2.	Постановка задачи. Построение функции распределения молекул газа	82
3.	Вычисление макропараметров газа в канале	88
4.	Заключение	90

Р. М. Мавлявиев, И. Б. Гарипов, С. М. Нураиева, Э. Д. Хусаинова

	Представление потенциалов через фундаментальные решения для эллиптического уравнения высшего порядка	92
--	--	----

В. И. Никонов

Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных	95
1. Системы линейных дифференциальных уравнений	95
2. Системы линейных разностных уравнений	97
3. Системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом	98

Д. К. Потапов

Аппроксимации модели Гольдштика	100
1. Введение	100
2. Постановка задачи	101
3. Решение задачи	103

Сафонкин В.И.

Системы с переменной структурой при наличии малых параметров	108
1. Сходимость быстрых движений.	109
2. Исследование медленных движений.	113

А. О. Сыромясов

Влияние твердой сферы на линейный поток жидкости, вязкость которой зависит от температуры	118
1. Введение	118
2. Общая постановка задачи	118
3. Определение поля температуры	119
4. «Фоновый» поток	120
5. Постановка гидродинамической задачи	121
6. Вычисление возмущений в первом приближении	122
7. Линейная скорость частицы	125

Т. А. Шемякина

Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае	127
1. Постановка задачи	127
2. Существование ограниченного решения системы интегральных уравнений	128
3. Дифференцируемость решения системы интегральных уравнений	130

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ**А. Д. Сайтгалина, Д. Ш. Сабиров, И. М. Губайдуллин**

Реализация программных комплексов для анализа реакционной способности молекул фуллеренов	132
1. Введение	132
2. Программный комплекс «Polariz». Методы расчета и выводы.	132
3. Программный комплекс «Curvature». Методы расчета и выводы.	134

4. Заключение	136
-------------------------	-----

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»	138
--	-----

Алфавитный указатель	140
--------------------------------	-----

ОТ РЕДАКЦИИ

В настоящем номере опубликованы работы ведущих и молодых ученых, являющихся постоянными участниками научных школ и конференций, проводимых Мордовским государственным университетом им. Н.П. Огарева и Средневолжским математическим обществом. Сегодня стало доброй традицией публиковать наиболее важные результаты этих мероприятий в данном журнале. В 2011 году при поддержке РФФИ (Грант № 11-01-06819-моб_г) будет работать Пятая международная научная школа-семинар «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» имени Е. В. Воскресенского. Публикуемые работы имеют положительные рецензии, а сам журнал (кроме подписки через каталог «Почта России») доступен теперь и в сети Internet на сайтах Math-Net.Ru и Elibrary.ru.

Редакция журнала желает авторам творческих успехов!

УДК УДК 519.63

Структурная интерпретация локальных кусочно-анизотропных геологических включений

© В. Н. Кризский¹, Р. Р. Яматов²

Аннотация. Рассматриваются алгоритмы компьютерного моделирования полей точечных источников постоянного электрического тока в кусочно-анизотропных квазифрактальных средах Жюлиа, описывающих рудные и пористые нефтегазонасыщенные среды. На основе вариационных алгоритмов А.Н.Тихонова строятся процедуры решения обратных задач по определению параметров квазифрактальных сред.

Ключевые слова: квазифрактальные пористые кусочно-анизотропные среды Жюлиа, поле постоянного тока, прямая и обратная задача

1. Введение

Большинство крупных нефтегазовых месторождений представляют из себя ассоциации слабоконтрастных и малоразмерных залежей углеводородов. Характеристики нефтегазонасыщенных систем, представленных пористыми или трещиноватыми средами, в существенной мере определяются хаотическим распределением зерен породы, капилляров и трещин по форме и размерам. Как известно, пористые среды – среды фрактальной структуры. Важной эксплуатационной характеристикой подобных систем является коэффициент проницаемости, который можно рассчитать, если знать распределение поровых пустот (коэффициент пористости и связность поровых каналов), т.е. если известна структура среды, отвечающая стохастическому распределению поровых пустот, капилляров и трещинных каналов.

Встречающихся в природе фрактальные структуры являются квазифракталами, поскольку на некотором малом масштабе фрактальность исчезает. Квазифрактал отличается от идеальных абстрактных фракталов конечностью, неполнотой и неточностью повторений структуры. В силу этого, для расчета физических полей в квазифрактальных средах, представимых вкраплениями одной среды в другую (заполненных флюидом пор в скелете, зерен одного вещества в другом и т.п.) могут быть использованы классические алгоритмы, учитывающие большое количество мелких анизотропных включений, генерируемых процедурами, реализующими при построении принцип фрактальности.

Разработка алгоритмов решения прямых и обратных задач математического моделирования геофизических полей в кусочно-анизотропных квазифрактальных средах предоставляет возможности поиска и прогноза слабоконтрастных и малоразмерных залежей углеводородов, а также оценки запасов нефти на разрабатываемых нефтегазовых месторождений. Применение на практике технологии контроля над состоянием запасов позволит решить две важные в практическом отношении задачи:

- оптимизировать процесс добычи, что продлит срок эксплуатации разрабатываемых месторождений,
- возобновить добычу истощённых месторождений, когда будет установлен факт возобновления их запасов.

¹Профессор кафедры «Математическое моделирование», Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак; Krizsky@rambler.ru.

²Аспирант кафедры «Математическое моделирование», Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак; YamatovRim@yandex.ru.

Ранее в работах [1]-[3] на основе комбинации методов интегральных преобразований и интегральных уравнений были построены алгоритмы расчета стационарных и нестационарных физических полей в трехмерных кусочно-однородных средах с включениями. На их основе рассматривались обратные задачи определения границ и удельной проводимости включений в классе простых тел [4], тел вращения [5] и бесконечных цилиндрических тел [6,7] с аппроксимированной сплайном границей. В [8,9] результаты обобщены и распространены на кусочно-анизотропные среды.

В данной работе рассмотрены алгоритмы компьютерного моделирования стационарных электрических полей в квазифрактальных средах.

Для решения прямой задачи используются методы интегральных представлений с построением функции Грина вмещающего пространства и интегральных уравнений. На основе методов вариационного типа получены решения некорректной обратной задачи поиска параметров, положения и формы квазифрактального анизотропного тела.

Разработанные алгоритмы реализованы в комплексе программ и допускают распараллеливание при использовании суперкомпьютеров, многопроцессорных вычислительных комплексов или вычислительных кластеров.

2. Моделирование квазифрактальных сред Жюлиа

Рассмотрим множества Жюлиа ($J3D$), которые в кубе стороны 4 с центром в начале координат, при делении его на N^3 элементарных объемов, образуют квазифрактальные включения в виде совокупности элементарных объектов. В качестве элементарного объекта среды удобно рассматривать «куб» со сглаженными углами и ребрами, с гранями, параллельными координатным плоскостям и длинами ребер, много меньшими размеров всего фрактала, геоэлектрические свойства среды которого описываются симметричным постоянным тензором удельной электрической проводимости.

Для построения множества $J3D$ рассмотрим последовательности гиперкомплексных чисел $w_m(k)$, построенных для любого гиперкомплексного числа k по правилу:

$$w_0 = k, w_{m+1} = P_{n1}(w_m)/Q_{n2}(w_m) = J(w_m).$$

Здесь P_{n1} и Q_{n2} , $n1 \geq n2$ – гиперкомплексные полиномы степени $n1$ и $n2$ соответственно, а рациональное конформное отображение $J(w)$ – эндоморфизм.

Множеством Жюлиа $J(k)$ называется [10] замыкание множества точек притяжения бесконечности – таких гиперкомплексных чисел k , что последовательности $w_m(k)$ сходится к бесконечному пределу, при m стремящемся к бесконечности. Множество Жюлиа на гиперкомплексной плоскости x, y, z самоподобно. Множества Жюлиа делятся на два основных класса: связанные и вполне несвязные. Во втором случае множество состоит из несчетного числа дискретных точек («пыль Фату»).

Обозначим через $J3D = C \setminus J(k)$ – дополнение множества Жюлиа до гиперкомплексной плоскости. Множество $J3D$ имеет конечное число компонент связности. Как множество $J(k)$, так и множество $J3D$, с точки зрения геофизики, интересны своими геологическими аналогами.

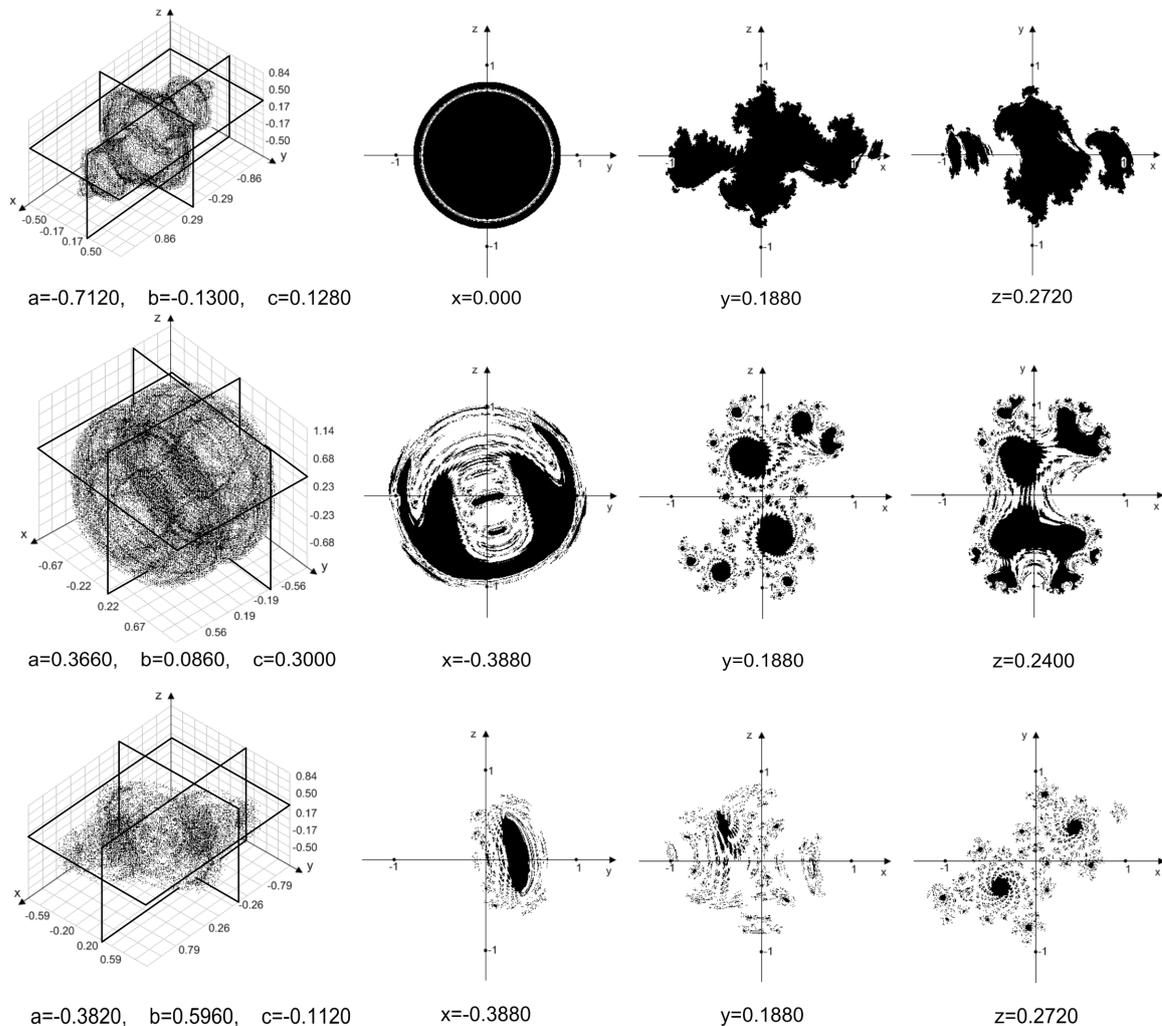
В частном, наиболее исследованном случае, $P_{n1}(w)/Q_{n2}(w) = w^2 + d$, где $d = a + ib + jc$, $a, b, c \in R$ – произвольное гиперкомплексное число. Множество Жюлиа $J(k)$ и его дополнение – $J3D(a, b, c)$, при конечном m , будут квазифрактальными параметрическими множествами, зависящими от трех параметров a, b и c .

Квазифракталы сгенерированные на основе $J3D$ -алгоритма обладают рядом свойств:

1. при $a = b = c = 0$ множество $J3D(0, 0, 0)$ – единичный шар;

2. множество $J3D(a, 0, 0)$ симметрично относительно осей y и z и при малых a – есть тело вращения относительно оси x ;
3. если $|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} > 2$ и $x^2 + y^2 + z^2 \geq q$, то любая траектория отображения $J(x, y, z)$ стремиться к бесконечности.

Перечисленные свойства позволяют оптимизировать алгоритм построения квазифрактальных включений в случае симметрии, ограничить вариации a , b и c , провести серию сравнительных вычислительных экспериментов при $a = b = c = 0$ в классе простых тел.



Р и с у н о к 2.1

На рисунке 2.1 демонстрируются множества $J3D$ и их аксиальные сечения при некоторых значениях параметров a , b и c ; $P_n(w) = w^2 + d$.

Осуществляя перенос, растяжение/сжатие и поворот построенного множества можно получать различные аналоги геологических объектов, подлежащих моделированию: «классические» включения (шар, линза, тело вращения); локальные включения, окруженные ореолом породы (зоной перемешивания сред); пористые среды.

При программной реализации алгоритм моделирования $J3D$ -квазифрактальных включений сталкивается с рядом проблем:

1. большое количество ($10^3 - 10^4$) элементарных включений, что ведет к росту размерности решаемых систем линейных алгебраических уравнений и необходимости учета

мнимых границ при соприкосновении элементарных кубов при расчете физического поля;

2. большая глубина рекурсии используемых функций (большое число итераций m).

Все это влечет значительные затраты машинного времени на генерирование квазифрактальных включений и на расчеты физических полей в среде при их наличии. Для ускорения на этом этапе эффективно распараллеливание процедуры генерации.

3. Поле точечного источника постоянного тока в кусочно-анизотропных квазифрактальных средах

Рассмотрим горизонтально-слоистую среду (см. рисунке 3.1 а), разделенную гладкими параметрически заданными границами $\gamma_{1,0}, \gamma_{2,0}, \dots, \gamma_{n,0}$ на горизонтальные слои $\Omega_{0,0}, \Omega_{1,0}, \Omega_{2,0}, \dots, \Omega_{n,0}$ с удельными электрическими проводимостями, заданными симметричными тензорами $\sigma_{0,0}, \sigma_{1,0}, \sigma_{2,0}, \dots, \sigma_{n,0}$ соответственно. Пусть каждый слой $\Omega_{i,0}$ содержит k_i локальных квазифрактальных включений с границами $\gamma_{i,j}$ и постоянными симметричными тензорами проводимости $\sigma_{i,j}, j = \overline{1, k_i}$.

Пусть в точке A горизонтального слоя $\Omega_{m,0}$ находится точечный источник постоянного электрического тока, с которого стекает ток силы I .

В произвольной точке $P \neq A$ $U(P)$ – потенциал среды электрического поля, создаваемого источником постоянного тока, описывается следующей краевой задачей:

$$\operatorname{div}(\sigma_{i,j} \bar{\nabla} U_{i,j}(P)) = -f_{i,j}(P), P \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, k_i}, \quad (3.1)$$

$$(\sigma_{i,0} \bar{\nabla} U_{i,0}(P), \mathbf{n}) - (\sigma_{i,j} \bar{\nabla} U_{i,j}(P), \mathbf{n})|_{\gamma_{i,j}} = 0, U_{i,0}(P) - U_{i,j}(P)|_{\gamma_{i,j}} = 0, i = \overline{0, n}, j = \overline{1, k_i}, \quad (3.2)$$

$$(\sigma_{i,0} \bar{\nabla} U_{i,0}(P), \mathbf{n}) - (\sigma_{i-1,0} \bar{\nabla} U_{i-1,0}(P), \mathbf{n})|_{\gamma_{i,0}} = 0, U_{i,0}(P) - U_{i-1,0}(P)|_{\gamma_{i,0}} = 0, i = \overline{1, n}, \quad (3.3)$$

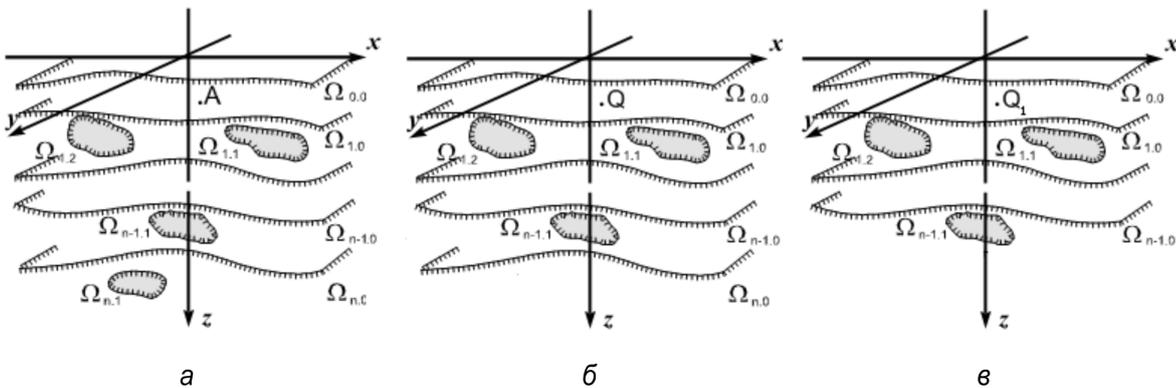
$$U_{i,0}(P) \rightarrow 0, P(x, y, z) \rightarrow \infty, i = \overline{0, n}, \quad (3.4)$$

где $f_{i,j} = \begin{cases} I\delta(P, A), P \in \Omega_{m,0}, \\ 0, P \notin \Omega_{m,0} \end{cases}$, $\delta(P, A)$ – функция Дирака, \mathbf{n} – вектор нормали, (3.2) –

(3.3) – условия непрерывности потенциала и плотности тока на границах контактов сред,

(3.4) – условие регулярности решения на бесконечности.

Для решения задачи воспользуемся методом интегральных представлений, поэтапно понижая геометрическую сложность задачи [3], [8, 9].



Р и с у н о к 3.1

Рассмотрим вспомогательную задачу для функции Грина вмещающего пространства (без квазифрактальных включений в последнем слое – рисунок 3.1 б) с точечным источником единичной интенсивности, находящемся в произвольной точке $Q(x_q, y_q, z_q)$:

$$\operatorname{div}(\sigma_{i,j} \bar{\nabla} G_{i,j}^n(P, Q)) = -\delta(P, Q), P \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, n}, j = \overline{0, k_i}, \quad (3.5)$$

$$(\sigma_{i,0} \bar{\nabla} G_{i,0}^n(P, Q), \mathbf{n}) - (\sigma_{i,j} \bar{\nabla} G_{i,j}^n(P, Q), \mathbf{n}) \Big|_{\gamma_{i,j}} = 0, G_{i,0}^n(P, Q) - G_{i,j}^n(P, Q) \Big|_{\gamma_{i,j}} = 0, \quad (3.6)$$

$$i = \overline{0, n-1}, j = \overline{1, k_i},$$

$$(\sigma_{i,0} \bar{\nabla} G_{i,0}^n(P, Q), \mathbf{n}) - (\sigma_{i-1,0} \bar{\nabla} G_{i-1,0}^n(P, Q), \mathbf{n}) \Big|_{\gamma_{i,0}} = 0, \quad (3.7)$$

$$G_{i,0}^n(P, Q) - G_{i-1,0}^n(P, Q) \Big|_{\gamma_{i,0}} = 0, i = \overline{1, n},$$

$$U_{i,0}(P) \rightarrow 0, P(x, y, z) \rightarrow \infty, i = \overline{0, n}, \quad (3.8)$$

Интегральное представление решения задачи (3.1) – (3.4) имеет вид:

$$U(P) = \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\gamma_{n,j}} U_{n,j}(Q) ((\sigma_{n,0} - \sigma_{n,j}) \bar{\nabla} G_{n,j}^n(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{n,j} + G^n(P, A), \quad (3.9)$$

из которого следует, что решение исходной задачи (3.1) – (3.4) может быть получено в любой точке P кусочно-анизотропной области, если будет определено решение задачи (3.5) – (3.8) – функция Грина $G^n(P, Q)$ – и будут известны граничные значения потенциала на границах подобластей, не вошедших в задачу для функции Грина. Здесь – \mathbf{n} вектор внешней нормали в точке Q .

Опуская в (3.9) точку P на каждую из границ $\gamma_{n,l}, l = 1, k_n$ и учитывая условия (3.2), получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно неизвестных граничных значений потенциала вида:

$$U_{n,l}(P) - \sum_{j=1}^{k_n} \int_{\gamma_{n,j}} U_{n,j}(Q) ((\sigma_{n,0} - \sigma_{n,j}) \bar{\nabla} G_{n,j}^n(P, Q), \mathbf{n}_Q) d\gamma_{n,j} = G^n(P, A), P \in \gamma_{n,l}. \quad (3.10)$$

Для решения задачи (3.5) – (3.8) снова применим метод интегральных представлений и интегральных уравнений. Рассмотрим вспомогательную задачу для функции Грина вмещающего пространства, считая включением последний слой (см. рисунке 3.1 в):

$$\operatorname{div}(\sigma_{i,j} \bar{\nabla} \tilde{G}_{i,j}^n(P, Q)) = -\delta(P, Q), P \in \Omega_{i,j}, i = \overline{0, n-1}, j = \overline{0, k_i}, \quad (3.11)$$

$$(\sigma_{i,0} \bar{\nabla} \tilde{G}_{i,0}^n(P, Q), \mathbf{n}) - (\sigma_{i,j} \bar{\nabla} \tilde{G}_{i,j}^n(P, Q), \mathbf{n}) \Big|_{\gamma_{i,j}} = 0, \tilde{G}_{i,0}^n(P, Q) - \tilde{G}_{i,j}^n(P, Q) \Big|_{\gamma_{i,j}} = 0, \quad (3.12)$$

$$i = \overline{0, n-1}, j = \overline{1, k_i},$$

$$(\sigma_{i,0} \bar{\nabla} \tilde{G}_{i,0}^n(P, Q), \mathbf{n}) - (\sigma_{i-1,0} \bar{\nabla} \tilde{G}_{i-1,0}^n(P, Q), \mathbf{n}) \Big|_{\gamma_{i,0}} = 0, \quad (3.13)$$

$$\tilde{G}_{i,0}^n(P, Q) - \tilde{G}_{i-1,0}^n(P, Q) \Big|_{\gamma_{i,0}} = 0, i = \overline{1, n-1},$$

$$\tilde{G}_{i,0}(P, Q) \rightarrow 0, P(x, y, z) \rightarrow \infty, i = \overline{0, n-1}. \quad (3.14)$$

Интегральное представление решения задачи (3.5) – (3.8) будет иметь вид:

$$G^n(P, Q) = \int_{\gamma_{n,0}} G^n(Q_1, Q) \left((\sigma_{n-1,0} - \sigma_{n,0}) \bar{\nabla} \tilde{G}^n(P, Q_1), \mathbf{n}_{Q_1} \right) d\gamma_{n,0} + \tilde{G}^n(P, Q), \quad (3.15)$$

а значения $G^n(P, Q)$ на границе $\gamma_{n,0}$ – определяются из интегрального уравнения

$$G^n(P, Q) - \int_{\gamma_{n,0}} G^n(Q_1, Q) \left((\sigma_{n-1,0} - \sigma_{n,0}) \bar{\nabla} \tilde{G}^n(P, Q_1), \mathbf{n}_{Q_1} \right) d\gamma_{n,0Q_1} = \tilde{G}^n(P, Q), P \in \gamma_{n,0}. \quad (3.16)$$

Таким образом, переход от исходной задачи (3.1) – (3.4) к аналогичной задаче (3.11) – (3.14) упростил геометрию области решения – в среде стало на один слой с включениями меньше.

К задаче (3.11) – (3.14), следовательно, снова можно применить вышеописанный способ, вплоть до среды, состоящей из одного анизотропного слоя $\Omega_{0,0}$. Если при этом тензор его удельной электрической проводимости задан матрицей диагональной $\sigma_{0,0} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{pmatrix}$, то решение последней задачи можно построить аналитически:

$$\tilde{G}^0(P, Q) = \frac{1}{4\pi\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}}} \left(\sqrt{\frac{(x_p - x_q)^2}{\sigma_{11}} + \frac{(y_p - y_q)^2}{\sigma_{22}} + \frac{(z_p - z_q)^2}{\sigma_{33}}} \right)^{-1},$$

где $P(x_p, y_p, z_p)$, $Q(x_q, y_q, z_q)$ – точки, содержащие приемник и источник тока.

В таблице 1 приведены результаты сопоставления значений аномального потенциала постоянного электрического тока системы двух точечных источников силы $I_1 = +1$ А, $I_2 = -1$ А с координатами $A_1(+40, +40, 0)$ м, $A_2(-40, -40, 0)$ м соответственно, вычисленного по алгоритму, изложенному выше, на площадке $D = \{x \in [-20, 20], y \in [-20, 20], z = 0\}$ «дневной» поверхности однородного полупространства с удельной электрической проводимостью $\sigma_{0,0} = 0,01$ См/м, при различном порядке N детализации квазифракталя $J3D(0, 0, 0)$ и шара с центром в $O(0, 0, 6)$ м, радиуса $R = 2$ м и удельной проводимостью $\sigma_{0,1} = 0,02$ См/м.

N	$\frac{1}{N_u} \sum_{i=1}^{N_u} \frac{ U_{spr} - U_{j3d} _i}{U_{spr_i}}, \%$	$\sqrt{\sum_{i=1}^{N_u} (U_{spr} - U_{j3d})^2}, \text{ В}$	$\max_{i \in \{1, N_u\}} U_{spr} - U_{j3d} _i, \text{ В}$
20	5,13	0,00017722	3,18e-06
30	1,29	0,00006944	1,03e-06
40	1,00	0,00006117	8,89e-07
50	0,69	0,00006047	5,61e-07

Таблица 1: Сопоставление значений аномального потенциала в однородном полупространстве в присутствии квазифракталя $J3D(0, 0, 0)$ и U_{spr} – шара, N_u – количество экспериментальных данных

Относительная погрешность вычислений составила менее 6 %, что свидетельствует о достаточной хорошей точности расчетов. Увеличение N – количества элементарных «кубов» входящих в квазифрактальное множество, влечет повышение точности расчетов.

4. Восстановление параметров квазифрактальных включений

Задача определения границ и параметров квазифрактальных включений по наблюдаемым значениям потенциала электрического тока относится к классу обратных задач электроразведки. Вследствие неединственности и неустойчивости решения задача некорректна.

Будем искать параметры квазифрактальных включений, как экстремальные решения регуляризирующего функционала А.Н. Тихонова.

Зададим форму i,j -го квазифрактального включения $\Omega_{i,j}$ векторами $\varphi_{i,j}(R_{i,j}, O_{i,j}, a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}, N_{i,j})$, где $R_{i,j} = (R_{i,j}^x, R_{i,j}^y, R_{i,j}^z)$ – вектор масштабирования с коэффициентами сжатия/растяжения куба стороны 4 м по осям x , y и z соответственно, $O_{i,j} = (O_{i,j}^x, O_{i,j}^y, O_{i,j}^z)$ – смещенная от точки $(0, 0, 0)$ координата центра, $a_{i,j}, b_{i,j}, c_{i,j}$ – параметры $J3D$ функции, $N_{i,j}$ – параметр детализации фрактала, определяющий количество элементарных «кубов».

Введем в рассмотрение конечномерный вектор $\bar{s} = (\varphi_{0,1}, \varphi_{0,2}, \dots, \varphi_{i,j}, \dots, \varphi_{n,k_n})$, определяющий вид всех квазифрактальных включений среды. Будем искать его как решение, минимизирующее регуляризирующий функционал А.Н. Тихонова вида:

$$F(\bar{s}) = \|U_e - U_m(\bar{s})\|_{L_2(D \times D)} + \alpha \|\bar{s} - \bar{s}^0\|_{R^{10k}}, \quad (4.1)$$

где U_e , U_m – соответственно экспериментальные и модельные (как решение задачи (3.1) – (3.4)) значения потенциалов между датчиками, расположенными в узлах сеточного множества $D \times D$ приемников/источников поля, α – параметр регуляризации, \bar{s}^0 – k -компонентный вектор (описывающий k включений) опорной модели, который строится с учетом всей априорно известной информации о структуре исследуемой среды (например, по данным сейсмо- и/или гравirazведки).

Ограничивая вариацию компонент конечномерного вектора \bar{s} , получим компактное множество корректности А.Н. Тихонова, на котором существует единственное квазирешение, определяющее форму квазифрактальных включений.

Экстремаль регуляризирующего функционала (искомые параметры включений) ищется методом Хука–Дживса поиска минимума сильно-овражной функции.

Система источников	$O_{0,1}^x, \text{ м}$	$O_{0,1}^y, \text{ м}$	$O_{0,1}^z, \text{ м}$	$R_{0,1}$	$a_{0,1}$	$b_{0,1}$	$c_{0,1}$	$V_{J3D}, \%$
	1,123	-1,345	-6,234	2,234	-0,382	0,596	-0,112	4,352
включение однородное								
A_1	1,225	-1,468	-6,550	1,975	-0,376	0,590	-0,120	8,458
$\varepsilon, \%$	9,08	9,12	5,06	11,59	1,57	1,02	7,14	94,36
A_1, A_2	1,075	-1,413	-6,450	2,375	-0,420	0,575	-0,124	6,965
$\varepsilon, \%$	4,27	4,99	3,46	6,31	9,95	3,52	10,71	60,05
A_1, A_2, A_3, A_4	1,144	-1,325	-6,325	2,275	-0,420	0,564	-0,120	4,470
$\varepsilon, \%$	1,87	1,51	1,45	1,84	4,71	1,85	7,14	2,80
включение анизотропное								
A_1	1,288	-1,125	-6,650	2,025	-0,420	0,564	-0,140	7,640
$\varepsilon, \%$	14,65	16,38	6,67	9,36	9,95	5,37	25,00	75,55
A_1, A_2	1,250	-1,475	-6,525	2,425	-0,378	0,600	-0,120	7,594
$\varepsilon, \%$	11,31	9,64	4,66	8,55	1,05	0,67	7,14	74,50
A_1, A_2, A_3, A_4	1,155	-1,225	-6,375	2,344	-0,390	0,592	-0,116	4,986
$\varepsilon, \%$	2,85	8,94	2,26	4,91	2,09	0,67	3,57	14,59

Таблица 2: Восстановление параметров квазифрактального включения

В таблице 2 приведены результаты восстановления параметров квазифрактального включения $J3D(-0,3820; 0,5960; -0,1120)$, смещенного в точку $O_{0,1} = (1,1230; -1,3453; -6,2343)$ м относительно начала координат, с вектором масштабирования $R_{0,1} = (2,2340; 2,2340; 2,2340)$, по значению аномального потенциала постоянного

электрического тока от системы источников силы $I_1 = I_3 = +1$ А, $I_2 = I_4 = -1$ А с координатами $A_1 = (40, 40, 0)$ м, $A_2 = (-40, -40, 0)$ м, $A_3 = (40, 0, 0)$ м, $A_4 = (-30, 0, 0)$ м соответственно, на площадке $D = \{x \in [-20, 20], y \in [-20, 20], z = 0\}$ «дневной» поверхности однородного полупространства с удельной электрической проводимостью $\sigma_{0.0} = 0,01$ См/м. Удельная электрическая проводимость включения $\sigma_{0.1} = 0,1$ См/м в изотропном и с ненулевыми коэффициентами проводимости вдоль осей системы координат $0,2$ См/м, $0,05$ См/м и $0,1$ См/м соответственно анизотропном случае. Параметр детализации $N_{0.1} = 40$. В качестве априорно известной информации рассматривались значения: $O_{0.1} = (0; 0; -10)$, $R_{0.1} = (3, 3, 3)$, $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$.

В таблице 2 ε – относительная погрешность, значение $V_{J3D} = N_{J3D}/N_{0.1}^3 \times 100\%$ – аналог коэффициента пористости, где N_{J3D} – число элементарных объектов образующих включение. Для шара $V_{J3D} = 53,846$, при параметре детализации $N = 40$.

Вычислительные эксперименты показали что, наиболее эффективной стратегией поиска решения задачи определения параметров квазифрактального включения является следующая: на первом шаге определяется местоположение (координаты центра), на втором – вектор масштабирования, на третьем – выполняется уточнение коэффициентов генератора фрактала. Данной стратегией определялась последовательность варьирования параметров в методе Хука–Дживса. Найденные параметры квазифрактала позволяют строить оценки коэффициента пористости среды (см. последний столбец таблицы 2), а последующие исследования квазифрактала на связность (наличие капиллярных каналов) и флюидодинамику позволят оценить коэффициент проницаемости нефтегазонасыщенных систем.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов, В.Т. Методы решения прямых и обратных задач электрокартажа / В.Т.Иванов, М.С. Масютина. – М.: Наука, 1983.
2. Кризский, В.Н. Математическое моделирование потенциальных геoeлектрических полей: дис. д-ра физ.-мат. наук / В.Н. Кризский. – Стерлитамак, 2004.
3. Кризский, В.Н. О способе вычисления геофизических полей в кусочно-однородных средах / В.Н. Кризский // Физика Земли. – 2009. – №10. – С.25–37.
4. Герасимов И.А. Математическое моделирование геoeлектрических полей в осесимметричных кусочно-однородных средах: дис. к-та физ.-мат. наук / И.А. Герасимов – Стерлитамак, 2004.
5. Викторov, С.В. Математическое моделирование геoeлектрических полей в осесимметричных средах со сплайн-аппроксимацией границ: дис. канд. физ.-мат. наук / С.В. Викторov – Стерлитамак, 2006.
6. Беляева, М.Б. Математическое моделирование электрических полей в цилиндрических кусочно-однородных средах со сплайн-аппроксимацией границ: дис. канд. физ.-мат. наук / М.Б. Беляева – Стерлитамак, 2007.
7. Трегубов, Н.В. Программно-алгоритмическое обеспечение навигации бурения горизонтальных скважин / Н.В. Трегубов, В.Н. Кризский // Системы управления и информационные технологии. – 2007. №4(30). – С. 99–104.
8. Кризский, В.Н. О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Ч.1. Стационарные поля / В.Н. Кризский // Вестник Башкирского государственного университета. – 2009. – Т. 14, №3. – С. 726–730.

9. Кризский, В.Н. О способе вычисления физических полей в кусочно-анизотропных средах. Ч II. Нестационарные поля / В.Н. Кризский // Вестник Башкирского государственного университета. – 2009, – Т. 14, №4. – С. 1302–1306.
10. Морозов, А.Д. Введение в теорию фракталов / А.Д. Морозов. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 160 с.

Structural interpretation of local piecewise anisotropic geological inclusions

© V .N. Krizsky³, R. R. Yamatov⁴

Abstract. The computer modeling algorithms for direct electric pointed source fields in piecewise quasifractal Julia media were build. Julia quasifractals are describe meaning or porous oil and gas media. On the base of A.N.Tikhonov variation type algorithms the solving procedures for inverse problems of determination of quasifractal media parameters were build.

Key Words: Quasifractal porous piecewise anisotropic Julia media, direct current field, direct and inverse problem.

³Professor of «Mathematical Modelling», Sterlitamak State Pedagogical Academy, Sterlitamak; Krizsky@rambler.ru.

⁴Postgraduate student of Mathematical Modeling chair, Sterlitamak State Pedagogical Academy, Sterlitamak; YamatovRim@yandex.ru.

УДК 517.938

Полный топологический инвариант для диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях

© О.В. Починка¹

Аннотация. Настоящая статья посвящена топологической классификации множества $G(M^3)$ сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла f , заданных на гладких замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3 . Полным топологическим инвариантом для диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ является класс эквивалентности его схемы S_f , которая содержит информацию о периодических данных и топологии вложения в объемлющее многообразие двумерных инвариантных многообразий седловых периодических точек f . Кроме того, выделено множество абстрактных схем \mathcal{S} , имеющее представителя из каждого класса эквивалентности схем диффеоморфизмов из $G(M^3)$ и по каждой абстрактной схеме $S \in \mathcal{S}$ построен диффеоморфизм $f_S \in G(M^3)$, схема которого эквивалентна схеме S .

Ключевые слова: диффеоморфизм Морса-Смейла, топологическая классификация, пространство орбит.

Введение

Пусть M^n — гладкое замкнутое связное ориентируемое n -многообразие. Динамическая система на многообразии M^n называется *системой Морса-Смейла*, если:

- 1) ее неблуждающее множество гиперболично и состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических орбит;
- 2) инвариантные многообразия неподвижных точек и периодических орбит пересекаются трансверсально.

Своим названием эти системы обязаны С. Смейлу [18], который в 1961 году, основываясь на работе Андронова и Понтрягина [1] 1937 года, выделил потоки со свойствами 1), 2), как естественное обобщение грубых потоков на поверхностях и доказал, что для них справедливы соотношения, подобные неравенствам Морса. Сегодня хорошо известно, что динамические системы Морса-Смейла на многообразиях любой размерности действительно являются структурно устойчивыми, но не являются типичными, за исключением потоков Морса-Смейла на поверхностях и систем Морса-Смейла на окружности. Однако, эти системы получили широкое распространение в динамике в качестве простейших моделей грубых систем, к которым сводятся многочисленные задачи естественных наук.

Одним из первых вопросов, возникающих при изучении динамической системы является вопрос о поведении ее траекторий и возможности качественно (с точностью до топологической эквивалентности (сопряженности)) отличать это поведение от поведения траекторий другой системы. Решение этих задач составляет *топологическую классификацию* динамических систем и заключается в выделении некоторой, по-возможности минимальной, информации о системе, однозначно определяющей ее класс топологической эквивалентности (сопряженности) и называемой *полным топологическим инвариантом*. Неотъемлемой частью топологической классификации является построение по выделенной информации стандартного представителя в каждом классе топологической эквивалентности (сопряженности), называемое *реализацией динамической системы*. Возможность реализации позволяет моделировать системы с заданными свойствами. Приведем некоторые классификационные результаты для динамических систем Морса-Смейла.

¹Доцент кафедры теории функций, Нижегородский Государственный Университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород; olga-pochinka@yandex.ru.

Класс эквивалентности потока Морса-Смейла на окружности однозначно определяется числом его неподвижных точек. Для каскадов на окружности полный топологический инвариант получен А.Г. Майером [14] в 1939 году и состоит из числа периодических орбит и числа вращения диффеоморфизма. В 1955 году Е.А. Леонтович и А.Г. Майер [13] в качестве полного топологического инварианта ввели схему потоков с конечным числом особых траекторий на двумерной сфере. В 1971 году М. Пейкшото [15] обобщил понятие схемы Леонтович-Майера и доказал, что для потоков на произвольных поверхностях полным топологическим инвариантом является класс изоморфности ориентируемого графа, вершины и ребра которого находятся во взаимно однозначном соответствии с особыми траекториями и сепаратрисами седловых особенностей, соответственно, а изоморфность графов включает в себя сохранение выделенных специальным образом подграфов. Графа, подобного графу Пейкшото и оснащенного некоторой дополнительной информацией, оказалось достаточно для описания полного топологического инварианта для диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом гетероклинических орбит (А.Н. Безденежных, В.З. Гринес [2], [3], [4], [10]). Для потоков с конечным числом особых траекторий на 3-многообразиях (Я.Л. Уманский [19]) в качестве полного топологического инварианта вновь использовалась схема, подобная схеме Леонтович-Майера. Классификационные результаты на языке графов Пейкшото и диаграмм Смейла имеются и в размерности $n > 3$: для потоков на сфере S^n , в предположении, что эти потоки не имеют замкнутых траекторий и гетероклинических пересечений (С.Ю. Пилюгин [16]); для диффеоморфизмов на M^n , все седловые точки которого имеют индекса Морса 1 (Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С. [11], [12]).

Как стало ясно сравнительно недавно, никакая комбинаторная информация о диффеоморфизме на 3-многообразии не позволяет выделить класс его топологической сопряженности. Причиной столь неожиданного эффекта оказалась возможность “дикого” поведения сепаратрис седловых точек, при котором, сепаратриса, являясь гладким подмногообразием объемлющего многообразия, имеет замыкание, отличающееся от сепаратрисы всего одной точкой, но не являющееся даже топологическим подмногообразием. Впервые диффеоморфизм с дикими сепаратрисами был построен Д. Пикстоном в 1977 году [17]. Он использовал кривую Артина-Фокса для построения одномерной сепаратрисы седловой неподвижной точки. Диффеоморфизм Пикстона задан на трехмерной сфере и имеет неблуждающее множество, состоящее из четырех неподвижных точек: седла, одного источника и двух стоков. Из работы [5] следует, что в классе Пикстона существует счетное множество топологически несопряженных диффеоморфизмов (при этом, очевидно, что их графы Пейкшото изоморфны) и полным топологическим инвариантом является тип вложения сепаратрис. Эффективным инструментом, позволяющим различать эти вложения является переход к пространству орбит и рассмотрение класса эквивалентности естественной проекции сепаратрисы в это пространство. Именно этой идеей связаны все уже имеющиеся работы по топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях в предположениях различной общности (Х. Бонатти, В.З. Гринес, В.С. Медведев, Е. Пеку, О.В. Починка [6]–[7]). Настоящая работа показывает, что такой подход позволяет полностью решить задачу топологической классификации произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на 3-многообразиях. Кроме того, становится понятным, что структура пространства блуждающих орбит является необходимой информацией в топологическом инварианте, поскольку диффеоморфизм уже не определяется своим действием на особых траекториях (траекториях, принадлежащих инвариантным многообразиям периодических точек).

1. Необходимые и достаточные условия топологической сопряженности диффеоморфизмов класса $G(M^3)$

Обозначим через $G(M^3)$ класс сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов Морса-Смейла f , заданных на гладких замкнутых ориентируемых 3-многообразиях M^3 . Как уже было отмечено выше, замыкание инвариантного многообразия седловой точки диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ может иметь сложную топологическую структуру. Это явление может иметь как чисто топологическую, так и динамическую природу. Последний случай соответствует ситуации, когда сепаратриса седловой точки участвует в гетероклинических пересечениях. Напомним, что непустое пересечение $W_{\sigma_1}^s \cap W_{\sigma_2}^u$ инвариантных многообразий различных седловых точек σ_1, σ_2 называется *гетероклиническим*. При этом, компонента связности этого пересечения называется *гетероклинической кривой* в случае, когда $\dim W_{\sigma_1}^s = \dim W_{\sigma_2}^u$ и *гетероклинической точкой* в случае, когда $\dim W_{\sigma_1}^s \neq \dim W_{\sigma_2}^u$.

Представим динамику произвольного диффеоморфизма Морса-Смейла $f : M^3 \rightarrow M^3$ в виде “источник-сток” следующим образом. Для $q \in \{0, 1, 2, 3\}$ обозначим через Ω_q множество периодических точек диффеоморфизма f с индексом Морса q . Положим $A_f = \Omega_0 \cup W_{\Omega_1}^u$, $R_f = \Omega_3 \cup W_{\Omega_2}^s$ и $V_f = M^3 \setminus (A_f \cup R_f)$. Методом построения фильтрации доказывается, что множество A_f (R_f) является аттрактором (репеллером)² диффеоморфизма f . При этом, множество V_f состоит из блуждающих точек, которые под действием диффеоморфизма f (f^{-1}) движутся к аттрактору (репеллеру). Обозначим через $\hat{V}_f = V_f/f$ пространство орбит действия f на V_f и через $p_f : V_f \rightarrow \hat{V}_f$ естественную проекцию. В силу выбора пространства V_f , естественная проекция p_f является накрытием и, согласно [9], пространство орбит \hat{V}_f является простым многообразием³. При этом накрытие p_f индуцирует эпиморфизм $\eta_f : \pi_1(\hat{V}_f) \rightarrow \mathbb{Z}$, ставящий в соответствие гомотопическому классу $[c] \in \pi_1(\hat{V}_f)$ целое число n такое, что поднятие кривой c на V_f соединяет точку x с точкой $f^n(x)$. Положим $\hat{W}_f^s = p_f(W_{\Omega_1}^s \setminus A_f)$ и $\hat{W}_f^u = p_f(W_{\Omega_2}^u \setminus R_f)$.

О п р е д е л е н и е 1.1. Набор $S_f = (\hat{V}_f, \eta_f, \hat{W}_f^s, \hat{W}_f^u)$ назовем *схемой диффеоморфизма $f \in G(M^3)$* .

О п р е д е л е н и е 1.2. Схемы S_f и $S_{f'}$ диффеоморфизмов $f, f' \in G(M^3)$ назовем *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\hat{\varphi} : \hat{V}_f \rightarrow \hat{V}_{f'}$ со следующими свойствами:

- 1) $\eta_f = \eta_{f'} \hat{\varphi}_*$;
- 2) $\hat{\varphi}(\hat{W}_f^s) = \hat{W}_{f'}^s$ и $\hat{\varphi}(\hat{W}_f^u) = \hat{W}_{f'}^u$.

Т е о р е м а 1.1. Диффеоморфизмы Морса-Смейла $f, f' \in G(M^3)$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их схемы эквивалентны.

Решение проблемы реализации основывается на двух принципиальных взаимосвязанных фактах, касающихся схемы S_f . Первый факт (лемма 2.1.) утверждает, что множества \hat{W}_f^s, \hat{W}_f^u являются трансверсально пересекающимися ламинациями на многообразии \hat{V}_f в смысле определений 2.1., 2.2.. Второй факт (лемма 2.2.) связан с введенным авторами

²Компактное множество $A \subset M^n$ называется *аттрактором диффеоморфизма $f : M^n \rightarrow M^n$* , если существует окрестность U множества A такая, что $f(U) \subset U$ и $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$. Множество $R \subset M^n$

называется *репеллером* для f , если оно является аттрактором для f^{-1} .

³Гладкое связное замкнутое ориентируемое 3-многообразие называется *простым*, если оно гомеоморфно $S^2 \times S^1$ или неприводимо (любая гладко вложенная 2-сфера ограничивает в нем 3-шар).

понятием перестройки многообразия вдоль ламинации и устанавливает, что результатом такой перестройки является многообразие, состоящее из конечного числа копий $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$. Оказывается, что выполнение этих двух необходимых свойств является достаточным условием, выделяющим множество \mathcal{S} абстрактных схем, каждая из которых является схемой некоторого диффеоморфизма из $G(M^3)$. Более детально.

2. Реализация диффеоморфизмов класса $G(M^3)$

Положим $\mathbb{D}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}$ и $\mathbb{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ для $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathcal{A} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{D}^1 \times \mathbb{R}$ — толстый цилиндр и $\mathcal{W} = \mathbb{S}^1 \times \{0\} \times \mathbb{R}$ — его середина. Определим диффеоморфизмы на многообразии \mathcal{A} : $a_{s,+1}(e^{i\psi}, t, r) = (e^{i\psi}, t, r+1)$, $a_{s,-1}(e^{i\psi}, t, r) = (e^{-i\psi}, -t, r+1)$, $a_{u,+1}(e^{i\psi}, t, r) = (e^{i\psi}, t, r-1)$, $a_{s,-1}(e^{i\psi}, t, r) = (e^{-i\psi}, -t, r-1)$, где $e^{i\psi}$, $\psi \in [0, 2\pi)$ — показательная форма записи комплексного числа, соответствующего точке на единичной окружности. Для $\delta \in \{u, s\}$, $\nu \in \{+1, -1\}$ положим $\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu} = \mathcal{A}/a_{\delta,\nu}$. Обозначим через $p_{\delta,\nu} : \mathcal{A} \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu}$ естественную проекцию. Тогда проекция $p_{\delta,\nu}$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм $\eta_{\delta,\nu} : \pi_1(\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu}) \rightarrow \mathbb{Z}$. Положим $\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu} = p_{\delta,\nu}(\mathcal{W})$. Тогда множество $\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu}$ гомеоморфно двумерному тору для $\nu = +1$ и гомеоморфно бутылке Клейна для $\nu = -1$, а множество $\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu}$ является окрестностью поверхности $\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu}$.

Рассмотрим на многообразии \mathcal{A} пару трансверсальных $a_{\delta,\nu}$ -инвариантных слоений $\mathcal{F}^1 = \bigcup_{\psi_0 \in [0, 2\pi), r_0 \in \mathbb{R}} \{(e^{i\psi}, t, r) \in \mathcal{A} : \psi = \psi_0, r = r_0\}$, $\mathcal{F}^2 = \bigcup_{r_0 \in \mathbb{R}} \{(e^{i\psi}, t, r) \in \mathcal{A} : r = r_0 - \log_2 t, t > 0\} \cup \bigcup_{r_0 \in \mathbb{R}} \{(e^{i\psi}, t, r) \in \mathcal{A} : r = r_0 - \log_2(-t), t < 0\} \cup \mathcal{W}$. Обозначим через $\hat{\mathcal{F}}_{\delta,\nu}^1$, $\hat{\mathcal{F}}_{\delta,\nu}^2$

пару трансверсальных слоений на $\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu}$, слои которых являются проекциями относительно $p_{\delta,\nu}$ слоев слоений \mathcal{F}^1 , \mathcal{F}^2 , соответственно. Пусть $X \subset \hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu}$ — пустое, конечное или счетное множество точек и Y — объединение всех слоев слоения $\hat{\mathcal{F}}_{\delta,\nu}^1$, проходящих через точки множества X . Положим $\hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu,X} = \hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu} \setminus X$ и $\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu,X} = \hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu} \setminus Y$. Обозначим через $\hat{\mathcal{F}}_{\delta,\nu,X}^1$ ($\hat{\mathcal{F}}_{\delta,\nu,X}^2$) слоение на множестве $\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu,X}$, состоящее из слоев слоения $\hat{\mathcal{F}}_{\delta,\nu}^1$ ($\hat{\mathcal{F}}_{\delta,\nu}^2$) после удаления из них всех точек множества Y .

Далее под обозначением (\hat{V}, η) понимается 3-многообразие \hat{V} , каждая компонента связности \hat{v} которого является простым многообразием, допускающим эпиморфизм $\eta_{\hat{v}} : \pi_1(\hat{v}) \rightarrow \mathbb{Z}$, и η — отображение, составленное из этих эпиморфизмов.

О п р е д е л е н и е 2.1. Компактное множество $\hat{\mathcal{W}}^\delta \subset (\hat{V}, \eta)$ назовем δ -ламинацией, если:

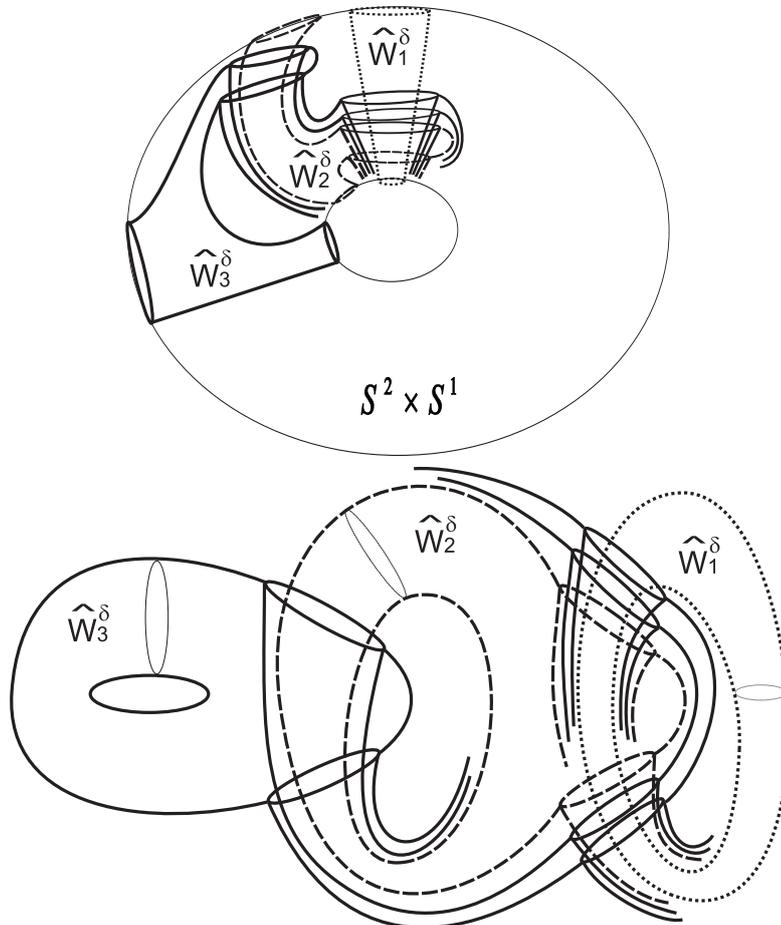
1) $\hat{\mathcal{W}}^\delta$ состоит из конечного числа n_δ компонент линейной связности $\hat{W}_1^\delta, \dots, \hat{W}_{n_\delta}^\delta$ таких, что компонента \hat{W}_1^δ является замкнутым множеством и $(cl \hat{W}_i^\delta \setminus \hat{W}_i^\delta) \subset \bigcup_{j=1}^{i-1} cl \hat{W}_j^\delta$ для $i > 1$;

2) для каждого $i = 1, \dots, n_\delta$ существуют окрестности $N(\hat{W}_i^\delta)$, $\tilde{N}(\hat{W}_i^\delta)$ множества \hat{W}_i^δ , числа $m_i \in \mathbb{N}$, $\nu_i \in \{-1, +1\}$, множество $X_i \subset \hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu_i}$ и диффеоморфизм $\mu_i : N(\hat{W}_i^\delta) \rightarrow \hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu_i,X_i}$ со следующими свойствами:

a) $\mu_i(\hat{W}_i^\delta) = \hat{\mathcal{W}}_{\delta,\nu_i,X_i}$ и $\eta([c]) = m_i \eta_{\delta,\nu_i}(\mu_i([c]))$ для любой замкнутой кривой $c \subset \hat{W}_i^\delta$;

b) для $j < i$ множество $\mu_j(N(\hat{W}_j^\delta) \cap \hat{W}_i^\delta)$ либо пусто, либо для любого слоя $\hat{L}_i^2 \in \hat{\mathcal{F}}_{\delta,\nu_i,X_i}^2$ каждая компонента связности множества $\mu_j(N(\hat{W}_j^\delta) \cap \mu_i^{-1}(\hat{L}_i^2) \cap \tilde{N}(\hat{W}_i^\delta))$ явля-

ется слоем слоения $\hat{\mathcal{F}}_{\delta, \nu_j, X_j}^2$ и для любого слоя $\hat{L}_j^1 \in \hat{\mathcal{F}}_{\delta, \nu_j, X_j}^1$ каждая компонента связности множества $\mu_i(N(\hat{W}_i^\delta) \cap \mu_j^{-1}(\hat{L}_j^1) \cap \tilde{N}(\hat{W}_j^\delta))$ является слоем слоения $\hat{\mathcal{F}}_{\delta, \nu_i, X_i}^1$.



Р и с у н о к 2.1
 δ -ламинация на многообразии $S^2 \times S^1$

О п р е д е л е н и е 2.2. Ламинации \hat{W}^s и \hat{W}^u на многообразии (\hat{V}, η) будем называть трансверсально пересекающимися, если для $i_s \in \{1, \dots, n_s\}$ и $i_u \in \{1, \dots, n_u\}$ таких, что $\hat{W}_{i_s}^s \cap \hat{W}_{i_u}^u \neq \emptyset$, множество $\mu_{i_s}(N(\hat{W}_{i_s}^s) \cap \hat{W}_{i_u}^u)$ является объединением слоев слоения $\hat{\mathcal{F}}_{s, \nu_{i_s}, X_{i_s}}^1$ и множество $\mu_{i_u}(N(\hat{W}_{i_u}^u) \cap \hat{W}_{i_s}^s)$ является объединением слоев слоения $\hat{\mathcal{F}}_{u, \nu_{i_u}, X_{i_u}}^1$.

Л е м м а 2.1. Для диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ множества \hat{W}_f^s и \hat{W}_f^u являются трансверсально пересекающимися ламинациями на многообразии (\hat{V}_f, η_f) .

Пусть $\mathcal{B} = \mathbb{D}^2 \times S^0 \times \mathbb{R}$ — две копии заполненных цилиндров и $\mathcal{I} = \{0\} \times S^0 \times \mathbb{R}$ — их середины. Определим на многообразии \mathcal{B} диффеоморфизмы: $b_{s,+1}(d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r) = (d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r+1)$, $b_{s,-1}(d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r) = (d \cdot e^{-i\psi}, -\kappa, r+1)$, $b_{u,+1}(d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r) = (d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r-1)$, $b_{s,-1}(d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r) = (d \cdot e^{-i\psi}, -\kappa, r-1)$, где $d \in [0, 1]$. Положим $\hat{\mathcal{B}}_{\delta, \nu} = \mathcal{B}/b_{\delta, \nu}$. Обозначим через $q_{\delta, \nu} : \mathcal{B} \rightarrow \hat{\mathcal{B}}_{\delta, \nu}$ естественную проекцию. Тогда проекция $q_{\delta, \nu}$ является накрытием и индуцирует эпиморфизм в группу \mathbb{Z} на фундаментальной группе каждой компоненты связности многообразия $\hat{\mathcal{B}}_{\delta, \nu}$, обозначим через $\zeta_{\delta, \nu}$ отображение, составленное из этих эпиморфизмов. Положим $\hat{\mathcal{I}}_{\delta, \nu} = q_{\delta, \nu}(\mathcal{I})$. Тогда множество $\hat{\mathcal{B}}_{\delta, \nu}$ является трубчатой окрестностью многообразия $\hat{\mathcal{I}}_{\delta, \nu}$, которое гомеоморфно паре непересекающихся окружностей для $\nu = +1$ и одной

окружности для $\nu = -1$. Рассмотрим на многообразии \mathcal{B} двумерное $b_{\delta,\nu}$ -инвариантное слоение $\mathcal{G}^2 = \bigcup_{r_0 \in \mathbb{R}} \{(d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r) \in \mathcal{B} : \kappa = -1, r = r_0\} \cup \bigcup_{r_0 \in \mathbb{R}} \{(d \cdot e^{i\psi}, \kappa, r) \in \mathcal{B} : \kappa = +1, r = r_0\}$.

Обозначим через $\hat{\mathcal{G}}_{\delta,\nu}^2$ двумерное слоение на $\hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu}$, слои которого являются проекцией относительно $q_{\delta,\nu}$ слоев слоения \mathcal{G}^2 .

Заметим, что $\partial\mathcal{A} = \partial\mathcal{B} = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0 \times \mathbb{R}$ и $a_{\delta,\nu}|_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0 \times \mathbb{R}} = b_{\delta,\nu}|_{\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^0 \times \mathbb{R}}$. Тогда отображение $\xi_{\delta,\nu} = q_{\delta,\nu}(p_{\delta,\nu}|_{\partial\mathcal{A}})^{-1} : \partial\hat{\mathcal{A}}_{\delta,\nu} \rightarrow \partial\hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu}$ является гомеоморфизмом. Пусть $\hat{\mathbb{W}}^\delta = \bigcup_{i=1}^{n_\delta} \hat{W}_i^\delta$ — δ -ламинация на многообразии (\hat{V}, η) . Положим $J_1 = \xi_{\delta,\nu_1} \mu_1|_{\partial N(\hat{W}_1^\delta)} : \partial N(\hat{W}_1^\delta) \rightarrow \partial\hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu_1}$. Будем говорить, что многообразии $\hat{V}_1 = (\hat{V} \setminus \text{int } N(\hat{W}_1^\delta)) \cup_{J_1} \hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu_1}$ получено перестройкой многообразия \hat{V} вдоль поверхности \hat{W}_1^δ . Обозначим через $p_1 : (\hat{V} \setminus \text{int } N(\hat{W}_1^\delta)) \cup \hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu_1} \rightarrow \hat{V}_1$ естественную проекцию. Для $i = 1, \dots, n_\delta - 1$ положим $\hat{W}_{1,i}^\delta = p_1(\hat{W}_{i+1}^\delta \setminus N(\hat{W}_1^\delta)) \cup p_1(G_i)$, где G_i — объединение слоев слоения $\hat{\mathcal{G}}_{\delta,\nu_1}^2$ таких, что $\partial G_i = J_1(\partial N(\hat{W}_1^\delta) \cap \hat{W}_{i+1}^\delta)$. Положим $\hat{\mathbb{W}}_1^\delta = \bigcup_{i=1}^{n_\delta-1} \hat{W}_{1,i}^\delta$.

Предложение 2.1. *Каждая компонента связности \hat{v}_1 многообразия \hat{V}_1 является простым многообразием, допускающим эпиморфизм $\eta_{\hat{v}_1} : \pi_1(\hat{v}_1) \rightarrow \mathbb{Z}$ такой, что отображение η_1 , составленное из этих эпиморфизмов, удовлетворяет условиям $\eta(c) = \eta_1([p_1(c)])$, $\zeta_{\delta,\nu_1}(\gamma) = t_1 \eta_1([p_1(\gamma)])$ для любых замкнутых кривых $c \subset (\hat{V} \setminus \text{int } N(\hat{W}_1^\delta))$, $\gamma \subset \hat{\mathcal{B}}_{\delta,\nu_1}$ и множество $\hat{\mathbb{W}}_1^\delta$ является δ -ламинацией с компонентами линейной связности $\hat{W}_{1,1}^\delta, \dots, \hat{W}_{1,n_\delta-1}^\delta$ на многообразии (\hat{V}_1, η_1) .*

Для $i = 2, \dots, n_\delta$ обозначим через \hat{V}_i — многообразие, полученное перестройкой многообразия \hat{V}_{i-1} вдоль поверхности $\hat{W}_{i-1,1}^\delta$ и назовем \hat{V}_{n_δ} многообразием, полученным перестройкой многообразия \hat{V} вдоль δ -ламинации $\hat{\mathbb{W}}^\delta$.

Лемма 2.2. *Для диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ каждая компонента связности многообразия, полученного перестройкой многообразия \hat{V}_f вдоль s -ламинации $\hat{\mathbb{W}}_f^s$ (u -ламинации $\hat{\mathbb{W}}_f^u$) гомеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.*

Определение 2.3. *Набор $S = (\hat{V}, \eta, \hat{\mathbb{W}}^s, \hat{\mathbb{W}}^u)$ называется абстрактной схемой, если:*

- 1) (\hat{V}, η) — простое многообразие, фундаментальная группа которого допускает эпиморфизм η в группу \mathbb{Z} ;
- 2) $\hat{\mathbb{W}}^s$ и $\hat{\mathbb{W}}^u$ — трансверсально пересекающиеся ламинации на многообразии (\hat{V}, η) ;
- 3) каждая компонента связности многообразия, полученного перестройкой многообразия \hat{V} вдоль s -ламинации $\hat{\mathbb{W}}^s$ (u -ламинации $\hat{\mathbb{W}}^u$) гомеоморфна $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$.

Обозначим через \mathcal{S} множество абстрактных схем. Из лемм 2.1. и 2.2. получаем следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Схема S_f любого диффеоморфизма $f \in G(M^3)$ принадлежит множеству \mathcal{S} .*

Теорема 2.2. *Для любой абстрактной схемы $S \in \mathcal{S}$ существует диффеоморфизм $f_S \in G(M^3)$, схема которого эквивалентна схеме S .*

Благодарности. Автор благодарит В.З. Гринеса и Х. Бонатти за полезные обсуждения, а также грант правительства Российской Федерации 11.G34.31.0039 за частичную финансовую поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы// Докл. АН СССР. – 1937. – Т. 14, № 5. – С. 247-250.
2. Безденежных А.Н., Гринес В.З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 1// Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой. Горький. – 1985. – С. 22-38.
3. Безденежных А.Н., Гринес В.З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий// Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. науч. тр. под ред. Н.Ф. Отрокова. Горький ГГУ. – 1985. – С. 33-37.
4. Безденежных А.Н., Гринес В.З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 2// Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой. Горький. – 1987. – С. 24-32.
5. Bonatti Ch., Grines V. Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3 // Journal of Dynamical and Control Systems (Plenum Press, New York and London). – 2000. – V. 6, № 4. – P. 579-602.
6. Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E. Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds// Topology. – 2004. – №43. – P. 369–391.
7. Бонатти Хр., Гринес В.З, Починка О.В. Классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических орбит на 3-многообразиях// Труды МИАН. – 2005. –Т. 250. – С. 5–53.
8. Ch. Bonatti, V. Grines, O.Pochinka. Classification of Morse-Smale diffeomorphisms with the chain of saddles on 3-manifolds// Foliations 2005. World Scientific, Singapore. – 2006. – P. 121–147.
9. Bonatti Ch., Paoluzzi L. 3-manifolds which are orbit spaces of diffeomorphisms// Topology. – 2008. – V. 47. – P. 71–100.
10. Гринес В.З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях// Матем. заметки. – 1993. – Т. 54, вып. 3. – С. 3-17.
11. Гринес В.З., Гуревич Е.Я. О диффеоморфизмах Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех// Доклады академии наук. – 2007. – Т.416, N.1. – С. 15-17.
12. Гринес В.З., Гуревич Е.Я., Медведев В.С. Граф Пейкшото диффеоморфизмов Морса-Смейла на многообразиях размерности большей трех// Труды математического института им. В.А. Стеклова. – 2008. – Т. 261. – С. 61-86.

13. Леонтович Е.А., Майер А.Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории// Докл. АН СССР. – 1955. – Т. 103, № 4. – С. 557-560.
14. Майер А.Г. Грубое преобразование окружности в окружность// Уч. Зап. ГГУ. Горький, Изд-во ГГУ. – 1939. – вып. 12. – С. 215-229.
15. Peixoto M. On the classification of flows on two-manifolds. – Dynamical systems Proc. Symp. held at the Univ.of Bahia, Salvador, Brasil. 1971. N.Y.London: Acad. press. – 1973. P. 389-419.
16. Пилюгин С.Ю. Фазовые диаграммы, определяющие системы Морса-Смейла без периодических траекторий на сферах// Дифференциальные уравнения. – 1978. –Т. 14, № 2. – С. 245-254.
17. Pixton D. Wild unstable manifolds// Topology. – 1977. – V. 16, № 2. – P. 167-172.
18. С. Смейл. Неравенства Морса для динамических систем// Сб. Математика. – 1967. – Т.11, №4. – С. 79–87.
19. Уманский Я. Л. Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса-Смейла с конечным числом особых траекторий// Мат. сб. – 1990. – Т. 181, № 2. – С. 212 - 239.

Complete topological invariant for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds

© O. V. Pochinka⁴

Abstract. The present paper is devoted to topological classification of a set $G(M^3)$ of preserving orientation Morse-Smale diffeomorphisms f given on smooth closed orientable 3-manifolds M^3 . A complete topological invariant for a diffeomorphism $f \in G(M^3)$ is equivalence class of its scheme S_f , which contains an information on periodic dates and on topology of embedding in ambient manifold of two-dimensional invariant manifolds of the saddle periodic points of f . Moreover, it is introduced a set \mathcal{S} of abstract schemes, having a representative from each equivalence class of schemes of the diffeomorphisms from $G(M^3)$ and it is constructed a diffeomorphism $f_S \in G(M^3)$ whose scheme is equivalent to S .

Key Words: Morse-Smale diffeomorphisms, topological classification, orbit space.

⁴Associate Professor of Theory Function Chair, Nizhny Novgorod State University after N.I. Lobachevsky, Nizhny Novgorod; olga-pochinka@yandex.ru.

УДК 519.22

О нестандартных методах оценивания в моделях авторегрессии в неустойчивых случаях

© А. Н. Старцев¹, Т. С. Мирзаев²

Аннотация. В докладе предлагаются оценки параметров авторегрессии, отличные от оценок наименьших квадратов. Оценки наименьших квадратов в неустойчивых (критических) случаях, т.е. когда корни характеристического уравнения лежат на единичной окружности, имеют, как правило, сложное предельное распределение. Предлагаемые же нестандартные оценки в большинстве критических случаев имеют более простое предельное распределение.

Ключевые слова: обыкновенная авторегрессии первого порядка, одновременная авторегрессия первого порядка, пространственная (spatial) авторегрессия первого порядка, обыкновенная авторегрессия второго порядка, оценка параметров, нестандартный подход, предельные распределения.

1. Введение

В докладе предлагаются нестандартные подходы к построению оценок в различных моделях авторегрессии. Уравнения оценивания строятся с использованием рекуррентных связей, задающих исходный процесс и в каждом из рассматриваемых случаев отдельно. Схожим способом можно строить и классические оценки наименьших квадратов, т.е. не опираясь на метод минимизации соответствующей суммы квадратов по исходным параметрам.

Необходимость построения такого типа оценок связана с тем, что оценки наименьших квадратов в критических случаях имеют сложное предельное распределение, выражающееся, как правило, через функционалы от стандартного винеровского процесса.

С точки зрения приложений именно критические случаи представляют значительный интерес. В связи с этим, например, в случае обыкновенной авторегрессии первого порядка, т.е. когда $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$, было уделено большое внимание вопросу табулирования сложного предельного распределения. Если модели обыкновенной авторегрессии представляют большой интерес для экономистов (прогнозирование урожайности и т.п.), то модели одновременной авторегрессии, т.е. когда $X_t = \alpha X_{t-1} + \beta X_{t+1} + \varepsilon_t$ и модели пространственной авторегрессии, т.е. когда $X_{t,s} = \alpha X_{t-1,s} + \beta X_{t,s-1} + \varepsilon_{t,s}$ представляют интерес в геологии, сельском хозяйстве и в частности при обработке спутниковых изображений поверхности Земли с точки зрения прогноза аномальных явлений. Следует также отметить, что модели пространственной авторегрессии начали интенсивно исследоваться лишь в последние 2 десятилетия. Более подробную историю вопроса, в сравнении с приведенной здесь, по каждой из рассматриваемых моделей можно почерпнуть в соответствующих ссылках на литературные источники.

¹Профессор, филиал Российского Экономического Университета им. Г.В.Плеханова в г. Ташкенте, e-mail: anstartsev@gmail.com.

²Мл. научн. сотр., Институт математики и информационных технологий АНРУз., Ташкент, e-mail: tsmirzaev@mail.ru.

2. Модели одномерной авторегрессии первого порядка.

Рассматривается модель авторегрессии первого порядка

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (2.1)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины (н.о.р.с.в.) с $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 = 1$, X_0 — начальное состояние.

Известная оценка параметра α , полученная по n наблюдениям методом наименьших квадратов имеет вид

$$\hat{\alpha}_n = \frac{\sum_{t=1}^n X_{t-1} X_t}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}. \quad (2.2)$$

Если $\{\varepsilon_i\}$ нормально распределены, то оценка (2.2) совпадает с оценкой максимального правдоподобия.

Сложная структура оценка $\hat{\alpha}_n$ затрудняет нахождение предельного распределения даже в случае нормально распределенных шумов $\{\varepsilon_i\}$. Известно (см [1], [2]), что $\sqrt{n}(\hat{\alpha}_n - \alpha)$ имеет нормальное предельное распределение при $\alpha \in (-1, 1)$, а для $|\alpha| \geq 1$ предельное распределение является сложным и более того при $|\alpha| > 1$ оно становится зависящим от распределения шумов $\{\varepsilon_i\}$. Например, при $\alpha = 1$ имеет место утверждение (см [2], [3]): при $n \rightarrow \infty$

$$n(\hat{\alpha}_n - 1) \Rightarrow \frac{1}{2}(w^2(1) - 1) \Big/ \int_0^1 w^2(t) dt,$$

где $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, а символ \Rightarrow означает слабую сходимость соответствующих распределений.

В работе [4] была предложена другая, более простая по структуре, оценка параметра α . Простое суммирование (2.1) по t от k до n приводит к следующей оценке

$$\alpha_{nk}^* = \frac{X_k + \dots + X_n}{X_{k-1} + \dots + X_{n-1}} = \alpha + \frac{\varepsilon_k + \dots + \varepsilon_n}{X_{k-1} + \dots + X_{n-1}}. \quad (2.3)$$

Показано, что при $n \rightarrow \infty$

$$P(n\alpha(c)(\alpha_{n,k}^* - 1) < x) \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctg \left[(x - \rho) / \sqrt{1 - \rho^2} \right],$$

где $c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k}{n} < 1$, $\alpha(c) = \sqrt{(1-c)(1+2c)}/3$, $\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{3(1-c)}{1+2c} \right)^{1/2}$.

Если же $c = 1$, то

$$P\left(\sqrt{k(n-k)}(\alpha_{n,k}^* - 1) < x\right) \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{1}{1+u^2} du.$$

Заметим, что в случае $\alpha = -1$ какие-либо результаты отсутствуют. Принцип инвариантности, использованный при исследовании оценки (2.2) в работе [2], при $\alpha = -1$ результата не даёт, а что касается оценки (2.3), то она в этом случае является несостоятельной.

В настоящей работе предлагается несколько другая оценка, имеющая в случае $\alpha = -1$ предельное распределение, аналогичное приведенному выше.

Для $\alpha = -1$ уравнение оценивания составим путем суммирования соотношения (2.1) по t от k до $2n$, предварительно умноженного на $(-1)^{t-1}$

$$\sum_{t=k}^{2n} (-1)^{t-1} X_t = \alpha \sum_{t=k}^{2n} (-1)^{t-1} X_{t-1} + \sum_{t=k}^{2n} (-1)^{t-1} \varepsilon_t$$

или в сокращенном виде

$$\bar{X}_{2n,k} = \alpha \bar{X}_{2n-1,k} + E_{2n,k}. \tag{2.4}$$

Решая уравнение (2.4) без учёта $E_{2n,k}$, получим оценку

$$\alpha_{2n,k}^* = \bar{X}_{2n,k} / \bar{X}_{2n-1,k}.$$

Теперь из (2.4) найдем отклонение

$$\alpha_{2n,k}^* - \alpha = \frac{E_{2n,k}}{\bar{X}_{2n-1,k}}. \tag{2.5}$$

Т е о р е м а 2.1. Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — н. о. р. с. в. с $E(\varepsilon_1) = 0$, $E(\varepsilon_1^2) = 1$ и $X_0 = 0$, то при $n \rightarrow \infty$ в случае $\alpha = -1$

$$P(n\alpha(c)(\alpha_{2n,k}^* - \alpha) < x) \Rightarrow \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{du}{u^2 - 2\rho u + 1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x - \rho}{\sqrt{1-\rho^2}},$$

где $c = \lim(k/n)$, $\alpha(c) = \sqrt{2(2-c)(1+c)}/3$, $\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{3(2-c)}{2(1+c)} \right)^{1/2}$.

С л е д с т в и е 2.1. Если $k \rightarrow \infty$ и $n \rightarrow \infty$ так, что $c = 2$, то

$$P\left(\sqrt{(k-1)(2n-k)}(\alpha_{2n,k}^* - \alpha) < x\right) \Rightarrow \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{du}{1+u^2}.$$

3. Модели одномерной одновременной авторегрессии первого порядка с одним параметром.

Рассматривается следующая модель одновременной авторегрессии

$$X_k^{(n)} = \begin{cases} \alpha(X_{k-1}^{(n)} + X_{k+1}^{(n)}) + \varepsilon_k, & k = 1, 2, \dots, n-1, \\ X_0^{(n)}; \quad X_n^{(n)}, & \text{заданные с.в.}, \end{cases} \tag{3.1}$$

где α — неизвестный параметр, $\{\varepsilon_k, k = 1, 2, \dots, n-1\}$ — независимые случайные величины с нулевым средним и дисперсией равной единице.

Процесс (3.1) является устойчивым в случае, когда $|\alpha| < 1/2$, неустойчивым при $|\alpha| = 1/2$ и относится к взрывному типу при $|\alpha| > 1/2$.

Традиционная оценка параметра в модели (3.1) строится по методу наименьших квадратов. Эта оценка имеет достаточно сложную структуру и в неустойчивом случае имеет предельное распределение, выражающееся через функционалы от винеровского процесса. Целью работы авторов [5] было получение асимптотического распределения оценки

наименьших квадратов $\hat{\alpha}_n$ параметра α по наблюдениям, $\{X_k^{(n)}, k = 1, 2, \dots, n-1\}$, которая имеет вид:

$$\hat{\alpha}_n = \left(\sum_{k=1}^{n-1} X_k^{(n)} (X_{k-1}^{(n)} + X_{k+1}^{(n)}) \right) / \left(\sum_{k=1}^{n-1} (X_{k-1}^{(n)} + X_{k+1}^{(n)})^2 \right).$$

Основой для получения предельного распределения оценки $\hat{\alpha}_n$ является следующее представление $X_k^{(n)}$ через $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$.

Т е о р е м а 3.1. *Если $\alpha = \pm 1/2$, то*

$$\begin{aligned} X_k^{(n)} &= (\pm 1)^k \left(1 - \frac{k}{n} \right) X_0^{(n)} + (\pm 1)^k \frac{k}{n} X_n^{(n)} + \\ &+ 2 \left(1 - \frac{k}{n} \right) \sum_{l=1}^{k-1} (\pm 1)^{k+l} l \varepsilon_l + 2 \frac{k}{n} \sum_{l=k}^{n-1} (\pm 1)^{k+l} (n-l) \varepsilon_l. \end{aligned} \quad (3.2)$$

При получении предельного распределения для простоты предполагается, что $X_0^{(n)} = X_n^{(n)} = 0$.

Т е о р е м а 3.2. *Если $\{\varepsilon_k, k \in N\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $E\varepsilon_1 = 0$, $E(\varepsilon_1)^2 = 1$ и $E(\varepsilon_1)^8 < \infty$, то в случае $\alpha = 1/2$ при $n \rightarrow \infty$*

$$n^2 (\hat{\alpha}_n - \alpha) \Rightarrow \frac{\int_0^1 \chi_t dw_t}{2 \int_0^1 (\chi_t)^2 dt},$$

где $(w_t)_{t \in [0,1]}$ – стандартный винеровский процесс и

$$\chi_t = 2(1-t) \int_0^t s dw_s + 2t \int_t^1 (1-s) dw_s, \quad t \in [0, 1].$$

Следует отметить, что в случае $\alpha = -1/2$ какой-либо результат в работе [5] отсутствует.

В настоящей работе предлагаются оценки более простой структуры, имеющие более простое предельное распределение в неустойчивом случае и в том числе при $\alpha = -1/2$, причем в случаях $\alpha = 1/2$ и $\alpha = -1/2$ оценки строятся по-разному.

В случае $\alpha = 1/2$ уравнение оценивания составим путем суммирования (3.1) по k от 1 до $n-1$

$$\sum_{k=1}^{n-1} X_k^{(n)} = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} (X_{k-1}^{(n)} + X_{k+1}^{(n)}) + \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k$$

или в сокращенном виде

$$X_n = \alpha Y_n + Z_n. \quad (3.3)$$

Решая уравнение (3.3) без учёта Z_n , получим оценку

$$\alpha_n^* = X_n / Y_n.$$

Теперь из (3.3) найдем отклонение

$$\alpha_n^* - \alpha = \frac{Z_n}{Y_n}. \tag{3.4}$$

В случае $\alpha = -1/2$ уравнение оценивания составим путем суммирования соотношения (3.1) по k от 1 до $n-1$, предварительно умноженного на $(-1)^k$

$$\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k X_k^{(n)} = \alpha \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k (X_{k-1}^{(n)} + X_{k+1}^{(n)}) + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \varepsilon_k$$

или в сокращенном виде

$$\tilde{X}_n = \alpha \tilde{Y}_n + \tilde{Z}_n. \tag{3.5}$$

Решая уравнение (3.5) без учёта \tilde{Z}_n , получим оценку $\tilde{\alpha}_n = \tilde{X}_n / \tilde{Y}_n$ и её отклонение

$$\tilde{\alpha}_n - \alpha = \frac{\tilde{Z}_n}{\tilde{Y}_n}. \tag{3.6}$$

Для простоты мы также предполагаем, что $X_0^{(n)} = X_n^{(n)} = 0$ и тогда для построенных оценок имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 3.3. Пусть $\{\varepsilon_k, k = 1, 2, \dots, n - 1\}$ - н.о.р.с.в. с $E(\varepsilon_k) = 0$ и $E(\varepsilon_k)^2 = 1$.

1. Если $\alpha = 1/2$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma n^2 (\alpha_n^* - \alpha) \Rightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2};$$

2. Если $\alpha = -1/2$, то при $n \rightarrow \infty$

$$\sigma n^2 (\tilde{\alpha}_n - \alpha) \Rightarrow -\frac{\xi_1}{\xi_2},$$

где $\sigma^2 = 2/15$, а (ξ_1, ξ_2) - нормальный случайный вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{5/24} \\ \sqrt{5/24} & 1 \end{pmatrix}$.

Отметим, что в сформулированной теореме предельное распределение оценки α_n^* существенно проще чем в теореме 3.2 и при этом существенно ослаблены моментные ограничения на случайные величины $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$, а результат в случае $\alpha = -1/2$ аналогов не имеет.

4. Модели пространственной авторегрессии первого порядка с одним параметром.

Рассматривается следующая модель авторегрессии на целочисленной решетке плоскости Z^2

$$X_{k,l} = \begin{cases} \alpha(X_{k-1,l} + X_{k,l-1}) + \varepsilon_{k,l}, & \text{если } k, l \geq 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{4.1}$$

где $\{\varepsilon_{k,l} : (k, l) \in Z, k, l \geq 1\}$ - н.с.в.

с $E(\varepsilon_{k,l}) = 0, E(\varepsilon_{k,l}^2) = 1$.

Модели пространственной авторегрессии стали изучаться сравнительно недавно и они находят применение в различных областях таких, как география, геология, биология, сельское хозяйство, а также при анализе спутниковых изображений поверхности Земли. Дискуссию по этим применениям см. в работе [6].

Процессы вида (4.1) являются устойчивыми (асимптотически стационарными) в случае, когда $|\alpha| < 1/2$, неустойчивыми (критическими) при $|\alpha| = 1/2$ и относятся к взрывному типу при $|\alpha| > 1/2$. Такие процессы, определенные на одномерной решетке Z^1 ведут себя примерно также, но в роли критических значений выступают $\alpha = \pm 1$.

Для традиционной оценки наименьших квадратов $\hat{\alpha}_{m,n}$, построенной по наблюдениям из $R_{m,n} = \{X_{k,l} : 1 \leq k \leq m, 1 \leq l \leq n\}$ в работе [7] была доказана её асимптотическая нормальность при $m, n \rightarrow \infty$ как в устойчивом, так и в критическом случаях в предположении, что $E(\varepsilon_{k,l}^4)$ равномерно ограничены по $k, l \geq 1$.

В данной работе предлагается оценка более простой структуры и использующая только часть наблюдений, расположенных вдоль диагонали в прямоугольнике $R_{m,n}$. Такой подход с существенным сокращением числа наблюдений является актуальным в задачах геологии и некоторых других областях применения моделей пространственной авторегрессии.

Пусть для простоты $m = n$. Оценку будем строить основываясь на наблюдениях, расположенных вдоль диагонали квадрата $R_{n,n} = \{X_{k,l} : 1 \leq k \leq n, 1 \leq l \leq n\}$. В соответствии с (4.1) эти наблюдения удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$X_{k,k} = \begin{cases} \alpha(X_{k-1,k} + X_{k,k-1}) + \varepsilon_{k,k}, & \text{если } k \geq 1 \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \quad (4.2)$$

Суммируя (4.2) по k от 1 до n , получим уравнение оценивания

$$\sum_{k=1}^n X_{k,k} = \alpha \sum_{k=1}^n (X_{k-1,k} + X_{k,k-1}) + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{k,k}.$$

Разделив обе части полученного уравнения на коэффициент при α , получим

$$\alpha_n^* - \alpha = Z_n/Y_n, \quad (4.3)$$

где $Z_n = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{k,k}$, $Y_n = \sum_{k=1}^n (X_{k-1,k} + X_{k,k-1})$, $\alpha_n^* = Z_n/Y_n$ - предлагаемая оценка параметра α , а $X_n = \sum_{k=1}^n X_{k,k}$.

Для построенной оценки имеет место следующее утверждение.

Т е о р е м а 4.1. Если $\{\varepsilon_{i,j} : i, j \geq 1\}$ - н.о.р.с.в. с $E(\varepsilon_{i,j}) = 0$ и $E(\varepsilon_{i,j})^2 = 1$, то при $n \rightarrow \infty$ в критическом случае ($\alpha = \pm 1/2$)

$$2\sigma^{-1}n^{3/4}(\alpha_n^* - \alpha) \Rightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2} \text{sign}\alpha,$$

где $\sigma^2 = \frac{16}{15\sqrt{\pi}}(7 + 8\sqrt{2})$, а ξ_1 и ξ_2 - независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение.

5. Модели одномерной авторегрессии второго порядка.

Наблюдается процесс авторегрессии второго порядка

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + \varepsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1)$$

где a_1, a_2 — неизвестные параметры, $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ — «шумы», образующие последовательность независимых случайных величин с нулевым средним и конечной дисперсией $\sigma^2 > 0$. Для простоты в дальнейшем будем предполагать, что $y_{-1} = y_0 = 0$.

Если ввести оператор сдвига $By_t = y_{t-1}$, то процесс авторегрессии (5.1) можно записать в виде

$$\Phi(B)y_t = \varepsilon_t,$$

где $\Phi(B) = 1 - a_1B - a_2B^2$.

Отсюда следует, что выражение y_t через $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_t$ связано с обращением оператора $\Phi(B)$. В связи с этим квадратичная функция

$$\Phi(z) = 1 - a_1z - a_2z^2$$

носит название характеристического полинома и его свойства во многом определяют поведение процесса авторегрессии.

Если корни характеристического полинома лежат вне единичного круга, то модель (5.1) принято называть асимптотически стационарной и неустойчивой - в противном случае (см., например, [3]). Случай, когда корни лежат на единичной окружности $|z| = 1$, мы будем называть критическим.

Традиционные оценки параметров в модели (5.1) или в более общей модели авторегрессии p -го порядка ($AR(p)$ -модели) строятся по методу наименьших квадратов. Эти оценки имеют достаточно сложную структуру и в связи с этим имеют (в критическом случае) предельные распределения, выражающиеся через функционалы от винеровского процесса.

При получении оценок в [4] для $AR(1)$ -модели, как уже отмечалось выше, были использованы уравнения оценивания (см., например, [8]), построенные с помощью рекуррентных связей (2.1), задающих исходный процесс. Аналогичный подход был применён авторами и для $AR(2)$ -модели (см. [9], [10]).

Поскольку оценки параметров в различных случаях строятся по-разному, то мы будем их рассматривать отдельно.

Случай 1: $\Phi(z) = (1 - z)^2$, т.е. $a_1 = 2, a_2 = -1$ (гипотеза H_1).

Составим два уравнения оценивания путем суммирования соотношения (5.1) по t сначала от 1 до k , а затем от 1 до n :

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^k y_t = a_1 \sum_{t=1}^k y_{t-1} + a_2 \sum_{t=1}^k y_{t-2} + \sum_{t=1}^k \varepsilon_t, \\ \sum_{t=1}^n y_t = a_1 \sum_{t=1}^n y_{t-1} + a_2 \sum_{t=1}^n y_{t-2} + \sum_{t=1}^n \varepsilon_t \end{cases}$$

или в сокращенном виде

$$\begin{cases} Y_k = a_1 Y_{k-1} + a_2 Y_{k-2} + E_k, \\ Y_n = a_1 Y_{n-1} + a_2 Y_{n-2} + E_n. \end{cases} \tag{5.2}$$

Решая систему уравнений (5.2) без учета E_k и E_n , получим оценки

$$\hat{a}_1 = \frac{Y_k Y_{n-2} - Y_n Y_{k-2}}{Y_{k-1} Y_{n-2} - Y_{n-1} Y_{k-2}}, \quad \hat{a}_2 = \frac{Y_{k-1} Y_n - Y_{n-1} Y_k}{Y_{k-1} Y_{n-2} - Y_{n-1} Y_{k-2}}.$$

Теперь из (5.2) найдем отклонения

$$\hat{a}_1 - a_1 = \frac{E_k Y_{n-2} - E_n Y_{k-2}}{Y_{k-1} Y_{n-2} - Y_{n-1} Y_{k-2}}, \quad \hat{a}_2 - a_2 = \frac{E_n Y_{k-1} - E_k Y_{n-1}}{Y_{k-1} Y_{n-2} - Y_{n-1} Y_{k-2}}.$$

Теорема 5.1. Если $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ — н.о.р.с.в. с $E(\varepsilon_1) = 0$ и $E(\varepsilon_1^2) = 1$, то при $n \rightarrow \infty$, $k \rightarrow \infty$, $k = 0(n)$, в условиях гипотезы H_1 , имеем

$$\frac{k}{\sqrt{3}}(\hat{a}_1 - a_1) \Rightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad \frac{k}{\sqrt{3}}(\hat{a}_2 - a_2) \Rightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2},$$

где (ξ_1, ξ_2) — нормальный случайный вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix}$.

Замечание 5.1. Предельный функционал в теореме 4.1 имеет вид $f(x, y) = x/y$ и он разрывен при $y = 0$. Но так как точка разрыва имеет меру нуль относительно двумерного гауссовского распределения или, что то же самое, относительно меры Лебега в R^2 , то требуемое утверждение вытекает из обобщенной функциональной предельной теоремы (см. [11] гл. I, § 5, теорема 5.1).

Случай 2: $\Phi(z) = (1+z)^2$, т.е. $a_1 = -2$, $a_2 = -1$ (гипотеза H_2).

В рассматриваемом случае, исходя из соотношений

$$y_{2t+1} = a_1 y_{2t} + a_2 y_{2t-1} + \varepsilon_{2t+1}, \quad (5.3)$$

$$y_{2t} = a_1 y_{2t-1} + a_2 y_{2t-2} + \varepsilon_{2t}, \quad (5.4)$$

уравнения оценивания будем строить путем суммирования (5.3) по t от 1 до k , а затем (5.4) от 1 до n . Тогда мы получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \bar{Y}_{2k+1} = a_1 \bar{Y}_{2k} + a_2 \bar{Y}_{2k-1} + \bar{E}_{2k+1}, \\ \bar{Y}_{2n} = a_1 \bar{Y}_{2n-1} + a_2 \bar{Y}_{2n-2} + \bar{E}_{2n}, \end{cases} \quad (5.5)$$

где $\bar{Y}_{2m+1} = \sum_{t=1}^m y_{2t+1}$, $\bar{Y}_{2m} = \sum_{t=1}^m y_{2t}$, $\bar{E}_{2m+1} = \sum_{t=1}^m \varepsilon_{2t+1}$, $\bar{E}_{2m} = \sum_{t=1}^m \varepsilon_{2t}$. Теперь, поступая так же, как и в случае 1, из (5.5) получим

$$\hat{a}_1 - a_1 = (\bar{E}_{2k+1} \bar{Y}_{2n-2} - \bar{E}_{2n} \bar{Y}_{2k-1}) / (\bar{Y}_{2k} \bar{Y}_{2n-2} - \bar{Y}_{2n-1} \bar{Y}_{2k-1}), \quad (5.6)$$

$$\hat{a}_2 - a_2 = (\bar{E}_{2n} \bar{Y}_{2k} - \bar{E}_{2k+1} \bar{Y}_{2n-1}) / (\bar{Y}_{2k} \bar{Y}_{2n-2} - \bar{Y}_{2n-1} \bar{Y}_{2k-1}). \quad (5.7)$$

Теорема 5.2. В тех же предположениях относительно $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, что и в теореме 4.1, в условиях гипотезы H_2 имеем при $k \rightarrow \infty$, $n \rightarrow \infty$ и $k = 0(n)$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}k(\hat{a}_1 - a_1) \Rightarrow -\frac{\xi_1}{\xi_2}, \quad \sqrt{\frac{2}{3}}k(\hat{a}_2 - a_2) \Rightarrow \frac{\xi_1}{\xi_2},$$

где (ξ_1, ξ_2) — гауссовский вектор с нулевым средним и ковариационной матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3/8} \\ \sqrt{3/8} & 1 \end{pmatrix}$.

Случай 3: $\Phi(z) = 1 - z^2$, т.е. $a_1 = 0$, $a_2 = 1$ (гипотеза H_3).

Здесь используем тот же метод построения оценок, что и в случае 2, но при $k = n$. Тогда вместо (5.6) и (5.7) получим

$$a_1^* - a_1 = \frac{\bar{E}_{2n+1}\bar{Y}_{2n-2} - \bar{E}_{2n}\bar{Y}_{2n-1}}{\bar{Y}_{2n-2}^2 - \bar{Y}_{2n-1}^2 - y_{2n}\bar{Y}_{2n-1}}, \quad a_2^* - a_2 = \frac{\bar{E}_{2n}\bar{Y}_{2n} - \bar{E}_{2n+1}\bar{Y}_{2n-1}}{\bar{Y}_{2n-2}^2 - \bar{Y}_{2n-1}^2 - y_{2n}\bar{Y}_{2n-1}}.$$

Однако, в рассматриваемом случае (при гипотезе H_3)

$$y_{2k-1} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{2k-1}, \quad y_{2k} = \varepsilon_2 + \varepsilon_4 + \dots + \varepsilon_{2k},$$

$$\bar{Y}_{2n-1} = n\varepsilon_1 + (n-1)\varepsilon_3 + \dots + \varepsilon_{2n-1},$$

$\bar{Y}_{2n} = n\varepsilon_2 + (n-1)\varepsilon_4 + \dots + \varepsilon_{2n}$. После соответствующих нормировок получим при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n}{\sqrt{3}}(a_1^* - a_1) \Rightarrow \frac{\xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4}{\xi_2^2 - \xi_4^2}, \quad \frac{n}{\sqrt{3}}(a_2^* - a_2) \Rightarrow \frac{\xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_4}{\xi_2^2 - \xi_4^2}, \quad (5.8)$$

где $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ – гауссовский вектор с нулевым средним и матрицей ковариаций

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 1 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & 1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Соотношения (5.8) и дают основное утверждение в рассматриваемом случае ($a_1 = 0$; $a_2 = 1$). Более детальное обоснование осуществляется по аналогии со случаем 1.

Случай 4: $\Phi(z) = 1 + z^2$, т.е. $a_1 = 0$, $a_2 = -1$ (гипотеза H_4).

В данном случае оценки строятся, исходя из (5.3) и (5.4), которые предварительно умножаются на $(-1)^{t+1}$ и затем суммируются по t от 1 до n .

Обозначим

$$\hat{Y}_{2n-1} = \sum_{t=1}^n (-1)^{t+1} y_{2t-1}, \quad \hat{Y}_{2n} = \sum_{t=1}^n (-1)^{t+1} y_{2t},$$

$$\hat{E}_{2n-1} = \sum_{t=1}^n (-1)^{t+1} \varepsilon_{2t-1}, \quad \hat{E}_{2n} = \sum_{t=1}^n (-1)^{t+1} \varepsilon_{2t}.$$

Тогда отклонения оценок от оцениваемых параметров запишутся так

$$a_1^{**} - a_1 = \frac{\hat{E}_{2n+1}\hat{Y}_{2n-2} - \hat{E}_{2n}\hat{Y}_{2n-1}}{\hat{Y}_{2n-2}^2 - \hat{Y}_{2n-1}^2 + y_{2n}\hat{Y}_{2n-2}}, \quad a_2^{**} - a_2 = \frac{\hat{E}_{2n}\hat{Y}_{2n-2} - \hat{E}_{2n+1}\hat{Y}_{2n-1} + y_{2n}\hat{E}_{2n}}{\hat{Y}_{2n-2}^2 - \hat{Y}_{2n-1}^2 + y_{2n}\hat{Y}_{2n-2}}.$$

Теперь, учитывая, что в условиях гипотезы H_4

$$\hat{Y}_{2n-1} = n\varepsilon_1 - (n-1)\varepsilon_2 + \dots + (-1)^{n+1}\varepsilon_{2n-1}, \quad \hat{Y}_{2n} = n\varepsilon_2 - (n-1)\varepsilon_4 + \dots + (-1)^{n+1}\varepsilon_{2n},$$

по аналогии с предыдущим случаем, получим при $n \rightarrow \infty$

$$\frac{n}{\sqrt{3}}(a_1^{**} - a_1) \Rightarrow \frac{\xi_1\xi_2 - \xi_3\xi_4}{\xi_2^2 - \xi_4^2}, \quad \frac{n}{\sqrt{3}}(a_2^{**} - a_2) \Rightarrow \frac{\xi_2\xi_3 - \xi_1\xi_4}{\xi_2^2 - \xi_4^2}.$$

В рассматриваемом случае $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ – гауссовский вектор с нулевым средним и с той же ковариационной матрицей, что и в (5.9). Для сравнения приведем один результат, относящийся к оценке наименьших квадратов \hat{a} из работы [3]. В предположении, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$ образуют мартингал разности с $E|\varepsilon_1|^{2+\delta} < \infty$, имеет место утверждение (при гипотезе H_4)

$$n \left(\hat{a}_2 - a_2 \right) \Rightarrow \left(2 - w_1^2(1) - w_2^2(1) \right) / \int_0^1 \left(w_1^2(t) + w_2^2(t) \right) dt,$$

где $w_1(t)$ и $w_2(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Anderson T.V. On asymptotic distributions of estimates of parameters of stochastic difference equations// Ann. Math. Statist. -1959. -V.30. -P.676-687.
2. White J.S. The limiting distribution of the serial correlation coefficient in the explosive case// Ann. Math. Statist. -1958. -V.29. -P.1188-1197.
3. Chan N.H., Wei C.Z. Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregression processes.// Annals of Statistics. -1988. -V.16. -№1. -P.367-401.
4. Startsev A.N. A new approach to estimation of an autoregressive parameter// Proc. of Sixth. USSR-Japan Symp., World Scientific. -1991. -P.377-381.
5. Sandor Baran., Gyula Pap. Asymptotic inference for a one-dimensional simultaneous autoregressive model// Metrika DOI 10.1007/s00184-009-0289-5.
6. Basu.S. and Reinsel.G.C. Properties of the spatial unilateral first-order ARMA model// Adv. Appl. Probab. -1993. -V.25. -P.631-648.
7. Sandor Baran, Gyula Pap and Martien C.A. Van Zuijlen. Asymptotic inference for an unstable spatial AR model.// Statistics. -2004. -V.38(6). -P.465-482.
8. Durbin J. Estimation of parameters in time-series regression models// JRSS. -1960. -B22. -№1. -P.139-153.
9. Старцев А.Н., Мирзаев Т.С. О новом подходе к оценке параметров процесса двумерной авторегрессии в критическом случае.// Труды международной научно-практической конференции «Казахстан в новом мире и проблемы национального образования» (Жетысай, 16-18 мая, 2008 г.), Шыькент. -2008. -Т. III. -С.234-236.
10. Старцев А.Н., Мирзаев Т.С. О новом подходе к оценке параметров процесса авторегрессии второго порядка в критическом случае// УзМЖ. -2011. -№1. -С.142-152.
11. Биллингсли П.Сходимость вероятностных мер. – М.: Наука, 1977. – 352 с.

On nonstandard estimation methods in autoregression models in unstable cases.

© A. N. Startsev³, T. S. Mirzaev⁴

Abstract. In the report is suggested some estimates of autoregression parameters that are different in comparison of the least squares estimates (LSE). LSE in the unstable (critical) cases, i.e. when the characteristic equation roots are lain on the unit circle, have, as a rule, compound limit distributions. Suggested by us nonstandard estimates in majority cases have more simple limit distributions.

Key Words: the first order simple autoregression, one-dimensional simultaneous autoregression, spatial autoregression of the first order, simple autoregression of the second order, parameter estimates, nonstandard approach, limit distributions.

³Professor, Branch of Russia Economic University named G.V.Plekhanov in Tashkent, e-mail: anstartsev@gmail.com.

⁴Minor sc. worker, Institute of Mathematics and Information Technologies, Uzbek Academy of Sciences., Tashkent, e-mail: tsmirzaev@mail.ru.

УДК 519.6:517.962

Итерационные процессы для состояний с разрывными коэффициентами и решениями в задачах оптимального управления квазилинейными уравнениями

© Ф.В. Лубышев¹, М.Э. Файрузов², Г.Я. Галеева³

Аннотация. Разработан итерационный процесс для состояний управляемых процессов, описываемых нелинейными уравнениями с разрывными коэффициентами и решением в неоднородных анизотропных средах с итерациями на границе разрыва решения и коэффициентов. Исследован вопрос о сходимости итерационного процесса.

Ключевые слова: итерационный метод, оптимальное управление, эллиптическое уравнение, оператор, разностная аппроксимация.

1. Введение

В данной работе рассматриваются граничные задачи для квазилинейных уравнений эллиптического типа в неоднородных анизотропных средах с разрывными коэффициентами и решением. Подобные задачи для состояний управляемых процессов возникают при математическом моделировании и оптимизации процессов теплопередачи, диффузии, фильтрации, теории упругости и др.

На практике, при математическом моделировании тепловых процессов в сложных конструкциях, возникает следующая характерная ситуация. Среда неоднородная, анизотропная, многослойная, и коэффициенты уравнений, описывающих процесс распределения тепла, являются разрывными функциями. В таких телах (средах) теплопередача между слоями в многослойных средах происходит зачастую за счет контактного теплообмена. При математическом моделировании подобных процессов на контактных границах S_k ставятся, так называемые условия сопряжения. В связи с развитием высокотемпературной теплофизики задачи с граничными условиями сопряжения приобрели первостепенное значение – расчет многослойных теплоизоляционных покрытий в металлургии, авиационной и космической технике, расчет многослойных покрытий головок ракет, элементов преобразователей энергии и т.д. Если тепловой контакт между средами (телами) Ω_1 и Ω_2 , так называемый, – идеальный, то температуры и тепловые потоки на контактирующих поверхностях в обоих телах совпадают. Такая ситуация характерна, например, когда тела Ω_1 и Ω_2 тесно прижаты, например, в спаях. Следует заметить, однако, что такие условия не являются единственно возможными условиями на поверхности S контакта тел Ω_1 и Ω_2 . Возможны и другие модели контакта. В прикладных исследованиях большое внимание заслуживают условия на S , так называемого, неидеального контакта сред. К задаче с условиями сопряжения такого вида приводит, например, задача о моделировании процесса распределения температуры в тонком стержне $0 \leq x \leq l$, имеющем при $x = \xi$, $\xi \in (0, l)$ разрез с теплоизоляционными свойствами. В реальных конструкциях тепловой контакт между соприкасающимися средами, например, деталями обычно нельзя считать

¹ профессор кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; v.lubyshev@mail.ru.

² доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; fairuzovme@mail.ru.

³ доцент кафедры прикладной информатики и численных методов, Башкирский государственный университет, г. Уфа; lara_wood@mail.ru.

идеальным. Такой случай реализуется, например, при недостаточно плотном соприкосновении шероховатых твердых тел. При неидеальном тепловом контакте тепловой поток непрерывен, что является отражением закона сохранения энергии, однако при неидеальном тепловом контакте в условиях сопряжения идеального контакта нарушается равенство температур на S . Если поверхность контакта не является идеальным проводником, то должно учитываться термическое сопротивление контакта (контактное тепловое сопротивление). Температура при переходе границы неидеального контакта S терпит разрыв, пропорциональный тепловому потоку с коэффициентом, равным контактному тепловому сопротивлению.

Различие температур соприкасающихся поверхностей оказывается пропорциональным контактному термическому сопротивлению (обратно пропорционально контактной тепловой проводимости), которая количественно характеризуется коэффициентом θ_k . Так что в случае неидеального теплового контакта условия идеального контакта на контактной границе S заменяются следующими условиями

$$\frac{\partial u_1}{\partial N_S} = \frac{\partial u_2}{\partial N_S} = \theta_k[u] = \theta_k(u_2(x) - u_1(x)), \quad x \in S; \quad (1.1)$$

где $\theta_k > 0$ – коэффициент контактной проводимости (коэффициент контактного теплообмена). Коэффициент контактного теплообмена, связанный с условиями контакта на S , зависит от большого числа факторов. Рассмотрим следующую ситуацию. Пусть между двумя анизотропными телами с коэффициентами теплопроводности $k_\alpha^{(1)}(x)$ и $k_\alpha^{(2)}(x)$ помещена тонкая слабо проводящая прослойка. В этом случае условия контакта могут быть описаны соотношениями (1.1), где величина θ_k пропорциональна коэффициенту теплопроводности тонкой слабо проводящей прослойки. Из условий (1.1) следует, что в случае неидеального контакта равенство тепловых потоков имеет место, т.е. тепловой поток на поверхности контакта S между телами Ω_1 и Ω_2 непрерывен, а температура разрывна (разрыв первого рода по температуре), т.е. появляется пропорциональная тепловым потокам разность между двумя поверхностными температурами. Таким образом, контактирующие тела на поверхности контакта S имеют различную температуру, скачек который пропорционален тепловому потоку с коэффициентом пропорциональности θ_k^{-1} – коэффициентом контактного теплового сопротивления (θ_k – контактная проводимость).

Исследование контактных задач теплообмена является актуальным по сегодняшний день. К числу важных для практики задач следует отнести, например, задачу определения (идентификации) контактных тепловых сопротивлений, характеризующих теплопередачу между соприкасающимися частями конструкций (болтовых и заклепочных соединений, разъемов, шарниров и т.д.). В конструкциях на клеях роль контактного сопротивления играет некоторое эффективное тепловое сопротивление клеевой пленки. Для решения таких задач можно эффективно применять и развивать методы теории оптимального управления для уравнений математической физики, методы теории обратных задач для УМФ.

Рассмотрим для примера двухслойную плоскопараллельную пластинку. Запишем условия сопряжения слоев

$$k_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} = k_2(x) \frac{\partial u_2}{\partial x}, \quad k_1(x) \frac{\partial u_1}{\partial x} = \theta_k[u],$$

где $k_1(x)$ и $k_2(x)$ – коэффициенты теплопроводности слоев, $u_1(x)$ и $u_2(x)$ – температуры слоев, $[u] = u_2(x) - u_1(x)$ – скачок температуры на границе слоев; θ_k^{-1} – тепловое контактное сопротивление. Величина $r_k = \theta_k^{-1}$ может рассматриваться, например, как константа, или, в общем случае, как функция переменных x , u (как функция точки и

температуры) и эта зависимость определяется из решения соответствующей задачи оптимального управления, или из решения обратной задачи теплопроводности по результатам измерения температур в отдельных точках слоев.

Задачи для уравнений математической физики (УМФ) с условиями неидеального контакта часто возникают также при моделировании различных процессов в механике сплошных сред, теории упругости и др. По поводу физической интерпретации задач о сопряжении с условиями неидеального контакта добавим следующее. На практике при математическом моделировании процессов в неоднородных средах довольно часто возникает вопрос о необходимости решения задач УМФ в сложных областях, представляющих собой современные конструкции (сооружения) различного назначения и содержащих тонкие включения с физическими характеристиками, резко отличающимися от основной среды. Например, это могут быть как было отмечено выше слабо теплопроводящие элементы (элементы с теплоизоляционными свойствами), а также, например, при моделировании процессов фильтрации, могут встречаться слабо проницаемые элементы (тонкие слабо проницаемые включения), толщины которых существенно меньше характерных размеров рассматриваемых объектов.

При математическом моделировании фильтрационных процессов (напорной фильтрации), например, при создании в руслах рек гравитационных плотин, расположенных на фильтрующем упругом основании, важно учесть, что в активизации фильтрационных процессов в основании гравитационных плотин имеют, часто встречающиеся в основании плотин, тонкие слабо проницаемые включения: прослойки слабо проницаемых грунтов, цементационные завесы, шпунты. Считая такие включения бесконечно тонкими и слабо проницаемыми их влияние на исследуемый физический процесс можно учесть заданием условий сопряжения на тонких включениях S с помощью соотношений:

$$g(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^- = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^+ = \theta(x)[u], \quad x \in S,$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^\pm = \left(\sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cos(n, \hat{x}_\alpha) \right)^\pm,$$

$$[u] = u_2(x) - u_1(x) = u^+(x) - u^-(x) - \text{скачек функции } u(x) \text{ на } S;$$

где $g(x)$ – заранее неизвестный поток теплоты или вещества через элементарную площадку; $\theta(x) \geq \theta_0 > 0$ – заданная функция, $S = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$ – тонкое включение, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$, Ω_1 и Ω_2 – некоторые области.

Численная решение таких задач, описывающих состояния управляемых процессов представляет значительные трудности и прежде всего в связи с необходимостью дискретизации указанных областей.

Важнейшей проблемой является разработка высокоточных экономичных алгоритмов дискретизации таких задач для состояний с разрывными коэффициентами и решениями, в том числе разработка экономичных, сходящихся итерационных методов их реализации.

2. Постановки задач для состояния процессов управления с разрывными коэффициентами и решениями. Задача А

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная открытая связная область пространства \mathbb{R}^2 с Липшицевой границей $\partial\Omega$. И пусть Ω разделена некоторой достаточно гладкой ориентированной кривой S (внутренней границей S) на две части (на подобласти) $\Omega_1 = \Omega^-$ и $\Omega_2 = \Omega^+$ (левую

и правую, т.е. Ω^- – слева от S и Ω^+ – справа от S) с границами $\partial\Omega_1$ и $\partial\Omega_2$ соответственно, удовлетворяющими тому же условию Липшица. На кривой S выбрана ориентация и в соответствии с ней будем говорить о S^+ – ”положительной” стороне поверхности S и S^- – ”отрицательной” стороне поверхности S . Предполагается (для формулировки условий на поверхности S , см. ниже), что к поверхности S со стороны S^+ примыкает область $\Omega_2 = \Omega^+$, а со стороны S^- примыкает область $\Omega_1 = \Omega^-$. Таким образом, Ω есть объединение областей Ω_1 , Ω_2 и внутренних точек контактной границы \bar{S} : $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, а $\partial\Omega$ – внешняя граница области Ω (в отличие от S – внутренней границы области Ω). Очевидно, что $\partial\Omega = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus S$. Будем считать, что $\partial\Omega_1 = \bar{\Gamma}_1 \cup S$, $\partial\Omega_2 = \bar{\Gamma}_2 \cup S$, где части (куски) Γ_k , $k = 1, 2$ – открытые непустые подмножества в $\partial\Omega_k$ ($\bar{\Gamma}_k$ – оставшаяся часть $\partial\Omega_k$ после вычета S , $k = 1, 2$, т.е. $\bar{\Gamma}_k$ – границы областей Ω_k без S), $\bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega \equiv \Gamma$.

Через n_α , $\alpha = 1, 2$ будем обозначать внешнюю нормаль к границе $\partial\Omega_\alpha$ области $\partial\Omega_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Пусть, далее $n = n(x)$ – единичная нормаль к S в какой-либо ее точке $x \in S$, ориентированная, например, таким образом, что нормаль n является внешней нормалью к S по отношению к области Ω_1 , т.е. нормаль n направлена внутрь области Ω_2 ($n = n(x)$ – единичный вектор нормали к S , согласованный с выбранной ориентацией на S).

Заметим, что поскольку, векторы $n_1(x)$ и $n_2(x)$, $x \in S$ противоположно ориентированы на S , то $n(x) = n_1(x) = -n_2(x)$ на S .

Заметим также, так как границы $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ областей Ω и Ω_k , $k = 1, 2$ по предположению Липшицевы, то в каждой точке $x \in \partial\Omega$ и $x \in \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ (за исключением, возможно, конечного числа точек) определены единичные векторы внешних нормалей, например, нормаль $n = (n_{x_1}, n_{x_2})$, где n_{x_1} и n_{x_2} – координаты вектора n . Так что вектор внешней нормали существует почти везде на $\partial\Omega$ и $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$. В дальнейшем на кусках $\bar{\Gamma}_k$ границ $\partial\Omega_k$ положительной меры $\text{mes}\Omega_k > 0$, $k = 1, 2$ будут заданы граничные условия определенного типа.

Рассмотрим следующую краевую задачу в области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup S$, состоящей из двух частей (подобластей) Ω_1 и Ω_2 , разбитой на две части внутренней границей S .

Задача А. Требуется найти функции $u(x)$ вида: $u(x) = u_1(x)$, $x \in \bar{\Omega}_1 = \bar{\Omega}_-$, $u(x) = u_2(x)$, $x \in \bar{\Omega}_2 = \bar{\Omega}_+$, где функция $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) Ищется функция $u_1(x)$, определенная на $\bar{\Omega}_1 = \Omega_1 \cup \partial\Omega_1$, удовлетворяющая в Ω_1 уравнению

$$L_1 u_1 = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(1)}(x) \frac{\partial u_1}{\partial x_\alpha} \right) + d_1(x) q_1(u_1) = f_1(x), \quad \text{в } \Omega_1, \quad (2.1)$$

а на границе $\partial\Omega_1 \setminus S = \bar{\Gamma}_1$ условию

$$u_1(x) = 0, \quad x \in \bar{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1 \setminus S; \quad (2.2)$$

2) Ищется функция $u_2(x)$, определенная на $\bar{\Omega}_2 = \Omega_2 \cup \partial\Omega_2$, удовлетворяющая в Ω_2 уравнению

$$L_2 u_2 = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(2)}(x) \frac{\partial u_2}{\partial x_\alpha} \right) + d_2(x) q_2(u_2) = f_2(x), \quad \text{в } \Omega_2, \quad (2.3)$$

а на границе $\partial\Omega_2 \setminus S = \bar{\Gamma}_2$ условию

$$u_2(x) = 0, \quad x \in \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2 \setminus S. \quad (2.4)$$

Здесь $k_\alpha^{(1)}(x)$, $k_\alpha^{(2)}(x)$, $d_\alpha(x)$, $f_\alpha(x)$, $q_\alpha(\xi)$, $\alpha = 1, 2$ – некоторые заданные функции, определенные в соответствующих областях Ω_α по разному, причем

$$k_\alpha^{(1)}(x) \neq k_\alpha^{(2)}(x), \quad d_1(x) \neq d_2(x), \quad f_1(x) \neq f_2(x), \quad q_1(\xi) \neq q_2(\xi), \quad x \in S; \quad (2.5)$$

эти функции наделены в областях Ω_α некоторыми условиями гладкости (см. далее).

3) Искомые функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$ удовлетворяют еще дополнительным условиям на S , позволяющим "сшить" решения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ вдоль S областей Ω_1 и Ω_2 :

$$g(x) = \frac{\partial u_1}{\partial N_S} = \frac{\partial u_2}{\partial N_S} = \theta(x)(u_2 - u_1), \quad x \in S. \quad (2.6)$$

Здесь

$$\frac{\partial u_p}{\partial N_S} = \sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha^{(p)}(x) \frac{\partial u_p}{\partial x_\alpha} \cos(n, \hat{x}_\alpha), \quad p = 1, 2. \quad (2.7)$$

– кономальная производная, а $\theta(x) \geq \theta_0 > 0$; n – нормаль к S , направленная внутрь области Ω_2 (n – внешняя нормаль к границе области Ω_1).

Поставленную задачу (2.1)-(2.7) назовем задачей А.

Задачу А можно переписать в удобном (компактном) виде. Рассмотрим функцию вида

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \bar{\Omega}_1, \\ u_2(x), & x \in \bar{\Omega}_2; \end{cases}$$

$$k_\alpha(x), d(x), f(x), q(\xi) = \begin{cases} k_\alpha^{(1)}(x), d_1(x), f_1(x), q_1(\xi), & x \in \bar{\Omega}_1, \\ k_\alpha^{(2)}(x), d_2(x), f_2(x), q_2(\xi), & x \in \bar{\Omega}_2, \end{cases} \quad \alpha = 1, 2,$$

где $k_\alpha^{(k)}(x)$, $\alpha = 1, 2$, $d_k(x)$, $f_k(x)$, $q_k(\xi)$ достаточно гладкие в соответствующих областях Ω_1 и Ω_2 функции, задаваемые в Ω_k по разному. Здесь u_k , $k = 1, 2$ – сужение функции $u(x)$ на Ω_k , $k = 1, 2$.

Тогда поставленную выше задачу А с разрывным решением на S (задачу о сопряжении с разрывным решением) можно сформулировать в следующем, более компактном виде.

Требуется найти функцию $u(x)$, определенную на $\bar{\Omega}$, удовлетворяющую в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 уравнению

$$Lu(x) \equiv - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right) + d(x)q(u) = f(x), \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2,$$

граничным условиям на внешней границе $\partial\Omega$

$$u(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 = (\partial\Omega_1 \setminus S) \cup (\partial\Omega_2 \setminus S),$$

и условиям сопряжения на внутренней границе S (на границе раздела областей Ω_1 и Ω_2)

$$g(x) = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^- = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^+ = \theta(x)[u], \quad x \in S,$$

где

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^\pm = \left(\sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cos(n, \hat{x}_\alpha) \right)^\pm,$$

$$[u] = u_2 - u_1 = u^+ - u^- \text{ – скачек функции } u(x) \text{ на } S;$$

Знаки "+", "-" обозначают, что значения соответствующих функций берутся по различные стороны границы раздела S областей Ω_1 и Ω_2 , т.е. знак "+" обозначает, что значение функции берется на S в точке $x \in \bar{\Omega}_2$, а "-" – в точке $x \in \bar{\Omega}_1$.

Квадратные скобки обозначают разность величины в них заключающейся, взятой на правом и левом "берегах" контактной границы S . Так что индекс "+" обозначает значение величины с правого "берега" контактной границы. Если быть более точным, то $[u(x)]|_S$ – символ, обозначающий разность между u^+ и u^- – правым и левым предельными значениями функции $u(x)$ на кривой S , вычисленными при подходе к точке $x \in S$ со стороны области Ω_2 и со стороны области Ω_1 :

$$[u(x)]|_S \equiv u(x)|_{x \rightarrow S-0} - u(x)|_{x \rightarrow S+0},$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial N_S} \right] |_S \equiv \frac{\partial u}{\partial N_S} \Big|_{x \rightarrow S-0} - \frac{\partial u}{\partial N_S} \Big|_{x \rightarrow S+0}.$$

То есть это обычное обозначение для скачка функции на S , где $u^+(x)$, $x \in S$ означает значение (след) функции $u(x)$ в точке x на границе S со стороны Ω_2 , а $u^-(x)$, $x \in S$ – значение (след) функции $u(x)$ в точке x на S со стороны Ω_1 (предельные значения $u(x)$ на кривой S с разных сторон от S : $[u] \equiv u^+(x) - u^-(x)$, $x \in S$, где $u^\pm(x) = \lim_{x' \rightarrow x \in S} u(x')$, $x' \in \Omega^\pm$).

Так как, по предположению, границы $\partial\Omega_k$ областей Ω_k Липшицевы, то оператор сужения $u^\pm \rightarrow u^\pm|_S$ из $W_2^1(\Omega^\pm)$ в $L_2(S)$ непрерывен; здесь $\Omega^+ = \Omega_2$, $\Omega^- = \Omega_1$.

Далее, так как коэффициенты $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $d(x)$, правая часть $f(x)$ задаются, вообще говоря, по разному в Ω_1 и Ω_2 , то эти функции, вообще говоря, претерпевают разрыв первого рода в области Ω на кривой $S \subset \bar{\Omega}$.

Разрывность коэффициента $k_\alpha(x)$ уравнения соответствует тому, что среда (область Ω) является неоднородной и составлена из двух (в нашем случае) разнородных по своим физическим характеристикам материалов (область Ω состоит из частей с разными свойствами).

Так как функции $k_\alpha(x)$, $\alpha = 1, 2$, $d(x)$, $f(x)$ (по предположению) имеют на S разрыв первого рода, то это означает, что

$$[k_\alpha(x)]|_S = k_\alpha^{(2)}(x)|_S - k_\alpha^{(1)}(x)|_S = k_\alpha^+(x) - k_\alpha^-(x) \neq 0, \quad (2.8)$$

$$[d(x)]|_S = d_2(x)|_S - d_1(x)|_S = d^+(x) - d^-(x) \neq 0,$$

$$[f(x)]|_S = f_2(x)|_S - f_1(x)|_S = f^+(x) - f^-(x) \neq 0.$$

Из условия (2.8) и условий (2.5), (2.6)

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^- = \frac{\partial u_1}{\partial N_S} = \frac{\partial u_2}{\partial N_S} = \left(\frac{\partial u}{\partial N_S} \right)^+, \quad x \in S, \quad (2.9)$$

следует, что (2.8) предписывает скачек первых производных при переходе через S , т.е. первые производные решения $u(x)$ имеют разрывы первого рода на S . В то же время, в силу (2.9),

$$\left[\frac{\partial u}{\partial N_S} \right] = 0, \quad x \in S - \text{скачек функции } \frac{\partial u}{\partial N_S} \text{ на } S \text{ равен нулю,}$$

то есть условие (2.9) – требование непрерывности конормальной производной (непрерывность потока).

Заметим, что если бы наряду с (2.9) было задано условие

$$[u] = 0, \quad x \in S - \text{ скачек функции на } S \text{ равен нулю}$$

(вместо условия (2.6)), то это условие означало бы, что оно требует непрерывности решения задачи на кривой S . Так что разрыв в коэффициентах $k_\alpha(x)$ в уравнении в этом случае означал бы, что решение $u(x)$ задачи имеет слабый разрыв на кривой S (т.е. функция $u(x)$ непрерывна на S , а ее первые производные имеют разрывы первого рода на контактной кривой S).

Краевая задача А с разрывными коэффициентами и решением, может описывать, например, состояние управляемого процесса, когда в роли управления выступает, например, правая часть $f_1(x) \equiv g(x) \in U$ уравнения (2.1), причем в роли множества допустимых управлений U выступает

$$U = \{f_1(x) = g(x) \in L_2(\Omega_1) : \xi_1 \leq g(x) \leq \bar{\xi}_1 \text{ п.в. на } \Omega_1\},$$

где ξ_1 и ξ_2 – заданные константы, п.в. – почти всюду, а в качестве функционала цели $g \rightarrow J(g)$, $g \in U$ выступает, например, следующий функционал

$$J(f_1) = J(g) = \int_{\Omega_2} |u(x, g) - u_0(x)|^2 d\Omega_2.$$

Здесь $u_0(x) \in L_2(\Omega_2)$ – заданная функция, а $u(x, g)$ – решение задачи А, отвечающее допустимому управлению.

Введем в рассмотрение пространство $H(\Omega_0)$, $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \Omega_0$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$H(\Omega_0) = \{u = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1) \times W_2^1(\Omega_2)\},$$

то есть

$$\begin{cases} u(x) \in H(\Omega_0) \Leftrightarrow u_1 \equiv u|_{\Omega_1} \in W_2^1(\Omega_1), \\ u(x) \in H(\Omega_0) \Leftrightarrow u_2 \equiv u|_{\Omega_2} \in W_2^1(\Omega_2). \end{cases}$$

Здесь $W_2^1(\Omega_k)$, $k = 1, 2$ – Соболевское пространство функций, заданных в подобластях Ω_k , $k = 1, 2$ с границей $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ и нормой [1]-[3]

$$\|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)} = \int_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 + u_k^2 \right] d\Omega_k, \quad k = 1, 2.$$

Снабженное скалярным произведением

$$(u, v)_H = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} (\text{grad} u_k \cdot \text{grad} v_k + u_k v_k) d\Omega_k = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \left[\sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} + u_k v_k \right] d\Omega_k,$$

$$u(x), v(x) = \begin{cases} u_1(x), v_1(x), & x \in \Omega_1, \\ u_2(x), v_2(x), & x \in \Omega_2, \end{cases}$$

и нормой

$$\|u\|_H^2 = \|u_1\|_{W_2^1(\Omega_1)}^2 + \|u_2\|_{W_2^1(\Omega_2)}^2 = \sum_{k=1}^2 \|u_k\|_{W_2^1(\Omega_k)}^2,$$

$H = H(\Omega_0)$ является гильбертовым пространством.

В гильбертовом пространстве $H(\Omega_0)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение и норму:

$$\begin{aligned} (u, v)_* &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \text{grad} u_k \cdot \text{grad} v_k d\Omega_k + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} u_k v_k d\Gamma_k + \int_S [u][v] dS = \\ &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_k}{\partial x_\alpha} d\Omega_k + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} u_k v_k d\Gamma_k + \int_S [u][v] dS, \\ \|u\|_*^2 &= \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \sum_{k=1}^2 \int_{\Gamma_k} u_k^2 d\Gamma_k + \int_S [u]^2 dS. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Пусть $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ – часть $\partial\Omega_k$ содержит свои предельные точки. Через $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ обозначим замкнутое подпространство пространства $W_2^1(\Omega_k)$, плотным множеством в котором является множество всех функций из $C^1(\overline{\Omega_k})$, равных нулю вблизи (в окрестности) $\overset{\circ}{\Gamma}_k \subset \partial\Omega_k$, $k = 1, 2$ – какого-либо участка $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$, $k = 1, 2$. Под участками $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ границы $\partial\Omega_k$ понимаются куски границы $\partial\Omega_k$; естественно, мы не рассматриваем случай, когда какой-либо из участков $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ вырождается в точку и т.п.; $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ совпадает с $W_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \emptyset$; $W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k) = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega_k)$ при $\overset{\circ}{\Gamma}_k = \partial\Omega_k$.

Заметим, что для элементов $u_k(x) \in W_2^1(\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k)$ справедливо неравенство [3]

$$\int_{\Omega_k} u_k^2(x) d\Omega_k \leq C_{\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k} \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k, \quad k = 1, 2.$$

с постоянной $C_{\Omega_k; \overset{\circ}{\Gamma}_k}$, зависящей только от Ω_k и $\overset{\circ}{\Gamma}_k$, при этом "площадь" куска $\overset{\circ}{\Gamma}_k$ поверхности $\partial\Omega_k$ должна быть положительной: $\text{mes } \overset{\circ}{\Gamma}_k > 0$.

Введем в рассмотрение пространство $\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$ пар функций $u(x) = (u_1(x), u_2(x))$:

$$\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0) = \{u = (u_1(x), u_2(x)) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1) \times W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)\}$$

с нормой (2.10):

$$\|u\|_{\overset{\circ}{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}}^2 = \|u\|_*^2 = \sum_{k=1}^2 \int_{\Omega_k} \sum_{\alpha=1}^2 \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_\alpha} \right)^2 d\Omega_k + \int_S [u]^2 dS.$$

О п р е д е л е н и е 2.1. Обобщенным решением задачи A будем называть такую функцию $u(x) \in \overset{\circ}{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} Q(u, v) &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + d(x)q(u)v \right] d\Omega_0 + \int_S \theta(x)[u][v] dS = \\ &= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(x)v d\Omega_0 = l(v), \quad \forall v \in \overset{\circ}{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В дальнейшем, относительно заданных функций будем предполагать:

$$\begin{aligned} k_\alpha(x) &\in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2), & 0 < \nu \leq k_\alpha(x) \leq \bar{\nu}, & \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \\ d(x) &\in L_\infty(\Omega_1) \times L_\infty(\Omega_2), & 0 < d_0 \leq d(x) \leq \bar{d}_0, & \quad x \in \Omega_1 \cup \Omega_2; \\ \theta(x) &\in L_\infty(S), & 0 < \theta_0 \leq \theta(x) \leq \bar{\theta}_0, & \quad x \in S; \\ f(x) &\in L_2(\Omega_1) \times L_2(\Omega_2); \end{aligned} \quad (2.12)$$

функция $q_\alpha(\xi)$ определена на \mathbb{R} со значениями в \mathbb{R} и удовлетворяет условиям:

$$q_\alpha(0) = 0, \quad 0 \leq q_0 \leq [q_\alpha(\xi_1) - q_\alpha(\xi_2)] / (\xi_1 - \xi_2) \leq L_q < \infty \quad \text{для всех } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}, \xi_1 \neq \xi_2. \quad (2.13)$$

Т е о р е м а 2.1. Пусть выполнены условия (2.12)-(2.13). Тогда существует единственное обобщенное решение $u(x) \in \mathring{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$ задачи А в смысле определения 2.1. Задача о нахождении обобщенного решения из (2.11) эквивалентна решению операторного уравнения

$$Au = F,$$

где оператор А определяется на $\mathring{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$ билинейной формой $Q(u, v)$ с помощью равенства

$$(Au, v)_{\mathring{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} = Q(u, v), \quad \forall u, v \in \mathring{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0),$$

а правая часть $F \in \mathring{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0)$ определяется соотношением

$$(F, v)_{\mathring{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} = l(v), \quad \forall u, v \in \mathring{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}(\Omega_0),$$

причем справедлива априорная оценка

$$\|u\|_{\mathring{H}_{\Gamma_1, \Gamma_2}} \leq C \sum_{k=1}^2 \|f_k(x)\|_{L_2(\Omega_k)}.$$

3. Итерационный процесс для задачи А о сопряжении с разрывными коэффициентами и решением с итерациями на внутренней границе разрыва решения и его сходимость

Рассмотрим граничную задачу А с разрывными коэффициентами и решением (2.1)-(2.7). Оказывается численное решение граничных задач подобного типа можно эффективно осуществлять с применением итерационных методов, а именно, итераций на границе S разрыва решения, в сочетании с разностным методом и методом конечных элементов [4], [5] в отдельности в каждой из областей Ω_1 и Ω_2 .

В данном пункте остановимся на вопросах о построении итерационного процесса с итерациями на границе $S \subset \Omega$ разрыва решения задачи А и обосновании сходимости процесса итераций.

Задаче (2.1)-(2.7) поставим в соответствие следующий итерационный процесс с итерациями на внутренней границе S :

$$L_1 u_1^n = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(1)}(x) \frac{\partial u_1^n}{\partial x_\alpha} \right) + d_1(x) q_1(u_1^n) = f_1(x), \quad x \in \Omega_1, \quad (3.1)$$

$$u_1^n = 0, \quad x \in \bar{\Gamma}_1 = \partial\Omega_1 \setminus S, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u_1^n}{\partial N_{\partial\Omega_1}} = \frac{\partial u_1^n}{\partial N_S} = \theta(x)[u_2^{n-1}(x) - u_1^n(x)], \quad x \in S; \quad (3.3)$$

$$L_2 u_2^n = - \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^{(2)}(x) \frac{\partial u_2^n}{\partial x_\alpha} \right) + d_2(x) q_2(u_2^n) = f_2(x), \quad x \in \Omega_2, \quad (3.4)$$

$$u_2^n = 0, \quad x \in \bar{\Gamma}_2 = \partial\Omega_2 \setminus S, \quad (3.5)$$

$$-\frac{\partial u_2^n}{\partial N_{\partial\Omega_2}} = \frac{\partial u_2^n}{\partial N_S} = \theta(x)[u_2^n(x) - u_1^n(x)], \quad x \in S; n = 1, 2, \dots, \quad (3.6)$$

где $u_2^0(x)$ – начальное приближение, например, $u_2^0(x) = 0$ на S .

Таким образом, итерационный процесс (3.1)-(3.6) сводит решение исходной граничной задачи A с разрывным решением к решению на каждой итерации n двух граничных задач (3.1)-(3.3) и (3.4)-(3.6) в подобластях Ω_1 и Ω_2 соответственно.

В обобщенной постановке итерационный процесс относительно функций $u_1^n(x)$ и $u_2^n(x)$ состоит в отыскании последовательности пар функций $\{u^n(x)\} = \{(u_1^n(x), u_2^n(x))\}_{n=1}^\infty$ таких, что $u_k^n(x) \in W_2^1(\Omega_k; \Gamma_k)$, $k = 1, 2$ и которые удовлетворяют интегральным тождествам:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \left[\sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha^{(1)} \frac{\partial u_1^n}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_1}{\partial x_\alpha} + d_1(x) q(u_1^n) v_1 \right] d\Omega_1 + \int_S \theta(x) u_1^n v_1 d\gamma = \\ & = \int_S \theta(x) u_2^{n-1} v_1 d\gamma + \int_{\Omega_1} f_1(x) v_1 d\Omega_1, \quad \forall v_1(x) \in W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1), \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_2} \left[\sum_{\alpha=1}^2 k_\alpha^{(2)} \frac{\partial u_2^n}{\partial x_\alpha} \frac{\partial v_2}{\partial x_\alpha} + d_2(x) q(u_2^n) v_2 \right] d\Omega_2 + \int_S \theta(x) u_2^n v_2 d\gamma = \\ & = \int_S \theta(x) u_1^n v_2 d\gamma + \int_{\Omega_2} f_2(x) v_2 d\Omega_2, \quad \forall v_2(x) \in W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2); \end{aligned} \quad (3.8)$$

$n = 1, 2, \dots$; $u_2^0(x)$ – начальное приближение (например, $u_2^0(x) = 0$ на S).

Используя теорию монотонных операторов [8] можно установить однозначную разрешимость задач (3.7)-(3.8) относительно функций $u_1^n(x)$ и $u_2^n(x)$ в классах $W_2^1(\Omega_1; \Gamma_1)$ и $W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)$ (при каждом фиксированном номере n) соответственно.

Т е о р е м а 3.1. Пусть выполнены условия (2.12), (2.13). Тогда, если выполнено условие

$$4C^2 \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}^2 < 1, \quad (3.9)$$

где $C = const > 0$ – некоторая константа, то итерационный процесс (3.1)-(3.6) сходится в норме $\|\cdot\|_H$ (а значит и в норме (2.10) в силу их эквивалентности) к единственному решению задачи A при любом начальном приближении $u_2^0(x) \in W_2^1(\Omega_2; \Gamma_2)$ и справедлива оценка скорости сходимости

$$\|z^n\|_H = \left(\|z_1^n\|_{W_2^1(\Omega_1)} + \|z_2^n\|_{W_2^1(\Omega_2)} \right)^{1/2} \leq q^n \|z_2^0\|_{W_2^1(\Omega_2)}, \quad (3.10)$$

где

$$0 < q = \left(\frac{2C^2 \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}^2}{1 - 2C^2 \|\theta(x)\|_{L_\infty(S)}^2} \right)^{1/2} < 1. \quad (3.11)$$

Используя полученные результаты, построены и исследованы разностные аппроксимации задач оптимального управления для квазилинейных эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами и решением. Настоящая работа примыкает и развивает результаты [6]-[9].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. М.: Наука, 1988. - 334с.
2. Ладыженская О.А., Уралъцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. М.: Наука, 1973. - 575с.
3. Ладыженская О.А. Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. - 407с.
4. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. - 614с.
5. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976. - 350с.
6. Лубышев Ф.В. Разностные аппроксимации задач оптимального управления системами, описываемыми уравнениями в частных производных. Уфа: БашГУ, 1999. - 244с.
7. Лубышев Ф.В. Аппроксимация и регуляризация задач оптимального управления для параболических уравнений с управлениями в коэффициентах // Доклады РАН. 1996. Т.349. №5. С.598-602.
8. Лубышев Ф.В., Манапова А.Р. О некоторых задачах оптимального управления и их разностных аппроксимациях и регуляризации для квазилинейных эллиптических уравнений с управлениями в коэффициентах // Журнал вычисл. математики и математической физики. 2007. Т.47. №3. С.376-396.
9. Васильев Ф.П. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. - 524с.

Iterative processes for states with discontinuous coefficients and solutions in optimal control of quasilinear equations

© F.V. Lubyshev⁴, M.E. Fairuzov⁵, G.Y. Galeeva⁶

Abstract. Developed an iterative process for state-controlled processes described by nonlinear equations with discontinuous coefficients and solution in inhomogeneous anisotropic media with iterations on the boundary of discontinuity and coefficients. The question of convergence of the iterative process.

Key Words: iteration method, optimal control, elliptic equation, the operator, the difference approximation.

⁴full professor of Bashkir State University, Department of Applied Computer Science and Numerical Methods; v.lubyshev@mail.ru.

⁵associate professor of Bashkir State University, Department of Applied Computer Science and Numerical Methods; fairuzovme@mail.ru.

⁶associate professor of Bashkir State University, Department of Applied Computer Science and Numerical Methods; lara_wood@mail.ru.

УДК 519.6

Диагностирование полости в стержне

© А. М. Ахтямов¹, Е. В. Саляхова²

Аннотация. В статье рассматривается диагностирование местоположения и размеров локальной полости в стержне по собственным частотам его изгибных колебаний. Для идентификации полости предложено использование собственных частот из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей).

Ключевые слова: стержень, собственные частоты, диагностика.

1. Введение

Стержни, балки являются деталями многих механизмов и конструкций, в которых часто образуются дефекты (трещины, полости из-за коррозии, ударов и т. п.). Для предотвращения аварий и поломок возникает задача их ранней диагностики. Часто для выявления дефекта в стержне и его местоположения используют собственные частоты его колебаний [1-8].

В настоящей работе рассматривается диагностирование локальной призматической полости в стержне квадратного сечения в случае, когда известно местоположение полости по оси X (проходящей вдоль стержня) и ее длина, но неизвестно местоположение полости по оси Y и ее размеры в плоскости сечения стержня YZ . Ранее, в статье [9], авторами был рассмотрен случай трубчатого стержня, у которого полость проходит по всей его длине. Была проведена диагностика полости трубчатого стержня, а также выявлено местоположение полости, при котором спектр собственных частот изгибных колебаний трубчатого стержня совпадает с соответствующим спектром собственных частот колебаний сплошного бездефектного стержня.

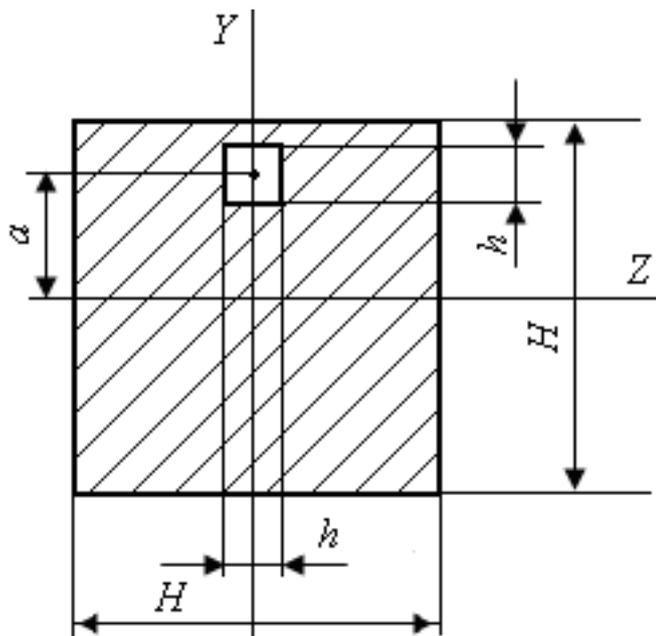
В настоящей работе, в отличие от статьи [9], рассматривается локальная полость, т.е. полость, не проходящая по всей длине стержня. Для идентификации рассматриваемой локальной полости используются собственные частоты из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей). Показано, что по двум собственным частотам, каждая из которых взята из спектров частот изгибных колебаний дефектного стержня вокруг разных осей, можно однозначно идентифицировать параметры размера h и местоположения a локальной полости.

2. Постановка задачи

Рассмотрим колебания призматического стержня с дефектом в виде локальной полости. Его сечение изображено на рис. 2.1.

¹Ведущий научный сотрудник, Институт механики УНЦ РАН, г. Уфа; akhtyamovam@mail.ru

²Ассистент кафедры математики, ГОУ ВПО филиал УГАТУ в г. Нефтекамске, г. Нефтекамск; shalunova ev@rambler.ru



Р и с у н о к 2.1

Схема сечения стержня с локальной полостью

Уравнение изгибных колебаний стержня с постоянной жесткостью на изгиб имеет вид [10]:

$$EJ \frac{\partial^4 u(x, t)}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = 0,$$

где $u(x, t)$ - прогиб текущей оси стержня, E [кг/м²] - модуль упругости, J [м⁴] - момент инерции поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси сечения, перпендикулярной плоскости колебаний, ρ [кг/м³] - плотность стержня, F [м²] - площадь поперечного сечения стержня. Собственные частоты изгибных колебаний рассматриваемого стержня будем обозначать через ω_i^a .

Выберем следующий вид закрепления стержня: левый конец жестко закреплен, правый конец свободен (консольный стержень).

Полость квадратного сечения локализуется в стержне на отрезке $[x_1; x_2]$, длина ее известна. Как видно из рис. 2.1, параметр a определяет положение полости рассматриваемого стержня вдоль оси Y . При $a = 0$ полость лежит на срединной оси стержня. Параметр h определяет размеры полости, при известной ее протяженности. Необходимо идентифицировать полость в стержне, то есть однозначно определить значения параметра a и параметра h полости.

3. Диагностирование местоположения и размеров полости

Задача об изгибных колебаниях консольного стержня длины L заменой $u(x, t) = y(x) \cos \omega t$ сводится к следующей спектральной задаче [10]:

$$y^4(x) = \frac{\rho F \omega^2}{EJ} y(x) \quad (3.1)$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(L) = 0, \quad y'''(L) = 0, \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
 y_1(x_1) &= y_2(x_1), & y_2(x_2) &= y_3(x_2), \\
 y_1'(x_1) &= y_2'(x_1), & y_2'(x_2) &= y_3'(x_2), \\
 EJ_1y_1''(x_1) &= EJ_2y_2''(x_1), & EJ_2y_2''(x_2) &= EJ_1y_3''(x_2), \\
 EJ_1y_1'''(x_1) &= EJ_2y_2'''(x_1), & EJ_2y_2'''(x_2) &= EJ_1y_3'''(x_2),
 \end{aligned}
 \tag{3.3}$$

где x_1, x_2 - соответственно левая и правая границы полости, y_1 и y_2 - прогибы соответственно слева и справа от левой границы полости, y_2 и y_3 - прогибы соответственно слева и справа от правой границы полости,

$$F = \begin{cases} F_1, & x \in [0, x_1), \\ F_2, & x \in [x_1, x_2], \\ F_1, & x \in (x_2, L], \end{cases} \quad J = \begin{cases} J_1, & x \in [0, x_1), \\ J_2, & x \in [x_1, x_2], \\ J_1, & x \in (x_2, L]. \end{cases}$$

Равенства (3.3) представляют собой условия сопряжения [10, с.197].

Полость в стержне локализуется на отрезке $[x_1; x_2]$. Длина ее известна. Для идентификации размера полости в плоскости сечения стержня YZ (то есть значения параметра h) рассмотрим колебания вокруг оси Y . Для вышеописанного стержня

$$F_1 = H^2, \quad J_1 = \frac{H^4}{12}.$$

Площадь поперечного сечения на отрезке $[x_1; x_2]$, где локализуется полость, равна $F_2 = H^2 - h^2$. Определим момент инерции J_2 . В случае колебаний стержня вокруг оси Y момент инерции J_2 имеет вид:

$$J_2 = J_Y = \frac{H^4 - h^4}{12}$$

(ось Y является нейтральной осью). То есть он не зависит от параметра a . Следовательно, используя известный спектр частот колебаний вокруг оси Y , мы можем вычислить значение параметра h . Расчет ведется с помощью разностно-аналитического метода, описанного в [11].

Известно местоположение полости по оси X , проходящей вдоль стержня, ее длина, а также ее размеры в плоскости YZ . Осталось определить положение полости вдоль оси Y , то есть найти значение параметра a . Для рассматриваемого стержня определена система осей Z и Y (оси проходят через центр квадрата со стороной H). Нейтральная ось Z_1 проходит через центр тяжести сечения. Чтобы однозначно выявить значение параметра a , рассмотрим колебания стержня вокруг оси Z_1 . Для определения ее положения найдем центр тяжести сечения по отношению к оси Z [12].

Разобьем сечение на фигуры: 1 - квадрат ($H \times H$), 2 - полость ($h \times h$).

Площади фигур: квадрат $f_1 = H^2$, полость $f_2 = -h^2$ (для полости площадь выражается отрицательной величиной). Площадь сечения $F_2 = H^2 - h^2$.

Вычислим координаты y_i центров тяжести фигур, составляющих сечение, относительно оси Z . Результаты поместим в таблицу.

Части сечения	Площади частей f_i	Координата y_i их центров тяжести
1	H^2	0
2	$-h^2$	a

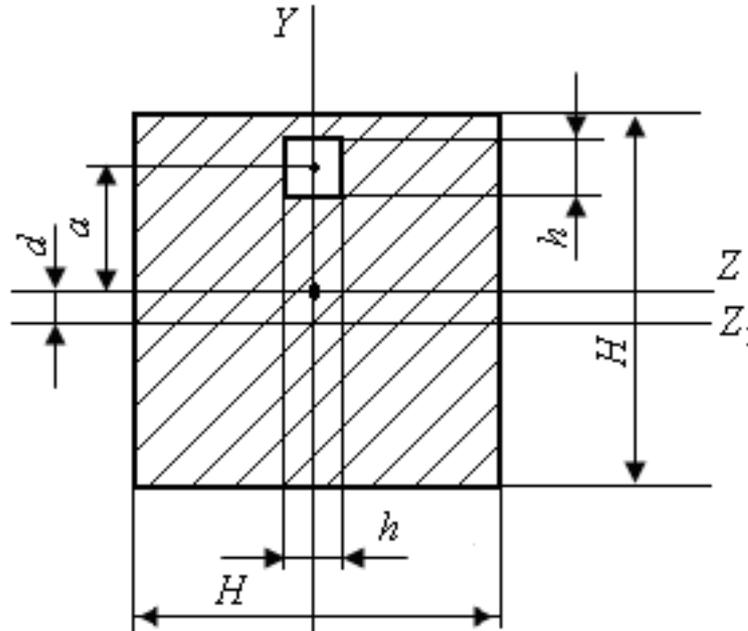
Определим статический момент сечения относительно выбранной оси Z :

$$S_Z = H^2 \cdot 0 - h^2 \cdot a.$$

Координата y_c центра тяжести сечения по отношению к оси Z имеет вид:

$$y_c = \frac{S_Z}{F_2} = \frac{-h^2 a}{H^2 - h^2}.$$

Положение нейтральной оси Z_1 , проходящей через центр тяжести сечения (рис. 3.1), найдено.



Р и с у н о к 3.1

Нейтральная ось Z_1 проходит через центр тяжести сечения, $d = (h^2 a)/(H^2 - h^2)$

Вычислим теперь момент инерции сечения стержня с полостью относительно нейтральной оси Z_1 .

$$J_{Z_1} = \frac{H^4}{12} + H^2 \left(\frac{h^2 a}{H^2 - h^2} \right)^2 - \left(\frac{h^4}{12} + h^2 \left(a + \frac{h^2 a}{H^2 - h^2} \right)^2 \right).$$

После упрощения, выражение для J_{Z_1} примет вид:

$$J_{Z_1} = \frac{H^4 - h^4}{12} - \frac{H^2 h^2 a^2}{H^2 - h^2}.$$

Следовательно, момент инерции сечения стержня с полостью на отрезке $[x_1; x_2]$, где локализуется полость, имеет вид:

$$J_2 = J_{Z_1} = \frac{H^4 - h^4}{12} - \frac{H^2 h^2 a^2}{H^2 - h^2}.$$

Зная значение параметра h , и взяв одну собственную частоту из спектра частот колебаний стержня вокруг оси Z_1 , мы можем теперь однозначно определить значение параметра a , характеризующего местоположение локализованной на отрезке $[x_1; x_2]$ полости вдоль оси Y .

Таким образом, используя по одной собственной частоте из двух разных спектров частот изгибных колебаний можно однозначно идентифицировать местоположение и размеры рассматриваемой локальной полости.

4. Примеры

Пример 4.1. Рассмотрим полученные выше результаты на конкретном примере. Для описанного консольного стержня возьмем следующие значения параметров:

$$H = 0,1 \text{ м}, \quad L = 1 \text{ м}, \quad \rho = 7850 \text{ кг/м}^3, \quad E = 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = 2,1 \cdot 10^{10} \text{ кг/м}^2.$$

Стержень имеет полость квадратного сечения, которая лежит на отрезке $[0,26;0,74]$ по оси X , проходящей вдоль стержня.

С помощью разностно-аналитического метода [11] по известной собственной частоте колебаний стержня вокруг оси Y получено значение параметра $h = 0,01$ м, характеризующего размеры полости протяженностью 0,48 м, находящейся на отрезке $[0,26;0,74]$.

Зная значение параметра h , и взяв одну собственную частоту из известного спектра колебаний вокруг оси Z_1 , мы можем вычислить значение параметра a , характеризующего положение полости вдоль оси Y . Расчет ведется с помощью разностно-аналитического метода [11]. Результаты занесены в таблицу 1.

Таблица 1. Значение параметра a для стержня с полостью, локализованной на участке $[0,26;0,74]$, $h = 0,01$.

ω_1^a (рад/с)	a	ω_2^a (рад/с)	a	ω_3^a (рад/с)	a
166,239	0	1043,818	0	2921,126	0
166,138	0,01	1043,249	0,01	2920,040	0,01
165,837	0,02	1041,539	0,02	2916,772	0,02
165,334	0,03	1038,681	0,03	2911,294	0,03
164,626	0,04	1034,660	0,04	2903,562	0,04
164,195	0,045	1032,208	0,045	2898,830	0,045

Пример 4.2. Возьмем стержень, описанный в примере 4.1., с полостью квадратного сечения, которая лежит на отрезке $[0,26;0,32]$ по оси X , проходящей вдоль стержня. Длина полости составляет 0,06 м.

С помощью разностно-аналитического метода [11] по известной собственной частоте колебаний стержня вокруг оси Y получено значение параметра $h = 0,01$ м.

Зная значение параметра h , и взяв одну собственную частоту из известного спектра колебаний вокруг оси Z_1 , мы можем вычислить значение параметра a , характеризующего положение полости вдоль оси Y . Расчет ведется с помощью разностно-аналитического метода [11]. Результаты занесены в таблицу 2.

Таблица 2. Значение параметра a для стержня с полостью, локализованной на участке $[0,26;0,32]$, $h = 0,01$.

ω_1^a (рад/с)	a	ω_2^a (рад/с)	a	ω_3^a (рад/с)	a
166,013	0	1040,687	0	2915,026	0
166,013	0,01	1040,648	0,01	2914,788	0,01
166,012	0,02	1040,532	0,02	2914,071	0,02
166,01	0,03	1040,338	0,03	2912,866	0,03
166,007	0,04	1040,061	0,04	2911,157	0,04
166,005	0,045	1039,891	0,045	2910,108	0,045

Пример 4.3. Рассмотрим теперь стержень, концы которого заземлены (остальные параметры такие же, как и у описанных выше консольных стержней). Стержень имеет полость квадратного сечения, которая лежит на отрезке $[0,26;0,74]$ по оси X , проходящей вдоль стержня. Длина полости составляет $0,48$ м.

С помощью разностно-аналитического метода [11] по известной собственной частоте колебаний стержня вокруг оси Y получено значение параметра $h = 0,01$ м, характеризующего размеры полости, находящейся на отрезке $[0,26;0,74]$.

Зная значение параметра h , и взяв одну собственную частоту из известного спектра колебаний вокруг оси Z_1 , мы можем вычислить значение параметра a , характеризующего положение полости вдоль оси Y . Расчет ведется с помощью разностно-аналитического метода [11]. Результаты занесены в таблицу 3.

Таблица 3. Значение параметра a для стержня с полостью, локализованной на участке $[0,26;0,74]$, $h = 0,01$.
Концы стержня заземлены.

ω_1^a (рад/с)	a	ω_2^a (рад/с)	a	ω_3^a (рад/с)	a
1061,08	0	2920,852	0	5720,131	0
1060,66	0,01	2919,869	0,01	5718,736	0,01
1059,39	0,02	2916,91	0,02	5714,538	0,02
1057,27	0,03	2911,953	0,03	5707,502	0,03
1054,29	0,04	2904,956	0,04	5697,564	0,04
1052,48	0,045	2900,676	0,045	5691,481	0,045

5. Совпадение частот стержня с полостью и сплошного бездефектного стержня

В работе [9] на примере колебаний сплошного призматического стержня и трубчатого стержня (полость проходит по всей длине стержня) было показано, что при определенном положении полости стержня, один из спектров собственных частот изгибных колебаний стержня с полостью совпадает с соответствующим спектром собственных частот колебаний сплошного бездефектного стержня.

Для рассматриваемого стержня также существует положение локализованной на отрезке $[x_1; x_2]$ полости вдоль оси Y , при котором собственные частоты изгибных колебаний стержня с полостью совпадают с собственными частотами изгибных колебаний стержня без полости (взятого с такими же характеристиками). Однако случай локальной полости отличается от случая полости, проходящей по всей длине стержня (трубчатый стержень), тем, что эти положения являются разными для первой, второй, третьей и последующих частот. Для трубчатого стержня, как показано в работе [9], отношение $\frac{\omega_i^a}{\omega_i^*}$ не зависит от i , для всех $i = 1, 2, 3, 4 \dots$

С помощью разностно-аналитического метода [11] вычислены собственные частоты колебаний сплошного бездефектного стержня, взятого с такими же характеристиками, что и рассматриваемый стержень с локальной полостью:

$$\omega_1^* = 166,01(\text{рад/с}), \quad \omega_2^* = 1040,369(\text{рад/с}), \quad \omega_3^* = 2913,062(\text{рад/с}).$$

На рис. 5.1 изображен график, показывающий влияние местоположения локальной полости вдоль оси Y (то есть значения параметра a), на поведение собственных частот изгибных колебаний стержня. График подтверждает, что существуют такие положения

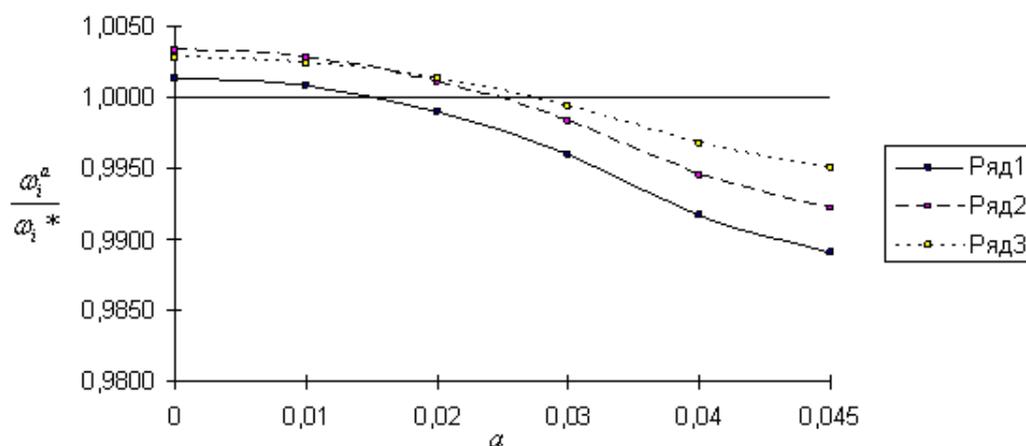
полости, при которых собственные частоты изгибных колебаний стержня с полостью совпадают с собственными частотами изгибных колебаний бездефектного стержня (взятого с такими же характеристиками). При этом значения параметра a , при которых происходит совпадение частот бездефектного стержня и стержня с полостью, являются разными для первой, второй, третьей собственной частоты. Первые собственные частоты совпадают при $a = 0,015$, вторые - при $a = 0,024$, третьи - при $a = 0,027$.

График зависимости поведения собственных частот колебаний стержня от местоположения полости для примера 4.2. приведен на рисунке 5.2. Совпадение частот стержня с полостью и бездефектного стержня (взятого с такими же характеристиками) происходит при $a = 0,031$ - для первой собственной частоты, при $a = 0,028$ - для второй, при $a = 0,028$ - для третьей.

График зависимости поведения собственных частот колебаний стержня от местоположения полости для примера 4.3. приведен на рисунке 5.3. В примере 4.3. для сплошного бездефектного стержня с заземленными концами собственные частоты имеют вид:

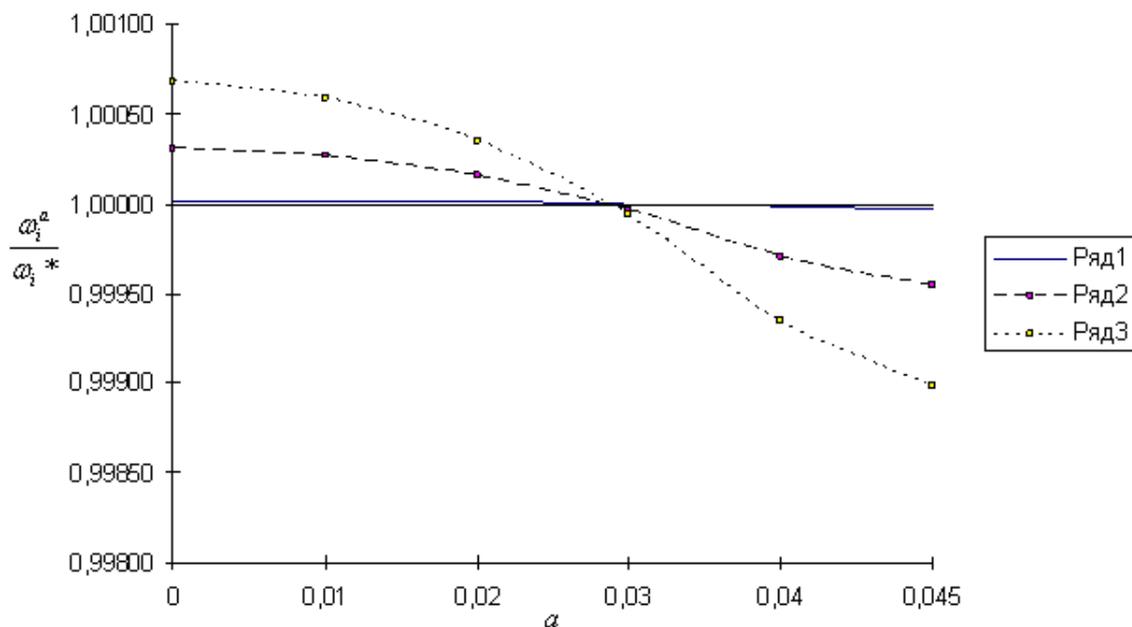
$$\omega_1^* = 1056,367(\text{рад/с}), \quad \omega_2^* = 2911,916(\text{рад/с}), \quad \omega_3^* = 5708,520(\text{рад/с}).$$

Совпадение частот стержня с полостью и бездефектного стержня (взятого с такими же характеристиками) происходит при $a = 0,033$ - для первой собственной частоты, при $a = 0,030$ - для второй, при $a = 0,028$ - для третьей.



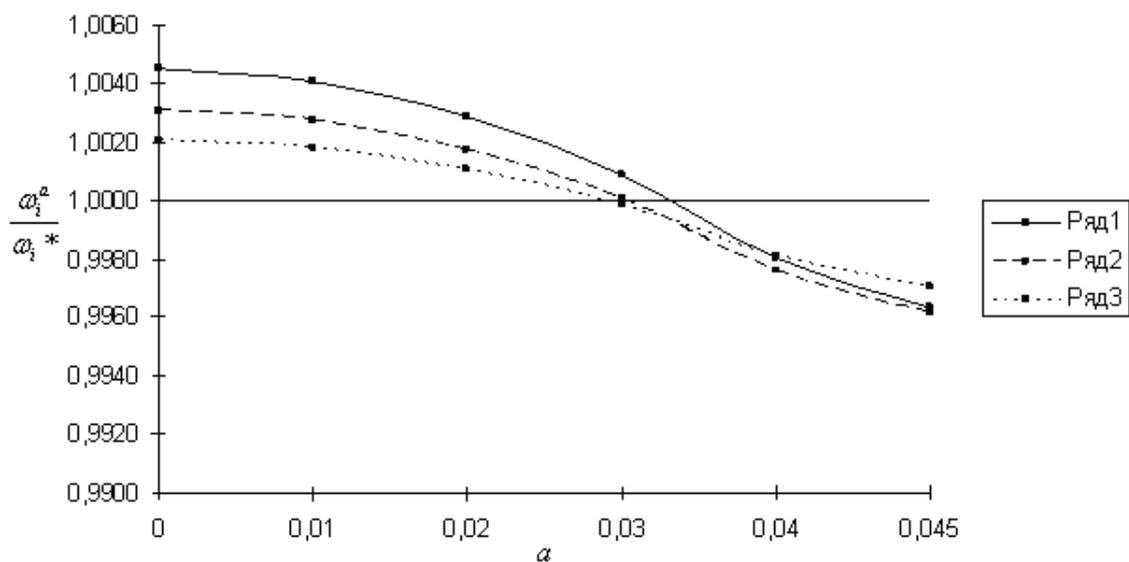
Р и с у н о к 5.1

Влияние местоположения локализованной на отрезке $[0,26;0,74]$ полости на поведение собственных частот консольного стержня, ряд 1 соответствует ω_1^a/ω_1^* , ряд 2 соответствует ω_2^a/ω_2^* , ряд 3 соответствует ω_3^a/ω_3^*



Р и с у н о к 5.2

Влияние местоположения локализованной на отрезке $[0,26;0,32]$ полости на поведение собственных частот консольного стержня, ряд 1 соответствует ω_1^a/ω_1^* , ряд 2 соответствует ω_2^a/ω_2^* , ряд 3 соответствует ω_3^a/ω_3^*



Р и с у н о к 5.3

Влияние местоположения локализованной на отрезке $[0,26;0,74]$ полости на поведение собственных частот стержня с защемленными концами, ряд 1 соответствует ω_1^a/ω_1^* , ряд 2 соответствует ω_2^a/ω_2^* , ряд 3 соответствует ω_3^a/ω_3^*

6. Выводы

1. Для случая, когда известно местоположение полости по оси X (проходящей вдоль стержня) и ее длина, но неизвестно местоположение полости по оси Y и ее размеры в плоскости сечения стержня YZ , проведено диагностирование локальной полости в стержне.

Показано, что для идентификации полости необходимо использование собственных частот из двух спектров изгибных колебаний (вокруг разных осей). По двум собственным частотам, каждая из которых взята из спектров частот изгибных колебаний стержня с полостью вокруг разных осей, можно однозначно идентифицировать параметры размера h и местоположения a полости.

2. Показано, что существует значение параметра a , характеризующего положение локальной полости стержня вдоль оси Y , при котором собственные частоты его изгибных колебаний (вокруг оси Z_1) совпадают с соответствующими собственными частотами бездефектного стержня (взятого с такими же характеристиками), при этом значения параметра a являются разными для первой, второй, третьей собственной частоты. Таким образом, если полость может развиваться в промежутке между поверхностью стержня и его нейтральной осью, следует с осторожностью применять методы диагностирования дефектов с помощью одного спектра собственных частот колебаний. Они не всегда позволят выявить и правильно идентифицировать такой дефект.

Авторы выражают признательность М.А. Ильгамову и Б.М. Люпаеву за обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gladwell G.M.L. Inverse Problems in Vibration. 2nd ed. — Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers, 2004.
2. Ваньков Ю.В., Казаков Р.Б., Яковлева Э.Р. Собственные частоты изделия как информативный признак наличия дефектов. Электронный журнал "Техническая акустика" <http://www.ejta.org>, 2003, 5.
3. Morassi A. Crack-induced changes in eigenparameters of beam structures // ASCE Journal of engineering mathematics, 1993, vol. 119 (9). P. 1798-1803.
4. Ильгамов М.А., Хахимов А.Г. Диагностика повреждений консольной балки с надрезом // Дефектоскопия. — 2009. — № 5. — С. 83-89.
5. Ватульян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. — 224 с.
6. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Об определении местоположения и размера полости в упругом стержне // Дефектоскопия. — 2005. — № 9. — С.44-56.
7. Ватульян А.О., Солуянов Н.О. Идентификация полости в упругом стержне при анализе поперечных колебаний // Прикладная механика и техническая физика. — 2008. — Т. 49, № 6. — С. 152-158.
8. Ахтямов А.М., Аюпова А.Р. Определение полости в стержне методом отрицательной массы // Дефектоскопия. — 2010. — № 5. — С. 29-33.
9. Ахтямов А.М., Саяхова Е.В. Всегда ли наличие полости в стержне меняет собственные частоты? Электронный журнал "Техническая акустика" <http://www.ejta.org>, 2011, 7.
10. Вибрации в технике: Справочник под. ред. В.В. Болотина. Т.1. Колебания линейных систем. М.: Машиностроение, 1978. — 352 с.

11. Абзалимов Р.Р., Саляхова Е.В. Разностно-аналитический метод вычисления собственных значений для уравнений 4-го порядка с разделенными краевыми условиями // Известия вузов. Математика. – 2008. – № 11. – С. 3-11.
12. Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любошиц М.И. Справочное пособие по сопротивлению материалов. Минск: Высшая школа, 1970. – 630 с.

Diagnosing cavity in the rod

© А. М. Akhtyamov³, Е. V. Salyakhova⁴

Abstract. The article deals with diagnosing the location and size of the local cavity in the rod on the natural frequencies of its flexural vibrations. For cavity identification two spectra of flexural vibrations (around different axes) are suggested to use.

Key Words: beam, natural frequencies, diagnostics.

³Chief Researcher, Institute of Mechanics Ufa Scientific Center Russian Academy of Sciences, Ufa; akhtyamovam@mail.ru

⁴Assistant of the Department of Mathematics, an affiliate of the Ufa State Aviation Technical University in Neftekamsk, Neftekamsk; shalunova ev@rambler.ru

В СРЕДНЕВОЛЖСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

УДК 550.837.3

Комбинированный метод решения задачи электрокаротажа вертикальной скважины© С. В. Викторов¹

Аннотация. В данной работе рассматривается математическая модель для задачи скважинной электроразведки и комбинированный метод ее решения.

Ключевые слова: потенциал поля точечного источника, прямая задача электроразведки, моделирование каротажа скважин.

1. Введение

Одной из главных задач изучения внутреннего строения геологического разреза земли является задача выявления и промышленной оценки месторождений полезных ископаемых. С другой стороны требуется переоценка уже разведанных запасов с учетом произведенной промышленной выработки, более полное опоскование продуктивных зон, уточнение контуров залежей. Каротаж или геофизические исследования в скважинах являются наиболее распространенными методами разведки в настоящее время. Использование скважин для изучения околоскважинного и межскважинного пространства позволяет существенно повысить эффективность поисковых работ и уменьшить объемы дорогостоящего бурения.

Среди большого числа известных геофизических методов исследований скважин, ведущее место занимает электрический каротаж постоянным током, как наиболее эффективный и экологически безопасный метод разведки. Возможность применения электрических методов для изучения строения земных недр предопределяется различием значений удельных электрических проводимостей горных пород.

В реальных геофизических исследованиях на распределение потенциала, влияют физические размеры, форма скважин, учет которых позволяет более точно восстановить структуру исследуемого района.

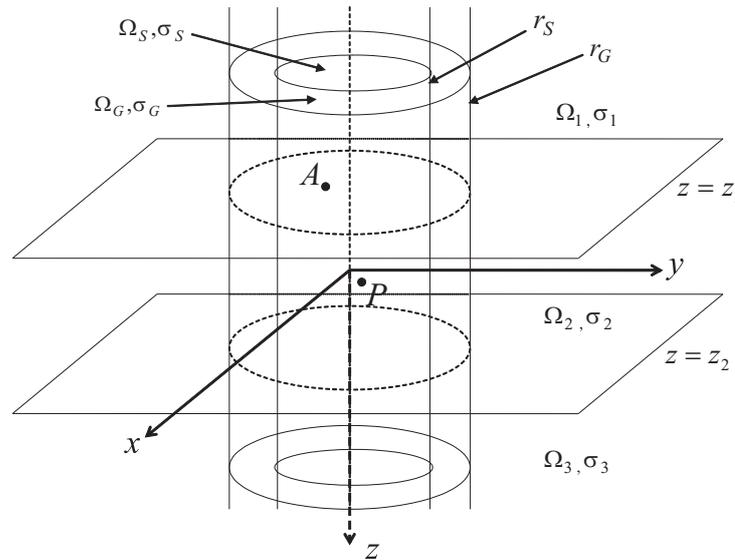
В работе рассматривается математическая модель прямой задачи электрического поля точечного источника постоянного тока для вертикальной бесконечной скважины с глинистой коркой в горизонтально-слоистой среде, состоящей из трех плоско-параллельных пластов.

2. Постановка задачи

Пусть в трех-слойном кусочно-однородном пространстве Ω , состоящем из плоско-параллельных, горизонтально расположенных пластов Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 с удельными электрическими проводимостями σ_1 , σ_2 , σ_3 находится вертикальная цилиндрическая скважина Ω_S , заполненная буровым раствором удельной электрической проводимости σ_S , и вокруг

¹доцент кафедры математического моделирования, Стерлитамакская государственная педагогическая академия, г. Стерлитамак; viktorov@rambler.ru.

которой присутствует глинистая корка в виде кольца Ω_G удельной электрической проводимости σ_G (рис. 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Вертикальная скважина с коркой в трех-слойном пространстве

Математическая модель прямой задачи описывающая потенциальное поле точечного источника постоянного тока интенсивности I , возбуждаемого внутри скважины в точке $A(x_0, 0, z_0)$, в декартовой системе координат с осью z направленной вниз и совпадающей с осью вращения скважины, представляется в виде следующей краевой задачи:

$$\Delta u_S(P) = -\frac{I}{\sigma_S} \delta(x - x_0) \delta(y) \delta(z - z_0), P(x, y, z) \in \Omega_S; \quad (2.1)$$

$$\Delta u_i(P) = 0, P(x, y, z) \in \Omega_i, i = \overline{1, 3}; \quad \Delta u_G(P) = 0, P(x, y, z) \in \Omega_G; \quad (2.2)$$

$$u_i(P)|_{z=z_i} = u_{i+1}(P)|_{z=z_i}; \quad \sigma_i \frac{\partial u_i(P)}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}(P)}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, i = \overline{1, 2}; \quad (2.3)$$

$$u_i(P)|_{r_G} = u_G(P)|_{r_G}; \quad \sigma_i \frac{\partial u_i(P)}{\partial n} \Big|_{r_G} = \sigma_G \frac{\partial u_G(P)}{\partial n} \Big|_{r_G}, i = \overline{1, 3}; \quad (2.4)$$

$$u_S(P)|_{r_S} = u_G(P)|_{r_S}; \quad \sigma_S \frac{\partial u_S(P)}{\partial m} \Big|_{r_S} = \sigma_G \frac{\partial u_G(P)}{\partial m} \Big|_{r_S}; \quad (2.5)$$

$$u_{S,G} \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty; \quad u_{1,3} \rightarrow 0, \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad u_2 \rightarrow 0, \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow \infty, \quad (2.6)$$

где Δ – оператор Лапласа, плоскость $z = z_i$ – нижняя граница слоя Ω_i ($i = \overline{1, 3}$), δ – функция Дирака, n и m – единичные векторы внешних нормалей к поверхностям r_G и r_S соответственно.

Решение прямой задачи (2.1)–(2.6) осуществляется комбинированным методом интегральных преобразований и интегральных уравнений [1].

3. Комбинированный метод решения

Перейдем в задаче (2.1)–(2.6) к цилиндрической системе координат (r, φ, z) с плоскостью $\varphi = 0$, содержащей источник тока. Получим:

$$Lu_S \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_S}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_S}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_S}{\partial \varphi^2} = -\frac{I}{2r\sigma_S} \delta(r - r_0) \delta(\varphi) \delta(z - z_0), \quad (r, \varphi, z) \in \Omega_S; \quad (3.1)$$

$$Lu_G = 0, \quad (r, \varphi, z) \in \Omega_G; \quad Lu_i = 0, \quad (r, \varphi, z) \in \Omega_i, \quad i = \overline{1, 3}; \quad (3.2)$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0, \pi} = 0; \quad (3.3)$$

$$u_i|_{z=z_i} = u_{i+1}|_{z=z_i}; \quad \sigma_i \left. \frac{\partial u_i}{\partial z} \right|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \left. \frac{\partial u_{i+1}}{\partial z} \right|_{z=z_i}, \quad i = \overline{1, 2}; \quad (3.4)$$

$$u_i|_{r=r_G} = u_G|_{r=r_G}; \quad \sigma_i \left. \frac{\partial u_i}{\partial r} \right|_{r=r_G} = \sigma_G \left. \frac{\partial u_G}{\partial r} \right|_{r=r_G}, \quad i = \overline{1, 3}; \quad (3.5)$$

$$u_S|_{r=r_S} = u_G|_{r=r_S}; \quad \sigma_S \left. \frac{\partial u_S}{\partial r} \right|_{r=r_S} = \sigma_G \left. \frac{\partial u_G}{\partial r} \right|_{r=r_S}; \quad (3.6)$$

$$u_{S,G} \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad u_{1,3} \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty, \quad u_2 \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad \varphi \in [0, \pi], \quad (3.7)$$

где условие (3.3) выражает симметрию поля относительно совпадающих плоскостей $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$.

К задаче (3.1)–(3.7) применим конечное косинус преобразование Фурье по переменной φ :

$$u^m(r, z) = \int_0^\pi u(r, \varphi, z) \cos m\varphi d\varphi \quad (3.8)$$

и будем искать ее решение в виде:

$$u(r, \varphi, z) = \pi^{-1} \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_0^m) u^m(r, z) \cos m\varphi, \quad (3.9)$$

где δ_0^m – символ Кронекера, $\delta_i^j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}$.

В результате получим однопараметрическое семейство (по параметру $m = 0, 1, 2, \dots$) двумерных краевых задач относительно коэффициентов Фурье $u^m(r, z)$ разложения исходной функции $u(r, \varphi, z)$ в ряд (3.9):

$$\tilde{A}(r_0, z_0), \quad \tilde{P}(r, z), \quad \tilde{Q}(r_Q, z_Q),$$

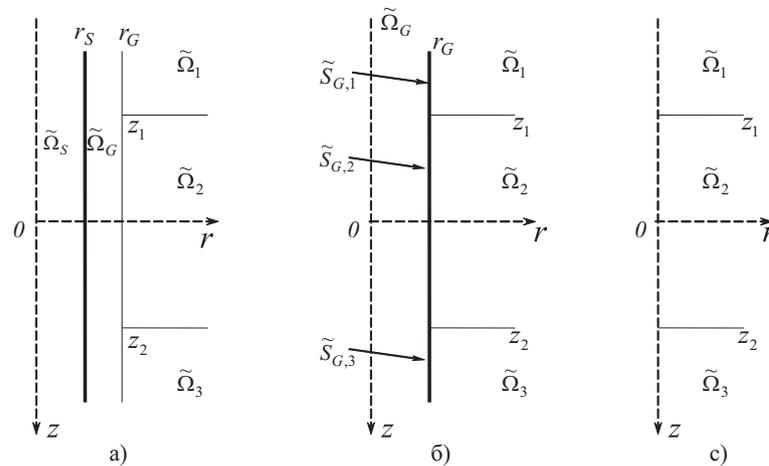
$$L^m u_S^m \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial u_S^m}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_S^m}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} u_S^m = -\frac{I}{4r\sigma_S} \delta(r - r_0) \delta(z - z_0), \quad \tilde{P} \in \tilde{\Omega}_S;$$

$$L^m u_G^m = 0, \quad \tilde{P} \in \tilde{\Omega}_G; \quad L^m u_i^m = 0, \quad \tilde{P} \in \tilde{\Omega}_i, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$\begin{aligned}
u_i^m|_{z=z_i} &= u_{i+1}^m|_{z=z_i}; \quad \sigma_i \frac{\partial u_i^m}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \frac{\partial u_{i+1}^m}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, \quad i = \overline{1,2}; \\
u_i^m|_{r=r_G} &= u_G^m|_{r=r_G}; \quad \sigma_i \frac{\partial u_i^m}{\partial r} \Big|_{r=r_G} = \sigma_G \frac{\partial u_G^m}{\partial r} \Big|_{r=r_G}, \quad i = \overline{1,3}; \\
u_S^m|_{r=r_S} &= u_G^m|_{r=r_S}; \quad \sigma_S \frac{\partial u_S^m}{\partial r} \Big|_{r=r_S} = \sigma_G \frac{\partial u_G^m}{\partial r} \Big|_{r=r_S}; \\
|u_S^m|_{r=0} &< \infty; \quad u_{S,G}^m \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty;
\end{aligned} \tag{3.10}$$

$$u_{1,3}^m \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad u_2^m \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

где области $\tilde{\Omega}_S, \tilde{\Omega}_G, \tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2, \tilde{\Omega}_3$ получены сечением соответствующих областей $\Omega_S, \Omega_G, \Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$ плоскостью $\varphi = const$ (рис. 3.1 а–с).



Р и с у н о к 3.1

Выберем в качестве включения скважину $\tilde{\Omega}_S$ (см. рис. 3.1а, где жирной линией отмечена граница включения).

Тогда решение задачи (3.10) представляется в виде [2]:

$$u^m = W^m + V^m, \quad u_S^m = \frac{\sigma_G}{\sigma_S} (W^m + V^m), \tag{3.11}$$

$$W^m = \int_{-\infty}^{\infty} \mu^m(\tilde{Q}) \frac{\partial G^m(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial r_{\tilde{Q}}} \cdot r_{\tilde{Q}} dz, \quad V^m = \frac{I}{4\sigma_S} G^m(\tilde{P}, \tilde{A}),$$

где функции $G^m(\tilde{P}, \tilde{Q})$ – коэффициенты Фурье разложения функции Грина $G(P, Q)$ в косинус-ряд (3.9) находятся из вспомогательной задачи:

$$L^m G_G^m \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial G_G^m}{\partial r} + \frac{\partial^2 G_G^m}{\partial z^2} - \frac{m^2}{r^2} G_G^m = -\delta(r - r_Q) \delta(z - z_Q);$$

$$L^m G_i^m = 0, \quad i = \overline{1,3};$$

$$G_i^m|_{z=z_i} = G_{i+1}^m|_{z=z_i}; \quad \sigma_i \frac{\partial G_i^m}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \frac{\partial G_{i+1}^m}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, \quad i = \overline{1, 2}; \quad (3.12)$$

$$G_i^m|_{r=r_G} = G_G^m|_{r=r_G}; \quad \sigma_i \frac{\partial G_i^m}{\partial r} \Big|_{r=r_G} = \sigma_G \frac{\partial G_G^m}{\partial r} \Big|_{r=r_G}, \quad i = \overline{1, 3};$$

$$|G_G^m|_{r=r_0} < \infty; \quad G_G^m \rightarrow 0, \quad |z| \rightarrow \infty; \quad G_{1,3}^m \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad G_2^m \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty,$$

а $\mu^m(\tilde{Q})$ – неизвестные коэффициенты Фурье разложения функции плотности потенциала двойного слоя на границе включения – есть решение интегрального уравнения:

$$\mu^m(\tilde{P}) - \frac{\sigma_G - \sigma_S}{\sigma_G + \sigma_S} \int_{-\infty}^{\infty} \mu^m(\tilde{Q}) r_{\tilde{Q}} \frac{\partial G^m(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial r_{\tilde{Q}}} dz = \frac{\sigma_G - \sigma_S}{\sigma_G + \sigma_S} \cdot \frac{I}{4\pi\sigma_S} G^m(\tilde{P}, \tilde{A}).$$

Решение задачи (3.12) произведем аналогично, рассматривая $\tilde{\Omega}_G$ как включение в горизонтально-слоистой среде (рис. 3.1б):

$$G^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) = \tilde{W}^m + \tilde{V}^m, \quad G_{G,i}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) = (\tilde{W}^m + \tilde{V}^m) \cdot \frac{\sigma_i}{\sigma_G},$$

$$\tilde{W}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) = \sum_{i=1}^3 \int_{\tilde{S}_{G,i}} \tilde{\mu}_{G,i}^m(\tilde{Q}) \cdot r_{\tilde{Q}} \cdot \frac{\partial \tilde{G}^m(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial r_{\tilde{Q}}} dz, \quad \tilde{V}^m = \tilde{G}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}),$$

где $\tilde{G}^m(\tilde{P}, \tilde{Q})$ удовлетворяет следующей задаче:

$$L^m \tilde{G}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) = -\delta(\tilde{P}, \tilde{Q}); \quad \tilde{G}_i^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) \Big|_{z=z_i} = \tilde{G}_{i+1}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) \Big|_{z=z_i},$$

$$\sigma_i \frac{\partial \tilde{G}_i^m(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial z} \Big|_{z=z_i} = \sigma_{i+1} \frac{\partial \tilde{G}_{i+1}^m(\tilde{P}, \tilde{Q})}{\partial z} \Big|_{z=z_i}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad \left| \tilde{G}_i^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) \right|_{r=0} < \infty; \quad (3.13)$$

$$\tilde{G}_{1,3}^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) \rightarrow 0, \quad \sqrt{r^2 + z^2} \rightarrow \infty; \quad \tilde{G}_2^m(\tilde{P}, \tilde{Q}) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty.$$

Потенциал двойного слоя $\tilde{W}^m = \tilde{W}_1^m + \tilde{W}_2^m + \tilde{W}_3^m$ претерпевает разрыв при переходе границ $\tilde{S}_{G,1}$, $\tilde{S}_{G,2}$, $\tilde{S}_{G,3}$ (см. рис. 3.1б), для которого имеют место формулы:

$$\tilde{W}_{i,ext}^m(\tilde{P}_0) = \overline{W}_i^m(\tilde{P}_0) + 0.5 \cdot \tilde{\mu}_{G,i}^m(\tilde{P}_0), \quad \tilde{W}_{i,in}^m(\tilde{P}_0) = \overline{W}_i^m(\tilde{P}_0) - 0.5 \cdot \tilde{\mu}_{G,i}^m(\tilde{P}_0), \quad i = \overline{1, 3}, \quad (3.14)$$

где $\tilde{W}_{i,ext}^m(\tilde{P}_0)$, $\tilde{W}_{i,in}^m(\tilde{P}_0)$, $\overline{W}_i^m(\tilde{P}_0)$, $\tilde{P}_0 \in \tilde{S}_{G,i}$, $i = \overline{1, 3}$ – соответственно внешние, внутренние и прямые значения потенциалов.

Используя формулы (3.14) получим систему интегральных уравнений относительно неизвестных $\tilde{\mu}_{G,i}^m$:

$$\begin{cases} \tilde{\mu}_{G,1}^m - 2\frac{\sigma_1 - \sigma_G}{\sigma_1 + \sigma_G} \left(\bar{W}_1^m + \tilde{W}_2^m + \tilde{W}_3^m \right) = 2\frac{\sigma_1 - \sigma_G}{\sigma_1 + \sigma_G} \cdot \tilde{V}_0^m, & \tilde{Q} \in \tilde{S}_{G,1}; \\ \tilde{\mu}_{G,2}^m - 2\frac{\sigma_2 - \sigma_G}{\sigma_2 + \sigma_G} \left(\tilde{W}_1^m + \bar{W}_2^m + \tilde{W}_3^m \right) = 2\frac{\sigma_2 - \sigma_G}{\sigma_2 + \sigma_G} \cdot \tilde{V}_0^m, & \tilde{Q} \in \tilde{S}_{G,2}; \\ \tilde{\mu}_{G,3}^m - 2\frac{\sigma_3 - \sigma_G}{\sigma_3 + \sigma_G} \left(\tilde{W}_1^m + \tilde{W}_2^m + \bar{W}_3^m \right) = 2\frac{\sigma_3 - \sigma_G}{\sigma_3 + \sigma_G} \cdot \tilde{V}_0^m, & \tilde{Q} \in \tilde{S}_{G,3}; \end{cases}$$

Решение задачи (3.13) для случая n -слойного пространства получено по рекуррентным формулам методом "фиктивных границ" [3].

Используемый в работе метод обладает преимуществами. С одной стороны, он позволяет поэтапно понижать геометрическую сложность исследуемой среды, с другой – позволяет использовать для своей реализации алгоритмы допускающие распараллеливание вычислений, что значительно повышает скорость счета.

В трехмерном случае, когда круговая скважина наклонная и пересекает пласт с плоскопараллельными границами под некоторым углом, решение может быть построено другим способом – в виде интегральных представлений на основе метода интегральных уравнений [4].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В.Т., Кризский В.Н. Решение некоторых задач электроразведки методом интегральных уравнений. // Известия ВУЗов, Геология и разведка, 1993, №4, С. 122–127.
2. Воскобойников Г.М. О вычислении стационарных электромагнитных полей в некоторых кусочно-однородных средах // Изв. АН СССР. Физика Земли, 1973, - №9, - С. 73–76.
3. Викторов С.В. Математическое моделирование геоэлектрических полей в осесимметричных средах со сплайн-аппроксимацией границ: дис. канд. физ.-мат. наук / С.В. Викторов – Стерлитамак, 2005.
4. Викторов С.В. Математическое моделирование электрокаротажа пересекающей пласт скважины. // Материалы 36-ой сессии международного семинара "Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей 2009, С. 82–86.

The combined method of the decision of a problem electroinvestigations the vertical Chinks

© S. V. Viktorov²

Abstract. In the given work it is considered Mathematical model for a problem electroinvestigations and The combined method of its decision

Key Words: Potential of a field of a dot source, direct problem of electroinvestigation, modeling chinks.

²The lecturer of chair of mathematical modeling. The Sterlitamaksky state Pedagogical academy. The city of Sterlitamak. viktorov@rambler.ru

УДК 517.9

Динамика системы управления, содержащей ансамбль осцилляторов, связанных через обратную связь

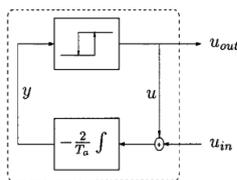
© А. С. Кузнецова¹

Аннотация. Рассматривается система осцилляторов, связанных через гистерезисную нелинейность. Исследуется динамика системы и вопросы устойчивости движений. Используются аналитический и численный подходы.

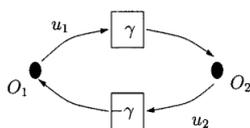
Ключевые слова: Колебательная система, осцилляторы связанные через гистерезисную нелинейность, синхронизация.

1. Введение

В данной статье рассматривается модель системы связанных осцилляторов, которая была алгоритмически описана в работе [7]. Такие системы встречаются в экологии, химии и медицине, например, при разработке устройств введения лекарств [4, 3, 5]. Система связанных осцилляторов представляет собой динамическую систему. Возникает вопрос, какие из известных нам типов движений могут возникнуть в этих системах. Модель системы изображена на рис. 1.1, 1.2:



Р и с у н о к 1.1



Р и с у н о к 1.2

Каждый осциллятор представляет собой систему с одним переменным входом $u_{in}(t)$ и одним переменным выходом $u_{out}(t)$. Значения функций $u_{in}(t)$ и $u_{out}(t)$ являются скалярами. Внутри осциллятор состоит из системы-интегратора с обратной связью, которая осуществляется через реле. Осциллятор O_1 работает следующим образом. На вход интегратора подается сумма внешнего сигнала $u_{in}(t)$ и сигнала обратной связи $u(t)$. Эта сумма интегрируется с коэффициентом $-\frac{2}{T_a}$, в результате получается сигнал $y(t)$, который поступает на вход в реле. Реле переходит из включенного состояния (на выходе 1) в выключенное (на выходе -1), если сигнал на входе $y(t)$ достигает -1 сверху и переходит из выключенного состояния во включенное, если сигнал на входе достигает 1 снизу [6, 2].

¹Аспирантка кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский государственный университет, г. Санкт-Петербург; an.s.kuznetsova@gmail.com.

В статье [1] была получена математическая модель данной системы:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{2}{T_1}(-\gamma u_2(y(t)) + u_1(x(t))), \\ \dot{y}(t) = -\frac{2}{T_2}(\gamma u_1(x(t)) + u_2(y(t))), \end{cases} \quad (1.1)$$

где $\gamma, T_1, T_2 \in R_+^1$ - параметры, $u_{10}, u_{20} \in \{1, 0\}$ - начальные условия для реле, $x_0, y_0 \in R^1$ - начальные условия для системы,

$$u_1(x(t)) = \begin{cases} -1, & \text{if } (x(t) < 1 \wedge u(t-0) = -1) \vee (x(t) = -1), \\ 1, & \text{if } (x(t) > -1 \wedge u(t-0) = 1) \vee (x(t) = 1), \\ u_{10}, & \text{if } x(\tau) \in (-1, 1) \quad \forall \tau \in [t_0, t], \end{cases}$$

$$u_2(y(t)) = \begin{cases} -1, & \text{if } (y(t) < 1 \wedge u(t-0) = -1) \vee (y(t) = -1), \\ 1, & \text{if } (y(t) > -1 \wedge u(t-0) = 1) \vee (y(t) = 1), \\ u_{20}, & \text{if } y(\tau) \in (-1, 1) \quad \forall \tau \in [t_0, t]. \end{cases}$$

Не уменьшая общности будем полагать, что $T_2 > T_1$. Была установлена следующая теорема [1]:

Т е о р е м а 1.1. Система двух осцилляторов, показанная на рисунке 1, синхронизируется, причем осциллятор O_2 опережает O_1 , тогда и только тогда, когда $\gamma > \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$. Данное синхронное состояние является устойчивым.

О п р е д е л е н и е 1.1. Процесс установления и поддержания режима колебаний двух и более связанных осцилляторов, при котором периоды этих осцилляторов совпадают называется синхронизацией [7].

2. Постановка задачи

Поставим своей задачей изучить динамику системы (3.1) при $\gamma < \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$. Для этого рассмотрим систему (3.1) и покажем, что при параметрах, удовлетворяющих неравенству $\gamma < \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$, любое решение (3.1) ограничено. Заметим, что при $T_2 > T_1 > 0$ всегда $\gamma < 1$.

Т е о р е м а 2.1. При любых начальных условиях решение $(x(t), y(t))$ системы (3.1) попадает в множество $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$ плоскости Oxy и остается там все время своего существования.

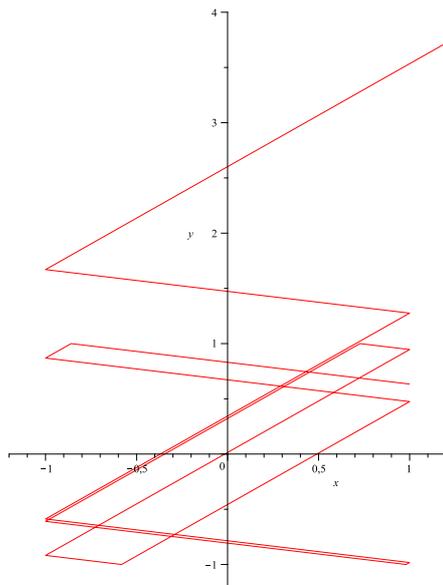
Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим правую часть (3.1). При всех допустимых управлениях фазовые траектории данной системы представляют собой ломаные прямые. Рассмотрим решение данной системы, начинающееся в точке (x_0, y_0) с начальным управлением $(1, 1)^T$ (для остальных значений управлений доказательство аналогично). В этом случае изображающая точка $(x(t), y(t))$ будет идти вдоль прямой

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{-2+2\gamma}{T_1} \\ \frac{-2-2\gamma}{T_2} \end{pmatrix} t$$

Так как $\frac{-2+2\gamma}{T_1} < 0$, $\frac{-2-2\gamma}{T_2} < 0$, следовательно существует момент t_1 , при котором одна из координат (x или y) достигнет -1 . Пусть это будет x для определенности. Следовательно, в момент t_1 управление переключится в режим $(-1, 1)^T$. Данному управлению соответствует движение вдоль прямой с направляющим вектором $\frac{2+2\gamma}{T_1} > 0$, $\frac{-2+2\gamma}{T_2} < 0$, следовательно, при любом значении u_1 , ($u_1 = 1$ или $u_1 = -1$) значение $y(t)$ будет

убывать. Таким образом существует момент \hat{t} , при котором $y(\hat{t}) = -1$. Таким образом изображающая точка $(x(t), y(t))$ попадает в множество A .

Покажем, что она остается там при возрастании t . Действительно, пусть в момент (\hat{t}) решение попадает в множество A , и пусть $u(\hat{t}) = (1, 1)^T$ (остальные три состояния управления рассматриваются аналогично). При таком управлении решение может выйти за границы области A только, если пересечет прямую $y = 1$ или $x = 1$. Но точка $(x(t), y(t))$ движется вдоль прямой с направляющим вектором $(\frac{-2+2\gamma}{T_1} < 0, \frac{-2-2\gamma}{T_2} < 0)$. Таким образом в фазовом пространстве все время, пока будет работать управление $(1, 1)^T$ будет $x < 1$ и $y < 1$.



Р и с у н о к 2.1

Доказательство закончено.

3. Система трех осцилляторов

Рассмотрим движение системы

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -\frac{2}{T_1}(u_1(x(t)) + \gamma u_3(z(t))), \\ \dot{y}(t) = -\frac{2}{T_2}(u_2(y(t)) + \gamma u_1(x(t))), \\ \dot{z}(t) = -\frac{2}{T_3}(u_3(z(t)) + \gamma u_2(y(t))), \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\gamma, T_1, T_2, T_3 \in R_+^1$ - параметры, $u_{10}, u_{20}, u_{30} \in \{-1, 1\}$ - начальные условия для реле, $x_0, y_0, z_0 \in R^1$ - начальные условия для системы, а

$$u_i(\alpha(t)) = \begin{cases} -1, & \text{if } (\alpha(t) < 1 \wedge u(t-0) = -1) \vee (\alpha(t) = -1), \\ 1, & \text{if } (\alpha(t) > -1 \wedge u(t-0) = 1) \vee (\alpha(t) = 1), \\ u_{i0}, & \text{if } \alpha(\tau) \in (-1, 1) \quad \forall \tau \in [t_0, t]. \end{cases}$$

В работе [1] была установлена теорема:

Т е о р е м а 3.1. При $1 < \gamma < 3$ существует единственное состояние синхронизации, которое описывается уравнением (3.2).

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} x_0 \\ 1 \\ z_0 \end{pmatrix} + (t - (k-1)(t_1 + t_2)) \begin{pmatrix} \frac{2-2\gamma}{T_1} \\ \frac{2\gamma-2}{T_2} \\ \frac{-2\gamma-2}{T_3} \end{pmatrix} \\ t \in [(k-1)(t_1 + t_2 + t_3), (k-1)(t_1 + t_2 + t_3) + t_1], \\ \\ (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ -1 \end{pmatrix} + (t - k(t_1 + t_2) + t_2) \begin{pmatrix} \frac{2+2\gamma}{T_1} \\ \frac{2\gamma-2}{T_2} \\ \frac{2-2\gamma}{T_3} \end{pmatrix} \\ t \in [(k-1)(t_1 + t_2 + t_3) + t_1, (k-1)(t_1 + t_2 + t_3) + t_1 + t_2], \\ \\ (-1)^{k+1} \begin{pmatrix} 1 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} + (t - k(t_1 + t_2) + t_2) \begin{pmatrix} \frac{2\gamma-2}{T_1} \\ \frac{-2\gamma-2}{T_2} \\ \frac{-2\gamma+2}{T_3} \end{pmatrix} \\ t \in [(k-1)(t_1 + t_2 + t_3) + t_1 + t_2, k(t_1 + t_2 + t_3)], \end{cases} \quad (3.2)$$

Т е о р е м а 3.2. При $1 < \gamma < 3$ у системы (3.1) существует единственное состояние синхронизации, которое является асимптотически устойчивым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим отображение Пуанкаре для движений данной динамической системы на плоскости $y = 1$. Для этого выберем начальную точку $(x_k, 1, z_k)$. В статье [4] была установлена последовательность переключений для любого решения системы (3.1), которая соблюдается по крайней мере со второго переключения: $\dots \rightarrow (-1, 1, 1) \rightarrow (-1, 1, -1) \rightarrow (1, 1, -1) \rightarrow (1, -1, -1) \rightarrow (1, -1, 1) \rightarrow (-1, -1, 1) \rightarrow \dots$. Проходя все шесть переключений фазовая кривая вновь попадает на поверхность $y = 1$. Таким образом можно записать уравнения для последовательности переключений:

$$\begin{pmatrix} x_k \\ 1 \\ z_k \end{pmatrix} + (t_1 - t_4) \begin{pmatrix} -\frac{2\gamma-2}{T_1} \\ -\frac{2-2\gamma}{T_2} \\ -\frac{2+2\gamma}{T_3} \end{pmatrix} + (t_2 - t_5) \begin{pmatrix} -\frac{-2\gamma-2}{T_1} \\ -\frac{2-2\gamma}{T_2} \\ -\frac{-2+2\gamma}{T_3} \end{pmatrix} + (t_3 - t_6) \begin{pmatrix} \frac{2\gamma-2}{T_1} \\ \frac{-2-2\gamma}{T_2} \\ \frac{2-2\gamma}{T_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ 1 \\ z_{k+1} \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Учитывая, что переключения происходят, когда одна из координат достигает значения 1 или -1 , можно записать дополнительные соотношения:

$$\begin{aligned} z_k + t_1 \left(-\frac{2+2\gamma}{T_3} \right) &= -1, x_{k+1} = -1 + t_6 \frac{(2-2\gamma)}{T_1} \\ -1 + t_4 \left(\frac{2-2\gamma}{T_2} \right) + t_5 \left(\frac{2-2\gamma}{T_2} \right) + t_5 \left(\frac{2+2\gamma}{T_2} \right) &= 1, 1 + t_1 \left(\frac{2-2\gamma}{T_2} \right) + t_2 \left(\frac{2-2\gamma}{T_2} \right) + t_3 \left(\frac{2+2\gamma}{T_2} \right) = -1 \\ -1 + t_2 \left(\frac{2-2\gamma}{T_3} \right) + t_3 \left(\frac{2-2\gamma}{T_3} \right) + t_4 \left(\frac{2+2\gamma}{T_3} \right) &= 1, 1 + t_3 \left(\frac{2-2\gamma}{T_1} \right) + t_4 \left(\frac{2-2\gamma}{T_1} \right) + t_5 \left(\frac{2+2\gamma}{T_1} \right) = -1 \end{aligned}$$

Таким образом, после исключения $t_i, i = 1..6$ получаем:

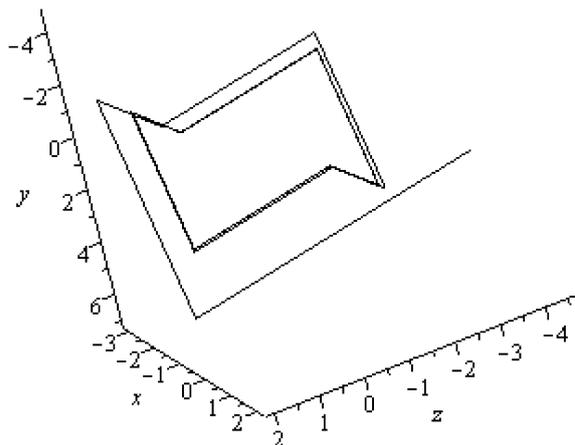
$$\begin{pmatrix} \left(\frac{1+\gamma}{1-\gamma} \right)^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2T_3\gamma}{T_1(1+\gamma)} \\ 0 & \frac{\gamma-1}{1+\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - \left[\frac{2T_3\gamma}{(1+\gamma)T_1} + \frac{2(1+\gamma^2)}{(1-\gamma)^2} + \frac{2T_2(1+\gamma)}{T_1(\gamma-1)} \right] \\ \frac{2}{1+\gamma} - 2\frac{T_1\gamma}{T_3(1-\gamma)} + 2\frac{T_2}{T_3} \end{pmatrix}$$

Так как матрица при $(x_{k+1}, z_{k+1})^T$ неособая, следовательно, у нее существует обратная, и уравнение можно переписать в виде:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^2 & -\frac{2T_3\gamma(1-\gamma)^2}{T_1(1+\gamma)^3} \\ 0 & \frac{-\gamma+1}{1+\gamma} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right)^2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{2T_3\gamma}{(1+\gamma)T_1} - \frac{2(1+\gamma)^2}{(1-\gamma)^2} - \frac{2T_2(1+\gamma)}{T_1(\gamma-1)} \\ \frac{2}{1+\gamma} - 2\frac{T_1\gamma}{T_3(1-\gamma)} + 2\frac{T_2}{T_3} \end{pmatrix}$$

Собственные числа матрицы при (x_k, z_k) по модулю меньше 1, поэтому последовательность сходится. Следовательно решение асимптотически устойчиво.

Доказательство закончено.

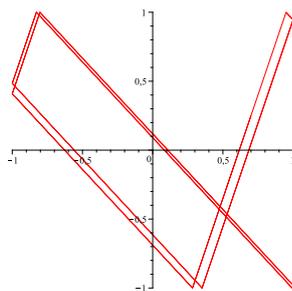


Р и с у н о к 3.1

Пример 3.1. График решения системы 3.1 с начальными значениями $x_0 = 1.5, y_0 = 4, z = -4, u_1 = 1, u_2 = 1, u_3 = -1$, значениями параметров $\gamma = 1.5, T_1 = 3, T_2 = 7, T_3 = 9$ в фазовом пространстве Oxy .

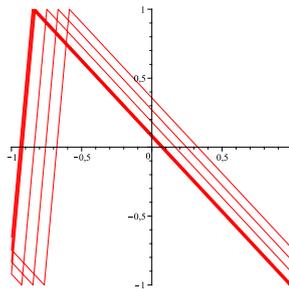
4. Пространство параметров

Исследуем пространство параметров γ, T_1, T_2 системы 1.1. Было показано [1], что при $\gamma > \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$ система имеет единственное асимптотически устойчивое периодическое решение, которое устойчиво при любых начальных данных x_0, y_0, u_{10}, u_{20} . В теореме 2.1. показано, что при $0 < \gamma < \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$ любое решение системы 1.1 ограничено в фазовом пространстве областью $A = [-1, 1] \times [-1, 1]$. Методом компьютерного моделирования было получено, что при $0 < \gamma < \frac{T_2 - T_1}{T_2 + T_1}$ могут существовать периодические решения:

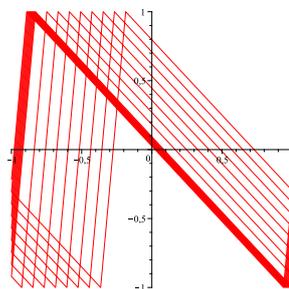


Р и с у н о к 4.1

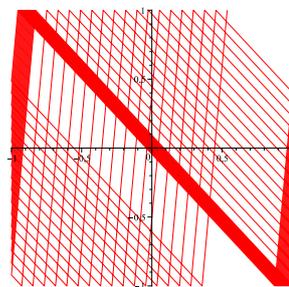
Пример 4.1. График решения системы 3.1 с начальными значениями $x_0 = 0.8, y_0 = 0.5, u_1 = 1, u_2 = 1$, значениями параметров $\gamma = 0.5, T_1 = \sqrt{3} + 1, T_2 = 9$.



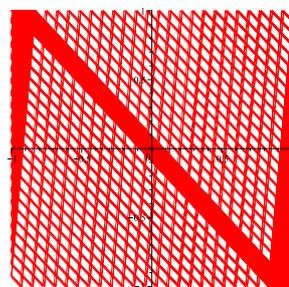
Р и с у н о к 4.2



Р и с у н о к 4.3



Р и с у н о к 4.4



Р и с у н о к 4.5

Пример 4.2. График решения системы 3.1 с начальными значениями $x_0 = 1, y_0 = -1, u_1 = 1, u_2 = -1$, значениями параметров $\gamma = \frac{11}{21}, T_1 = 7, T_2 = 2$. Вышеприведенные рисунки соответствуют 20, 50, 100, 450.

Численно было получено, что все решения системы 3.1 не являются грубыми относительно параметров γ, T_1, T_2 , динамика системы существенно зависит от начальных данных.

5. Заключение

Рассмотрена система осцилляторов, связанных через гистерезисную нелинейность. Показано, что могут существовать устойчивые и неустойчивые решения. Показано, что все решения являются ограниченными. С помощью аналогичного подхода может быть исследована динамика системы, состоящей из любого конечного числа n связанных осцилляторов типа O_1 .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецова А.С. Синхронизация в осцилляторах, соединенных через обратную связь // Процессы управления и устойчивость: Труды 41-й международной конференции студентов и аспирантов. – 2011. В печати.
2. Магнус К. Колебания. – М.: Мир, 1982. – 303 с.
3. Мигулин В.В. Основы теории колебаний. – М.: Наука, 1978. – 391 с.
4. Фейгин М.И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. – М.: Наука, 1994. – 285 с.
5. Li B., Siegel R.A. Global analysis of a model pulsing drug delivery oscillator based on chemomechanical feedback with hysteresis // Chaos. – 2000. – № 3. – P. 682-690.
6. Macki J.W., Nistri P., Zecca P. Mathematical models for hysteresis // SIAM Review. – 1993. – № 1. – P. 94-123.
7. Varigonda S., Georgiou T.T. Dynamics of relay relaxation oscillators // Transactions on automatic control. – 2001. – № 1. – P. 65-77.

The dynamics of coupled oscillators with a feedback

© A. S. Kuznetsova²

Abstract. The dynamics of coupled relay oscillators is considered. The stability of synchrony mode was established. The boundness of motions was established. The approach is based on state-space representations.

Key Words: Coupled relay oscillators, synchronization.

²Postgraduate student of Higher Mathematics chair, Saint-Petersburg state university, Saint-Petersburg; an.s.kuznetsova@gmail.com.

УДК 519.6

Применение рядов Тейлора-Фурье для численного и экспериментального определения производных изучаемой зависимости

© Н. Д. Кузьмичев¹

Аннотация. Получены формулы для коэффициентов ряда Фурье функции разложимой в ряд Тейлора выраженные через производные, а также ряды для первой и второй производных функции, составленные из коэффициентов ряда Фурье. С помощью вышеотмеченных выражений определены формулы численного дифференцирования и экспериментального восстановления производных. Даны оценки точности восстановления производных.

Ключевые слова: модуляционный Фурье-анализ, ряд Тейлора-Фурье, численное дифференцирование, экспериментальное восстановление производных, точность восстановления.

1. Введение

В экспериментальной физике (в оптике, сверхпроводимости и т.д.) широко применяется метод модуляционного Фурье-анализа [1-3]. Данный метод используется в тех случаях, когда непосредственное измерение физической характеристики по каким либо причинам затруднено. Например, исследуемая нелинейная часть зависимости замаскирована значительной ее линейной частью, или определяется динамическая зависимость. В вышеотмеченном методе определяется физическая характеристика материала или ее производная с помощью изучения отклика этого материала на модулированное внешнее воздействие, например гармоник сигнала отклика. Хорошо известно, что при малых амплитудах модуляции (модуляционная методика) зависимость амплитуды первой гармоники сигнала отклика от величины статического воздействия с точностью до постоянного множителя является практически первой производной исследуемой зависимости (см. например [1]). В случае произвольных амплитуд модуляции это не так. Необходимо учитывать амплитуды высших гармоник сигнала отклика, как показано в работах [2, 3].

В настоящей работе мы приводим обоснование формул полученных в указанных работах, формулы численного дифференцирования и оценки точности восстановления производных.

2. Ряд Тейлора-Фурье

Пусть функция (исследуемая зависимость) $f(x)$ разложима в ряд Тейлора в точке x_0 , т.е. $f(x) \in C^\infty((x_0 - R, x_0 + R))$ и остаточный член в формуле Тейлора для $f(x)$ стремится к нулю. Здесь R – радиус сходимости указанного ряда. Введем обозначение $x - x_0 = z$. Допустим, величина z является функцией параметра τ . Так например, в экспериментальной физике широко используется гармонический модуляционный анализ [1-3], и z от времени меняется по гармоническому закону, например: $z(\tau) = h \cdot \cos(\omega\tau)$. Физически это означает, что x_0 – есть величина статического воздействия, а величина

¹Заведующий кафедрой общенаучных дисциплин, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; kuzmichevnd@yandex.ru.

h – является амплитудой модуляции данного воздействия с циклической частотой ω . Вследствие чего функция f будет зависеть от τ (времени) периодически. В окрестности x_0 функции $f(x)$ соответствует ряд Тейлора [4, 5]:

$$f(x_0 + z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} f^{(n)}(x_0). \tag{2.1}$$

Здесь $f^{(n)}(x_0)$ - производная порядка n в точке x_0 и $|z| < R$. Так как $z(\tau)$ меняется по гармоническому закону, то ряд (2.1) преобразуется в ряд Фурье [2, 3]:

$$f(x_0 + h \cdot \cos t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \cdot \cos^n t}{n!} f^{(n)}(x_0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cdot \cos(mt), \tag{2.2}$$

где $t = \omega\tau$ и

$$A_m = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+m)!} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+m} f^{(2n+m)}(x_0). \tag{2.3}$$

Справедливость формулы (2.3) действительно вытекает из результата вычисления коэффициентов A_m ряда Фурье (2.2). Коэффициенты A_m определим по формуле (в силу удобства возьмем пределы интегрирования 0 и 2π):

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n \cdot \cos^n t}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot \cos(mt) dt = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x_0) \cdot \int_0^{2\pi} \cos^n t \cdot \cos(mt) dt.$$

Вычислим интеграл

$$\int_0^{2\pi} \cos^n t \cdot \cos(mt) dt \tag{2.4}$$

Интеграл (2.4) отличен от нуля, тогда когда $n = 2k + m$ и равен:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k+m}(t) \cdot \cos(mt) dt = \frac{\pi}{2^{2k+m-1}} \cdot \frac{(2k+m)!}{k!(k+m)!}, \tag{2.5}$$

где $m, k = 0, 1, 2, \dots$

Вычисление интеграла (2.4) произведем путем замены $\cos x$ выражением $(e^{ix} + e^{-ix})/2$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^n t \cdot \cos(mt) dt &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^{2\pi} e^{i(n-k)t} e^{-ikt} (e^{imt} + e^{-imt}) dt = \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^n C_n^k \int_0^{2\pi} (e^{i(n-m-2k)t}) dt. \end{aligned}$$

Здесь $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ – биномиальный коэффициент, а i – мнимая единица. Интеграл отличен от нуля при условии когда, $n + m - 2k = 0$ и $n - m - 2k = 0$. Т.е. в сумме останется по одному члену при $k = (n - m)/2$ и $k' = (n + m)/2$. Учитывая четность величин $(n - m)$ и $(n + m)$ при целых k имеем: $n = 2k + m$ и $k' = k + m$. В результате получим:

$$\int_0^{2\pi} \cos^n t \cdot \cos(mt) dt = \int_0^{2\pi} \cos^{2k+m} t \cdot \cos(mt) dt = \frac{\pi}{2^{2k+m-1}} \cdot \frac{(2k+m)!}{k!(k+m)!}.$$

Проверим справедливость (2.5) при любых m и $k = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \cos^m t \cdot \cos mt dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^m \left(\frac{e^{imt} + e^{-imt}}{2} \right) dt = \\ &= \frac{1}{2^{m+1}} \sum_{k=0}^m C_m^k \left[\int_0^{2\pi} e^{(2m-2k)it} dt + \int_0^{2\pi} e^{-2kit} dt \right] = \frac{\pi}{2^{m-1}}. \end{aligned}$$

При $m = 0$ вычисления дают (2.5):

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2k} t dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^{2k} dt = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{m=0}^k C_{2k}^m \int_0^{2\pi} e^{2(m-k)it} dt = \frac{\pi}{2^{2k-1}} \cdot \frac{(2k)!}{(k!)^2}.$$

Пример 2.1. Пусть $f(x) = \cos x$, при $x = h \cdot \cos t$ будем иметь хорошо известный ряд Фурье: $\cos(h \cdot \cos t) = J_0(h) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_{2m}(h) \cos(2mt)$, где $J_{2m}(h)$ – функция Бесселя первого рода порядка $2m$.

Таким образом, мы для функции $f(x)$ при $x = h \cdot \cos t$ имеем ряд Тейлора (2.1) и ряд Фурье (2.2). Коэффициенты ряда Фурье (2.3) являются функциями величин статического воздействия x_0 и амплитуды модуляции h .

Вышеприведенные доводы можно сформулировать в виде теоремы.

Теорема 2.1. Если функция $f(x)$ для всех $x \in (x_0 - R, x_0 + R)$ разложима в ряд Тейлора, то при $x = x_0 + h \cos t$, где $h \leq R$, функция $f(x_0 + h \cos t)$ разлагается в ряд Фурье вида $\frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos mt$, где $A_m = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(n+m)!} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^{2n+m} \cdot f^{(2n+m)}(x_0)$, а величина $f^{(2n+m)}(x_0)$ является производной порядка $2n + m$ в точке x_0 .

Замечательным свойством выражения (2.3) есть то, что первым членом ряда коэффициента Фурье A_m порядка m является m -ая производная $f^{(m)}(x)$. То есть, в высшие гармоники вклад дают высшие производные.

Т.о. мы получили формулы для коэффициентов Фурье (амплитуд гармоник) выраженные через производные функции. Естественно возникает обратная задача – выразить функцию и ее производные через коэффициенты Фурье. Практическое значение имеют первая и вторая производные.

3. Связь производных с коэффициентами Фурье функции

Вычислим производную по параметру t от $f(x)$, где $x = x_0 + h \cdot \cos t$:

$$\frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} = h \sin t \left(\frac{df}{dx} \right)_{x=x_0+h \cos t} = \sum_{m=1}^{\infty} mA_m \sin mt. \quad (3.1)$$

Положим в (3.1) $t = \pi/2$ и в результате получим ряд для производной f :

$$\left(\frac{df}{dx} \right)_{x_0} = f^{(1)}(x_0) = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m-1) A_{2m-1}(x_0, h). \quad (3.2)$$

Пример 3.1. Найдем производную для функции:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx} \sinh(x) \right) \Big|_{x=x_0} &= \frac{2\cosh(x_0)}{h} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m-1) I_{2m-1}(h) = \\ &= \frac{2\cosh(x_0)}{h} \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(h/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!} - 3 \frac{(h/2)^{2k+3}}{k!(k+3)!} + 5 \frac{(h/2)^{2k+5}}{k!(k+5)!} - \dots \right] = \cosh(x_0) \end{aligned}$$

Для функции $f(x)$ и ее второй производной следуя алгоритму вычисления формулы (3.2) получим ряды:

$$f(x_0) = \frac{A_0(x_0, h)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m A_{2m}(x_0, h), \tag{3.3}$$

$$\left(\frac{d^2 f}{dx^2} \right)_{x_0} = \frac{1}{h^2} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m)^2 A_{2m}(x_0, h). \tag{3.4}$$

В итоге мы в своем арсенале имеем коэффициенты Фурье, выраженные через производные и производные, выраженные через коэффициенты Фурье. В плане приложения важны не столько ряды, сколько конечные суммы.

Формулы (3.2) – (3.4) не требуют таких жестких ограничений накладываемых на функцию $f(x)$, какие требуют формулы (2.1) – (2.3). Например, для справедливости формулы (3.2) необходимо, чтобы $f(x)$ в точке x_0 имела производную.

Ниже рассмотрим случаи численного дифференцирования и экспериментального определения первой и второй производной исследуемой зависимости.

4. Формулы численного дифференцирования

Численное дифференцирование широко используется в вычислительной математике и при моделировании процессов в естественных и технических науках. Например, при решении ряда задач на компьютере, из-за громоздкости выкладок оказывается значительно удобнее выполнять вычисление производных численным методом. Другой областью численного представления производных являются численные методы решения дифференциальных уравнений.

В настоящем разделе приводятся формулы численного представления высших производных полученных с помощью Фурье-гармоник функции.

Рассмотрим функцию $f(y)$, которую можно представить при $y = x + h \cdot \cos t$ рядом Фурье (2.2). Первую производную функции $f(y)$ выразим через амплитуды гармоник (коэффициенты Фурье) A_m (3.2) [6]:

$$f^{(1)}(x, h) = \frac{1}{h} (A_1 - 3A_3 + 5A_5 - \dots). \tag{4.1}$$

Вторая и другие высшие производные имеют вид (3.4) [4]:

$$f^{(2)}(x, h) = \frac{1}{h^2} (4A_2 - 16A_4 + \dots), \tag{4.2}$$

$$f^{(3)}(x, h) = \frac{24}{h^3} A_3 + \dots, \quad (4.3)$$

$$f^{(4)}(x, h) = \frac{192}{h^4} A_4 + \dots \quad (4.4)$$

Коэффициенты Фурье (2.3) выразим через интегралы [4, 5]:

$$A_m(x, h) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x + h \cos t) \cos mt dt. \quad (4.5)$$

Учитывая первые члены разложения (4.1) и выражение (4.5) получим аппроксимацию первой производной с погрешностью $O(h^2)$:

$$f^{(1)}(x, h) = \frac{1}{h\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x + h \cos t) \cos t dt + O(h^2). \quad (4.6)$$

Действительно. Подынтегральную функцию (4.6) разложим по формуле Тейлора с точностью до $O(h^3)$ и в результате вычисления интегралов от $\cos^m(x)$ ($m = 1, 2, 3, 4$) получим:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x, h) &= \frac{1}{h\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \left[f(x) + hf^{(1)}(x) \cos t + \frac{h^2}{2} f^{(2)}(x) \cos^2 t + \frac{h^3}{6} f^{(3)}(x_*) \cos^3 t \right] \cos t dt = \\ &= f^{(1)}(x) + \frac{h^2}{8} f^{(3)}(x_*) = f^{(1)}(x) + O(h^2). \end{aligned}$$

Здесь $x_* \in (x_0 - h, x_0 + h)$.

Вычисление интегралов в силу удобства выполним по формуле трапеций с шагом $\tau = \pi/2$ (при этом оценка погрешности выражения (4.6) не нарушается):

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x, h) &= \frac{1}{h\pi} \cdot \frac{\pi}{2} [f(x+h) - f(x-h)] + O(h^2) = \\ &= \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Полученная формула (4.7) совпадает с хорошо известным выражением для первой производной [8-10]. Следует отметить, что уменьшение шага интегрирования не уменьшает порядок аппроксимации.

Точность производной увеличивается на два порядка с учетом амплитуды третьей гармоники (формула (4.1)). При вычислении интегралов для A_1 и A_3 с учетом того, что $\cos(3t)$ имеет 6 ветвей возрастания и убывания, шаг интегрирования возьмем равным $\tau = \pi/6$. В итоге получим:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(x, h) &= \frac{1}{6h} \cdot \left\{ \sqrt{3} \left[f\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}h\right) - f\left(x - \frac{\sqrt{3}}{2}h\right) \right] - 2 [f(x+h) - f(x-h)] + \right. \\ &\quad \left. + 7 \left[f\left(x + \frac{1}{2}h\right) - f\left(x - \frac{1}{2}h\right) \right] \right\} + O(h^4). \end{aligned}$$

Заменим $h/2$ на h и выразим производную:

$$f^{(1)}(x, h) = \frac{1}{12h} \{ \sqrt{3} [f(x + \sqrt{3}h) - f(x - \sqrt{3}h)] - 2 [f(x + 2h) - f(x - 2h)] + 7 [f(x + h) - f(x - h)] \} + O(h^4). \tag{4.8}$$

Учет в формуле (4.1) A_5 уменьшит погрешность аппроксимации на два порядка ($O(h^6)$), но приведет к более громоздким формулам.

Выполним проверку (4.8). Разложим по формуле Тейлора функции $f(x \pm h)$, $f(x \pm 2h)$ и $f(x \pm \sqrt{3}h)$. Полученные выражения подставим в (4.8) и после преобразования получим:

$$f^{(1)}(x) \approx \frac{1}{12h} [6hf^{(1)}(x) + 3h^3f^{(3)}(x) - 8hf^{(1)}(x) - \frac{16}{3}h^3f^{(3)}(x) + 14hf^{(1)}(x) + \frac{7}{3}h^3f^{(3)}(x) + O(h^5)] = f^{(1)}(x) + O(h^4).$$

Таким образом, формула (4.8) справедлива с погрешностью $O(h^4)$.

При получении формулы для $f^{(2)}$ воспользуемся первым членом (4.2) и шаг интегрирования возьмем равный $\pi/4$ и тогда имеем:

$f^{(2)}(x, h) \approx \frac{4}{h^2} A_2$, где $A_2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} f(x + h \cos t) \cos 2t dt$. При вычислении данного интеграла методом трапеций получим известную формулу [6 - 9]:

$$f^{(2)}(x, h) = \frac{1}{h^2} [f(x + h) - 2f(x) + f(x - h)] + O(h^2).$$

Выражение для второй производной с погрешностью $O(h^4)$ имеет вид:

$$f^{(2)}(x, h) = \frac{1}{h^2} \left\{ \begin{aligned} &-\frac{3}{2} [f(x + h) + f(x - h)] - 5f(x) + \\ &+\frac{\sqrt{2}}{2} [f(x + h \cos \frac{\pi}{8}) + f(x - h \cos \frac{\pi}{8})] - \\ &-\frac{\sqrt{2}}{2} [f(x + h \cos \frac{3\pi}{8}) + f(x - h \cos \frac{3\pi}{8})] + \\ &+4 [f(x + \frac{\sqrt{2}}{2}h) + \frac{\sqrt{2}}{2}f(x - h)] \end{aligned} \right\} + O(h^4).$$

Данное выражение можно видоизменить путем замены h на $h/2$.

Для третьей и четвертой производных с учетом выражений (4.3) и (4.4) получаются следующие выражения:

$$f^{(3)}(x, h) = \frac{1}{2h^3} \{ [f(x + 2h) - f(x - 2h)] - 2 [f(x + h) - f(x - h)] \} + O(h^2) \tag{4.9}$$

$$f^{(4)}(x, h) = \frac{3}{2h^4} [f(x + 2h) - 2f(x + \sqrt{2}h) + 2f(x) - 2f(x - \sqrt{2}h) + f(x - 2h)] + O(h^2).$$

При вычислении высших производных, используя формулу трапеций, учитывалось, что $\cos(2t)$ имеет 4 ветви возрастания и убывания, $\cos(3t) - 6$, а $\cos(4t) - 8$ ветвей.

Проверим точность формулы для третьей производной. Воспользуемся теми же формулами, которые мы использовали при проверке выражения (4.8).

$$\begin{aligned} f^{(3)}(x) &\approx \frac{1}{2h^3} \left[4hf^{(1)}(x) + \frac{8}{3}h^3 f^{(3)}(x) - 4hf^{(1)}(x) - \frac{16}{3}f'''(x) - \frac{2}{3}h^3 f^{(3)}(x) + O(h^5) \right] = \\ &= f^{(3)}(x) + O(h^2) \end{aligned}$$

Пример 4.1. Найдем $f^{(4)}$ для $f = \sin x$:

$$\begin{aligned} (\sin x)^{(4)} &= \frac{3}{h^4} \sin x \left[\cos(2h) - 2\cos(\sqrt{2}h) + 1 \right] + O(h^2) = \left\langle \cos t \approx 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{24} \right\rangle = \\ &= \frac{3 \sin x}{h^4} \left(\frac{2}{3}h^4 - \frac{1}{3}h^4 \right) + O(h^2) = \sin x + O(h^2) \end{aligned}$$

Повысить точность высших производных на два порядка возможно путем учета высших гармоник функции (см. формулы (3.4), (4.1), (4.2)). Например, во второй производной необходимо учесть 4-ю гармонику, в третьей – пятую, в четвертой – шестую гармонику и так далее, следуя выше приведенному алгоритму.

Следует отметить, что наиболее простой и практичный вид имеет третья производная (4.9).

5. Экспериментальное исследование зависимости и ее производных

На практике при экспериментальном исследовании зависимости с помощью изучения высших гармоник (метод модуляционного Фурье анализа) необходимо учитывать измерительные шумы, определяемые соотношением “сигнал/шум”. В этом случае для оценки точности восстановления исходной зависимости и ее производных необходимо воспользоваться критерием сходимости рядов Фурье и Тейлора и в некоторых случаях большое число членов ряда нет необходимости учитывать.

Часто в эксперименте измеряемой зависимостью является напряжение U (эдс) возникающее на датчике, которое прямо пропорционально исследуемой зависимости или ее производной, например, вольтамперная характеристика (ВАХ) или дифференциальное сопротивление соответственно [1-7]. Учитывая сказанное, запишем: $U(x) = C \cdot f(x)$. В случае ВАХ $C = 1$, а $x = I$ (где I – сила тока). Коэффициенты Фурье A_m есть амплитуды гармоник напряжения, т.е. $A_m \equiv U_m(x_0, h)$ и $x_0 + h \cdot \cos t$ (x_0 – сила постоянного тока, h – амплитуда переменного тока и t – параметр определенный выше, т.е. $t = \omega\tau$). В этом случае экспериментально определенным напряжением U^* будет несинусоидальный периодический сигнал, который в основном определяется суммой:

$$U^*(t) = \frac{U_0^*}{2} + \sum_{m=1}^N U_m^* \cdot \cos(t).$$

Здесь N – число гармоник, для которых $|U_m^*| > \Delta U$, где ΔU – ошибка измерения.

Для оценки ошибки восстановления производной df/dx при отсутствии гистерезиса в зависимости $f(x)$ воспользуемся рядом Фурье (2.2) и рядом для производной (3.2) [3 - 5]. Будем считать, что df/dx - "истинная" производная исследуемой ("истинной") зависимости, определяемая рядом (3.2). Выражение df_*/dx является восстановленной производной, определяемой конечной суммой экспериментально определенных амплитуд $U_m^*(x_0, h)$:

$$\frac{df_*}{dx} = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^N (-1)^{m-1} \cdot (2m - 1) \cdot U_{2m-1}^* \tag{5.1}$$

Ошибку оценим по формуле:

$$\left| h \cdot \frac{df}{dx} - h \cdot \frac{df_*}{dx} \right| < \delta U \tag{5.2}$$

С учетом формул (3.2) и (5.1) выражение (5.2) с остаточным членом ряда (3.2) R_N примет вид:

$$\left| \sum_{m=1}^N (-1)^{m-1} (2m - 1) \cdot A_{2m-1} + R_N - \sum_{m=1}^N (-1)^{m-1} (2m - 1) \cdot U_{2m-1}^* \right| < \delta U \tag{5.3}$$

Здесь δU - величина (некоторое напряжение), определяющая точность восстановления; N - число экспериментально определённых, нечётных гармоник напряжения U_k^* , ограниченное напряжением шумов U_{III} и ошибкой измерения. Где U_{III} - среднее квадратичное напряжение шумов. Пусть величина ΔU в целом (с учетом U_{III}) является ошибкой измерения напряжения U . Необходимо чтобы при всех $k \leq N$, $U_k^* > \Delta U(U_{III})$. Остаток ряда (3.2) R_N очевидно равен $R_N = \sum_{m=N+1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m - 1) \cdot A_{2m-1}$.

Заметим, что при заданной ошибке измерения напряжения ΔU число наблюдаемых гармоник с амплитудой большей ошибки растет с ростом амплитуды модуляции и зависит от "степени нелинейности исходной зависимости". "Степень нелинейности" будем определять числом доминирующих членов ряда Тейлора зависимости f . Высокая степень нелинейности, т.е. когда у функции имеются резкие изменения, т.е. "скачки" или "выбросы" близкие к изломам и разрывам первого рода обуславливает медленную сходимость ряда. Более наглядно это можно объяснить тем, что резкие "выбросы" (изменения) у функции описываются высокими частотами гармоник Фурье или высокими степенями полинома. Наибольшая наблюдаемая частота (номер) гармоники или степень полинома будут фактически обратно пропорциональна ширине "выброса" или скачка.

Оценим теперь величину δU . Допустим, что ошибка измерения величин U_k^* для всех $k \leq N$ имеет одинаковую величину ΔU , тогда:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=1}^N (-1)^{m-1} (2m - 1) \cdot A_{2m-1} + R_N - \sum_{m=1}^N (-1)^{m-1} (2m - 1) \cdot U_{2m-1}^* \right| < \\ & < \sum_{m=1}^N (2m - 1) |A_{2m-1} - U_{2m-1}^*| + |R_N|. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|A_{2m-1} - U_{2m-1}^*| \leq \Delta U$ для абсолютной ошибки получим:

$$\delta U_a = \left| h \cdot \frac{df}{dx} - h \cdot \frac{df_*}{dx} \right| < \Delta U \cdot \sum_{m=1}^N (2m - 1) + |R_N| = N^2 \cdot \Delta U + |R_N| \tag{5.4}$$

Среднеквадратичная ошибка будет равна:

$$\delta U_S = \sqrt{\sum_{m=1}^N (2m-1)^2 \cdot \Delta U^2 + R_N^2} = \Delta U \cdot \sqrt{N(2N-1)(2N+1)/3 + \frac{R_N^2}{\Delta U^2}}.$$

Тогда точное значение $h \cdot (df/dx)$ находится в пределах:

$$h \cdot \frac{df^*}{dx} \pm \Delta U \sqrt{N(2N-1)(2N+1)/3 + \frac{R_N^2}{\Delta U^2}} \quad (5.5)$$

Не определенным остается остаточный член R_N ряда. Величина остатка R_N зависит от дифференциальных свойств функции $f(x)$ [4, 5]. При определении производной df/dx мы предполагаем её существование. Если $f(x)$, кроме того, имеет d^2f/dx^2 удовлетворяющую условиям Дирихле [4, 5], то R_N легко оценить и он по модулю меньше, чем U_0/N т.е.: $|R_N| < U_0/N$. Здесь U_0 – некоторая положительная величина, оценку которой дадим ниже. Действительно, так как для абсолютной сходимости остатка R_N необходимо, чтобы истинные A_{2m-1} имели оценку: $|A_{2m-1}| < U_0/(2m-1)^3$. Т.е. мы получаем:

$$|R_N| = \left| \sum_{m=N+1}^{\infty} (-1)^{m-1} (2m-1) \cdot A_{2m-1} \right| < U_0 \sum_{m=N+1}^{\infty} \frac{1}{m^2} < \frac{U_0}{N} \quad (5.6)$$

Более наглядно восстанавливаемая производная является непрерывной и имеет конечное число изломов. Если исследуемая зависимость $U(x)$ обладает гистерезисными свойствами оценка (5.6) не годится. В этом случае сама производная имеет разрывы первого рода.

За величину U_0 грубо можно взять максимальное по модулю значение из всего множества U_{2m-1}^* наблюдаемых гармоник ($U_0 = \max |U_{2m-1}^*|$), например, U_1^* – амплитуду первой гармоники. Более точно в качестве U_0 можно взять $\max |U_{2m-1}^*|$ при $m > N$, т.е. максимальный модуль отбрасываемых амплитуд гармоник, например, $|U_{2N+1}^*|$ – модуль первой из отбрасываемых гармоник или ошибку ΔU измерения амплитуды гармоники. Тогда среднеквадратичная ошибка восстановления будет равна:

$$\delta U_S = \left(\Delta U \sqrt{N(2N-1)(2N+1)/3 + \frac{1}{N^2}} \right) \Big|_{N \gg 1} \propto \Delta U \cdot N^{3/2} \quad (5.7)$$

Абсолютная ошибка определится по формуле: $\delta U_a = (N^2+1/N) \cdot \Delta U$. Среднеквадратичная ошибка восстановления δU растет с ростом N как $N^{3/2}$. Поэтому при некотором значении $N_{кр}$ величина δU будет сравнима с восстанавливаемой производной ($\delta U \approx h \cdot (dU/dx)$). Критическое число амплитуд гармоник $N_{кр}$ можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} h \frac{df}{dx} &= \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \cdot (2m-1) \cdot A_{2m-1} < \sum_{m=1}^{\infty} (2m-1) \cdot |A_{2m-1}| \approx \\ &\approx A_* \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(2m-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} A_* \approx U^*. \end{aligned}$$

Значит, используя формулу (5.7) получим:

$$N_{кр} = \sqrt[3]{\left(\frac{U^*}{\Delta U}\right)^2}. \quad (5.8)$$

Например, при 10% точности измерений $N_{кр} = 5$, т.е. учет в формуле (5.1) 9-ой гармоники будет критическим.

В общем случае если $m + 1$ производная будет удовлетворять условиям Дирихле, то остаток ряда будет оцениваться: $|R_N| \propto U_0/N^m$. Здесь показатель степени $m > 2$. В этом случае коэффициенты Фурье убывают очень быстро.

При восстановлении самой исследуемой зависимости f получается следующая оценка:

$$\delta U = \sqrt{(N + 1) \Delta u^2 + [U_0 / (2N)]^2};$$

Для второй производной исследуемой зависимости d^2f/dx^2 имеем:

$$\delta U = \sqrt{(8/15)N(N + 1)(2N + 1)(3N^2 + 3N - 1) \cdot \Delta u^2 + [U_0 / (2N^2)]^2}.$$

Отметим, что при восстановлении исследуемой зависимости предполагалось существование ее производной, а при восстановлении второй производной исследуемой зависимости предполагалось существование Зей производной удовлетворяющих условиям Дирихле, соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Солимар Л. Туннельный эффект в сверхпроводниках и его применение // М.: Мир – 1974 – 428с.
2. Кузьмичев Н.Д. Поведение намагниченности поликристаллических образцов $YBa_2Cu_3O_{7-x}$ в слабых магнитных полях // Письма в ЖТФ – 1991 – Т. 17, Вып. 7 – С. 56-60.
3. Кузьмичев Н.Д. Гистерезисная намагниченность и генерация гармоник магнитными материалами: Анализ спектра гармоник намагниченности на примере высокотемпературных сверхпроводников // ЖТФ – 1994 – Т. 64, Вып. 12 – С. 63-74.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3 т. // М.: Наука – 1970 – Т. 2 – 800 с.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. // М.: Наука – 1974 – Т. 2 – 656 с.
6. Кузьмичев Н.Д. Модуляционная методика восстановления исходных зависимостей и их производных в случае произвольных амплитуд модуляции // Письма в ЖТФ – 1994 – Т. 20, Вып. 22 – С. 39-43.
7. Кузьмичев Н.Д. Оценки ошибок модуляционного восстановления функции отклика и ее производных // ЖТФ – 1997 – Вып.37. №7 – С. 124-127.
8. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов, 2-е изд., перераб. и доп. // М.: ФИЗМАТЛИТ – 2005. – 304 с.
9. Пирумов У.Г. Численные методы. // М.: Дрофа – 2003 – 224 с.
10. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. // М.: Наука – 1989 – 421 с.

Application of the Taylor-Fourier series for numerical and experimental calculation of investigation dependance derivatives.

© N. D. Kuzmichev²

Abstract. Found the formulas for Fourier series coefficient of function expanding Taylor serie and formulas for numerical and experimental calculation of derivatives with help Fourier series coefficients.

Key Words: modulation Fourier analysis, Taylor-Fourier series, numerical differentiation, experimental founding of derivatives, precision of calculation.

²Head of sub-department of general scientific disciplines, Mordovian State Univercity after N.P. Ogarev, Saransk; kuzmichevnd@yandex.ru.

УДК 517.9

Математическое моделирование процессов переноса в плоских каналах

© В. В. Лукашев¹, В. Н. Попов², А. А. Юшканов³

Аннотация. В рамках кинетического подхода в изотермическом приближении построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи о течении разреженного газа в плоском канале с бесконечными стенками, обусловленного градиентом давления, параллельного стенкам канала (течении Пуазейля). В качестве основного уравнения используется БГК-модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия – модель зеркально-диффузного отражения. С учетом построенной функции распределения вычислен поток массы в направлении градиента давления, приходящийся на единицу ширины канала. Проведено сравнение с аналогичными результатами, полученными численными методами.

Ключевые слова: кинетическое уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, точные аналитические решения, модели граничных условий, коэффициенты аккомодации

1. Введение

Теоретические исследования взаимодействия газа с обтекаемыми поверхностями являются исключительно сложными особенно для реальных поверхностей [1]. В силу этого по-прежнему актуальными остаются модели граничных условий, которые используют такие интегральные характеристики взаимодействия молекул газа с поверхностями, как коэффициенты аккомодации. Одной из таких моделей граничных условий является зеркально-диффузное граничное условие Максвелла [2]

$$f^+(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}) = (1 - q) f^-(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v} - 2\mathbf{n}_0(\mathbf{n}_0\mathbf{v})) + q f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v}). \quad (1.1)$$

Здесь $f^+(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v})$ – функция распределения молекул, падающих на стенку, $f^-(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v})$ – отраженных от стенки зеркально, а $f_s(\mathbf{r}'_s, \mathbf{v})$ – отраженных от стенки диффузно, \mathbf{r}'_s – координаты точек поверхности, \mathbf{v} – скорости движения центров масс молекул газа, q – вероятность того, что молекула, летящая к стенке отразится диффузно, $1 - q$ – вероятность того, что молекула, летящая к стенке отразится зеркально.

Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля (течении газа в плоском канале с бесконечными параллельными стенками при наличии параллельного стенкам градиента давления) в случае полной аккомодации тангенциального импульса молекул газа стенками канала получено в [3]. Целью представленной работы является получение решения задачи о течении Пуазейля с учетом коэффициента аккомодации тангенциального импульса молекул газа. При этом в качестве основного уравнения, описывающего кинетику процесса используется БГК (Бхатнагар, Гросс, Крук) модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия на стенках канала – условие (1.1).

¹Аспирант кафедры математики, Северный (Арктический) федеральный университет, г. Архангельск; garugg@yandex.ru.

²Заведующий кафедрой математики, Северный (Арктический) федеральный университет, г. Архангельск; v.porov@agtu.ru.

³Профессор кафедры теоретической физики, Московский государственный областной университет, г. Москва; yushkanov@inbox.ru.

2. Постановка задачи. Построение функции распределения молекул газа

Рассмотрим течение разреженного газа в плоском канале, толщиной D' , стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$). Предположим, что течение газа обусловлено наличием постоянного градиента давления. Направим ось Oz' вдоль градиента давления. Будем считать, что относительный перепад давления на длине свободного пробега молекул газа малым. Тогда рассматриваемая задача допускает линеаризацию. Учитывая, что в задачах скольжения функция распределения пропорциональна касательной к обтекаемой поверхности компоненте массовой скорости газа, функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z)\beta^{3/2}\pi^{-3/2} \exp(-C^2) [1 + C_z G_n Z(x, C_x)]. \quad (2.1)$$

Здесь \mathbf{r}' – размерный радиус-вектор; $\mathbf{C} = \sqrt{\beta} \mathbf{v}$ – безразмерная скорость молекул газа; $\beta = m/2k_B T$; m – масса молекулы газа; k_B – постоянная Больцмана; T – температура газа; $G_n = (1/p)dp/dz$ – безразмерный градиент давления в направлении оси Oz' ; p – давление газа; $Z(x, C_x)$ – линейная поправка к локально-равновесной функции распределения; $x = x'/l_g$ и $z = z'/l_g$ – безразмерные координаты; $l_g = \eta_g \beta^{-1/2}/p$.

Запишем в выбранной системе координат БГК модель кинетического уравнения Больцмана

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g} (f_{eq} - f). \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) в (2.2) и линеаризуя $f_{eq}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$, приходим к уравнению для нахождения $Z(x, \mu)$ ($\mu = C_x$)

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) + 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\tau^2) Z(x, \tau) d\tau. \quad (2.3)$$

Общее решение (2.3) приведено в [4]

$$Z(x, \mu) = x^2 - 2x\mu + 2\mu^2 + A_0 + A_1(x - \mu) + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta, \quad (2.4)$$

где A_0 , A_1 и $a(\eta)$ – неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению,

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta \text{P} \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu), \quad (2.5)$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\mu^2)}{\mu - z} d\mu, \quad (2.6)$$

$\text{P}(1/z)$ – распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Рассмотрим теперь вопрос о граничных условиях, которым должно удовлетворять решение (2.4) на стенках канала. С учетом используемой модели зеркально-диффузного

отражения граничные условия на верхней и нижней стенках канала записываются в виде [4]

$$Z(d, \mu) = (1 - q)Z(d, -\mu), \quad \mu < 0. \quad (2.7)$$

$$Z(-d, \mu) = (1 - q)Z(-d, -\mu), \quad \mu > 0. \quad (2.8)$$

Подставляя (2.4) в (2.7) и (2.8), приходим к интегральным уравнениям

$$d^2 - 2\mu d + 2\mu^2 + A_0 + A_1(d - \mu) + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right) F(\eta, \mu)a(\eta) d\eta = (1 - q)[d^2 + 2\mu d + 2\mu^2 + A_0 + A_1(d + \mu)] + (1 - q) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{d}{\eta}\right) F(\eta, -\mu)a(\eta) d\eta \quad \mu < 0, \quad (2.9)$$

$$d^2 + 2\mu d + 2\mu^2 + A_0 - A_1(d + \mu) + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{d}{\eta}\right) F(\eta, \mu)a(\eta) d\eta = (1 - q)[d^2 - 2\mu d + 2\mu^2 + A_0 - A_1(d - \mu)] + (1 - q) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{d}{\eta}\right) F(\eta, -\mu)a(\eta) d\eta \quad \mu > 0. \quad (2.10)$$

Обозначим

$$b(\eta, x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta). \quad (2.11)$$

Тогда с учетом (2.5) уравнения (2.9) и (2.10) запишем в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta b(\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2)b(\mu, d)\lambda(\mu) - (1 - q)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta b(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta + \exp(\mu^2)b(-\mu, d)\lambda(-\mu)\right) = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 - A_1d)q + (A_1 + 2d)(2 - q)\mu, \quad \mu < 0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta b(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2)b(\mu, -d)\lambda(\mu) - (1 - q)\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta b(\eta, -d)}{\eta + \mu} d\eta + \exp(\mu^2)b(-\mu, -d)\lambda(-\mu)\right) = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 + A_1d)q + (A_1 - 2d)(2 - q)\mu, \quad \mu > 0.$$

Или

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2)B(\mu, d)\lambda(\mu) = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 - A_1d)q + (A_1 + 2d)(2 - q)\mu, \quad \mu < 0, \quad (2.12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2)B(\mu, -d)\lambda(\mu) = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 + A_1d)q + (A_1 - 2d)(2 - q)\mu, \quad \mu > 0. \quad (2.13)$$

Здесь

$$B(\mu, d) = b(\mu, d) - (1 - q)b(-\mu, d). \quad (2.14)$$

Заменяем в (2.12) μ на $-\mu$ и представим входящий в него интеграл в виде суммы двух. С учетом сказанного перепишем (2.12)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, d)}{\eta + \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(-\mu, d) \lambda(-\mu) = \\ = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 - A_1 d)q - (A_1 + 2d)(2 - q)\mu, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Первый интеграл в (2.15) является сингулярным, а второй – регулярным. Заменяем в первом интеграле переменную интегрирования η на $-\tau$. Тогда (2.12) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(-\eta, d)}{\eta - \mu} d\eta + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)}{\tau + \mu} d\tau + \exp(\mu^2) B(-\mu, d) \lambda(\mu) = \\ = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 - A_1 d)q - (A_1 + 2d)(2 - q)\mu, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

При записи (2.16) учли, что на действительной оси $\lambda(\mu)$ является четной функцией. Аналогичным образом преобразуем (2.13)

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(-\tau, -d)}{\tau + \mu} d\tau + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(\mu, -d) \lambda(\mu) = \\ = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0 + A_1 d)q + (A_1 - 2d)(2 - q)\mu, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Складывая, далее, (2.16) и (2.17) и принимая во внимание (2.11), приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [B(-\eta, d) + B(\eta, -d)] d\eta}{\eta - \mu} + \exp(\mu^2) [B(-\mu, d) + B(\mu, -d)] \exp(d/\mu) \lambda(\mu) + \\ + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau [B(-\tau, -d) + B(\tau, d)] d\tau}{\tau + \mu} = -2[d^2 + 2\mu^2 + A_0]q - 4d(2 - q)\mu, \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Аналогично, вычитая (2.16) из (2.17), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta [B(\eta, -d) - B(-\eta, d)] d\eta}{\eta - \mu} + \exp(\mu^2) [B(\mu, -d) - B(-\mu, d)] \exp(d/\mu) \lambda(\mu) - \\ - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau [B(-\tau, -d) - B(\tau, d)] d\tau}{\tau + \mu} = 2A_1[qd + \mu(2 - q)], \quad \mu > 0. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Нетрудно видеть, что (2.19) обращается в тождество при выполнении условий $B(-\eta, -d) = B(\eta, d)$ (а значит и $B(-\eta, d) = B(\eta, -d)$) и $A_1 = 0$. Тогда (2.18) можно переписать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta + \exp(\mu^2) B(\mu, -d) \lambda(\mu) = f(\mu), \quad \mu > 0, \quad (2.20)$$

$$f(\mu) = (-d^2 - 2\mu^2 - A_0)q + 2d(2 - q)\mu - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)}{\tau + \mu} d\tau. \quad (2.21)$$

Решение (2.20) ищем с использованием методов краевых задач теории функций комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, -d)}{\eta - z} d\eta, \quad (2.22)$$

для которой

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu B(\mu, -d), \quad 0 < \mu < +\infty, \quad (2.23)$$

$$N^+(\mu) + N^-(\mu) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta B(\eta, -d)}{\eta - \mu} d\eta, \quad (2.24)$$

Здесь $N^+(\mu)$ и $N^-(\mu)$ – краевые значения функции $N(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза, совпадающего с действительной положительной полупрямой. Аналогичные соотношения для $\lambda(z)$, определяемой равенством (2.6), имеют вид

$$\lambda^+(\mu) - \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu \exp(-\mu^2), \quad -\infty < \mu < +\infty, \quad (2.25)$$

$$\lambda^+(\mu) + \lambda^-(\mu) = 2\lambda(\mu). \quad (2.26)$$

Здесь разрез совпадает со всей действительной числовой прямой. С учетом (2.23)-(2.26) сведем интегральное уравнение (2.20) к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси

$$N^+(\mu) \lambda^+(\mu) - N^-(\mu) \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi}i\mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \quad \mu > 0, \quad (2.27)$$

Особенность краевой задачи (2.27) состоит в том, что функции $N(z)$ и $\lambda(z)$ имеют различные разрезы. Чтобы устранить эту особенность воспользуемся решением однородной краевой задачи

$$\frac{X^+(\mu)}{X^-(\mu)} = \frac{\lambda^+(\mu)}{\lambda^-(\mu)}, \quad \mu > 0, \quad (2.28)$$

которое имеет вид [4]

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{[\theta(\tau) - \pi] d\tau}{\tau - z} \right], \quad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi}\tau \exp(-\tau^2)}.$$

С учетом решения однородной краевой задачи (2.28) перепишем (2.27)

$$N^+(\mu) X^+(\mu) - N^-(\mu) X^-(\mu) = \frac{X^-(\mu)}{\lambda^-(\mu)} 2\sqrt{\pi}i\mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \quad \mu > 0. \quad (2.29)$$

Линии скачков функций $N(z)$ и $X(z)$ совпадают с контуром краевого условия. Следовательно, получили краевую задачу Римана – задачу определения аналитической функции по заданному скачку. Учитывая поведение входящих в (2.29) функций, по формулам Сохоцкого получаем ее общее решение

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z} \quad (2.30)$$

Рассмотрим поведение построенного решения, задаваемого выражением (2.30) в окрестности бесконечно удаленной точки. Учитывая, что при $|z| \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta + O\left(\frac{1}{z^2}\right),$$

находим

$$N(z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad |z| \rightarrow +\infty.$$

Так как функция $N(z)$ согласно (2.22) задана интегралом типа Коши то в окрестности бесконечно удаленной точки $N(z) = O(1/z)$. Отсюда приходим к условию разрешимости краевой задачи (2.29)

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta = 0. \quad (2.31)$$

С учетом (2.11), (2.21) перепишем (2.31) в виде

$$q(d^2 + A_0) - 2qQ_2 - 2d(2 - q)Q_1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta \exp(-\eta^2) d\eta \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)}{\tau + \eta} d\tau = 0. \quad (2.32)$$

Здесь Q_n – интегралы Лойалки [4]

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta^{n+1} \exp(-\eta^2) d\eta,$$

в частности, $Q_1 = -1.01619$, $Q_2 = -1.26632$. Изменяя в последнем интеграле порядок интегрирования и учитывая (2.11) и интегральное представление функции $X(-\tau)$

$$X(-\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \frac{\eta \exp(-\eta^2) d\eta}{\eta + \tau},$$

из (2.32) находим

$$A_0 = -d^2 + 2Q_2 - 2dQ_1 + q^{-1} \left[4dQ_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \tau X(-\tau) B(\tau, d) d\tau \right]. \quad (2.33)$$

Коэффициенты $B(\eta, -q)$ найдем из условия (2.23), предварительно преобразовав (2.30). Учитывая, что

$$X(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \frac{\eta \exp(-\eta^2) d\eta}{\eta - z},$$

перепишем (2.30) в виде

$$N(z) = -q(d^2 + A_0) - 2d(2 - q)z - 2qz^2 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)}{\tau + z} d\tau + \frac{2}{X(z)} \left[qz + (2 - q)d - qQ_1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)X(-\tau)}{\tau + z} d\tau \right] \quad (2.34)$$

из (2.34) после преобразований получаем

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = \frac{2\sqrt{\pi} i \mu \exp(-\mu^2)X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \left[q\mu + (2 - q)d - qQ_1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau B(\tau, d)X(-\tau)}{\tau + \mu} d\tau \right], \quad \mu > 0.$$

Отсюда, принимая во внимание (2.11) и (2.23), находим

$$B(\mu, -d) = -\frac{\exp(-\mu^2)X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \left[q\mu + (2 - q)d - qQ_1 + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau X(-\tau)B(\tau, d)}{\tau + \mu} d\tau \right], \quad \mu > 0. \quad (2.35)$$

Учитывая, что $B(\eta, -d) = B(-\eta, d)$ и (2.11) и (2.14), находим $a(-\mu) = a(\mu)$,

$$B(\mu, d) = \left[\exp\left(-\frac{d}{\mu}\right) - (1 - q) \exp\left(\frac{d}{\mu}\right) \right] a(\mu),$$

$$B(\mu, -d) = \left[\exp\left(\frac{d}{\mu}\right) - (1 - q) \exp\left(-\frac{d}{\mu}\right) \right] a(\mu).$$

Тогда для нахождения $a(\mu)$ с учетом (2.35) приходим к интегральному уравнению Фредгольма второго рода

$$a(\mu) = \frac{X(-\mu) \exp(-\mu^2 - d/\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2 [1 - (1 - q) \exp(-2d/\mu)]} \left[q(Q_1 - \mu + d) - 2d - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau [\exp(-d/\tau) - (1 - q) \exp(d/\tau)] X(-\tau)a(\tau)}{\tau + \mu} d\tau \right], \quad \mu > 0. \quad (2.36)$$

Решение (2.36) ищем в виде ряда по степеням λ

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu), \quad \lambda = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}. \quad (2.37)$$

Подставляя (2.37) в (2.36) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , находим

$$a_0(\tau) = h(\tau)[q(Q_1 - \tau + d) - 2d],$$

$$\begin{aligned}
a_1(\tau) &= h(\tau) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) [q(Q_1 - \eta + d) - 2d] d\eta}{\eta + \tau}, \\
a_2(\tau) &= h(\tau) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta + \tau} \int_0^{+\infty} \frac{g(\mu) [q(Q_1 - \mu + d) - 2d] d\mu}{\mu + \eta}, \\
h(\tau) &= \frac{X(-\tau) \exp(-\tau^2 - d/\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2 [1 - (1 - q) \exp(-2d/\tau)]}, \\
g(\tau) &= \frac{\tau X^2(-\tau) \exp(-\tau^2) [\exp(-2d/\tau) - (1 - q)]}{|\lambda^+(\tau)|^2 [1 - (1 - q) \exp(-2d/\tau)]}.
\end{aligned}$$

С учетом (2.37) в ряд по степеням λ будет разложен и коэффициент A_0 , определяемый соотношением (2.33)

$$\begin{aligned}
A_0 &= -d^2 + 2Q_2 - 2dQ_1 + q^{-1} \left[4dQ_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k \right], \\
I_0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\tau) [q(Q_1 - \tau + d) - 2d] d\tau, \\
I_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) [q(Q_1 - \eta + d) - 2d] d\eta}{\eta + \tau}, \\
I_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta + \tau} \int_0^{+\infty} \frac{g(\mu) [q(Q_1 - \mu + d) - 2d] d\mu}{\mu + \eta}.
\end{aligned}$$

Таким образом, неизвестные параметры A_0 , A_1 и функция $a(\eta)$, входящие в (2.4) найдены и функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

3. Вычисление макропараметров газа в канале

С учетом построенной функции распределения вычислим скорость газа в канале $q'_z(x')$ и величину потока массы J'_M в направлении оси Oz' , приходящуюся на единицу ширины канала. Исходя из статистического смысла функции распределения и учитывая (2.1), находим

$$u'_z(x') = \frac{1}{n} \int v_z f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} = \left(\frac{2k_B T}{m} \right)^{1/2} U_z(x) \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}.$$

Здесь

$$U_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 Z(x, C_x) d^3 \mathbf{C} \quad (3.1)$$

есть безразмерная массовая скорость газа. Подставляя (2.4) в (3.1), после интегрирования получаем

$$U_z(x) = \frac{1}{2} \left[x^2 + 1 - d^2 + 2Q_2 - 2dQ_1 + q^{-1} \left[4dQ_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k \right] + 2 \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k J_k(x) \right], \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}
 J_0(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \tau) [q(Q_1 - \tau + d) - 2d] d\tau, \\
 J_1(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) [q(Q_1 - \eta + d) - 2d] d\eta}{\eta + \tau}, \\
 J_2(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta + \tau} \int_0^{+\infty} \frac{g(\mu) [q(Q_1 - \mu + d) - 2d] d\mu}{\mu + \eta}, \\
 \gamma(x, \tau) &= \frac{X(-\tau) \exp(-\tau^2 - d/\tau) \operatorname{ch}(x/\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2 [1 - (1 - q) \exp(-2d/\tau)]}.
 \end{aligned}$$

Величину потока массы J'_M в направлении оси Oz' , приходящуюся на единицу ширины канала, вычислим согласно [5] и [6]

$$J_M = -\frac{2}{D^2} \int_{-D/2}^{D/2} U(x) dx, \quad D = 2d. \tag{3.3}$$

Подставляя (3.2) в (3.3) и выполняя интегрирование, получаем

$$J_M = \frac{D}{6} - (2q^{-1} - 1)Q_1 - \frac{1}{D} \left[2Q_2 + 1 + q^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k \right] - \frac{2}{D^2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_k, \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
 K_0 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\tau) [q(Q_1 - \tau + d) - 2d] d\tau, \\
 K_1 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) [q(Q_1 - \eta + d) - 2d] d\eta}{\eta + \tau}, \\
 K_2 &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta + \tau} \int_0^{+\infty} \frac{g(\mu) [q(Q_1 - \mu + d) - 2d] d\mu}{\mu + \eta}, \\
 \zeta(\tau) &= \frac{\tau X(-\tau) \exp(-\tau^2) [1 - \exp(-2d/\tau)]}{|\lambda^+(\tau)|^2 [1 - (1 - q) \exp(-2d/\tau)]}.
 \end{aligned}$$

Значения J_M согласно (3.4) вычислены в пакете прикладных программ Mathematica 7. Полученные результаты, а также аналогичные результаты полученные в [5]–[7] на основе численных методов с использованием БГК и S моделей кинетического уравнения Больцмана, линеаризованного уравнения Больцмана с оператором столкновений для молекул жестких сфер (ЛВЕ) и модели уравнения Больцмана с комбинированным ядром (СЕС) приведены в таблице 1.

D	J_M					
	(3.4)	BGK [7]	S [5]	CES [5]	CES [6]	LBE [6]
$q = 0.1$						
0.1	20.628087				19.984	20.243
1.0	17.619564				17.522	17.564
10.0	18.782803				18.737	18.743
$q = 0.5$						
0.1	4.556599	4.556406	4.5801	4.3156	4.3156	4.3868
1.0	3.368235	3.368218	3.3928	3.2959	3.2959	3.3264
10.0	4.573799		4.5837	4.5285	4.5285	4.5346
$q = 1.0$						
0.1	2.032989	2.032256	2.0395	1.9259		
1.0	1.538683	1.538678	1.5536	1.4863		
10.0	2.768646		2.7799	2.7220		

Таблица 1. Зависимость J_M от D при различных значениях q .

Как следует из таблицы 1 отличие результатов, вычисленных на основе (3.4) от аналогичных, полученных численными методами в [7] в рамках БГК модели кинетического уравнения Больцмана, не превышает 0.0005% для всего диапазона приведенных значений D . Последнее подтверждает адекватность использованных в работе численных процедур, использованных при нахождении J_M .

4. Заключение

В виде ряда Неймана построено аналитическое решение БГК модели кинетического уравнения Больцмана в задаче о течении Пуазейля. Для модели зеркально-диффузного отражения молекул газа стенками канала получено аналитическое выражение для расчета потока массы газа в направлении градиента давления, приходящегося на единицу ширины канала. Проведен численный анализ полученных выражений для различных значений толщины канала и значения параметра q .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
2. Коган М.Н. Динамика разреженного газа. Кинетическая теория. М.: Наука. 1967. 440 с.
3. Попов В.Н., Тестова И.В., Юшканов А.А. Аналитическое решение задачи о течении Пуазейля // Журнал СВМО. 2010. Т. 12. № 3. С. 111-120.
4. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ. 2004. 286 с.
5. С.Е. Siewert. Poiseuille, Thermal Creep and Couette Flow: Results Based on the CES Model Linearized Boltzmann Equation // European Journal of Mechanics B/Fluids. 2002. V. 21. P. 579-597.

6. C.E. Siewert. The linearized Boltzmann Equation: Concise and Accurate Solutions to Basic Flow Problems // Zeitschrift fur Angewandte Mathematic und Physik. 2003. V. 54. P. 273-303.
7. Baricello L.B., Camargo M., Podrigues P., Siewert C.E. Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model // ZAMP. 2001. V. 52. P. 517-534.

Mathematical modelling of processes of carry in flat channels

© V. V. Lukashev ⁴, V. N. Popov ⁵, A. A. Yushkanov ⁶

Abstract. Within the kinetic approach limit, in the isothermal approximation the analytical (in the form of Neumann's series) solution of the problem on flow of the rarefied gas in the flat channel with the infinite walls, caused by a pressure gradient parallel to walls (Poiseuille Flow) it is constructed. As the basic equation the BGK model of the Boltzmann's kinetic equation is used. As a boundary condition the model of diffusion reflections is used. In view of the constructed distribution function the flow of gases mass in a direction of a gradient of the pressure, falling unit width of the channel and the structure of mass speed of gas in the channel are constructed. Comparison with the similar results received Numerical method is leads..

Key Words: flow of the gas in the channel, Poiseuille Flow, Boltzmann's kinetic equation, the model kinetic equations, exact analytical solutions.

⁴Post graduate student, Northern Arctic federal university, Arkhangelsk; rarugg@yandex.ru.

⁵Head of Mathematics Chair, Northern Arctic federal university, Arkhangelsk; popov.vasily@pomorsu.ru.

⁶Professor of Theoretical Physics Chair, Moscow state regional university, Moscow; yushkanov@inbox.ru.

УДК 517.95

Представление потенциалов через фундаментальные решения для эллиптического уравнения высшего порядка

© Р. М. Мавлявиев¹, И. Б. Гарипов², С. М. Нураиева³, Э. Д. Хусаинова⁴

Аннотация. В работе рассматривается эллиптическое уравнение высшего порядка с младшими членами. Сформулирована основная краевая задача. Построены потенциалы для решения этой задачи.

Ключевые слова: потенциалы, симметричная область, эллиптическое уравнение.

Пусть \bar{D} — верхняя половина ограниченной области, симметричная относительно плоскости Oxy , Γ — верхняя часть достаточно гладкой границы. Снизу \bar{D} ограничена частью Γ_0 координатной плоскости Oxy . Обозначим: $\Delta_B u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{z^k} \left(z^k \frac{\partial u}{\partial z} \right)$, где $k > 0$.

Требуется найти решение уравнения

$$\Delta_B^m u + 2a \frac{\partial \Delta_B^{m-1} u}{\partial x} + 2b \frac{\partial \Delta_B^{m-1} u}{\partial y} - c^2 \Delta_B^{m-1} u = 0, \quad (1.1)$$

$$(a > 0, b > 0, c^2 > a^2 + b^2).$$

из класса

$$u \in C^{2m}(D) \cap C^{2m-1}(\bar{D}), \quad (1.2)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{\Gamma_0} = 0, \quad \Delta_B^i u \Big|_{\Gamma} = f_{2i}, \quad \frac{\partial \Delta_B^i u}{\partial n} \Big|_{\Gamma} = f_{2i+1}, \quad i = 0, \overline{\left[\frac{m}{2} \right] + 1}. \quad (1.3)$$

Здесь $\Delta_B^0 u \equiv u$, n — внешняя нормаль, восстановленная в т. $P(\xi, \eta, \zeta) \in \Gamma$. Аналогичная задача на плоскости, при $m = 2$ рассматривалась в работе [1].

Ранее было установлено, что внутренняя краевая задача (1.1) – (1.3) не может иметь более одного решения [2].

Фундаментальные решения уравнения (1.1) с особенностью в начале координат имеют вид

$$\varphi_l = r^{2l-1-k}, \quad l = \overline{0, m-2}, \quad \varphi_{m-1} = r^{2m-3-k} + \psi_{m-1}, \quad (1.4)$$

где ψ_{m-1} имеет меньшую особенность чем r^{2m-3-k} .

Получены рекуррентные формулы для подсчета производной любого порядка от φ_l

$$\frac{\partial^j r^{2l-1-k}}{\partial n^j} = r^{2l-1-j} \sum_{i=0}^{\left[\frac{j}{2} \right]} a_i \cos^{j-2i} \theta; \quad (1.5)$$

¹Старший преподаватель кафедры математического анализа, Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань; mavly72@mail.ru.

²Доцент кафедры математического анализа, Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань; ilnur_garipov@mail.ru.

³Доцент кафедры математического анализа, Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань; sirinya_nuranieva@mail.ru.

⁴Доцент кафедры алгебры, Татарский государственный гуманитарно-педагогический университет, г. Казань; ence_khusainova@mail.ru.

$$(a_i = a_{2(l+i-j)-1, 2(l-i)-1}),$$

где

$$a_{2p-1, 2q-1} = (p + p + 1 - k)a_{2p+1, 2q-1} + (q - p + 1)a_{2p-1, 2q+1} \tag{1.6}$$

при $p \neq q \neq l$ и

$$a_{2p-1, 2q-1} = a_{2p-1, 2q+1} \tag{1.7}$$

при $p = q \neq l$. Если $q = l$ то коэффициент разложения представляется в виде произведения

$$a_{2p-1, 2l-1} = \prod_{i=1}^{l-p} (2(l-i) + 1 - k), \tag{1.8}$$

причем, если к тому же еще и $p = l$, то

$$a_{2l-1, 2l-1} = 1. \tag{1.9}$$

Через θ обозначен угол между внешней нормалью n и радиус вектором \vec{r} точки P относительно точки $M(x, y, z) \in D$. Очевидно $r = |\vec{r}| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$.

Мультипольные потенциалы

$$W_i(P) = C_k \int_{\Gamma} \mu_i(M) (r^{i-3-k} \cos^{2n-i} \theta + \gamma_i) \eta^k d\Gamma, \quad i = \overline{1, m} \tag{1.10}$$

удовлетворяют уравнению (1.1) на Γ_0 т.к. их ядра, в силу формул (1.4) и (1.5) представляются в виде линейной комбинации фундаментальных решений и их нормальных производных. Заметим так же, что

$$\Delta_B(r^{-k-l} \cos^{m+l} \theta) = r^{-k-l-2} \cos^{m+l+2} \theta. \tag{1.11}$$

Решение краевой задачи ищется в виде суммы

$$u = \sum_{i=1}^m W_i(P). \tag{1.12}$$

В результате с использованием граничных условий (1.3) для непрерывных плотностей μ_i получается система интегральных уравнений II рода, которая по альтернативе Фредгольма разрешима. И в силу того, что решение уравнения не более одного, то она однозначно разрешима. При выводе интегральных уравнений приходится пользоваться предельными соотношениями. А при доказательстве последних, на границе Γ_0 нужно пользоваться представлениями (1.10) и (1.11).

Из рекуррентных формул (1.5)-(1.9), при $k = 0$ как частный случай получаются представления Лободзинской И.Г. [3]. Вывод предельных значений при $z > 0$ не вызывает затруднений. В этом случае фундаментальные решения с особенностью в произвольной точке M_0 имеют вид

$$\overline{\varphi}_l = T_{M_0}^{M_0} \varphi_l \tag{1.13}$$

где $T_{M_0}^{M_0}$ – оператор обобщенного сдвига Бесселя [4]. Эти фундаментальные решения лишь на слагаемое меньшей особенности отличаются от функций r^{2l-1-k} . Вместо потенциалов (1.10) надо воспользоваться потенциалами

$$W_i(P) = C_k \int_{\Gamma} \mu_i(M) \left((yy_0)^{-\frac{k}{2}} r^{i-2} \cos^{2m-i} \theta + \gamma_i \right) \eta^k d\Gamma, \quad l = \overline{1, m} \tag{1.14}$$

и практически повторить рассуждения Лободзинской И.Г.

Работа выполнена при финансовой поддержке Федерального агентства по науке и инновациям (госконтракт № 02.740.11.0193).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мавлявиев Р.М. Решение основной краевой задачи для одного B -эллиптического уравнения методом потенциалов // Труды Средневолжского математического общества. – 2000. – Т. 2, № 1. – С. 76-77.
2. Гарипов И.Б., Хусаинова Э.Д., Мавлявиев Р.М. Единственность решения B -эллиптического уравнения высшего порядка с младшими членами // Труды международной научной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы". (24–28 июня 2008 г., г. Стерлитамак). — Уфа: Гилем, 2008. – Т. 1. – С. 51-53.
3. Лободзинская И.Г. Потенциалы основной краевой задачи для уравнения $\Delta^m u$ // Научный ежегодник ОГУ им. И.И. Мечникова. – 1961. – Вып. 2. – С. 107-110.
4. Вайнштейн А. Обобщение осесимметричной теории потенциала // Бюллетень Американского математического общества. – 1953. – Т. 59, № 1-3. – С. 20-38.

The expression of potentials in fundamental solutions for higher-order elliptic equation.

© R. M. Mavlyaviev⁵, I. B. Garipov⁶, S. M. Nuranieva⁷, E. J. Khusainova⁸

Abstract. In this work higher-order elliptic equation with junior members is considered. The classic boundary value problems have been formulated. Potentials for solving this problem have been constructed.

Key Words: potentials, symmetric region, close-to-elliptic equation.

⁵Assistant of Mathematical Analysis Chair, Tatar State University of Humanities and Education, Kazan; mavly72@mail.ru.

⁶Docent of Mathematical Analysis Chair, Tatar State University of Humanities and Education, Kazan; ilnur_garipov@mail.ru.

⁷Docent of Mathematical Analysis Chair, Tatar State University of Humanities and Education, Kazan; sirinya_nuranieva@mail.ru.

⁸Docent of Algebra Chair, Tatar State University of Humanities and Education, Kazan; ence_khusainova@mail.ru.

УДК 517.92

Геометрический аспект устойчивости линейных систем относительно части переменных

© В. И. Никонов¹

Аннотация. В работе получены необходимые и достаточные условия устойчивости линейных систем дифференциальных уравнений относительно заданных переменных. Установлена взаимосвязь между инвариантным подпространством линейного оператора, описывающего динамику системы и частичной устойчивостью. Рассмотрена задача робастной частичной устойчивости.

Ключевые слова: частичная устойчивость, инвариантное подпространство, минимальный многочлен.

1. Системы линейных дифференциальных уравнений

Пусть поведение объекта описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx}{dt} = A^*x(t), \quad (1.1)$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $A^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

К настоящему времени получены критерии устойчивости по заданной части координат фазового вектора линейной автономной системы вида (1.1), например, в работах [1],[2]. Следует отметить, что этими результатами уже нельзя воспользоваться если предположить, что матрица A^* системы (1.1) известна с определенной степенью точности, например, интервальная. Можно сказать, что эти методы чувствительны к изменениям коэффициентов матрицы системы.

В данной работе предлагается геометрический подход, позволяющий в некоторых случаях исследовать робастную устойчивость системы (1.1) по отношению к части переменных.

Предположим, что исследуется устойчивость по первой координате фазового вектора x системы (1.1). Обозначим первую координату фазового вектора через y , а остальные компоненты составят вектор z . В связи с этим, систему (1.1) представим в виде

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= ay + b^T z, \\ \frac{dz}{dt} &= cy + Dz, \end{aligned} \quad (1.2)$$

где $y \in \mathbb{R}$, $z \in \mathbb{R}^{n-1}$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^{n-1}$, $c \in \mathbb{R}^{n-1}$, $D \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$, T -знак операции транспонирования.

Предположим, что многочлен

$$\sigma(\lambda) = \lambda^s + \gamma_1 \lambda^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} \lambda + \gamma_s,$$

где $0 \leq s \leq n-1$, является минимальным аннулирующим многочленом вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D . Тогда справедливо соотношение

¹Доцент кафедры дифференциальных уравнений, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; nikonovvi1970@rambler.ru.

$$b^T D^s + \gamma_1 b^T D^{s-1} + \dots + \gamma_{s-1} b^T D + \gamma_s b^T = 0. \quad (1.3)$$

Следует отметить, что в этом случае [3], векторы $b^T, b^T D, \dots, b^T D^{s-1}$ образуют базис инвариантного циклического подпространства в \mathbb{R}^{n-1} .

Покажем, каким же образом устойчивость переменной y связана с этим подпространством.

Продифференцируем первое уравнение системы (1.2) по переменной t в силу второго уравнения этой системы, получим

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = a \frac{dy}{dt} + b^T c y + b^T D z. \quad (1.4)$$

Аналогично, второе дифференцирование уравнения (1.4) дает

$$\frac{d^3 y}{dt^3} = a \frac{d^2 y}{dt^2} + b^T c \frac{dy}{dt} + b^T D c y + b^T D^2 z.$$

Тогда на $s-1$ и s -м шаге, получаем соответственно, уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^s y}{dt^s} &= a \frac{d^{s-1} y}{dt^{s-1}} + b^T c \frac{d^{s-2} y}{dt^{s-2}} + b^T D c \frac{d^{s-3} y}{dt^{s-3}} + \dots + b^T D^{s-2} c y + b^T D^{s-1} z, \\ \frac{d^{s+1} y}{dt^{s+1}} &= a \frac{d^s y}{dt^s} + b^T c \frac{d^{s-1} y}{dt^{s-1}} + b^T D c \frac{d^{s-2} y}{dt^{s-2}} + \dots + b^T D^{s-1} c y + b^T D^s z. \end{aligned}$$

Таким образом, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} \frac{d^{s+1} y}{dt^{s+1}} + \gamma_1 \frac{d^s y}{dt^s} + \dots + \gamma_s \frac{dy}{dt} &= a \frac{d^s y}{dt^s} + \sum_{j=0}^{s-1} b^T D^j c \frac{d^{s-1-j} y}{dt^{s-1-j}} + \\ + \gamma_1 \left(a \frac{d^{s-1} y}{dt^{s-1}} + \sum_{j=0}^{s-2} b^T D^j c \frac{d^{s-2-j} y}{dt^{s-2-j}} \right) &+ \dots + \gamma_{s-1} \left(a \frac{dy}{dt} + b^T c y \right) + \gamma_s a y + \\ + (b^T D^s + \gamma_1 b^T D^{s-1} + \dots + \gamma_s b^T) z. \end{aligned}$$

Наконец, учитывая (1.3), приходим к линейному однородному дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^{s+1} y}{dt^{s+1}} + (\gamma_1 - a) \frac{d^s y}{dt^s} + (\gamma_2 - a\gamma_1 - b^T c) \frac{d^{s-1} y}{dt^{s-1}} + \dots \\ + (\gamma_s - a\gamma_{s-1} - b^T c \gamma_{s-2} - \dots - b^T D^{s-3} c \gamma_1 - b^T D^{s-2} c) \frac{dy}{dt} - \\ - (a\gamma_s + b^T c \gamma_{s-1} + b^T D c \gamma_{s-2} + \dots + b^T D^{s-2} c \gamma_1 + b^T D^{s-1} c) y = 0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Следовательно, вопрос об устойчивости системы (1.2) по переменной y сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения (1.5). Тогда справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 1.1. *Если s степень минимального аннулирующего многочлена вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D , то для того, чтобы система (1.2) была y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения (1.5) было устойчивым.*

Т е о р е м а 1.2. *В предположениях теоремы 1.1., для того, чтобы система (1.2) была асимптотически y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы многочлен*

$$\begin{aligned} P_s(\lambda) &= \lambda^{s+1} + (\gamma_1 - a)\lambda^s + (\gamma_2 - a\gamma_1 - b^T c)\lambda^{s-1} + \dots \\ &+ (\gamma_s - a\gamma_{s-1} - b^T c \gamma_{s-2} - \dots - b^T D^{s-3} c \gamma_1 - b^T D^{s-2} c)\lambda - \\ &- (a\gamma_s + b^T c \gamma_{s-1} + b^T D c \gamma_{s-2} + \dots + b^T D^{s-2} c \gamma_1 + b^T D^{s-1} c) = 0 \end{aligned}$$

был устойчивым.

С л е д с т в и е 1.1. Если $s = n - 1$, то система (1.2) приводима к дифференциальному уравнению n -го порядка относительно переменной y . В этом случае характеристическое уравнение системы (1.2) совпадает с характеристическим уравнением дифференциального уравнения (1.5), а, следовательно, y -устойчивость системы (1.2) возможна лишь в случае устойчивости системы по всем координатам фазового вектора x .

С л е д с т в и е 1.2. Если $s = k < n - 1$, то в системе (1.1) можно выделить подсистему k -го порядка, относительно переменной y и некоторых дополнительных переменных. При этом, интегрирование системы (1.1) сводится к последовательному интегрированию двух подсистем порядка k и $n - k$, соответственно.

З а м е ч а н и е 1.1. Постоянные $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, присутствующие в уравнении (1.5) можно выразить через числовые коэффициенты системы (1.2). Для этого достаточно умножить скалярно (1.3) справа последовательно на векторы $b, D^T b, \dots, (D^T)^{s-1} b$ и решить полученную систему линейных уравнений относительно $\gamma_1, \dots, \gamma_s$.

З а м е ч а н и е 1.2. Если требуется исследовать устойчивость фазового вектора системы (1.1) по нескольким переменным, то для этого, последовательно, представляем систему (1.1) в виде (1.2), где y – другая интересующая нас переменная и используем теорему 1.1..

2. Системы линейных разностных уравнений

Рассмотрим линейную разностную систему вида

$$x(t+1) = A^*x(t), \quad (2.1)$$

где $x \in R^n$, A^* – постоянная матрица соответствующих размеров. Так же будем предполагать, что исследуется на устойчивость первая координата фазового вектора x . В связи с чем, представим систему (2.1) в виде

$$\begin{aligned} y(t+1) &= ay(t) + b^T z(t), \\ z(t+1) &= cy(t) + Dz(t). \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть минимальный аннулирующий многочлен вектора b^T имеет вид (1.3).

Проведем аналогичные рассуждения и в данном случае.

Из первого уравнения системы (2.1) следует

$$y(t+2) = ay(t+1) + b^T z(t+1),$$

Откуда в силу второго уравнения этой системы имеем

$$y(t+2) = ay(t+1) + b^T cy(t) + b^T Dz(t).$$

Таким образом, на s -м шаге (s - степень минимального многочлена (1.3)) приходим к уравнению

$$y(t+s+1) = ay(t+s) + b^T cy(t+s-1) + \dots + b^T D^{s-1} cy(t) + b^T D^s z.$$

Следовательно, справедливо равенство

$$\begin{aligned}
 & y(t+s+1) + \gamma_1 y(t+s) + \dots + \gamma_s y(t+1) = \\
 & = ay(t+s) + \sum_{j=0}^{s-1} b^T D^j cy(t+s-j-1) + \\
 & + \gamma_1 \left(ay(t+s-1) + \sum_{j=0}^{s-2} b^T D^j cy(t+s-j-2) \right) + \dots \\
 & + \gamma_{s-1} (ay(t+1) + b^T cy(t)) + \gamma_s ay(t) + \\
 & + (b^T D^s + \gamma_1 b^T D^{s-1} + \dots + \gamma_s b^T) z(t).
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\begin{aligned}
 & y(t+s+1) = (\gamma_1 - a)y(t+s) + (\gamma_2 - a\gamma_1)y(t+s-1) + \dots \\
 & + (\gamma_s - a\gamma_{s-1} - b^T c\gamma_{s-2} - \dots - b^T D^{s-3}c\gamma_1 - b^T D^{s-2}c)y(t+1) - \\
 & - (a\gamma_s + b^T c\gamma_{s-1} + b^T Dc\gamma_{s-2} + \dots + b^T D^{s-2}c\gamma_1 + b^T D^{s-1}c)y(t) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Тогда имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а 2.1. *Если s степень минимального аннулирующего многочлена вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D , то для того, чтобы система (2.1) была y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения (2.4) было устойчивым.*

3. Системы линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом

Данный подход применим и к исследованию y -устойчивости систем линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.

Исследуем y -устойчивость системы вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = A^* x(t - \tau), \tag{3.1}$$

где $x \in R^n$, $\tau = const$, A^* - постоянная матрица соответствующих размеров.

Представим систему (3.1) в виде

$$\begin{aligned}
 \frac{dy(t)}{dt} &= ay(t - \tau) + b^T z(t - \tau), \\
 \frac{dz(t)}{dt} &= cy(t - \tau) + Dz(t - \tau).
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Далее, дифференцируя первое уравнение системы (3.2), получим

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} = a \frac{dy(t - \tau)}{dt} + b^T \frac{dz(t - \tau)}{dt},$$

откуда следует, что справедливо соотношение

$$\frac{d^2 y(t + \tau)}{dt^2} = a \frac{dy(t)}{dt} + b^T \frac{dz(t)}{dt},$$

которое в силу второго уравнения системы (3.1) приводит к уравнению

$$\frac{d^2 y(t + \tau)}{dt^2} = a \frac{dy(t)}{dt} + b^T cy(t - \tau) + b^T Dz(t - \tau).$$

Проведя аналогичные рассуждение к полученному уравнению, имеем

$$\frac{d^3y(t+2\tau)}{dt^2} = a \frac{d^2y(t+\tau)}{dt^2} + b^T c \frac{dy(t)}{dt} + b^T Dcy(t-\tau) + b^T D^2z(t-\tau).$$

Таким образом, на $s-1$ -м и s -м шагах, получаем, соответственно, уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} &= a \frac{d^{s-1} y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + b^T c \frac{d^{s-2} y(t+(s-3)\tau)}{dt^{s-2}} + \dots \\ &+ b^T D^{s-1} cy(t-\tau) + b^T D^{s-1} z(t-\tau), \\ \frac{d^{s+1} y(t+s\tau)}{dt^{s+1}} &= a \frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} + b^T c \frac{d^{s-1} y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \dots \\ &+ b^T D^s cy(t-\tau) + b^T D^s z(t-\tau). \end{aligned}$$

Если предположить, что s степень минимальный аннулирующий многочлен вектора b^T относительно линейного оператора заданного матрицей D то приходим к уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^{s+1} y(t+s\tau)}{dt^{s+1}} + (\gamma_1 - a) \frac{d^s y(t+(s-1)\tau)}{dt^s} + \\ + (\gamma_2 - a\gamma_1 - b^T c) \frac{d^{s-1} y(t+(s-2)\tau)}{dt^{s-1}} + \dots \\ + (\gamma_s - a\gamma_{s-1} - \dots - b^T D^{s-3} c\gamma_1 - b^T D^{s-2} c) \frac{dy(t)}{dt} - \\ - (a\gamma_s + b^T c\gamma_{s-1} + \dots + b^T D^{s-2} c\gamma_1 + b^T D^{s-1}) y(t-\tau) = 0. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Следовательно, вопрос y -устойчивости системы (3.1) сводится к исследованию устойчивости нулевого решения уравнения (3.3). Таким образом, справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3.1. *Если s степень минимального аннулирующего многочлена вектора b^T относительно линейного оператора, заданного матрицей D , то для того, чтобы система (3.1) была y -устойчивой, необходимо и достаточно, чтобы нулевое решение уравнения (3.3) было устойчивым.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1991. – 284 с.
2. Чудинов К.М. Критерий устойчивости по части переменных автономной системы дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 2003. – №4(491). – С. 67-72.
3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.

Geometric aspect of partial stability for linear systems

© V. I. Nikonov²

Abstract. In the paper sufficient and necessary conditions are obtained for a partial stability of the linear systems. The coupling is shown to the invariant subspace and a partial stability. In additional, a robust partial stability is discussed.

Key Words: Partial stability, invariant subspace, minimal polynomial.

²Instructor of Differential Equations Chair, Mordovian State University after N.P. Ogarev, Saransk; nikonovvi1970@rambler.ru.

УДК 517.9

Аппроксимации модели Гольдштика

© Д. К. Потапов¹

Аннотация. В данной работе рассматриваются непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости. Аппроксимирующая задача получается из исходной малыми возмущениями спектрального параметра (завихренности) и непрерывными по фазовой переменной аппроксимациями разрывной нелинейности. При определенных условиях вариационным методом устанавливается сходимость решений аппроксимирующих задач к решениям исходной задачи. В работе также рассматривается модификация одномерного аналога математической модели Гольдштика. Модель представляет собой нелинейное дифференциальное уравнение с граничным условием. Нелинейность в уравнении непрерывная и зависит от малого параметра. В пределе, при стремлении параметра к нулю, получается разрывная нелинейность. Результаты о решениях согласуются с результатами, полученными для одномерного аналога модели Гольдштика.

Ключевые слова: модель Гольдштика, отрывные течения, нелинейное дифференциальное уравнение, разрывная нелинейность, непрерывная аппроксимация.

1. Введение

В работах [1], [2] рассматривалась математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости М.А. Гольдштика, в работе [3] – непрерывная аппроксимация плоской задачи Гольдштика, а в работе [4] – непрерывная аппроксимация модификации одномерного аналога модели Гольдштика. Данная статья представляет собой объединение результатов работ [3], [4].

Аппроксимации краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной по фазовой переменной нелинейностью рассматривались в работах [5]–[7]. Аппроксимирующая задача получалась из исходной возмущением спектрального параметра и аппроксимацией нелинейности каратеодориевыми функциями. Вариационным методом доказаны теоремы о сходимости решений аппроксимирующих задач эллиптического типа со спектральным параметром и непрерывной нелинейностью к решениям предельной задачи с разрывной нелинейностью. В работе [5] предполагалось, что дифференциальная часть вместе с граничным условием порождает коэрцитивный оператор, в работе [6] рассматривались резонансные эллиптические краевые задачи со спектральным параметром и разрывной нелинейностью, а в работе [7] – однопараметрическое семейство задач Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка с разрывной нелинейностью. Изучался вопрос близости решений аппроксимирующей и исходной задач. Аппроксимация задачи с разрывной нелинейностью последовательностью задач с непрерывной нелинейностью для оператора Лапласа на конкретных примерах склейки вихревых и потенциальных течений рассматривалась ранее в работах И.И. Вайнштейна. На актуальность данной тематики и необходимость исследований в этом направлении указано также в работе М.А. Красносельского и А.В. Покровского [8].

¹Доцент кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург; potapov@apmath.spbu.ru.

2. Постановка задачи

Математическая постановка плоской задачи Гольдштика состоит в определении непрерывно-дифференцируемой функции тока ψ , удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\psi = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < 0, \\ 0, & \text{если } \psi \geq 0, \end{cases}$$

и краевому условию

$$\psi|_{\Gamma} = \varphi(s),$$

где Δ – оператор Лапласа, ω – завихренность, Γ – кусочно-гладкий контур плоской ограниченной области Ω , φ – непрерывная неотрицательная и отличная от нуля лишь на части контура функция.

Аппроксимирующая задача имеет вид

$$\Delta\psi = \begin{cases} \omega_k, & \text{если } \psi < -\varepsilon, \\ -\frac{\omega_k}{\varepsilon}\psi, & \text{если } -\varepsilon \leq \psi \leq 0, \\ 0, & \text{если } \psi \geq 0, \end{cases}$$

$$\psi|_{\Gamma} = \varphi(s),$$

$\omega_k > 0$, $\varepsilon > 0$. Аппроксимирующая задача представляет собой нелинейное эллиптическое дифференциальное уравнение с краевым условием. Нелинейность в уравнении непрерывная и зависит от малого параметра. В пределе, при стремлении параметра к нулю, получается разрывная нелинейность. Отметим, что разрывные нелинейности довольно часто возникают как идеализации непрерывных нелинейностей, имеющих участки быстрого роста по фазовой переменной. При этом удобно считать, что непрерывные нелинейности зависят от малого параметра ε и в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получается разрывная нелинейность. В силу результатов работ [5]–[7] аппроксиматором при $\psi \in [-\varepsilon, 0]$ может быть любая непрерывная на этом отрезке функция $f = f(\psi)$, удовлетворяющая условиям $f(-\varepsilon) = \omega_k$, $f(0) = 0$.

Функция ψ_0 удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \Delta\psi_0 = 0, \\ \psi_0|_{\Gamma} = \varphi(s). \end{cases}$$

Из принципа максимума следует, что функция $\psi_0(x)$ положительна в области Ω . Сделаем замену $u = \psi - \psi_0$, приходим к следующей задаче:

$$\Delta u = \begin{cases} \omega, & \text{если } u < -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x), \end{cases}$$

$$u|_{\Gamma} = 0.$$

Имеем

$$-\Delta u = \omega g(x, u(x)), \tag{2.1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{2.2}$$

где

$$g(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x). \end{cases}$$

Краевой задаче (2.1)–(2.2) сопоставим функционал $J^\omega(u)$, заданный на $\mathbf{H}_o^1(\Omega)$, следующим образом:

$$J^\omega(u) = J_1(u) - \omega \int_{\Omega} dx \int_0^{u(x)} g(x, s) ds,$$

где

$$J_1(u) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega} u_{x_i}^2 dx = \frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} (u_{x_1}^2 + u_{x_2}^2) dx \right).$$

В работе [2] доказано, что существует $\omega_0 > 0$ такое, что для любого $\omega > \omega_0$ $\inf_{v \in \mathbf{H}_o^1(\Omega)} J^\omega(v) < 0$, найдется $u \in \mathbf{H}_o^1(\Omega)$ такое, что $J^\omega(u) = \inf_{v \in \mathbf{H}_o^1(\Omega)} J^\omega(v)$ и любое такое u является ненулевым полуправильным решением краевой задачи (2.1)–(2.2). Таким образом, при ω , превышающих некоторое значение, задача имеет, по крайней мере, одно нетривиальное решение (в силу теорем вложения Соболева решение непрерывно-дифференцируемо). В силу [9] для величины бифуркационного параметра ω_0 , начиная с которого задача на собственные значения (2.1)–(2.2) разрешима, справедлива следующая оценка сверху:

$$\omega_0 \leq \inf_{\hat{u} \in U} \frac{J_1(\hat{u})}{\int_{\Omega} dx \int_0^{\hat{u}(x)} g(x, s) ds},$$

где $U = \{\hat{u} \in \mathbf{H}_o^1(\Omega) : \int_{\Omega} dx \int_0^{\hat{u}(x)} g(x, s) ds > 0\}$.

Зафиксируем $\omega > \omega_0$ и пусть числовая последовательность (ω_k) , $\omega_k > 0$, сходится к ω . Нелинейность $g(x, u)$ аппроксимируется последовательностью каратеодориевых функций $(g^k(x, u))$.

Имеем

$$-\Delta u = \omega_k g^k(x, u(x)), \quad x \in \Omega, \quad (2.3)$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \quad (2.4)$$

где

$$g^k(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\varepsilon - \psi_0(x), \\ \frac{1}{\varepsilon}(u + \psi_0(x)), & \text{если } -\varepsilon - \psi_0(x) \leq u \leq -\psi_0(x), \\ 0, & \text{если } u \geq -\psi_0(x). \end{cases}$$

В случае модификации одномерного аналога модели Гольдштика требуется найти дважды непрерывно-дифференцируемую функцию ψ , удовлетворяющую уравнению

$$\psi'' = \begin{cases} \omega, & \text{если } \psi < -\varepsilon, \\ -\frac{\omega}{\varepsilon}\psi, & \text{если } -\varepsilon \leq \psi \leq 0, \\ 0, & \text{если } \psi \geq 0, \end{cases}$$

и граничным условиям $\psi(0) = 1$, $\psi(1) = 0$, $\omega > 0$, $\varepsilon > 0$. Модель представляет собой нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение с граничным условием. Нелинейность в уравнении непрерывная и зависит от малого параметра ε , в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$ получается разрывная нелинейность. Данная статья посвящена построению регуляризации краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка в случае, когда свободный член есть разрывная функция типа Хевисайда. В данной работе результаты работ [5]–[7] переносятся на обыкновенные дифференциальные уравнения,

конкретную задачу с разрывами – одномерный аналог модели Гольдштика. Отметим, что в силу [5]–[7] аппроксиматором вместо $-\frac{\omega}{\varepsilon}\psi$ при $-\varepsilon \leq \psi \leq 0$ может быть также любая функция $f = f(\psi)$, непрерывная на отрезке $[-\varepsilon, 0]$ и удовлетворяющая условиям $f(-\varepsilon) = \omega$, $f(0) = 0$.

3. Решение задачи

В работе [3] для плоской задачи Гольдштика показано, что выполнены все условия теоремы 1 из работы [5]. Поэтому последовательность (u_k) решений аппроксимирующих задач (2.3)–(2.4) является минимизирующей последовательностью для функционала J^ω на $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$, содержит подпоследовательность (u_{k_l}) , сходящуюся в $\mathbf{C}_1(\bar{\Omega})$ к полуправильному решению u_0 предельной задачи (2.1)–(2.2), для которого

$$J^\omega(u_0) = \inf_{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} J^\omega(v) = \inf_{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} (v_{x_1}^2 + v_{x_2}^2) dx - \omega \int_{\Omega} dx \int_0^{v(x)} g(x, s) ds \right).$$

Если инфимум J^ω на $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ достигается в единственной точке u_0 , то $u_k \rightarrow u_0$ в $\mathbf{C}_1(\bar{\Omega})$. Отметим, что согласно теореме 3 из работы [10] для любого $k \geq 2$ существует $u_k \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ такое, что

$$J_k(u_k) = \inf_{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} J_k(v) = \inf_{v \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)} \left(J_1(v) - \omega_k \int_{\Omega} dx \int_0^{v(x)} g^k(x, s) ds \right).$$

Причем любое такое $u_k \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$ и является сильным решением соответствующей аппроксимирующей краевой задачи.

В работе [4] для одномерного аналога модели Гольдштика показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ все результаты о решениях (число решений, аналитические выражения норм решений и значений функционала, порождаемого задачей, на них) согласуются с результатами, полученными ранее в работе [2]. Действительно, из искомого уравнения имеем

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= c_1 x + 1, \\ \psi_2(x) &= c_2 \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}} x\right) + c_3 \sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}} x\right), \\ \psi_3(x) &= \frac{\omega}{2} x^2 + c_4 x + c_5, \\ \psi_4(x) &= c_6 \left(\sin\left(\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}} x\right) - \operatorname{tg}\left(\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}}\right) \cos\left(\sqrt{\frac{\omega}{\varepsilon}} x\right) \right), \end{aligned}$$

где c_1, \dots, c_6 – произвольные постоянные. Учитывая условия непрерывности и дифференцируемости данных функций в точках x_0 , x_1 и x_2 ($\psi_1(x_0) = \psi_2(x_0) = 0$, $\psi_2(x_1) = \psi_3(x_1) = -\varepsilon$, $\psi_3(x_2) = \psi_4(x_2) = -\varepsilon$), находим данные постоянные. При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &\rightarrow -\frac{x}{x_0} + 1, \\ \psi_2(x) &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi_3(x) &\rightarrow \frac{\omega}{2}(x-x_0)(x-1), \\ \psi_4(x) &\rightarrow 0,\end{aligned}$$

что согласуется с [2]:

$$\psi(x) = \begin{cases} -\frac{x}{x_0} + 1, & \text{если } 0 \leq x \leq x_0 \\ \frac{\omega}{2}(x-x_0)(x-1), & \text{если } x_0 \leq x \leq 1 \end{cases}, \quad x_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{8}{\omega}}.$$

Заменой $u = \psi + x - 1$ исходная задача преобразуется к виду

$$u'' = \begin{cases} \omega, & \text{если } u < -\varepsilon + x - 1, \\ \frac{\omega}{\varepsilon}(x-1-u(x)), & \text{если } -\varepsilon + x - 1 \leq u \leq x - 1, \\ 0, & \text{если } u \geq x - 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (3.2)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ для любого $\omega > 0$ данная проблема имеет тривиальное решение, при $0 < \omega < 8$ других решений нет. Если $\omega \geq 8$, то, кроме тривиального, задача имеет еще два решения:

$$u_{\pm}(x) = \begin{cases} x(1-\frac{1}{x_0}), & \text{если } 0 \leq x \leq x_0, \\ \frac{\omega}{2}(x-x_0+\frac{2}{\omega})(x-1), & \text{если } x_0 \leq x \leq 1, \end{cases}$$

где $x_0 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{8}{\omega}}$, которые при $\omega = 8$ совпадают (сливаются в одно). Функционал

$$J_{\omega}(u) = \frac{1}{2} \int_0^1 u'^2 dx - \omega \int_{\{x \in [0,1]: u(x) < x-1\}} (x-1-u(x)) dx$$

для каждого $\omega > 0$ достигает инфимума на \mathbf{H}_0^1 в некоторой точке u_0 , и любое такое u_0 является решением задачи (3.1)–(3.2) при $\varepsilon \rightarrow 0$ (для данного недифференцируемого функционала предельное уравнение является уравнением Эйлера). Норма в \mathbf{H}_0^1 имеет вид:

$$\|u\|_{\mathbf{H}_0^1} = \left(\int_0^1 u'^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Получены аналитические выражения норм решений в \mathbf{H}_0^1 для рассматриваемой задачи и значений функционала J_{ω} на них как функций параметров ω и ε . При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$J_{\omega}(u_{\pm}) = \frac{1}{1 \pm \sqrt{1-8/\omega}} \pm \frac{\omega^2 \sqrt{1-8/\omega}}{48} \mp \frac{\omega \sqrt{1-8/\omega}}{24} - \frac{\omega^2}{48} + \frac{\omega}{8} - \frac{1}{2}$$

и

$$\|u_{\pm}\|_{\mathbf{H}_0^1} = \sqrt{\frac{2}{1 \pm \sqrt{1-8/\omega}} \mp \frac{\omega^2 \sqrt{1-8/\omega}}{24} \pm \frac{\omega \sqrt{1-8/\omega}}{12} + \frac{\omega^2}{24} - \frac{\omega}{4} - 1}.$$

Таким образом, найдены аналитические выражения для нормы собственных функций соответствующей краевой задачи и значение функционала, порождаемого этой задачей, на них в зависимости от собственного значения ω ; исследован вопрос о числе решений в зависимости от значений спектрального параметра (число решений исчерпывается найденными тремя, т. е. нечетно).

Задача (3.1)–(3.2) преобразуется к виду

$$-u'' = \omega \begin{cases} -1, & \text{если } u < -\varepsilon + x - 1, \\ \frac{1}{\varepsilon}(u - x + 1), & \text{если } -\varepsilon + x - 1 \leq u \leq x - 1, \\ 0, & \text{если } u \geq x - 1, \end{cases} \quad (3.3)$$

$$u(0) = u(1) = 0. \quad (3.4)$$

Предельная задача имеет вид

$$-u'' = \omega g(x, u(x)), \quad (3.5)$$

$$u(0) = u(1) = 0, \quad (3.6)$$

где

$$g(x, u) = \begin{cases} -1, & \text{если } u < x - 1, \\ 0, & \text{если } u \geq x - 1. \end{cases}$$

В работе [4] показано, что для задачи (3.5)–(3.6) выполнены все условия теоремы 3 из работы [10]. Поэтому существует $\omega_0 > 0$ такое, что для любого $\omega > \omega_0$ $\inf_{v \in \mathbf{H}_0^1} J_\omega(v) < 0$, и найдется $u \in \mathbf{H}_0^1$ такое, что

$$J_\omega(u) = \inf_{v \in \mathbf{H}_0^1} J_\omega(v). \quad (3.7)$$

Отметим, что для величины ω_0 справедлива следующая оценка сверху [9]:

$$\omega_0 \leq \inf_{\hat{u} \in U} \frac{\frac{1}{2} \int_0^1 \hat{u}'^2 dx}{\int_{\{x \in [0,1]: \hat{u}(x) < x-1\}} (x-1-\hat{u}(x)) dx},$$

где $U = \{\hat{u} \in \mathbf{H}_0^1 : \int_{\{x \in [0,1]: \hat{u}(x) < x-1\}} (x-1-\hat{u}(x)) dx > 0\}$. Кроме того, если u – точка разрыва функции $g(x, \cdot)$, то $-1 = g(x, u-) < g(x, u+) = 0$, т. е. функция $g(x, \cdot)$ имеет только прыгающие разрывы для почти всех $x \in [0, 1]$. Значит, любое u , удовлетворяющее (3.7), является ненулевым полуправильным решением задачи (3.5)–(3.6). Из теоремы 3 из работы [10] также следует, что существует $u_k \in \mathbf{H}_0^1$ такое, что $J_\omega(u_k) = \inf_{v \in \mathbf{H}_0^1} J_\omega(v)$. Причем любое такое $u_k \in \mathbf{W}_q^2$ и является сильным решением соответствующей аппроксимирующей задачи (3.3)–(3.4).

Далее рассмотрим проблему близости решений аппроксимирующей задачи u_k к решениям предельной задачи (3.5)–(3.6). Аналогично [3] проверяется, что для одномерного аналога модели Гольдштика выполнены условия теоремы 1 из работы [5]. Поэтому последовательность (u_k) решений аппроксимирующих задач (3.3)–(3.4), построенная выше, является минимизирующей последовательностью для функционала J_ω на \mathbf{H}_0^1 и содержит подпоследовательность (u_{k_l}) , сходящуюся в равномерной метрике \mathbf{C}_1 к полуправильному решению u_0 предельной задачи (3.5)–(3.6), для которого $J_\omega(u_0) = \inf_{v \in \mathbf{H}_0^1} J_\omega(v)$. Если последний инфимум достигается в единственной точке u_0 , то $u_k \rightarrow u_0$ в \mathbf{C}_1 .

Таким образом, теоремы об уравнениях с разрывными нелинейностями иллюстрируются прикладной задачей. В задаче Гольдштика интерес представляет существование нетривиальных решений в зависимости от значения завихренности в области отрывных течений. Показано, что при значениях спектрального параметра – завихренности, превышающих некоторое значение, задача имеет, по крайней мере, одно нетривиальное решение, что согласуется с результатами данной работы (выше получено, что при $\omega > 8$ одномерный

аналог модели Гольдштика имеет два ненулевых решения). Кроме того, изучена проблема близости решений аппроксимирующей и предельной задач. Показано, что если u_k – сильное решение аппроксимирующей задачи, доставляющее абсолютный минимум функционалу задачи, то последовательность (u_k) содержит подпоследовательность, сходящуюся в равномерной метрике к некоторому полуправильному решению предельной задачи, на котором функционал этой задачи достигает нижней грани на всем пространстве; если функционал предельной задачи достигает своей нижней грани на всем пространстве только в одной точке u_0 , то $u_k \rightarrow u_0$ в равномерной метрике, что также согласуется с результатами данной работы (например, выше отмечалось, что при $0 < \omega < 8$ одномерный аналог модели Гольдштика имеет только нулевое решение и, следовательно, $\inf_{v \in \mathbf{H}_\omega^1} J_\omega(v) = 0$).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гольдштик М.А. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Докл. АН СССР. – 1962. – Т. 147. – № 6. – С. 1310-1313.
2. Потапов Д.К. Математическая модель отрывных течений несжимаемой жидкости // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. – 2004. – Т. 8. – № 3-4. – С. 163-170.
3. Потапов Д.К. Непрерывные аппроксимации задачи Гольдштика // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87. – Вып. 2. – С. 262-266.
4. Потапов Д.К. Непрерывная аппроксимация одномерного аналога модели Гольдштика отрывных течений несжимаемой жидкости // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2011. – Т. 14. – № 3. – С. 291-296.
5. Потапов Д.К. Устойчивость основных краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью в коэрцитивном случае // Изв. РАЕН. Сер. МММИУ. – 2005. – Т. 9. – № 1-2. – С. 159-165.
6. Павленко В.Н., Потапов Д.К. Аппроксимация краевых задач эллиптического типа со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. – 2005. – № 4. – С. 49-55.
7. Потапов Д.К. Аппроксимация задачи Дирихле для уравнения эллиптического типа высокого порядка со спектральным параметром и разрывной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 2007. – Т. 43. – № 7. – С. 1002-1003.
8. Красносельский М.А., Покровский А.В. Уравнения с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. – 1979. – Т. 248. – № 5. – С. 1056-1059.
9. Потапов Д.К. Об одной оценке сверху величины бифуркационного параметра в задачах на собственные значения для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т. 44. – № 5. – С. 715-716.
10. Павленко В.Н., Потапов Д.К. О существовании луча собственных значений для уравнений с разрывными операторами // Сиб. матем. журн. – 2001. – Т. 42. – № 4. – С. 911-919.

Approximations of Gol'dshtik's model

© D. K. Potapov²

Abstract. In this paper we consider continuous approximations of the Gol'dshtik problem for separated flows of incompressible fluid. An approximating problem is obtained from the initial problem by small perturbations of a spectral parameter (vorticity) and by the continuous approximations of discontinuous nonlinearity in the phase variable. Using a variational method under certain conditions, we prove the convergence of solutions of the approximating problems to the solutions of the initial problem. A modification for a one-dimensional analogue of the Gol'dshtik mathematical model is considered. The model is a nonlinear differential equation with a boundary condition. Nonlinearity in the equation is continuous and depends on a small parameter. We have a discontinuous nonlinearity, when this parameter tends to zero. The results of the solutions are in accord with the results obtained for the one-dimensional analogue of the Gol'dshtik model.

Key Words: Gol'dshtik model, separated flows, nonlinear differential equation, discontinuous nonlinearity, continuous approximation.

²Associate Professor of Higher Mathematics Chair, Saint-Petersburg State University, Saint-Petersburg; potapov@apmath.spbu.ru.

УДК 519.71

Системы с переменной структурой при наличии малых параметров

© Сафонкин В.И.¹

Аннотация. Статья посвящена изучению систем с переменной структурой при наличии малых параметров. Полученные результаты могут быть использованы при построении релаксационных колебаний в физических системах.

Ключевые слова: система с переменной структурой, малый параметр

Известно, что наличие малых параметров в математических моделях систем с переменной структурой связано с необходимостью учета малых по величине физических величин в исследуемом объекте. Более того, их отбрасывание может приводить к неадекватности модели. В связи с этим, при решении прикладных задач вопрос о необходимости учета малых параметров или возможности их отбрасывания в процессе составления математической модели играет существенную роль [3]. В других случаях этот вопрос связан с желанием исследователя упростить модель путем понижения ее порядка. Имеются, очевидно, и другие мотивы оценки влияния малого параметра на поведение решений таких систем. Вопрос учета малого параметра, как известно, для систем с гладкими правыми частями в определенной мере решается в рамках исследований сингулярных систем [2].

Постановка задачи. При исследовании систем с переменной структурой, в случае наличия в них малых параметров, применении подходов, используемых в обычных сингулярных системах, оказывается не возможным в силу разрыва функций, входящих в правые части уравнений исследуемой системы. Это связано с тем, что даже незначительное изменение параметров приводит к резким изменениям в поведении таких систем. В связи со сделанными замечаниями, естественно, встает вопрос оценки малого параметра на предмет возможности его отбрасывания в моделях вообще или установления границ его изменения, в которых свойства реальной системы сохраняется. Решению этой задачи и посвящается данная статья.

Решение задачи. Далее будем рассматривать систему с переменной структурой вида

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y, \mu, u(t, x, y)), \quad (0.1)$$

$$\mu \frac{dy}{dt} = g(t, x, y, \mu), \quad (0.2)$$

где $x \in R^n$, $y \in R^l$, $f(t, x, u)$ - непрерывная по совокупности аргументов функция. Управляющая функция $u(t, x, y) \in \mathfrak{R}^m$ претерпевает разрыв первого рода на некоторой поверхности $S(t)$, задаваемой уравнением $s(t, x_1, \dots, x_n) = 0$ и представляющая собой множество M меры нуль, состоящее из точек границ областей $s_i(t, x, y) > 0$ и $s_i(t, x, y) < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Таким образом, функция $f(t, x, u(t, x, y))$ является непрерывной вплоть до общей границы указанных областей. Функция $g(t, x, y, \mu) \in C(D)$, $D = ([t_0, +\infty), R^n, R^l, \mu \in (0, \mu_0))$, μ - малый положительный параметр.

Области $s(t, x) > 0$ и $s(t, x) < 0$ будем называть областями однозначности функции $u(t, x, y)$. В этих областях соответственно: $u_i(t, x, y) = u_i^{(1)}(t, x, y)$, $i = 1, 2, \dots, n$ при $s_i(t, x, y) > 0$ и $u_i(t, x, y) = u_i^{(2)}(t, x, C)$ при

¹Доцент кафедры прикладной математики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск

$s_i(t, x, y) < 0$. Функции $u_i^{(1)}(t, x, y)$ и $u_i^{(2)}(t, x, y) \in C([t_0, +\infty) \times R^n \times R^l)$.

Наряду с системой (0.1)-(0.2) будем рассматривать доопределенную систему, полученную в предположении $\mu = 0$ по следующей схеме:

1) из уравнения

$$g(t, x, y) = 0 \quad (0.3)$$

выражаем быструю координату $y = \varphi(t, x)$ и подставляем ее как в уравнение (0.1), так и в выражения $s_i(t, x, y)$;

2) методом эквивалентного управления [2] в предположении $\dot{s}(t, x) = 0$ в силу системы (0.1) находим выражение функции $u(t, x)$ и подстановкой ее в уравнение (0.1) получаем уравнение

$$\frac{dx}{dt} = \psi(t, x), \quad (0.4)$$

где $\psi(t, x) \in C([t_0, +\infty) \times R^n)$, $x \in R^n$, описывающее движение на многообразии $S^*(t)$ ($s^*(t, x) = 0$);

3) тем же методом доопределяем систему (0.1) вне поверхности $S^*(t)$ в предположении, что $\dot{s}(t, x) \neq 0$. В результате доопределения получим систему

$$\frac{dx^*}{dt} = f(t, x^*, \bar{u}(t, x^*)), \quad (0.5)$$

где $\bar{u}(t, x^*)$ управление, полученное в процессе доопределения системы (0.1) вне многообразия $S^*(t)$.

Предложенной процедурой фактически произведено разделение движений в системе на быстрые, которые описываются уравнением (0.2) при малых значениях μ , и медленные, описываемые уравнением (0.5). Такой процедурой мы произвели переход при исследовании исходной системы из пространства размерности $n + l$ в пространство меньшей размерности порядка n . При этом правомерен вопрос: являются ли *эквивалентными* движения, описываемые системой (0.1) и системой (0.5), полученной в процессе доопределения? То есть, имеет ли место $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = x^*(t)$? Очевидно, этого можно ожидать только в том случае, когда в достаточно малый интервал времени при значениях $t > t_0$ быстрые колебания «затухают».

Фактически задача сводится к установлению условий на функции правых частей системы и малый параметр μ , при которых можно указать алгоритм изучения медленных движений. В решении указанной задачи необходимо показать, что при наложенных условиях быстрые колебания затухают, а движениями на многообразии $S^*(t)$ можно моделировать медленные движения.

1. Сходимость быстрых движений.

Под сходимостью быстрых движений будем понимать их асимптотическую устойчивость относительно многообразия $S^*(t)$. Решение такой задачи фактически сводится к сравнению решений систем (0.4), описывающих движение на многообразии $S^*(t)$, и решений системы (0.5), описывающей движение в некоторой окрестности данного многообразия. Предлагается такое сравнение выполнить на основе введения функции $V(t, z, s(z))$, где $z = x^* - x$. Будем предполагать, что введенная функция обладает свойствами:

$$1) V(t, z, s) \in C([t_0, +\infty) \times R^n \times R^m); V(t, 0, 0) = 0;$$

$$2) \|z\| \leq V(t, z, s) \leq k(t) \|z\|, t \geq t_0, V \in R^n, k(t) \in C([t_0, +\infty), R_+^1);$$

$$3) \|V(t, z_1, s) - V(t, z_2, s)\| \leq k(t) \|z_1 - z_2\|, \forall z_1, z_2 \in R^n;$$

$$4) \overline{\lim}_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} (V(t+h, z + \delta F, s(t+h)) - V(t, z, s(t))) \leq \psi(t)V(t, z, s), \psi \in C([t_0, +\infty), R^1).$$

Здесь F есть функция правой части уравнения

$$\frac{dz}{dt} = f(t, z, s(z)).$$

В работе [5] показано, что при выполнении условия 2) обеспечивается непрерывная продолжимость решений системы (0.5) вправо при значении $t > t_0$, а условия 3)-4) обеспечивают их ограниченность.

Обратим внимание на то, что в решении данной задачи мы должны обращать внимание на три множества: $S(t)$; $S^*(t)$ и $\bar{S}(t)$. Как было отмечено выше первое множество состоит из точек поверхности $s(x) = 0$, второе – из точек поверхности $s^*(\varphi(x)) = 0$ и третье из точек поверхности, описываемое уравнением $y = \varphi(x)$.

Оценим при помощи введенной функции близость решение системы (0.2) $y(t)$ и вырожденного решения $y^*(t) = \varphi(t, x^*)$ при значении $\mu = 0$. Введем переменную $z = y - y^*$. Положим $V(t, z, \bar{s}) = \|y - y^*\|$, где $\bar{s} = y - \varphi(t, x)$. Тогда производная функции V примет вид

$$\dot{V} = \varphi'_x(t, x) \cdot \dot{x} = \varphi'_x(t, x) \cdot f(t, x, \varphi(t, x), u^*) - \frac{1}{\mu} g(t, x, y), \quad (1.1)$$

где u^* есть доопределенная на многообразии $S^*(t)$ функция $u(t, x)$.

Таким образом $\dot{V} = \varphi'_x(t, x) \cdot \psi(t, x, u^*) - \frac{1}{\mu} g(t, x, y)$. Требуя $\dot{V} < 0$, имеем:

А) $\varphi'_x \psi(t, x, u^*) < 0$ в областях однозначности функции $u^*(t, x)$;

Б) $\frac{1}{\mu} g(t, x, y)$ будет ограничена в областях однозначности значением $L \|y\|$, где $L - Const, L > 0$.

В) в областях однозначности функции управления при выполнении условий А) и Б) должно иметь место соотношение $|\varphi'_x(t, x) \cdot \psi(t, x, u^*)| > \frac{1}{\mu} g(t, x, y), t \in [t_0, +\infty)$

Из изложенного выше следует справедливость утверждения

Т е о р е м а 1.1. *Если в системе (0.1) – (0.2) функции правых частей удовлетворяют сделанным предположениям. Кроме того, выполнены условия А), Б) и В), то быстрая координата движения $y(t)$ через некоторое время попадает в δ - окрестность многообразия $S^*(t)$.*

Действительно, если выполнено условие А), то медленная составляющая движений фактически оказывает положительное влияние на стабилизацию быстрых движений в системе. Второй член в выражении производной функции $V(t, x, y)$ может менять знак на множестве $g(t, x, y) = 0$. Однако, в областях однозначности в окрестности многообразия $S^*(t)$ при выполнении условия В) знак производной функции $V(t, x, y)$ остается отрицательно постоянным. Эти замечания и устанавливают справедливость сделанного утверждения. Т.е. при $t \rightarrow +\infty$ изображающая точка траектории быстрых движений окажется в достаточно малой окрестности многообразия $S^*(t)$.

Приведем примеры, подтверждающие сделанные утверждения.

П р и м е р 1.1. *Рассмотрим систему второго порядка*

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -x_2 + \text{Sign}(s), \\ \mu \frac{dx_2}{dt} &= x_1 - 2x_2, \end{aligned} \quad (1.2)$$

Где μ - малый положительный параметр, $s = x_1 + x_2 - b$, $b - Const, b > 0$. Положив $\mu = 0$ и заменив в первом уравнении переменную x_2 выражением $x_2 = \frac{1}{2}x_1$, будем иметь уравнение

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{2}x_1 + \text{Sign}(s^*),$$

описывающее медленные движения. Тогда многообразии $S^*(t)$, на котором управление претерпевает разрыв, примет вид $s^* = \frac{3}{2}x_1 - b = 0$. Возьмем функцию V в виде $V = \|s^*\|$. Ее производная в силу системы (1.2) примет вид $\dot{V} = -\frac{3}{4}x_1 + \frac{3}{2}\text{Sign}(s^*)$. Потребовав выполнение соотношения $\dot{V} < 0$, нетрудно видеть, что оно выполняется для всех значений $x_1 > 2$ в области $s^* > 0$ и всех значений $x_1 > 0$ в области $s^* < 0$. Таким образом, производная функции V имеет отрицательный знак в обеих областях однозначности при значениях $x_1 > 2$. Это означает, что из достаточно малой окрестности многообразия $s^* = 0$ траектории решений притягиваются к этому множеству.

Аналогичное утверждение имеет место, если потребовать выполнения соотношений $\lim \dot{s}^* < 0$ при $s^* \rightarrow +0$ и $\lim \dot{s}^* > 0$ при $s^* \rightarrow -0$.

Таким же образом оценим множество $g(x_1, x_2, 0) = x_1 - 2x_2 = 0$ на предмет его устойчивости относительно быстрых траекторий. Для этого введем переменную $z = x_2^* - x_2$, где x_2^* - координата движения по поверхности $s^*(x_1, x_2) = 0$, а x_2 - координата быстрых движений вне поверхности $S^*(t)$.

Тогда в качестве функции можно принять $V = \|z\|$. Полагая $\mu = 0$, в силу системы будем иметь

$$\dot{V} = \frac{1}{\mu}g(x_1, x_2) + \frac{1}{2}(x_2 - \text{Sign}(s^*)). \quad (1.3)$$

Анализируя выражение правой части соотношения (1.3), нетрудно видеть, что в областях однозначности управления $u(x_1, x_2)$ в некоторой окрестности множества $S^*(t)$ функция \dot{V} имеет отрицательный знак при выполнении условий:

- 1) в области $s^*(x_1, x_2) > 0$ $x_2 < 1 - \frac{2}{\mu}g(x_1, x_2)$;
- 2) в области $s^*(x_1, x_2) < 0$ $x_2 < -1 + \frac{2}{\mu}g(x_1, x_2)$.
- 3) в обеих областях однозначности при выполнении условий А) и Б) должно иметь место $x_2 < \min \left\{ 1 - \frac{2}{\mu}g(x_1, x_2), -1 + \frac{2}{\mu}g(x_1, x_2) \right\}$.

В силу непрерывности функции $g(x_1, x_2)$ можно всегда выбрать такую δ - окрестность многообразия переключения, условия А) - В) будут выполнены.

Пример 1.2. Рассмотрим систему вида

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cy - \rho \text{Sign}(y + x), \\ \frac{dy}{dt} &= -ky + \text{Sign}(y + x), \\ \mu \frac{dz}{dt} &= \mu z - x - y, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где $\text{Sign}(y + x) = u(x, y)$, c, k, ρ - положительные константы. Положив в (1.4) значение $\mu = 0$, будем иметь систему, описывающую поведение решений в двухмерном пространстве R^2 .

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cy - \rho u(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= -ky + u(x, y), \end{aligned} \quad (1.5)$$

где управляющая функция $u(x, y)$ претерпевает разрыв на множестве $S^*(t)$. Методом эквивалентного управления [1] система (1.5) на множестве $s^*(t) = 0$ приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cy - \rho \frac{k-c}{1-\rho}, \\ \frac{dy}{dt} &= -ky + \frac{k-c}{1-\rho}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $\frac{k-c}{1-\rho}$ есть выражение доопределенного управления $\bar{u}(x, y)$ на данном множестве.

Аналогичным образом, в предположении $\dot{s}^* \neq 0$, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= cy - \rho \frac{ky - cy + \dot{s}}{1-\rho}, \\ \frac{dy}{dt} &= -ky + \frac{ky - cy + \dot{s}}{1-\rho}, \end{aligned} \quad (1.7)$$

описывающая поведение движений системы вне множества $S^*(t)$. Вводя обозначения: $x = x_1, y = x_2$, система (1.6) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= cx_2 - \rho \frac{k-c}{1-\rho}, \\ \frac{dx_2}{dt} &= -kx_2 + \frac{k-c}{1-\rho}, \end{aligned} \quad (1.8)$$

а, вводя обозначения: $x = y_1, y = y_2$, система (1.7) приводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= cy_2 - \rho \psi(y_1, y_2), \\ \frac{dy_2}{dt} &= -ky + \psi(y_1, y_2), \end{aligned} \quad (1.9)$$

где $\psi(y_1, y_2) = \frac{(k-c)y_2 + \dot{s}}{1-\rho}$.

Напомним, здесь система (1.8) описывает поведение решений на множестве $S^*(t)$, а система (1.9) - вне этого множества. Проведем сравнение решений указанных систем, для чего введем функцию $V = \|y - x\|$, производная которой в силу систем (1.7) и (1.8) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{V} &= [(y_1 - x_1)(\dot{y}_1 - \dot{x}_2) + (y_2 - x_2)(\dot{y}_2 - \dot{x}_2)] \cdot [(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2]^{-\frac{1}{2}} = \\ &= \frac{(y_1 - x_1)\Phi_1(x_2) + (y_2 - x_2)\Phi_2(x_2)}{\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}} \cdot \left(-\frac{\rho}{1-\rho}\right), \end{aligned}$$

где $\Phi_1(x_2) = [(k-c)x_2 - \dot{s} - (k-c)]$, $\Phi_2(x_2) = [(k-c)x_2 - \dot{s} + (k-c)]$.

Если предположить, что функции Φ_1 и Φ_2 невозрастающие по переменной x_2 в областях однозначности, а параметр ρ своим значением удовлетворяет неравенству $0 \leq \rho < 1$, то имеем $\dot{V} \leq 0$. Кроме того, видно, что при $\|y - x\| = 0$ функция V обращается в ноль.

Таким образом, при сделанных предположениях введенная функция V удовлетворяет требованиям 1) ÷ 4). Это означает, что при $t \rightarrow +\infty$ все решения системы из областей однозначности $s^* > 0$ и $s^* < 0$ попадают в сколь угодно малую окрестность многообразия $S^*(t)$.

Выводы. Приведенные выше примеры показывают, что доопределенная по предложенной схеме исходная система в предположении $\mu = 0$ и при наложении дополнительных условий на функции правых частей может содержать скользящие режимы, которые описывают медленные движения в исходной системе (0.1) - (0.2). Как известно, наличие или отсутствие медленных режимов в реальных системах, описываемых системой (0.1)-(0.2), является весьма важным для практики. Напомним, что примером 1, мы показали возможность гашения быстрых колебаний в окрестности многообразия $g(x, y, 0) = 0$, а примером 2 установлен факт существования в системах с переменной структурой при наличие в них малых параметров скользящих режимов.

Оказывается: если функция $\psi(t)$ в условии 4) удовлетворяет соотношению $\psi(t) \leq 0, t \in [t_0, +\infty)$ и выполнено условие $F(t, 0, 0) \equiv 0$, то в силу [5] для любого решения $z(t : t_0, x_0, s(t_0))$ имеет место $\|z(t : t_0, z_0, s(t_0))\| \leq N$ для всех $t \geq t_0, N - const$. А это означает, что $\lim_{t \rightarrow +\infty} \|z(t : t_0, z_0, s(t_0))\| = 0$, т.е. любое решение системы (0.5) попадает в δ -окрестность поверхности S ($s(t, x) = 0$), $x \in R^n$ при $t \rightarrow +\infty$.

2. Исследование медленных движений.

В дальнейшем будем рассматривать три множества: $S^*(t)$; $\bar{S}(t)$ и $S_k(t)$. Первое множество определяется уравнением $s(t, x, y, 0) = 0$, второе – уравнением $g(t, x, y, 0) = 0$, а третье уравнением $s(t, x, y, \mu_k) = 0$, $\mu_k \in (0, \mu_*)$.

Будем предполагать, что при $\mu \rightarrow 0$, в моменты времени t_k , $k = 1, 2, \dots$ значения μ образуют монотонно убывающую последовательность $\{\mu_k\}$.

При доопределении [2], уравнение (0.1), описывающее медленные движения, может быть заменено дифференциальным уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x, y, U_k(t, x)), \quad (2.1)$$

где ограниченное, замкнутое и непустое множество, полученное при доопределении функции $u(t, x, y, \mu)$ на множестве $S_k(t)$, соответствующем значению μ . При этом $u(t, x, y, \mu_k) \in U_k(t, x)$. Тогда соотношение (2.1) можно заменить дифференциальным включением

$$\frac{dx}{dt} \in F_k(t, x), \quad (2.2)$$

где множество $F_k(t, x) = f(t, x, y, U_k(t, x))$ отвечает доопределению системы (0.1) в точке $x(t)$ на множестве $S_k(t)$. Впредь в функции правой части системы (2.1) в силу малости значения параметра μ быструю переменную y будем рассматривать как параметр, т.к. при всех значениях $t_k \in [t_0, T)$ быстрая составляющая $y(t)$ движения в конечном промежутке времени практически сохраняет свое начальное значение y_0 .

Предположим, что многозначное отображение в правой части (2.2) удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $F_k(t, x)$ - выпуклые компакты для всех точек $(t, x) \in S_k(t)$, соответствующих значениям μ_k ;
- 2) функция F_k - многозначное отображение $(t, x_k) \rightarrow F_k(t, x_k)$ непрерывно по совокупности аргументов, где $(t, x_k) \in S_k(t)$. Кроме того, для всех F_k имеет место $\alpha(F(t, x_k), F(t, x^*)) \rightarrow 0$ при $x_k \rightarrow x^*$, $t - Const$. Здесь $\alpha(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\}$.

Введем несколько определений [3]-[4].

О п р е д е л е н и е 2.1. *Замкнутой окрестностью M^δ множества M будем называть множество точек, удовлетворяющих соотношению $\rho(x, M) \leq \delta$. Очевидно M^δ - замкнутое множество.*

О п р е д е л е н и е 2.2. *Наименьшим выпуклым множеством coM множества M будем называть пересечение выпуклых множеств A_1, A_2, \dots , содержащих множество M .*

О п р е д е л е н и е 2.3. *Вектор-функцию $y(t)$ будем называть δ - решением (приближенным решением с точностью до δ) включения $\dot{x} \in F(t, x)$ с непрерывной функцией F , если на рассматриваемом интервале имеет место почти всюду $\dot{y}(t) \in F_\delta(t, y(t))$, где $F_\delta(t, y(t)) \equiv [coF(t^\delta, y^\delta)]^\delta$, $F(t^\delta, y^\delta)$ - пересечение множеств $F(t_1, y_1)$ для всех $t_1 \in t^\delta$, $y \in y^\delta$, $|y_1 - y| \leq \delta$, $|t_1 - t| \leq \delta$.*

О п р е д е л е н и е 2.4. *Множество $F_*(t, x)$ для множеств $F_k(t, x)$, $k = 1, 2, \dots$ будем считать предельным множеством, если имеет место $\alpha(F_k(t, x), F_*(t, x^*)) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x^*$.*

О п р е д е л е н и е 2.5. Если точка $(t^*, x^*) \in S^*(t)$ принадлежит области притяжения множества $S^*(t)$, то точку пересечения $p^*(t^*, x^*)$ траектории с множеством $S^*(t)$ будем называть точкой падения. Если в точке $p^*(t^*, x^*)$ траектория переходит в другую однозначную область, то будем ее называть точкой срыва.

При введенных определениях сделаем следующие предположения:

1) для значений $\mu \in (0, \mu_0)$ существует сходящаяся последовательность $\{\mu_k\}$, т.е. $\mu_k \rightarrow \mu^*$ при $k \rightarrow \infty$;

2) каждому значению μ_k в пространстве R^l отвечает множество $S_k(t, \mu_k)$;

3) для каждого значения μ_k на множестве $S_k(t)$ существует точка падения (t, x_k) траектории из области однозначности. Как известно, при доопределении системы () такой точке отвечает множество $F_k(t, x_k)$. Для значения $\mu = 0$ такой точкой будем считать точку $(t, x^*) \in S^*(t)$.

4) для каждой точки падения (t_k, x_k) существует замкнутая ее ε_k -окрестность, каждая точка которой удовлетворяет соотношению $\rho(x, x_k) \leq \varepsilon_k$. Такие множества будем обозначать M^{ε_k} . Для точки (t, x^*) - соответственно M^{ε^*} .

Т е о р е м а 2.1. Если функция $F(t, x)$ непрерывна в точке (t_k, x_k) , то в δ -окрестности этой точки можно выделить последовательность $\{\mu_k\}$, сходящуюся к этой точке, т.е. $\{x_k\} \rightarrow x^*$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство сделанного утверждения повторяет доказательство для непрерывной функции $f(x)$, приняв за предельное множество $F(t, x^*)$.

Т е о р е м а 2.2. Если каждое из множеств M^{ε_k} - непустое, ограниченное и замкнутое, кроме того, они образуют вложенные подмножества в области $G \in R^l$ с радиусами r_{μ_k} , а последовательность μ_k является равномерно сходящейся с предельной точкой μ^* , то при $k \rightarrow \infty$ имеет место $\rho(M^{\varepsilon_k}, M^{\varepsilon^*}) \rightarrow 0$ (равносильно $x_k(t) \rightarrow x^* \in S^*(t)$).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть r_{μ_k} - радиусы вложенных подмножеств. Причем, $r_{\mu^*} = \min\{r_{\mu_k}\}$. Тогда в соответствии с условием теорем в окрестности M^{ε^*} точки (t, x^*) при $k \rightarrow \infty$ будет расположена точка $(t, x_k) \in S_k(t)$, которая будет располагаться от точки (t, x^*) на сколь угодно малом расстоянии ρ . Очевидно, для последовательности $\{x_k\}$ точка (t, x^*) будет являться предельной при $r_{\mu^*} \rightarrow 0$. Действительно, если предположить, что существует другая предельная точка x_p , отстоящая от точки (t, x^*) на расстоянии большем r_{μ_k} , то множества M^{ε^*} и M^{ε_p} не пересекаются, что противоречит условию теоремы.

Как известно, множество $F_k(t, x_k)$ состоит из предельных точек значений функции $f(t, x, u(t, x))$ при $x_k \rightarrow x^*$. Среди таких значений находятся и векторы $f^+(t, x, u(t, x)) = \lim f$ при $x \rightarrow x^*$ в области $s^*(x) > 0$, $f^-(t, x, u(t, x)) = \lim f$ при $x \rightarrow x^*$ в области $s^*(x) < 0$.

Введем обозначение $f_{N_k}^+, f_{N_k}^-$ - соответственно проекции векторов f^+ и f^- на нормаль, проведенную к касательной плоскости множества $S_k(t)$ в точке (t, x_k) .

О п р е д е л е н и е 2.6. Множество точек, заключенных между векторами $f^+(t, x_k)$ и $f^-(t, x_k)$ и выпуклой оболочкой, натянутой на концы этих векторов, будем называть выпуклым конусом C_k .

Т е о р е м а 2.3. Если выполнены условия теорем 1 и 2, кроме того, для всех точек $x_k \in S_k(t)$ имеют место неравенства $f_{k-1}^+ \geq f_k^+$ и $f_{k-1}^- \geq f_k^-$ для всех $x_k \in [x_{k-1}, x_k]$, то имеет место $\rho(F_{k-1}(t, x_{k-1}), F_k(t, x_k)) \rightarrow 0$ при $x_{k-1} \rightarrow x_k$.

Действительно, если выполнены условия теорем 1-3, то выпуклые конусы C_k являются вложенными для всех $x_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Эти конусы будут содержаться между направляющими прямыми, лежащими на векторах $f_{N_k}^-$ и $f_{N_k}^+$. Это означает, что при $x_{k-1} \rightarrow x_k$, выпуклые оболочки, представляющие множества $F_{k-1}(t, x_{k-1})$ и $F_k(t, x_k)$ будут отстоять друг от друга на сколь угодно малую величину, т.е. имеет место $\rho(F_{k-1}, F_k) \rightarrow 0$. Доказанное утверждение влечет выполнение утверждение $\rho(F_{k-1}, F_*) \rightarrow 0$ при $x_k \rightarrow x^*$.

Пример 2.1. Рассмотрим систему

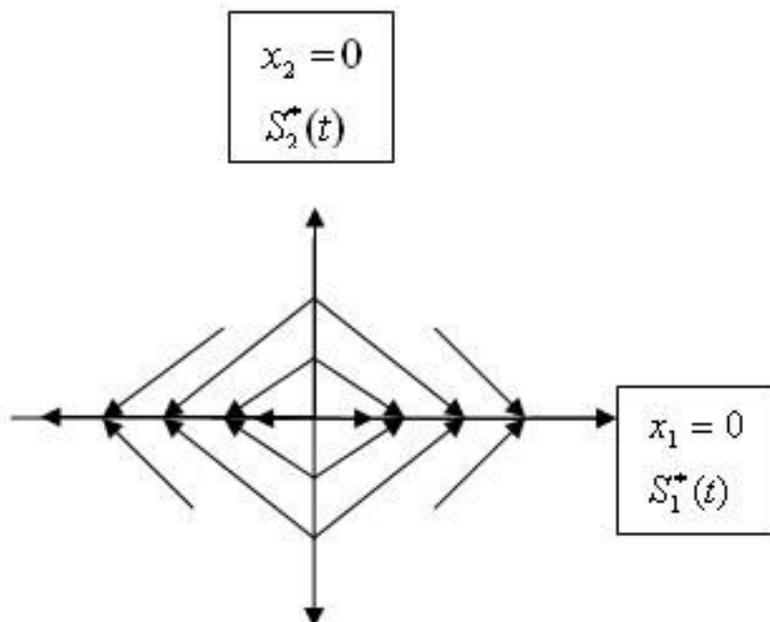
$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2\text{Sign}(2x_1 - x_2 + \mu) - \text{Sign}(2x_2 - x_1 + \mu), \\ \dot{x}_2 &= -2\text{Sign}(2x_1 - x_2 + \mu) + \text{Sign}(2x_2 - x_1 + \mu), \\ \mu \dot{x}_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned} \quad (2.3)$$

где μ - малый положительный параметр. Доопределив систему () при $\mu = 0$, будем иметь систему вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2\text{Sign}S_1^* - \text{Sign}S_2^*, \\ \dot{x}_2 &= -2\text{Sign}S_1^* + \text{Sign}S_2^* \end{aligned} \quad (2.4)$$

При значении $\mu = 0$ многообразия S_1^* и S_2^* совпадают с координатными осями Ox_2 и Ox_1 соответственно. Траекториями движения в областях однозначности являются отрезки прямых, соединяющих точки многообразий S_1^* и S_2^* . При значении $\mu \neq 0$ такими многообразиями будут $x_1 = \mu$ и $x_2 = \mu$ (см. рисунок 1).

Множествами точек x_k на многообразиях S_1^* и S_2^* являются точки x_k на траекториях движения. Для каждой такой точки имеет место $f_{N_k}^- = f_{N_k}^+$. Выпуклыми конусами здесь являются треугольники, образованные векторами: $f_1^-(x_1, x_2)$; $f_1^-(x_1, x_2)$ и отрезками, соединяющие вершины этих векторов. Для любых двух точек x_{k-1} и x_k , лежащие на траектории движения, их конусы являются выпуклыми и вложенными. При этом нетрудно видеть, что при $\mu \rightarrow 0$ значение $\mu_{k-1} \rightarrow \mu_k$, а $x_{k-1} \rightarrow x_k$ для всех $x \in [x_{k-1}, x_k]$. Таким образом, оказываются выполненными все требования как теоремы 3, так и теорем 1-2. Это означает, что расстояния между множествами F_{k-1} и F_k , образованные отрезками, соединяющими вершины векторов f_k^- и f_k^+ , стремятся к нулю при значениях $\mu \rightarrow 0$. Откуда следует, что при достаточно малых значениях μ решение $x^*(t)$ и решение $x_k(t)$, находящиеся в δ - окрестности множества $S^*(t)$, могут отличаться на сколь угодно малую величину $\varepsilon(\mu)$.



Р и с у н о к 2.1

Расположение траекторий в окрестности многообразий $S_1^*(t)$ и $S_2^*(t)$

Выводы. В этом пункте сделана попытка оценить влияние малого параметра на поведение в реальных системах медленных движений в предположении, что быстрые колебания стабилизируются в конечный промежуток времени. Полученные условия, обеспечивающие попадания траектории на многообразии разрыва управляющей функции и их сохранение в виде скользящих режимов, позволяют оценить допустимые значения малого параметра, обеспечивающие требуемый режим в изучаемой системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Емельянов С.В. Теория систем с переменной структурой. – М.: Наука, 1970, – 592 с.
2. Уткин В.И. Скользящие режимы в задачах оптимизации и управления. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 368 с.
3. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 223 с.

-
4. Пятницкий Е.С. Избранные труды (теория управления). Т.1. – М.: Физматлит, 2004. – 382 с.
 5. Сафонкин В.И. Асимптотика поведения решений систем с переменной структурой // Труды Средневолжского математического общества. Саранск: Из-во СВМО, 2005. Т7, №1. – С. 251-256.

Sistem with variable structure in the presence of small parameter

© V.I. Safonkin ²

Abstract. The article is devoted to studying the behavior of system with variable structure in the presence of small parameter. These results can be useful in studying relaxation oscillations in physical devices.

Key Words: system with variable structure; small parameter.

²Associate professor of applied mathematics chair, Mordovian State University, Saransk

УДК 532.582.7

Влияние твердой сферы на линейный поток жидкости, вязкость которой зависит от температуры

© А. О. Сыромясов¹

Аннотация. Задача о твердой сфере в линейном потоке жидкости переменной вязкости решена в приближении Стокса. Предполагается, что градиент температуры вдали от частицы постоянен. Изучено взаимодействие термодинамических и гидродинамических эффектов. Показано, что в отличие от жидкости постоянной вязкости на частицу может действовать сила.

Ключевые слова: Вязкая жидкость, переменная вязкость, приближение Стокса, асимптотические методы, суспензия.

1. Введение

При математическом моделировании многофазных систем необходимо описывать взаимодействие несущей среды (например, жидкости) и дисперсной фазы (например, взвешенных в жидкости частиц). В изучаемых средах происходят разнообразные гидродинамические, термодинамические и электромагнитные процессы, и значительную роль могут играть перекрестные эффекты, связанные с взаимовлиянием различных процессов и явлений. Например, из-за колебаний электрического поля изменяются свойства ферромагнитной жидкости, что отражается на движении взвешенных в ней частиц.

Ниже изучается суспензия, образованная твердыми сферами в жидкости, вязкость которой зависит от температуры. Частицы расположены далеко друг от друга, так что в окрестности каждой из них влиянием других можно пренебречь. Кроме того, на взвешенные частицы не действуют внешние силы и моменты. Все процессы, происходящие в суспензии, считаются стационарными.

2. Общая постановка задачи

Поскольку мы пренебрегаем взаимодействием твердых сфер, можно считать, что в жидкости взвешена единственная частица Ω некоторого радиуса a . Ее центр для удобства можно совместить с началом O декартовой системы координат; положение произвольной точки пространства относительно O задается вектором $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$.

Течение жидкости в безынерционном приближении описывается уравнениями

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0, \operatorname{div} \vec{u} = 0, \quad (2.1)$$

где \vec{u} – скорость течения жидкости, σ_{ij} – компоненты тензора напряжений:

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.2)$$

¹Доцент кафедры математики и теоретической механики, Мордовский государственный университет имени Н. П. Огарева, г. Саранск; syall@yandex.ru.

Здесь p – давление в жидкости, η – вязкость. Она зависит от температуры T по закону

$$\eta(T) = \eta_0 \left(1 - \alpha \frac{T - T_0}{T_0} \right), \quad (2.3)$$

где $\alpha > 0$ – безразмерный параметр, T_0 – т.н. условный нуль температуры. Отношение $(T - T_0)/T_0$ считается малым. Формула (2.3) получается при линейаризации более сложных зависимостей $\eta(T)$ [1] и отражает падение вязкости при увеличении температуры.

Из уравнений (2.2) и (2.3) следует, что неоднородность температурного поля влияет на течение жидкости. Перемещение жидкости также может оказывать влияние на значение T в каждой точке. Будем, однако, считать течение настолько медленным, что оно не играет роли в распределении температуры. Тогда $T(\vec{x})$ должна подчиняться уравнению

$$\Delta T = 0 \quad (2.4)$$

Очевидно, вне и внутри частицы температурное поле описывается разными функциями. Обозначим отклонения температуры жидкости (fluid) и частицы (particle) от величины T_0 через $T_f(\vec{x})$ и $T_p(\vec{x})$. Согласно (2.4), обе эти функции должны быть гармоническими.

Граничные условия задачи таковы. В центре частицы температура должна быть конечной; именно ее можно принять за «условный нуль». Градиент температуры на бесконечности постоянен, а на поверхности частицы непрерывны температура и тепловой поток:

$$T_p(\vec{0}) = 0; \nabla T_f \rightarrow \vec{T} = \text{const}, |\vec{x}| \rightarrow \infty; T_p = T_f, \kappa_p \frac{\partial T_p}{\partial n} = \kappa_f \frac{\partial T_f}{\partial n}, |\vec{x}| = a \quad (2.5)$$

Здесь κ_p и κ_f – теплопроводности частицы и жидкости, \vec{n} – единичный вектор внешней нормали к поверхности сферы.

Поток жидкости на бесконечности в отсутствие градиента температуры линеен:

$$u_i \rightarrow C_{ij}^{(0)} x_j, C_{ij}^{(0)} = \text{const}, |\vec{x}| \rightarrow \infty, \vec{T} = 0 \quad (2.6)$$

Обозначим через \vec{V} и $\vec{\Gamma}$ абсолютные линейную и угловую скорости частицы. В таком случае условие прилипания на поверхности сферы запишется следующим образом:

$$u_i(\vec{x}) = V_i + \Gamma_{ij} x_j, |\vec{x}| = a \quad (2.7)$$

Итак, суспензия моделируется системой уравнений (2.1)–(2.7). Поскольку поток не влияет на распределение температуры, сначала следует решить термодинамическую задачу (2.4)–(2.5). После этого, зная $T_f(\vec{x})$ и считая \vec{V} и $\vec{\Gamma}$ известными, можно найти поля скоростей и давления в жидкости из уравнений (2.1)–(2.3), (2.6), (2.7). Наконец, для определения самих \vec{V} и $\vec{\Gamma}$ надо использовать условия отсутствия внешних сил и моментов.

3. Определение поля температуры

Задача (2.4)–(2.5) для случая неподвижной жидкости решена в [2]:

$$\begin{aligned} T_p &= (1 + \kappa) T_s x_s, \\ T_f &= T_s x_s - \kappa a^3 T_s L_s(\vec{x}) \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь обозначено $\kappa = (\kappa_f - \kappa_p)/(\kappa_p + 2\kappa_f)$. Гармонические функции $L_{i\dots j}$ (мультиполи) вычисляются по следующим правилам:

$$L_0(\vec{x}) = \frac{1}{|\vec{x}|}, L_{i\dots j}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \dots \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{|\vec{x}|} \right)$$

При нахождении полей скорости и давления \vec{u} и \vec{p} нас будет интересовать лишь распределение температуры вне частицы, заданное функцией $T_f(\vec{x})$.

4. «ФОНОВЫЙ» ПОТОК

При решении задачи об обтекании частицы основной («фоновый») поток со скоростью \vec{U} и давлением P , как правило, известен заранее, и требуется найти возмущения \vec{v} и p' , вносимые в него частицей. Поскольку уравнения движения линейны, то общие скорость и давление в жидкости представляются суммами

$$\vec{u} = \vec{U} + \vec{v}, p = P + p' \quad (4.1)$$

В случае, когда вязкость переменная, сначала необходимо найти сами «фоновые» слагаемые. Для этого в уравнения движения вместо T следует подставить не $T_f(\vec{x})$, заданную формулой (3.1), а выражение $T = T_0 + T_s x_s$ (такой вид принимает температура в отсутствие взвешенных частиц).

Основываясь на (2.6), будем считать, что $U_i = C_{ij} x_j$. Градиент скорости C_{ij} и давление необходимо подобрать так, чтобы удовлетворялись уравнения (2.1). Будем раскладывать η , P и C_{ij} по степеням малого параметра

$$Q(\vec{x}) = \frac{T - T_0}{T_0} = \frac{T_s x_s}{T_0}$$

Из (2.3) следует, что $\eta = \eta_0(1 - \alpha Q)$. Аналогично, с точностью до Q получим:

$$C_{ij} = C_{ij}^{(0)} + C_{ij}^{(1)} Q, P = P^{(0)} + P^{(1)} Q, C_{ij}^{(0,1)} = \text{const}, P^{(0,1)} = \text{const}$$

Отсюда следует, что «фоновая» скорость жидкости квадратична, а давление – линейно по координатам. Введем в рассмотрение вектор \vec{W} и скаляр Π :

$$W_i = C_{ij}^{(1)} x_j Q = \frac{1}{T_0} C_{ij}^{(1)} T_k x_j x_k, \Pi = P^{(1)} Q = \frac{1}{T_0} T_k x_k,$$

тогда скорость и давление принимают вид

$$U_i = C_{ij}^{(0)} x_j + W_i, P = P^{(0)} + \Pi \quad (4.2)$$

Слагаемое $C_{ij}^{(0)} x_j$ отвечает течению (2.6) в отсутствие перепада температуры.

Подставим (4.2) в (2.1). Если уравнения движения справедливы с точностью до Q , то

$$\eta_0 \Delta W_i = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + 2\alpha \eta_0 E_{ij}^{(0)} T_j, \text{div} \vec{W} = 0 \quad (4.3)$$

Здесь $E_{jk}^{(0)}$ – симметричная часть градиента скорости $C_{jk}^{(0)}$. Дополнительным условием для определения \vec{W} и Π может служить заданный вдали от частицы тензор напряжений в присутствии градиента температуры.

5. Постановка гидродинамической задачи

Теперь, когда распределение температуры (3.1) и основное течение (4.2) известны, необходимо найти возмущение, вносимое в поток частицами.

С учетом (4.1) и (4.2) граничные условия (2.7) преобразуются к виду:

$$v_i + E_{ij}^{(0)} x_j + \Omega_{ij}^{(0)} x_j + W_i = V_i + \Gamma_{ij} x_j, |\vec{x}| = a \quad (5.1)$$

Величина $\Omega_{ij}^{(0)}$ (аналогично $E_{ij}^{(0)}$) есть антисимметричная часть градиента скорости.

Из (2.6) следует, что вдали от частицы и в отсутствие градиента температуры возмущения скорости затухают:

$$v_i \rightarrow 0, |\vec{x}| \rightarrow \infty, \vec{T} = 0 \quad (5.2)$$

В задаче без частиц неизвестные функции раскладывались в ряд по параметру Q ; в задаче с частицей введем малый безразмерный параметр $\delta = \Theta a / T_0$, где $\Theta = |\vec{T}|$. Тогда

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}^{(0)} + \vec{v}^{(1)}\delta + \dots, p' = p^{(0)} + p^{(1)}\delta + \dots, \sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(0)} + \sigma_{ij}^{(1)}\delta + \dots, \\ V_i &= V_i^{(0)} + V_i^{(1)}\delta + \dots, \Gamma_{ij} = \Gamma_{ij}^{(0)} + \Gamma_{ij}^{(1)}\delta + \dots, \\ W_i &= C_{ijk}^{(1)} x_j x_k \delta + \dots, \Pi = P^{(1)}\delta + \dots \end{aligned} \quad (5.3)$$

Последние два равенства обусловлены тем, что вблизи частицы введенный ранее параметр Q имеет порядок δ . Тензор $C_{ijk}^{(1)}$ задает квадратичную часть невозмущенного потока. Его можно считать симметричным по второму и третьему индексам, кроме того, в силу условия $\text{div} \vec{U} = 0$ должно быть $C_{iik} = C_{iki} = 0$.

Подстановка (3.1) в (2.3) приводит к следующему выражению для вязкости:

$$\eta = \eta_0 \left[1 - \frac{\alpha}{\Theta a} T_f(\vec{x}) \delta \right] \quad (5.4)$$

Чтобы найти \vec{v} и p' , необходимо в уравнения (2.1), (2.2) и граничные условия (5.1), (5.2) подставить разложения (4.1), (4.2), (5.3) и (5.4) и учесть соотношения (4.3).

При $\delta = 0$ и вектор \vec{T} равен нулю, поэтому

$$\begin{aligned} -\frac{\partial p^{(0)}}{\partial x_i} + \eta_0 \Delta v_i^{(0)} &= 0, \text{div} \vec{v}^{(0)} = 0, \\ v_i^{(0)} + E_{ij}^{(0)} x_j + \Omega_{ij}^{(0)} x_j &= V_i^{(0)} + \Gamma_{ij}^{(0)} x_j, |\vec{x}| = a; \vec{v}^{(0)} \rightarrow \vec{0}, |\vec{x}| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Решение этой задачи линейно по $E_{ij}^{(0)}$, $V_i^{(0)}$ и $\Gamma_{ij}^{(0)} - \Omega_{ij}^{(0)}$. Однако в отсутствие внешних сил и моментов $V_i^{(0)} = 0$ и $\Gamma_{ij}^{(0)} = \Omega_{ij}^{(0)}$, поэтому $\vec{v}^{(0)}$ и $p^{(0)}$ выглядят так [3]:

$$\begin{aligned} v_i^{(0)}(\vec{x}) &= -\frac{5}{2} a^3 E_{jk}^{(0)} M_{ijk}(\vec{x}) - \frac{1}{6} a^5 E_{jk}^{(0)} L_{ijk}(\vec{x}), \\ p^{(0)}(\vec{x}) &= -\frac{5}{3} \eta_0 a^3 E_{jk}^{(0)} L_{jk}(\vec{x}), \end{aligned} \quad (5.5)$$

где $M_{ijk}(\vec{x}) = x_i x_j x_k / |\vec{x}|^5$.

Далее слагаемые $\Omega_{ij}^{(0)}$, $\Gamma_{ij}^{(0)}$ и $V_i^{(0)}$ не учитываются. Поэтому разложение линейной и угловой скорости частиц начинается со слагаемых порядка δ .

Функции первого приближения $\vec{v}^{(1)}$ и $p^{(1)}$ удовлетворяют уравнениям:

$$-\frac{\partial p^{(1)}}{\partial x_i} + \eta_0 \Delta v_i^{(1)} = \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[T_f \left(2E_{ij}^{(0)} + \frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) - 2E_{ij}^{(0)} T_s x_s \right],$$

$$\operatorname{div} \vec{v}^{(1)} = 0$$
(5.6)

Условие на поверхности частицы является следствием (5.1) и (5.3):

$$v_i^{(1)} + C_{ijk}^{(1)} x_j x_k = V_i^{(1)} + \Gamma_{ij}^{(1)} x_j, |\vec{x}| = a$$

Отсюда и из (5.6) вытекает, что $V_i^{(1)}$ и $\Gamma_{ij}^{(1)}$ должны быть линейными либо по $E_{ij}^{(0)}$ и T_k , либо по $C_{ijk}^{(1)}$. Однако нельзя составить тензор Γ_{ij} , линейный только по компонентам тензора третьего ранга или вектора и еще одного тензора второго ранга. Т.о., с точностью до δ получаем $\Gamma_{ij} = 0$. Однако с помощью тех же тензоров можно построить вектор абсолютной скорости частицы \vec{V} :

$$V_i^{(1)} = \xi_C C_{iss}^{(1)} + \frac{\alpha}{\Theta a} \xi_E E_{ij}^{(0)} T_j$$
(5.7)

Коэффициенты ξ_C и ξ_E должны быть найдены из условия, что на частицу не действует внешняя сила (а значит, и гидродинамическая равна нулю).

Окончательно, в первом приближении частица не вращается, но может двигаться с некоторой линейной скоростью:

$$v_i^{(1)} + C_{ijk}^{(1)} x_j x_k = V_i^{(1)}, |\vec{x}| = a$$
(5.8)

Условия на бесконечности для $\vec{v}^{(1)}$ и $p^{(1)}$ нельзя получить непосредственно из (2.6). Однако из (5.5) следует, что $v_i^{(0)} \sim |\vec{x}|^{-2}$. Подставляя эту оценку в (5.6) и учитывая, что дифференцирование понижает порядок на 1, получим $v_i^{(1)} \sim |\vec{x}|^{-1}$ и $p^{(1)} \sim |\vec{x}|^{-2}$. Т.о., в первом приближении по δ возмущения затухают вдали от частицы.

6. Вычисление возмущений в первом приближении

Подставим в первое уравнение (5.6) выражения T_f из (3.1), $v_i^{(0)}$ из (5.5) и подействуем на обе части равенства оператором div . После перегруппировки слагаемых получим

$$\Delta p^{(1)} = \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} \left[E_{ij}^{(0)} T_i \left(48\kappa a^8 \frac{x_j}{|\vec{x}|^{10}} - 10\kappa a^6 \frac{x_j}{|\vec{x}|^8} \right) + E_{ij}^{(0)} T_k \left(60\kappa a^8 \frac{x_i x_j x_k}{|\vec{x}|^{12}} - 20\kappa a^6 \frac{x_i x_j x_k}{|\vec{x}|^{10}} \right) + \frac{1}{3} (10 + 6\kappa) a^3 E_{ij}^{(0)} T_k L_{ijk}(\vec{x}) \right]$$

Представим возмущения давления и скорости в виде

$$p^{(1)} = p_*^{(1)} + p_H^{(1)}, \vec{v}^{(1)} = \vec{v}_*^{(1)} + \vec{v}_H^{(1)},$$
(6.1)

Здесь $p_*^{(1)}$ – частное решение уравнения Пуассона, а $p_H^{(1)}$ – общее решение уравнения Лапласа. Векторы $\vec{v}_*^{(1)}$ и $\vec{v}_H^{(1)}$ удовлетворяют соотношениям

$$\eta_0 \Delta v_{*i}^{(1)} = \frac{\partial p_*^{(1)}}{\partial x_i} + \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} \left[T_f \left(\frac{\partial v_i^{(0)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(0)}}{\partial x_i} \right) - 2E_{ij}^{(0)} T_s x_s \right],$$

$$\eta_0 \Delta v_{iH}^{(1)} = \frac{\partial p_H^{(1)}}{\partial x_i},$$

$$\operatorname{div}(\vec{v}_*^{(1)} + \vec{v}_H^{(1)}) = 0.$$
(6.2)

Процедура поиска частных решений уравнений Пуассона описана в [4]. С ее помощью можно определить $p_*^{(1)}$:

$$p_*^{(1)} = \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} \left\{ E_{ij}^{(0)} T_i x_j \kappa \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^8 + E_{ij}^{(0)} T_k \frac{x_i x_j x_k}{|\vec{x}|^2} \left[2\kappa \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^8 - \frac{5}{2} \kappa \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^6 \right] - \frac{5 + 3\kappa}{15} a^3 E_{ij}^{(0)} T_k L_{ijk}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 \right\}$$

Следуя этой же процедуре и подставив уже известную функцию $p_*^{(1)}$ в (6.2), найдем

$$\begin{aligned} \eta_0 v_{*i}^{(1)} = & \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} a^2 \left\{ E_{ij}^{(0)} T_j \left[\frac{1}{7} \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^3 - \frac{5}{12} \kappa \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^4 \right] + E_{ij}^{(0)} T_k \frac{x_j x_k}{|\vec{x}|^2} \left[\frac{\kappa}{2} \frac{a}{|\vec{x}|} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{5}{7} \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^3 + \frac{5}{4} \kappa \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^4 - \frac{\kappa}{2} \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^6 \right] + E_{jk}^{(0)} T_j \frac{x_k x_i}{|\vec{x}|^2} \left[- \left(1 + \frac{\kappa}{10} \right) \frac{a}{|\vec{x}|} - \frac{5}{7} \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^3 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{5}{4} \kappa \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^4 \right] + E_{jk}^{(0)} T_i \frac{x_j x_k}{|\vec{x}|} \left[- \frac{5 + 3\kappa}{12} \frac{a}{|\vec{x}|} - \frac{5}{14} \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^3 - \frac{5}{24} \kappa \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^4 + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\kappa}{4} \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^6 \right] + E_{jk}^{(0)} T_l \frac{x_i x_j x_k x_l}{|\vec{x}|^4} \left[- \frac{5 - 3\kappa}{4} \frac{a}{|\vec{x}|} + \frac{5}{2} \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^3 - \frac{25}{8} \kappa \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^4 + \frac{\kappa}{2} \left(\frac{a}{|\vec{x}|} \right)^6 \right] \right\} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Чтобы найти $\vec{v}_H^{(1)}$ и $p_H^{(1)}$, надо решить систему уравнений, получаемую подстановкой (5.7) и (6.3) в (5.8) и (6.2):

$$\begin{aligned} \eta_0 \Delta v_{iH}^{(1)} &= \frac{\partial p_H^{(1)}}{\partial x_i}, \quad \Delta p_H^{(1)} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{v}_H^{(1)} + \operatorname{div} \vec{v}_*^{(1)} &= 0, \\ v_{Hi}^{(1)} + v_{*i}^{(1)} + C_{ijk}^{(1)} x_j x_k &= \xi_C C_{iss}^{(1)} + \frac{\alpha}{\Theta a} \xi_E E_{ij}^{(0)} T_j, \quad |\vec{x}| = a \end{aligned}$$

Поскольку $\vec{v}_*^{(1)}$ и $p_*^{(1)}$ затухают на бесконечности, то $\vec{v}_H^{(1)}$ и $p_H^{(1)}$ при $|\vec{x}| \rightarrow \infty$ также должны стремиться к нулю.

Считая величины $C_{ijk}^{(1)}$ и $E_{ij}^{(0)}$ независимыми, представим $\vec{v}_H^{(1)}$ и $p_H^{(1)}$ в виде суммы решений двух задач, обозначаемых далее буквами С и Е.

Задача С формулируется с помощью уравнений:

$$\begin{aligned} \eta_0 \Delta v_{iH}^{(1)} &= \frac{\partial p_H^{(1)}}{\partial x_i}, \quad \operatorname{div} \vec{v}_H^{(1)} = 0, \quad \Delta p_H^{(1)} = 0, \\ v_{Hi}^{(1)} + C_{ijk}^{(1)} x_j x_k &= \xi_C C_{iss}^{(1)}, \quad |\vec{x}| = a; \quad v_{Hi}^{(1)} \rightarrow 0, \quad p_H^{(1)} \rightarrow 0, \quad |\vec{x}| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Т.о., получены те же уравнения, что и для одиночной частицы в квадратичном потоке жидкости с постоянной вязкостью. Поэтому возмущения имеют вид [3]

$$\begin{aligned} p_H^{(1)} &= H_i L_i(\vec{x}) + G_{ijk} L_{ijk}(\vec{x}) + T_{ijklm} L_{ijklm}(\vec{x}), \\ \eta_0 v_{Hi}^{(1)} &= -\frac{1}{2} H_i L_0(\vec{x}) - \frac{1}{2} H_j K_{ij}(\vec{x}) - \frac{4}{7} G_{ijk} L_{jk}(\vec{x}) - \frac{1}{14} G_{jkl} L_{ijkl}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 - \\ & \quad - \frac{6}{11} T_{ijklm} L_{jklm}(\vec{x}) - \frac{1}{22} T_{jklms} L_{ijklms}(\vec{x}) |\vec{x}|^2 \end{aligned} \quad (6.4)$$

Здесь $K_{ij}(\vec{x}) = x_i x_j / |\vec{x}|^3$. Тензорные коэффициенты H_i , G_{ijk} , T_{ijklm} должны быть линейны по $C_{ijk}^{(1)}$ и симметричны по индексам, начиная со второго. Для их построения, кроме тензора $\vec{C}^{(1)}$, мы располагаем лишь символом Кронекера (его можно использовать лишь

однажды в каждом тензорном произведении):

$$\begin{aligned} H_i &= \eta_0 HA \cdot C_{iss}^{(1)}, G_{ijk} = \eta_0 \left[GA \left(\delta_{ij} C_{kss}^{(1)} + \delta_{ik} C_{jss}^{(1)} \right) + GB \cdot C_{ijk}^{(1)} \right], \\ T_{ijklm} &= \eta_0 TA \left[\delta_{ij} \left(C_{klm}^{(1)} + C_{lkm}^{(1)} + C_{mkl}^{(1)} \right) + \delta_{ik} \left(C_{jlm}^{(1)} + C_{ljm}^{(1)} + C_{mjl}^{(1)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{il} \left(C_{jkm}^{(1)} + C_{kjm}^{(1)} + C_{mjk}^{(1)} \right) + \delta_{im} \left(C_{jkl}^{(1)} + C_{kjl}^{(1)} + C_{ljk}^{(1)} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.5)$$

Граничные условия задачи С дают такие значения скалярных параметров:

$$HA = \frac{a^3}{2} \left(1 - \frac{3}{a^2} \xi_C \right), GA = -\frac{7a^5}{96} \left(1 - \frac{3}{a^2} \xi_C \right), GB = \frac{7}{12} a^5, TA = -\frac{11a^7}{1728} \quad (6.6)$$

При $\xi_C = 0$ (частица неподвижна) соотношения (6.6) сводятся к уже известным [3].

Условия задачи E таковы:

$$\begin{aligned} \eta_0 \Delta v_{iH}^{(1)} &= \frac{\partial p_H^{(1)}}{\partial x_i}, \Delta p_H^{(1)} = 0, \\ \operatorname{div} \vec{v}_H^{(1)} + \operatorname{div} \vec{v}_*^{(1)} &= 0, \\ v_{Hi}^{(1)} + v_{*i}^{(1)} &= \frac{\alpha}{\Theta a} \xi_E E_{ij}^{(0)} T_j, |\vec{x}| = a; v_{Hi}^{(1)} \rightarrow 0, p_H^{(1)} \rightarrow 0, |\vec{x}| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Для упрощения системы подберем вектор \vec{w} такой, что $\operatorname{div}(\vec{w} + \vec{v}_*^{(1)}) = 0$, но $\Delta \vec{w} = \vec{0}$. Поскольку $\operatorname{div} \vec{v}_*^{(1)}$ содержит слагаемые порядка $|\vec{x}|^{-2}$ и $|\vec{x}|^{-4}$, то гармонические функции w_i содержат слагаемые порядка $|\vec{x}|^{-1}$ и $|\vec{x}|^{-3}$. С учетом линейности по $E_{ij}^{(0)}$ и T_k получим

$$w_i = \alpha_{-1} E_{ij}^{(0)} T_j L_0(\vec{x}) + \alpha_{-3} T_i E_{jk}^{(0)} L_{jk}(\vec{x}) \quad (6.7)$$

Значения α_{-1} и α_{-3} легко находятся из условия $\operatorname{div}(\vec{w} + \vec{v}_*^{(1)}) = 0$:

$$\alpha_{-1} = -\frac{\alpha}{\Theta a} \left(\frac{11}{6} + \frac{\kappa}{10} \right) a^3, \alpha_{-3} = \frac{4}{21} \frac{\alpha}{\Theta a} a^5$$

Теперь, заменив $\vec{v}_H^{(1)}$ на сумму $\vec{v}_H^{(1)} + \vec{w}$, для нового вектора $\vec{v}_H^{(1)}$ получим задачу:

$$\begin{aligned} \eta_0 \Delta v_{iH}^{(1)} &= \frac{\partial p_H^{(1)}}{\partial x_i}, \Delta p_H^{(1)} = 0, \operatorname{div} \vec{v}_H^{(1)} = 0, \\ v_{Hi}^{(1)} + v_{*i}^{(1)} + w_i &= \frac{\alpha}{\Theta a} \xi_E E_{ij}^{(0)} T_j, |\vec{x}| = a; v_{Hi}^{(1)} \rightarrow 0, p_H^{(1)} \rightarrow 0, |\vec{x}| \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Общий вид возмущения по-прежнему задается выражениями (6.4), но теперь тензорные коэффициенты должны быть линейны не по $C_{ijk}^{(1)}$, а по $E_{ij}^{(0)}$ и T_k :

$$\begin{aligned} H_i &= \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} HB \cdot E_{ij}^{(0)} T_j, \\ G_{ijk} &= \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} \left[GC \left(\delta_{ij} E_{ks}^{(0)} + \delta_{ik} E_{js}^{(0)} \right) T_s + GD \cdot T_i E_{jk}^{(0)} + GE \left(E_{ij}^{(0)} T_k + E_{ik}^{(0)} T_j \right) \right], \\ T_{ijklm} &= \frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} TB \left[\delta_{ij} \left(T_k E_{lm}^{(0)} + T_l E_{km}^{(0)} + T_m E_{kl}^{(0)} \right) + \delta_{ik} \left(T_j E_{lm}^{(0)} + T_l E_{jm}^{(0)} + T_m E_{jl}^{(0)} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \delta_{il} \left(T_j E_{km}^{(0)} + T_k E_{jm}^{(0)} + T_m E_{jk}^{(0)} \right) + \delta_{im} \left(T_j E_{kl}^{(0)} + T_k E_{jl}^{(0)} + T_l E_{jk}^{(0)} \right) \right] \end{aligned} \quad (6.8)$$

Из граничных условий следует, что

$$\begin{aligned} HB &= a^3 \left[\frac{1}{20}(-70 + \kappa) - \frac{3}{2} \frac{\xi_E}{a^2} \right], \quad GC = a^5 \left[\frac{11}{192}(2 + 3\kappa) + \frac{7}{32} \frac{\xi_E}{a^2} \right], \\ GD &= -\frac{1}{72} a^5(1 + 20\kappa), \quad GE = \frac{5}{48} a^5(-1 + 2\kappa), \quad TB = \frac{11}{2592} a^7(1 - \kappa) \end{aligned} \quad (6.9)$$

Окончательно, с точностью до слагаемых порядка δ получаем:

$$\begin{aligned} u_i &= \left[\left(E_{ij}^{(0)} + \Omega_{ij}^{(0)} \right) x_j + v_i^{(0)} \right] + \left[C_{ijk}^{(1)} x_j x_k + v_{*i}^{(1)} + w_i + v_{Hi}^{(1)}(C) + v_{Hi}^{(1)}(E) \right] \delta, \\ p &= \left[P^{(0)} + p^{(0)} \right] + \left[P^{(1)} + p_*^{(1)} + p_H^{(1)}(C) + p_H^{(1)}(E) \right] \delta \end{aligned} \quad (6.10)$$

Величины $v_{Hi}^{(1)}(C)$ и $p_H^{(1)}(C)$, $v_{Hi}^{(1)}(E)$ и $p_H^{(1)}(E)$ суть решения задач С и Е, соответственно. Их общий вид описывается равенством (6.4), а тензорные коэффициенты – соотношениями (6.5), (6.6) и (6.8), (6.9).

7. Линейная скорость частицы

Силы и моменты, действующие на частицу Ω , вычисляются по формулам:

$$\mathcal{F}_i = \oint_{\partial\Omega} \sigma_{ij}(\vec{x}) n_j dS, \quad \mathcal{T}_i = e_{ijk} \oint_{\partial\Omega} x_j \sigma_{kl}(\vec{x}) n_l dS \quad (7.1)$$

Поскольку ее поверхность $\partial\Omega$ центрально симметрична, то в гидродинамическую силу вносит вклад лишь та часть σ_{ij} , которая является нечетной по \vec{x} , а в гидродинамический момент – наоборот, четная часть.

Согласно (5.5), в нулевом приближении по δ возмущение скорости нечетно, а давления – четно. Поэтому $\sigma_{ij}^{(0)}(\vec{x})$ является четной функцией. Это значит, что на частицу действует только момент (он вычислен в [3]). Напротив, из (6.3), (6.4) и (6.7) следует, что $p^{(1)}$ – нечетна, а $\vec{v}^{(1)}$ и \vec{w} четны по \vec{x} . Поэтому в первом приближении на частицу может действовать только сила: $\mathcal{F}_i = \mathcal{F}_i^{(1)} \delta + \dots$. Подставляя в (7.1) выражение $\sigma_{ij}^{(1)}$ из (2.2), вязкость η из (5.4), а также \vec{u} и p из (6.10), получим после упрощений:

$$\mathcal{F}_i^{(1)} = -\frac{\eta_0 \alpha}{\Theta a} 3\pi a^3 \left(2 + \kappa + 2 \frac{\xi_E}{a^2} \right) E_{ij}^{(0)} T_j + 2\pi a^3 \eta_0 \left(1 - 3 \frac{\xi_C}{a^2} \right) C_{iss}^{(0)}$$

Если гидродинамическая сила равна нулю, а $C_{ijk}^{(1)}$ и $E_{ij}^{(0)}$ независимы, то

$$\xi_E = -a^2 \left(1 + \frac{\kappa}{2} \right), \quad \xi_C = \frac{a^2}{3}$$

Тогда из (5.7) следует, что линейная скорость частицы равна

$$V_i = \left[-\frac{\alpha}{\Theta a} a^2 \left(1 + \frac{\kappa}{2} \right) E_{ij}^{(0)} T_j + \frac{a^2}{3} C_{iss}^{(1)} \right] \delta$$

Значение ξ_C согласуется с выводами [3] о силе, действующей на одиночную сферу в параболическом течении. Если квадратичная часть «фонового» потока, вызванная неоднородностью температурного поля, отсутствует, то скорость частицы пропорциональна $E_{ij}^{(0)} T_j$. Угол, который она составит с вектором \vec{T} , зависит от вида потока $C_{ij}^{(0)}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Рид Р. Свойства газов и жидкостей: Справочное пособие / Р. Рид, Дж. Праусниц, Т. Шервуд ; пер. с англ. под ред. Б.И. Соколова. – 3-е изд., перераб. и доп. – Л. : Химия, 1982. – 592 с.
2. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – 3-е изд., перераб. – М. : Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит-ры, 1986. – 736 с.
3. Мартынов С.И. Взаимодействие частиц в суспензии / С.И. Мартынов. – Казань : Изд-во Казан. матем. о-ва, 1998. – 135 с.
4. Сыромясов А.О. Частные решения уравнения Пуассона с правой частью специального вида / А.О. Сыромясов // Журнал Средневолжского математического общества. – Саранск, 2010. – Т.12. – №3. – С.129–134.

Influence of rigid sphere on linear flow of the fluid with temperature-dependent viscosity.

© A. O. Syromyasov²

Abstract. Stokes approximation is used to solve a problem about a rigid sphere in linear shear flow of fluid with variable viscosity. Temperature gradient far from the particle is assumed to be constant. The interaction of thermodynamic and hydrodynamic effects is considered. It is shown that in linear flow of such a fluid the force may act on the particle.

Key Words: Viscous fluid, variable viscosity, Stokes approximation, asymptotic methods, suspension.

²Reader of Mathematics and Theoretical Mechanics Chair, Mordovian State University named after N. P. Ogaryov, Saransk; syall@yandex.ru.

УДК 517.9

Условия существования и дифференцируемости решения системы Франкля в гиперболическом случае

© Т. А. Шемякина¹

Аннотация. В работе получены условия существования и дифференцируемости решения системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Основным методом исследования является метод дополнительного аргумента.

Ключевые слова: Дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка, метод дополнительного аргумента, расширенная характеристическая система.

1. Постановка задачи

Рассмотрим систему Франкля в гиперболическом случае:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} - P(x, y, u, v) \frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} - Q(x, y, u, v) \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

при $P \geq p_0 > 0, Q \geq q_0 > 0$,

с начальными условиями для неизвестных функций:

$$u(x, 0) = \varphi(x), v(x, 0) = \psi(x), \quad (1.2)$$

в области $\tilde{\Omega} = \{(x, y) : -\infty < x < \infty, 0 \leq y \leq Y, Y > 0\}$.

В данной работе продолжено исследование системы Франкля в гиперболическом случае (1.1), (1.2). Основным методом исследования является метод дополнительного аргумента [1], [2].

В работе [4] для системы Франкля гиперболического типа методом дополнительного аргумента построена новая расширенная характеристическая система:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\eta_1(x,y,s)}{ds} = e(\eta_1(x, y, s), s, u_1(x, y, s), v_1(x, y, s)), \\ \frac{d\eta_2(x,y,s)}{ds} = -e(\eta_2(x, y, s), s, u_2(x, y, s), v_2(x, y, s)), \\ \frac{dw_1(x,y,s)}{ds} = F_1(\eta_1(x, y, s), s, u_1(x, y, s), v_1(x, y, s), w_1(x, y, s), w_3(x, y, s)), \\ \frac{dw_2(x,y,s)}{ds} = F_2(\eta_2(x, y, s), s, u_2(x, y, s), v_2(x, y, s), w_4(x, y, s), w_2(x, y, s)), \\ \frac{du_1(x,y,s)}{ds} = w_3(x, y, s), \\ \frac{dv_2(x,y,s)}{ds} = -w_4(x, y, s)/b(\eta_2(x, y, s), s, u_2(x, y, s), v_2(x, y, s)), \\ \eta_1(x, y, y) = x, \eta_2(x, y, y) = x, \\ w_1(x, y, 0) = \Phi_1(\eta_1(x, y, 0)), w_2(x, y, 0) = \Phi_2(\eta_2(x, y, 0)), \\ u_1(x, y, 0) = \varphi(\eta_1(x, y, 0)), v_2(x, y, 0) = \psi(\eta_2(x, y, 0)), \\ w_3(x, y, s) = w_2(\eta_1(x, y, s), s, s), w_4(x, y, s) = w_1(\eta_2(x, y, s), s, s), \\ u_2(x, y, s) = u_1(\eta_2(x, y, s), s, s), v_1(x, y, s) = v_2(\eta_1(x, y, s), s, s), \end{array} \right. \quad (1.3)$$

где $e(x, y, u, v) = \sqrt{P(x, y, u, v)/Q(x, y, u, v)}$;

функции $F_i, \Phi_i, i = 1, 2$; выражаются через исходные данные явным образом.

¹Доцент кафедры высшей математики, Санкт-Петербургский Государственный Политехнический университет, г. Санкт-Петербург; sh_tat@mail.ru.

В этой системе уравнений новые неизвестные функции $\eta_1, \eta_2, w_1, w_2, w_3, w_4, u_1, u_2, v_1, v_2$ зависят не только от x и y , но еще и от дополнительного аргумента s .

Основным преимуществом новой расширенной характеристической системы по сравнению с предыдущей [3] является то, что мы уменьшили количество суперпозиций неизвестных функций и сейчас удобнее исследовать ее методом последовательных приближений.

Интегрируя дифференциальные уравнения из (1.3) по переменной s и учитывая начальные условия там же, приходим к эквивалентной системе интегральных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_1(x, y, s) = x - \int_s^y e(\eta_1(x, y, \tau), \tau, u_1(x, y, \tau), v_1(x, y, \tau))d\tau, \\ \eta_2(x, y, s) = x + \int_s^y e(\eta_2(x, y, \tau), \tau, u_2(x, y, \tau), v_2(x, y, \tau))d\tau, \\ w_1(x, y, s) = \Phi_1(\eta_1(x, y, 0)) + \\ + \int_0^s F_1(\eta_1(x, y, \tau), \tau, u_1(x, y, \tau), v_1(x, y, \tau), w_1(x, y, \tau), w_3(x, y, \tau))d\tau, \\ w_2(x, y, \tau) = \Phi_2(\eta_2(x, y, 0)) + \\ + \int_0^s F_2(\eta_2(x, y, \tau), \tau, u_2(x, y, \tau), v_2(x, y, \tau), w_4(x, y, \tau), w_2(x, y, \tau))d\tau, \\ u_1(x, y, s) = \varphi(\eta_1(x, y, 0)) + \int_0^s w_3(x, y, \tau)d\tau, \\ v_2(x, y, s) = \psi(\eta_2(x, y, 0)) - \int_0^s w_4(x, y, \tau)/b(\eta_2(x, y, \tau), \tau, u_2(x, y, \tau), v_2(x, y, \tau))d\tau, \\ w_3(x, y, s) = w_2(\eta_1(x, y, s), s, s), w_4(x, y, s) = w_1(\eta_2(x, y, s), s, s), \\ u_2(x, y, s) = u_1(\eta_2(x, y, s), s, s), v_1(x, y, s) = v_2(\eta_1(x, y, s), s, s). \end{array} \right. \quad (1.4)$$

В работе [4] была установлена и доказана эквивалентность решения системы интегральных уравнений (1.4) и исходной задачи (1.1), (1.2):

Функции $u(x, y) = u_1(x, y, s)$, $v(x, y) = v_2(x, y, s)$, определяемые из расширенной характеристической системы уравнений (1.4) при значении дополнительного аргумента $s = y$, будут решением исходной задачи (1.1), (1.2).

2. Существование ограниченного решения системы интегральных уравнений

Для доказательства существования классического решения задачи (1.1), (1.2) надо доказать существование непрерывно-дифференцируемого, ограниченного решения системы интегральных уравнений (1.4).

Так как решение будем искать в классе ограниченных функций, то введем новые неизвестные переменные: $\mu_1(x, y, s) = x - \eta_1(x, y, s)$, $\mu_2(x, y, s) = x - \eta_2(x, y, s)$. Тогда система интегральных уравнений (1.4) примет вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1(x, y, s) = \int_s^y e(x - \mu_1(x, y, \tau), \tau, u_1(x, y, \tau), v_1(x, y, \tau))d\tau, \\ \mu_2(x, y, s) = - \int_s^y e(x - \mu_2(x, y, \tau), \tau, u_2(x, y, \tau), v_2(x, y, \tau))d\tau, \\ w_1(x, y, s) = \Phi_1(x - \mu_1(x, y, 0)) + \\ + \int_0^s F_1(x - \mu_1(x, y, \tau), \tau, u_1(x, y, \tau), v_1(x, y, \tau), w_1(x, y, \tau), w_3(x, y, \tau))d\tau, \\ w_2(x, y, \tau) = \Phi_2(x - \mu_2(x, y, 0)) + \\ + \int_0^s F_2(x - \mu_2(x, y, \tau), \tau, u_2(x, y, \tau), v_2(x, y, \tau), w_4(x, y, \tau), w_2(x, y, \tau))d\tau, \\ u_1(x, y, s) = \varphi(x - \mu_1(x, y, 0)) + \int_0^s w_3(x, y, \tau)d\tau, \\ v_2(x, y, s) = \psi(x - \mu_2(x, y, 0)) - \\ - \int_0^s w_4(x, y, \tau)/b(x - \mu_2(x, y, \tau), \tau, u_2(x, y, \tau), v_2(x, y, \tau))d\tau, \\ w_3(x, y, s) = w_2(x - \mu_1(x, y, s), s, s), w_4(x, y, s) = w_1(x - \mu_2(x, y, s), s, s), \\ u_2(x, y, s) = u_1(x - \mu_2(x, y, s), s, s), v_1(x, y, s) = v_2(x - \mu_1(x, y, s), s, s). \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Л е м м а 2.1. Система интегральных уравнений (1.4) при $0 < s \leq y < Y_0$, где Y_0 - известное значение, определяемое через исходные данные, имеет единственное, непрерывное, ограниченное на всей оси $-\infty < x < \infty$ решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Существование решения системы (1.4) будем доказывать методом последовательных приближений.

За нулевое приближение решения системы интегральных уравнений (2.1) возьмем равенства:

$$\begin{aligned} \mu_1^0(x, y, s) = 0, \quad \mu_2^0(x, y, s) = 0, \quad w_1^0(x, y, s) = \Phi_1(x), \quad w_2^0(x, y, s) = \Phi_2(x), \\ u_1^0(x, y, s) = \varphi(x), \quad v_2^0(x, y, s) = \psi(x). \end{aligned}$$

Первое и все последующие приближения решения системы уравнений (2.1) определим при помощи рекуррентной последовательности систем уравнений ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{cases} \mu_1^n(x, y, s) = \int_s^y e(x - \mu_1^n(x, y, \tau), \tau, u_1^n(x, y, \tau), v_1^n(x, y, \tau)) d\tau, \\ \mu_2^n(x, y, s) = - \int_s^y e(x - \mu_2^n(x, y, \tau), \tau, u_2^n(x, y, \tau), v_2^n(x, y, \tau)) d\tau. \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} w_1^n(x, y, s) = \Phi_1(x - \mu_1^n(x, y, 0)) + \\ + \int_0^s F_1(x - \mu_1^n(x, y, \tau), \tau, u_1^n(x, y, \tau), v_1^n(x, y, \tau), w_1^n(x, y, \tau), w_3^n(x, y, \tau)) d\tau, \\ w_2^n(x, y, s) = \Phi_2(x - \mu_2^n(x, y, 0)) + \\ + \int_0^s F_2(x - \mu_2^n(x, y, \tau), \tau, u_2^n(x, y, \tau), v_2^n(x, y, \tau), w_4^n(x, y, \tau), w_2^n(x, y, \tau)) d\tau. \end{cases} \quad (2.3)$$

$$\begin{cases} u_1^n(x, y, s) = \varphi(x - \mu_1^n(x, y, 0)) + \int_0^s w_3^n(x, y, \tau) d\tau, \\ v_2^n(x, y, s) = \psi(x - \mu_2^n(x, y, 0)) - \\ - \int_0^s w_4^n(x, y, \tau) / b(x - \mu_2^n(x, y, \tau), \tau, u_2^n(x, y, \tau), v_2^n(x, y, \tau)) d\tau. \end{cases} \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} w_3^n(x, y, s) = w_2^{n-1}(x - \mu_1^n(x, y, s), s, s), \quad w_4^n(x, y, s) = w_1^{n-1}(x - \mu_2^n(x, y, s), s, s), \\ u_2^n(x, y, s) = u_1^{n-1}(x - \mu_2(x, y, s), s, s), \quad v_1^n(x, y, s) = v_2^{n-1}(x - \mu_1(x, y, s), s, s). \end{aligned}$$

Для всех пар уравнений (2.2), (2.3), (2.4) при каждом n с помощью своего процесса последовательных приближений доказано существование их решений. Для всех $0 < y \leq Y_{n0}$, где Y_{n0} - известное значение, определяемое через исходные данные, последовательные приближения $\{u_1^{n,k}\}$, $\{v_2^{n,k}\}$, $\{\mu_i^{n,k}\}$, $\{w_i^{n,k}\}$, $i = 1, 2$; ограничены, сходятся и имеют ограниченные частные производные по аргументу x . Таким образом для всех $n = 1, 2, \dots$ получены следующие оценки:

$$\begin{cases} \|\mu_i^n\| \leq 1, \|\partial_x \mu_i^n\| \leq 1, i = 1, 2; \\ \|w_i^n\| \leq C_\Phi, \|\partial_x w_i^n\| \leq N_{wix}, i = 1, 2; \\ \|u_1^n\| \leq 2C_{\varphi\psi}, \|\partial_x u_1^n\| \leq 3C_{\varphi\psi}, \\ \|v_2^n\| \leq 2C_{\varphi\psi}, \|\partial_x v_2^n\| \leq 3C_{\varphi\psi}, \end{cases} \quad (2.5)$$

где $C_{\varphi\psi}$, C_Φ , N_{w1x} , N_{w2x} - известные константы.

В силу полученных неравенств доказана сходимость последовательных приближений $\{u_1^n\}$, $\{v_2^n\}$, $\{\mu_i^n\}$, $\{w_i^n\}$, $i = 1, 2$.

Переходя к пределу в рекуррентных уравнениях (2.2), (2.3), (2.4) при значениях $n \rightarrow \infty$ получили, что предельные функции будут удовлетворять системе интегральных уравнений (2.1), а следовательно и системе интегральных уравнений (1.4). Единственность решения следует также из неравенств (2.2).

Таким образом, получили, что система интегральных уравнений (1.4) при $0 < s \leq y < Y_0$, где $Y_0 \leq Y_{n0}$ - известное значение, определяемое через исходные данные, имеет единственное, непрерывное, ограниченное на всей оси $-\infty < x < \infty$ решение.

Д о к а з а т е л ь с т в о з а к о н ч е н о.

3. Дифференцируемость решения системы интегральных уравнений

С помощью преобразований и оценок, таких же как при доказательстве леммы 2.1, доказывается следующая лемма.

Л е м м а 3.1. *Функции $u_1, v_2, \mu_i, w_i, i = 1, 2$; являющиеся решением системы интегральных уравнений (2.1) при $0 < s \leq y < Y_*$, $Y_* \leq Y_0$ - известное значение, определяемое через исходные данные, имеют непрерывные и ограниченные на всей числовой оси $x \in (-\infty, \infty)$, производные по переменным x, y .*

На основе проведенных исследований сформулируем теорему.

Т е о р е м а 3.1. *Пусть функции $P(x, y, u, v), Q(x, y, u, v)$ - дважды дифференцируемы по всем своим аргументам; $P \geq p_0 > 0, Q \geq q_0 > 0$; $\varphi(x) \in C^2(\mathbb{R}^1), \psi(x) \in C^2(\mathbb{R}^1)$.*

Тогда задача Коши для системы Франкля в гиперболическом случае (1.1), (1.2) при $0 \leq y < Y_$, где константа Y_* точно определяется через исходные данные,*

имеет единственное, ограниченное на всей числовой оси $x \in (-\infty, \infty)$ решение $u(x, y) \in C^{(1,1)}((-\infty, \infty) \times [0, Y_0]), v(x, y) \in C^{(1,1)}((-\infty, \infty) \times [0, Y_0])$, которое при $s = y$ совпадает с решением системы интегральных уравнений (1.4): $u(x, y) = u_1(x, y, y), v(x, y) = v_2(x, y, y)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеенко С.Н., Панков П.С., Косов С.Г. Применение метода дополнительного аргумента к решению задачи Коши для системы уравнений изоэнтропического движения баротропного газа //Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2004. – Вып.33.– С.43–48.
2. Alekseenko S.N. A basic scheme to investigate two first order quasi-linear partial differential equations //Analytical and Approximate Methods/ H.-P. Blatt, R. Felix, L.G. Lelevkina, M. Sommer (Eds.).–Aachen: Snaker Verlag, – 2003.–P.1–14.
3. Алексеенко С.Н., Шемякина Т.А., Круц К.Г. Локальное существование ограниченного решения системы Франкля в гиперболическом случае //Исслед. по интегро-дифференциальным уравнениям. – Бишкек: Илим, 2006. – Вып.35. – С.142–147.
4. Шемякина Т.А. Построение расширенной характеристической системы для системы Франкля в гиперболическом случае //Труды Средневолжского математического общества.–2007.– Т. 9, № 1. – С.264–273.

Conditions for the existence and differentiability of solutions of Frankl in the hyperbolic case.

© T. A. Shemyakina²

Abstract. We have obtained the conditions of existence and differentiability of solutions of the system of two quasilinear differential partial equations of the first order. The basic research technique is the method of additional argument.

Key Words: Differential partial equations of the first order, the method of additional argument, the extended characteristic system.

²Associate professor of the higher mathematics Chair, St.-Petersburg State Polytechnic university, St.-Petersburg, sh tat @ mail.ru.

ВОПРОСЫ ПРЕПОДАВАНИЯ И ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 519.61

Реализация программных комплексов для анализа реакционной способности молекул фуллеренов

© А. Д. Сайтгалина¹, Д. Ш. Сабилов², И. М. Губайдуллин³

Аннотация. В работе описаны методы расчета параметров молекул фуллерена, которые необходимы для оценки реакционной способности. Используя эти методы разработаны программные комплексы «Polariz» и «Curvature».

Ключевые слова: индексы поляризуемости, углы пирамидальности, локальная кривизна, реакционная способность.

1. Введение

В настоящее время экспериментально изучена реакционная способность только классических фуллеренов (C_{60} и C_{70}), тогда как химические свойства фуллеренов, открытых позже (и потому менее доступных), изучены в основном теоретическими методами исследования [1].

Ранее нами были разработаны теоретические подходы к оценке реакционной способности семейства фуллеренов по отношению к молекулам-диполям (например, озону) с использованием индексов кривизны [2] и индексов поляризуемости [3]. Поскольку эти подходы показали хорошее согласие с имеющимися экспериментальными данными, предполагается их распространение на родственные фуллеренам углеродные наноструктуры (нанотрубки, наноконусы, производные фуллеренов), состоящие из сотен атомов. В связи с этим разработка программных комплексов для анализа реакционной способности с использованием упомянутых теоретических подходов является актуальной задачей.

Программные комплексы «Polariz» и «Curvature» являются составной частью информационно-аналитического подхода для изучения реакционных способностей сложных молекул, комплексов и многостадийных механизмов. Информационно-аналитические системы (ИАС) моделирования и оптимизации каталитических процессов, кроме программных комплексов, включают в себя базы данных (в основном реляционные) и технические средства обработки данных на основе однопроцессорных и многопроцессорных вычислительных систем [4]. В данной работе представлены в основном последовательные алгоритмы ИАС.

2. Программный комплекс «Polariz». Методы расчета и выводы.

Polariz позволяет рассчитать:

¹Магистрант факультета математики и информационных технологий, Башкирский государственный университет, г. Уфа; Albina182007@gmail.com.

²Научный сотрудник лаборатории физико-химических проблем, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; diozno@mail.ru.

³Старший научный сотрудник лаборатории математической химии, Институт нефтехимии и катализа РАН, г. Уфа; irekmars@mail.ru.

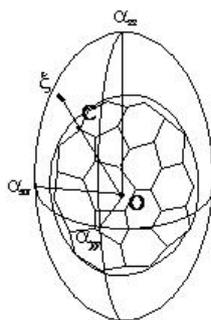
- собственные значения тензора поляризуемости;
- среднюю поляризуемость молекул;
- индексы поляризуемости.

Основное уравнение для расчета индексов поляризуемости реакционных центров имеет вид:

$$\xi = \left(\frac{\sin^2 \psi \cos^2 \varphi}{\alpha_{xx}^2} + \frac{\sin^2 \psi \cos^2 \psi}{\alpha_{yy}^2} + \frac{\cos^2 \psi}{\alpha_{zz}^2} \right)^{-0.5}, \quad (2.1)$$

где ξ - индекс поляризуемости, α_{xx} , α_{yy} , α_{zz} - диагональные компоненты тензора поляризуемости. Для вывода этого уравнения молекулу фуллерена рассматривали в полярной системе координат (вывод уравнения см. [5]).

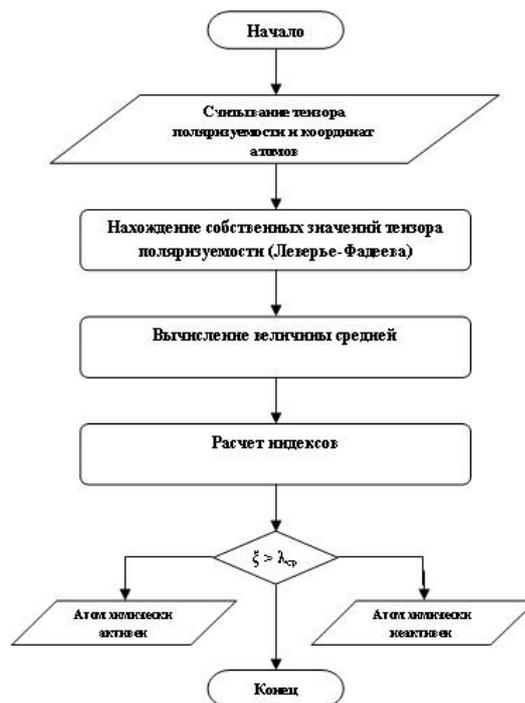
Соответствие эллипсоида поляризуемости \mathcal{E}_Π и модельного эллипсоида \mathcal{E}_Φ , имитирующего молекулу фуллерена, позволяет совместно рассмотреть \mathcal{E}_Π и \mathcal{E}_Φ в полярной системе координат с центром O , являющимся центром масс молекулы фуллерена. Каждому реакционному центру, принадлежащему \mathcal{E}_Φ , можно поставить в соответствие точку, принадлежащую эллипсоиду поляризуемости \mathcal{E}_Π , которая имеет те же, что реакционный центр, угловые координаты ψ и φ (рис. 2.1).



Р и с у н о к 2.1

Совместное рассмотрение молекулы фуллерена и эллипсоида его поляризуемости в полярной системе координат

В программном комплексе входными данными служат координаты атомов и тензор поляризуемости из выходного файла квантово-химического расчета. На первом этапе производится диагонализация тензоров поляризуемости методом Леверье-Фадеева и вычисляется величина средней поляризуемости молекул α_{cp} . Затем происходит расчет индексов поляризуемости ξ и их сравнение с α_{cp} . Если $\xi > \alpha_{cp}$, то атом обладает высокой реакционной способностью, в противном случае атом химически неактивен. Блок-схема, описывающая алгоритм решения задачи представлена на рис. 2.2



Р и с у н о к 2.2

Алгоритм нахождения индексов поляризуемости

Разработанная программа позволила впервые рассчитать поляризуемость и ее анизотропию для наиболее стабильных изомеров производных фуллеренов $C_{60}O$, $C_{60}O_2$, $C_{60}O_3$, $C_{70}O$ [6].

3. Программный комплекс «Curvature». Методы расчета и выводы.

Curvature позволяет рассчитать:

- межъядерные расстояния;
- углы пирамидальности;
- кривизну углеродной поверхности.

Основное уравнение для расчета локальной кривизны k углеродной поверхности (вывод уравнения см. [2]):

$$k = 2 \sin \theta_P / a, \quad (3.1)$$

где θ_P - угол пирамидальности, a - среднее расстояние от реакционного центра до ближайшего атома. Угол пирамидальности θ_P находится по формуле:

$$\theta_P = \theta_{\sigma\pi} - 90^\circ, \quad (3.2)$$

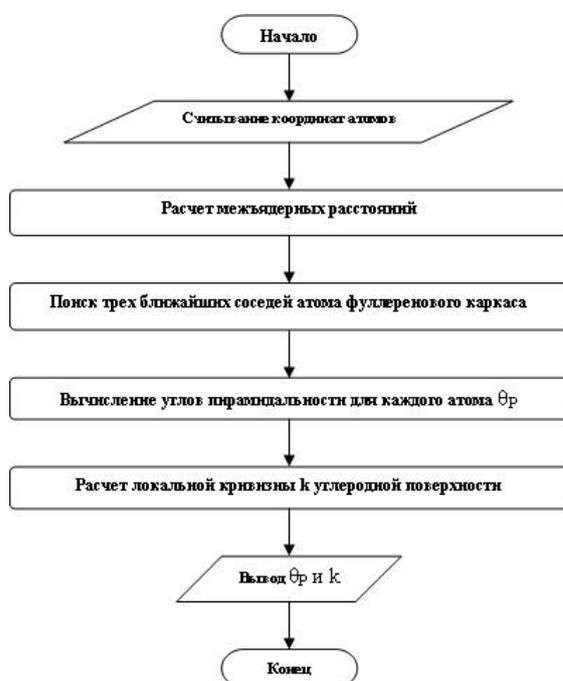
где θ_P - угол между направлениями σ - и π -связей реакционного центра.

В рамках предложенного подхода молекула фуллерена представляется в виде модельной поверхности (сферы, эллипсоида или овалоида, в зависимости от типа симметрии

фуллерена), описанной вокруг углеродного каркаса рассматриваемой молекулы. Для каждой молекулы фуллерена с использованием равновесной геометрии, найденной квантово-химически, строится матрица межъядерных расстояний:

$$\begin{pmatrix} 0 & l_{12} & l_{13} & \dots & l_{1n} \\ l_{21} & 0 & l_{23} & \dots & l_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

где $l_{ii} = 0$, $l_{ij} = l_{ji}$. Далее для каждого атома (для каждой строки матрицы) находится три наименьших ненулевых значения, соответствующих трем ближайшим соседям рассматриваемого атома фуллеренового каркаса. Координаты этих атомов используются для вычисления углов пирамидальности θ_P по формуле (3.2) и далее индекса кривизны по формуле (3.1). Блок-схема алгоритма решения задачи показана на *рис. 3.1*.



Р и с у н о к 3.1

Алгоритм нахождения локальной кривизны углеродной поверхности

Ранее была обнаружена линейная корреляция между тепловыми эффектами реакций присоединения к фуллеренам атомов, радикалов [7] и молекул [2] общего вида:

$$\Delta H_r^\circ = Ak + B, \quad (3.3)$$

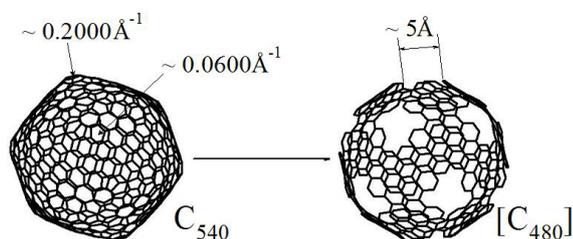
где B - тепловой эффект реакции присоединения к гипотетическому реакционному центру с нулевой кривизной, A - характеристический параметр, определяющий наклон зависимости для реакций присоединения каждого типа.

Для термодинамически наиболее вероятных каналов реакций присоединения $\Delta H_r^\circ < 0$, то есть наиболее реакционноспособными атомами в молекулах фуллеренов являются атомы, удовлетворяющие условию:

$$k < -\frac{B}{A}, \quad (3.4)$$

Используя условие (3.4), проводили «просеивание» атомов составляющих каркасы фуллеренов, что позволило осуществить оценку строения наиболее вероятных продуктов реакций фуллеренов.

Например, в фуллерене C_{540} имеется 12 кораннуленовых фрагментов, характеризующихся кривизной $\approx 0.2000 \text{ \AA}^{-1}$; другие области поверхности кластера C_{540} имеют $k \leq 0.06000 \text{ \AA}^{-1}$ (структура C_{540} оптимизирована с использованием потенциала AMBER в программе GAUSSIAN-98). Рассчитанный тепловой эффект реакции присоединения озона составляет для связей 6.6 кораннуленовых фрагментов $-47 \text{ кДж} \cdot \text{моль}^{-1}$; присоединение озона к связям 6.6 других областей эндотермично ($+213 \text{ кДж} \cdot \text{моль}^{-1}$). Разные знаки тепловых эффектов двух каналов реакции указывают на преимущественное протекание реакции в областях кластера C_{540} с повышенной кривизной, что делает возможным селективный «отжиг» фрагментов, содержащих пятичленные циклы (по аналогии с «отжигом» шапок нанотрубок), с образованием каркасных структур, состоящих только из гексагонов и имеющих достаточные для инкапсулирования отверстия в каркасе (рис. 3.2).



Р и с у н о к 3.2

Углеродные каркасы фуллерена C_{540} и возможного продукта озонового «отжига» участков поверхности C_{540} с максимальной кривизной

4. Заключение

Разработанный программный комплекс позволяет осуществлять надежный прогноз реакционной способности фуллеренов и родственных им каркасных наноструктур (в том числе, состоящих из нескольких сотен атомов) с использованием индексов кривизны и индексов поляризуемости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Sabirov D. Sh., Bulgakov R. G., Khursan S. L. Indices of the fullerenes reactivity. //ARKIVOC (Archive of Organic Chemistry). 2011 (VIII). – P. 200-224.
2. Сабилов Д.Ш., Хурсан С.Л., Булгаков Р.Г. Роль локальной кривизны углеродной поверхности в реакциях 1,3-диполярного присоединения к фуллеренам. // Изв. АН. Серия химическая. – 2008. – №12. – С. 2469-2474.
3. Сабилов Д. Ш., Булгаков Р. Г., Хурсан С. Л., Джемилев У. М. Новый подход к оценке реакционной способности фуллеренов в реакциях 1,3-диполярного присоединения с использованием индексов поляризуемости. // ДАН. – 2009. – Т. 425 – №2. – С. 196-198
4. Губайдуллин И.М., Спивак С.И. Информационно-аналитическая система обратных задач химической кинетики. // Системы управления и информационные технологии. – 2008. – №1.1 (31). – С. 150-153.

5. Сабиров Д. Ш. Интермедиаты озонолиза фуллеренов и реакционная способность фуллеренов в реакциях 1,3-диполярного присоединения // Дисс., канд. хим. наук. Уфа, – 2009, – 128 с.
6. Сабиров Д. Ш., Булгаков Р. Г., Саятгалина А.Д., Поляризуемость кислородсодержащих производных фуллеренов $C_{60}O_n$ ($n = 1 - 3$) и $C_{70}O$: оценка методом теории функционала плотности. // Вест. Башкирск. ун-та. – 2010. – Т. 15. – №3. – С. 615-618.
7. Sabirov D. Sh., Bulgakov R. G., Reactivity of fullerenes family towards radicals in terms of local curvature // Computational and Theoretical Chemistry. – 2011. – V. 963. – №1. – P. 185-190.

Development of a software product for the analysis of reactivity of fullerenes.

© A. D. Saitgalina⁴, D. Sh. Sabirov⁵, I. M. Gubaydullin⁶

Abstract. In this work the methods for calculating the parameters of the fullerene molecules are described. These parameters are necessary for analysis of reactivity of molecules. The program products «Polariz» and «Curvature» are developed using these methods.

Key Words: polarizability indices, angles of pyramidality, indices of curvature, reactivity.

⁴Graduate Faculty of Mathematics and Information Technology, Bashkir State University, Ufa; Albina182007@gmail.com.

⁵Researcher of Physical chemistry researches laboratory, Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS, Ufa; diozno@mail.ru.

⁶Senior Researcher of Mathematical chemistry laboratory, Institute of Petrochemistry and Catalysis of RAS, Ufa; irekmars@mail.ru

Правила оформления рукописей для публикации в журнале «Журнал СВМО»

Обращаем Ваше внимание на то, что указанные ниже правила должны выполняться абсолютно точно. В случае, если правила оформления рукописи не будут выполнены, Ваша статья не будет опубликована.

Текст доклада должен быть набран в издательской системе Т_EX (или одном из ее клонов). Для верстки рукописи следует использовать преамбулу, которую можно получить на сайте <http://www.svmo.ru>.

Объем статьи не должен превышать 10 страниц. Текст статьи должен быть помещен в файл с именем <фамилия автора>.tex (который включается командой `\input` в преамбуле). Например,

```
\input{voskresensky.tex}
```

Содержание преамбулы **изменять нельзя**. Определение новых команд автором статьи **не допускается** для предупреждения конфликтов имен с командами, которые могли бы быть определены в статьях других авторов.

Для оформления заголовка статьи на русском языке следует использовать команду `\headerRus`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerRus{УДК}{название статьи}{автор(ы)}{Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Для оформления заголовка статьи на английском языке следует использовать команду `\headerEn`. Эта команда имеет следующие аргументы:

```
\headerEn{название статьи} {Автор1\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}, Автор2\footnote{Должность, место работы, город; e-mail.}}{Аннотация}{Ключевые слова}
```

Если статья на английском языке, то для оформления заголовка статьи необходимо использовать команду `\headerFirstEn` с такими же параметрами, как для команды `\headerRus`.

Статья может содержать подзаголовки любой вложенности. Подзаголовки самого верхнего уровня вводятся при помощи команды `\sect` с одним параметром:

```
\sect{Заголовок}
```

Подзаголовки более низких уровней вводятся как обычно командами `\subsection`, `\subsubsection` и `\paragraph`.

Следует иметь в виду, что вне зависимости от уровня вложенности подзаголовков в Вашей статье, нумерация объектов (формул, теорем, лемм и т.д.) всегда будет двойной и будет подчинена подзаголовкам самого верхнего уровня.

Для оформления теорем, лемм, предложений, следствий, определений, замечаний и примеров следует использовать соответственно окружения **Th**, **Lemm**, **Prop**, **Cor**, **Defin**, **NB** и **Example**. Если в Вашей статье приводятся доказательства утверждений, их следует окружить командами `\proof` и `\proofend` (для получения строк 'Доказательство.' и 'Доказательство закончено.' соответственно).

Для обозначения пространств следует использовать команды $\backslash\mathbf{R}$, $\backslash\mathbf{Rn}$, $\backslash\mathbf{C}$, $\backslash\mathbf{Z}$, $\backslash\mathbf{N}$ и т.д.

Для вставок букв φ и ε необходимо использовать команды $\backslash\mathbf{phi}$, $\backslash\mathbf{epsilon}$ соответственно. Символы частных производных $\frac{\partial}{\partial x_i}$ и $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ вставляются командами $\backslash\mathbf{px}\{i\}$ и $\backslash\mathbf{pxtog}\{u\}\{i\}$.

Для вставок букв кириллицы в формулы следует использовать команды $\backslash\mathbf{textrm}$, $\backslash\mathbf{textit}$. Например, для вставок формул Γ_i , D_i в текст статьи необходимо набрать команды $\backslash\mathbf{textrm}\{\Gamma\}_i$, $\backslash\mathbf{textit}\{D\}_i$.

Для нумерования формул и создания последующих ссылок на эти формулы необходимо использовать соответственно команды $\backslash\mathbf{label}\{\text{метка}\}$ и $\backslash\mathbf{eqref}\{\text{метка}\}$, где в качестве метки нужно использовать строку следующего вида: 'Фамилия_АвтораНомер_Формулы'. Например, формулу (14) в статье Иванова нужно пометить $\backslash\mathbf{label}\{\mathbf{ivanov14}\}$, теорему 5 из этой статьи — $\backslash\mathbf{label}\{\mathbf{ivanovt5}\}$ и т.п. (Для ссылок на теоремы, леммы и другие объекты, отличные от формул, нужно использовать команду $\backslash\mathbf{ref}\{\text{метка}\}$).

Для вставки в текст статьи рисунков необходимо пользоваться следующими командами:

а) вставка занумерованного рисунка без подписи и с указанием степени сжатости

$\backslash\mathbf{insertpicture}\{\text{метка}\}\{\text{имя_файла.eps}\}\{\text{степень_сжатия}\}$

где **степень_сжатия** число от 0 до 1.

б) вставка занумерованного рисунка с подписью

$\backslash\mathbf{insertpicturewscap}\{\text{метка}\}\{\text{имя_файла.eps}\}\{\text{подпись_под_рисунком}\}$

в) вставка занумерованного рисунка с подписью и с указанием степени сжатости

$\backslash\mathbf{insertpicturecapscale}\{\text{метка}\}\{\text{имя_файла.eps}\}\{\text{степень_сжатия}\}$ **{подпись_под_рисунком}**

г) вставка рисунка без номера под рисунком, но с подписью или нет

$\backslash\mathbf{insertpicturenonum}\{\text{имя_файла.eps}\}\{\text{степень_сжатия}\}$ **{подпись_под_рисунком}**

Все вставляемые картинки должны находиться в файлах в формате EPS (Encapsulated PostScript).

Внимание! Новые правила. Для оформления списка литературы на русском языке следует использовать окружение **thebibliography**.

Список литературы на английском языке оформлять не нужно.

Список литературы на русском языке оформляется в виде последовательности команд $\backslash\mathbf{bibitem}$, имеющих один параметр:

$\backslash\mathbf{bibitem}\{\text{метка для ссылки на источник}\}$

Для приведенного выше примера в качестве метки для пункта 7 в списке литературы нужно использовать строку 'ivanovb7'. Для ссылок на элементы списка литературы необходимо использовать команду $\backslash\mathbf{cite}$ или $\backslash\mathbf{pgcite}$ (параметры см. в преамбуле).

Метки всех объектов статьи должны быть уникальными.

Компиляция журнала производится при помощи MiKTeX 2.9, дистрибутив которого можно получить на сайте <http://www.miktex.org>.

Алфавитный указатель

Ахтямов А. М.	47	Попов В. Н.	81
Викторов С. В.	57	Потапов Д. К.	100
Галеева Г.Я.	36	Починка О.В.	17
Гарипов И. Б.	92	Сабилов Д. Ш.	132
Губайдуллин И. М.	132	Саитгалина А. Д.	132
Кризский В. Н.	8	Саяхова Е. В.	47
Кузнецова А. С.	63	Сафонкин В.И.	108
Кузьмичев Н. Д.	70	Старцев А. Н.	25
Лубышев Ф.В.	36	Сыромясов А. О.	118
Лукашев В. В.	81	Файрузов М.Э.	36
Мавлявиев Р. М.	92	Хусаинова Э. Д.	92
Мирзаев Т. С.	25	Шемякина Т. А.	127
Никонов В. И.	95	Юшканов А. А.	81
Нураниева С. М.	92	Яматов Р. Р.	8